

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

CLARISSA SELIGMAN GOLBERT

ESQUEMAS MULTIPLICATIVOS:  
AS ORIGENS DA MULTIPLICAÇÃO EM ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Porto Alegre

2005

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
FACULDADE DE EDUCAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

CLARISSA SELIGMAN GOLBERT

ESQUEMAS MULTIPLICATIVOS:  
AS ORIGENS DA MULTIPLICAÇÃO EM ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação.

Orientador:  
Prof. Dr. Fernando Becker

Co-orientadora:  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Beatriz Vargas Dorneles

Porto Alegre

2005

**DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO-NA-PUBLICAÇÃO-CIP**

G617e Golbert, Clarissa Seligman

Esquemas multiplicativos: as origens da multiplicação em alunos do ensino fundamental / Clarissa Seligman Golbert. – Porto Alegre: UFRGS, 2005.

f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Faculdade de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação, Porto Alegre, BR-RS, 2005. Becker, Fernando, orient., Dorneles, Beatriz Vargas, co-orient.

1. Matemática – Ensino fundamental . 2. Multiplicação – Ensino fundamental. 3. Esquemas multiplicativos – Construção. 4. Matemática – Conhecimento – Epistemologia genética. I. Becker, Fernando. II. Dorneles, Beatriz Vargas. III. Título.

CDU – 51:37

---

Bibliotecária: Jacira Gil Bernardes – CRB-10/463

CLARISSA SELIGMAN GOLBERT

ESQUEMAS MULTIPLICATIVOS:  
AS ORIGENS DA MULTIPLICAÇÃO EM ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação,  
Faculdade de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação

Aprovada em

---

Prof. Dr. Fernando Becker – Orientador

---

Profª Drª Beatriz Vargas Dorneles – Co-orientadora

---

Profª. Drª. Darli Collares  
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do sul

---

Profª. Drª. Margareth Schaeffer  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

---

Prof. Dr. Paulo Caruso  
Universidade Católica de Pelotas

---

Prof. Dr. Sérgio R.K. Franco  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

## **AGRADECIMENTOS**

Sou profundamente grata

Ao meu orientador

Prof. Dr. Fernando Becker

À co-orientadora

Profª Drª Beatriz Vargas Dorneles

Aos sujeitos desta pesquisa

À Gessilda Cavalheiro Muller

À minha família

## RESUMO

Trata-se de um estudo desenvolvido com o objetivo de esclarecer a construção de esquemas multiplicativos em alunos do Ensino Fundamental, tendo em vista o aprimoramento da aprendizagem da matemática.

Justifica-se a preocupação com a operação de multiplicar, por ser nessa aprendizagem que muitos alunos iniciam uma carreira de insucessos na matemática, uma vez que a multiplicação implica mudanças qualitativamente importantes no desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Foram feitas entrevistas clínicas com 45 sujeitos, de 3<sup>a</sup> a 5<sup>a</sup> série. Buscaram-se respostas para o problema de como acontece o avanço dos conceitos implícitos de multiplicação, relacionados com as seqüências numéricas iniciais para o esquema iterativo de multiplicação, relacionado com a coordenação parte-todo, com a reversibilidade e com a iteração.

Os fundamentos teóricos, na sua maior parte, foram colhidos na Epistemologia Genética. Nesse sentido, foram estudadas, especialmente, as raízes epistemológicas do conhecimento matemático, a natureza e o papel da abstração reflexionante e a tomada de consciência.

As entrevistas clínicas abrangeram a investigação dos esquemas de seqüências numéricas, dos esquemas de unidades compostas, dos esquemas pré-multiplicativos e dos esquemas multiplicativos.

Os resultados mostram que

- o desenvolvimento da multiplicação se inicia com esquemas de seqüências numéricas, passa pelos esquemas de unidades compostas e esquemas pré-multiplicativos, na direção dos esquemas multiplicativos;
- a falta de esquemas prévios compromete o desenvolvimento dos esquemas multiplicativos, pois a multiplicação resulta de modificações nas seqüências de números desenvolvidas pela criança, em qualquer fase do seu desenvolvimento numérico;
- os primeiros esquemas multiplicativos, relacionados com as seqüências numéricas iniciais, envolvem o uso intenso dos dedos e da contagem um a um; quando as crianças utilizam esquemas de seqüências numéricas implícitas, a utilização dos

dedos decresce progressivamente, até que seu uso se torna imperceptível. Por fim, os esquemas consolidam-se. As crianças dão respostas imediatas, não fazendo uso dos dedos, da contagem ou da adição. Vão direto à multiplicação, utilizando esquemas de seqüências numéricas explícitas.

Daqui para diante, um tema importante a ser pesquisado se refere aos fatores que mantêm um número considerável de crianças presas aos esquemas multiplicativos rudimentares, relacionados com as seqüências numéricas iniciais.

**PALAVRAS-CHAVE:** matemática, aprendizagem, multiplicação, esquemas multiplicativos

## ABSTRACT

It is a study developed with the intention of clarifying the construction of multiplicative schemes in Fundamental School students, aiming at the improvement of Mathematics learning.

The concern is justified with the multiplication operation where most students begin an unsuccessful career in their learning process in Mathematics, since multiplication implies qualitatively important changes in the students' cognitive development.

Clinical interviews were made with 45 samples from the 3<sup>rd</sup> and 5<sup>th</sup> grades. The answers were searched for the problem of how the advance of implicit concepts of multiplication happens, related with the initial numeric sequences for the iterative scheme of multiplications, related with the part-all coordination, with the reversibility and with the iteration.

The theoretical bases, most of them, were collected in the Genetic Epistemology. In this respect, the epistemological roots of the mathematical knowledge, the nature and the role of the reflective abstraction and conscience taking were specially studied.

The clinical interviews covered the investigation of numeric sequence schemes, composed unit schemes, the pre-multiplicative schemes and the multiplicative schemes.

The results show that

- the multiplication development starts with the numeric sequence schemes, goes through the composed unit schemes and the pre-multiplicative schemes, in direction of the multiplicative schemes.
- The lack of previous schemes compromises the development of the multiplication schemes, since the multiplication results from modification in the number sequences developed by the child, in any phase of her numeric development.
- The first multiplicative schemes related with the initial numeric sequences, involve the intensive use of the fingers and the counting one to one; when the children use schemes of implicit numeric sequences, the use of fingers decreases progressively, until its use becomes imperceptible. Finally, the schemes get consolidated. The children give immediate answers, not using the finger, the counting or the addition.



They go directly to the multiplication, making use of the explicit numeric sequences schemes.

From now on, an important theme to be researched refers to the factors which maintain a considerable number of children held to the rudimentary multiplicative schemes, related with the initial numeric sequences.

**KEYWORDS:** Mathematics, learning, multiplication, multiplicative schemes

## RESUMEN

Se trata de un estudio desarrollado con el objetivo de aclarar la construcción de esquemas multiplicativos en alumnos de la Enseñanza Básica, teniendo como objetivo el perfeccionamiento del aprendizaje de la matemática.

Se justifica la preocupación con la operación de multiplicar, por ser en ese aprendizaje que muchos alumnos inician una carrera de fracasos en la matemática, ya que la multiplicación implica en cambios cualitativamente importantes en el desarrollo cognitivo de los alumnos.

Fueron hechas entrevistas clínicas con 45 sujetos, del 3º a 5º año. Se buscaron respuestas para el problema de cómo ocurre el avance de los conceptos implícitos de multiplicación, relacionados con las secuencias numéricas iniciales para el esquema iterativo de multiplicación relacionado con la coordinación parte-todo, con la reversibilidad y con la iteración.

Los fundamentos teóricos, en su mayor parte, fueron escogidos en la Epistemología Genética. En ese sentido, fueron estudiadas las raíces epistemológicas del conocimiento matemático, la naturaleza y el papel de la abstracción de la reflexión y la tomada de conciencia.

Las entrevistas clínicas abarcaron la investigación de los esquemas de secuencias numéricas, de los esquemas de unidades compuestas, de los esquemas premultiplicativos y de los esquemas multiplicativos.

Los resultados muestran que

- el desarrollo de la multiplicación se inicia con esquemas de secuencias numéricas, pasa por los esquemas de unidades premultiplicativos, en dirección de los esquemas multiplicativos;
- la falta de esquemas previos compromete el desarrollo de los esquemas multiplicativos, pues la multiplicación resulta de modificaciones en las secuencias de números desarrollados por el niño, en cualquier fase de su desarrollo numérico;
- los primeros esquemas multiplicativos, relacionados con las secuencias numéricas iniciales envuelven el uso intenso de los dedos y del conteo uno a uno, cuando los niños utilizan esquemas de secuencias numéricas implícitas, la utilización de los dedos decrece progresivamente, hasta que su uso se torna imperceptible. Finalmente, los esquemas se consolidan. Los niños dan respuestas inmediatas, no

hacen uso de los dedos, del conteo o de la adición. Van directo a la multiplicación, utilizando esquemas de secuencias numéricas explícitas.

De aquí en adelante, un tema importante a ser investigado se refiere a los factores que mantiene un número considerable de niños presos a los esquemas multiplicativos rudimentales, relacionados con las secuencias numéricas iniciales.

**PALABRAS CLAVE:** matemática, aprendizaje, multiplicación, esquemas multiplicativos

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	13
<b>2 A EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA: UMA QUESTÃO SOCIOISTÓRICA; SUAS ORIGENS BIOLÓGICAS E EPISTEMOLÓGICAS</b> .....	25
2.1 EPISTEMOLOGIA DAS MATEMÁTICAS .....	26
2.2 OS INVENTOS MATEMÁTICOS .....	30
2.2.1 Sobre a Utilidade dos Estudos Matemáticos .....	30
2.3 O QUE É UM NÚMERO? .....	32
2.3.1 Um Pouco de História .....	33
2.3.2 As Origens Neurobiológicas da Matemática .....	38
2.4 MATEMÁTICA E REALIDADE .....	44
<b>3 A NATUREZA DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO</b> .....	46
3.1 A ORIGEM DAS ESTRUTURAS LÓGICO-MATEMÁTICAS .....	47
3.2 ABSTRAÇÃO REFLEXIONANTE .....	53
3.3 A TOMADA DE CONSCIÊNCIA .....	62
3.4 A PSICOGÊNESE DOS CONHECIMENTOS .....	71
3.4.1 Estágios e Subestágios .....	76
3.4.2 O Pensamento Concreto e o Pensamento Formal .....	78
3.5 DECALAGENS HORIZONTAIS E VERTICAIS .....	80
<b>4 MULTIPLICAÇÃO – UMA RECONCEITUAÇÃO DO NÚMERO</b> .....	86
4.1 A LÓGICA INERENTE À APRENDIZAGEM E O PROCESSO DE EQUILIBRAÇÃO .....	87
4.1.1 Modificação dos Esquemas, Equilíbrio, Aprendizagem .....	90
4.1.2 Aprendizagem das Estruturas Lógicas .....	91
4.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE A INICIAÇÃO À MATEMÁTICA .....	91
4.3 DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA .....	96
4.4 PREMISSAS TEÓRICAS DA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA .....	102
4.5 MULTIPLICAÇÃO – UMA ABSTRAÇÃO REFLEXIONANTE .....	108
4.5.1 As Bases do Pensamento Multiplicativo .....	108
4.6 AS REPRESENTAÇÕES INTUITIVAS DAS CRIANÇAS SOBRE A MULTIPLICAÇÃO É DIVISÃO .....	111
4.7 MULTIPLICAÇÃO – UM NOVO SENTIDO DE NÚMERO .....	117
<b>5 DA SEQÜÊNCIA NUMÉRICA INICIAL AO ESQUEMA ITERATIVO DE MULTIPLICAÇÃO</b> .....	120
5.1 A NOÇÃO DE ESQUEMA .....	121
5.2 ESQUEMAS DE SEQÜÊNCIAS NUMÉRICAS .....	131
5.2.1 Esquemas de Contagem Pré-Numéricos .....	133
5.2.2 A Seqüência Numérica Inicial .....	135
5.2.3 A Seqüência Numérica Composta Implícita .....	136
5.2.4 A Seqüência Numérica Composta Explícita .....	139
5.3 ESQUEMAS DE UNIDADES COMPOSTAS .....	141
5.4 ESQUEMA PRÉ-MULTIPLICATIVO .....	143
5.5 ESQUEMAS MULTIPLICATIVOS .....	144
5.5.1 Esquemas de Coordenação de Unidades em Ação .....	145
5.5.2 Esquemas de Coordenação de Unidades Parte-Todo .....	147
5.5.3 Esquema Reversível de Coordenação de Unidades .....	151
5.5.4 Esquema Iterativo de Multiplicação: a Seqüência Numérica Generalizada	152

5.6 ESQUEMAS, CONCEITOS E PROCEDIMENTOS .....	154
5.7 PROPRIEDADES DE ESQUEMAS ITERATIVOS .....	156
5.7.1 Reversibilidade de Esquemas Iterativos .....	156
5.7.2 Flexibilidade dos Esquemas Iterativos .....	157
5.8 CONCEITOS MULTIPLICATIVOS ABSTRATOS .....	158
5.8.1 Propriedades dos Conceitos Abstratos .....	158
5.9 MULTIPLICAÇÃO NA MATEMÁTICA ESCOLAR .....	160
<b>6 METODOLOGIA</b> .....	163
6.1 PROBLEMA .....	164
6.2 QUESTÕES DE PESQUISA .....	164
6.3 OBJETIVO GERAL .....	165
6.4 OBJETIVO ESPECÍFICO .....	165
6.5 AMOSTRA .....	165
6.6 COLETA DE DADOS .....	166
<b>7 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS</b> .....	171
7.1 ESQUEMAS DE SEQÜÊNCIAS NUMÉRICAS .....	172
7.1.1 Esquema de Seqüência Numérica Inicial .....	172
7.1.2 Esquema de Seqüência de Unidade Composta Implícita .....	172
7.1.3 Esquema de Seqüência de Unidade Composta Explícita .....	172
7.2 ESQUEMAS DE UNIDADES COMPOSTAS .....	181
7.2.1 Esquema de Unidade Composta Experiência .....	181
7.2.2 Esquema de Unidade Composta Abstrata .....	181
7.2.3 Esquema de Unidade Composta Iterável .....	181
7.3 ESQUEMAS PRÉ-MULTIPLICATIVOS .....	191
7.3.1 Esquema Pré-Multiplicativo Propriamente Dito .....	191
7.3.2 Esquema de Conceito Implícito de Multiplicação .....	199
7.3.3 Esquema de Coordenação de Unidades em Ação .....	205
7.4 ESQUEMAS MULTIPLICATIVOS .....	212
7.4.1 Esquemas de Coordenação Parte-Todo .....	212
7.4.2 Esquemas Reversíveis de Coordenação de Unidades .....	229
7.4.3 Esquema Iterativo de Multiplicação .....	236
7.5 ANÁLISE GERAL DOS ESQUEMAS INVESTIGADOS .....	241
<b>8 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	258
<b>9 REFERÊNCIAS</b> .....	274
<b>ANEXO</b> .....	277

## INTRODUÇÃO

“Cinqüenta anos de experiência fizeram-nos saber que não existem conhecimentos resultantes de um registro simples de observações, sem uma estruturação devida às atividades do sujeito. Mas também não existem (no homem) estruturas cognitivas *à priori* ou inatas; só o funcionamento da inteligência é hereditário e só engendra estruturas por uma organização de ações sucessivas exercidas sobre objetos. Daqui resultava que uma epistemologia conforme com os dados da psicogênese não poderia ser nem empirista nem pré-formista, mas consiste apenas num construtivismo, com a elaboração contínua de operações e estruturas novas. O problema central é, então, compreender como se efetuam estas criações e porque, visto resultarem de construções pré-determinadas, se podem tornar logicamente necessárias, durante o desenvolvimento.

Jean Piaget

## 1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste estudo é contribuir para o aprimoramento da aprendizagem da matemática, investigando a evolução dos esquemas multiplicativos na criança.

Entre os muitos problemas evidenciados, constata-se que a operação de multiplicação é um ponto crítico na aprendizagem da matemática. Muitos alunos, a partir da 3ª ou 4ª série, iniciam uma carreira de insucessos, por conta de defasagens no pensamento multiplicativo. Optei, então, por enfrentar o desafio e tentar compreender por que a multiplicação é difícil para tantos alunos.

Sabia-se que desde muito cedo, em torno dos seis anos, as crianças podem compreender relações multiplicativas de um modo intuitivo, fazendo a correspondência um-para-muitos, como no caso da distribuição de três balas a cada uma de quatro crianças, por exemplo. Faltava esclarecer como esses esquemas iniciais evoluem, dando lugar a construções mais abstratas; é nisso se concentra o presente estudo.

Preocupo-me com a multiplicação, por ela se constituir num dos filtros seletivos que separa os “bons” dos “maus” alunos na matemática. Os obstáculos na multiplicação, por sua vez, comprometem o avanço para a divisão, frações, medidas e demais conhecimentos e habilidades. O que está em jogo, porém, é, de um modo geral, o ensino e a aprendizagem da matemática, a qual faz parte da experiência diária dos indivíduos. Há alunos que superam o fracasso na escola, fazendo uma separação entre a matemática escolar e a matemática da vida. Outros nunca se libertam dos sentimentos negativos internalizados.

Há cerca de trinta anos desenvolvo atendimento psicopedagógico junto a crianças e adolescentes com problemas de aprendizagem em geral e,

conseqüentemente, da aprendizagem da matemática. Desde 1990, oriento estudos de caso nas disciplinas Psicopedagogia Terapêutica I e II do Curso de Pedagogia, em que aparecem as dificuldades na aprendizagem da matemática. Coordeno projetos de pesquisa e extensão na Faculdade de Educação da UFRGS voltados para as operações infralógicas e lógico-matemáticas de pensamento. E, a partir de 1995, venho me dedicando à divulgação de jogos matemáticos criados ao longo da experiência clínica. Nesse sentido, em 1999, iniciei um programa de cursos de extensão para professores da rede pública e privada e um programa de oficinas com jogos matemáticos para alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental. Toda essa experiência tem me conduzido à percepção da extensão do problema, na medida em que me deparo com:

- a ênfase nos algoritmos e a utilização de livros-texto, de valor didático discutível, como principais recursos de ensino;
- o despreparo dos professores em relação, tanto ao ensino da matemática, quanto ao próprio conhecimento matemático;
- as conseqüências de tudo isso para os alunos, que não aprendem, apenas mecanizam e por isso esquecem, e, sobretudo, odeiam a matemática e, a partir dessa experiência, internalizam sentimentos negativos sobre si próprios.

Os (des)caminhos da educação matemática vêm perpetuando-se através do tempo, nos mais distintos espaços geográficos e diferentes sistemas de ensino. No Informe Cockcroft – um conjunto de pesquisas realizadas na Inglaterra, destinadas a elucidar os problemas na aprendizagem da matemática – os pesquisadores esforçavam-se para tranquilizar as pessoas entrevistadas. Mesmo assim, a metade delas negou-se a participar, manifestando franca aversão por atividades matemáticas. Tarefas simples provocaram ansiedade, medo e até mesmo culpa nos



entrevistados. O mais grave de tudo é que a investigação evidenciou que muitos adultos não possuíam uma competência numérica funcional (Rivière, apud Coll et. al., 1995)

No Brasil, o problema se traduz em índices quantitativa e qualitativamente alarmantes: a avaliação realizada pelo Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar, do estado de São Paulo, em 1997, revelou que apenas 2% dos alunos de 8ª série eram capazes de fazer cálculos, utilizando todas as operações, e que 85% dos alunos tinham dificuldade com a multiplicação na 8ª série. Os níveis de desempenho em matemática no País, relativos ao ano de 1999, fornecidos pelos SAEB, não são mais animadores: ao final da 8ª série, os alunos dominam as operações com números naturais, identificam os elementos das figuras geométricas e manipulam o sistema monetário. Somente na 3ª série da escola média, dominam o sistema de numeração decimal, interpretam dados apresentados em gráficos e calculam áreas por composição e decomposição.

Dados mais recentes continuam preocupando: o INEP, em 2003, 52% dos estudantes brasileiros estão em situação crítica ou muito crítica, em matemática.

Evidentemente, não se pode esquecer que o colapso do ensino público se enraíza numa conjuntura sociopolítica, na qual o descaso com a educação faz parte da manutenção do "status quo". Entretanto, em que pesem essas adversidades, mais produtivo é ir além do terreno das denúncias e analisar os fatores intra-escolares, teórico-metodológicos, que agravam a situação.

O Informe Cockcroft, já mencionado, afirma que a matemática é difícil de ser ensinada e de ser aprendida em virtude das suas exigências cognitivas: o seu caráter hierárquico e as necessidades de atenção, memória, prática continuada.

Se a matemática é difícil de ensinar e de aprender, as práticas escolares acrescentam mais obstáculos. A matemática escolar segue uma trajetória desgastante, descontextualizada, exigindo esforços de atenção e memória, independente dos interesses e possibilidades dos alunos. Mesmo nas escolas em que as primeiras experiências se fundamentam na ação da criança sobre objetos físicos, repentinamente, essas explorações são substituídas pelas formalizações matemáticas, e o ensino passa a se concentrar nos algoritmos, nos procedimentos, nos problemas verbais. No entanto, sabe-se que uma das questões mais delicadas é a que se refere ao modo como a criança se transporta do mundo dos objetos concretos para as formalizações matemáticas.

Em relação ao ensino da matemática, Piaget deixou-nos um precioso legado e alguns problemas. Em várias de suas obras, como *A Gênese do Número na Criança* (1941), *Lógica e Conhecimento Científico* (1967), *Abstração Reflexionante* (1977), entre outras, esclareceu a psicogênese das estruturas matemáticas, demonstrando como evoluem as formas de pensamento que sustentam os avanços conceituais. Ficaram os educadores com a difícil tarefa de adequar o ensino ao que ele descobriu sobre a gênese dos conceitos matemáticos.

Por longo tempo, com raras exceções, pouco foi feito nesse sentido. Felizmente, nos últimos anos, pode-se constatar um movimento de revigoração na pesquisa sobre o ensino e a aprendizagem da matemática. Surgem estudos não só mostrando o quanto vai mal a matemática escolar, mas também apontando caminhos para a reformulação. A maior parte dos pesquisadores comprometidos com a renovação da aprendizagem da matemática são construtivistas, de modo que há uma convergência de pontos de vista quanto à importância atribuída à atividade construtiva da criança em lugar da transmissão verbal.

Como alertam Nunes e Bryant (1997), é certo que as calculadoras e os computadores tenham facilitado o cálculo, mas ser numeralizado, na sociedade contemporânea, vai muito além de saber calcular. Implica, por exemplo, a possibilidade de pensar algebricamente o uso de *softwares* ou pensar em termos de funções para compreender dados expressos em gráficos. Como dizem os autores:

Ao projetar um currículo que transforme os nossos jovens para o mundo de hoje, podemos ter de lembrar continuamente que a matemática que as crianças aprendem deve lhes dar acesso a novos meios de pensar e deve aumentar seu poder de pensar matematicamente. (NUNES; BRYANT, 1997, p. 32)

É com tal propósito que levo avante este estudo. Para muitos, a multiplicação, assim como a divisão, são operações a serem ensinadas aos alunos, depois da adição e da subtração. Esta é uma maneira muito simples de ver as coisas. Na verdade, a multiplicação e a divisão implicam importante transformação qualitativa no pensamento das crianças (PIAGET et al., 1995).

No presente estudo abordo os primórdios do pensamento multiplicativo, permanecendo, então, dentro dos limites das situações de correspondência um-para-muitos. Mesmo assim, defronto-me com complexas questões na passagem das seqüências numéricas iniciais para as unidades compostas, para os esquemas pré-multiplicativos e, finalmente, para os esquemas multiplicativos.

O trabalho compõe-se de duas partes. A primeira contém os fundamentos teóricos, que são apresentados em quatro capítulos.

O primeiro capítulo inicia com a busca das raízes epistemológicas do conhecimento matemático (PIAGET, 1980). Seguem-se as idéias de Leray (apud PIAGET, 1980) sobre a utilidade dos estudos matemáticos, no sentido de que as

teorias científicas elaboram-se e desenvolvem-se como um processo independente do papel econômico ou social que poderão desempenhar.

Continuando o primeiro capítulo, apresento a posição de Hersh (DEHANE, 2001), para quem a matemática não é física nem mental, mas social, parte da cultura, parte da história.

A partir daí busco as origens históricas e biológicas da matemática. A história indica que, desde os seus primórdios, a raça humana lidou com noções de número, grandeza e forma (BOYER, 1996). O capítulo finaliza com o ponto de vista neurobiológico, cujos avanços atestam que a matemática elementar tem rudimentos biológicos. A questão é a superação dessas bases rudimentares na direção dos conceitos abstratos, procedimentos exatos e pensamento inferencial e, sobretudo, o papel que a educação desempenha nessa evolução (DEHANE, 2001).

O segundo capítulo também se fundamenta no construtivismo piagetiano e versa sobre a natureza do conhecimento matemático. Inicia com a discussão sobre a significação biológica das estruturas lógico matemáticas, com base nas teses de Piaget (2000) apresentadas em *Biologia e Conhecimento*. A abordagem piagetiana atesta que os conhecimentos lógico-matemáticos não pertencem, exclusivamente, à hereditariedade ou à experiência. A necessidade nem sempre decorre de aspectos herdados, ou seja, pode decorrer da auto-regulação. Sendo assim, o conhecimento lógico-matemático é construção que procede por abstração reflexionante.

O capítulo prossegue com a consideração da natureza e do papel da abstração reflexionante, conforme foi elaborado por Piaget (1995), a qual faz parte da natureza do conhecimento matemático, pois sustenta as atividades cognitivas do sujeito – esquemas ou coordenações de ações, operações, estruturas.

Da abstração reflexionante passo à tomada de consciência, pois esta tem um papel relevante na compreensão do conhecimento matemático, na medida em que se refere às relações entre ação e pensamento. Na visão de Piaget (1977), a ação é uma forma de conhecimento autônomo, passível de se organizar sem tomada de consciência dos meios utilizados.

Na seqüência, teço considerações sobre o pensamento concreto, a forma de pensamento mais encontrada entre as crianças pesquisadas. Concluo, com Inhelder e Piaget (1976, p. 187), “que o pensamento operatório concreto, comparado ao pensamento pré-operatório ou intuitivo, se caracteriza por uma extensão do real na direção do virtual”.

O capítulo finaliza com as noções de decalagens horizontais e verticais, formuladas por Piaget (1973) para marcar os deslocamentos e as possíveis instabilidades entre as linhas de desenvolvimento.

Dedico o terceiro capítulo da primeira parte ao estudo da aprendizagem, de um modo geral e ao da multiplicação de um modo específico. Dou início ao capítulo abordando a lógica inerente à aprendizagem e o processo de equilibração, no sentido de que a aprendizagem *stricto sensu* e as equilibrações constituem a aprendizagem *lato sensu*, que se confunde com o desenvolvimento (PIAGET, 1974).

O capítulo prossegue com considerações sobre a iniciação à matemática. Sobre esse tema, Piaget (1998) mostra-se mais favorável a um ensino de matemática que se aproxime das operações naturais do sujeito do que ao ensino tradicional.

A partir daí, sigo para a discussão sobre as dificuldades na aprendizagem da matemática. Nesse debate, trago a posição de Piaget (1976) de que a falta de aptidão para a matemática deve-se ao modo como é ensinada, pois a escola falha

em ajustar os programas e métodos às estruturas próprias à inteligência da criança, construídas na ação espontânea. Ainda neste item, trago o pensamento de Stella Baruk (1996), que não poupa críticas à falta de sentido no ensino da matemática.

O capítulo segue com duas premissas teóricas da aprendizagem da matemática, conforme Steffe (1994). Na primeira as crianças usam os esquemas já disponíveis em que, apesar das explicações do professor sobre métodos mais adequados, persistem, quando confrontadas com situações matemáticas, na utilização de seus esquemas prévios. A segunda é que qualquer conhecimento que implica ações e operações precisa, conforme fundamenta o construtivismo, ser ativamente construído pelos estudantes.

Ainda no campo da teoria, o capítulo traz as bases do pensamento multiplicativo, situando a multiplicação como uma abstração reflexionante (PIAGET, 1995). Para Piaget, a multiplicação numérica requer a abstração das qualidades dos objetos concretos e a compreensão das relações “n vezes x”, que se elabora por um conjunto de abstrações reflexionantes.

Isso não significa que as crianças não tenham representações intuitivas sobre multiplicação e divisão. Elas as têm, como foi mostrado por Mulligan e Michelmore (1997); é com esse tópico que darei continuidade ao terceiro capítulo. Estudos recentes mostram que as crianças, já na escola infantil, podem resolver uma variedade de problemas multiplicativos sobre operações de multiplicação e divisão; portanto, muito antes da instrução formal.

Mesmo com a existência dessas representações intuitivas, a compreensão da multiplicação e da divisão implica uma importante transformação qualitativa no pensamento da criança (NUNES; BRYANT, 1997). Com esse tema, encerro o terceiro capítulo.

O quarto capítulo vai do esquema de seqüência numérica inicial ao esquema iterativo de multiplicação. A primeira parte do capítulo trata da noção de esquema, tal como foi definida por Piaget (1978), ou seja, o esboço das ações suscetíveis de serem repetidas ativamente.

Depois de tratar da noção de esquema, de um modo geral, detenho-me nos esquemas de seqüências numéricas (OLIVE, 2001). Na seqüência numérica inicial os objetos a serem contados precisam ser visualizados. Na seqüência numérica implícita, há meios de controlar a contagem para a frente, na forma de uma dupla contagem. Uma evidência da seqüência numérica explícita é a simbolização da relação de inclusão, no sentido de que, dado um segmento correspondente a 9 e uma unidade composta 7, esta unidade composta 7 pode ser extraída do 9 e, ao mesmo tempo, permanecer no 9.

Dou continuidade ao capítulo apresentando os três tipos de unidades compostas identificadas por Steffe (1994), que fazem a passagem das seqüências numéricas iniciais para esquemas pré-multiplicativos e multiplicativos, quais sejam, os esquemas de unidade composta experiencial, os esquemas de unidade composta abstrata e os esquemas de unidade composta iterável.

Também segundo Steffe (1994), identifico os esquemas pré-multiplicativos e multiplicativos. Nos primeiros, uma unidade composta é distribuída sobre os elementos da outra, de forma tal que as unidades são coordenadas somente em ação. Já nos esquemas multiplicativos, duas unidades compostas são coordenadas de tal modo que uma das unidades compostas é distribuída sobre os elementos da outra, antes de o esquema ser ativado, ou seja, as unidades são coordenadas através de um conceito ou esquema de multiplicação.

O quarto capítulo dessa primeira parte encerra com considerações sobre a matemática escolar. Nesse item explico, conforme Steffe e Cobb (1998), porque é um erro ir direto ao algoritmo-padrão e ignorar os algoritmos inventados pela criança, uma vez que os algoritmos-padrão devem ser fundamentados nos conceitos e esquemas por ela construídos.

A segunda parte do trabalho traz a metodologia, a descrição dos dados, a análise e as considerações finais.

No quinto capítulo apresento a metodologia. Início com o problema: ***Como acontece o avanço dos conceitos implícitos de multiplicação, relacionados com as seqüências numéricas iniciais, para o esquema iterativo de multiplicação, relacionado com a coordenação parte-todo, com a reversibilidade e com a iteração?*** Do problema são extraídas as questões de pesquisa e o objetivo geral do trabalho, que é o de contribuir para o aprimoramento do ensino da matemática, trazendo esclarecimentos sobre o processo epistemológico da multiplicação.

Ainda no quinto capítulo descrevo como foi composta a amostra de 45 sujeitos e exponho o roteiro da entrevista clínica semi-estruturada tal como foi desenvolvida. Também nesse tópico, teço algumas considerações sobre o método clínico e sobre a entrevista clínica. Na entrevista clínica semi-estruturada observei as condutas que consistiam em ações ou palavras e intervim sempre que o sentido dessas ações ou palavras precisava ser desvendado.

O sexto capítulo traz a descrição dos dados e a análise dos mesmos. Para cada grupo de esquemas pesquisados apresento, inicialmente, os resultados gerais, e depois as respostas específicas referentes aos esquemas iniciais, intermediários e consolidados, bem como exemplos de cada caso. Após os resultados, analiso os



dados colhidos, primeiro parcialmente, segundo blocos de esquemas. Completando a análise, faço um resumo que denominei de análise geral dos esquemas investigados.

No sétimo capítulo, encerro o trabalho com as considerações finais, que retomam o problema e os objetivos, e apresento as conclusões.

## CAPÍTULO 2

“De um ponto de vista evolutivo, o mecanismo mais antigo de tomada de decisão pertence à regulação biológica básica; o seguinte, ao domínio pessoal e social; e o mais recente, a um conjunto de operações abstrato-simbólicas em relação com os quais podemos encontrar o raciocínio artístico e científico, o raciocínio utilitário-construtivo e os desenvolvimentos lingüísticos e matemático. Mas, apesar dos milênios de evolução e de os sistemas neurais dedicados poderem conferir alguma independência a cada um desses ‘módulos’ de raciocínio e tomada de decisão, suspeito que eles se encontram todos interligados. Quando presenciamos sinais de criatividade nos seres humanos contemporâneos, estamos provavelmente testemunhando o funcionamento integrado de diversas combinações desses dispositivos”.

Antônio Damasio

## 2 A EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA: UMA QUESTÃO SOCIOISTÓRICA; SUAS ORIGENS BIOLÓGICAS E EPISTEMOLÓGICAS

### 2.1 EPISTEMOLOGIA DAS MATEMÁTICAS

Esta discussão teórica começa com a busca das raízes epistemológicas do conhecimento matemático.

Piaget (1980 et. al.) chega a essas raízes, coordenando o geral, de natureza lógica, e o elementar psicogenético, ou seja, combinando a análise lógica com uma análise genética. Tanto é assim que, sobre a construção do número natural, o autor sustenta que

podem-se considerar as matemáticas como um sistema de construções que se apóiam igualmente nos seus pontos de partida nas coordenações das ações e das operações do sujeito, e procedendo por uma sucessão de abstrações reflexionantes de níveis cada vez mais elevados (PIAGET et al., 1980, p. 339).

Isso porque os números naturais são números inteiros, acessíveis ao conhecimento espontâneo da criança. É um conhecimento que parece constituir um ponto de partida pré-científico, com validade para uma construção propriamente aritmética.

Oferecendo um primeiro exemplo de construção matemática resultante das ações e operações do sujeito, Piaget demonstra que antes dos sete ou oito anos, nos níveis pré-operatórios, a criança não atinge uma noção racional do número, mesmo sabendo contar oralmente. Isso porque ela não atinge a conservação dos conjuntos numéricos: depois de fazer corresponder duas filas de cinco fichas, poderá admitir que uma fila repartida em 3 e 2 será maior que a outra. Ela acredita que o número mudou ou que a quantidade aumentou. Em torno dos sete ou oito

anos, a criança atinge a noção operatória de número, apoiando-se em duas estruturas operatórias, prévias ou contemporâneas, de natureza puramente lógica ou “qualitativa”.

A primeira dessas estruturas é o agrupamento aditivo de classes, princípio da classificação. O sinal (+) designa a reunião das classes elementares disjuntas A, A', B', e o sinal (-), a sua dissociação. A segunda estrutura é a seriação, ou seja, o encadeamento das relações aritméticas transitivas.

Assim, para Piaget, o número surge da síntese da classificação e da seriação num sistema único. Na sua análise, o autor ressalta que a condição para a realização dessa síntese é a abstração das qualidades, a eliminação das diferenças, da equivalência entre todos os elementos A, A', B', o que permite considerá-los como “unidades”. Sem dúvida, quando a criança se acha diante de elementos equivalentes, como peças de um jogo da mesma cor e do mesmo tamanho, a única maneira de distingui-los é a consideração de um de cada vez, no espaço e no tempo, ou seja, de seriá-los. O sistema dos números inteiros se constitui por transformações dos elementos dos agrupamentos em unidades aritméticas.

Esta gênese psicológica foi, por outro lado, formalizada por J.B.Grize e ele insiste no fato de que o número não é então deduzido dos agrupamentos, mas construído por uma síntese num sentido quase hegeliano, o que comprova bem neste ponto o sucesso do construtivismo face ao reducionismo (PIAGET et al., 1980, p. 342).

É preciso considerar que a síntese em questão se efetua progressivamente. P. Gréco observou a compreensão de algumas propriedades numéricas elementares, tais como a alternância dos números pares e ímpares, a comutatividade, a diferença constante entre um número N e o sucessor do seu sucessor. Porém essas propriedades são, inicialmente, descobertas para os

números de 1 a 7 ou 8 e não são generalizadas, de imediato, aos números seguintes. Aos sete anos, a série de 1 a 8 está quase estruturada, com coordenação da sucessão e da iteração.

Nessa etapa, observa Piaget, a série de 8 a 14 ou 15 é só uma série ordenada de termos eqüidistantes e a iteração não é utilizada para previsões. Ainda nessa fase, a seqüência de 15 a 30 ou 40 não passa de uma série ordenada, sem reconhecimento da iteração. Para além de 30 ou 40, nem mesmo a ordem está pronta.

É evidente que dos sete ou oito aos nove ou dez anos, a série alonga-se, mas registram-se, ainda, defasagens. Enfim, a série dos inteiros constitui-se por volta dos onze ou doze anos. Como se vê, a síntese se efetua gradualmente, por uma aritmetização progressiva.

Lembrando os trabalhos da escola de Bourbaki, Piaget explica que a matemática contemporânea constitui uma teoria geral das estruturas, consideradas independentemente da natureza dos seus conteúdos. Na base encontram-se três “estruturas-mãe”, irredutíveis entre si. Destas derivam estruturas particulares. São as seguintes as estruturas-mãe:

- 1) as estruturas algébricas, cujo protótipo é o “grupo”, caracterizado pela composição operatória, pela reversibilidade, pela associatividade e pela presença de um elemento neutro;
- 2) as estruturas de ordem, ou seja, as relações, das quais uma forma importante é a rede ou o reticulado;
- 3) as estruturas topológicas, que se constituem sobre as noções de vizinhança, limite e continuidade.

A análise genética indica que as estruturas iniciais são as mais elementares, servindo de ponto de origem a uma série ininterrupta de abstrações reflexionantes e de construções, de modo que os agrupamentos de classes e de relações surgem como pontos de partida da construção do número.

A questão posta por Piaget é se existem relações entre o mais fundamental, do ponto de vista formal, e o mais elementar, do ponto de vista genético. Se existirem tais relações, poder-se-ão encontrar três espécies de estruturas elementares, ou seja, casos particulares ou “representações” das estruturas algébricas, de ordem e topológicas.

Os fatos indicam que existem tais relações. Os esquemas dos comportamentos sensório-motores ou das intuições pré-operatórias já apresentam algumas características algébricas, ordinais e topológicas irreduzíveis entre si. As primeiras estruturas propriamente operatórias que se constituem em torno dos sete ou oito anos servem de passagem a todas as construções posteriores. Piaget adverte que essas estruturas, que não são produtos escolares, constituem uma condição prévia de adaptação à escola. Consistem no acabamento de toda uma organização anterior espontânea e ponto de partida de aquisições posteriores.

As três estruturas irreduzíveis desse nível são:

- 1) os agrupamentos aditivos e multiplicativos de classes, ou sejam, estruturas que recaem sobre os objetos e não sobre as relações;
- 2) estruturas que se referem a relações;
- 3) estruturas cuja composição não se assenta nas semelhanças e diferenças. São os sistemas de operações espaciais, que se constituem de intuições topológicas elementares, tais como fechamentos, envolvimentos, fronteiras, continuidade, etc.

Constata-se, assim,

que existe uma analogia nítida entre o fundamental matemático, sob a forma das três estruturas-mãe e o elementar genético, sob a forma de três espécies de estruturas operatórias em presença não na consciência do sujeito, mas nas suas coordenações espontâneas de ações ou de operações (PIAGET et al., 1980, p. 348).

## 2.2 OS INVENTOS MATEMÁTICOS

### 2.2.1 Sobre a Utilidade dos Estudos Matemáticos

Leray (1980) sustenta que a matemática é útil devido às necessidades das ciências e das técnicas. Mesmo que esteja crescendo o número de matemáticos, estes são cada vez mais necessários, pois o ritmo das descobertas se acelera. Mas o autor ressalva que dedicar-se às matemáticas somente pela sua utilidade pode levar a uma cruel decepção. Os gregos estudaram a elipse dois mil anos antes que Kepler descobrisse a sua primeira aplicação importante: as leis dos movimentos dos planetas, das quais Newton deduziu a mecânica. Nos grandes progressos científicos,

um problema ou uma descoberta técnicos sugerem uma teoria científica; esta elabora-se e desenvolve-se segundo a sua natureza própria, tal como um organismo vivo é concebido e cresce segundo um processo independente do papel econômico ou social que poderá desempenhar; depois, muito mais tarde, essa teoria encontra aplicações (LERAY, 1980, p. 386).

Sendo assim, quanto mais inesperadas, mais importantes são as teorias. Mais tarde, homens de ação e os técnicos descobrem a utilidade das descobertas feitas. O ato verdadeiramente original deve ser muito diferente de todo o ato considerado útil.

Na sua linha de argumentação, Leray (1980, p. 387) é categórico ao afirmar que “desprezar todos os atos inúteis é desencorajar os progressos fundamentais”. O autor dá como exemplo Cardan, que pareceu absurdo e perigoso quando calculou, com números imaginários, com propriedades aparentemente incoerentes, que foram teorizados e definidos tão lentamente. Porém, sem essa teoria, o eletrotécnico de hoje não poderia empregar a corrente alternada que alimenta lares e fábricas.

Leray recomenda que se aceite uma definição ampla das matemáticas. O critério para se julgar o valor de uma teoria matemática não pode levar em consideração a utilidade. E cita H. Poincaré, que em *Science et méthode* diz que “inventar é discernir, é escolher... Os fatos matemáticos dignos de ser estudados são os que nos revelam parentescos insuspeitos com outros fatos, há muito conhecidos, mas que erradamente se julgava serem estranhos uns aos outros” (Poincaré, apud LERAY, 1980, p. 387).

As matemáticas podem ser justificadas pela doutrina da arte pela arte. Por outro lado, nossa civilização está na dependência de técnicas que fazem uso de matemáticas variadas e complexas. Mais do que nunca são necessários homens que compreendam as matemáticas. Entretanto, só se pode aprendê-las redescobrimo-as, com a ajuda de professores e de livros. Só se pode dominá-las depois de fazê-las progredir um pouco. Nossa cultura incentiva a investigação matemática porque necessita de homens com profunda experiência do mundo lógico e abstrato. Consciente dessa necessidade, o matemático tem prazer em satisfazê-la. Ele inventa e publica matemáticas para ter maior poder lógico que os seus antecessores e para comunicá-lo aos seus sucessores (LERAY, 1980).



### 2.3 O QUE É UM NÚMERO?

O que é dois? O que é três? Um pré-escolar poderia responder a essa pergunta levantando dois ou três dedos e estaria dando uma boa resposta a uma pergunta mal formulada.

A questão a ser formulada deveria ser “que tipo de coisa é um número?” e teríamos duas respostas básicas: é algo que está “fora”, como uma pedra ou uma nuvem, ou é algo que está “dentro” da mente. Entretanto, um número não é nada que esteja “fora”; não há nenhum lugar onde ele esteja ou nenhuma coisa que ele seja. Também um número não é somente um pensamento, porque dois e dois são quatro, independente de sabermos ou não. Ainda, ele não existe sem que um sujeito o afirme.

Quando se pergunta: “O que é um número ?” a questão se aplica igualmente bem a um triângulo, a um círculo, a uma função ou a um operador. Sabe-se muito sobre essas coisas, mas o que são elas? Que tipo de coisa são?

Para o matemático Reuben Hersh (DEHANE, 2001), quando se diz que um objeto ou entidade matemática é completamente externa, independente do pensamento ou ação humana, ou então que é interno, um pensamento que se passa na mente, não se está falando de números, mas da existência, e que há somente dois tipos de existência. Tudo é interno ou tudo é externo. E, posta essa dicotomia ou polaridade, os números não se ajustam e aí está o enigma. A questão tornou-se difícil pelo falso pressuposto que há somente dois tipos de coisas à nossa volta.

Saindo do campo filosófico, ficando apenas no campo do real, se perguntarmos o que há em volta, veremos que há bilhetes de transporte que temos que pagar, notícias que escutamos pela TV, um casamento para ir, uma conta a

pagar. Nenhuma dessas coisas está só em nossa mente e nenhuma delas é externa ao pensamento ou atividade humana. Elas constituem uma realidade diferente, mais relacionada com a sociologia e antropologia do que com a metafísica. Na visão de Hersh, a matemática não é física nem mental, é social. É parte da cultura, é parte da história, como o direito, a religião, o dinheiro, como todas as coisas muito reais, que são reais somente enquanto partes da consciência humana coletiva. Sendo parte da sociedade e da cultura, é tanto interna quanto externa, pois diz respeito à interação.

Além da pergunta “O que é um número?” poderiam ser formuladas outras tantas questões: em que sentido os objetos matemáticos existem? como podemos conhecer os objetos matemáticos? as entidades matemáticas existem para sempre, independente da ação e conhecimento humano? – questões essas que dificilmente poderiam ser respondidas somente dentro do quadro teórico da pesquisa filosófica.

A matemática, seus objetos, sua história, sua aprendizagem, sem dúvida, constituem questões filosóficas, por um lado. Mas também se pode buscar definir a natureza da matemática de um modo mais concreto, mais aberto à investigação científica, utilizando a pesquisa histórica e a neurociência, por exemplo.

### 2.3.1 Um Pouco de História

Começemos pelas informações históricas, tais como são apresentadas por Boyer (1996), para quem desde os seus primórdios, a raça humana lidou com noções de número, grandeza e forma.

Vislumbres de noções matemáticas datam de milhões de anos antes da humanidade, e distinções de número, tamanho, ordem e forma não são

capacidades especificamente humanas. Algumas espécies de pássaros podem distinguir conjuntos de até quatro elementos. Já em 1871, Darwin apontava o que hoje se comprova com apurada tecnologia, ou seja, que os animais superiores possuem memória e rudimentos de um sentido matemático.

A matemática resulta de questões da vida diária do homem e “se há validade no princípio biológico da sobrevivência dos mais aptos, a persistência da raça humana, provavelmente, tem relação com o desenvolvimento de conceitos matemáticos” (BOYER, 1996, p. 1). É provável que as primeiras noções de número, grandeza e forma estejam relacionadas com os contrastes, desigualdades, tais como a diferença entre um lobo e muitos lobos, entre uma sardinha e uma baleia, e assim por diante.

Também é possível que, das muitas experiências caóticas, os homens tenham começado a perceber analogias e a identificar o contraste entre um carneiro e um rebanho, entre uma árvore e uma floresta, bem como a colocar pares em correspondência termo-a-termo. É por isso que nossos mais antigos antepassados, assim como alguns povos primitivos até hoje, contavam somente até dois; o que ia além disso eram “muitos”.

A necessidade de expressar a idéia de número, essa propriedade que certos conjuntos têm em comum, levou os homens a utilizarem os dedos da mão para indicar conjuntos de dois, três, quatro e cinco elementos, já que o 1 não era reconhecido como número. Assim como o uso dos dedos de uma mão favoreceu a contagem até cinco, os dedos das duas mãos abriram caminho para a contagem até dez, dando origem às bases numéricas.

Nem sempre os dedos das mãos e dos pés eram suficientes para dar conta da necessidade de contagem. Então, passaram a utilizar pedras, em geral

agrupadas de cinco em cinco, para representar a correspondência entre dois conjuntos. Evidentemente, a compreensão dessa propriedade dos grupos a qual chamamos de número e a necessidade de registrá-la resulta de uma evolução gradual cuja origem é tão antiga quanto o uso do fogo.

As contagens de dois em dois ou de três em três foram as mais antigas, logo suplantadas por contagem de cinco em cinco e, principalmente, de dez em dez, provavelmente pelo fato de termos dez dedos nas mãos.

Como era difícil conservar a informação com o uso de pedras, o homem pré-histórico passou a utilizar marcas em bastões e ossos. Num sítio arqueológico situado na República Tcheca, foi encontrado um osso de lobo com cinquenta e cinco incisões, dispostas em duas séries, uma de vinte e cinco e outra de trinta, sendo que as incisões estavam agrupadas de cinco em cinco. Descobertas arqueológicas desse tipo levam Boyer a considerar que a idéia de número é mais antiga que a escrita, que o uso de metais, que a invenção da roda.

A linguagem também dá provas dessas idéias primitivas, como “eleven”, que significa um a mais, e “twelve” que indica dois a mais. “Oito”, uma palavra indo-germânica, é uma forma dual para quatro. “Noven” vem do latim, “novus” ou o início de uma nova seqüência. O “quatre-vingt” francês é um remanescente do sistema vigesimal.

O desenvolvimento da linguagem foi essencial para o surgimento do pensamento matemático abstrato. Entretanto, os sinais para números se desenvolveram antes que as palavras para os números. As palavras que expressavam idéias numéricas tiveram um lento desenvolvimento. As palavras numéricas primitivas se referiam a coleções concretas, como, por exemplo, “dois peixes” que, convencionalmente, passou a ser adotada para representar todos os

conjuntos de dois objetos. Foram necessários milhares de anos para distinguir conceitos abstratos e situações concretas, buscando estabelecer uma base para a matemática.

As civilizações caracterizadas pelo uso de metais, tais como o Egito, a Mesopotâmia, a Índia e a China iniciaram no vale dos rios. Os povos que viveram ao longo do Nilo e dos rios Tigre e Eufrates, antes do quarto milênio a.C, tinham uma forma primitiva de escrita. Nessas civilizações, os registros pictográficos evoluíram para a ordem linear de símbolos mais simples.

A expedição de Napoleão descobriu a Pedra de Rosetta em 1799. Rosetta é um antigo porto de Alexandria, e a pedra lá encontrada estava escrita em três línguas: grega, demótica e hieroglífica. Champollion, na França, e Thomas Young, na Inglaterra, – conhecedores do grego – rapidamente decifraram os hieróglifos egípcios. O sistema se baseava na escala de dez e com iterações simples, tinha símbolos diferentes para as seis primeiras potências de dez e possibilitava o registro de até um milhão, gravados em pedra, madeira e outros materiais. A unidade era representada por um traço vertical, um osso de calcânhar invertido representava 10, enquanto uma letra C, maiúscula, indicava 100. Mil era representado por uma flor de lótus, um dedo dobrado valia 10.000, um peixe indicava 100.000 e uma figura ajoelhada representava 1.000.000. Assim 11.524 escrevia-se com um dedo dobrado, uma flor de lótus, cinco letras C, dois ossos de calcânhar invertidos e quatro traços verticais.

Há evidências de que desde épocas remotas os egípcios lidaram com números grandes. Um cetro real de 5000 anos, que hoje está exposto no Museu de Oxford, registra 120.000 prisioneiros e 1.422.000 cabras capturadas. Os registros encontrados deixam claro a habilidade dos egípcios para contar e medir. Mas a

quantidade de informação matemática retirada dos calendários e túmulos é restrita. Por sorte, papiros egípcios resistiram ao tempo. Entre eles havia um rolo de papiro de 0,30m de altura e 5 metros de comprimento, cuja maior parte está hoje no British Museum. É conhecido como o Papiro de Rhind, em alusão ao antiquário escocês, Henry Rhind, que o comprou em 1858. Também é conhecido como o Papiro de Ahmes, em homenagem ao escriba que o copiou, em 1650 a. C (BOYER, 1996).

No Papiro de Rhind, os numerais não são escritos em hieróglifos. Foram usados pena e tinta e a letra era um pouco cursiva, conhecida como hierática, ou seja, sagrada. Embora o sistema tenha continuado decimal, o princípio repetitivo dos hieróglifos foi substituído por sinais para representar dígitos e potências de 10. O sistema em uso até hoje é um sistema muito eficaz devido aos princípios introduzidos pelos egípcios, há 4.000 anos.

Boyer menciona que a adição era a operação aritmética fundamental para os egípcios. No Papiro de Ahmes, as operações de multiplicação e divisão eram realizadas por “duplações” sucessivas. A palavra atual – multiplicação – sugere o processo egípcio. De acordo com esse sistema, a multiplicação  $19 \times 69$  era efetuada com o dobro de 69 para obter 138, que somado com ele próprio era 276, que novamente duplicado era 552 e, duplicado mais uma vez, era 1.104. O resultado de  $19 \times 69$  era  $19 = 16 + 2 + 1$ , ou melhor,  $19 \times 69$  era  $1.104 + 38 + 19$ . Usavam, também, ocasionalmente, a multiplicação por dez, natural na notação hieroglífica decimal.

Assim como os egípcios, os povos mesopotâmicos tiveram um notável desenvolvimento matemático. Entre outros fatores, mas principalmente como resultado de seu desenvolvido sistema de numeração, a computação babilônica alcançou especial eficácia. Apesar dessa eficiência, os escribas mesopotâmicos

valiam-se de tabelas, na verdade tabletes cuneiformes, disponíveis em toda parte. Eram “textos tabelas” de multiplicação, de quadrado, de cubos e raízes quadradas e cúbicas.

Os egípcios e babilônios continuaram produzindo textos cuneiformes e em papiro, até muitos séculos depois de 800 a.C. Mas a hegemonia cultural passou para os gregos. Os invasores, vindos do norte, que abriram caminho até o mar eram iletrados, mas desejosos de aprender. Dos babilônicos e egípcios tomaram o alfabeto, que logo chegou às colônias gregas, romanas e cartaginesas, pela atividade dos mercadores. Ainda mais, estudiosos gregos foram conhecer os centros de cultura no Egito e na Babilônia, entrando em contato com a matemática pré-helênica. Entre os séculos 800 a.C e 800 DC, a liderança intelectual e cultural passou para os gregos, e a atividade matemática floresceu à volta de todo o Mediterrâneo.

### 2.3.2 As Origens Neurobiológicas da Matemática

Além da história, também a neurobiologia tem contribuído para desvendar as origens do pensamento matemático. Vamos nos deter em algumas idéias de Dehane (2001), um neurocientista que vem se dedicando a estudar as relações entre cérebro, mente e números. Com base em avançadas tecnologias de estudo do cérebro, ele define a natureza da matemática, desde um ponto de vista neurobiológico, numa área muito simples, mas talvez a mais básica de todas: o domínio dos inteiros naturais, 1,2,3,4...

Tudo indica, segundo ele, que a matemática elementar é uma habilidade básica, biologicamente determinada, habilidade esta que compartilhamos com

algumas espécies animais, uma vez que foi identificado um substrato cerebral específico, um conjunto de redes de neurônios localizados de forma semelhante que contém o conhecimento dos números e suas relações. Nesse sentido, perceber números à nossa volta é uma base para nós, assim como a localização do eco é uma base para os morcegos.

Essa teoria tem importantes conseqüências para nossa compreensão sobre a natureza da matemática. É óbvio que o surpreendente nível de desenvolvimento matemático até então alcançado é uma aquisição especificamente humana, decorrente de habilidades lingüísticas e amplamente dependente de fatores culturais. Mas é importante lembrar que os conceitos básicos que fundamentam o conhecimento matemático, tais como números, conjuntos, espaço, distância, e assim por diante, originam-se da arquitetura do cérebro.

Para Dehane, os números são como as cores. Sabe-se que não existem cores no mundo físico. A luz vem do comprimento das ondas, mas comprimento de ondas não é o que chamamos de cor - a banana permanece amarela sob diferentes condições de iluminação, nas quais as ondas foram completamente modificadas. A cor é um atributo criado pela área V4 do cérebro, área que calcula a quantidade relativa de luz em diferentes ondas, através da retina. Assim, o que se costuma chamar de cor é uma qualidade do cérebro, muito útil para o reconhecimento dos objetos no mundo exterior e, possivelmente, é por essa razão que a habilidade do cérebro de perceber as cores evoluiu tanto.

Vivemos num mundo cheio de objetos discretos e móveis e é muito proveitosa a capacidade de extrair o número. Ela pode ajudar a afastar predadores, a escolher a melhor terra para semear, para mencionar exemplos óbvios e, provavelmente, foi por necessidades evolutivas que nossos cérebros e os de muitas espécies de



animais desenvolveram mecanismos numéricos simples. Dehane enumera as seguintes evidências experimentais para a existência de uma capacidade numérica dentro de um substrato cerebral específico:

1. Os animais têm habilidades numéricas elementares. Ratos, pombos, papagaios, golfinhos e, é claro, primatas, podem discriminar padrões visuais ou seqüências auditivas, com base somente em números. Os ratos, por exemplo, podem aprender a puxar uma alavanca para dois eventos e outra para quatro eventos. Os animais têm, também, habilidades elementares para reunir e separar, as quais foram observadas na selva e não apenas em laboratórios. Entretanto, são necessários muitos anos de treinamento para que os chimpanzés utilizem símbolos numéricos. E mais, o comportamento numérico dos animais torna-se progressivamente impreciso quanto mais altos são os números. Portanto, manipulações aproximadas de quantidades fazem parte do repertório normal de muitas espécies, porém a manipulação exata dos números é uma habilidade especificamente humana, construída, não só aprendida.

2. Bebês humanos pré-verbais apresentam habilidades numéricas muito semelhantes às dos animais: podem discriminar dois padrões com base somente no número e podem fazer reuniões e separações simples. Experimentos com bebês de menos de um ano evidenciaram que quando um objeto é escondido atrás de um anteparo e outro é acrescentado, eles esperam ver mais de um objeto quando o anteparo é retirado. Ficam surpresos quando se deparam com eventos improváveis, como quando um truque faz aparecer um só objeto e eles esperam encontrar mais de um.

3. Lesões no cérebro podem prejudicar a noção de número. É o que acontece com pessoas que sofreram lesões cerebrais e se tornaram inábeis para o processamento

numérico. Alguns desses transtornos são periféricos e se referem à incapacidade de identificar ou pronunciar palavras ou dígitos. Outros, mais profundos, evidenciam uma real perda da noção de número. Lesões no lobo parietal esquerdo inferior podem resultar em falhas na compreensão do sentido dos números, mesmo que fique preservada a habilidade de lê-los e escrevê-los. O local da lesão que resulta nesses transtornos é altamente coincidente, em todas as culturas, no mundo.

A imagem do cérebro durante tarefas de processamento numérico revela uma ativação altamente específica do lobo parietal inferior, a mesma região que, quando lesionada, causa os transtornos numéricos. Essa ativação pode ser vista com os métodos atualmente disponíveis, como o PET Scanning e a Ressonância Magnética Funcional. Registros elétricos também mostram que essa região fica ativa durante operações como a multiplicação e que a ativação pode durar cerca de duzentos minutos após a apresentação de um dígito.

Com todas essas evidências de uma representação aproximada dos números, a questão colocada por Dehane é a de como a educação matemática modifica essa representação e porque alguns indivíduos desenvolvem aptidão para a aritmética e a matemática, enquanto outros permanecem “inumeralizados” (innumeracy). Habilidades para a linguagem e para a notação simbólica naturalmente desempenham um papel importante.

A conexão entre as quantidades numéricas pré-verbais e os numerais verbais é trabalhosa para a criança, mas há evidências de que a representação pré-verbal da quantidade proporciona as bases que dirigem a aquisição da contagem verbal e da notação simbólica. A aquisição de uma linguagem para os números é essencial, e na fase em que os nomes dos números são aprendidos aparecem as diferenças culturais e educacionais. As crianças orientais têm vantagem ao aprender a contar

porque sua sintaxe numérica é muito mais simples. Em lugar de dizer “dezessete, dezoito, dezenove, vinte, vinte e um” etc., elas dizem “dez sete, dez oito, dez nove, dois dez, dois dez um”, e assim por diante.

De qualquer modo, mover-se para além da aproximação e aprender procedimentos exatos implica novas e maiores exigências para o cérebro/mente infantil, e é nesse ponto que a educação tem um impacto crucial. A dificuldade que se experimenta para lembrar a tabuada de multiplicação provavelmente se deve ao fato de que o cérebro humano não evoluiu a ponto de aprender os fatos básicos da multiplicação numa primeira vez, e temos que “fazer remendos” com os circuitos neurais, enquanto nossa memória associativa nos faz confundir  $8 \times 3$  com  $8 \times 4$  ou com  $8 + 3$ . Dehane considera ser possível que a “innumeralização” (innumeracy) seja nossa condição “normal” e que a numeralização nos exija muito esforço, ainda mais que as práticas escolares tradicionais agravam as dificuldades ao proporem a execução dos algoritmos sem considerar seu significado. Por outro lado, observando o sucesso de algumas crianças e o fracasso de outras, conclui-se sobre a importância da quantidade de investimento e dos seus estados afetivos enquanto aprendem matemática.

Os prodígios na matemática não têm um cérebro diferente das demais pessoas, pelo menos no início da vida. Eles começaram com as mesmas qualidades que os demais, ou seja, uma básica noção de número, uma intuição sobre as relações numéricas. Qualquer coisa que seja diferente nos seus cérebros adultos é o resultado de educação bem sucedida, da quantidade de esforço que dispensam e da motivação que os impulsiona. Todos começamos a vida com cérebros muito semelhantes, dotados com um senso de número elementar que tem

alguma estrutura inata, mas também um grau de plasticidade que permite ser modificado pela cultura.

O que é especial nos prodígios é a sua capacidade de focar uma surpreendente quantidade de atenção num domínio específico (aritmética, música, esporte) e obter muita gratificação. Esse processo começa cedo na vida, numa curva de aprendizagem em que adquirem mais e mais lembranças e automatismos, possivelmente subvertendo vários sistemas cerebrais não relacionados com sua paixão. O cérebro de Einstein tinha uma alta e anormal concentração de células gliais na região parietal inferior. Não se sabe, porém, se ele nasceu com essa “malformação” ou se o desenvolvimento dessa região resultou de sua utilização freqüente (DEHANE, 2001).

Diferentemente de outros construtos sociais, como arte e religião, por exemplo, os números não são construções mentais arbitrárias. Pelo contrário, são estreitamente adaptados ao mundo externo, por duas razões.

A primeira delas é que os elementos sobre os quais as construções matemáticas estão baseadas, tais como números, conjuntos, espaço, etc., estão enraizados na arquitetura do cérebro por um longo processo evolutivo. A evolução incorporou nas mentes/cérebros estruturas essenciais para a sobrevivência e para uma percepção apurada do mundo externo. O número é essencial porque vivemos num mundo de objetos móveis, plurais, contáveis. As coisas seriam diferentes se vivêssemos num mundo fluido ou numa escala atômica.

A segunda razão é que a matemática passou por uma segunda e mais rápida evolução, a evolução cultural. Os objetos matemáticos foram gerados na mente dos matemáticos dos últimos 30 séculos, mas eles têm sido selecionados, em função da sua utilidade na resolução de problemas, como, por exemplo, na física. Muitas das

atuais ferramentas matemáticas foram adaptadas ao mundo externo, justamente porque foram selecionadas em função das necessidades humanas.

## 2.4 MATEMÁTICA E REALIDADE

Lichnerowicz (apud PIAGET et al., 1980) propõe que vivemos num universo matemático, embora poucos de nós tenham consciência disso. E, nesse caso, pergunta o autor: que papel desempenham as matemáticas na concepção de mundo do homem contemporâneo?

Na sua análise, inicialmente, ele fala de uma explosão interna no seu domínio próprio. Para as matemáticas clássicas havia, por um lado, os “seres” matemáticos, e, por outro, a realidade física, à qual os seres podiam estar mais ou menos adaptados. Na perspectiva atual, tudo é matemático ou matematizável, e as matemáticas ultrapassam os dados experimentais que elas permitem estruturar. Na atualidade, o desenvolvimento das matemáticas superou toda a sua história anterior. Essa tese pode ser comprovada pelo número de matemáticos profissionais no mundo e pelo peso das publicações.

O matemático, e não o sociólogo, interessa-se mais pelo número e pela qualidade dos problemas novos, resolvidos ou simplesmente postos, interessa-se, sobretudo, pela novidade de uma tomada de consciência, pelos matemáticos, da sua missão. A nossa visão do universo matemático alargou-se incrivelmente. A nossa exigência de nós mesmos tornou-se infinitamente maior: as demonstrações de nossos antecessores já não nos satisfazem, mas os fatos matemáticos que eles descobriram permanecem e nós demonstramo-los por métodos infinitamente mais rigorosos e precisos... (LICHNEROWICZ, apud PIAGET et al., 1980, p. 394)

A matemática contemporânea apresenta uma enorme fecundidade. Há meio século, surgiram ramos inteiros de matemáticas, como, por exemplo, a topologia

algébrica ou a teoria dos espaços funcionais. Esse desenvolvimento foi autônomo e sem nenhum condicionamento ao concreto. Foi um desabrochar provocado pelo livre jogo da imaginação matemática.

No entender de Lichnerowicz, um traço marca a atividade criadora das matemáticas contemporâneas: a importância dada às considerações estéticas no transcorrer da criação matemática. A fecundidade matemática e critérios propriamente estéticos conferem uma importância capital às estruturas matemáticas. E fecundidade e beleza são interligadas por elos misteriosos. No dizer do autor, “deste ponto de vista, as matemáticas aparecem como uma arte tanto quanto uma ciência, e o matemático criador apresenta-se como um homem dotado de uma imaginação de um tipo particular e de uma sensibilidade especial” (LICHNEROWICZ, apud PIAGET et al., 1980, p. 398). Com a ajuda dessa sensibilidade matemática, análoga à sensibilidade pictórica ou musical, o matemático cria e julga, e está longe do ser unicamente lógico como, por vezes, é caricaturado.

### CAPÍTULO 3

“O ensino matemático, que compreende o cálculo, é claro, será levado aquém e além do cálculo. Deverá revelar a natureza intrinsecamente problemática das matemáticas. O cálculo é um instrumento do raciocínio matemático, que é exercido sobre o *problem setting* e o *problem solving*, em que se trata de exibir ‘a prudência consumada e a lógica implacável’. No decorrer dos anos de aprendizagem seria preciso valorizar, progressivamente, o diálogo entre o pensamento matemático e o desenvolvimento dos conhecimentos científicos, e, finalmente, os limites da formalização e da quantificação”.

Edgar Morin

### 3 A NATUREZA DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

#### 3.1 A ORIGEM DAS ESTRUTURAS LÓGICO-MATEMÁTICAS

Iniciaremos o capítulo com a discussão sobre a significação biológica das estruturas lógico-matemáticas, com base nas teses de Piaget (2000), apresentadas em *Biologia e Conhecimento*.

Nessa obra, Piaget trata da significação biológica das estruturas lógico-matemáticas, indo além das hipóteses subjacentes à dualidade:

- as estruturas lógicas são adquiridas pela experiência com os objetos, portanto, pela aprendizagem empírica; ou
- as estruturas lógicas são hereditárias, ligadas ao funcionamento de todo o comportamento, resultado de um fundo inato, comum a todas as espécies, presente no homem, enquanto ser racional.

Essa discussão demonstra que os conhecimentos matemáticos não pertencem, exclusivamente, a nenhum dos dois grupos mencionados e que, para situar a questão, é preciso examinar implicações dessas duas teses. Piaget põe em foco três argumentos relativos às implicações mencionadas:

1º - A favor de uma lógica inata pesa o fato de que a lógica é necessária, de que o adolescente, inevitavelmente, serve-se de mecanismos inferenciais e, ao tirar conclusões, experimenta uma sensação de necessidade dedutiva. Entretanto, a lógica, cujas raízes remontam ao biológico e é, fundamentalmente, construída pelo sujeito, é também um instrumento de troca, imposto pelo grupo social. Este, por sua vez, é um sistema interativo, no qual as coordenações nervosas e cerebrais de cada um de seus membros implicam leis de troca e de comunicação. “As relações entre o



indivíduo socializado e o grupo são, então, da mesma natureza que as do fenótipo individual e da população... e toda ligação é, ao mesmo tempo, e indissociavelmente, individual e social” (PIAGET, 2000, p. 348).

Por outro lado, a lógica só é necessária a partir dos 7-8 anos, no caso da transitividade, e dos 11-12 anos, no da implicação. Portanto, as operações lógicas passam por uma construção progressiva, diferentemente dos comportamentos instintivos que aparecem de súbito, sob a influência dos hormônios.

Sendo assim, não é possível incluir a lógica dentro dos comportamentos hereditários, uma vez que ela não aparece desde o nascimento, não se constitui aceleradamente numa idade fixa, nem está estritamente relacionada com a maturação. Entretanto, não se pode esquecer que o desenvolvimento da lógica é, em grande parte, endógeno. Porém, mesmo que suas origens se encontrem na organização vital, trata-se de um desenvolvimento que não é programado em seu conteúdo.

2º - Em oposição aos argumentos hereditários, as estruturas numéricas parecem dar lugar a uma clara aprendizagem. Entretanto, é preciso ressaltar que o número é exclusivamente constituído de elementos lógicos. No dizer de Piaget (2000, p. 348-349), “não se admite o estabelecimento de uma parede divisória qualquer entre a aritmética e a lógica, de tal maneira que isto constitui um dado essencial que a biologia tem que levar em conta” .

Vê-se, assim, a impossibilidade de classificar os mecanismos da lógica como inatos e as estruturas aritméticas como produto da aprendizagem e da experiência.

3º - Na arquitetura da matemática distinguem-se três estruturas básicas: estruturas topológicas, incluindo as geométricas, estruturas algébricas e estruturas de ordem. A topologia relaciona-se estreitamente com a lógica, pois pelas relações de

fechamento e de fronteira chega-se aos encaixes das classes lógicas. Desse modo, as estruturas espaciais constituem uma ponte entre as estruturas lógico-matemáticas, as estruturas hereditárias e/ou adquiridas por aprendizagem.

Nas aprendizagens que decorrem somente da experiência, as características são retiradas do próprio objeto. Na experiência lógico-matemática, os conhecimentos são tirados das ações sobre os objetos: a ação de ordenar põe os objetos em fila, a ação de reunir constitui uma totalidade. As ações de reunir, encaixar, ordenar não são aprendidas, são construídas por apropriações de coordenações anteriores, por abstração reflexionante.

Se a fonte das ações é o organismo e não o objeto, então o número é uma construção endógena, uma vez que é produto das ações mais gerais do sujeito, na medida em que realiza a síntese da inclusão e da seriação.

Depois de rebater a hipótese de que os conhecimentos lógico-matemáticos são adquiridos pela experiência, Piaget propõe que esses conhecimentos tiram sua substância da organização viva, que se perpetua de uma geração à outra, mas não se confunde com a transmissão de caracteres particulares. A lógica e a matemática não correspondem a caracteres representados no genoma.

O reconhecimento de que a lógica se impõe como uma necessidade não significa afirmar que a lógica é, em todos os seus aspectos, hereditária. Isso porque a necessidade não se impõe desde o início, mas o faz progressivamente, e por duas razões:

1º - a seriação torna-se necessária quando se constitui num todo coerente, fechado, acompanhado de um sentimento interior de utilização de uma dedução, com absoluta segurança;

2º - nesta estrutura, que se impõe como necessidade, por via endógena, o conteúdo não é programado hereditariamente, é produto de uma equilibração progressiva.

Enfim, é preciso que se faça, como Piaget, uma cuidadosa distinção entre o que é transmitido hereditariamente e o que é produto de equilibração interna, que se repete, de modo prenante, a cada nova geração. A necessidade nem sempre é decorrente da hereditariedade, podendo decorrer da auto-regulação. Daí a mobilidade da inteligência em contraposição à particularidade e especialização do instinto.

A construção matemática não se caracteriza pelo desenvolvimento de elementos exteriores, mas como um desenrolar endógeno, que acontece por etapas, de combinações que, por um lado, são novas e, por outro, só se exercem sobre elementos precedentes, sob duas condições.

Uma primeira condição é de natureza formal ou lógica, no sentido de que o desenvolvimento de uma estrutura não pode ser feito em seu próprio patamar. O progresso exige a construção de uma estrutura mais ampla, que abrange as precedentes, mas constrói novas operações.

Outra condição é de natureza psicológica. A abstração matemática consiste em:

- tomar consciência de um conjunto de ações ou de operações prévias do sujeito;
- “refletir” essas coordenações, projetando-as num novo plano, o do pensamento, para além da ação prática;
- integrar a ação numa nova estrutura.

Essa nova estrutura será, assim, uma reconstrução da precedente, mas ampliada, generalizada, por combinação com os elementos do novo plano de reflexão. Nesse sentido, a reflexão é um novo arranjo da matéria oferecida feito pelo

pensamento, e a abstração reflexionante é a reconstrução, com novas combinações, que permite a integração de uma estrutura anterior em outra, mais rica, de nível superior (PIAGET, 2000).

Assim, para se compreender a natureza biológica das estruturas lógico-matemáticas, deve-se procurar a origem da abstração reflexionante. Conservando seu mecanismo construtor e funcional, a abstração reflexionante corresponde ao processo neurológico de integração de estruturas inferiores, num patamar seguinte, segundo uma hierarquia de estágios sucessivos de formação.

A abstração reflexionante – sobre a qual voltaremos adiante - é um mecanismo que se observa no curso de toda a história da lógica e da matemática e converge com a psicogênese, uma vez que as estruturas operatórias elaboram-se pela passagem da ação à operação, desde os níveis sensório-motores, passando pelo período das operações concretas e, depois, formais. Nesse percurso, as estruturas sensório-motoras da ação prolongam-se em operações, após um intervalo que vai de 1-2 a 7-8 anos, somente depois de serem construídas em pensamento, por um processo reflexionante.

Nas estruturas lógico-matemáticas o desenvolvimento apresenta uma condição limitativa: as novas estruturas não admitem elementos exógenos e limitam-se a reorganizar ou recombina os elementos já presentes. Portanto, as estruturas lógico-matemáticas não resultam da aprendizagem e nem são modificadas por ela. Também não resultam da hereditariedade, pois se tivessem ligadas aos genes não seriam necessárias, nem gerais, nem dotadas de plasticidade construtiva.

Excluindo a aprendizagem e a hereditariedade, resta o funcionamento organizador. O genoma não é mais considerado um pacote de partículas que se conservam por si mesmas e transmitem mensagens isoladas às gerações seguintes.

O genoma é visto, agora, como um sistema de regulações, com genes coadaptados em poligenia e as recombinações constituindo a fonte da organização. Desse modo, a variação genética não é atribuída a mutações ao acaso, mas resulta de desequilíbrios e reequilibrações de conjunto.

É por isso que Piaget aponta dois níveis de processo de transmissão hereditária:

1º - o nível da informação genética, ou seja, do conjunto do que é transmitido e do que atua na morfogênese da geração seguinte, isto é, os mecanismos instintivos;

2º - o nível da autoconservação, que se constitui por metabolismo interno, que se auto-conserva, que se auto-regula em termos de organização e funcionamento, desde a fecundação e durante todos os processos ulteriores, sob formas sucessivas, cada vez mais elaboradas.

Cabe, agora, perguntar: em que nível está a organização lógico-matemática? No nível da hereditariedade ou no nível da organização? Nem num nem noutro nível, mas nos dois níveis, uma vez que não há organização sem hereditariedade, nem hereditariedade sem organização.

As estruturas lógico-matemáticas situam-se num nível intermediário: o do funcionamento cortical, que abrange tanto os elementos hereditários quanto o nível das estruturas cognitivas. Isso porque o funcionamento do cérebro em parte é hereditário, uma vez que o progresso da corticalização determina o progresso da inteligência. Porém, a atividade cerebral difere de uma programação fixa e de um saber instintivo.

O funcionamento cerebral se exprime por formas muito gerais de organização e, portanto, as estruturas lógico-matemáticas que resultam desse processo são

construções por abstrações reflexionantes, que ocorrem em sucessivos patamares de equilíbrio. As formas de equilíbrio decorrentes são, então, de dois tipos:

- conhecimentos físicos experimentais, ou melhor, estruturas abertas à experiência;
- estruturas lógico-matemáticas, que se tornam necessárias pelas leis do funcionamento.

Convém, por fim, examinar a relação entre o conhecimento físico e o lógico-matemático, que estão longe de serem estanques. O conhecimento físico fundamenta-se na assimilação a esquemas de ação, assimilação esta que também é lógico-matemática, posto que as ações não acontecem isoladas, mas tendem a se coordenar entre si. Sendo assim, a fonte das operações lógico-matemáticas é a coordenação geral das ações, condição e instrumento da objetividade, da descentração do sujeito.

A organização viva é um sistema de trocas, pois o funcionamento organizador está sempre em acordo com o meio. A concordância entre a matemática e a experiência é um bom exemplo desse permanente acordo. Assim,

atribuir a lógica e a matemática às coordenações gerais do sujeito... é lembrar que, se a fecundidade do pensamento depende dos recursos internos do organismo, a eficácia desse pensamento depende do fato de o organismo não ser independente do meio, mas só viver, atuar e pensar, em interação com ele (Piaget, 2000, p. 389).

### 3.2 A ABSTRAÇÃO REFLEXIONANTE

Os argumentos até aqui levantados levam à consideração da natureza e do papel da abstração reflexionante, conforme foram descritos por Piaget (1995). A abstração reflexionante faz parte da natureza do conhecimento matemático, pois

sustenta as atividades cognitivas do sujeito – esquemas ou coordenações de ações, operações, estruturas.

Como já foi destacado, a construção lógico-matemática não é invenção nem descoberta. É construção que procede por abstrações reflexionantes, um dos principais processos de equilibração, no plano das trocas simbólicas. Qualquer conhecimento novo supõe uma abstração, porque, apesar da reorganização que ele impõe, não constitui jamais um início absoluto, uma vez que retira seus elementos de uma realidade anterior. Podem-se, então, distinguir dois tipos de abstrações, segundo suas fontes endógenas e exógenas. Uma empírica, que retira informações do próprio objeto ou das características materiais das ações, e outra, reflexionante, que retira características da coordenação das ações e não mais dos objetos. Essas coordenações e o próprio processo reflexionante podem permanecer inconscientes, assim como podem dar lugar a várias tomadas de consciência ou conceituações.

A abstração é reflexionante em dois sentidos complementares, que Piaget assim define:

ela transpõe a um plano superior o que colhe no patamar precedente (por exemplo, ao conceituar uma ação); e designaremos esta transferência ou esta projeção com o termo “reflexionamento”. Em segundo lugar, ela deve necessariamente reconstruir sobre o novo plano B o que foi colhido do plano de partida A, ou pôr em relação os elementos extraídos de A com os já situados em B; esta reorganização, exigida pelo processo de abstração reflexionante, será designada por “reflexão” (PIAGET, 2000, p. 6).

Cada reflexão leva a novos patamares de reflexionamento, por um processo espontâneo ou como resultado de uma interrogação específica, numa espiral que se caracteriza por reflexionamentos - os conteúdos , na direção da reflexão - as formas , seguidas por novos reflexionamentos. Esse movimento em espiral dá ao sujeito

novos instrumentos de assimilação, e as operações se tornam objeto de pensamento.

A abstração empírica apóia-se sobre os objetos físicos ou sobre a própria ação, ou seja, sobre os observáveis, retirando deles as informações. Mesmo sob suas formas mais elementares, esta abstração não é uma simples “leitura”. Isso porque, para abstrair qualquer propriedade de um objeto, tal como seu peso ou a sua cor, são necessários instrumentos de assimilação (estabelecer relações, significações). Estes instrumentos de significação são os esquemas sensório-motores ou conceituais que não são fornecidos pelo objeto, mas construídos anteriormente pelo sujeito.

A abstração reflexionante é encontrada em todos os estágios, com seus dois componentes de “reflexionamento” e de “reflexão”: nos níveis sensório-motores, o bebê, para resolver um problema novo, vale-se de coordenações de estruturas já construídas e reorganiza-as em função de novos dados. Nos níveis superiores, quando a reflexão é obra do pensamento, cabe distinguir o processo enquanto construção de uma temática retroativa. Trata-se de uma reflexão sobre a reflexão, ou seja, “abstração refletida” ou pensamento reflexivo.

Para Becker:

as produções científica, filosófica e artística são resultantes, em grande parte, dessa forma de abstração. Ou, melhor dito, não há produção desse porte sem a abstração refletida, pois é ela que gera o conceito – estrutura cognitiva fundamental de todo o saber científico (BECKER, 2003, p. 91).

Nos níveis representativos, mas ainda pré-operatórios ou das operações concretas, o sujeito só efetua construções apoiando-se sobre resultados constatáveis. São as abstrações pseudo-empíricas, nas quais a leitura dos resultados se faz a partir de objetos materiais, como se se tratasse de abstrações



empíricas. Entretanto, as propriedades constatadas são, na realidade, introduzidas nos objetos pela atividade do sujeito. É uma variedade de abstração reflexionante, com observáveis ao mesmo tempo exteriores e construídas graças a ela; as propriedades da abstração empírica, ao contrário, já existiam nos objetos antes das constatações do sujeito. Ao agir sobre o objeto, as constatações atingem, na abstração pseudo-empírica, os produtos das coordenações do sujeito.

As abstrações pseudo-empíricas são de fundamental importância nos níveis elementares, no nível das operações concretas, porque o sujeito tem necessidade de usar objetos para fazer uma operação e julgar seus resultados. O resultado de uma abstração reflexionante assim que se torna consciente é abstração refletida. À medida que a abstração reflexionante progride, o pensamento se distancia dos apoios concretos, e a abstração refletida cresce em importância. A abstração reflexionante retira coordenações de seu contexto, retendo essas coordenações e descartando o restante. Sendo assim,

o primeiro resultado das abstrações reflexionantes é, portanto, acarretar, seja a diferenciação de um esquema de coordenação... seja a 'objetivação' de um processo coordenador que se torna, então, objeto de representação ou de pensamento, o que aumenta os conhecimentos do sujeito, alargando o campo de sua consciência e enriquecendo, portanto, sua conceituação (PIAGET et al., 1995, p. 278).

Sobre os graus dos reflexionamentos, diz Piaget que:

- 1º) o reflexionamento mais elementar é o que conduz das ações à sua representação, de um movimento sensório-motor ao início de uma conceituação;
- 2º) o segundo patamar é o da reconstituição da seqüência das ações, o que consiste em reunir as representações em um todo coordenado;

3º) o terceiro patamar é o das comparações. A ação total, reconstituída, compara-se a outras, análogas ou diferentes.

Por essas comparações, as estruturas passam a se destacar e inicia-se um quarto e depois novos patamares de reflexionamento: são as reflexões sobre as reflexões precedentes, chegando assim, à metarreflexão ou pensamento reflexivo. Para este caso, Piaget dá o exemplo de Cla, que com 11 anos e 5 meses descobriu que as conservações do perímetro e da superfície de um retângulo não podem ser asseguradas simultaneamente. A partir daí, a reflexão torna-se essencial, por oposição ao reflexionamento. Mas é evidente que cada nova reflexão supõe a formação de um patamar superior de reflexionamento, e o que permanecia no patamar inferior como instrumento do pensamento torna-se objeto de pensamento, ou seja, é tematizado. Tal é o caso, por exemplo, da reflexão sobre a adição, após tê-la utilizado; essa reflexão transforma o processo aditivo em novo objeto de pensamento.

Como já foi destacado, as abstrações pseudo-empíricas têm um papel fundamental nos níveis elementares, durante todo o estágio das operações concretas. Com o progresso da abstração reflexionante, o pensamento dispensa, ainda que nunca totalmente, os apoios concretos, e a abstração refletida torna-se cada vez mais freqüente. É por isso que

sem excluir de nenhum modo sua coexistência possível, a evolução das abstrações pseudo-empíricas e refletidas é, pois, caracterizada por esta inversão de suas proporções, as primeiras, perdendo seu valor relativo (sem jamais desaparecer, mesmo no homem de ciência), as segundas, contrariamente, aumentando o seu (sem que, por isso, estejam ausentes nos níveis elementares) (PIAGET et al., 1995, p. 277-278).

Cada ato de abstração reflexionante implica a utilização de coordenações já em ação no ponto de partida, mas com novas características que resultam de uma construção criadora. Essa explicação, encontrada por Piaget, apóia-se sobre os processos de equilíbrio.

Nesse ponto, é importante lembrar que o equilíbrio cognitivo é completamente diferente do equilíbrio mecânico ou do equilíbrio termodinâmico. O equilíbrio cognitivo se parece mais com os chamados “estados dinâmicos” de Glansdorff e Prigogine (PIAGET et al., 1995, p. 282). São estados estacionários, mas com intercâmbios capazes de construção e manutenção de uma ordem funcional e estrutural num sistema aberto.

Sendo assim, o equilíbrio cognitivo, em lugar de ser um estado de inatividade, é um sistema de constantes trocas. São três as condições desta equilibração:

- 1) uma capacidade durável de acomodação dos esquemas aos objetos exteriores ou de pensamento. Estes esquemas se diferenciam progressivamente, o que, ao mesmo tempo, enriquece e conserva seu estado anterior, sem perdas e sem a produção de esquemas radicalmente novos;
- 2) a assimilação recíproca dos esquemas em subsistemas atinge coordenações que se conservam e se enriquecem mutuamente;
- 3) a integração de subsistemas em totalidades, de acordo com suas leis de composição. Os subsistemas se conservam, pois suas propriedades diferenciadas podem ser reconstruídas a partir do sistema total.

O equilíbrio nunca é atingido, salvo (e nem sempre) em matemática pura. Quanto mais nos remontamos aos estágios elementares, mais nos encontramos em presença de desequilíbrios. Pode-se dizer que as novidades endógenas consistem na realização de possibilidades abertas pelo que foi construído no nível precedente.

“Com efeito, enquanto a acomodação de um esquema a objetos exteriores provoca sua diferenciação... ,a assimilação recíproca dos esquemas é um processo contínuo e coerente, mas não imediato” (PIAGET et al., 1995, p. 283). Cada coordenação abre caminho a novas assimilações, diferenciando os esquemas a coordenar.

Quando o equilíbrio não é atingido, encontramos desequilíbrios cujas três principais características são os conflitos entre o sujeito e os objetos, conflitos entre subsistemas por falta de coordenação, desequilíbrio entre diferenciação e integração, sendo esta insuficiente, no início.

Sendo assim, o equilíbrio se caracteriza como tendência. Os reequilíbrios dão lugar a novos desequilíbrios, primeiro por regulações simples, para depois atingir as regulações “perfeitas” ou operações. Cada novidade endógena é produto das possibilidades abertas por construções do nível precedente, possibilidades estas que dão origem a diferenciações e integrações.

Um esquema antigo amplia-se incorporando elementos novos no seu ciclo. Transforma-se num segundo esquema, conservando seus poderes anteriores, enquanto atinge outros, mais extensos. Eis aqui uma propriedade especial da abstração reflexionante, isto é, conseguir distinguir formas dissociadas dos seus conteúdos, quando a “compreensão” de uma estrutura é proporcional à “extensão” dos conteúdos.

Cabe distinguir as extensões e as compreensões das formas ou estruturas, de uma parte, e dos conteúdos, de outra. Nas abstrações empíricas, as formas amoldam-se aos conteúdos de acordo com a experiência. No caso de puras abstrações reflexionantes – como na construção do número, por exemplo –, novos conteúdos provêm das formas operatórias, como no caso dos inteiros negativos que

se originam da subtração. Já as formas se enriquecem de modo independente, por reflexões sobre reflexões.

A generalização ligada às abstrações empíricas é extensiva, pois consiste em encontrar nos novos objetos propriedades que neles já existiam. Já a abstração reflexionante, pelo contrário, introduz em novos objetos propriedades que eles não possuíam. Isso acontece porque são tiradas das construções dos níveis precedentes ou porque sua reorganização constrói novas formas que dão lugar a novos conteúdos.

Tanto as abstrações empíricas quanto as abstrações reflexionantes existem em todas as etapas do desenvolvimento, desde os níveis sensório-motores até as formas mais elevadas do pensamento científico. Nos níveis iniciais, a fronteira entre os dois tipos de abstrações é menos nítida e menos estável que nos níveis posteriores. Isso porque existem menos diferenças entre as ações e suas coordenações, ou seja, entre os conteúdos e as formas. Antes do nível II A, das operações concretas, as formas quase nunca se diferenciam.

A distinção entre abstrações depende de três fatores relativos, sem oposição absoluta:

- a) as abstrações empíricas se exercem sobre os observáveis, e os reflexionamentos, sobre as coordenações. Entretanto, uma característica não é, por si só, observável ou não. Na física, por exemplo, as situações experimentais podem ser objeto de constatações ou serem inferidas por coordenações dedutivas;
- b) são múltiplos os degraus de generalidade nas coordenações das ações. Algumas são muito limitadas, como entre a visão e a apreensão, por volta dos 4-5 meses. Outras são mais fundamentais, como a ordem, os encaixes, as correspondências,

etc. E, sem dúvida, a abstração é tanto mais reflexionante quanto mais se aproxima das formas mais gerais que estão na origem das estruturas lógico-matemáticas;

c) as funções de forma e conteúdo são relativas; toda forma pode se tornar conteúdo. Daí as inúmeras variedades de abstrações pseudo-empíricas.

A evolução dos dois grandes tipos de abstração, empíricas e reflexionantes, é complexa e assimétrica. A abstração reflexionante torna-se cada vez mais pura devido ao seu mecanismo de reflexão sobre reflexões. Já a abstração empírica não progride em refinamento e objetividade, a não ser apoiando-se sobre a colaboração da abstração reflexionante.

Piaget et. al.(1995, p. 287) explicita que “o primeiro nível de abstração reflexionante é aquele no qual sua função essencial é a de elaborar quadros assimiladores, tendo em vista a abstração empírica, portanto, formas ajustáveis a seus conteúdos extralógicos” . A partir da representação, a abstração reflexionante progride constantemente e, num segundo nível, engendra funções e operações, desde que apoiada sobre abstrações pseudo-empíricas. Sendo assim, os resultados dos reflexionamentos e das reflexões ficam materializados nos objetos transformados e enriquecidos pelas atividades do sujeito. A abstração refletida permanece em retardo em relação à abstração reflexionante, até que, num terceiro nível, ela se torna o instrumento das reflexões sobre a reflexão anterior. Isso permite, finalmente, a formação de uma metarreflexão ou pensamento reflexivo. Está aberto o caminho para a constituição de sistemas lógico-matemáticos. Nesse nível, a abstração reflexionante atinge a formalização, na qual a forma se liberta do conteúdo.

A evolução da abstração empírica é bastante diferente, pois em todos os níveis requer a utilização de esquemas assimiladores. Nos estágios iniciais,

proporcionalmente, as abstrações empíricas são muito mais numerosas que as abstrações reflexionantes. A proporção se inverte nos estágios posteriores. O importante é que a subordinação da abstração empírica à abstração reflexionante a faz progredir em adequação ao real.

Se o desenvolvimento da abstração reflexionante é o de uma depuração progressiva em direção da conquista das formas, ao contrário, o da abstração empírica assinala uma subordinação crescente ao primeiro destes dois tipos, devido à inserção gradual dos conteúdos nas formas, pois que quanto mais estas se enriquecem, melhor servem à apreensão daqueles, isto é, à apreensão de observáveis até então não assimiláveis, mesmo a título de simples constatações (PIAGET et. al.1995, p. 289).

Entre a abstração empírica e a abstração reflexionante há uma diferença psicológica e, também, uma diferença formal, pois uma pode levar a contradições, e a outra afasta tal possibilidade. A abstração empírica permanece sempre integrada em um quadro espaço-temporal, enquanto a abstração reflexionante chega à construção de estruturas intemporais.

### 3.3 A TOMADA DE CONSCIÊNCIA

A questão da tomada de consciência tem um papel relevante na compreensão do conhecimento matemático, na medida em que se refere às relações entre ação e pensamento. Considerada como mecanismo de desenvolvimento, constou de muitos textos que Piaget publicou até os 40 anos. Aos 75 anos, o autor levou avante estudos experimentais no Centro Internacional de Epistemologia Genética, os quais deram origem a duas publicações, em 1974, *La Prise de Conscience e Réussir et Comprendre* e que apresentam as leis da tomada de consciência no quadro do construtivismo.

O estudo da relação entre saber-fazer e conceituação (ou ação e pensamento) confirma que a ação é uma forma de conhecimento autônomo, que pode se organizar sem tomada de consciência dos meios empregados. A conceituação apresenta, assim, retardo sobre a ação e se faz por uma reconstrução por vezes laboriosa, no plano do pensamento, do que foi realizado no plano da ação. A tomada de consciência não consiste, portanto, em iluminar o que escapava à consciência, mas antes em uma reconstrução cujos resultados acabam por ser superiores ao conhecimento em ação. A partir de um certo nível (Piaget menciona as idades de 11-12 anos) e para as ações complexas, é a conceituação que dirige e programa as ações (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 73).

Um dos principais resultados das pesquisas de Piaget, junto com a análise da tomada de consciência,

consiste em mostrar-nos que a ação em si mesma constitui um saber, autônomo e de uma eficácia já considerável, porque, embora se trate apenas de um "savoir-faire" e não de um conhecimento consciente no sentido de uma compreensão conceituada, ele constitui, no entanto, a fonte desta última, uma vez que a tomada de consciência se encontra em quase todos os pontos em atraso, e com freqüência de forma muito sensível, em relação a esse saber inicial que é, portanto, de uma eficácia notável, conquanto ele mesmo não se conheça (PIAGET, 1977, p. 207).

Piaget ensina que a tomada de consciência se desencadeia quando as regulações automáticas não são mais suficientes e é preciso procurar novos meios mediante uma regulação mais ativa. Entra-se, assim, num terreno de escolhas deliberadas que supõe a consciência. Esse processo - ativo ou automático - das readaptações é tão importante quanto uma eventual inadaptação.

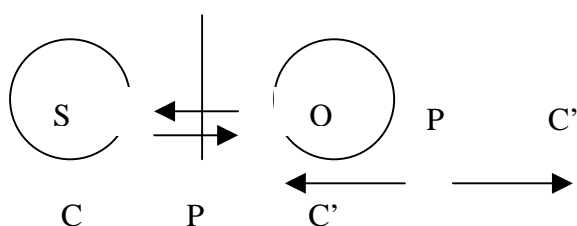
A tomada de consciência não se constitui somente quando há inadaptação. Não há nenhuma inadaptação em andar de gatinhas ou em atirar com uma funda, e essas atividades dão lugar a tomadas de consciência tardias, mas efetivas. Assim, não se pode dizer que a escolha de um novo objetivo resulta sempre de uma inadaptação, embora a busca de um novo objetivo seja sempre consciente e leve ao êxito imediato após algumas tentativas.



Piaget situa as razões funcionais da tomada de consciência, colocando primeiro o ponto de vista da ação material e, logo após, o ponto de vista do pensamento, como interiorização das ações. A lei geral que daí resulta é que a tomada de consciência procede da periferia para o centro. Isso porque o comportamento começa com a busca de um fim, iniciando por dados que podemos denominar periféricos: a consciência do objetivo a alcançar, da intenção como direção global do ato, e o conhecimento do resultado, se êxito ou fracasso. A periferia não se define nem pelo objeto nem pelo sujeito, mas pela reação do sujeito em relação ao objeto. Inúmeros exemplos apresentados por Piaget mostram que os esquemas determinando que uma ação utilize meios mais ou menos apropriados pode permanecer inconsciente, e o sujeito alcança seu objetivo, sem saber como procedeu.

Podemos, então, dizer “que a tomada de consciência parte da periferia, objetivos e resultados, e orienta-se para as regiões centrais da ação quando procura alcançar o mecanismo interno desta: reconhecimento dos meios empregados, motivos de sua escolha ou de sua modificação durante a experiência etc.” (PIAGET, 1974, p. 198).

Os fatores internos escapam à consciência do sujeito. Além disso, o conhecimento não procede nem só do sujeito nem só do objeto, mas da interação entre eles. A interação está no ponto P da figura abaixo, ponto que é efetivamente periférico em relação tanto ao sujeito (S) quanto ao objeto (O).



A tomada de consciência orienta-se para os mecanismos centrais da ação do sujeito (C), ao passo que o conhecimento do objeto orienta-se para suas propriedades intrínsecas, centrais (C').

Num vaivém entre o objeto e a ação, a tomada de consciência aproxima-se do mecanismo interno da ação. No caso em que o objetivo inicial da ação é atingido sem nenhum fracasso, o progresso da consciência resulta do próprio processo assimilador. Isso porque determinar a si mesmo um objetivo em face do objeto já é assimilar este objeto a um esquema prático. À medida que o objetivo e o resultado da ação desencadeiam a consciência, o esquema se torna conceito.

Piaget adverte que quando situações distintas são comparadas entre si, surgem os problemas. Por que este objeto é mais utilizável do que outro? Por que uma variação de meios é mais ou menos eficaz? O processo assimilador passa a ter por conteúdo os objetos e as ações em constantes idas e vindas. Sendo assim, as tomadas de consciência do objeto se estendem às tomadas de consciência da ação, já que esta depende do objeto tanto quanto o objeto depende da ação.

A lei da direção da periferia (P) para os centros (C e C') não fica limitada à tomada de consciência da ação material, pois a interiorização da ação leva a uma consciência dos problemas a resolver, assim como à consciência dos meios para resolvê-los. É o que se observa quando se pergunta à criança como fez determinada descoberta. As crianças menores se expressam por meio de gestos ou descrevem suas ações. As maiores usam expressões, tais como “eu percebi que...”, “eu disse comigo” ou “encontrei, então, a idéia...”

Como acontece a tomada de consciência? Qual é o mecanismo que torna conscientes os elementos que permaneciam inconscientes? Não é por uma simples

iluminação, ressalta Piaget. Trata-se de uma conceituação propriamente dita, uma passagem da assimilação prática a uma assimilação por meio de conceitos. Quanto mais o sujeito se limita às reações elementares, mais ele deforma conceitualmente os dados da observação.

Essas deformações não podem ser consideradas o resultado de uma previsão, ou seja, de uma inferência anterior à constatação. Pelo contrário, alerta Piaget, há uma constatação deformada pela inferência. A deformação inferencial não é uma característica da tomada de consciência. É o resultado da própria inconsciência do sujeito em relação aos meios empregados para atingir um objetivo.

A partir daí, Piaget tira algumas conclusões quanto ao “como” da tomada de consciência.

- a) A tomada de consciência supõe uma conceituação, no sentido amplo, incluindo aí o pré-conceito.
- b) Se a tomada de consciência fosse simples iluminação, não seria necessário nenhuma construção num novo plano, pois que elas já se realizariam no plano da ação material, do “savoir-faire”, por oposição ao “conceber”.
- c) A consciência do sujeito age sobre suas ações como se fosse o caso de ligações materiais situadas nos objetos. Por isso, é necessário uma construção conceitual para explicá-las.
- d) No nível I A, a solução é deformar os dados de observação e “recalcar” a fonte de conflito. Do ponto de vista afetivo, há recalque quando um desejo inconsciente entra em conflito com dados conscientes, como os imperativos do superego, ilustra Piaget. No processo cognitivo, o fenômeno é análogo. Nesse caso, o desejo inconsciente não é suprimido, mas não aflora à consciência.

e) O sujeito contesta a observação inesperada e pensa que pode constatar os fatos assim como foram antecipados por ele. A situação é interessante na medida em que o dado de observação não é um fato físico exterior ao sujeito, e, sim, pertence à ação própria e é conhecido do sujeito apenas em atos inconscientes e não em sua conceituação consciente.

f) No caso da tomada de consciência, a contradição que provoca o “recalque” não está na ação não consciente. A ação não consciente alcança êxito.

g) A questão geral é se admitimos os graus de consciência. Três tipos de circunstância falam a favor dessa hipótese:

1º) Entre a ação de êxito precoce e os erros iniciais da tomada de consciência há intermediários.

2º) Uma interpretação possível desses graus de consciência é que eles dependem de diferentes graus de integração. Uma “percepção inconsciente” vem seguida de uma certa consciência que é fugaz e não é integrada nos estados seguintes. Quanto às ações precocemente bem sucedidas e com tomadas de consciência mais tardias, é difícil compreender que o sujeito se limite aos conhecimento dos objetivos e resultados, sem nenhuma consciência dos meios e da sua regulação. As correções sucessivas dos meios acontecem progressivamente, os estados de consciência fugaz não dão origem a nenhuma integração conceitual ou representativa, e o esquema permanece sensório-motor.

3º) Enfim, o mecanismo da tomada de consciência é um processo de conceituação que reconstrói e ultrapassa o que foi adquirido no plano dos esquemas de ação. A tomada de consciência da ação própria e o conhecimento das seqüências exteriores ao sujeito não são diferentes. Ambos comportam uma elaboração gradativa de noções a partir de um dado. Esse dado tanto pode consistir em aspectos materiais

da ação do sujeito, quanto em aspectos materiais das ações realizadas entre objetos.

Ao afirmar que a tomada de consciência parte da periferia para as regiões centrais C e C' da ação, Piaget conclui que o conhecimento do real parte das aparências periféricas para chegar à natureza intrínseca das coisas e de suas conexões causais. Partindo da periferia P da ação, o conhecimento se dirige para as regiões centrais C, do sujeito, e C', dos objetos, e são constantes as trocas entre os progressos de  $P \longrightarrow C$  e de  $P \longrightarrow C'$ . Têm lugar aí equilibrações, desequilíbrios e reequilibrações. Entretanto, há mais do que uma sinergia funcional. Há solidariedade entre o movimento de interiorização, que conduz à tomada de consciência das ações e à conceituação lógico-matemática, e o movimento de exteriorização, que leva ao conhecimento experimental e às explicações causais.

A contínua troca de informações entre a tomada de consciência da ação e o conhecimento do objeto vem acompanhado de duas assimetrias solidárias. A primeira é que as coordenações inferenciais que ligam os dados de observação só podem agir no sentido ação objeto. Tudo o que pode ser constatado empiricamente é considerado dado de observação: um acontecimento, uma relação que se repete, uma co-variação, enfim, que se possa falar em dependência funcional ou lei. Piaget usa o termo coordenações inferenciais para as deduções por composição operatória que ultrapassam os dados de observação, introduzindo relações de necessidade. Assim, os dados de observação são fornecidos tanto pelos objetos quanto pelas ações. Já uma coordenação inferencial só pode ser produto da lógica do sujeito, isto é, o que ele extrai das coordenações gerais das suas próprias ações.

A segunda assimetria depende do tipo de abstração utilizada, seja ela empírica, seja reflexionante, isto é, a partir das coordenações das ações. Esta

última pode permanecer inconsciente, ignorada pelo sujeito, ou pode se tornar consciente, como no caso em que o sujeito compara duas ações e procura o que elas têm em comum. Trata-se, então, de abstração refletida.

A ação evolui em suas relações com a conceituação, que caracteriza a tomada de consciência. Esta procede da periferia para o centro, e a evolução da ação se constitui numa seqüência de transformações do próprio centro. Constatase então que, no nível das ações, as reações iniciais procedem por esquemas isolados de assimilação, não indo além das acomodações momentâneas. Nesse caso, o progresso reside em coordenações decorrentes de assimilações dos esquemas utilizados, e que se orientam depois na direção de formas mais gerais e independentes do seu conteúdo, características das estruturas operatórias.

Piaget acentua que

não é exagero falar-se, desde o nível da ação em si mesma, numa passagem gradativa da periferia ao centro, ficando entendido que a primeira deve ser localizada na zona inicial de interação da ação e dos objetos, ao passo que as regiões centrais devem ser situadas nas fontes orgânicas do comportamento e das próprias estruturas operatórias. Nos dois casos, da ação como de sua conceituação, o mecanismo formador é ao mesmo tempo retrospectivo, como tirando seus elementos de fontes anteriores, e construtivo, como criador de novas ligações (PIAGET, 1974, p. 208).

Os processos solidários, mas de sentidos opostos, que levam da periferia P para as regiões centrais da ação C e dos objetos C', Piaget denominou de processos de interiorização (P → C) e de exteriorização (P ← C'). No nível I, nível da ação material, o processo de interiorização vai dos limites entre o sujeito e o objeto a assimilações de esquemas e a coordenações cada vez mais centrais, vizinhas da fonte orgânica. Essas assimilações e coordenações se encarregam da construção de uma lógica dos esquemas, anterior à linguagem e ao pensamento. Na sua origem já se encontram os grandes tipos de conexão, tais como as relações de

ordem, os encaixes de esquemas, as correspondências, as intersecções, uma certa transitividade, etc., ou seja, os principais elementos das futuras estruturas operatórias. Nos níveis sensório-motores, o processo de exteriorização tem lugar por acomodações cada vez maiores dos esquemas de assimilação aos objetos, culminando na construção das condutas instrumentais, como a utilização, por exemplo, de estruturas físicas espaço-temporais, como o grupo prático de deslocamentos e de uma causalidade objetivada e espacializada.

No nível II da conceituação, a interiorização caracteriza-se por um processo geral de tomada de consciência da ação própria. A interiorização das ações materiais se faz por meio de representações semióticas, tais como a linguagem, as imagens mentais, etc. À medida que progride a ação própria, essa tomada de consciência assume dois tipos possíveis de abstrações, sendo que a abstração empírica dá origem a uma conceituação descritiva dos dados de observação constatados nas características materiais da ação, ao passo que a abstração reflexionante extrai das coordenações da ação os elementos necessários à construção das coordenações inferenciais. Assim, a conceituação se torna operatória. Porém, embora seja capaz de dar origem a raciocínios e estruturações, as estruturas subjacentes permanecem inconscientes, bem como o próprio mecanismo da abstração reflexionante.

Enfim, no nível III, o das abstrações refletidas, a situação muda, e a tomada de consciência torna-se uma reflexão do pensamento sobre si mesmo. No domínio lógico-matemático, quanto ao processo de interiorização, o sujeito torna-se capaz de teoria e não mais somente de raciocínios concretos. Piaget afirma que os responsáveis pelos programas de ensino abusam disso e explica que a razão dessa modificação é o novo poder de elaborar operações sobre as operações. Do ponto de

vista da exteriorização, o sujeito se torna apto a fazer variações em suas experimentações e a considerar os diversos modelos possíveis para a explicação de um fenômeno. Enfim, a solidariedade dos movimentos de interiorização, ou lógico-matemáticos, e de exteriorização, ou físicos e causais, torna-se mais estreita que nos níveis anteriores, em virtude dos progressos da abstração e do paradoxo segundo o qual a adaptação aos dados concretos da experiência depende do caráter abstrato dos quadros intelectuais que possibilitam analisá-la e compreendê-la.

Em síntese, o estudo da tomada de consciência leva-nos a recolocá-la na perspectiva da reação circular entre o sujeito e os objetos. Nessa circularidade, o sujeito aprende a conhecer-se mediante a ação sobre os objetos, e estes tornam-se cognoscíveis em função do progresso das ações exercidas sobre eles. Este é o círculo das ciências, cuja interdependência não admite qualquer hierarquia linear. Daí decorre sobretudo o acordo entre o pensamento e o real, uma vez que a ação procede das leis de um organismo que é ao mesmo tempo um objeto físico entre os outros e a fonte do sujeito que age e depois pensa.

### 3.4 A PSICOGÊNESE DOS CONHECIMENTOS

A direção dos processos cognitivos interessa sobretudo à natureza do conhecimento matemático. No quadro da Epistemologia Genética, as operações intelectuais comportam um desenvolvimento que se desenrola segundo estágios bem definidos. Piaget (2000) destacou três condições necessárias para um sistema de estágios: que eles se sucedam segundo uma ordem constante em todos os indivíduos, que cada um possa ser caracterizado por uma estrutura de conjunto, e



que essas estruturas se integrem umas nas outras segundo a sua ordem de formação .

Assim como em muitas outras, na obra “Da Lógica da Criança à Lógica do Adolescente”, Inhelder e Piaget (1976) destacam as características do pensamento pré-operatório, o pensamento operatório concreto e o pensamento formal.

Durante o período sensório-motor, a inteligência consiste em coordenar ações. O aparecimento da função simbólica permite a formação das primeiras representações. Trata-se de uma forma de pensamento que se forma dos 2 aos 7-8 anos.

No entender de Inhelder e Piaget, essa forma de pensamento, pré-lógica, difere do pensamento operatório concreto sob três aspectos fundamentais:

- 1) a criança considera situações estáticas e as explica em função de sua configuração atual, mais do que em função das transformações;
- 2) o pensamento assimila as transformações às ações pessoais do sujeito e não, às operações reversíveis;
- 3) mesmo assim, desde esse nível, os autores identificam uma tendência para a formação de sistemas de conjunto. Os instrumentos de que o sujeito dispõe para a formação desses sistemas são as regulações perceptivas ou representativas, por oposição às operações em si mesmas. No período intuitivo a reversibilidade continua incompleta; desenvolve-se no período das operações concretas e torna-se completa somente com as operações formais.

No dizer de Inhelder e Piaget,

como as transformações do sistema são assim assimiladas à ação pessoal e as situações estáticas explicadas por seus caracteres intuitivos de configuração, não há homogeneidade entre os dois planos e os únicos instrumentos de coordenação entre os dois são as regulações (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 186).

Por um lado trata-se de regulações perceptivas, pois, do ponto de vista do sujeito, a configuração assume o papel de explicação. Por outro lado, as regulações assumem a forma de correções e ajustamentos intrínsecos à ação pessoal. Sendo assim, as regulações anunciam a operação, orientando as ações para a reversibilidade. Mesmo sem chegar a compensações completas, as regulações inserem uma pequena margem de transformações num pensamento ainda quase inteiramente preso ao real, “isto é, um início de ‘possibilidades’ distintas da realidade” (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 187).

Ao nível das operações concretas, o sistema de regulações, até aqui sem estabilidade, alcança um equilíbrio estável. Atingindo o nível da reversibilidade completa, as operações concretas decorrentes das regulações precedentes se coordenam em estruturas definidas (classificações, seriações, correspondências, etc.) que se conservarão durante toda a vida. Nessa forma de equilíbrio,

- a) os domínios desse pensamento concreto não mais aceitam oposição entre as situações estáticas e as transformações, pois cada estado é concebido como resultado de uma transformação. Por exemplo, no caso do equilíbrio da balança, cada situação específica é considerada como o resultado de adições e subtrações anteriores de pesos, ou de igualdades e desigualdades introduzidas entre os pesos nos dois braços do aparelho, bem como entre as distâncias a partir do centro, etc.;
- b) o sistema de transformações está em equilíbrio porque as transformações tomaram uma forma reversível e são assimiladas às operações;
- c) “o pensamento operatório concreto, comparado ao pensamento pré-operatório ou intuitivo, se caracteriza por uma extensão do real na direção do virtual” (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 187). Por exemplo, classificar objetos significa construir conjuntos

de forma tal, que novos objetos possam ser ligados aos objetos já classificados e novas inclusões se tornem possíveis. Entretanto, as possibilidades próprias das operações concretas ainda não estão abertas a um campo mais amplo de hipóteses, como no caso das possibilidades formais.

É por isso que os autores destacam que as operações concretas consistem na estruturação direta dos dados reais. Classificar, seriar, igualar, fazer corresponder consistem em introduzir um conjunto de inclusões ou de relações que organizam esse conteúdo sob sua forma atual e real. O possível se reduz ao prolongamento virtual das ações ou operações aplicadas a esse conteúdo. Por exemplo, o sujeito sabe que poderia continuar com outros objetos depois de ter seriado alguns, estando em ação o mesmo esquema antecipador de seriação que lhe permitiu realizar a seriação real.

Do ponto de vista do conteúdo, o pensamento concreto apresenta a limitação de não ser generalizável a todos os conteúdos. Pelo contrário, procede domínio por domínio, podendo haver uma distância temporal de alguns anos entre a estruturação de conteúdos, como no caso do comprimento e do peso, por exemplo. Isso é assim porque é mais difícil seriar, igualar, etc. objetos menos dissociáveis da própria ação, como no caso do peso, do que aplicar as operações a um domínio mais objetivado, como o do comprimento.

Por isso, Inhelder e Piaget resumem que

o pensamento concreto continua fundamentalmente ligado ao real, e o sistema das operações concretas, que constitui a forma final do equilíbrio do pensamento intuitivo, chega apenas a um conjunto restrito de transformações virtuais e, portanto, a uma noção do "possível" que é apenas uma extensão (não muito grande) do real (INHELDER; PIAGET, 1976, p.188).

As estruturas de conjunto de classes e de relações que caracterizam as operações do pensamento concreto são estruturas limitadas que reúnem tais classes e tais relações por inclusões ou encadeamentos contíguos. É por isso que Inhelder e Piaget afirmam que as estruturas concretas de classes consistem somente de classificações simples (aditivas) ou múltiplas (tabelas multiplicativas ou matrizes), de tal forma que cada classe depende daquelas de que faz parte (A incluído em B, B em C, etc.) e se opõe à sua complementar ( $A' = B - A$ ;  $B' = C - B$ , etc.), mas sem combinatória que resulte em todos os subconjuntos possíveis de classes no interior do sistema. Essas estruturas repousam unicamente na reversibilidade por inversão: o sujeito pode reunir duas classes contíguas numa única classe ( $A + A = B$ ) ou subtrair uma classe do todo ( $A = B - A'$ ); pode, também, multiplicar uma classe pela outra ( $A1 \times A2 = A1A2$ ) ou subtrair uma do todo assim formado ( $A1A2 : A2 = A1$ ); tais sistemas, entretanto, ignoram a forma geral de reciprocidade.

Inhelder e Piaget observam que as estruturas concretas coordenam entre si as equivalências completas (igualdades) ou parciais (alteralidades) no caso das relações simétricas. Coordenam, também, as diferenças ordenadas no caso das relações assimétricas transitivas (seriações ou encadeamentos). Comportam, ainda, os sistemas multiplicativos (correspondências, etc.). A reversibilidade característica dessas estruturas consiste de reciprocidades. Por exemplo, uma relação simétrica  $A = B$  é idêntica à sua recíproca  $B = A$ . Se uma relação assimétrica  $A < B$  é verdadeira, sua recíproca  $B < A$  é falsa, e, se as duas são verdadeiras, temos  $A = B$ , que é uma equivalência. Uma relação assimétrica  $A < B$  expressa uma diferença entre os termos A e B; anulando essa diferença e expressando-a em seu sentido inverso  $B > A$ , voltamos à equivalência  $A = B$  ou  $A = A$ .

Sendo assim, os agrupamentos elementares constituem as únicas estruturas de conjunto acessíveis no nível das operações concretas e se caracterizam por duas particularidades essenciais que as diferenciam das estruturas formais:

- a) constituem sistemas de inclusões ou de encadeamentos simples ou múltiplos, mas sem combinatória que ligue os diversos elementos; por isso, não atingem a estrutura do reticulado comportada por uma tal combinatória, mas permanecem em estados semi-reticulados;
- b) apresentam uma reversibilidade que consiste de inversão (classes) e de reciprocidades (relações), mas não reúnem essas duas formas de reversibilidade num sistema único; portanto, não coincidem com o grupo INRC e permanecem no estado de grupos incompletos.

Nesse ponto, Inhelder e Piaget vão concluindo que

o que falta às estruturas concretas de agrupamento é a combinatória intrínseca à construção do “conjunto das partes”, ou, o que é a mesma coisa, é a utilização de operações proposicionais (implicações, etc.) ou isomórficas destas últimas, pois as operações interproposicionais repousam sobre a estrutura desse “conjunto de partes” (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 209).

A diferença entre os agrupamentos elementares de classes e de relações (classificações, seriações e correspondências multiplicativas) e a estrutura do “conjunto de partes” é que os primeiros constituem somente semi-reticulados, e o conjunto das partes forma um reticulado completo.

### 3.4.1 Estágios e Subestágios

Os sujeitos dos níveis IIA e IIB não se limitam mais a agir, como os do Estágio I, e, sim, interiorizam suas ações. Entretanto, limitam-se a operações concretas de

seriação e correspondência. Assim, sem procurar a razão dessa correspondência, agem exatamente como os sujeitos do Estágio I. Isso significa que sabem agir de maneira adequada para atingir um objetivo, mas não procuram uma razão para suas ações. Ainda que muito perto da descoberta da lei, não a descobrem, por falta das operações necessárias para a elaboração de uma hipótese explicativa.

Uma das principais características do subestágio II A é o aperfeiçoamento da classificação, devido às operações concretas de inclusão, o que permite a distinção sistemática entre “todos” e “alguns”.

A novidade do nível IIB é o uso de multiplicações entre relações assimétricas. Os sujeitos do nível IIA utilizam a multiplicação lógica sob a forma de correspondências biunívocas. Enquanto isso, os do subestágio IIB utilizam o esquema de tabelas com dupla entrada, bem como agrupamentos co-unívocos (várias ligações para um mesmo resultado).

A novidade do estágio III em relação ao estágio II é que o sujeito, em lugar de apenas considerar as ligações dadas e construir tabelas de correspondências ou de classificações, se coloca no ponto de vista de todas as combinações possíveis.

O nível III é essencialmente novo com relação às características das operações concretas; não se contenta com o real em estado bruto, mas em compreendê-lo como um aspecto de um domínio muito mais amplo, ou seja, o do possível. Os sujeitos do nível II se limitavam a registrar os dados sucessivos em função das relações e classes, mas sem dissociar os fatores e, assim, sem criar hipóteses ou provas.

Os sujeitos do nível IIIA, ao contrário, desde o início concebem o real como um produto de diferentes fatores que se organizam segundo um conjunto de combinações possíveis. Disso decorrem duas condutas que até então não tinham significado: a hipótese, que consiste em reconstituir essas combinações e a prova, que consiste

em estabelecer quais entre elas, efetivamente, obedecem à experiência (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 41-42).

### 3.4.2 O Pensamento Concreto e o Pensamento Formal

O estágio de desenvolvimento que se inicia por volta dos 11-12 anos não constitui somente um nível de realização superior em relação ao estágio de 7 a 11 anos, mas representa, também, um período de formação de um nível de equilíbrio entre os 14-15 anos. Os autores caracterizaram o pensamento do adolescente pela constituição de métodos de indução experimental e de verificação sistemática que a criança desconhece.

Tais métodos de descoberta e provas experimentais próprios do adolescente estão ligados a uma estruturação operatória nova, fundamentada sobre a lógica das proposições e sobre um pensamento “formal” que não requer mais do que algumas operações da lógica de classes e de relações.

Cabe perguntar: o que o pensamento formal acrescenta às operações concretas? No pensamento formal, o raciocínio por hipóteses e a necessidade de demonstração sucedem à simples verificação de relações que acontece no período das operações concretas. O pensamento concreto limita-se a uma dedução a partir das situações reais, enquanto o pensamento formal junta o possível e o necessário.

Embora formadas por sistemas de conjuntos, as operações concretas vão de ligação em ligação, passo a passo, sem considerar em cada ligação específica o conjunto das outras. Ao contrário, as operações formais consideram todas as combinações possíveis. Há, portanto, uma oposição entre operações passo a passo, que caracterizam os agrupamentos de classes e relações, e as operações combinatórias, que asseguram a necessidade dedutiva.

Nas suas pesquisas, Inhelder e Piaget compararam o pensamento concreto da criança ao pensamento formal do adolescente. Verificaram que os pré-adolescentes e adolescentes, na resolução de um problema proposto, começam, de imediato, a construir um conjunto de hipóteses, entre as quais escolhem, experimentalmente, a melhor. Verificaram, também, que a criança do nível concreto não cria hipóteses, age sempre. Com sua ação, ela coordena os resultados que obtém, ou seja, estrutura a realidade na qual atua. Acrescentam que, se ela cria hipóteses, estas são somente projetos de ações possíveis, e não, como no adolescente, instâncias capazes de imaginar o que deveria ser o real se tal ou qual hipótese fosse confirmada.

Com o pensamento formal há uma inversão de sentido entre o real e o possível. Não é o possível que se manifesta sob a forma de um prolongamento do real. É o real que se subordina ao possível.

A partir de agora os fatos são concebidos como o setor das realizações efetivas no meio de um universo de transformações possíveis, pois não são explicados e nem admitidos como fatos, senão depois de uma verificação que se refere ao conjunto das hipóteses compatíveis com a situação dada (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 189).

O pensamento formal é, em essência, hipotético-dedutivo, sendo que a dedução não se refere a realidades percebidas e, sim, a enunciados hipotéticos, ou seja, a proposições relativas a hipóteses. As proposições apresentam dados como simples dados, independentemente do seu caráter real. Nas inferências concretas é introduzido somente um início de necessidade no real. Já o pensamento formal realiza a síntese entre o possível e o necessário. Assim, deduz as conclusões de premissas, cuja verdade é, inicialmente, admitida apenas por hipótese e vai do possível ao real.



### 3.5 DECALAGENS HORIZONTAIS E VERTICAIS

Em várias de suas obras, Piaget descreveu a evolução dos processos cognitivos, desde os mais iniciais, até os mais abstratos e gerais, estabelecendo estágios, como vimos no item anterior. Entretanto, sempre relativizou a idéia de níveis, tratando de evitar as generalizações apressadas e recomendando que a noção de estágio fosse considerada com prudência. Nesse sentido, desenvolveu a noção de decalagens para marcar os deslocamentos e as possíveis instabilidades entre as linhas de desenvolvimento.

O termo decalagem é atribuído a Claparède. Piaget introduziu a noção de decalagem horizontal no terceiro período da sua obra, quando empreendeu uma análise estrutural do raciocínio, em termos de agrupamento.

Já em 1941, Piaget escreveu que

uma noção em que o agrupamento está em decalagem horizontal com relação a uma outra atinge um determinado nível simplesmente mais tarde que a primeira [ . . . ] De maneira geral, pode-se dizer, então, que as decalagens horizontais exprimem as diferenças de velocidade entre as decalagens verticais de noções distintas (PIAGET, apud MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 131).

Também em 1941, Piaget salientou que “as decalagens horizontais produzem-se em um mesmo nível de desenvolvimento, porém, entre sistemas diferentes de ações ou de noções”. E colocou a questão “por que, em um mesmo plano de atividade [ . . . ] certas noções agrupam-se sincronicamente, enquanto outras agrupam-se apenas sucessivamente e sempre na mesma ordem (por exemplo, o peso após a quantidade de matéria e o volume físico após o peso)?” ( PIAGET, apud MONTANGERO & MAURICE-NAVILLE, p. 130)

Mais tarde, Piaget (1973, p. 52) explicou que desenvolveu a noção de decalagem com a finalidade “de fazer obstáculo à generalização dos estágios e introduzir considerações de prudência e de limitação”.

Destacando que as decalagens resultam das resistências do objeto, Piaget (1973, p. 52) ressaltou que “as decalagens caracterizam a repetição ou a reprodução do mesmo processo formador em diferentes idades” .

Ele faz referência a decalagens horizontais quando uma mesma operação se aplica a conteúdos diferentes e exemplifica que, no domínio das operações concretas, a criança poderá chegar aos 7-8 anos organizando séries de quantidades de matéria, do comprimento, etc., sabendo classificar, contar, medir, atingindo a conservação em relação a esses conteúdos. Mas não poderá realizar essas operações no domínio do peso, as quais só saberá aplicar e generalizar dois anos mais tarde. Nos dois casos, são as mesmas operações, mas aplicadas a domínios diferentes. Trata-se de decalagens horizontais no interior de um mesmo período.

Sem dúvida, as decalagens horizontais se expressam na demora do domínio dos raciocínios de conservação, conforme se trate da substância, do peso ou do volume. Na nossa cultura, a conservação da substância é adquirida em torno dos 6-7 anos, a do peso, em torno de 9-10 anos, e a do volume, em torno de 11-12 anos.

Há decalagem horizontal quando a mesma forma de raciocínio aparece mais tarde, se aplicada a um conteúdo diferente. Quando se apresentam à criança duas bolas de argila A e B da mesma espessura, ela admite que há a mesma quantidade de matéria. Diante dos seus olhos transforma-se a bola B numa forma alongada. Aos 5-6 anos de idade, a maior parte das respostas é de não-conservação: a criança acredita que há mais quantidade de matéria na “salsicha” do que na bola. Aos 7

anos, as crianças julgam corretamente: a quantidade de substância é a mesma e justificam suas respostas. Porém, a questão colocada em termos de peso terá uma resposta de não-conservação, como, por exemplo, a “salsicha” pesa mais porque é mais longa. Um ou dois anos depois, o raciocínio de conservação sobre o peso é atingido. Na tarefa de seriar elementos, também verifica-se decalagem entre a seriação de bastões e a seriação de pesos, sempre mais tardia (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998).

A noção de decalagem horizontal se caracteriza pela ausência de sincronismo no aparecimento de condutas de um mesmo nível estrutural. Isso significa que o fenômeno da decalagem horizontal só pode se apresentar no quadro de uma análise estruturalista e genética ao mesmo tempo.

Esse fenômeno marca os limites das capacidades de generalização de uma estrutura mental. Dois raciocínios repousando nas estruturas isomorfas...porém apoiando-se em conteúdos diferentes (por exemplo, a quantidade de matéria e o peso não são dominadas no mesmo momento do desenvolvimento). Vê-se, então, que uma forma de raciocínio não é imediatamente aplicável a todos os conteúdos e que esses se estruturam a velocidades diferentes” (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 132).

De acordo com as explicações de Piaget, a ordem de sucessão no domínio das noções conduz ao tipo de ações subjacentes às noções. Por exemplo, a noção de conservação da substância (ou quantidade de matéria) vem da ação de “recuperar” as partes de um todo. Isso precede a ação de “sopesar”, que entra na conservação do peso. Para “pesar” é preciso antes “recuperar”. Sendo assim, o peso implica a substância, porém a substância não implica o peso. Com essa explicação, vê-se que são os fatores de ordem perceptiva e figurativa que explicariam o retardo de uma aquisição em relação à outra. É preciso que o sujeito diferencie o que se

refere à quantidade de matéria e o que se refere aos pesos para relacionar essas noções. É esse duplo processo que caracteriza a decalagem horizontal.

Para Piaget (apud MONTANGERO & MAURICE-NAVILLE) propriedades espaciais, assim como propriedades físicas, explicam a “resistência do objeto” à sua assimilação às operações do sujeito. Ao utilizar a expressão “resistência do objeto”, O autor atribui às propriedades do real um papel de destaque na definição da decalagem horizontal, embora seja um papel negativo, o de obstáculo ao exercício das operações do sujeito.

A ascensão por patamares dá lugar a repetições que parecem quase retornos, como se uma parte das coordenações adquiridas devesse ser retomada no estágio seguinte. Esse fenômeno de repetição com decalagem de um nível de organização a outro é o que chamamos de decalagem vertical.

Piaget define as decalagens verticais como

analogias funcionais entre construções de estruturas diferentes e sucessivas, analogias devido ao fato de que os problemas de equilíbrio são colocados nos mesmos termos por ocasião de cada nova estruturação; em resumo, as decalagens verticais são devido ao fato de que os desequilíbrios sucessivos do desenvolvimento resultam sempre das mesmas causas (discordância entre o real e o pensamento, portanto, entre acomodação e assimilação), efetuando-se os reequilíbrios segundo o mesmo funcionamento. (PIAGET, apud MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 134)

Becker (2003) exemplifica que uma criança de classe alta, sem problemas hereditários, com amplo acesso aos bens culturais, sem a intermediação adequada da família e da escola, poderá apresentar as mesmas decalagens que uma criança desnutrida e sem acesso aos benefícios da cultura. A respeito delas, Ramozzi-Chiarottino (1988) afirma que estão defasadas, sem que sejam defasadas.

Nas decalagens horizontais uma mesma operação se aplica a conteúdos diferentes. Já as decalagens verticais são a reconstrução de uma estrutura por meio de outras operações. Piaget dá como exemplo que, ao final do período sensório-motor, o bebê atinge o que Poincaré chama de “grupo de deslocamentos”. Isso significa que ele sabe, perfeitamente, orientar-se em sua casa, com os desvios, retornos, etc. Entretanto, esse grupo é, essencialmente, prático. Alguns anos mais tarde, a criança poderá representar esses deslocamentos, isto é, imaginá-los ou interiorizá-los em operações. Encontram-se aqui etapas análogas ao período sensório-motor, desta vez sobre um outro plano, o da representação. “Há decalagem vertical entre o domínio do espaço no plano da ação e no do pensamento” (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 135).

A noção de decalagem vertical também foi inspirada na lei da tomada de consciência ou lei da decalagem de Claparède. Foi ele quem mostrou que as operações psicológicas de um certo nível devem ser retomadas logo que a criança atinge um plano de consciência mais elaborado.

Em resumo, o termo decalagem refere-se a condutas, processos ou estruturas análogas que surgem em momentos distintos do desenvolvimento, em lugar de serem sincrônicos.

No entender de Montangero & Maurice-Naville (1998, p. 135), “essa noção compreende, pois, tanto a idéia de analogia quanto a de retardo temporal entre as condutas. É em uma teoria do desenvolvimento que distingue diferentes planos hierárquicos de conhecimento que essa noção toma sentido”.

Os autores destacam, ainda, que toda passagem a um plano superior é marcada pela continuidade e pela ruptura, ao mesmo tempo. A continuidade é de ordem funcional: são os mesmos mecanismos – no caso, a assimilação e a

acomodação – que se utilizam em todos os níveis. A ruptura resulta da reorganização num novo plano, o da aparição das estruturas novas.

Também há continuidade pelo fato de que as estruturas anteriores são integradas às novas, como subsistemas. Piaget utilizou a metáfora da espiral para dar conta dessa progressão, em que há repetição de um processo de construção análogo cada vez que há uma passagem a um nível superior. Cada nova espiral aparece mais alargada que a anterior marcando uma ascensão constante no eixo vertical e retornos ao ponto de partida no eixo horizontal.

## CAPÍTULO 4

“A primeira finalidade do ensino foi formulada por Montaigne: mais vale uma cabeça bem feita que bem cheia.

O significado de ‘uma cabeça bem cheia’ é óbvio: é uma cabeça onde o saber é acumulado, empilhado, e não dispõe de um princípio de seleção e organização que lhe dê sentido. ‘Uma cabeça bem feita’ significa que, em vez de acumular o saber, é mais importante dispor ao mesmo tempo de

- uma aptidão geral para colocar e tratar os problemas;
- princípios organizadores que permitam ligar os saberes e lhes dar sentido”.

Edgar Morin

## 4 MULTIPLICAÇÃO – UMA RECONCEITUAÇÃO DO NÚMERO

O terceiro capítulo abrange diferentes aspectos da aprendizagem de um modo geral e, mais especificamente, da aprendizagem da matemática e da aprendizagem da multiplicação.

### 4.1 A LÓGICA INERENTE À APRENDIZAGEM E O PROCESSO DE EQUILIBRAÇÃO

Num estudo sobre os componentes lógicos da aprendizagem, Piaget (1974) levantou as seguintes perguntas: até que ponto a aprendizagem comporta uma lógica, isto é, utiliza, em seu funcionamento, estruturas lógicas ou pré-lógicas? Existe ou não uma aprendizagem independente de qualquer lógica, limitada ao registro das informações exteriores?

A conclusão geral a que Piaget chegou é que todo registro de um dado exterior, até mesmo o que parece ser puramente perceptivo, constitui mais do que um simples registro, mas implica coordenações não “dadas”, e, sim, resultantes das atividades e das interpretações do sujeito.

A discussão de Piaget sobre a aprendizagem das estruturas lógicas e a lógica inerente aos mecanismos de aprendizagem pode ser resumida em duas questões:

- 1) saber se existe uma aprendizagem das estruturas lógicas, se esta aprendizagem pode ser reduzida à das estruturas físicas ou se, pelo contrário, comporta uma espiral, de modo que, para construir uma estrutura lógica é preciso partir de outras estruturas lógicas ou pré-lógicas;
- 2) saber se a aprendizagem consiste em acrescentar novas aquisições tiradas da experiência em aquisições anteriores obtidas da mesma maneira –



chegando até aos mecanismos hereditários – ou se toda aprendizagem supõe instrumentos parcialmente isomorfos aos instrumentos lógicos e se é, por conseguinte, não aprendida em sua totalidade.

Sobre essa discussão, diz Piaget que

a ausência de toda a aprendizagem das estruturas lógicas seria favorável a uma interpretação apriorística, recorrendo a um puro desenvolvimento interno. A redução de tal aprendizagem à das estruturas físicas conduziria a uma interpretação empirista. A espiral das estruturas lógicas aprendidas e das estruturas anteriores constituindo a condição dessa aprendizagem sugeriria uma interpretação interacionista, na qual seria necessário precisar o papel da existência e o das atividades do sujeito (PIAGET, 1974, p. 25).

Resumindo os trabalhos de Gréco e Morf, entre outros, Piaget sustenta que

- a) existe, sem dúvida, uma aprendizagem das estruturas lógicas;
- b) essa aprendizagem fica limitada sempre que obtida pela leitura dos resultados das transformações;
- c) a aprendizagem é mais eficaz à medida que provoca um exercício operatório;
- d) a aprendizagem das estruturas lógicas, dos 5 anos e meio aos 7, consiste na construção de coordenações novas por diferenciação das coordenações anteriores, segundo um processo espiral, de modo que para aprender uma estrutura lógica é necessário utilizar outras que conduzam a ela ou que a impliquem;
- e) a aprendizagem, no sentido restrito, é uma aquisição em função da experiência, que no caso das estruturas lógicas não se reduz à experiência física.

Os fatores inatos relacionados à maturação e os da experiência física ou social se combinam com um fator mais geral. Este, como já foi visto, não pode ser considerado hereditário, nem adquirido em função da experiência: é o fator da

equilíbrio. Esse “mecanismo de equilíbrio se explica pelo fato de que cada uma das etapas sucessivas apresenta uma probabilidade crescente em função dos resultados obtidos na etapa precedente” (PIAGET, 1974, p. 35).

A experiência física consiste em agir sobre os objetos para descobrir as propriedades, ainda abstratas, nesses objetos, por exemplo, sopesar um corpo a fim de avaliar o seu peso. A experiência lógico-matemática também consiste em agir sobre os objetos, mas para descobrir propriedades das ações do sujeito. Isso porque, num certo nível de abstração, é inútil a experiência sobre os objetos, e basta a coordenação das ações para engendrar uma manipulação operatória que proceda de maneira dedutiva, por exemplo, descobrir que uma classe B é igual à soma de suas subclasses A + A'.

Se a experiência física se dirige aos objetos, a experiência lógico-matemática se dirige às ações que utilizam os objetos e emprega uma abstração a partir dessas ações. Para atingir coordenações novas, ela recorre a coordenações anteriores, das quais abstrai os elementos necessários à construção das novas coordenações.

Ainda, de acordo com as pesquisas de Piaget, não existe uma constatação “pura”, uma leitura da experiência que não englobe, desde o começo, um elemento de interpretação, relativo a propriedades não constatadas atualmente. O resultado das investigações de Piaget é que

mesmo no nível da percepção, a leitura não é nunca um simples registro, mas supõe uma assimilação do dado a esquemas comportando uma atividade do sujeito e, por conseguinte, uma parte de inferência ou de “pré-inferência” (PIAGET, 1974, p. 39).

#### 4.1.1 Modificação dos Esquemas, Equilibração, Aprendizagem

O desenvolvimento marca a passagem da aprendizagem das ações à aprendizagem dos conhecimentos: a reação circular terciária já é um começo diferenciado da aprendizagem dos conhecimentos, na medida em que o interesse recai sobre a compreensão e não somente sobre o êxito, ao contrário das reações anteriores, nas quais há um predomínio da aprendizagem da ação.

A aprendizagem das ações e a aprendizagem dos conhecimentos referem-se a conteúdos e só tardiamente se manifesta uma aprendizagem das formas ou das estruturas lógicas. Piaget ressalta que

do ponto de vista do equilíbrio, essa aprendizagem dos conteúdos é caracterizada por uma equilibração gradual, mas sempre inacabada, entre assimilação e acomodação, enquanto somente as estruturas lógico-matemáticas realizarão esse equilíbrio sob uma forma permanente (PIAGET, 1974, p. 70).

A assimilação inicial tende a incorporar todo o meio a alguns poucos e rígidos esquemas. As perturbações do meio abalam essa estabilidade, forçando acomodações, modificando os esquemas e sua tendência à conservação. O equilíbrio aumenta à medida que os esquemas se multiplicam, se diferenciam e se coordenam entre si. O equilíbrio se amplia mais ainda quando o sujeito começa a se interessar pela variação como tal.

Piaget (1974, p. 70) concluiu que “somente nesse nível haverá equilíbrio permanente entre assimilação e acomodação, na medida em que as estruturas lógico-matemáticas serão acomodadas a qualquer transformação, dependendo de seus domínios”.

#### 4.1.2 Aprendizagem das Estruturas Lógicas

A aprendizagem das estruturas lógicas faz parte de um tipo especial de aprendizagem que podemos caracterizar como aprender a aprender. Piaget chama a atenção para o fato de que a aprendizagem começa pouco depois do nascimento e que é necessário esperar 7-8 anos ou mais para que a criança possa compreender a classificação, por exemplo. Por isso propõe que “ou as leis da aprendizagem não são gerais ou as estruturas lógicas não se aprendem sem mais, ou uma e outra dessas duas suposições têm fundamento (o que pensamos)” (Piaget, 1974, p. 75).

Ele chega, assim, à distinção necessária entre a aprendizagem no sentido amplo e a aprendizagem no sentido restrito. O conjunto das diferenciações devidas à acomodação, de onde provêm novos esquemas, em função dos conteúdos é aprendido *stricto sensu*. O funcionamento assimilador não é aprendido *stricto sensu*, devido às suas exigências de equilíbrio entre a assimilação e a acomodação, devido à coerência gradual dos esquemas e sua organização em formas equilibradas. Tendo em vista as interações entre a assimilação e a acomodação, a aprendizagem *stricto sensu* e a equilibração passam a constituir a aprendizagem *lato sensu*, que tende a se confundir com o desenvolvimento.

#### 4.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE A INICIAÇÃO À MATEMÁTICA

O desenvolvimento espontâneo das estruturas lógico-matemáticas precisa ser alimentado, complementado e ampliado por adequadas experiências de ensino (PIAGET, 1998).

Diz-se que a criança deve passar pelas etapas históricas vividas pela humanidade, pois recapitula, na sua embriogênese, o desenvolvimento ancestral. Piaget concorda com essa afirmação em termos gerais, mas sustenta que a matemática é uma exceção. O autor recorda Aristóteles: o que vem primeiro, na ordem da gênese, pode ser o último na ordem da análise. Isso porque podemos descobrir o resultado de uma operação antes de tomar consciência da sua existência. É por isso que operações primitivas geneticamente apareceram tarde na história das ciências, como, por exemplo, a correspondência biunívoca, com Cantor.

A ordem histórica iniciou com a métrica euclidiana, seguiram-se os espaços projetivos e, por fim, as estruturas topológicas. Como já foi destacado, a geometria espontânea da criança não obedece a essa seqüência histórica, estando mais próxima da ordem teórica.

As primitivas intuições operatórias são de natureza topológica (... com a consideração das vizinhanças,... da abertura e do fechamento, das fronteiras, etc.), com um longo primado sistemático das relações de ordem predominando sobre toda a métrica; depois, mas apenas mais tarde, constituem-se conjuntamente, e apoiando-se mutuamente, as estruturas projetivas e a métrica euclidiana. (PIAGET, 1998, p. 218-219).

Piaget mostra-se favorável ao ensino da matemática moderna, argumentando que esta se aproxima mais das operações naturais ou espontâneas do sujeito, criança ou adolescente, do que o ensino tradicional. Seguindo essa via de pensamento, propõe uma revisão em todos os graus de ensino, desde o pré-escolar ao secundário, na medida em que as ações da criança ( e não do discurso da professora) pode preparar a utilização das funções, dos conjuntos (classificações e seriações qualitativas), das operações qualitativas ou lógicas e a descoberta das invariáveis.

Sendo assim, é preciso toda cautela para não queimar etapas. Nesse ponto, Piaget concorda com Leray de que é preciso, inicialmente, conhecer melhor essas etapas, e que o pouco que se sabe é totalmente ignorado pelos professores. No dizer de Leray (1980, p. 220), “o ensino deve formar informando, fazer descobrir e não professar a verdade”. Entretanto, o que se constata é o ensino da matemática “moderna” por métodos arcaicos, verbalistas, calcados na transmissão, e não na reinvenção ou descoberta pelo aluno.

Ainda, para passar da ação ao pensamento representativo é preciso uma cuidadosa gradação, assim como são necessárias transições contínuas para passar do pensamento operatório à reflexão sobre esse pensamento, sendo o último escalão a passagem da reflexão à axiomatização. Na escola, de um modo geral, o ensino da matemática inicia pela axiomática. Como constata Piaget (1998, p. 221), “[ . . . ] psicologicamente, uma axiomática só tem sentido a título de tomada de consciência ou de reflexão retroativa, o que supõe toda uma construção proativa anterior”. As crianças e os adolescentes manipulam operações de conjuntos, de grupos, etc., sem ter consciência disso, pois estes funcionam como esquemas de comportamento e de raciocínio antes de serem objeto de reflexão.

O desenvolvimento matemático dá-se por abstrações reflexionantes, no duplo sentido de uma projeção sobre novos planos e de uma permanente reconstrução antecedendo as construções novas. Na educação matemática não se pode esquecer dessa verdade, nem de que toda abstração procede de estruturas mais concretas.

A posição de Piaget é que a noção de conjuntos matemáticos surge tarde na criança e explicou que “quando lhes falamos de conjuntos, elas pensam simplesmente em coleções, em indivíduos considerados coletivamente. Nesse caso,

eu não falaria de conjuntos, mas de classes” (PIAGET, 1998, p. 224). Nesse contexto, há conjunto apenas quando se pode fazer uma correspondência cardinal não qualitativa entre uma coleção e outra.

Numa correspondência qualitativa, a um quadrado corresponde outro quadrado; a um losango, outro losango; a uma estrela, outra estrela. Porém nesse caso não se pode falar de conjuntos, mas de duas classes colocadas em isomorfismo e em correspondência. Numa correspondência não apenas qualitativa, mas “qualquer”, faz-se abstração das qualidades, e cada elemento é tomado como uma unidade. Nesse caso, pouco importa se ao quadrado corresponder uma estrela ou ao losango uma forma redonda. Há uma mesma quantidade, pois há correspondência. Nesta visão de Piaget (1998, p. 225), “o conjunto supõe a construção do número e, sobretudo, a conservação do número”.

Piaget enfatiza que a noção de conjunto é bem menos precoce do que parece à primeira vista e que uma coleção com características comuns é uma classe, não um conjunto. Entre os 5 e os 8 anos a criança constrói classes, o que não é muito fácil. Elas fazem coleções justapostas, depois encaixadas, sem chegar à inclusão e muito menos à quantificação da inclusão. Isso implicaria a idéia de que há mais em B do que em A, se A faz parte de B. Mas a criança não compara A com B, compara A com a outra parte de B. Pode-se falar de conjunto quando a fusão num mesmo sistema de inclusão e de ordem dá origem ao número. Nesse caso, existe quantificação da inclusão e seriação. O conjunto é uma coleção apta a receber um cardinal, depois de se fazer a abstração das particularidades próprias aos diferentes elementos.

Nesse sentido, o número é concebido como síntese da inclusão e da ordem e não pode haver cardinal sem ordenação e um ordinal sem cardinação. Assim, “ $n+1$ ”

é, ao mesmo tempo, ordinal e cardinal, e  $n+1$  é a lei fundamental dos números inteiros. Não é possível definir o ordinal sem o cardinal. O primeiro não tem predecessores, o segundo é o que tem um predecessor, e o terceiro é o que tem dois predecessores, ou seja, há sempre um cardinal que permite distingui-los. Reciprocamente, quando se fazem correspondências entre duas coleções, abstraindo das qualidades ou tomando objetos equivalentes (fichas da mesma cor), só é possível definir os elementos cardinalmente pela ordem. Não há cardinalização possível sem uma ordem temporo-espacial.

O infinito vai aparecer no nível hipotético-dedutivo. Piaget pesquisou essa questão perguntando para as crianças quantos pontos é possível colocar entre dois pontos limites. A progressão acontece de acordo com a idade: os pequenos respondiam que é possível colocar dez pontos, mais adiante passava para trinta e, depois, para cem. Mas só em torno de 11-12 anos as crianças diziam que se podem pôr quantos pontos quiser.

Por fim, Piaget fala dos dois tipos de operações na criança e que se dissociam em torno dos 8 anos. Uma são as operações lógico-matemáticas, fundadas sobre as noções de semelhança e de diferença, de equivalência e de não-equivalência, etc. Outras são as operações infralógicas, “que incidem sobre o objeto e seus constituintes, os pedaços do objeto em contraposição ao objeto como elemento de uma classe” (PIAGET, 1998, p. 240).

O infralógico e o lógico-aritmético não se diferenciam no período pré-operatório. Com a diferenciação entre duas coleções de formas diferentes pode-se ter o mesmo número e, mesmo assim, numa haver mais do que na outra, pois pode ser o mesmo número, e não a mesma quantidade. Somente quando as operações



lógico-aritméticas e infralógicas se dissociarem é que se pode falar de operações propriamente operatórias, topológicas, projetivas ou euclidianas.

Nessas considerações sobre a iniciação à matemática, não se poderia deixar de registrar que a matemática passou por transformações profundas e que até mesmo sua linguagem se modificou. Sendo assim, os alunos precisam se familiarizar, desde cedo, com novos conceitos. Também o surgimento de novos recursos didáticos modificaram a aprendizagem do cálculo, propiciando a utilização de novos materiais concretos. O ensino da matemática também se modificou pela utilização, ainda que modesta, dos dados da psicologia da criança e do adolescente (PIAGET, 1976).

Apesar dessas modificações, ainda se ensina matemática “moderna” por métodos tradicionais, uma vez que ainda não está suficientemente desvendada “a relação que existe entre as estruturas matemáticas recentemente descobertas e as estruturas operatórias espontaneamente construídas no curso do desenvolvimento mental” (PIAGET, 1976, p. 50).

#### 4.3 DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Chama a atenção o fato de que alunos capazes em outros campos fracassam freqüentemente na aprendizagem da matemática. É difícil compreender por que indivíduos bem dotados na utilização das estruturas lógico-matemáticas espontâneas tenham dificuldade num ensino que incide sobre tais estruturas, pois a matemática não passa de um prolongamento da própria lógica.

Essa situação leva Piaget (1976, p. 52) a crer que “o problema central do ensino das matemáticas é o ajustamento recíproco das estruturas operatórias

espontâneas próprias à inteligência e do programa ou dos métodos relativos aos domínios matemáticos ensinados”. Sem dúvida, a falta de aptidão para a matemática é relativa, não em relação à matemática em si, mas pelo modo como é ensinada.

As estruturas operatórias da inteligência, que são de natureza lógico-matemática, não são conscientes e, portanto, não constituem objeto de reflexão. É o ensino da matemática que leva o indivíduo a refletir sobre as estruturas, por meio de uma linguagem simbólica que exige um grau mais ou menos alto de abstração.

Sendo assim, a dificuldade pode estar na compreensão da própria linguagem. Além disso, acrescenta Piaget:

como tudo se acha incluído numa disciplina inteiramente dedutiva, o impasse ou a incompreensão que incide sobre tal ou qual elo acarreta uma dificuldade crescente na seqüência dos encadeamentos, de tal modo que o aluno desadaptado no que se refere a um ponto não compreende o ponto seguinte e cada vez duvida mais dele (PIAGET, 1976, p. 52).

Acrescentem-se a isso os sentimentos autodepreciativos, freqüentemente reforçados por professores e pais.

O principal problema pedagógico é o de como encontrar os métodos mais indicados para passar dessas estruturas lógico-matemáticas naturais, espontâneas, não-reflexivas, para a reflexão, pondo-as em teoria.

Como tantos outros estudiosos, Stella Baruk (1996) não poupa críticas à falta de sentido no ensino da matemática. No seu modo de ver, além da angústia provocada nas crianças pelas exigências dos professores, o ensino da matemática transmite uma ciência sem consciência.

No entanto,

saber onde se quer ir e quais são os métodos lícitos para o fazer são os dois principais utensílios matemáticos autênticos naquilo que a

atividade matemática tem de consciente, sendo essa atividade consciente apenas a parte aparente da atividade matemática sem mais (BARUK, 1996, p. 80).

Mas, de um modo geral, os alunos são privados desses dois utensílios. Nunca se vê um aluno refletir no quadro. Ele sabe reproduzir. Sabe de memória o que fazer ou não faz nada. Também muito raramente o professor reflete no quadro. Explica a aula e corrige os exercícios ou atrapalha-se, perdendo o fio da meada. No entanto, a correção de um trabalho não faz a criança compreender o que não tinha compreendido. Observa-se, quotidianamente, que o aluno fica mais desconcentrado depois da correção do que antes. As perguntas são dirigidas à folha de papel. É o professor que as coloca e as responde nessa cerimônia de desorientação que se conhece por correção. O aluno fica sabendo que não compreendeu, mas nem por isso passa a compreender melhor ou toma consciência de por que não compreendeu.

Segundo Baruk, do modo como as coisas estão, quem pratica a atividade matemática deve oferecer ao outro uma ação imediata, exibir um “savoir-faire”, sob pena de todo o seu saber ser posto em dúvida.

Na visão da autora, há uma dissociação entre aquilo que o aluno faz e aquilo que tem consciência de fazer, o que produz fissuras na construção matemática.

Tudo deve ser feito de modo que a criança tenha a revelação da ordem que a matemática, supostamente, instaura no caos das nossas impressões sensoriais. Acumulando-se experiências, mais tarde o sentido virá à consciência. Vale o dito: compreenderás mais tarde.

É aqui que surge o verdadeiro rosto do ensino matemático. Ele exige *antes do mais* do sujeito uma total dependência, exigência formulada ou não, mas em todos os casos indispensável no reino da profissão matemática considerada como exercício da religião do mesmo nome (BARUK, 1996, p. 103).

Só o professor conhece o sentido da atividade. De acordo com os dogmas do ensino, a criança é instada a não entrar em conflito com a programação, com os planos, com as atividades. Para tanto, só há um jeito de atuar, é fazendo as coisas, executando as tarefas. Ao aluno, que não sabe o que fazer para obter aprovação, resta aceitar essa dependência, com tudo que ela traz de desorientação, pânico, medo de ser rejeitado. Da dependência passa-se à aniquilação do sujeito afetivo e cognitivo.

Se a criança quer satisfazer o professor, passar de ano, ter o seu diploma, subir na vida, é necessário que aceite aquilo que o professor impõe, a aula, o diploma, a vida: quer dizer que várias horas por semana, várias semanas por mês, vários meses por ano e vários anos na vida, tem que ser autômato, utilizador-distribuidor de sinais, mensagens, códigos e sistemas desprovidos de sentido; utilizador-distribuidor, contra a sua vontade, da linguagem matemática (BARUK, 1996, p. 175).

Baruk toma como exemplo as regras em relação à escrita dos números ou em relação às práticas operatórias, em que, para o aluno, os sinais acham-se distanciados dos seus significados. Na verdade, isso não deveria ser assim, pois as regras da escrita dos números definem o seu funcionamento. Entretanto, graças a uma combinatória de fatores, essa escrita torna-se desregulada, enlouquecida.

Da mesma forma, a leitura matemática não pode dispensar a compreensão, não pode ser reduzida a uma atividade conjugada de visão e fonação.

Outro aspecto levantado por Baruk é que o aluno não pode distinguir, por si, um axioma de uma definição e uma definição de uma propriedade, se esta distinção não lhe é apresentada como sendo essencial. No modo como segue o ensino, todos os objetos já estão constituídos e cabe ao aluno somente reproduzi-los.

Nos livros, as configurações propostas já apresentam as conclusões que deveriam ser descobertas. Entretanto, as lições sabidas de cor não ajudam a

encontrar a solução para problemas de álgebra ou geometria. Muitos alunos estudiosos “compreendem bem as aulas”, mas não sabem aplicá-las.

As coisas podem muito bem avançar um ano ou dois e depois estagnar completamente. Há professores simpáticos com os quais não há avanços e professores “duros” com os quais as coisas avançam. O contrário também é verdadeiro, pois “tudo é possível, dado que tudo está organizado em torno do impossível, quer dizer, da ausência da criança” (BARUK, 1996, p. 108). Nesse terreno minado, a criança faz seu campo de batalha. Cria-se uma prova de forças da qual não é fácil libertá-la, pois, como adverte Baruk (1996, p. 161) “não é fácil discutir serenamente com alguém que é permanentemente submetido a violências e que não gosta disso”.

O insucesso na matemática é um pesadelo cotidiano, produzido e garantido pela matemática, pela pedagogia e pela psicologia. Baruk entende que o psicólogo poderia fazer com que esses estragos não fossem lançados no débito da criança, verificando se o pedagogo não falhou na sua tarefa. Em vez disso, reflete a autora, os psicólogos fazem constatações, balanços, inventários, e a criança torna-se presa fácil das consultas-psi, das reeducações, etc. Um observador não psicólogo percebe que, na vida, essa criança é “quase” normal: comporta-se de maneira sensata, utiliza adequadamente os objetos, dialoga de modo compreensível. Se o observador, além de acompanhar essa criança na vida, tenta acompanhá-la em matemática, evidencia que ela é capaz de produzir atividade matemática, apesar da dificuldade em dar o nó nos cordões do sapato, em aceitar o novo irmãozinho ou a separação dos pais.

E é por isso que a autora pergunta: quantos serão os professores que percebem que a criança sabe contar e somar antes de ter aprendido na escola? Quantos serão os que percebem que a criança é capaz de adicionar, subtrair,

multiplicar e dividir sem ter aprendido na escola? E quantos percebem que a criança sabe adicionar, subtrair, multiplicar, dividir “apesar” de isso ter sido ensinado na escola? São poucos, é certo, garante Baruk (1996). São os que permitem que a criança conte nos dedos, que “encontre o seu jeito”, que dão tempo para ela.

Como mostra Piaget (1976), o conflito está entre a manipulação operatória das estruturas e a linguagem simbólica que a expressa. Nas suas palavras, “as estruturas mais gerais da matemática moderna são, por sua vez, as mais abstratas, enquanto as mesmas estruturas se apresentam no espírito da criança sob a forma de manipulações concretas, materiais ou verbais” (PIAGET, 1976, p. 54). Para tanto, é importante distinguir a abstração a partir dos objetos – que é fonte da experiência física, alheia à matemática, da abstração a partir das ações, fonte de dedução e da abstração matemática. Isso não significa, entretanto, que o desenvolvimento da abstração e da dedução deve ser feito unicamente pela linguagem e pelo simbolismo. Ao contrário,

a abstração matemática é de natureza operatória e procede, obrigatoriamente, por etapas contínuas a partir de operações as mais concretas. [ . . . ] É preciso, pois, não confundir o concreto com a experiência física, que tira seus conhecimentos dos objetos e não das ações próprias do sujeito, nem com as apresentações intuitivas, no sentido de figurativas, porque estas operações são extraídas das ações e não das configurações perceptivas e imagéticas (PIAGET, 1976, p. 54).

Piaget lembra que a Conferência Internacional de Instrução Pública (Bureau International de Educação e UNESCO), na sessão de 1956, inseriu na sua recomendação nº 43 (“O ensino das matemáticas nas escolas secundárias”) os seguintes artigos:

Importa:

- a) levar o aluno a formar as noções e descobrir por si mesmo as relações e as propriedades matemáticas, em vez de lhe ser imposto um pensamento adulto, já acabado;
- b) assegurar as aquisições das noções e dos processos operatórios antes de introduzir o formalismo;
- c) só confiar ao automatismo as operações assimiladas.

É indispensável:

- a) fazer com que o aluno inicialmente adquira a experiência dos seres e das relações matemáticas e iniciá-lo, em seguida, no raciocínio dedutivo;
- b) estender progressivamente a construção dedutiva das matemáticas;
- c) aprender a formular os problemas, a pesquisar dados e a explorar e apreciar os resultados;
- d) dedicar-se de preferência à investigação heurística dos problemas do que à exposição doutrinária dos teoremas.

É preciso:

- a) estudar os erros dos alunos e ver neles um meio de conhecer seu pensamento matemático;
- b) treinar na prática do controle pessoal da autocorreção;
- c) dar o sentido da aproximação;
- d) dar prioridade à reflexão e ao raciocínio. (PIAGET, 1976, p. 55)

#### 4.4 PREMISSAS TEÓRICAS DA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

A seguir apresentamos duas premissas teóricas da aprendizagem da matemática, de acordo com Steffe (1994).

A primeira premissa da aprendizagem da matemática é que, quando confrontadas com as situações matemáticas iniciais, as crianças usam os esquemas já disponíveis, na tentativa de resolvê-las. Apesar das explicações do professor sobre métodos mais adequados, elas persistem na utilização de seus esquemas. Mais ainda, se as tentativas da criança são bem sucedidas em produzir uma resposta considerada certa, o professor pode não perceber que ela está usando os seus próprios métodos. Entretanto, esses meios podem se tornar ineficientes, se a

criança é desencorajada de usá-los em favor das práticas tradicionais impostas pelo professor.

Muitas crianças não usam o método matemático “apropriado”, ensinado na escola, por confiarem mais nas suas estratégias intuitivas, espontâneas, que, em boa parte, envolvem mais a contagem do que as quatro operações. Booth (1984) não acredita que os métodos informais sejam incorretos, mas considera problemática sua persistência na escola secundária, pois se tornam extremamente ineficazes quando são envolvidos números grandes ou não-inteiros, por serem baseados na contagem. Por isso afirma que

ajudar as crianças a aprender procedimentos matemáticos formais significa reconhecer os métodos que elas já usam e ajudá-las a compreender as relações entre o que fazem espontaneamente e o que o professor está apresentando e apreciar o valor desta conexão, ajudando-as, assim, a compreender as limitações da sua própria abordagem (BOOTH, 1984, p. 160).

Essa orientação é totalmente contrária à idéia de que, para ensinar matemática, basta dizer para a criança o que ela deve fazer.

Nesse ponto, chegamos à segunda premissa da aprendizagem da matemática, apontada por Steffe, fundamentada no construtivismo de Jean Piaget: nenhum conhecimento que implica ações e operações pode ser instalado “pronto” na cabeça dos estudantes. Pelo contrário, precisa ser ativamente construído por eles.

Isso não significa uma perda da importância do papel do professor. Nem os conceitos científicos, nem os conceitos práticos brotam espontaneamente. Eles são constituídos sob a influência da orientação fornecida pelo adulto. Sob a perspectiva das duas premissas teóricas mencionadas, o ensino toma a forma de uma



orientação específica das construções conceituais da criança, o que é muito diferente da comunicação do modo “correto” de fazer as coisas.

Esse é um aspecto fundamental porque, quando a criança começa a aprender matemática, há pouca coincidência entre seus conceitos e os dos adultos. A comutatividade e a reversibilidade envolvidas na compreensão aritmética, por exemplo, são difíceis para os alunos das séries iniciais. Ao entrar na escola, geralmente, a criança não faz operações desse tipo e não é suficiente dizer a ela do que se trata. Não há nenhuma razão para supor que a criança pode “ver” que um determinado procedimento leva a um resultado que constitui a solução.

Nessa perspectiva, a tarefa essencial, no início, não é apresentar um modo “correto de fazer”, mas, em lugar disso, auxiliar a criança a encontrar meios de operar para atingir seus objetivos. Essa orientação, necessariamente, tem que começar dos pontos que são acessíveis para a criança.

Para estabelecer os pontos de partida é indispensável compreender os conceitos e métodos das crianças, não importa quão ineficazes possam parecer. Os sistemas cognitivos assimilam as experiências a estruturas que o sujeito já possui e acomodam essas estruturas quando alguma coisa não leva ao resultado esperado. Sendo assim, é óbvio que o professor será melhor sucedido se descobrir quais são as estruturas e os modos de operar que a criança apresenta.

É por isso que a pesquisa de Steffe procura construir um modelo das concepções iniciais, informais, de multiplicação e divisão, para derivar dessa “matéria pura” caminhos viáveis e meios de orientar suas conceitualizações e atividades. A matemática escolar atual é baseada, quase exclusivamente, em procedimentos e conceitos matemáticos formais que, por sua natureza, estão muito distantes do mundo conceitual das crianças. Porém, é somente a partir dos próprios

recursos conceituais que elas podem adquirir compreensão e progredir na matemática.

Trabalhos recentes mostram que é grande o poder criativo das crianças quando se aproximam de problemas numéricos. A questão é descobrir um modo de aproveitar esse poder. Para tanto, é preciso que se tenha um modelo detalhado de como as crianças constroem os conceitos matemáticos em situações e contextos, à medida que as situações acontecem.

Há noções e métodos que as crianças desenvolvem por si próprias, em contextos fora da escola. São os chamados “métodos das crianças”. Há outras noções e métodos que se desenvolvem no contexto de ensino indireto, os algoritmos inventados pelas crianças, construídos por elas quando tentam resolver uma tarefa por si próprias. Não deixam de ser esquemas que Piaget (1966, p. 11) definiu como “a estrutura ou a organização das ações, as quais se transformam ou se generalizam no momento de repetição da ação, em circunstâncias semelhantes ou análogas”.

Existe uma grande diferença entre os algoritmos inventados pelas crianças e os algoritmos convencionais, como as longas divisões. De forma semelhante, existe uma nítida diferença entre demonstrar e modelar um algoritmo, esperando que a criança imite, e apresentar situações, sem modelar ou demonstrar métodos de solução, através de interativa comunicação. Desse modo, é melhor não começar por métodos predeterminados. É mais indicado apreender os esquemas e as modificações que as crianças fazem nesses esquemas, na resolução das situações apresentadas.

O esquema de contagem, fundamental na construção dos números inteiros, resulta de um contínuo refinamento, à medida que o aluno progride e não se limita à

contagem de unidades. Sua elaboração para incluir unidades compostas, isto é, unidades cuja numerosidade é maior do que a unidade, é essencial na aprendizagem da multiplicação e divisão. Somente quando os professores consideram os esquemas que o estudante já construiu é que podem trazer novo material para introduzi-los em novos conhecimentos. A capacidade de construir novos meios de operar resulta num sentimento de poder e controle nos estudantes que, mais do que qualquer outra coisa, provoca motivação.

O poder de assimilação e acomodação pode ser exemplificado por Tyrone, participante dos experimentos de Steffe (STEFFE; VON GLASERSFELD, 1980) sobre problemas multiplicativos.

Tyrone estava enfrentando o problema  $20 \times 20$ . Seqüencialmente, ele levantava os dedos vinte vezes, sincronicamente, enquanto dizia 20, 40, 60, 80...340, 380, 400. Ele levantou cada um de seus dedos por duas vezes. Parou de contar espontaneamente, indicando ter compreendido totalmente a repetição de vinte vezes o 20. A próxima tarefa dada era  $30 \times 20$ . Ele começou contando de 400 e seguiu 420, 440, 460...600!. Novamente ele levantou seus dedos seqüencialmente e, por sua conta, parou a contagem no 600, considerando este o resultado.

Os esquemas de contagem de Tyrone eram muito diferentes dos algoritmos convencionais. Seu método de multiplicar era um aprimoramento do seu mais antigo sistema de contagem, a contagem por unidades. Ele resolveu as tarefas usando seus próprios métodos. Não havia descontinuidade entre a sua própria realidade matemática e o que ele era solicitado a fazer. É um erro ignorar os algoritmos criados pelo estudante em favor dos algoritmos convencionais de lápis e papel, geralmente ensinados na escola. Impor os algoritmos convencionais para a criança gera descontinuidades entre seus métodos e os algoritmos.

A epistemologia contemporânea evidenciou os processos de abstração, altamente complexos, que estão subjacentes à compreensão em geral, e à compreensão da matemática em particular. Muitos conceitos podem ser abstraídos da experiência diária, mas esse não é o caso dos conceitos matemáticos, que necessitam da intermediação do adulto. Piaget (2000) caracterizou a abstração reflexionante como o modo de abstração que retira o conhecimento das ações e das operações do sujeito. Uma vez que os esquemas podem funcionar em diferentes níveis de abstração, é plausível pensar os conceitos matemáticos no contexto de esquemas.

Os esquemas que foram construídos pelo processo de abstração reflexionante podem ser usados nos processos de assimilação, no estabelecimento de objetivos e intenções. Isso se evidencia logo que se considera como as crianças usam esquemas para atingir seus objetivos. Tyrone, por exemplo, contou de 20 em 20 para resolver  $20 \times 20$ . Ele antecipou que poderia resolver sua tarefa contando de 20 em 20, sabia o que tinha que fazer, antes de fazê-lo. Os esquemas servem como sistemas antecipatórios que guiam a atividade dentro de um quadro dirigido a um objetivo. Nos termos de Piaget, antecipação é a aplicação de um esquema a uma situação nova, antes que ela realmente aconteça. Assim sendo, mais do que o reconhecimento de uma situação, o esquema faz antecipações sobre ela.

## 4.5 A MULTIPLICAÇÃO – UMA ABSTRAÇÃO REFLEXIONANTE

### 4.5.1 As Bases do Pensamento Multiplicativo

Parte importante dos estudos de Piaget (1995), sobre as bases do pensamento multiplicativo, encontra-se na obra denominada *Abstração Reflexionante*.

Para compreender as dificuldades dos alunos na multiplicação, Piaget partiu da hipótese de que a multiplicação numérica requer a abstração das qualidades dos objetos concretos e a compreensão da relação “n vezes x” que se elabora através de um conjunto de abstrações reflexionantes.

Mesmo sabendo recitar a tabuada, o que nem sempre é o caso, freqüentemente os alunos não compreendem o significado da operação de multiplicar, mesmo os mais simples, como  $3 \times 4$ , em relação a  $4 + 4 + 4$ . A situação se agrava quando é preciso usar o raciocínio multiplicativo para a compreensão e cálculo de proporções, passo indispensável para a resolução de situações que envolvem porcentagens, juros, áreas, volumes, entre outras. Nessas situações de multiplicação numérica, a complexidade é maior do que em relação à multiplicação das classes e em comparação com a adição. É comum os alunos buscarem o recurso da adição para problemas multiplicativos, pois, na adição, a enumeração dos objetos é suficiente.

Ao investigar as abstrações envolvidas no raciocínio multiplicativo, Piaget esclareceu aspectos importantes que circundam a questão. Em primeiro lugar, demonstrou que as operações multiplicativas de classes e relações, construídas com base nas classificações ou seriações, de acordo com dois ou n critérios

simultâneos, não são mais difíceis de serem construídas do que as operações aditivas, que se elaboram sobre classificações ou seriações simples. Para tanto, lembrou a experiência com duas e três classes de cartões, redondos e quadrados, brancos, azuis e vermelhos. Nessa experiência, onde há uma óbvia ligação entre a multiplicação das classes e a dos números, a criança obtém facilmente uma tabela de seis classes, como se tivessem multiplicado  $2 \times 3$ .

Há nítida diferença de complexidade entre a multiplicação de classes e a multiplicação com números, na qual “n vezes x” é o resultado de uma abstração reflexionante, e n é compreendido como o número de operações das classes. Sendo assim, o que distingue a multiplicação das classes da multiplicação com números é que no primeiro caso não interessa o número de classes, que não precisam ser contadas. Já no caso dos números, as qualidades têm que ser abstraídas, pois as unidades são equivalentes entre si e é fundamental a compreensão de “n vezes x”, ou seja, é necessária a enumeração das unidades x e das n vezes que se tomam x.

Para chegar a essa constatação, Piaget, Kaufmann e Bourquin (PIAGET et al., 1995) criaram uma situação que envolvia uma abstração reflexionante e evitaram a utilização dos símbolos da multiplicação. A questão proposta era a construção de duas coleções iguais de fichas, algumas azuis e outras amarelas, pegando-se as azuis de três em três e as amarelas de duas em duas, a cada vez.

A questão posta dessa forma trazia implícita a compreensão dos múltiplos comuns e permitiu tanto constatar a razão das dificuldades na multiplicação quanto as condições de abstração reflexionante que possibilitam a compreensão dessa operação. Isso porque a experiência permitiu identificar a diferença entre um raciocínio aditivo, no qual o pensamento centra-se sobre o resultado da reunião de objetos, e um raciocínio multiplicativo, pelo qual é possível depreender o número de

vezes em que os objetos foram reunidos, desmembrando as operações, além dos resultados.

No Estágio I, em torno de 4:6 anos a 6 anos, as crianças se surpreendem com a igualdade entre os conjuntos, depois de colocar dois amarelos e três azuis, sucessivamente. Esperando encontrar igualdade somente pela correspondência termo a termo, explicam a igualdade  $6 = 6$  como um golpe de sorte e, por isso, não acreditam na possibilidade de prever uma nova equivalência. Para os autores, nessa fase as crianças são “míopes” em relação às estruturas multiplicativas, por uma concentração na ação de acrescentar as fichas de duas a duas, de um lado, e de três a três, do outro, e, ainda, por não tomarem consciência e lembrar quantos transportes foram feitos.

No nível IIA, em torno dos 7-8 anos, inicia uma tomada de consciência do número de operações correspondentes a “n vezes x”, sendo n o número de vezes em que se apanham x elementos. A criança revela a possibilidade de realizar uma abstração mais profunda, refletida. Indo além da abstração pseudo-empírica, ela é capaz de desmembrar as operações e não apenas os objetos. Outro grande progresso desta etapa é a descoberta da relação inversa entre multiplicador e multiplicando, ou seja, da compensação necessária quando se verifica a igualdade dos produtos. Como diz DOM (7;6) “é preciso mais peças de A para menos peças de B” (PIAGET et al. 1995 p. 35). Ainda persistem alguns problemas. A criança alcança as igualdades por tentativas, sem uma antecipação e programação dessas igualdades. Não usa a estrutura “n vezes”, conta em “montes” ou “pacotes” e engana-se na enumeração das vezes.

No nível IIB e no estágio III, a partir de 9-10 anos, o problema é resolvido pelo estabelecimento de relações, sem a necessidade de tentativas. A operação

multiplicativa “n vezes x” é totalmente compreendida, como resultado de uma abstração reflexionante. Os sujeitos podem resolver os problemas, de imediato, pois as classes funcionam como esquemas previamente programados. Enumerar n significa tomar consciência das operações que foram efetuadas, quando as unidades de x foram reunidas n vezes.

Recapitulando, no estágio I há total incompreensão da multiplicação, que é ainda uma sucessão de adições. No nível IIA, a multiplicação é compreendida como uma adição de adições, mas ainda sem plano e sem a tomada de consciência que vai acontecer nos níveis posteriores. Finalmente, o que é processo na abstração reflexionante torna-se abstração refletida: no estágio I, a comparação refletida diz respeito aos objetos. No nível IIA, a abstração refletida atinge apenas ações globais, isto é, a abstração é feita sobre os n conjuntos e não sobre “n vezes”. No nível IIB, a abstração reflexionante do número n das operações - na relação “n vezes x” - conduz à consciência e conceituação explícita dessa correspondência.

#### 4.6 AS REPRESENTAÇÕES INTUITIVAS DAS CRIANÇAS SOBRE A MULTIPLICAÇÃO E A DIVISÃO

Há um crescente interesse pelas representações intuitivas da criança. Mulligan e Mitchelmore (1997) preocuparam-se em esclarecer as representações intuitivas da criança sobre multiplicação e divisão. Estudos recentes têm mostrado que as crianças podem resolver uma variedade de problemas multiplicativos, muito antes da instrução formal sobre operações de multiplicação e divisão. Pesquisas evidenciaram que, mesmo na escola infantil, as crianças podem resolver problemas multiplicativos (Carpenter. Apud Mulligan e Mitchelmore, 1997).



O interesse pelas representações intuitivas fundamenta-se na proposição de que elas se formam cedo, em contextos determinados, e influenciam a compreensão posterior das situações multiplicativas mais complexas que os alunos irão enfrentar.

O estudo de Mulligan e Mitchelmore foi projetado no sentido de lançar luz sobre questões em torno das quais ainda não há suficiente clareza: quais as representações intuitivas que as crianças elaboram, como elas estão relacionadas com as estruturas semânticas dos problemas a serem resolvidos e como as representações se desenvolvem ao longo do tempo.

Nesse estudo, uma representação intuitiva foi definida como uma estrutura mental interna, correspondente a um tipo de estratégia de cálculo. Os pesquisadores observaram uma amostra de setenta meninas, quatro vezes, durante a 2ª e a 3ª séries, enquanto elas resolviam o mesmo conjunto de vinte e quatro problemas verbais. Entre as respostas corretas, identificaram doze diferentes estratégias de cálculos, que foram agrupadas em categorias, por meio das quais foram inferidas as representações intuitivas da multiplicação e divisão.

Foram apresentados vinte e quatro problemas de multiplicação e divisão, doze cujos produtos estavam entre 4 e 20, e outros doze com produtos entre 20 e 40. Os seis problemas mais simples são:

Grupos equivalentes:

Há duas mesas na sala de aula e quatro crianças estão sentadas em cada mesa. Quantas crianças têm ao todo?

Peter tomou dois refrigerantes no lanche, todos os dias, durante três dias. Quantos refrigerantes tomou ao todo?

Proporção:

Se você precisa de cinco centavos para comprar um pirulito, de quanto dinheiro você precisa para comprar dois pirulitos?

Comparação multiplicativa:

John tem três livros e Sue tem três vezes o que ele tem. Quantos livros tem Sue?

Disposição retangular:

Há quatro filas de crianças com três crianças em cada fila. Quantas crianças estão juntas?

Produto cartesiano:

Você pode comprar salgadinhos de presunto ou de queijo, em pacotes pequenos, médios e grandes. Quantas escolhas diferentes você pode fazer?

Entre as estudantes foram identificadas três representações intuitivas da multiplicação, quais sejam, contagem direta, adição repetida e operações multiplicativas, e quatro para a divisão – contagem direta, subtração repetida, adição repetida e operação multiplicativa.

A contagem direta é a contagem por unidades e é pouco mais do que uma contagem primitiva, aplicada a uma correta interpretação do problema dado. As adições e subtrações repetidas surgem quando os alunos descobrem procedimentos de contagem mais eficientes, ou seja, tiram vantagem dos grupos de igual tamanho. A operação multiplicativa é a estratégia utilizada por crianças que conhecem e sabem aplicar os fatos básicos, compreendendo a multiplicação como uma operação binária, cujo resultado é o número final na seqüência de múltiplos. (Mulligan e Mitchelmore, 1997)

Os resultados evidenciaram um consistente progresso nas representações intuitivas dos alunos de 2ª e 3ª séries, da contagem direta para a adição ou subtração repetida e, destas, para a operação multiplicativa. Houve, também, crescimento no desempenho. Muitos alunos foram bem sucedidos na resolução de

problemas multiplicativos no final da 2ª série, mas, na 3ª, houve um considerável aumento no uso das operações.

A dificuldade nos problemas variou conforme as estruturas semânticas que foram utilizadas. Os problemas de comparação foram difíceis, e os de produto cartesiano, mais ainda. Um resultado surpreendente foi uma forte preferência pela adição repetida nos problemas de divisão, indicando uma estreita conexão estabelecida pelos alunos entre a multiplicação e a divisão, antes que tenham recebido ensino formal sobre esta última.

A contagem direta foi pouco utilizada (em torno de 10%) e raramente foi a estratégia mais bem sucedida, sendo que a estratégia mais freqüente foi a adição repetida, usada corretamente em quase todas as estruturas semânticas.

A utilização e o sucesso na operação multiplicativa, raros nas entrevistas iniciais, começou a aumentar na entrevista 3 e tornou-se comum na entrevista 4, quando as crianças já tinham recebido instrução formal. A situação envolvendo o produto cartesiano sempre apresentou dificuldades.

Nesse ponto, cabe a pergunta: Por que a mesma representação intuitiva pode ser usada para todas as estruturas semânticas? A razão parece se assentar no fato de que, em todas as situações de multiplicação, é preciso haver grupos de igual tamanho. Portanto, para o processamento de situação multiplicativa é fundamental o reconhecimento da igualdade entre os grupos. Esse passo nem sempre é fácil. Numa situação de produto cartesiano, por exemplo, a igualdade entre os grupos não é explicitada. É a estrutura de grupos iguais que permite o uso da adição e da subtração repetida, e não a estrutura semântica do problema. A representação intuitiva empregada para resolver um problema particular, portanto, não reflete as

características do problema, e, sim, a estrutura matemática que o aluno é capaz de inserir nela.

Quanto à evolução das representações, ficou demonstrado que as crianças adquirem uma seqüência de representações progressivamente eficientes, aplicáveis a situações multiplicativas com números inteiros. A estrutura de cada representação deriva de uma representação prévia. Os alunos não trocam, simplesmente, uma representação pela seguinte; eles desenvolvem um repertório mais amplo de representações. Qual (ou quais) dentre todas as representações intuitivas disponíveis é chamada para resolver um determinado problema? Depende de muitos fatores, incluindo a experiência prévia, a instrução sobre o problema e conhecimentos numéricos relevantes.

Na realidade, três fatores parecem se desenvolver de uma forma paralela e interrelacionada:

- a) O progresso dos alunos na sua habilidade de interpretar problemas verbais, mesmo sem instrução específica, o que os torna capazes de resolver problemas com um crescente âmbito de estruturas semânticas, mesmo que só usem a contagem direta.
- b) O reconhecimento da estrutura de “grupos de igual tamanho”, em muitas situações-problemas. Isso os habilita a desenvolver estratégias de adição e subtração repetidas, primeiramente, e, depois, a desenvolver operações multiplicativas.
- c) A expansão dos fatos numéricos memorizados. Os estudantes aprendem, primeiro, a contar de 2 em 2 e de 5 em 5. Logo, aprendem outras seqüências, pois se tornam capazes de adicionar sem materiais concretos e começam a memorizar os fatos de multiplicação. Sendo assim, o processamento cognitivo de cada

estratégia é gradualmente reduzido e, cada vez mais, os estudantes aplicam, a cada problema, as estratégias mais eficientes que conhecem. Isso implica, naturalmente, que os fatos numéricos sejam significativos e que não tenham sido simplesmente mecanizados.

As crianças, de início, aprendem uma nova estratégia para resolver problemas nos quais a situação é familiar e os fatos numéricos relevantes são bem conhecidos. Gradativamente, elas adotam novas estratégias para outros problemas, à medida que se expande sua compreensão das situações multiplicativas e suas habilidades numéricas.

O estudo de Mulligan e Mitchelmore levanta questões sobre a abordagem tradicional da multiplicação e divisão de números inteiros, nas séries iniciais. Primeiro, o currículo tradicional não aproveita a compreensão informal das situações multiplicativas, que se desenvolvem antes da 2ª ou 3ª séries. Segundo, a multiplicação é introduzida antes e separadamente da divisão, apesar de que as crianças, espontaneamente, estabelecem relações entre elas e, necessariamente, não consideram a divisão mais difícil do que a multiplicação. As crianças, certamente, serão beneficiadas se os professores lhes oportunizarem a possibilidade de resolver problemas verbais de multiplicação, logo na 1ª série, e se aproximarem da multiplicação e divisão.

Nessa visão, a tarefa do professor é auxiliar os alunos a ampliar o seu repertório de estratégias de solução, o que pode acontecer em três níveis: 1º) os estudantes serem orientados a aplicar, com sucesso, a contagem direta, na solução de alguns problemas; 2º) quando os estudantes já resolverem problemas multiplicativos pela contagem direta, serem encorajados a desenvolver a estrutura de grupos iguais, para alcançar estratégias mais eficientes, envolvendo a adição

repetida; 3º) quando os estudantes já usarem adições repetidas numa larga variedade de estruturas semânticas, podendo ser encorajada a idéia de uma operação multiplicativa. As crianças podem ser auxiliadas a implementar sua eficiência de cálculo por meio de atividades designadas a desenvolver o senso numérico (incluindo o domínio dos fatos básicos) e estruturas semânticas mais difíceis, como o produto cartesiano, por exemplo.

#### 4.7 MULTIPLICAÇÃO – UM NOVO SENTIDO DE NÚMERO

Nunes e Bryant (1997) analisam os múltiplos sentidos do raciocínio multiplicativo, as situações em que eles acontecem e como as crianças compreendem essas situações e sentidos de número. Para tanto, descrevem as operações de pensamento da criança, as situações e os sistemas de sinais relacionados à multiplicação e divisão.

Como alerta Piaget, a compreensão da multiplicação e divisão implica uma importante transformação qualitativa no pensamento da criança (NUNES; BRYANT, 1997). Cai por terra, assim, o entendimento de que a multiplicação e divisão são operações aritméticas a serem ensinadas depois da adição e subtração.

De um modo geral, a adição é ensinada antes da multiplicação por dois motivos: primeiro, porque a multiplicação é mais difícil do que a adição e, segundo, porque se podem resolver problemas de multiplicação por meio da adição repetida.

No entanto, é um erro tratar a multiplicação apenas como uma forma complexa de adição. A criança precisa aprender e compreender um conjunto inteiramente novo de sentido de números e um conjunto de invariáveis, todas relacionadas à multiplicação e à divisão, mas não à adição e subtração.

Situações que se referem à adição são aquelas em que um objeto ou um conjunto de objetos são unidos ou separados. Os tipos de situações que levam a raciocínios multiplicativos não envolvem ações de unir e separar. A relação multiplicativa não é uma operação binária, na qual, a dois números de um determinado campo numérico faz corresponder um terceiro, desse mesmo campo. A relação multiplicativa se caracteriza por lidar com duas variáveis de natureza diferente que assumem valores em uma determinada razão.

Nunes e Bryant identificam os três principais tipos de situações multiplicativas. São eles:

- 1) situações de correspondência um-para-muitos;
- 2) situações que envolvem relações entre variáveis;
- 3) situações que envolvem distribuição, divisão e divisão ao meio.

Neste estudo trabalharemos somente com a situação de correspondência um para-muitos. Situações deste tipo aparecem com frequência na vida diária das crianças: três balas para uma criança (3 para 1), quatro rodas para um carro (4 para 1), seis pessoas para uma mesa (6 para 1).

Mesmo neste tipo de situação, apontada como a mais simples, Nunes e Bryant encontram quatro aspectos muito importantes:

- 1) Nas situações multiplicativas, a relação de correspondência um-para-muitos entre dois conjuntos é constante. Esta invariável não faz parte das situações aditivas. Para manter constante essa correspondência, cada vez que se acrescenta um carro é preciso acrescentar quatro rodas, ou seja, são diferentes os números somados a cada conjunto.
- 2) Para manter a proporção invariável não se une ou separa, usa-se a replicação. Replicar significa somar a cada conjunto uma unidade

correspondente, mantendo a correspondência um-para-muitos. Na relação “uma mesa para quatro crianças”, a unidade do conjunto de mesas é uma, enquanto a unidade no conjunto das crianças é quatro.

- 3) A proporção expressa a relação entre os dois conjuntos, e não o número de objetos em cada conjunto. Isso significa que o número de mesas e o número de crianças pode variar, e a proporção mantém-se constante. Podemos ter três mesas e doze crianças, e a proporção continua 1 : 4.
- 4) Identificar o número de vezes em que é efetuada uma replicação é atribuir um novo sentido a um número. O número de vezes em que replicamos um determinado conjunto é denominado fator escalar.

Assim, os dois novos sentidos de números presentes na multiplicação são o de proporção e o de fator escalar. A proporção é expressa por um par de números que permanece invariável em uma situação, mesmo quando o tamanho do conjunto varia. O fator escalar se refere ao número de replicações aplicadas a ambos os conjuntos, mantendo a proporção constante.



## CAPÍTULO 5

“Havia um homem que falava durante o sono. Quando o relógio bateu a quarta badalada, ele disse: ‘Uma, uma, uma, uma. Aquele relógio deve estar maluco, bateu uma quatro vezes’. Obviamente o homem tinha contado quatro vezes uma badalada, não quatro badaladas. Ele não tinha em mente um quatro, mas um considerado quatro vezes, o que mostra que contar e considerar várias coisas ao mesmo tempo são atividades diferentes. Se eu tivesse quatro relógios na minha biblioteca, e todos os quatro batessem uma hora ao mesmo tempo, não deveria dizer que ele tinha batido as quatro, mas sim uma quatro vezes. Esta diferença não é inerente às coisas, independente das operações da mente. Pelo contrário, depende da mente daquele que conta. O intelecto, portanto, não encontra números, mas fá-los; ele considera coisas diferentes, cada uma distinta em si mesma, e une-as intencionalmente no pensamento”.

Juan Caramuel, 1670

## 5 DA SEQÜÊNCIA NUMÉRICA INICIAL AO ESQUEMA ITERATIVO DE MULTIPLICAÇÃO

O conhecimento aritmético é constituído pelos esquemas coordenados de ações e operações que uma criança construiu num determinado período (STEFFE; COBB, 1998).

### 5.1 A NOÇÃO DE ESQUEMA

Cabe, aqui, revisar a noção de esquema.

O termo esquema surgiu com Kant, em 1781. No início do século XX era utilizado por psicólogos, tanto que Piaget pôde encontrá-lo nos trabalhos de Baldwin, escritos em 1894.

No primeiro período de sua obra, Piaget utilizou o termo “esquema de assimilação”, mas é no segundo período da sua obra – meados dos anos 30 – que a noção de esquema ocupou um papel especial na teoria psicogenética. Nessa época, o autor definiu com precisão o conceito de esquema – o esboço das ações suscetíveis de serem repetidas ativamente - e lhe dá um papel de destaque na explicação das condutas. Na obra *O Nascimento da Inteligência na Criança*, Piaget, afirmou que os esquemas são resumos de experiência e que

o esquema de assimilação não é, com efeito, uma entidade isolável da atividade assimiladora e acomodadora. Só se constitui funcionando e só funciona na experiência: portanto, o essencial não é o esquema como estrutura, mas a atividade estruturante que dá origem aos esquemas. (PIAGET, 1978 p. 328)

Nessa mesma obra, Piaget escreveu que

um sistema definido e fechado de movimentos e de percepções, o esquema apresenta [ . . . ] esse duplo caráter de ser estruturado (portanto, de estruturar ele mesmo o campo da percepção ou da compreensão) e de se constituir de imediato enquanto totalidade [ . . . ] (PIAGET, apud MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 166).

Mais tarde, Piaget (1976) postulou que

1º) todo esquema de assimilação tende a alimentar-se, isto é, a incorporar elementos que lhe são exteriores e compatíveis com a sua natureza, e  
 2º) todo esquema de assimilação é obrigado a se acomodar aos elementos que assimila, isto é, a se modificar em função das suas particularidades, mas, sem com isso perder sua continuidade – portanto seu fechamento enquanto ciclo de processos interdependentes – nem seus poderes anteriores de assimilação (PIAGET, 1976, p. 14).

Tais noções de esquema dão conta da organização interna do comportamento, ao mesmo tempo que do seu dinamismo adaptativo. Como diz Becker (2003, p. 42), “o ápice de um processo de assimilação consiste em realizar esquemas ou estruturas adaptadas, isto é, perfeitamente acomodadas”.

Em *A Formação do Símbolo na Criança* (1978), Piaget estabelece as diferenças e as bases comuns entre os esquemas puramente sensório-motores e os esquemas simbólicos. Também nessa obra, Piaget sublinha que os

primeiros esquemas verbais são intermediários entre os esquemas da inteligência sensório-motora e os esquemas conceituais, tais como os esquemas simbólicos são intermediários entre os jogos de exercícios e os símbolos lúdicos desligados da própria ação [ . . . ] (PIAGET, 1978, p. 280-281)

As palavras que a criança usa para designar esses esquemas são, na verdade, elementos intermediários entre significantes simbólicos ou imitativos e verdadeiros signos. São as significações indicadas pelas primeiras palavras da

criança. Para T., o signo semiverbal “vuvu”, por exemplo, referia-se a um cão, a uma galinha, a uma sineta de vaca, às próprias vacas, a cobaias e a um gato. Alguns dias depois, “vuvu” valia para tudo que se movesse, desde uma formiga até um trator.

Ainda nessa época, Piaget reconheceu os “esquemas de ações evocados mentalmente” quanto aos raciocínios da criança pequena, caracterizados por uma assimilação irreversível. As formas superiores desse pensamento pré-conceitual são reconhecidas como esquemas intuitivos. São raciocínios ligados a uma dada configuração perceptiva, sendo só aparentemente operatórios. Nesse nível, a imagem do esquema é necessária à existência do esquema. Para fazer equivaler duas coleções de contas, por exemplo, o sujeito deve constatar visualmente que elas se correspondem elemento a elemento.

Do ponto de vista construtivista, os esquemas são unidades de comportamento que se diversificam e se tornam mais complexos na interação com o real. Vê-se que há construção cognitiva quando se comparam esquemas evoluídos, complexos, como as condutas inteligentes, com os esquemas mais elementares, como as condutas reflexas ou os hábitos. No entanto, “a construção de esquemas complexos explica-se pelo funcionamento de esquemas mais elementares no quadro da função de adaptação” (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 170).

Os esquemas operatórios são ao mesmo tempo gerais e abstratos, isto é, conceitos, tomando a forma de classes e relações. Nesse caso, o termo esquema é utilizado tanto para designar uma classificação quanto uma seriação.

O conceito de esquema também se aplica aos aspectos afetivos do comportamento. Assim,

a vida afetiva supõe uma assimilação contínua das situações presentes às situações anteriores – assimilação que engendra a existência de esquemas afetivos ou maneiras relativamente estáveis de sentir e reagir – e uma acomodação contínua desses esquemas ao presente (PIAGET, 1978, p. 265).

Os esquemas sensório-motores e intuitivos se constroem por generalização, em parte consciente, mas, também, em boa parte, inconsciente e espontânea. São esquemas nos quais há uma essencial atividade intelectual, mas dos quais a afetividade não se acha ausente: os “sentimentos fundamentais” de Janet – interesses, alegria do êxito, tristeza do fracasso, prazeres – regulam a ação da qual a inteligência determina a estrutura. Piaget (1978, p. 266) sublinha que “a afetividade regula a energética da ação, da qual a inteligência assegura a técnica”.

As pessoas sobre as quais a criança age e que agem sobre ela dão origem a esquemas. Antes da “escolha do objeto” afetivo, as pessoas são, para a criança, motivos de ação e dispensadoras de prazer, como no caso da alimentação ou das brincadeiras sensório-motoras. Quando é adquirido o esquema do objeto permanente e, sobretudo, na etapa da inteligência intuitiva, as pessoas se transformam em outros “eus”. Paralelamente, o próprio “eu” vai se constituindo e torna-se, também, uma pessoa. Os esquemas referentes às pessoas, interindividuais, se enriquecem e “resultam em parte da projeção e da transferência dos sentimentos até então ligados à atividade e ao corpo propriamente ditos (narcisismo), mas constituem também, por uma parte essencial, construções novas” (PIAGET, 1978, p. 267).

É por isso que o esquema foi definido como “a estrutura ou organização das ações, tais como elas se transferem ou se generalizam por ocasião da repetição dessa ação e das circunstâncias semelhantes ou análogas” (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 166).

No terceiro período da sua obra, Piaget falou pouco em esquemas, com exceção do livro escrito com Inhelder, *Da Lógica da Criança à Lógica do Adolescente* (1976). Nesse trabalho foi introduzido o conceito de esquema operatório de nível formal. Esquemas operatórios são as

noções que o sujeito pode construir a partir do nível formal, diante de alguns dados, mas cuja aquisição não se manifesta fora de tais condições [ . . . ] O pensamento formal assinala sua presença não somente pelo emprego constante das 16 operações proposicionais binárias e algumas combinações ternárias ou superiores que delas derivam, mas ainda pela estruturação esporádica de certo número de noções e de esquemas, inacessíveis ao nível concreto, porque sua organização supõe as operações precedentes (INHELDER; PIAGET, 1976, p. 230).

Para a solução de alguns problemas, o sujeito sente necessidade de esquemas operatórios de nível formal, ou seja, noções ou operações especiais que podem se desenvolver espontaneamente ou pelo ensino escolar. Entre tais noções podem-se mencionar a de equilíbrio entre ação e reação, a da probabilidade combinatória, as operações matemáticas de combinação, entre outras.

O quarto período da obra de Piaget caracterizou-se por uma retomada dos aspectos funcionais e construtores do conhecimento. Sendo assim, ele retomou o interesse pela noção de adaptação e, conseqüentemente, pela noção de esquema. Em *A Psicologia da Criança*, Piaget e Inhelder (1980, p. 15) definem o esquema como “a estrutura ou a organização das ações, as quais se transferem ou generalizam no momento da repetição da ação, em circunstâncias semelhantes ou análogas”.

Em *Biologia e Conhecimento*, Piaget (1996, p. 16) chamou de “esquemas de ações o que, numa ação, é assim transponível, generalizável ou diferenciável de uma ação à seguinte, ou seja, o que há de comum nas diversas repetições ou

aplicações da mesma ação”. As ações não ocorrem ao acaso. Elas se repetem e se aplicam a situações comparáveis. Há reprodução quando as situações são análogas, mas, se as necessidades e as situações mudam, há diferenciação ou novas combinações.

Conhecer um objeto implica incorporá-lo a esquemas de ação. Essa verdade vale desde as condutas sensório-motoras mais elementares até às operações lógico-matemáticas superiores, pois todo conhecimento supõe uma assimilação e consiste em conferir significações.

Piaget se aproximou dos problemas biológicos quando reconheceu que tanto os esquemas de ação quanto os esquemas operatórios que deles derivam comportam uma organização. E sustentou que “não é preciso dizer que os esquemas mais elementares são esquemas reflexos ou instintivos, isto é, hereditários, em uma parte importante de sua programação” (PIAGET, 1996, p. 17). Por exemplo, um móvel em movimento é percebido porque desencadeia um reflexo optocinético.

Entretanto, o esquema estímulo-resposta, que constitui a essência do associacionismo, é inadequado, pois um objeto só constitui um estímulo perceptivo S à medida em que o organismo é sensibilizado por ele, e esta sensibilidade ao estímulo S significa precisamente que este é assimilado a um esquema cuja manifestação é a resposta R.

A maior parte dos esquemas não corresponde a uma montagem hereditária; eles vão se construindo aos poucos. Dizer que os esquemas progressivamente elaborados são inteiramente imputáveis ao meio exterior é não contar com a organização interna. Mas “é claro que o conteúdo de cada esquema de ação depende em parte do meio e dos objetos ou acontecimentos aos quais se aplica.

Mas isso não significa absolutamente que sua forma ou funcionamento sejam independentes de fatores internos” (PIAGET, 1996, p. 18).

Três são os argumentos a favor dessa tese:

- 1) desde as formas de vida mais primitivas, as ações dependem do sistema nervoso que, por mais elementar que seja, é herdado e supõe a colaboração do genoma;
- 2) um esquema nunca tem começo absoluto; sempre deriva de esquemas anteriores, cuja origem está nos reflexos ou nos movimentos espontâneos iniciais;
- 3) sobretudo, um esquema comporta sempre ações do sujeito ou do organismo, que não provém das propriedades do objeto, ou seja, do meio. Por exemplo, reunir objetos corresponde a um esquema aditivo que, por sua vez, depende do organismo, e não, unicamente, das propriedades desses objetos.

Os trabalhos de Inhelder e Cellérier sobre as microgêneses cognitivas deram um novo impulso ao estudo da noção de esquema. Definindo o esquema como um organizador da conduta, não observado, mas inferido, os autores lembram que os esquemas são esboços de ações suscetíveis de serem repetidas ativamente. O esquema é essencialmente funcional e assimilador e tem por função tornar conhecidos os dados da experiência (INHELDER; CELLÉRIER, 1996, p. 27).

Os três tipos de assimilação – recognitiva, reprodutora e generalizadora “manifestam-se pelo reconhecimento de situações em que o esquema é aplicável, isto é, reproduzível, por sua transposição generalizadora a situações novas e por sua significação implicativa que confere às ações” (INHELDER; CELLÉRIER, 1996, p. 27).

Como se vê, o “esquema” piagetiano designa, antes de tudo, o caráter generalizável da ação. Inhelder e Cellérier (1996) propõem uma distinção entre:



- a) a noção de esquema, utilizada para explicar processos cognitivos, como os relacionados com as formas de assimilação – nos quais o traço fundamental é a generalidade, e
- b) o aspecto particular dos esquemas, como produtos da organização cognitiva.

Nesse ponto, os autores levantam a questão: se os esquemas expressam essencialmente as características da ação, não são quase procedimentos? Não organizam as ações em seqüência de meios visando a um fim? Reconhecendo a importância dos esquemas de procedimentos, Piaget (apud INHELDER; CELLÉRIER, 1996) propôs a distinção entre esquemas de procedimentos e esquemas “presentativos”, quais sejam, esquemas representativos ou conceitos, que incidem sobre as características permanentes e simultâneas de objetos comparáveis e também esquemas sensório-motores, que não implicam representações elaboradas.

Os esquemas presentativos exprimem permanência e simultaneidade, podendo ser generalizados e abstraídos de seus contextos, além de conservar-se quando integrados a outros mais amplos. Enquanto os esquemas de procedimento são seqüências de ações, difíceis de se abstrair de seus contextos e servem de meios para atingir um fim, os esquemas presentativos são operativo-semióticos, pois se referem a símbolos ou significantes mais do que a objetos e têm tanto aplicações práticas – antecipar, planejar, reconstruir – quanto teóricas – deduzir, explicar.

Esses dois sistemas de esquemas – o de esquemas presentativos e o de esquemas de procedimentos – explicam o funcionamento cognitivo. Nesse sentido, convém diferenciar atividades cognitivas, que têm uma função heurística, tal como o sistema de esquemas de procedimentos, e outras atividades organizadoras e estruturantes, tais como o sistema de esquemas presentativos.

As heurísticas utilizam processos de invenção e de descoberta e, assim, asseguram a inovação. Sendo assim, sua elucidação é de crucial importância para a compreensão dos mecanismos da criatividade. O estudo das heurísticas tem, ainda, um importante papel na questão do erro. Como escreveu Piaget (apud INHELDER; CELLÉRIER, 1996, p. 29), “do ponto de vista da invenção, um erro corrigido pode ser mais fecundo que um acerto imediato, porque a comparação da hipótese falsa e de suas conseqüências fornece novos conhecimentos, e a comparação entre erros propicia novas idéias”.

O exercício freqüente de alguns esquemas torna-os facilmente disponíveis. Com isso, o esquema tem um sentido organizador do conhecimento, isto é, no modo pelo qual o sujeito usa seus conhecimentos diante de uma situação nova. Cabe, aqui, a metáfora de uma paisagem em que os esquemas seriam os caminhos, alguns, muito percorridos; e outros, abandonados, pouco utilizados. É próprio do sistema cognitivo reduzir o desconhecido em termos de esquemas familiares, isto é, esquemas em que se operam transformações mentais ou materiais e em que os estados são imediatamente visualizados (INHELDER; CELLÉRIER, 1996).

A função heurística dos esquemas familiares é fundamental. Além de dar um “status ao erro”, conduzem diretamente à solução do problema ou lhe causam obstrução, segundo tragam procedimentos adequados ou não à situação. Na sua pesquisa, Inhelder e Cellérier encontraram muitos casos em que o esquema obstruía a solução de um problema, não trazendo a obtenção de conhecimento, mas desempenhando um papel heurístico, dando uma orientação à atividade da criança.

Os esquemas são anteriores à experiência ou se relacionam diretamente com contextos particulares? É difícil admitir que os esquemas estejam sempre relacionados a um determinado contexto, uma vez que o processo de formação de

esquemas tende à generalização. O esquema se especifica para ficar pertinente ao contexto. Entretanto, seu valor epistemológico e heurístico deve-se à sua capacidade de generalização.

Para Becker (2003, p. 47), “Piaget trabalha com o conceito de esquema como resultante de um processo de generalização”. É a generalização que atribui um significado dialético ao conceito de esquema.

Um esquema é uma síntese. Resume em si as ações passadas e, devido à generalização, ultrapassa as ações que lhe deram origem. Assim, o esquema possibilita novas aplicações – reais ou possíveis – que não estavam previstas nas ações que o originaram. Sendo assim:

o esquema é uma totalidade que não se reduz à soma das ações que lhe deram origem porque nele condensam-se qualidades da organização do sujeito. O esquema traz algo novo, irreduzível às ações passadas e irreduzível ao meio em que se desenvolveram essas ações (BECKER, 2003, p. 47).

A necessidade – que sempre desafiou os filósofos – surge no alto desse processo, como o sentimento de que algo é assim porque não poderia ser diferente:  $3 \times 7$  são, necessariamente, 21; se A é menor do que B, e B é menor do que C, necessariamente A é menor do que C. É por isso que

no terreno da inteligência, o exercício e a construção dos esquemas supõem a contínua interação entre o sujeito e os objetos. Nestes últimos domínios, os esquemas estão subjugados a contínuas assimilações e acomodações que os generalizam ou diferenciam, pondo-os em relação ou encaixando-os hierarquicamente, etc. (PIAGET, 1967, p. 273-275)

## 5.2 ESQUEMAS DE SEQÜÊNCIAS NUMÉRICAS

As operações de multiplicação e divisão são construídas como modificações da seqüência de números desenvolvidas pela criança, em qualquer fase do desenvolvimento (STEFFE; VON GLASERSFELD, 1985).

De um modo geral, uma seqüência numérica pode ser compreendida como um registro mental da contagem (STEFFE, 1991). Um ato de contagem consiste na co-ocorrência de dizer o nome de um número e produzir um item de contagem. Fazendo uma operação de reunião, a criança estabelece uma seqüência de itens unitários, na qual cada item contém um ato de contagem.

Esses atos podem ser executados ou representados quando não há registros perceptivos disponíveis. Nesse caso, a criança precisa resgatar, mentalmente, os atos de contagem, ou seja, ela cria uma seqüência de itens unitários abstratos, como resultado da interiorização desses mesmos atos. Esses registros abstratos podem provir do canal auditivo, do canal visual, do canal cinestésico ou de combinações entre eles (STEFFE, 1994).

Quando registros auditivos estão envolvidos, foi criada uma seqüência numérica verbal. Cada item de uma seqüência numérica verbal é um símbolo para um segmento da seqüência numérica inicial.

John Olive (2001) apresenta sua versão sobre as seqüências numéricas, inspirado em Steffe e Steffe e Cobb. Seu primeiro pensamento é que precisamos prestar muita atenção a como as crianças desenvolvem seu pensamento matemático, pois as suas estruturas e operações devem ser construídas a partir da sua própria atividade. Elas não podem ser dadas “prontas”.

Uma das mais fundamentais estruturas matemáticas que uma criança desenvolve cedo na vida é a da seqüência numérica. A atividade básica que leva à construção de uma seqüência numérica é a contagem. Entretanto, a atividade de contar não ocorre toda de uma vez para a criança. Steffe et al. (apud OLIVE, 2001), na sua pesquisa das atividades de contagem de crianças pequenas, indicaram que os primórdios da contagem progridem através de diferentes tipos de atividades, da contagem de itens perceptivos unitários à contagem de itens unitários abstratos.

Sendo assim, uma seqüência numérica da criança não é uma estrutura estática. Ela progride através de várias mudanças no desenvolvimento, decorrentes da adaptação nas atividades de contagem das crianças, à medida que elas encontram situações numéricas mais complexas.

Seqüências numéricas são esquemas mentais. De acordo com von Glasersfeld (apud OLIVE, 2001), um esquema consiste de três partes, de acordo com seu objetivo: (1) uma estrutura assimilatória ou padrão reconitivo, pelo qual a criança reconhece a situação como relevante a um esquema particular, (2) uma ação ou operação associada com a situação, (3) um resultado da ação ou operação.

As possíveis operações associadas com uma seqüência numérica emergem da interiorização das atividades das crianças na utilização das suas seqüências numéricas. Isso significa dizer que as crianças, primeiramente, podem fazer na ação coisas que elas não são ainda capazes de fazer mentalmente. A interiorização da atividade é um processo de abstração reflexionante (VON GLASERSFELD, 1995). A atividade é primeiro internalizada pela imagem mental; a criança pode mentalmente representar a atividade, que se torna interiorizada através da abstração. Por exemplo, uma criança pode primeiro internalizar o ato de contar seis cubos, formando registros mentais dos atos de contagem que poderiam incluir as ações de

apontar e as imagens dos cubos. Se os cubos forem, então, cobertos, e a criança for interrogada sobre quantos cubos foram cobertos, ela pode representar seus atos de contagem sobre a cobertura, projetando, mentalmente, imagens dos cubos que ela está contando a partir dos registros da atividade prévia. Esse reprocessamento pode levar à abstração posterior. Os atos de apontar, por si sós, podem agora ser usados para contar qualquer objeto. Eventualmente, o resultado de tal contagem figurativa será, ele próprio, o apoio para os atos de contagem. É nesse ponto que se pode dizer que os atos de contagem da criança foram interiorizados (OLIVE, 2001).

As seqüências numéricas de alto nível são construídas por um processo de re-interiorização das seqüências numéricas de baixo nível, como destaca Olive.

A construção de uma unidade iterável é chave para o desenvolvimento de esquemas multiplicativos. Um, iterado cinco vezes, produz cinco, que pode ser repartido em cinco unidades. As unidades iteráveis são os blocos construtores para as unidades compostas, ou seja, uma unidade composta de itens unitários. Por exemplo, cinco unidades podem ser tomadas como “um cinco”.

### 5.2.1 Esquemas de Contagem Pré-Numéricos

As crianças pré-numéricas podem ter uma seqüência numérica verbal que elas usam junto com atos de apontar. Entretanto, como lembra Olive, o resultado dos seus atos de contagem não significa a cardinalidade da coleção. Pode somente significar esforços para definir uma pluralidade. Por exemplo, essas crianças podem “contar” uma coleção usando a seqüência numérica verbal “um, dois, três, quatro, cinco”, e depois, quando solicitadas a contar novamente a mesma coleção, usar a seqüência numérica verbal “um, dois, três, quatro, cinco, seis”. Elas podem apontar duas vezes para um objeto nesta segunda seqüência ou não coordenar seus atos

de apontar com suas expressões verbais. Essas crianças não se perturbam em chegar a diferentes palavras numéricas como resultado da contagem.

Crianças pré-numéricas podem aprender a coordenar seus atos de apontar com sua seqüência numérica verbal. Elas são consideradas contadoras perceptivas. Os objetos precisam permanecer em seu campo perceptivo para que sejam capazes de contá-los. As crianças que contam perceptivamente experimentam perturbação se terminam com uma palavra numérica diferente, quando contam a mesma coleção pela segunda vez. Essa perturbação pode estimulá-las a organizar sua atividade de contagem, de modo a ter certeza de que elas contaram cada objeto somente uma vez, alinhando os objetos antes de contá-los ou removendo os objetos já contados (OLIVE, 2001).

Os contadores perceptivos podem aprender a contar coisas que estão no lugar dos objetos a serem contados. Por exemplo, depois de ter recém contado uma coleção de objetos, e interrogadas sobre quantos objetos elas têm depois de os objetos serem cobertos, algumas crianças apontam para a cobertura e contam objetos imaginados ou desenvolvem padrões nos dedos para dois, três, quatro ou cinco objetos e contam estes padrões de dedos. Elas podem também desenhar figuras dos objetos no papel ou fazer marcas em cada objeto, à medida que contam. Tais crianças internalizaram seus itens contáveis e se tornaram contadores figurativos.

Para ambos, contadores perceptivos e figurativos, o resultado da contagem está ainda “lá fora”, não está interiorizado. Eles não podem pegar o resultado da contagem e usá-lo como “input” para uma segunda contagem. Por exemplo, tendo contado uma coleção de cinco objetos, quando mais objetos são adicionados à

coleção já contada, essas crianças contam toda a coleção para encontrar quanto têm agora.

Steffe e Cobb (1988), Steffe (1994), Olive (2001) descreveram o desenvolvimento de três sucessivas seqüências numéricas: a seqüência numérica inicial, a seqüência numérica implícita e a seqüência numérica explícita.

### 5.2.2 A Seqüência Numérica Inicial

A utilização da seqüência numérica inicial se caracteriza pelo “contar tudo”. O examinador diz *“Há sete bolinhas de gude neste copo”* (balançando o copo). *Aqui estão mais quatro bolinhas. Quantas bolinhas temos, ao todo?”* A criança conta as sete bolinhas e, a seguir, prossegue a contagem com as outras quatro, freqüentemente, misturando os dois conjuntos.

Na seqüência numérica inicial, as sete bolinhas do primeiro copo se referem à seqüência dos atos de contagem. O nome do número ainda não se refere a uma unidade que contém esta seqüência. Assim, a seqüência numérica inicial é, ainda, restrita, refletindo exatamente o processo que a produz.

Olive (2001) sugere que as crianças que necessitam contar tudo sejam encorajadas a representar mentalmente seus atos de contagem, cobrindo-se a coleção contada previamente e adicionando mais objetos. Freqüentemente, essas crianças tentam visualizar os objetos sob a cobertura, apontando, enquanto recontam os objetos cobertos. Tais atividades as ajudarão a, primeiramente, interiorizar seus atos de contagem e, eventualmente, interiorizar os resultados desses atos de contagem. Nesse caso, o resultado de contar uma coleção não está somente “lá fora”, mas é também simbolizado mentalmente pela palavra numérica



interiorizada, que agora está guardada na memória. Por exemplo, o número 5 significa a seqüência de contagem “um, dois, três, quatro, cinco”. As crianças que fizeram essa acomodação na sua seqüência numérica verbal podem, agora, contar para a frente quando mais objetos são adicionados a uma coleção previamente contada. Assim, tendo contado cinco objetos, quando são dados mais três, tais crianças dirão “cinco... seis, sete, oito”, apontando para os novos objetos. O “cinco” agora significa ter contado os cinco primeiros objetos. O número cinco é agora um composto numérico: pode significar uma coleção de cinco itens. A cardinalidade de uma coleção está finalmente estabelecida.

### 5.2.3 A Seqüência Numérica Composta Implícita

Quando tem uma seqüência numérica composta implícita, a criança começa a contar adiante. Para 7 mais 4 ela conta 8, 9, 10, 11. Ela dispensa uma nova contagem de 1 a 7, pois está certa de que o segmento inicial de sua nova seqüência numérica é 7.

Steffe (1994) usa o termo “unidade composta” para designar o resultado da operação de tomar a seqüência de itens de 1 a 7 como uma só unidade e considera que uma criança que construiu somente a seqüência numérica inicial ainda está por estabelecer essa operação.

A unidade composta implícita marca um avanço importante, principalmente porque é reversível: a seqüência numérica representa, simultaneamente, os atos de contagem e o resultado da contagem. O nome do número já representa a operação utilizada para tomar um segmento inicial como uma unidade. Também é um avanço

por se tratar da reinteriorização da seqüência numérica inicial, pois a criança toma a seqüência verbal para recapitular a contagem.

A passagem da seqüência numérica inicial para a seqüência numérica implícita é um ponto crítico no desenvolvimento numérico, como alerta Olive (2001).

Acrescentando mais limitações às situações de contagem – tal como cobrindo os objetos que foram adicionados, assim como os já contados – as crianças com uma seqüência numérica inicial necessitam desenvolver maneiras de controlar suas ações de contagem para a frente. Muitas usam os dedos ou atos de apontar para representar os itens cobertos. Esse ato de representar o que deve ser contado para a frente é o primeiro passo no uso de itens da sua seqüência numérica inicial como “input” para posteriores atos de contagem. Primeiro elas podem usar padrões de dedos para a quantidade a ser contada e simplesmente usar cada dedo como um item contado, enquanto elas continuam contando, usando sua seqüência numérica inicial. Quando a quantidade a ser contada para a frente é muito grande – por exemplo, maior do que 10, a criança precisa desenvolver algum outro modo de controlar seus atos de contagem. Por exemplo, tendo contado uma pilha de 12 fichas num copo e 15 fichas noutra, ao tentar encontrar quantas fichas há nos dois copos juntos, a criança pode começar a contar para a frente do 12, levantando um dedo para cada contagem: “13, um dedo, 14, dois dedos, 15, três dedos... 22, dez dedos levantados”. Nesse ponto, a criança pode baixar todos os dedos levantados e continuar a contagem: 23, um dedo, 24, dois dedos... Se a criança pára depois dos cinco dedos de uma mão e levanta dez, ela provavelmente usou um padrão de “todos os dez dedos, mais uma mão” para 15. Entretanto, muitas crianças não desenvolvem tal padrão somente com a seqüência numérica inicial e não sabem quando parar de contar para a frente. Isso causa uma perturbação que elas

precisam neutralizar. Elas têm que desenvolver meios de controlar a contagem para a frente, de 15 mais do que 12. Isso força um reprocessamento da sua seqüência numérica inicial, que resulta em alguma forma de dupla contagem. Com efeito, elas usam sua seqüência de números de 1 a 15 de um novo modo – para marcar um segmento da sua seqüência de números de 12 para a frente. Enquanto levantam seus dedos, elas podem dizer : 13 é 1, 14 é 2,... 27 é 15. Ao reprocessar um segmento da sua seqüência numérica desse modo, elas fazem um conjunto implícito da seqüência de 1 a 15, dentro da seqüência de 1 a 27. Sob esse ângulo, a seqüência numérica implícita é uma reinteriorização da seqüência numérica inicial. Os elementos da seqüência numérica implícita são itens contáveis abstratos. O resultado – o intervalo de 13 a 27 – tem uma numerosidade de 15. Agora há uma consciência de 15 como um todo composto, e não só o resultado interiorizado da contagem de 1 a 15. Em essência a criança pode, agora, unir os resultados da contagem.

Olive exemplifica que com uma seqüência numérica implícita as crianças podem controlar quantas vezes elas contaram por 2 ou por 5. A questão “quantos dois” agora faz sentido, porque o 2 pode ser tomado como uma coisa e ser usado para segmentar uma seqüência num desconhecido número de intervalos de dois itens. Assim, as crianças que construíram uma seqüência numérica implícita podem ser capazes de encontrar quantos grupos de 2 elas podem fazer com 12 itens, contando 1,2; 3,4; 5,6;... 11, 12, enquanto controlam os atos de contagem. Assim, esquemas multiplicativos tornam-se possíveis para crianças com uma seqüência numérica implícita, mas não são possíveis para crianças com uma seqüência numérica inicial somente.

#### 5.2.4 A Seqüência Numérica Composta Explícita

A seqüência numérica composta explícita é constatada quando, dado um segmento correspondente a 9, e uma determinada unidade composta 7, por exemplo, a unidade composta 7 pode ser extraída do 9 e, ao mesmo tempo, permanecer no 9. Esta operação não é encontrada numa seqüência numérica implícita (STEFFE, 1994).

Outra evidência da unidade composta explícita é a simbolização da relação de inclusão, no sentido de que cada unidade de 1 a 7 pode ser iterada sete vezes, ou seja, a iteração de 1 representa também a soma de 1, e a criança compreende que 1 está incluído em 2, 2 em 3, e assim, sucessivamente.

Somente por uma seqüência numérica composta explícita, ao comparar 7 e 9, a criança conclui que 9 tem 2 a mais que 7, ou que 7 tem 2 a menos que 9.

Embora as crianças com uma seqüência numérica implícita possam começar a construir estruturas multiplicativas, elas ficam limitadas pela natureza implícita da sua seqüência numérica. Com isso, Olive (2001) quer dizer que os intervalos podem ser usados para segmentar a seqüência numérica no ato de contagem. A seqüência segmentada – por exemplo, “seis 2” na seqüência numérica de 1 a 12 – é resultado da utilização de operações de uma seqüência numérica implícita. Entretanto, para estabelecer esquemas multiplicativos abstratos, ou seja, para utilizar um raciocínio multiplicativo, as crianças precisam ser capazes de assimilar a estrutura “seis 2”, o que requer, ainda, outra re-interiorização da seqüência numérica. Cada elemento de uma seqüência de números precisa ser uma unidade composta abstrata dentro da seqüência numérica. Isso quer dizer que um elemento de uma seqüência numérica, por exemplo, o número 6, contém os registros da contagem de 1 a 6 como unidades

abstratas. O número 6 pode ser considerado como 1 seis vezes, assim como o resultado de contar os primeiros seis elementos de uma seqüência numérica. Um passo crítico no processo de re-interiorização é o estabelecimento de uma unidade abstrata 1 como uma unidade iterável. A unidade iterável é produto da aplicação repetida da operação de “mais 1” na dupla contagem. Cada vez que a criança conta, ela cria mais um item na subseqüência. É a re-interiorização deste “mais 1” que resulta na consciência de que, tendo contado mais seis itens, estes seis itens são seis unidades.

Com uma unidade iterável, a criança pode se engajar em raciocínios parte-todo. O número 6 pode ser pensado como contendo seis unidades, cada qual podendo ser desencaixada da unidade composta de seis, sem destruir a unidade seis. Três está contido em 6 e pode ser comparado à unidade 6. Não somente 6 consiste de 6 unidades, mas cada uma dessas 6 unidades pode ser iterada para recriar a unidade composta de 6.

Como exemplo de como uma criança com uma seqüência numérica explícita pode agir diferentemente de outra com somente uma seqüência numérica implícita, pode-se considerar o seguinte problema:  $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ . Crianças com somente a seqüência numérica implícita provavelmente resolverão este problema por adições sucessivas:  $1 + 1$  é 2,  $2 + 1$  é 3,  $3 + 1$  é 4,  $4 + 1$  é 5. Elas têm que gerar as somas, enquanto para crianças com uma seqüência numérica explícita, as somas estão implícitas, e elas verão o problema como cinco unidades, sabendo que cinco unidades é o mesmo que “um 5”.

Steffe (apud OLIVE, 2001) trouxe o exemplo de uma criança com seqüência numérica explícita, Johanna, que podia resolver problemas de contagem com unidades de unidades de 3, controlando o número de unidades compostas de 3, à

medida que contava. Johana tinha produzido quatro linhas de 3 com 12 blocos, e foi desafiada a encontrar quantas linhas de 3 poderia fazer se tivesse ao todo 27 blocos. Ela foi capaz de aplicar sua coordenação de dupla contagem a dois tipos diferentes de unidades, mantendo o resultado da primeira coordenação – cinco linhas de 3, o complemento de 12 em 27 – de volta em seu esquema de coordenação de unidades da unidade previamente estabelecida de quatro linhas de 3, para chegar a um total de nove linhas de 3. Essa aplicação recursiva do seu esquema de coordenação de unidades foi possível porque os elementos da sua seqüência numérica implícita foram se re-interiorizando, provendo-lhe dois níveis de unidades abstratas – itens unitários e unidades compostas – como material para operar. O processo de re-interiorização em si mesmo é um processo recursivo, e é essa recursividade que produz o conceito de número reversível.

### 5.3 ESQUEMAS DE UNIDADES COMPOSTAS

O modo como a criança constrói os primeiros números inteiros, enquanto unidades iteráveis, é altamente relevante e tem profundas conseqüências na compreensão da multiplicação e divisão. Na sua investigação, Steffe (1994) identificou três tipos de unidades compostas que fazem a passagem das seqüências numéricas iniciais para os esquemas pré-multiplicativos e multiplicativos.

Somente crianças especialmente ativas constroem unidades compostas iteráveis, espontaneamente, sem serem confrontadas com situações especificamente designadas a encorajar essa construção. Enquanto a criança construiu apenas a seqüência numérica inicial, está longe da construção de unidades compostas iteráveis, o cerne da multiplicação.

Dois e três não emergem como unidades iteráveis subitamente. O salto conceitual a ser feito para a construção de unidades compostas iteráveis é atravessado por tipos intermediários de unidades (STEFFE; VON GLASERSFELD, 1985): as unidades compostas experienciais, as unidades compostas abstratas e as unidades compostas iteráveis, propriamente ditas.

- Unidade composta experiencial

Uma unidade composta experiencial é formada por um padrão numérico que utiliza uma operação de reunião. A unidade composta experiencial é feita no mesmo nível de interiorização que o padrão numérico envolvido; ela aparece na experiência, por utilização de material sensorial. A única novidade é que os registros da operação de reunião ficam registrados no padrão numérico.

- Unidade composta abstrata

Uma unidade composta abstrata forma-se num nível de interiorização acima do desenvolvido na unidade composta experiencial, graças à representação. Uma primeira condição para avançar de um nível a outro é dispensar o material sensorial, pois a representação remove a criança para fora do seu mundo sensório-motor.

As crianças para as quais o nome de um número simboliza uma unidade composta abstrata podem encontrar quantos elementos há entre 2 e 9, por exemplo.

- Unidade composta iterável

Uma criança usa uma unidade iterável quando ela é capaz de isolá-la de sua qualidade composta. Tal é o caso, por exemplo, quando a tarefa é encontrar quantos 10 há entre 30 e 90, e ela conta 40 é 1, 50 é 2, 60 é 3... 90 é 6. Essa é a indicação de que o 10 tornou-se uma unidade iterável.

Outra situação é aquela na qual se têm trinta centavos escondidos, acrescentam-se sessenta centavos, diz-se para a criança que, agora, têm-se noventa centavos e pede-se que diga quantos centavos estão escondidos.

#### 5.4 ESQUEMA PRÉ-MULTIPLICATIVO

Uma situação é considerada multiplicativa quando duas unidades compostas são coordenadas de modo tal que uma das unidades compostas é distribuída sobre os elementos da outra. Steffe (1994) considera que uma criança de oito anos, que começou a escolaridade somente com a seqüência numérica inicial, não é capaz de fazer isso. Mesmo que possa resolver algumas situações multiplicativas, ela não modifica sua seqüência de números a ponto de produzir um esquema multiplicativo.

Vejamos uma situação relatada por Steffe. (E) será o experimentador e (Z) será Zacharias. Uma linha de três fichas está visível, e cinco estão escondidas.

*E: Se você tem seis linhas de fichas, quantas fichas você tem?*

Com o indicador, Z toca na mesa três vezes para o que imagina ser uma linha. Faz seis dessas linhas, deslocando o indicador.

*Z: Dezoito fichas*

O deslocamento da mão sobre a mesa, combinado com o assinalamento de três pontos, indica que Zacharias usou um padrão numérico linear espacial para representar seis e uma unidade composta de 3. E, para contar os elementos, ativou uma representação, marcando com o dedo, para fazer algo tangível. Ele criou uma unidade composta figurativa de três elementos em “outro lugar”, que, para ele, era tão real quanto a linha de três que deveria estar no seu campo visual.



Zacharias distribuiu seu conceito de três através dos elementos do seu conceito de seis. Não há nenhuma indicação de que ele fez essas coordenações antes de ativar o seu esquema e, por isso, trata-se de um conceito em ação da multiplicação. Não é um conceito nem um esquema de multiplicação, porque as unidades foram coordenadas somente em ação.

## 5.5 ESQUEMAS MULTIPLICATIVOS

Diante de Maya, uma menina entrevistada por Steffe, foram colocados uma tira de papel vermelho e vários retângulos congruentes, de papel azul, de forma que seis pedaços azuis ajustavam-se exatamente na tira vermelha. Interrogada sobre quantas peças azuis correspondiam à peça vermelha, ela verificou que eram seis.

A seguir, foram retiradas três das peças azuis que ela havia colocado sobre a vermelha e colocados dois quadrados laranja sobre cada uma das peças azuis restantes. O experimentador perguntou, então, quantos quadrados laranja deveriam ser colocados sobre a tira vermelha, sem que se pudessem realizar trocas. Depois de olhar para a frente, ela iterou, subvocalicamente, nomes de números e, ao final, disse “doze”. Para explicar como chegou no 12, ela bateu na mesa duas vezes, alternando os dedos e enunciando os nomes dos números 1, 2...3, 4...5, 6...7, 8,... 9, 10...11, 12.

Bater na mesa duas vezes, com cada um de seus seis dedos, indicou que Maya interpretou numericamente a solicitação.

Para resolver o problema como ela o fez, Maya teve que distribuir suas unidades de dois por cada uma das seis unidades, que estavam representadas, antes da contagem. A coordenação de unidades dois-para-um feita por Maya foi

produzida como uma acomodação funcional das operações envolvidas na dupla contagem.

Como um produto da reversibilidade de sua seqüência de números, a coordenação de unidades de dois-para-um pode ser considerada implícita na dupla contagem, coordenação esta que caracteriza um conceito implícito de multiplicação.

Embora Maya tenha contado por pares 1, 2...3, 4...11, 12, Steffe não considera que o seu conceito implícito de multiplicação seja uma adição repetida. A estrutura que deu origem à coordenação utilizada pode ter sido uma adição repetida.

Confrey (1991) acredita que a seqüência numérica leva, necessariamente, à interpretação da multiplicação como adição repetida. Steffe (1994) acrescenta que, embora a maior parte das abordagens atuais da multiplicação se fundamente, quase exclusivamente, na adição repetida e na sua subjacente base na contagem, não se deve encorajar a multiplicação somente como adição repetida.

#### 5.5.1 Esquema de Coordenação de Unidades em Ação

Tenryn estabeleceu um esquema de adição repetida no seu terceiro ano na escola. Ele fez nove linhas de três fichas por linha, em forma de retângulo, com nove linhas e três colunas (STEFFE, 1994).

Experimentador (cobrindo as fichas): *Quantas fichas você tem?*

Tenryn (olha para o experimentador por, aproximadamente, oito segundos e então levanta seus dedos indicador, médio e anular esquerdos. Subvocalicamente, enuncia, por 75 segundos, olhando, ora para cima, ora para seus dedos): *Vinte e sete.*

Experimentador: *Como você descobriu isso?*

Tenryn: *Meus dedos...*

Experimentador: *Ok, diga-me como você fez.*

Tenryn (Levantou o mesmo padrão de dedos e moveu-os, sincronicamente, à medida que enunciava as palavras ): *3, 6, 9, 12, 15... 27*

Experimentador: *Como você lembrava?*

Tenryn sorri, sem saber explicar.

Experimentador (apontando para a mão direita de Tenryn): *Você usou esta mão?*

Tenryn (sacudindo a cabeça ): *Não.*

Experimentador (apontando para a cabeça de Tenryn): *Como você guardou na cabeça? Como você sabia como contar?*

Tenryn (mostrando seu padrão de dedos): *Eu contei de três em três.*

Experimentador: *Contando de três em três? Quantas vezes você contou?*

Tenryn: *Nove.*

Experimentador: *Como você “guardou” nove? Como você sabia quando parar?*

Tenryn: *No vinte e sete.*

Experimentador: *Mostre-me como você “guardou”.*

Tenryn (levanta seu padrão de dedos mais uma vez e move-o, sincronicamente com a enunciação): *3, 6, 9...*

Experimentador (interrompendo): *Quantas vezes é isto?*

Tenryn: *Três (Pára, levanta seu padrão de dedos). Quatro ( e continua), 5 deve ser 15; seis, 18 (mantendo ativo seu padrão de dedos, movendo-os a cada contagem); sete, 21; oito, 24; nove, 27.*

Durante os oito segundos depois que o experimentador perguntou quantas fichas tinha, Tenryn engajou-se, ativamente, na situação. Ele usou o padrão de um

dedo, enquanto subvocalicamente balbuciava, utilizando o seu padrão numérico de três como uma unidade que ele podia usar um número específico de vezes.

Steffe deu o nome de unidade iterável a esse padrão numérico de três. No seu entender, Tenryn tinha um esquema que ele podia usar para estabelecer nove unidades de três.

Tenryn fazia uma coordenação de unidades em ação, quando lembrava cada unidade de três, antes de alcançar nove. Isso qualifica o esquema de Tenryn como um esquema de coordenação de unidades em ação e um conceito iterativo de multiplicação como adição repetida. O padrão numérico digital de três era como um dispositivo pronto para ser repetido nove vezes, de acordo com a contagem dos dedos, que ele usava a cada implementação. A experiência de “nove três” não apareceu para Tenryn antes da implementação do seu padrão numérico inicial. “Nove três” foi o resultado do seu conceito iterativo de multiplicação.

Com base na atividade de Tenryn, Steffe recomenda que não se desencoraje a multiplicação como uma adição repetida, desde que esta seja a identificação de uma unidade composta e a contagem consecutiva de instâncias dessa unidade. Além disso, sugere que não se tome uma decisão prévia sobre ensinar a multiplicação como adição repetida ou como distribuição de uma unidade composta. Isso porque é interessante desenvolver interpretações alternativas para as crianças, em lugar de encorajar uma única forma de interpretação.

### 5.5.2 Esquema de Coordenação de Unidades Parte-Todo

Os esquemas apresentados por Johana e descritos por Steffe como esquemas multiplicativos estavam além dos apresentados por Maya e Tenryn. Ela

podia unir uma determinada pluralidade de unidades compostas em outra unidade composta, formando uma unidade de unidades de unidades, envolvendo-se em refinados raciocínios numéricos parte e todo.

O experimentador pediu-lhe para pegar doze fichas, também pegou algumas, escondeu-as e lhe disse que juntos tinham dezenove. Após, perguntou-lhe quantas fichas estavam escondidas. Depois de permanecer em silêncio durante vinte segundos, ela disse “sete” e explicou: “Bem, dez mais nove é dezenove e eu deixei de lado o dois, e eu pensei dez mais dois é doze e nove menos dois é sete”.

Primeiro Johana decompôs dezenove em duas partes, dez e nove. Depois, ela transformou as partes em doze e sete, adicionando dois ao dez e compensando pela subtração de dois de nove. A compensação envolvida é uma sólida indicação de que, depois de desmembrar as duas unidades do dezenove, ela ainda as via como partes constitutivas do dezenove. Isso indica, também, que Johana podia desmembrar partes numéricas de um todo numérico ( $19 = 10 + 9$ ) e usar essas partes como material para operar posteriormente ( $10 + 2 = 12$ ) e ( $9 - 2 = 7$ ), e reconstituir esse resultado como um todo numérico original ( $12 + 7 = 19$ ).

Assim como Maya, quando havia uma quantidade definida de unidades de três, Johana podia usar seu conceito de três numa coordenação de unidades. Em contraste com Maya, ela podia “pegar” esses resultados como material para operar posteriormente na situação que Steffe denominou de “linha escondida”. Isso aconteceu nas seguintes situações.

a – O experimentador pediu à Johana para fazer quatro linhas de três, deixando-as em seu campo visual. Então fez algumas outras linhas, cobriu-as e lhe disse que agora havia sete linhas de três e lhe pediu para dizer quantas linhas estavam

escondidas. Quase imediatamente, ela disse “três”, demonstrando que podia tratar as linhas como se elas fossem unidades simples, porém mantendo sua cardinalidade.

b – Em outra situação ela encontrou que quatro linhas estavam escondidas. O experimentador perguntou quantas fichas foram escondidas e, depois de dez segundos, ela disse “doze”, explicitamente consciente das unidades de três.

c – Foram escondidas cinco linhas de fichas, com quatro fichas em cada linha que ela havia feito. O experimentador perguntou-lhe quantas fichas havia nas três primeiras linhas. Ela permaneceu silenciosa por cerca de 25 segundos, profundamente concentrada, e então disse “doze”. O experimentador perguntou, então, quantas linhas mais havia, e ela respondeu que eram duas, acrescentando que havia oito fichas nessas duas linhas. Encorajado, o experimentador perguntou quantas fichas havia nas cinco linhas. Ela ficou em silêncio por 15 segundos e respondeu “vinte”, e explicou “porque eu fui somando, doze mais quatro é dezesseis e dezesseis mais quatro é vinte”.

O que foi significativo na situação é que Johana usou seu conceito de quatro para reprocessar os resultados da representação de cinco linhas de quatro, contando as primeiras três unidades de quatro e unindo-as em outra unidade composta. Essa inferência é baseada nos 24 segundos em que ela permaneceu profundamente concentrada antes de dizer “doze”, no fato de que ela imediatamente sabia que mais duas linhas de quatro foram deixadas e no fato de que ela uniu essas duas unidades compostas com doze para encontrar o número total de fichas, vinte. É possível dizer que as progressivas operações de unidades (doze mais quatro são dezesseis e dezesseis mais quatro são vinte) podem indicar que o seu conceito de quatro era iterável.

Então o experimentador tomou oito fichas e perguntou: *Se eu fizer linhas com estes blocos e juntar com as suas linhas, quantas linhas teremos?*

Depois de 10 segundos, Johana disse: *vinte e oito*.

Experimentador: *Vinte e oito, certo! Quantas linhas deve ter?*

Johana: *Oh! Hum! Sete linhas*.

Para explicar, ela continuou: *Porque você tem quatro fichas em cada linha e você tem cinco linhas e cinco mais dois são sete*.

Johana recém havia descoberto que tinha vinte fichas em cinco linhas de quatro, usando seu esquema de coordenação de unidades. Assim, ela pôde contar as oito fichas com as outras vinte, sem fazer confusão entre os dois grupos de unidades. Combinando todas as fichas em vinte e oito, ela formou uma unidade composta contendo as vinte e oito fichas, sendo que as vinte primeiras já estavam organizadas em uma unidade de unidades de quatro. Steffe afirma que Johana usou uma unidade iterável ao estabelecer uma pluralidade de unidades compostas. Mentalmente, ela fez duas unidades de quatro das oito fichas e somou essas duas unidades às cinco precedentes.

A seguir, o experimentador colocou sete linhas juntas, mais doze blocos e fez a mesma pergunta. Sem fazer as linhas adicionais, Johana disse “dez”. E explicou “Eu contei as linhas de quatro em doze, achei três linhas e sete mais três é dez”.

Nessa situação, Johana encontrou quantas mais linhas de quatro poderiam ser feitas usando os doze blocos e, mentalmente, somou essas três linhas às sete precedentes. Ela pôde saltar o passo de contar doze a partir do vinte e oito, porque pôde pegar os resultados de suas operações parte-todo.

### 5.5.3 Esquema Reversível de Coordenação de Unidades

Continuando com Johana, o experimentador lhe perguntou quantos grupos de três ela podia fazer, usando doze fichas. Depois que ela achou quatro, contando de três em três, o experimentador colocou algumas outras fichas num recipiente e perguntou quantos grupos de três foram colocados a mais no recipiente, se agora, ao todo, havia vinte e sete fichas. Johana ficou em profunda concentração, por cerca de 30 segundos, subvocalicamente, pronunciando nomes de números antes de responder “cinco”.

Pode-se inferir que ela contou, a partir de doze, até vinte e sete, de três em três, contando as unidades de três. Encontrar o número de grupos de três, a partir de doze blocos, foi um aspecto crítico da sua solução. Ela pegou os resultados, quatro unidades compostas de três elementos cada uma, e uniu essas quatro unidades compostas fazendo uma unidade de unidades de unidades. Três era, agora, uma unidade iterável que ela podia utilizar numa contagem que ia além das quatro unidades de três, usando seu esquema de coordenação de unidades.

O sistema de operações utilizado por Johana podia ser usado para estabelecer a reversibilidade do esquema de coordenação de unidades. Esse sistema também lhe permitia usar seu conceito de três em representação outras vezes, criando uma pluralidade de unidades compostas de cardinalidade indefinida e a unidade composta como iterável. Entretanto, essa estrutura de unidades de unidades não estava disponível antes de utilizar seus esquemas.



#### 5.5.4 Esquema Iterativo de Multiplicação; a Seqüência Numérica Generalizada

De acordo com Steffe, Johana não tinha construído um esquema iterativo de multiplicação porque as suas unidades compostas não eram, ainda, iteráveis, nem seu esquema era reversível. Ou seja, as operações envolvidas no uso de unidades compostas não estavam simbolizadas. Johana podia efetuar essas operações num contexto, mas elas não estavam disponíveis antes que ela operasse. Ela podia representar cinco linhas com quatro blocos em cada linha, tomar a pluralidade figurativa como material da sua operação de união, estabelecendo uma unidade de cinco unidades de quatro. Depois disso, poderia separar as cinco unidades de quatro, depois em três unidades de quatro e, ainda, em duas unidades.

Se Johana tivesse completado a construção do seu esquema de coordenação de unidades como um esquema reversível, então poderia pegar cada situação e resultados como sendo intercambiáveis. Ela teria completado o que Steffe chama de uma seqüência numérica generalizada: “um é três, dois é seis, três é nove”. A seqüência numérica generalizada simboliza as operações envolvidas na coordenação de unidades, que Steffe considera as origens da multiplicação. Sua construção serve como base para as unidades compostas serem iteráveis. É um esquema iterativo de multiplicação e, com ele, expressões de multiplicação, como “quatro vezes o três”, começam a aparecer.

Crianças com uma seqüência numérica explícita podem estabelecer esquemas multiplicativos que envolvem dois níveis de unidades. Elas podem formar unidades compostas e podem usar esses itens em outras operações: contagem, combinação, comparação, segmentação e partição. Elas podem formar ainda uma composição numérica como resultado dessas operações. Por exemplo, o resultado

da combinação de seis grupos de 5 é uma coleção de seis itens, cada um dos quais é um 5. Elas podem desmembrar cada 5 para chegar ao resultado de 30 itens. Essas 30 unidades podem, também, ser tomadas como uma unidade composta de 30. O que não podem fazer é tomar os seis grupos de 5 como uma coisa que elas podem usar para “input” posterior. Podem produzir unidades de unidades de unidades, mas não podem, ainda, simbolizá-las. É necessário uma re-interiorização da seqüência de números para tomar os resultados dessas operações sobre unidades compostas como material para operações posteriores. Essa re-interiorização de uma seqüência numérica explícita é que constitui a seqüência numérica generalizada.

Com uma unidade composta de 4, a criança pode conceber 4, por seis vezes, como sendo o mesmo que ter uma unidade composta de 6 com uma unidade de quatro itens em cada um dos seis itens, que constituem as seis “unidades”. As “unidades” na unidade composta de 6 tornam-se guardadores de lugar de qualquer tipo de unidade – únicas ou compostas.

Crianças com uma seqüência numérica generalizada podem começar a construir estruturas exponenciais. Elas podem, também, coordenar pelo menos três diferentes níveis de unidades. Embora as crianças com somente uma seqüência explícita trabalhem com a notação de valor posicional até as centenas, e possivelmente os milhares, elas terão dificuldade em explicar as relações numéricas envolvidas no sistema de valor posicional. Crianças com uma seqüência numérica generalizada podem explicitamente demonstrar essas relações de valor posicional e extrapolar para expoentes mais e mais altos da base numérica (OLIVE, 2001).

## 5.6 ESQUEMAS, CONCEITOS E PROCEDIMENTOS

Para Steffe e Cobb (1998), a primeira parte de um esquema multiplicativo ou divisional consiste na concepção, pela criança, da situação na qual esquemas multiplicativos ou divisionais são usados. A segunda parte consiste do procedimento (o algoritmo) de multiplicação ou divisão, e a terceira consiste numa revisão dos procedimentos, de onde saem os resultados. Na perspectiva construtivista de von Glasersfeld (1982), “conceito” se refere a qualquer estrutura que foi abstraída do processo de construção experiencial. Para serem chamados de “conceitos”, esses construtos devem ser suficientemente estáveis para serem “re-presentados”, na ausência de “input” perceptivo.

Um conceito pode ser implementado por procedimentos, assim como pode ser informado por procedimentos. Em outras palavras, a criança organiza sua experiência em termos de seus conceitos. Tyrone, mencionado no capítulo anterior, contou por 20 para resolver “ $20 \times 20$ ”. Ele sabia o que estava fazendo, pois antecipou que poderia resolver sua tarefa iterando uma unidade de 20. Conceitos são, então, sistemas antecipatórios que orientam o uso de procedimentos dentro de um sistema dirigido a um objetivo. Piaget (1967) explica que antecipação é a aplicação do esquema a uma situação nova antes que ela aconteça.

Steffe e Cobb (1998) destacam que a construção de sistemas conceituais não são simples cópias das situações experimentadas, das quais são abstraídas. Um novo conceito multiplicativo ou divisional pode ir além de quaisquer atividades que podem ter servido na sua abstração. Mais ainda, parece que não há um único conceito multiplicativo. Ao contrário, os conceitos estão em contínua evolução. Sua

formação pode ser caracterizada por elaborações e reorganizações resultantes de acomodações que surgem no uso de esquemas multiplicativos.

Steffe e Cobb observaram esquemas multiplicativos nos quais a criança não tinha unidades iteráveis. Por exemplo, para resolver “4 x 5”, Peter, um menino de nove anos, primeiro desenhou pequenos círculos. Então, ele levantou os dedos de uma mão em sincronia com a pronúncia “1, 2, 3, 4, 5”, enquanto olhava para o primeiro círculo. Ele continuou deste modo “6, 7, 8, 9, 10” e foi adiante, enquanto olhava para cada círculo, até que ele atingiu 20. Peter não antecipou a contagem por 5. Para Steffe e Cobb (1998), Peter fez uma unidade composta.

Os números inteiros, como unidades compostas, são considerados os resultados de operações de união. Steffe e Cobb (1998) designam a operação de união por integração. A operação de integração pode ser aplicada às seqüências numéricas, assim como a coleções de itens perceptivos. A operação de integração é um processo de abstração reflexionante, e o material concreto que é “deixado para trás” inclui a operação de união. A criança que construiu essa operação não precisa confiar somente nas separações de itens experienciais ou pausas na atividade de contagem. Ela pode segmentar a experiência conceitualmente, fazendo unidades compostas.

O conceito de multiplicação de Peter foi implementado fazendo unidades compostas de 5; “5” era um símbolo para fazer unidades compostas, e “4 x 5” era um símbolo para fazer quatro dessas unidades compostas. Steffe e Cobb (1998) destacam que a atividade de Peter de fazer um círculo foi uma implementação de fazer uma unidade composta de 5, por quatro vezes. Essas implementações eram equivalentes somente pelo fato de que se ele contasse o que poderia pôr em cada uma, seriam 5. Mas cada uma constituiu um objeto distinto no seu campo visual. Em

outras palavras, “5” se referia a diferentes objetos. O resultado da implementação de “4 x 5” disparou a contagem por unidades. Sendo assim, o esquema multiplicativo de Peter consistiu de dois subesquemas, nos quais os resultados do primeiro serviram como disparadores do segundo. Os subesquemas estavam ligados, mas não coordenados. Coordenação exigiria que “5” se referisse a uma unidade iterável.

Um esquema iterativo, multiplicativo ou divisional, é mais do que a atividade de contagem por 3 ou por 5. A coordenação de dois esquemas de contagem – a contagem por unidades e a contagem por uma unidade iterável - também é necessária. Essa coordenação antecipatória é um mecanismo que a criança pode usar para assimilar situações multiplicativas ou divisionais e, como tal, disparar a contagem pela unidade particular envolvida. A profunda diferença entre dizer “4 x 5”, referindo-se a fazer quatro unidades compostas com 5 em cada uma e referir-se à unidade 5 repetida quatro vezes, corresponde a um salto conceitual.

## 5.7 PROPRIEDADES DE ESQUEMAS ITERATIVOS

### 5.7.1 Reversibilidade de Esquemas Iterativos

A criança que construiu a reversibilidade da contagem pode antecipar que contar para a frente e contar para trás envolve os mesmos atos de contagem, mas na direção oposta. Por exemplo, a criança pode resolver “17 – 5” contando “17... 16, 15, 14, 13, 12”. Steffe e Cobb consideram que a reversibilidade da contagem tem importantes implicações na resolução de problemas da criança. Seus achados indicam que as crianças inicialmente contam para a frente, quando usam seus

esquemas iterativos. Entretanto, elas podem inverter a direção da contagem quando surge a necessidade.

A sentença “8 x 7” foi apresentada a Jason, um menino de 7 anos, imediatamente depois que ele resolveu “9 x 7” pela contagem para a frente, por 7. Jason contou “63, 62, 61, 60, 59, 58, 57, 56”, enquanto levantava, seqüencialmente, sete dedos. Ele relacionou a tarefa de iterar 7 oito vezes, ao resultado de iterar 7 nove vezes; ele tinha que andar para trás uma unidade de 7. Sua contagem para trás indica que um recurso de reversibilidade de esquemas iterativos é a reversibilidade de contagem por unidades (STEFFE & COBB, 1998).

#### 5.7.2 Flexibilidade dos Esquemas Iterativos

A flexibilidade dos esquemas iterativos coincide com a reversibilidade. Espontaneamente, Tyrone contou de 20 em 20 para resolver “20 x 20”. Como a contagem por 20 não era uma prática de rotina, esta solução representa um comportamento de contagem adaptativo. O esquema multiplicativo iterativo de Tyrone era flexível, na medida em que ele podia contar por qualquer unidade que escolhesse, mesmo que não soubesse a seqüência de números.

A flexibilidade do esquema multiplicativo iterativo de Tyrone ficou amplamente demonstrada na sua solução a uma tarefa na qual ele foi desafiado a encontrar quantos 20 faziam 80. Ele levantou dedos em seqüência enquanto contava “20, 40, 60, 80” e rapidamente deu 4 como resposta. Tyrone modificou seu esquema e usou-o para encontrar quantas iterações ele teria que fazer para obter o resultado.

Finalmente, a flexibilidade dos esquemas iterativos de Tyrone foi indicada por suas soluções de contagem em problemas aritméticos. Previamente, ele usou tais

esquemas para resolver sentenças. Tyrone achou que deveriam ter sete linhas se quarenta e duas cadeiras estivessem arrumadas em linhas de 6, pela contagem “6, 12, 18... 19, 20... 42”. Ele levantava seus dedos da mão direita e lembrava as iterações de 6 com a mão esquerda.

## 5.8 CONCEITOS MULTIPLICATIVOS ABSTRATOS

Steffe e Cobb (1998) esclarecem que seu interesse em esquemas iterativos não deve ser interpretado como se eles vissem a criança como uma “contadora”, ou que pretendem deixá-la nesse estado, já que a primeira resposta dela a problemas aritméticos é contar. Pelo contrário, partem da premissa de que os esquemas iterativos constituem material essencial na construção de conceitos abstratos de multiplicação e divisão, conceitos que requerem completa abstração de qualquer contexto particular. As unidades iterativas precisam ser separadas do seu conteúdo e tomando-se, então, objetos aritméticos aos quais posteriores operações podem ser aplicadas. Produtos como “7 x 8” se referirão, então, a operações envolvidas em repetir oito unidades abstratas sete vezes.

### 5.8.1 Propriedades dos Conceitos Abstratos

#### - Distributividade

Esta propriedade é de vital importância no desenvolvimento de procedimentos melhores do que a contagem para encontrar produtos mais sofisticados. Tyrone era incapaz de relacionar sucessivos problemas de multiplicação quando o multiplicando variava mais do que o multiplicador. A construção de relações entre “7 x 7” e “7 x 8”

envolve a aplicação de operações parte-todo. A falta de distributividade de Tyrone é consistente com a natureza dos seus conceitos multiplicativos. A reorganização que é feita antes da multiplicação é a essência da distributividade, e isso é bastante difícil para a criança (STEFFE; COBB, 1998).

#### - Comutatividade

A experiência com as regularidades dos resultados da multiplicação podem levar a uma generalização empírica que multiplicador e multiplicando podem ser intercambiados, sem mudar o resultado. Por exemplo, depois que Tyrone resolveu um problema iterando 4 nove vezes, ele começou a contar “9, 18...” e disse: “Tem dois jeitos de fazer isso e explicou nove vezes 4 ou 4 vezes 9”. O desenvolvimento tão precoce deste princípio é, provavelmente, resultado de experiência informal.

Construir a lógica interna de que repetir 4 nove vezes e repetir 9 quatro vezes leva ao mesmo resultado, requer, pelo menos, repartir e recombina os resultados de modo criativo. Se a criança repete o material da unidade 4 por nove vezes, em pensamento, cada unidade de 1 dentro da unidade de 4 será repetida nove vezes. Tomar as repetições de cada unidade de 1 como uma unidade composta leva ao produto “4 x 9”. Nesse caso, o princípio da comutatividade será um objeto da consciência.



## 5.9 MULTIPLICAÇÃO NA MATEMÁTICA ESCOLAR

O limitado alcance do trabalho com multiplicação e divisão apresentado nos livros-textos para os anos iniciais parece ser baseado no pressuposto de que os significados dessas operações são únicos e podem ser “vistos” na realidade ontológica. Por exemplo, num livro do professor, escrito por Bolster, a seguinte atividade é recomendada:

Faça com que seus alunos ponham suas mãos estendidas sobre a classe. Seus dedos representam dois grupos de 5. Escreva no quadro a sentença da adição  $5 + 5 = 10$ . A seguir, escreva no quadro a sentença da multiplicação  $2 \times 5 = 10$ . Chame a atenção que o 2 indica o número de grupos, 5 indica o número de objetos em cada grupo, e 10 indica quanto tem ao todo. (BOLSTER, apud STEFFE; COBB (1998. p.57).

Nesta caracterização do significado de “ $2 \times 5 = 10$ ”, as crianças têm que “ver” dois grupos e “ver” que cada grupo contém cinco elementos. Além disso, elas têm que “ver” dez elementos como a combinação aditiva dos dois grupos.

Outro exemplo, também encontrado em Bolster:

Arrume 15 objetos em 5 grupos de 3. Agora pergunte qual a sentença aditiva que você pode escrever para encontrar quantos objetos têm ao todo. No quadro escreva  $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = ?$ . Diga aos alunos que você pode escrever a mesma sentença de outro modo,  $5 \times 3 = ?$ . Então diga a eles que a segunda sentença significa o mesmo que a sentença aditiva. (BOLSTER, apud STEFFE; COBB, 1998, p. 57).

A ênfase no procedimento convencional que aparece nos livros-textos é uma prática universal. A contagem é completamente abandonada e não há esforço para correlacionar as definições com a seqüência numérica da criança. Aquela que construiu esquemas multiplicativos e divisionais iterativos, flexíveis e reversíveis está

numa boa posição para fazer as abstrações reflexionantes necessárias para construir conceitos abstratos multiplicativos e divisionais. Quando uma criança simplesmente faz coleções e depois as conta, a atenção é dirigida externamente sobre as coleções, mais do que internamente sobre a atividade de fazê-las. Em contraste, o controle de quantas vezes uma unidade é iterada provê a criança com recursos sobre os quais basear a abstração e com uma ocasião para abstrair a estrutura da sua atividade.

No entender de Steffe e Cobb, é um erro ir direto ao algoritmo padrão e ignorar os poderosos algoritmos das crianças. Os autores enfatizam que estss algoritmos- padrão devem ser baseados nos conceitos e esquemas da criança. Argumentam que os assim chamados algoritmos padrão devem ser ensinados tais como são gerados pela criança, ou seja, de um modo análogo aos procedimentos de contagem de Tyrone. Em outras palavras, eles devem ser o resultado de uma série de reorganizações que começam com a contagem. Há sólida indicação de que impor os algoritmos-padrão cria descontinuidades entre os procedimentos e os conceitos da criança.

Relatando os resultados de uma investigação do nível de compreensão de estudantes britânicos, Booth (apud STEFFE; COBB, 1998) afirma que muitas crianças não usam o método matemático “certo”, ensinado na escola, mas, ao contrário, confiam mais nas suas estratégias intuitivas. Sua co-autora, Kathleen Hart, disse que os métodos das crianças não são o pensamento do professor. Em boa parte, envolvem a contagem mais do que as quatro operações. Steffe e Cobb não acreditam somente que a criança constrói seus próprios métodos. Acreditam, também, que o ensino deve estar em harmonia com esses métodos e que as crianças devem ser encorajadas a usar seus esquemas iterativos nas situações de

resolução de problemas. Objetos e gráficos também podem ser úteis. Qualquer tentativa deve ser feita para ajudar as crianças a refletir sobre sua atividade. Desse modo, o professor pode oportunizar a abstração de conceitos a partir da atividade e, assim, ajudar as crianças a construir métodos que não envolvam a contagem. Acreditam, ainda, que os adultos podem ajudar as crianças enquanto elas se esforçam para aprender matemática. A posição de Steffe e Cobb é que nem os conceitos científicos nem os conceitos do dia-a-dia brotam espontaneamente, pois ambos são formados sob a influência do ensino adulto. Quando o ensino está em harmonia com os métodos das crianças, o seu poder gerativo é enorme. Finalmente, os métodos que as crianças geram passam por desenvolvimentos na direção de métodos que são compatíveis com os do grupo social. O conhecimento desses métodos pode oportunizar efetiva orientação para o educador, cujo objetivo é incentivar progresso.

## **CAPÍTULO 6**

“Afirmamos anteriormente que a primeira condição para que um ser pudesse exercer um ato comprometido era a sua capacidade de atuar e refletir. É exatamente esta capacidade de atuar, operar, de transformar a realidade de acordo com finalidades propostas pelo homem, à qual está associada sua capacidade de refletir, que o faz um ser da práxis.

Paulo Freire

## 6 METODOLOGIA

Trata-se de um estudo experimental, descritivo, no qual foram entrevistados alunos de 3<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> série, por meio de entrevistas clínicas, com vistas à identificação dos esquemas multiplicativos já elaborados, dos que estão em vias de elaboração e dos que não estão elaborados.

### 6.1 PROBLEMA

Como acontece o avanço dos conceitos implícitos de multiplicação – relacionados com as seqüências numéricas iniciais – para o esquema iterativo de multiplicação – relacionado com a coordenação parte-todo, com a reversibilidade e com a iteração?

### 6.2 QUESTÕES DE PESQUISA

Há uma seqüência no desenvolvimento que se inicia com os esquemas relacionados com as seqüências numéricas, passa pelos esquemas relacionados com as unidades compostas e esquemas pré-multiplicativos, na direção dos esquemas multiplicativos?

As decalagens em relação aos esquemas prévios comprometem o desenvolvimento dos esquemas multiplicativos?

### 6.3 OBJETIVO GERAL

Contribuir para o aprimoramento do ensino da matemática, trazendo esclarecimentos sobre o processo epistemológico da multiplicação.

### 6.4 OBJETIVO ESPECÍFICO

Observar o desenrolar dos esquemas que, das seqüências numéricas iniciais, se tornam mais e mais complexos, culminando nos esquemas multiplicativos.

### 6.5 AMOSTRA

A amostra foi composta por 45 sujeitos: 10 alunos de 3ª série, 10 alunos de 4ª série e 25 alunos de 5ª série, com idades entre 9 e 13 anos, da Escola Estadual de 1º Grau Rio de Janeiro, em Porto Alegre, RS. A idade predominante entre os alunos de 3ª série foi de 9 anos, entre os de 4ª série foi de 10 anos e entre os de 5ª série foi de 11 anos.

Os sujeitos foram selecionados aleatoriamente. De início, a previsão era de compor a amostra com 25 alunos de 5ª série. Essa amostra, entretanto, resultou particularmente homogênea e não possibilitou uma análise consistente dos esquemas iniciais. Optou-se, então, pela inserção de 10 alunos de 4ª série. Essa medida tornou a amostra mais heterogênea, mas, ainda assim, não apareceram alunos, pelo menos em número suficiente, que não tivessem ultrapassado as seqüências numéricas iniciais. A solução encontrada foi incluir 10 alunos de 3ª série,

tendo sido, então, encontradas algumas crianças que não haviam superado as seqüências numéricas iniciais.

## 6.6 COLETA DE DADOS

Os dados foram coletados mediante entrevistas clínicas.

De acordo com os princípios da ética na pesquisa seguidos pela UFRGS, foi enviada uma correspondência aos pais dos alunos, explicando os objetivos e as condições da entrevista e solicitando sua autorização (Anexo) .

A entrevista, fundamentada nas descrições de Steffe (1994), seguiu o seguinte roteiro:

### ROTEIRO DA ENTREVISTA

NOME:            IDADE:

#### 1 ESQUEMAS DE SEQÜÊNCIAS NUMÉRICAS

1.1 Esquema de seqüência numérica inicial

P(Pesquisadora): *Quanto é 7 mais 4?* (O material manipulativo fica à disposição)

1.2 Esquema de seqüência de unidade composta implícita

P: *Quanto é 8 mais 5?* ( O material manipulativo fica à disposição)

1.3 Esquema de seqüência de unidade composta explícita

1.3.1 P: *Quanto é 9 menos 6?* (O material manipulativo fica à disposição)

1.3.2 P: *Estando no 4, quanto falta para chegar no 10?*

#### 2 ESQUEMAS DE UNIDADES COMPOSTAS

2.1 Esquema de unidade composta experiencial

2.1.1 P: *Quanto é 10 mais 5, mais 3?* (O material manipulativo fica à disposição)

2.1.2 P: *Quanto é 12 mais 6, mais 2?*

2.2 Esquema de unidade composta abstrata

2.2.1 P: *Quanto fica entre 8 e 11?* (O material manipulativo é dispensado)

2.2.2 P: *Entre 7 e 12?*

2.2.3 P: *Entre 10 e 15?*

2.3 Esquema de unidade composta iterável

A pesquisadora mostrou algumas fichas, escondeu outras e disse: *Aqui tem 40 fichas. Ao todo, temos 60. Quantas estão escondidas?*

### 3 ESQUEMAS PRÉ-MULTIPLICATIVOS

3.1 Esquema pré-multiplicativo

A pesquisadora orientou o aluno a organizar 6 linhas de 3 fichas, deixou uma linha visível, escondeu as outras e perguntou: *Quantas fichas têm, ao todo?*

3.2 Esquema de conceito implícito de multiplicação

A pesquisadora deixou à mão uma tira de papel vermelho de 24 x 2 cm. A seguir, apresentou retângulos azuis de 4 x 2 cm e perguntou: *Quantos azuis cobrem a tira vermelha?*

O(A) aluno (a) verificou que eram 6.

A pesquisadora colocou dois quadrados amarelos sobre um retângulo azul e perguntou: *Quantos quadrados amarelos são necessários para cobrir a tira vermelha?*

3.3 Esquema de coordenação de unidades em ação

A pesquisadora orientou o(a) aluno(a) a formar 9 linhas de 3 fichas em cada linha. A seguir, cobriu as fichas e perguntou: *Quantas fichas têm aqui?*

### 4 ESQUEMAS MULTIPLICATIVOS

4.1 Esquema de coordenação parte-todo

4.1.1 O(a) aluno(a) organizou 4 linhas de 3 fichas. A pesquisadora fez algumas outras linhas e as cobriu. A seguir, perguntou: *Agora há 7 linhas de 3. Quantas linhas estão escondidas?*

4.1.2 O(a) aluno(a) organizou 5 linhas com 4 fichas em cada linha. A pesquisadora cobriu o material e perguntou: *Quantas fichas têm nas 3 primeiras linhas?*

4.1.3 A pesquisadora pegou mais 8 fichas e perguntou: *Quantas linhas mais posso fazer com estas fichas?*

4.1.4 A pesquisadora pegou mais 12 fichas e perguntou: *E agora, quantas linhas mais?*

4.1.5 P: *Quantas linhas têm, ao todo?*

4.1.6 P: *Quantas fichas têm, ao todo?*

4.2 Esquema reversível de coordenação de unidades

4.2.1 P: *Quantas linhas de 3 fichas podem-se fazer com 12 fichas?*



4.2.2 A pesquisadora colocou 27 fichas num recipiente e perguntou: *Quantas linhas de 3 estão aqui dentro, se têm, ao todo, 27 fichas?*

#### 4.3 Esquema iterativo de multiplicação

Sem nenhum material, a pesquisadora iniciou: *1 é 3, 2 é 6, 3 é...*

Como se vê, foi utilizada uma entrevista semi-estruturada. As perguntas iniciais foram comuns a todos os sujeitos. As perguntas complementares variavam, de acordo com as respostas dadas.

Sabe-se que é difícil que se considere uma entrevista perfeita. Em geral, ao relermos a entrevista lembramos de perguntas interessantes que não foram feitas. Mesmo assim, seguimos a orientação de Delval (2002) sobre a realização da entrevista:

- a) cuidamos de estabelecer uma boa relação com as crianças, deixando-as à vontade, para as coisas fluírem melhor;
- b) mantivemos tranquilidade, possibilitando a concentração nas perguntas e nas respostas;
- c) refletimos previamente para ter clareza sobre os objetivos a serem alcançados.

As entrevistas não foram puramente verbais. Os sujeitos dispunham de objetos para manipular e organizar na resolução dos problemas propostos.

Intervínhamos de acordo com a atuação dos sujeitos e como resposta às suas ações e explicações. É esse processo que o método clínico tem de mais específico. No dizer de Delval (2002, p. 68), “coloca-se esse sujeito em uma situação problemática que ele tem que resolver ou explicar, e observa-se o que acontece”.

As condutas observadas consistiam em ações, palavras ou ambas as coisas. Como pesquisadora, analisávamos o que estava acontecendo. À medida que as ações ou palavras iam se produzindo, intervínhamos, com o objetivo de esclarecer

qual o sentido do que estava sendo feito ou dito. Para tanto, a cada momento, nos perguntávamos sobre o significado da conduta da criança e a relação com as suas capacidades mentais. Nem sempre foi fácil captar o significado das condutas e, por isso, intervínhamos, de modo a desvendar seu sentido, procurando ser flexível e sensível às explicações das crianças.

A análise qualitativa das condutas da criança teve como finalidade apreender os processos psicológicos em ação, em lugar de se contentar com o desempenho apresentado. Essa dimensão interpretativa permite, de acordo com Piaget (1926, p. 10), “ir mais além da observação pura e, sem cair nos inconvenientes dos testes, alcançar as principais vantagens da experimentação”.

O mérito de Piaget (apud DELVAL, 2002, p. 53) foi transformar um método de “diagnóstico individual em um procedimento geral para penetrar no recôndito do funcionamento da mente humana”.

Assim como Delval, partimos do pressuposto de que o método clínico investiga o pensamento, a percepção, a ação e o sentimento das crianças, investigação que é pautada pela busca do que não é evidente na fala ou na ação dos sujeitos.

Piaget (apud DELVAL, 2002) desenvolveu com seus sujeitos entrevistas clínicas, tendo em vista descobrir os raciocínios que estavam por trás das respostas corretas e, particularmente, descobrir o que estava escondido pelas respostas falsas. Assim, a intervenção do experimentador, em resposta à atuação do sujeito, é a essência do método formulado por Piaget. Essa intervenção é orientada por hipóteses do experimentador sobre o significado das ações do sujeito, e sua finalidade é descobrir os caminhos que segue o pensamento do indivíduo, dos quais ele não tem consciência e, por isso, não pode explicitá-los.

Nesta pesquisa, as entrevistas foram videogravadas e cuidadosamente transcritas. As transcrições encontram-se em volume à parte, disponíveis para consulta.

## CAPÍTULO 7

A vida, em contrapartida, é troca contínua, com intercomunicações e reações incessantes. A vida é desequilíbrio, conflitos perpétuos e, a este título, contradições. A vida cria perpetuamente o novo e, a este título, é superação. Em outras palavras, as sínteses na vida, são provisórias e parciais. As categorias dialéticas que permitem apreender as realidades vivas, em seus processos de transformação, são, bem mais que a tese e a antítese – abstrações esquemáticas -, o jogo das contradições recíprocas, a negação e a negação da negação e, enfim, a superação. Contradição, negação e superação são, é claro, ferramentas mentais, pois não existe na natureza contradição em si ou negação em si. Entretanto, são essas, atualmente, as ferramentas mais aptas para apreender a natureza da Natureza: os processos de desenvolvimento”.

Edgar Morin

## 7 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

### 7.1 ESQUEMAS DE SEQÜÊNCIAS NUMÉRICAS

Foram investigados os seguintes esquemas de seqüências numéricas:

#### 7.1.1 Esquema de Seqüência Numérica Inicial:

Quanto é 7 mais 4?

#### 7.1.2 Esquema de Seqüência de Unidade Composta Implícita:

Quanto é 8 mais 5?

#### 7.1.3 Esquema de Seqüência de Unidade Composta Explícita:

Quanto é 9 menos 6? Estando no 4, quanto falta para chegar no 10?

Encontramos esquemas bastante iniciais que envolvem o uso intenso dos dedos juntamente com a contagem oral. Também encontramos esquemas mais avançados, intermediários, envolvendo a utilização de material manipulativo ou o uso imperceptível e/ou rápido dos dedos. Por fim, encontramos esquemas consolidados, com respostas imediatas, sem utilização dos dedos nem de material manipulativo.

Existe uma predominância dos primeiros esquemas nas crianças de menos idade, como seria esperado, assim como uma progressiva ampliação de outros, mais avançados, nas crianças maiores, como descreveremos mais adiante. No entanto, em todas as faixas etárias encontramos todos os tipos de esquemas.

## ESQUEMAS INICIAIS

Uso intenso dos dedos, com contagem oral

FIA, da 5ª série, estende os dedos da mão direita e bate, sucessivamente, no polegar, indicador, médio, anular e mínimo da mão esquerda, enquanto conta oralmente;

FLA, da 5ª série, toca com o polegar da mão direita no mínimo, no anular, no médio, no indicador da mesma mão, enquanto conta oralmente;

CARO, da 3ª série, aperta os dedos da mão esquerda com a palma da mão direita, enquanto conta oralmente;

PAT, da 4ª série, com o indicador da mão direita toca, sucessivamente, os dedos da mão esquerda, enquanto conta oralmente;

CAMI, da 3ª série, VAN e PROB, da 5ª série fecham a mão e estendem sucessivamente os dedos polegar, indicador, médio, anular e mínimo, enquanto contam oralmente;

SER, da 3ª série, abre a mão e flexiona sucessivamente o mínimo, o anular, o médio, o indicador e o polegar, enquanto conta oralmente. O uso deste esquema não garante, necessariamente, a resposta correta. SER respondeu 12, para 8 mais 5, apesar do uso dos dedos.

EDU, da 4ª série, e LAU, da 5ª série, movem os dedos da mão sobre o colo, enquanto contam oralmente;

JEN, FAB, FER, da 4ª série, TAL e GIO, da 5ª série, batem na mesa, com o mínimo, o anular, o médio, o indicador e o polegar, sucessivamente, enquanto contam oralmente.

## ESQUEMAS INTERMEDIÁRIOS

### Utilização do material manipulativo

EDU, da 4ª série, separa um grupo de fichas, depois outro e conta tudo;

JON e SER, da 3ª série; PAUL e FER, da 4ª série; LET, da 5ª série, separam um grupo de fichas e vão acrescentando/retirando uma a uma, enquanto contam na seqüência.

Exemplo:

**P: *Estando no 4, quanto falta para chegar no 10?*** LET, da 5ª série: *Como é?* P: *Do 4, quanto falta para chegar no 10?* LET faz um grupo de 4 fichas, outro grupo de 10 e conta tudo. Insatisfeita com o resultado, manipula novamente as fichas, desta vez retirando 4 do grupo de 10 e responde: *É 6.*

### Uso imperceptível dos dedos

FELI, da 3ª série, CLA e PRIS, da 4ª série, GUST e VER, da 5ª série, fazem movimentos imperceptíveis de dedos e lábios;

JEN, da 4ª série, faz movimentos imperceptíveis com os dedos e a cabeça;

GUIL, CINT, JULI, VANE, VIT, CARO e JON, da 3ª série; PAT, EDU, PRIS, CLA, FAB, JESSI, PAUL, da 4ª série; LUI, JES, GIO, RAÍ, JONA, FEL, VER, LET, LGUS e LAU, da 5ª série, fazem movimentos imperceptíveis com os dedos.

Alguns sujeitos deste grupo precisam da intervenção da pesquisadora para realizar a correção das suas respostas.

Exemplos:

**P: *Quanto é 9 menos 6?*** VANE, da 3ª série: *4.* P: *Como pensaste?* VANE: *Eu pensei assim, ó, eu tenho 9 dedos na minha mão (VANE mostra 5 dedos da mão direita e 4 da mão esquerda). Daí tira esses daqui (VANE retira a mão direita e flexiona um dedo da mão esquerda. Olha os 3 dedos e começa a rir). É 3.*

**P: *Estando no 4, quanto falta para chegar no 10?*** JON, da 3ª série, olha para os dedos das mãos afastados: *É 7.* P: *Como pensaste?* JON: *Com a minha cabeça.* P: *Mas que pensamento tiveste?* JON: *Eu tinha 3 e contei nos dedos até 10.* P: *Mas é estando no 4 e não no 3.* JON: *Estando no 4? Então é 5.* Não, espera aí. (olhando para os dedos): *é 6.*

## ESQUEMAS CONSOLIDADOS

Respostas imediatas, sem utilização dos dedos ou de material manipulativo

JULI e VIT, da 3ª série; RAFA, PRIS, FER, EDU, JESSI, PAUL, da 4ª série; JOHN, RAPH, ACAR, WAG, LUA, LUAN, VAN, FEL, MARI, PROB, BRU, JUL, GIO, RAÍ, GUST, LET e FLA, da 5ª série, dão respostas imediatas sem utilizar os dedos ou o material manipulativo.

Esquemas mais consolidados permitem processos de autocorreção. Com efeito, MARI, LET, LUA e GUST, da 5ª série, corrigiram-se espontânea e rapidamente.

Exemplos:

**P: *Estando no 4, quanto falta para chegar no 10?*** GUST, da 5ª série: *5...Não, é 6.*  
P: *Como pensaste?* GUST: *Eu fiz 4 mais 6.*

**P: *Quanto é 9 menos 6?*** LUA, da 5ª série, olha os dedos, movimentando-os imperceptivelmente: *4, não, é 3.*

## OUTRAS RESPOSTAS

Muitos alunos apresentaram mais de um tipo de esquema. EDU, por exemplo, numa situação utilizou os dedos, noutra, as fichas, e noutra ainda, deu resposta imediata.

Houve predomínio dos esquemas iniciais na subtração, e de esquemas intermediários ou consolidados, na adição.

Freqüentemente, a pesquisadora solicitava justificativas para as respostas.



Exemplos:

**P: *Estando no 4, quanto falta para chegar no 10?*** VIT, da 3ª série, move imperceptivelmente os dedos e os lábios: *É 6*. P: *Como pensaste?* VIT: *Com os dedos*. P: *Como fizeste com os dedos?* VIT mostra 4 dedos da mão direita, depois abre as duas mãos e diz: *6*. FEL, da 5ª série: *6* ( a resposta é imediata, sem utilização dos dedos ou do material manipulativo). P: *Como pensaste?* FEL: *Como eu pensei? 4 mais 6*.

JUL, da 5ª série: *6*. P: *Como pensaste?* JUL abre as mãos sobre a mesa e dobra 4 dedos: *Eu tenho 4. Falta para o 10. Falta 6*. FLA, da 5ª série, olha para as mãos: *6*. P: *Como pensaste?* FLA: *Cinco mais 5 é 10. Tira 1 dá 4. Cinco mais 1 é 6*.

**P: *Quanto é 7 mais 4?*** JESSI, da 4ª série, sem fazer qualquer movimento com as mãos: *É 11*. P: *Como pensaste?* JESSI: *Contando*. P: *Contando como?* JESSI: *Contando nos dedos*. P: *Como contaste nos dedos?* *Mostra-me*. JESSI mostra os dedos mínimo, anular, médio e indicador sucessivamente tocando no polegar.

**P: *Quanto é 8 mais 5?*** PAUL: *13* (a resposta é imediata, sem utilização dos dedos ou do material manipulativo). P: *Como pensaste?* PAUL: *De cabeça, decorado*.

Analisando os dados colhidos sobre os esquemas de seqüências numéricas, destaca-se, inicialmente, o uso intenso dos dedos e a contagem um a um, especialmente entre as crianças menores.

Como foi descrito, algumas crianças – em todas as faixas etárias – usaram os dedos para resolver situações relativamente simples, como 7 mais 4 ou 9 menos 6.

Ao lado desses esquemas iniciais foram utilizados esquemas intermediários, que também envolviam o uso da contagem, como a utilização de material manipulativo e o uso dos dedos, ainda que de forma imperceptível.

Historicamente, os dedos funcionam como símbolos a serviço do pensamento e, de um modo geral, tanto quanto nesta pesquisa, são mais utilizados do que materiais manipulativos. Algumas crianças, mas não todas, são metódicas na utilização dos dedos, usando sempre a mesma seqüência. Algumas começam sempre pelo polegar, outras pelo mínimo. Algumas começam pelo indicador, contam os outros três dedos na seqüência e, por fim, contam o polegar. As que usam os

dedos de forma inconsistente podem chegar a respostas incorretas, como SER, da 3ª série, por exemplo, que encontrou 12 para 8 mais 5, apesar do uso dos dedos. Esse conjunto de práticas está diretamente relacionado com as habilidades de contagem, ou seja, com os esquemas numéricos das crianças.

De acordo com o que já foi destacado na revisão teórica, Steffe (1994) defende o princípio de se descobrir e aceitar os métodos próprios das crianças, aqueles – como o uso dos dedos e a contagem um a um – que elas utilizam independente de qualquer ensino.

Isso porque as experiências matemáticas vão sendo assimiladas a estruturas que o sujeito já possui. Ensinar matemática não é apresentar um modo “correto de fazer” uma operação. Trata-se de auxiliar a criança a construir meios de operar. E essa construção, naturalmente, começa dos recursos que são acessíveis à ela, como no caso, o uso dos dedos.

Para alunos de 3ª a 5ª séries, a utilização dos dedos pode parecer ineficaz – e em certa medida o é. Apesar disso, respeitar os métodos das crianças é uma prioridade. Do contrário, corre-se o risco de desencorajar as crianças de usar seus próprios recursos em favor de práticas impostas pelo professor. No entanto, quando confrontadas com situações matemáticas, as crianças só podem usar seus esquemas já disponíveis.

E, ainda, as crianças confiam mais nas suas estratégias intuitivas, espontâneas – que envolvem a contagem mais do que as quatro operações – do que nas explicações do professor. De fato, o conhecimento conceitual, mesmo sendo mediado pelo outro, não pode ser transferido “pronto” de uma pessoa a outra, mas deve ser construído por cada conhecedor, por si próprio, com base na sua experiência.

Por tudo isso, concordamos com Booth (apud STEFFE, 1994) quando diz que para auxiliar a criança na aprendizagem dos procedimentos formais é importante reconhecer os métodos que elas já usam, ajudando-as a compreender as relações entre o que fazem espontaneamente e o que o professor está ensinando.

Outra constatação que merece ser analisada é a da reversibilidade entre adição e subtração. Vários alunos, assim como GUST e FEL, por exemplo, para a proposta “estando no 4, quanto falta para chegar no 10?” pensaram em 4 mais 6, ou seja, em lugar da subtração fizeram uma adição.

Mas não se trata de uma reversibilidade operatória e, nesse caso, a operação 10 menos 4 foi feita de forma implícita. Como indica Piaget (1945), os esquemas sensório-motores e intuitivos se constroem por generalização, em parte consciente, mas também, em boa parte, inconsciente e espontânea. Para Steffe e Cobb (1998), o desenvolvimento intuitivo desse princípio é resultado da experiência informal.

Vale trazer o pensamento de Piaget sobre fazer e compreender:

Fazer é compreender em ação uma dada situação em grau suficiente para atingir os fins propostos, e compreender é conseguir dominar, em pensamento, as mesmas situações, até poder resolver os problemas por elas levantados, em relação ao porquê e ao como das ligações constatadas e, por outro lado, utilizadas na ação. (PIAGET, 1978, p. 176)

É possível que os alunos que fizeram a inversão tenham compreendido, no plano da ação, o suficiente para atingir seus propósitos, mas não chegaram a dominar a situação em pensamento.

Convém registrar que nenhuma das crianças estudadas ainda está na fase de “contar tudo”. Todas elas já fizeram a transição para o “contar na seqüência”, em que estão implicadas relações parte-todo mais complexas (NUNES; BRYANT, 1997). Para somar 7 mais 4, por exemplo, a criança que conta tudo separa um grupo

de 7 fichas e outro de 4 e então conta tudo. A criança que conta na seqüência começa a contar a partir de 7, pois sabe que não é necessário contar tudo de novo, usando o total do primeiro conjunto como ponto de partida. Apenas EDU, da 4ª série, e RAÍ, da 5ª série, apresentaram condutas de “contar tudo”. Entretanto, ambos, em outras situações, mostraram-se bastante hábeis em “contar na seqüência”.

As crianças que “contam tudo” desenvolveram apenas um esquema relativo à seqüência numérica inicial. Já as que “contam na seqüência” desenvolveram um esquema relativo à seqüência de unidade composta implícita.

Como alerta Olive (2001), as seqüências numéricas são as mais fundamentais estruturas matemáticas que a criança desenvolve cedo na vida, e a atividade básica que leva à construção de uma seqüência numérica é a contagem. Nesse ponto, é preciso considerar que a contagem não se desenvolve toda de uma só vez. Como foi indicado na pesquisa de Steffe, von Glasersfeld, Richard e Cobb (1983), a contagem progride através de diferentes tipos de aprendizagem, que vão desde a contagem de itens perceptivos unitários à contagem de itens abstratos.

Nesta pesquisa, observamos que as crianças apresentaram diferentes habilidades de contagem, desde as mais simples, com o uso dos dedos, às mais elaboradas, relacionadas com as operações. FLA, da 5ª série, por exemplo, mediante a questão “estando no 4, quanto falta para chegar no 10?”, respondeu: 5 mais 5 é 10. Tira 1 dá 4. Cinco mais 1 é 6.

É importante lembrar que os esquemas de seqüências numéricas das crianças, longe de serem estáticos, progridem através das mudanças no desenvolvimento, à medida que elas encontram situações numéricas mais complexas.

Merece destaque que muitos alunos, especialmente os de 5ª série, deram respostas imediatas às propostas relativas aos esquemas de seqüências numéricas, não fazendo uso dos dedos nem de material manipulativo. Nesse caso, as operações estavam interiorizadas e os resultados estavam guardados na memória. Como esclarece Olive (2001), esses alunos já desenvolveram esquemas relativos à seqüência numérica explícita, tendo ultrapassado a seqüência numérica inicial e a seqüência numérica implícita. Na seqüência numérica inicial, os itens a serem contados precisam ser visualizados; por isso, o uso intenso dos dedos, nessa fase, especialmente entre os alunos na menor faixa etária. As crianças que têm esquemas relativos à seqüência numérica implícita contam para a frente, controlando seus atos de contagem, isto é, sabem quando devem parar de contar. Isso representa uma reinteriorização da seqüência numérica inicial, que resulta numa dupla contagem. Os elementos da seqüência numérica implícita são itens contáveis abstratos. Os resultados interiorizados da contagem formam uma unidade composta. Como já foi visto, para von Glasersfeld (1995) a interiorização da atividade é um processo de abstração reflexionante. Nesse processo, a atividade é primeiro internalizada pela atividade mental, ou seja, a criança pode mentalmente representar a atividade, que se interioriza por meio da abstração. A seqüência numérica implícita representa, simultaneamente, os atos de contagem e o resultado da contagem. Nesse caso, o nome do número representa a operação utilizada para tomar um segmento inicial como uma unidade.

Nos esquemas relativos à seqüência numérica explícita apresentados pelos alunos que deram respostas imediatas, o sujeito opera com mais de uma unidade composta e pode usá-las em diferentes operações, tais como contagem, comparação, segmentação e partição. Na seqüência numérica explícita as crianças

simbolizaram as relações de inclusão, assim como JUL, que explicou: “Eu tenho 4. Falta para o 10. Falta 6”. Nesse raciocínio, o 4 pode ser extraído do 10 e, ao mesmo tempo, permanecer no 10, operação esta que não se encontra numa seqüência numérica implícita.

## 7.2 ESQUEMAS DE UNIDADES COMPOSTAS

### 7.2.1 Esquema de Unidade Composta Experiencial

A unidade composta experiencial foi investigada por meio de duas propostas:

Quanto é 10 mais 5, mais 3?

Quanto é 12 mais 6, mais 2?

### 7.2.2 Esquema de Unidade Composta Abstrata

A unidade composta abstrata foi investigada a partir de três propostas:

Quanto fica entre 8 e 11?

Entre 7 e 12?

Entre 10 e 15?

### 7.2.3 Esquema de Unidade Composta Iterável

A unidade composta iterável foi investigada pela proposta na qual a pesquisadora mostrou algumas fichas, escondeu outras e disse: Aqui tem 40 fichas. Ao todo, temos 60. Quantas estão escondidas?

Encontramos esquemas bastante iniciais, que envolvem o uso intenso dos dedos. Também encontramos esquemas mais avançados, intermediários, envolvendo a utilização de material manipulativo, o uso imperceptível e/ou rápido dos dedos e a contagem oral. Por fim, encontramos esquemas consolidados, com respostas imediatas, sem utilização dos dedos nem de material manipulativo.

A utilização da contagem juntamente com o uso dos dedos diminuiu. Surgiu a utilização da contagem oral, sem o uso dos dedos.

Embora tenhamos encontrado todos os tipos de esquemas em todas as faixas etárias, observamos uma predominância dos esquemas iniciais nas crianças de menor idade, como seria esperado. Gradativamente, observou-se a ampliação de outros, mais avançados, nas crianças maiores, como descreveremos mais adiante.

## ESQUEMAS INICIAIS

### Uso intenso dos dedos

PAT, da 4ª série, e FIA, da 5ª série, com os dedos da mão esquerda pegam os dedos da mão direita;

PAT, da 4ª série, e FLA, da 5ª série, com o indicador da mão esquerda tocam, sucessivamente, nos dedos da mão direita;

CAMI, VIT, CARO, CINT, da 3ª série; RAFA, da 4ª série; PROB, LAU, JUL, VAN, da 5ª série, fecham a mão direita e estendem, sucessivamente os dedos;

PRIS, da 4ª série, TAL, VER, FLA, AACR, da 5ª série, com os dedos da mão direita tocam, sucessivamente, os dedos da mão esquerda;

SER, da 3ª série, CARO e PRIS, da 4ª série, estendem os dedos da mão direita e sucessivamente flexionam os dedos;

JUL, da 5ª série, com o polegar, toca sucessivamente os demais dedos;

RAÍ, da 5ª série, coloca a mão no rosto e pressiona os dedos contra a face;

MARI, da 5ª série, com os dedos da mão direita toca, sucessivamente, na palma da mão esquerda;

JON, da 3ª série, RAFA e EDU, da 4ª série, com a mão no colo, movimentam os dedos imperceptivelmente;

CARO, da 3ª série; FAB, JEN e FER, da 4ª série; TAL, GIO e LET, da 5ª série, batem na mesa, sucessivamente, com os dedos da mão direita.

O uso intenso dos dedos não garante, necessariamente, a resposta correta.

CINT e SER, da 3ª série; PAT e FAB, da 4ª série; VAN, TAL, GIO, LET, da 5ª série, confundiram-se no uso dos dedos.

Exemplos:

**P: Quanto é 12 mais 6, mais 2?** SER, da 3ª série, estende os dedos da mão direita e sucessivamente vai flexionando-os, mas não conta. *É 12 mais?* P: *Quanto é 12 mais 6, mais 2?* Novamente SER estende os dedos e flexiona-os, sucessivamente, sem contar. Move os lábios, mas sua contagem é inaudível. *É 13.*

**P: Quanto fica entre 8 e 11?** FAB, da 4ª série: *Os números que ficam entre 8 e 11?* P: *Quantos números ficam entre 8 e 11?* FAB bate na mesa com o mínimo e o anular. *Ficam 2, eu acho.* GIO, da 5ª série, bate na mesa com o indicador e o médio e responde: *9 e 10.* P: *Quanto falta do 8 para chegar no 11?* GIO: *Falta 2.* P: *Conta para ver. Estás no 8, conta mais 2.* GIO, rindo: *É 3.* TAL, da 5ª série: *Como assim?* P: *Estás no 8, quanto falta para chegar no 11?* TAL bate na mesa com o indicador, o médio e o anular, enquanto conta *9, 10, 11* P: *Quanto falta para chegar no 11?* TAL: *Dois, dois números, o 10 e o 11 ( o polegar da mão esquerda toca o mínimo e o anular).* P: *A partir do 8?* TAL: *Nove, 10, 11.* P: *Quanto vais somar para chegar no 11?* TAL: *Ah! 3.*

**P: Entre 7 e 12?**

Com a mão fechada, VAN, da 5ª série estende, os dedos mínimo, anular, médio, indicador, enquanto conta *8, 9, 10, 11.* *Dá 4.*



## ESQUEMAS INTERMEDIÁRIOS

### Utilização de material manipulativo

EDU, da 4ª série, separa 12 fichas, depois 6, depois 2 e conta tudo;

LET, da 5ª série, separa 6 fichas, desloca-as uma a uma. Separa mais 2 fichas. Desloca todas as fichas novamente, enquanto conta;

CAMI, da 3ª série, separa 6 fichas e depois mais 2. Com o indicador deslocando as fichas, conta 13, 14, 15 ... 20;

PAUL, da 4ª série, separa 7 fichas. Após separa 5 fichas uma a uma, enquanto conta 8, 9, ...12.

### Uso imperceptível dos dedos

VIT, da 3ª série, faz movimentos imperceptíveis com os dedos e com o corpo;

BRU, da 5ª série, faz movimentos imperceptíveis com os dedos e com a cabeça;

JON, GUIL, FELI, VIT, VANE, da 3ª série; JEN, da 4ª série; LUAN, GUST, LAU, JONA, FEL, da 5ª série, fazem movimentos imperceptíveis com dedos e lábios;

JULI, FELI, VANE, CARO, JON, VIT, da 3ª série; CLA, JESSI, PRIS, JEN, MARI, da 4ª série; JES, RAÍ, GUST, LGUS, LUÍ, LET, TAL, VER, da 5ª série, fazem movimentos imperceptíveis com os dedos.

Esses movimentos não garantem, necessariamente, a resposta correta. GUIL, FELI, JULI, VANE, JON, da 3ª série; CLA, da 4ª série; BRU, JONA, GUST, LET, LUI, da 5ª série, confundiram-se no uso imperceptível dos dedos.

### Exemplos:

**P: Quanto é 12 mais 6, mais 2?** FELI, da 3ª série: *É de menos?* P: *É 12 mais 6, mais 2.* FELI baixa a cabeça. Faz movimentos imperceptíveis com os dedos. *É 15?*

*Só um pouquinho...*( e volta a fazer movimentos imperceptíveis com os dedos). É 27. JONA, da 5ª série, faz movimentos imperceptíveis de dedos e lábios: 24. P: *Como pensaste para chegar no 24?* JONA faz movimentos imperceptíveis de dedos e lábios. Ri. É 20.

Uso da contagem oral

BRU e LGUS, da 5ª série, fazem movimentos de cabeça, enquanto contam oralmente;

MARI, da 5ª série, faz uma contagem inaudível;

JOHN, ACAR, LGUS, da 5ª série, contam oralmente.

## ESQUEMAS CONSOLIDADOS

Respostas imediatas, sem utilização dos dedos ou de material manipulativo

VAN, GUIL, CINT, JULI, CAMI, VIT, JON, da 3ª série; FER, RAFA, CLA, JEN, EDU, JESSI, PRIS, PAUL, da 4ª série; PAT, JOHN, RAPH, ACAR, WAG, VAN, FEL, LUI, MARI, PROB, GIO, JONA, TAL, JUL, LGUS, VER, FLA, LUA, LUAN, JES, GUST, BRU, RAÍ, LET, da 5ª série, ou seja, a maior parte dos alunos dão respostas imediatas, sem utilizar os dedos ou o material manipulativo.

Esquemas mais consolidados permitem processos de autocorreção. Com efeito, WAG, LUA, RAPH, ACAR, TAL e LET corrigiram-se espontânea e rapidamente.

Exemplos:

**P: *Entre 10 e 15?*** RAPH: *Quatro, não, 5.*

**A pesquisadora mostrou algumas fichas, escondeu outras e disse: *Aqui tem 40 fichas. Ao todo, temos 60. Quantas estão escondidas?*** TAL, da 5ª série, levanta os olhos: *Duas, não, 20.* P: *Como pensaste?* TAL: *Sessenta menos 40.* LET, da 5ª série, levanta os olhos: *Trinta, não, 20.*

## OUTRAS RESPOSTAS

Muitos alunos apresentaram mais de um tipo de esquema. RAÍ, por exemplo, numa situação pressionou os dedos contra a face, noutra fez movimentos imperceptíveis com os dedos e noutra, ainda, deu resposta imediata.

Novamente a subtração revelou-se mais difícil que a adição, envolvendo habilidades mais complexas.

CAMI, FELI, JON, CARO, da 3ª série; RAFA, CLA, EDU, PAUL, da 4ª série; WAG, LUA, FEL, PROB, RAÍ, TAL, JULI, LGUS, VER, da 5ª série, não compreenderam a pergunta – Quanto fica entre 8 e 11? – necessitando de intervenção da pesquisadora.

Exemplos:

**P: Quanto fica entre 8 e 11?** CAMI, da 3ª série, olha interrogativamente para a pesquisadora. P: *Quantos números ficam entre 8 e 11?* CAMI fecha a mão direita e estende, sucessivamente, o indicador, o médio e o anular, enquanto conta 9, 10, 11: *É 3?* JON, da 3ª série: *Como assim?* P: *Tu estás no 8. Quanto falta para chegar no 11?* JON olha as mãos, move imperceptivelmente os dedos, pergunta: *do 8 para o 12?* P: *Para o 11.* JON move imperceptivelmente os dedos: *É 3.* CARO, da 3ª série: *Eu não entendi.* P: *Tu estás no 8, quanto falta para chegar no 11?* CARO olha para as mãos, com os dedos afastados: *É 3.* RAFA, da 4ª série: *Ah?* P: *Quanto fica entre 8 e 11?* RAFA: *É para juntar 8 e 11?* P: *É para ver quanto fica do 8 até o 11.* RAFA move o polegar, o indicador, o médio da mão direita: *É 3?* EDU, da 4ª série: *Como?* P: *Do 8 até o 11, quanto tem?* EDU move o polegar, o indicador e o médio: *É 3.* FEL, da 5ª série: *Não entendi.* P: *Qual é o maior?* FEL: *11.* P: *Quanto o 11 é maior que o 8?* FEL: *2* (expressão de dúvida), *3.* P: *Por quê?* FEL: *Porque 8 mais 3 é 11.* RAÍ, da 5ª série: *Como assim?* P: *Tu estás no 8, quanto falta para chegar no 11?* RAÍ: *Quatro...3* (pressiona a face com o polegar, o indicador, o médio) P: *Quatro ou 3?* RAÍ: *4...* *Como é mesmo?* P: *Estando no 8, quanto falta para chegar no 11?* RAÍ: *Três.* VER, da 5ª série: *Entre 8 e 11?* P: *Sim.* VER: *10.* P: *Estando no 8, quanto falta para chegar no 11?* VER: *2* P: *Quanto é 8 mais 2?* VER: *10* P: *Então, do 8 para o 11?* VER: *Não entendi.* P: *Somaste 8 mais 2 e chegaste no 10. Do 8 para o 11, quanto é?* VER: *4? 10? Eu não entendi.* P: *Tu estás no 8. Quanto falta para chegar no 11?* VER: *8, 9, 10. É 8?* P: *E para chegar no 11?* VER: *3.* P: *Por que é 3?* VER: *Porque tu perguntaste quanto falta para chegar no 11.*

SER e CINT, da 3ª série; JES e PRIS, da 4ª série; MARI, GUST, BRU, JUL, LET, da 5ª série, somaram, em lugar de subtrair, necessitando de intervenção da pesquisadora.

Exemplos:

**P: Quanto fica entre 8 e 11?** CINT, da 3ª série, com as mãos abertas sobre a mesa, bate, sucessivamente os dedos: *É 19*. P: *Estando no 8, quanto falta para chegar no 11?* CINT: *É 3*. PRIS, da 4ª série, com a mão direita estendida, flexiona os dedos, sucessivamente e conta: *12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. É 19?* P: *Tu estás no 8, quanto falta para chegar no 11?* PRIS levanta a mão esquerda e movimenta os dedos mínimo, anular e médio: *É 3*. MARI, da 5ª série: *19*. P: *Tu estás no 8. Quanto falta para chegar no 11?* MARI: *2?* P: *Tu estás no 8. Soma mais 2*. MARI (o polegar e o indicador da mão direita pegam o indicador e médio da mão esquerda): *9, 10*. P: *Então, para chegar no 11?* MARI: *É 3*. JUL, da 5ª série: *Como assim?* P: *Quanto tem entre 8 e 11?* JUL: *19*. P: *Tu estás no 8. Quanto falta para chegar no 11?* JUL encosta, sucessivamente, o mínimo, o anular e o médio no polegar: *Ah! É 3*. LET, da 5ª série: *8 mais 11?* P: *Não. Estando no 8, quanto falta para chegar no 11?* LET: *19*. P: *Tu estás no 8. Como é que tu fazes para chegar no 11?* LET: *Ah, “tá”, quantos faltam!* (move os dedos imperceptivelmente) *É 3*.

JULI e SER, da 3ª série, RAÍ e FIA, da 5ª série, não compreenderam a tarefa relativa à unidade composta iterável, na qual a pesquisadora mostrou algumas fichas, escondeu outras e disse: *Aqui tem 40 fichas. Ao todo temos 60. Quantas estão escondidas?* Necessitaram de intervenção da pesquisadora.

Exemplos:

**P: Aqui tem 40 fichas. Ao todo temos 60. Quantas estão escondidas?** SER: *Como assim?* P: *Ao todo temos 60 fichas. Quarenta estão aqui. Quantas estão escondidas no pote?* SER: *Vocês tinham quantas fichas?* P: *60*. SER, apontando para as 40 fichas: *Aqui tem 60?* P: *Não, ao todo tem 60. Aqui tem 40. Eu quero saber quantas tem no pote*. SER: *60?* FIA, da 5ª série, olha interrogativamente para a pesquisadora. P: *Ao todo temos 60 fichas. Aqui temos 40. Quantas estão escondidas?* FIA segura a cabeça com a mão esquerda. Com a direita, movimenta os dedos na mesa, como quem está escrevendo. P: *Como estás pensando?* FIA não responde. P: *Que conta tu estavas fazendo?* FIA: *De mais*. P: *O que tu estavas somando?* FIA: *Sessenta...* (cala-se, faz um sinal negativo com a cabeça e uma expressão de desprezo, recusando-se a continuar).

Freqüentemente, a pesquisadora solicitava justificativa para as respostas.

Exemplos:

**P: Aqui tem 40 fichas. Ao todo, temos 60. Quantas estão escondidas?** CAMI, da 3ª série: *Quarenta...*(fecha a mão e estende o indicador e o médio e conta 50, 60): 20

P: Como pensaste? CAMI: Assim, aqui tem 40, ali tem 20. Aí eu vou botando de 10 em 10. Quarenta...50, 60 (bate com o indicador duas vezes na mesa, com uma mão sobre a outra). P: Aqui tem 40 fichas. Ao todo, temos 60. Quantas estão escondidas? VIT, da 3ª série, olha intensamente para as fichas: *Tem 20*. P: *Como pensaste?* VIT: *Contando nos dedos, de 10 em 10*. P: *Como assim?* VIT: *Aqui tem 40*. Com a mão direita fechada, VIT estende, sucessivamente, os dedos, enquanto conta 41, 42, 43, 44, 45. Passa para a mão esquerda e conta até 50. Volta a trabalhar com a mão direita e conta até 55. Com a esquerda, conta até 60. RAFA, da 4ª série: *Aqui tem 40. Ao todo tem 60. De 40 para 60 é 20. Eu somei*. P: *Aqui tem 40 fichas. Ao todo, temos 60. Quantas estão escondidas?* RAFA: *Ali tem 40? E ali?* (aponta as que estão escondidas num pote). P: *Ao todo temos 60. Quantas estão escondidas?* RAFA olha para o lado: *Tem 20*. P: *Como pensaste?* RAFA: *Aqui tem 40. Ao todo tem 60. De 40 para 60 é 20. Eu somei* P: *Aqui tem 40 fichas. Ao todo, temos 60. Quantas estão escondidas?* CLA, da 4ª série: *Vinte*. P: *Como pensaste?* CLA: *Eu fiz 40 mais 20*. JEN, da 4ª série: *20?* P: *Como pensaste?* JEN: *Eu pensei assim, ó, porque 60 menos 40... é 0 menos 0 é 0, 6 menos 4 é 2*. EDU, apontando para o pote: *Aí tem 20*. P: *Como pensaste?* EDU: *É assim. Quatro mais 2 dá 6. Quarenta mais 20 é 60*. JOHN: *Vinte*. P: *Como pensaste?* JOHN: *Sessenta menos 40 é 20*. WAG, da 5ª série: *Vinte*. P: *Como pensaste?* WAG: *Aqui tem 40. Aqui tem 60 (mostrando o todo), 40 mais 20 é 60*. WAG dá risada: *Tia, eu não estou na 1ª*. LUAN, da 5ª série: *Vinte*. P: *Como pensaste?* LUAN: *Vinte mais 40 é 60, eu diminuí*. MARI, da 5ª série: *Vinte*. P: *Como pensaste?* MARI mostra os dedos: *Eu usei o 4*. (mostra 4 dedos da mão direita. *Para chegar no 6 é 2* (mostra 2 dedos da mão esquerda). *Então é 20*).

Os esquemas de unidades compostas apresentaram vários aspectos em comum com os esquemas de seqüências numéricas, a começar pelo uso dos dedos, confirmando a relevância dos métodos próprios das crianças.

Também aqui, as crianças que fizeram uso inconsistente dos dedos, sem controle ou com pouco controle dos atos de contagem, deram respostas incorretas. CINT e SER, da 3ª série; PAT e FAB, da 4ª série; VAN, TAL, GIO e LET, da 5ª série, confundiram-se no uso dos dedos.

Como já foi destacado, o uso dos dedos está estreitamente relacionado com os esquemas numéricos das crianças. Isso porque os esquemas – esboço das ações suscetíveis de serem repetidas ativamente – são resumos da experiência.

Com a coordenação dos esquemas, a criança passa a combinar e a unir, ou seja, sua atividade deixa de consistir apenas em repetir ou conservar. Desde uma perspectiva construtivista, os esquemas são unidades de comportamento que, na interação com o real, se diversificam e se tornam mais complexos. É assim que as crianças transitam de esquemas numéricos iniciais, nos quais é intenso o uso dos dedos, para esquemas de unidades compostas, nos quais o uso dos dedos é imperceptível ou abandonado.

Outro aspecto já referido anteriormente diz respeito à reversibilidade entre adição e subtração. Quando a pesquisadora pediu que as crianças justificassem a resposta à questão “Aqui tem 40 fichas. Ao todo temos 60. Quantas estão escondidas?”, CAMI, RAFA (de 40 para 60 é 20. Eu somei), CLA, EDE, WAG, LUAN (20 mais 40 é 60. Eu diminui) fizeram, de forma implícita, a operação 60 menos 40. No plano da ação parece que eles compreenderam o suficiente para chegar a uma solução, sem terem, ainda, um domínio operatório de tal reversibilidade.

As propostas relativas aos esquemas de unidades compostas são mais complexas que as relativas aos esquemas de seqüências numéricas, na medida em que cada elemento é uma unidade composta abstrata dentro da seqüência numérica. Observou-se que nessas propostas os alunos fizeram mais uso dos dedos e do material manipulativo do que nas propostas iniciais, possivelmente para lidar melhor com esta maior complexidade.

Quando Olive (2001) fala em unidades abstratas, ele quer dizer que o número 6, por exemplo, contém os registros da contagem de 1 a 6 como unidades abstratas. Quando as crianças tinham que somar 12 mais 6, mais 2, o 6 era o resultado de contar 6 elementos de uma seqüência numérica qualquer. O número 6 tinha que ser considerado como 1 por seis vezes. É por isso que Olive diz que um passo crítico no

processo de re-interiorização é o estabelecimento da unidade abstrata 1 como uma unidade iterável. E, assim, a criança pode se engajar em raciocínios parte e todo.

Assim como aconteceu nos esquemas de seqüências numéricas, também, aqui, nos esquemas de unidades compostas, muitos alunos deram respostas imediatas, sem utilização dos dedos ou de material manipulativo. Como foi visto anteriormente, os resultados estão guardados na memória, pois as operações estão interiorizadas, como resultado de várias re-interiorizações dos atos de contagem. Esta é uma característica dos níveis IIA e IIB (Inhelder e Piaget, 1970/1976), nos quais os indivíduos não se limitam mais a agir, como os do estágio I, mas interiorizam suas ações.

No dizer de Becker (2003, p. 42), “o ápice de um processo de assimilação consiste em realizar esquemas ou estruturas adaptadas, isto é, perfeitamente acomodadas”. Quando o aluno apresenta respostas imediatas, está utilizando esquemas complexos, evoluídos. No entanto, não se pode esquecer que a construção de esquemas complexos é consequência do funcionamento de esquemas mais elementares, como lembram Montangero e Naville (1998). Sendo assim, a utilização intensa ou mesmo imperceptível dos dedos pode ser passo necessário para a criança chegar a níveis mais elaborados de interiorização. De fato, as respostas imediatas resultam de esquemas operatórios, gerais e abstratos, ou seja, conceitos.

Como atestam Steffe e Cobb (1998), o conhecimento aritmético é constituído pelos esquemas coordenados de ações e operações que uma criança construiu num determinado período.

## 7.3 ESQUEMAS PRÉ-MULTIPLICATIVOS

### 7.3.1 Esquema Pré-Multiplicativo Propriamente Dito

O primeiro esquema pré-multiplicativo foi observado a partir da seguinte proposta:

A pesquisadora orienta o aluno a organizar 6 linhas de 3 fichas, deixa uma linha visível, esconde as outras com um anteparo e pergunta: Quantas fichas têm, ao todo?

Encontramos duas situações nitidamente distintas. Observamos esquemas iniciais e intermediários sem controle dos grupos equivalentes, ou seja, o aluno não controla o número de vezes em que conta os grupos de 3 ou de 6 e pode continuar a contagem indefinidamente ou cometer erros na contagem. Por outro lado, observamos esquemas iniciais, intermediários e consolidados com controle dos grupos equivalentes, ou seja, o aluno controla o número de vezes em que conta os grupos de 3 ou 6.

Nos casos em que não há esse controle, a maior parte das respostas são incorretas; quando há, as respostas dadas são corretas.

Esquemas iniciais, sem controle dos grupos equivalentes, foram encontrados apenas em alunos de 3ª série. Nas demais situações foram encontrados todos os tipos de esquemas em todas as faixas etárias. Além do uso intenso ou imperceptível dos dedos, foi utilizado o esquema da adição. Assim, os esquemas iniciais foram encontrados nas crianças de menos idade. Gradativamente, foram sendo observados esquemas mais avançados nas crianças maiores.



## ESQUEMAS INICIAIS

Sem controle dos grupos equivalentes

Uso intenso dos dedos

SER e FELI, da 3ª série, batem na mesa com o polegar, o indicador e o médio, sem controlar o número de vezes em que contam 3, chegando a respostas incorretas.

Exemplo:

**P: Quantas fichas têm, ao todo?** SER, da 3ª série, bate com o mínimo, o anular e o médio da mão direita na mesa, sucessivamente. Depois de um tempo, faz o mesmo com a mão esquerda e responde: *É 16*. P: *Como chegaste em 16?* SER: *Contando de 3 em 3*. P: *Quantas vezes contaste 3?* Ser: *Não sei*.

Com controle dos grupos equivalentes

Uso intenso dos dedos

WAG, da 5ª série, com os dedos da mão direita pega os dedos da mão esquerda. Conta de 6 em 6, controlando o número de vezes em que conta 6, chegando a uma resposta correta;

Exemplo:

**P: Quantas fichas têm, ao todo?** WAG: *Faz de novo essa aí, tia*. P: *Fizeste 6 linhas de 3 fichas. Quantas fichas têm, ao todo?* WAG: *Tem 18* ( Com os dedos da mão direita Wag pega os dedos da mão esquerda e murmura: 13, 14, 15, 16, 17, 18). P: *Como pensaste?* WAG: *Porque eu fiz 6 linhas de 3. Aí, contando assim, dá 6 para cada lado, 6, 12, 18*.

JON, da 3ª série, e TAL, da 5ª, série batem na mesa com o polegar, o indicador e o médio. Contam de 3 em 3, controlando o número de vezes em que contam 3, chegando a respostas corretas;

Exemplo:

**P: *Quantas fichas têm, ao todo?*** TAL, da 5ª série, baixa a cabeça. Conta de 3 em 3, batendo com os dedos na mesa, murmurando: *1, 2, 3...4, 5, 6...7, 8, 9,...10, 11, 12...13, 14, 15... 16, 17, 18.* Depois confere, contando de 3 em 3, por 6 vezes, deslocando a mão sobre o anteparo, como se pudesse ver as fichas. *É 18.*

CINT e CARO, da 3ª série, batem na mesa com o polegar, o indicador e o médio da mão direita. Cada vez que contam 3, levantam um dedo da mão esquerda;

FLA, da 5ª série, toca, com o indicador da mão direita, o polegar, o indicador e o médio da mão esquerda, enquanto conta 13, 14, 15, 16, 17, 18;

VER, da 5ª série, toca o indicador, o médio, o anular, o mínimo e novamente o indicador e o médio da mão direita com a mão esquerda, enquanto conta 13, 14, 15, 16, 17, 18.

EDU, da 4ª série, move, no colo, o polegar, o indicador e o médio da mão direita. Conta de 3 em 3, controla o número de vezes em que conta 3, chegando a uma resposta correta.

## ESQUEMAS INTERMEDIÁRIOS

Sem controle dos grupos equivalentes

### Uso imperceptível dos dedos

VIT, da 3ª série, e FAB, da 4ª série, fazem movimentos imperceptíveis com os dedos, contando de 6 em 6, sem controlar o número de vezes em que contam 6, chegando a respostas incorretas.

Exemplo:

**P: *Quantas fichas têm, ao todo?*** VIT, da 3ª série, olha para cima, olha para o lado, movimenta os dedos imperceptivelmente: *É 43.* P: *Como pensaste?* VIT: *Eu contei de 6 em 6.* P: *Quantas vezes contaste 6?* VIT: *Eu me perdi.*

GUIL, da 3ª série; PAT, da 4ª série; LGUS e LET, da 5ª série, fazem movimentos imperceptíveis com os dedos, contando de 3 em 3, sem controlar o número de vezes em que contam 3, chegando a respostas incorretas.

Exemplos:

**P: *Quantas fichas têm, ao todo?*** GUIL faz movimentos imperceptíveis com os dedos: *É 24.* P: *Como pensaste?* GUIL: *nos dedos.* P: *Mas como é que fizeste com os dedos?* GUIL: *Eu contei 20... não, 12... daí somei mais 12... é 24.* LGUS, da 5ª série, olha para o teto, faz movimentos imperceptíveis com os dedos e murmura: *3...3...3...6... É 21.* P: *Como pensaste?* LGUS: *Eu fui contando.*

### Uso da soma

JULI, da 3ª série, e RAFA, da 4ª série, fazem somas de 3 ou de 6, sem controlar o número de vezes em que somam 3 ou 6, chegando a respostas incorretas.

Exemplos:

**P: *Quantas fichas têm, ao todo?*** JULI, da 3ª série: *É 12.* P: *Como chegaste em 12?* JULI: *Eu fiz 6 mais 6.* RAFA bate com o polegar, o indicador e o médio na mesa, várias vezes: *É 21* P: *Como pensaste?* RAFA: *Eu fui fazendo 3 mais 3, mais 3...* P: *Quantas vezes somaste 3?* RAFA: *Ah! Eu não contei.*

### Com controle dos grupos equivalentes

### Uso imperceptível dos dedos

VAN, da 5ª série, faz movimentos imperceptíveis de dedos e lábios, contando de 3 em 3. Controla o número de vezes em que conta 3, chegando a uma resposta correta;

PROB, da 5ª série, faz movimentos imperceptíveis com os dedos e a cabeça, contando de 3 em 3. Controla o número de vezes em que conta 3, chegando a uma resposta correta;

CLA, JESSI e PRIS, da 4ª série, JES, JONA, JUL e LAU, da 5ª série, fazem movimentos imperceptíveis com os dedos, contando de 3 em 3. Controlam o número de vezes em que contam 3, chegando a respostas corretas.

### Exemplos:

**P: Quantas fichas têm, ao todo?** JESSI, da 4ª série: 18. P: *Como pensaste?* JESSI: *Contei as filas de 3, fui contando de 3 em 3* (Os movimentos de JESSI são imperceptíveis). PRIS, da 4ª série, olha para as mãos, faz movimentos imperceptíveis com os dedos: *É 18*. P: *Como pensaste?* PRIS: *Eu contei nos dedos. Seis linhas de 3. Três vezes 3 dá 9. Mais 10, 11, 12... 13, 14, 15...16, 17, 18*. JUL: *17? 18?* P: *17 ou 18?* JUL: *17, não, é 18*. P: *Como pensaste?* JUL: *Fui contando nos dedos*. P: *Como?* JUL: *Eu fiz assim 1, 2, 3* (JUL levanta um dedo), 4, 5, 6 (JUL levanta outro dedo). LAU, da 5ª série: *Aqui assim?* (apontando a linha visível) P: *Estas e também as que estão escondidas*. LAU olha, demoradamente, segurando a cabeça com a mão. Depois começa a mover o polegar, o indicador e o médio: *É 18* P: *Como pensaste?* LAU: *Eu fui contando ( mostra a mão esquerda e aponta as fichas escondidas) e com esta mão eu fui marcando ( controlando o número de vezes em que contava 3)*. P: *Então com esta mão foste contando as...* LAU: *Fileiras*. P: *E com esta mão?* LAU: *As fichas*.

### Uso da soma

GUST, da 5ª série, faz somas de 3. Controla o número de vezes em que soma 3, chegando à resposta correta.

Exemplo:

**P: Quantas fichas têm, ao todo?** GUST: *3 mais 3 é 6, mais 3 é 9, mais 3 é 12, mais 3 é... 15... 18*

## ESQUEMAS CONSOLIDADOS

Resposta imediata, multiplicando  $6 \times 3$  ou  $3 \times 6$

CAMI, da 3ª série; JEN, FER, PAUL, da 4ª série; JOHN, RAPH, ACAR, LUA, LUAN, FEL, LUI, MARI, GIO, RAÍ, BRU, da 5ª série, dão respostas imediatas. Não usam os dedos nem fazem somas, indo direto à multiplicação de  $6 \times 3$  ou  $3 \times 6$ .

Exemplos:

**P: Quantas fichas têm, ao todo?** JEN, da 4ª série: *É 18.* P: *Como pensaste?* JEN: *Eu fiz 3 vezes 6.* PAUL, da 4ª série: *18* P: *Como pensaste?* PAUL: *Porque tem 3 (mostra uma linha) e tem 6 (mostra uma coluna) e 3 vezes 6 é igual a 18.* JOHN, da 5ª série: *18.* P: *Como pensaste?* JOHN: *Porque 6 vezes o 3 dá 18.* LUAN, da 5ª série: *18.* P: *Como pensaste?* LUAN: *Eu multipliquei.* P: *O que multiplicaste?* LUAN: *Seis vezes 3.* FEL, da 5ª série: *Seis vezes 3... 3 vezes 6... é 18.* MARI, da 5ª série: *18.* P: *Como pensaste?* MARI: *Eu usei a tabuada, que eu decorei. Seis vezes 3 é 18.*

Esquemas mais consolidados permitem processos de autocorreção.

Exemplos:

**P: Quantas fichas têm, ao todo?** ACAR, da 5ª série: *A gente tem 20. Opa, que 20 nada, é 18.* P: *Como pensaste?* ACAR: *Três vezes 6.* RAÍ, da 5ª série: *Como assim?* P: *Colocaste 3 fichas em cada linha. Quantas fichas têm, ao todo?* RAÍ: *24?... não, não (põe as mãos no rosto) 18?* P: *Como chegaste em 18?* RAÍ: *Eu fiz 6 vezes 3.*

## OUTRAS RESPOSTAS

VANE, da 3ª série, e FIA, da 5ª série, não compreenderam a situação proposta, mesmo com a intervenção da pesquisadora.

Exemplo:

**P: Quantas fichas têm, ao todo?** FIA, da 5ª série, fez duas linhas de 3 e parou. P: *Quantas linhas tem?* FIA: 6 (Havia 6 fichas; Fia não compreende o que são linhas). P: *Tem 6 fichas. Isto é uma linha de 3. Isto é outra linha de 3. Quantas linhas têm?* FIA: *Seis.* P: *Essas 3 formam uma linha. Essas outras 3 formam outra linha. Vai colocando mais linhas até formar 6 linhas.* FIA forma 5 linhas. Olha fixamente. P: *Tem que ter 6 linhas.* FIA faz mais uma linha. P: *Quantas fichas têm, ao todo?* FIA aperta o nariz. Olha fixamente e diz: 5

No esquema pré-multiplicativo, propriamente dito, chama a atenção o refinamento dos esquemas de contagem, não mais limitados à contagem por unidades, mas assimilados a unidades de qualquer numerosidade. No caso, a unidade era 3 ou 6. A iteração de 3, observada na maior parte das crianças, é uma antecipação. Nos termos de Piaget (1967), a antecipação é a aplicação do esquema a uma situação nova antes que ela aconteça.

Uma diferença fundamental foi observada entre os alunos: enquanto alguns controlavam as iterações de 3, sabendo onde deviam parar, outros não exerciam esse controle. Nesse caso, simplesmente iteravam 3, sem saber onde parar. Interrogados sobre quantas vezes contaram 3, SER (não sei), VIT (eu me perdi), GUIL (eu contei 20, daí somei mais 12), RAFA ( eu não contei) indicaram claramente que não controlaram as iterações de 3.

Para Steffe e Cobb (1998), a primeira parte de um esquema multiplicativo ou divisional consiste na concepção, pela criança, da situação na qual esquemas multiplicativos ou divisionais são usados. A segunda parte consiste do procedimento (o algoritmo) de multiplicação ou divisão, e a terceira consiste numa revisão dos procedimentos, de onde saem os resultados. Pode-se dizer que as crianças que não controlaram o número de vezes em que iteraram 3 apresentaram apenas a primeira parte do esquema multiplicativo. Já as que controlaram apresentaram o esquema completo: conceberam a situação na qual deviam aplicar um esquema multiplicativo,

resolveram o algoritmo de multiplicação e revisaram os procedimentos de onde saíram os resultados, como JUL (*Eu fiz assim 1,2,3 -JUL levanta um dedo- 4,5,6 – JUL levanta outro dedo*) e LAU (*Eu fui contando - mostra a mão esquerda e aponta as linhas escondidas - e com esta mão eu fui marcando*), por exemplo, que explicaram como controlaram as iterações de 3. JUL e LAU distribuíram seu conceito de 3 através dos elementos do seu conceito de 6. Trata-se, ainda, de conceitos em ação, pois não há indicações de que fizeram essas coordenações antes de ativar os esquemas.

As crianças que não controlaram as iterações de 3 apresentaram um sub-esquema: o das unidades iteráveis. No entanto, dois subesquemas tinham que ser coordenados, o de unidades iteráveis e o da contagem, para marcar as unidades iteráveis. Entretanto, as crianças que têm, somente, uma seqüência numérica inicial, como SER E FELI, por exemplo, não sabem quando parar de contar para a frente. Isso causa-lhes uma perturbação que elas não conseguem neutralizar, ou seja, não fazem uma dupla contagem. Elas não são capazes de resolver uma situação multiplicativa pela impossibilidade de coordenar duas unidades compostas, de tal modo que uma seja distribuída sobre os elementos da outra.

Tanto entre os alunos que não controlaram as iterações de 3 quanto entre os que controlaram, observaram-se crianças que fizeram uso dos dedos, intenso ou imperceptível, mais uma vez atestando a legitimidade dos métodos próprios dos alunos.

Os que fizeram, como VANE e FIA, uso inconsistente dos dedos, na realidade não compreenderam a situação multiplicativa implícita, uma vez que, como já foi dito, os dedos funcionam como símbolos a serviço do pensamento. FIA, ainda, pareceu não compreender o que são linhas, indicando não ter estabelecido uma

clara distinção entre unidades e unidades compostas. Havia duas linhas de três fichas. Interrogada sobre o número de linhas, Fia respondeu que eram 6, ou seja, a quantidade de fichas, contadas uma a uma.

Vários alunos apresentaram respostas imediatas, sem utilização dos dedos ou de material manipulativo. Steffe e Cobb (1998) denominam de redução do esquema quando há, como na resposta imediata, a diminuição de um processo na resolução de um problema, isto é, a diminuição de parte do esquema. No caso, o resultado de 6 vezes o 3 já estava conectado a 18. Não se trata de conectar o estímulo “6 vezes 3” à resposta 18. Trata-se do resultado de um esquema, de uma relação funcional entre uma situação e uma resposta. As reduções dos esquemas pela reflexão e pela abstração resultam de uma sólida relação numérica, que compreende o conhecimento dos chamados fatos básicos.

### 7.3.2 Esquema de conceito implícito de multiplicação

O esquema de conceito implícito de multiplicação foi observado pela seguinte proposta:

A pesquisadora deixa à mão uma tira de papel vermelho de 24cm x 2cm. A seguir, apresenta retângulos azuis de 4cm x 2cm e pergunta: *Quantos azuis cobrem a tira vermelha?* Os alunos verificam que são 6. A pesquisadora coloca dois quadrados amarelos sobre um retângulo azul e pergunta: *Quantos quadrados amarelos são necessários para cobrir a tira vermelha?*

Encontramos esquemas iniciais, nos quais se verificou o uso intenso dos dedos para medir os retângulos azuis, na maior parte dos casos. Também encontramos esquemas mais avançados, intermediários, que implicavam o uso do



material ou o deslocamento do olhar. Por fim, encontramos esquemas consolidados, com respostas imediatas, sem utilização dos dedos nem de material.

Encontramos todos os tipos de esquemas em todas as faixas etárias, mas os esquemas iniciais foram encontrados predominantemente nas crianças de menos idade, como seria esperado. Gradativamente, observamos esquemas mais avançados nas crianças maiores.

## ESQUEMAS INICIAIS

### Uso intenso dos dedos

FIA, da 5ª série, toca, com a mão direita, sucessivamente nos dedos da mão esquerda;

JONA e FLA, da 5ª série, medem os retângulos azuis com os dedos;

FEL e LGUS, da 5ª série, deslocam os dedos indicadores pelos retângulos azuis;

TAL, da 5ª série, desloca o dedo mínimo, apontando os retângulos azuis e diz: 1, 2...3, 4...5, 6...7, 8...9, 10...11, 12;

JON, da 3ª série, bate duas vezes na mesa com o indicador da mão direita, abaixo de cada retângulo azul;

JEN e PRIS, da 4ª série, e WAG, da 5ª série, batem uma vez com o indicador abaixo de cada retângulo azul;

VANE, da 3ª série, e JES, da 5ª série, apontam para os retângulos azuis dizendo: *2 aqui, 2 aqui, 2 aqui...*

FER e PAT, da 4ª série, apontam cada retângulo azul com o indicador da mão direita.

O uso dos dedos, por si só, não garante uma resposta correta, como se pode ver nos exemplo:

**P: Quantos quadrados amarelos são necessários para cobrir a tira vermelha?**  
 VANE, da 3ª série: 10. P: *Como pensaste?* VANE: *Eu fui contando.* P: *Como contaste?* VANE, apontando para os retângulos azuis: *2 aqui, 2 aqui, 2 aqui, 2 aqui, 2 aqui...* P: *E estes (colocados pela pesquisadora) não estão sobre a tira vermelha?* VANE: *Estão, sim. Então são 12 amarelas.* JEN, da 4ª série, bate com o indicador abaixo de cada retângulo azul: 9. P: *Como pensaste?* JEN: *“Peraí”* (e movimenta o polegar e o indicador, o médio e o anular, o mínimo e polegar da outra mão, o indicador e o médio, o anular e o mínimo) *12?* FIA, da 5ª série, com a mão direita, toca sucessivamente nos dedos da mão esquerda: 10. P: *Como pensaste?* FIA: *Eu contei daqui para cá* (não contou as duas colocadas pela pesquisadora). P: *Não contaste estas 2?* FIA: *Não.* P: *Mas estas também não estão cobrindo a tira vermelha?* FIA: *Então são 12.* JONA, da 5ª série: 15. P: *Como pensaste?* JONA nada responde, põe os dedos sobre os retângulos azuis. P: *Tu me disseste que para cobrir a tira vermelha precisava de 6 azuis. Duas amarelas cobrem uma azul. Quantas amarelas precisas para cobrir a tira vermelha?* JONA desloca o olhar sobre os retângulos azuis: 12.

## ESQUEMAS INTERMEDIÁRIOS

### Uso do material

LAU, da 5ª série, desloca os dois quadrados amarelos ao longo da tira vermelha;

SER, da 3ª série, desloca um quadrado amarelo sobre os retângulos azuis;

LET, da 5ª série, coloca dois quadrados amarelos sobre um retângulo azul.

### Deslocamento do olhar

JESSI, da 4ª série, desloca o olhar pelos retângulos azuis, movendo ritmicamente a cabeça, marcando de 2 em 2;

GUIL, VIT e CINT, da 3ª série; RAFA e FAB da 4ª série; GUST e BRU, da 5ª série, deslocam o olhar pelos retângulos azuis.

## ESQUEMAS CONSOLIDADOS

Resposta imediata, multiplicando  $6 \times 2$

CAMI e JULI, da 3ª série; CLA, EDU e PAUL, da 4ª série; JOHN, RAPH, ACAR, LUA, LUAN, VAN, LUI, MARI, PROB, GIO, JUL, VER, da 5ª série, dão respostas imediatas, multiplicando  $6 \times 2$ , sem utilização dos dedos, do material ou deslocamento do olhar.

## OUTRAS RESPOSTAS

Alguns alunos precisaram de intervenção da pesquisadora para compreender/responder/ corrigir a situação formulada.

Exemplos:

**P: Quantos quadrados amarelos são necessários para cobrir a tira vermelha?**  
 RAÍ, da 5ª série: 18. P: Como pensaste? RAÍ: Duas vezes 6. Não. P: Sim, 2 vezes 6. E é 18? RAÍ: Não, não é 18. (Coloca a mão no rosto). Três vezes 6? P: Quantas azuis tu precisaste? RAÍ: 6 P: Quantas amarelas tem em cada azul? RAÍ: 2. P: Então. Quantas amarelas tu vais precisar para toda a tira vermelha? RAÍ: Ai! (Coloca as mãos no rosto. Olha fixamente para as peças) 12 amarelas. LUA, da 5ª série, olha fixamente para as peças azuis: Não sei. P: Quantas amarelas eu coloquei aqui? LUA: 2 P: Então? LUA: É 12. P: Como pensaste? LUA: Seis vezes o 2 é 12. FEL, da 5ª série, desloca os dedos indicadores pelos retângulos azuis: 10. A pesquisadora coloca mais dois quadrados sobre um retângulo azul: E agora, quantas amarelas cobrem a tira vermelha? FEL mede o espaço ocupado pelas quatro amarelas com os indicadores. Desloca os dedos mais duas vezes: É 12. LET, da 5ª série, olha, atentamente: 10. P: Como pensaste? LET pega um retângulo azul e coloca sobre ele 2 quadrados amarelos. Aproxima o que fez da tira vermelha. Se esse aqui deu 6...(e desloca o retângulo azul sobre a tira vermelha). P novamente coloca um retângulo azul sobre a tira vermelha. Depois coloca 2 quadrados amarelos sobre o retângulo azul. Aqui tem 2, não é? Mais um azul vai dar? LET: 4. P: Mais um azul vai dar? LET: 6. P: Quantos azuis faltam? LET: 3. Ah! Vai dar 12. FLA, da 5ª série, olha atentamente: 16. P: Como pensaste? FLA faz corresponder dois dedos a cada quadrado amarelo. P: Tu estás medindo pelo teu dedo. O quadrado amarelo tem a largura do teu dedo? FLA: Quase. É um pouquinho maior. P: Considera isso, que o

*quadrado amarelo é um pouquinho maior que o teu dedo. FLA olha, atentamente: 13?*

Freqüentemente, os alunos eram solicitados a justificar suas respostas.

Exemplos:

**P: Quantos quadrados amarelos são necessários para cobrir a tira vermelha?**  
 SER, da 3ª série, vai deslocando um quadrado amarelo sobre os retângulos azuis: 12. P: *Como chegaste em 12?* SER: *Indo de quadrinho em quadrinho. Está certo?*  
 CAMI, da 3ª série: *Seis vezes 2... dá 12.* P: *Por que é 6 vezes 2?* CAMI: *Ao todo daqui dá 6 (apontando os retângulos azuis), é 6 vezes 2 porque vai indo de 2 em 2.*  
 JULI, da 3ª série, movimenta a cabeça, olhando as peças azuis: 12? P: *Como pensaste?* JULI: *Seis vezes 2 é 12.* CLA, da 4ª série: 12. P: *Como pensaste?* CLA: *Porque a amarela é a metade da azul.* JESSI, da 4ª série, percorre com o olhar as peças azuis, movendo ritmicamente a cabeça, marcando de 2 em 2, fazendo ligeiros movimentos com a boca: *É 12.* P: *Como pensaste?* JESSI: *Aqui tem 2 em 1 (apontando para as duas peças amarelas) aqui 2, 2, 2...(apontando para as peças azuis).* PAUL, da 4ª série, fecha os olhos por um segundo: 12. P: *Como pensaste?* PAUL: *Cada uma delas vale 2 (apontando um retângulo azul). Então eu multipliquei 6 vezes 2.* RAPH, da 5ª série: 12 (apontando cada azul com o indicador da mão direita). P: *Como pensaste?* RAPH: *Já que aqui tem 6 e aqui tem 2, eu vou multiplicar.* P: *Multiplicar o quê?* RAPH: *Seis vezes o 2.* ACAR, da 5ª série: 12. P: *Como pensaste?* ACAR: *Se a azul é igual a 2 amarelas, então é fazer 2 x 6.* JES, da 5ª série, olha, demoradamente: 12. P: *Como pensaste?* JES: *Fui imaginando duas amarelas aqui...aqui...aqui... (a mão move-se ao longo da tira vermelha).* MARI, da 5ª série, olha, fixamente: 12. P: *Como pensaste?* MARI: *Eu dividi... não... 6 vezes 2 dá 12.*

Também nesta proposta de esquemas pré-multiplicativos – conceito implícito de multiplicação – os esquemas não se limitam à contagem por unidades, mas se referem a unidades de 2. Nesse ponto, o 2 pode ser tomado como uma entidade e ser usado para segmentar uma seqüência num desconhecido número de intervalos de dois itens. Crianças que construíram uma seqüência numérica implícita são capazes de encontrar quantos grupos de 2 podem fazer com 12 itens, como fez VANE: “2 aqui, 2 aqui, 2 aqui... (Olive, 2001). Nessa situação, a multiplicação aparece preponderantemente como uma adição repetida, ou seja, a identificação de uma unidade composta e a contagem consecutiva de instâncias dessa unidade. A

maior parte das abordagens atuais da multiplicação fundamenta-se na adição repetida. Apesar disso, Steffe (1994) aconselha que não se encoraje a multiplicação somente com esse sentido. Sugere, também, que não se tome uma decisão prévia sobre ensinar a multiplicação como adição repetida ou como distribuição de uma unidade composta, pois é mais interessante desenvolver construtos interpretativos alternativos, em lugar de encorajar uma única forma de interpretação.

Vários alunos, como VANE, por exemplo, apontavam para os retângulos azuis dizendo: 2 aqui, 2 aqui, 2 aqui... chegando rapidamente a 6 vezes 2, tendo em vista a facilidade da contagem de 2 em 2. Nesse caso, os dois subesquemas – a contagem por 2 e o número de vezes em que o 2 foi contado – coordenaram-se facilmente.

A maior parte das crianças resolveu a situação corretamente. No entanto, algumas fizeram uso consistente do material, dos dedos, adicionando de 2 em 2, como TAL, que apontando para os retângulos azuis disse: “1,2 ... 3,4 ... 5,6 ... 7,8... 9,10... 11,12”, ou SER, que disse ir “de quadrinho em quadrinho”. Como esclarecem Steffe e Cobb (1998), quando uma criança simplesmente faz coleções e depois as conta, a atenção é dirigida externamente sobre as coleções mais do que internamente sobre a atividade de fazê-las. Em contraste, o controle de quantas vezes uma unidade é iterada provê a criança com recursos internos sobre o qual basear a abstração e com uma oportunidade para abstrair sua atividade. TAL distribuiu suas unidades de 2 através de cada uma das 6 unidades, coordenando unidades dois-para-um, por uma acomodação das operações envolvidas na dupla contagem. Essa coordenação caracteriza um conceito implícito de multiplicação.

Porém é fundamental que as crianças ponham em prática seus próprios métodos. Na perspectiva de Steffe e Cobb (1998), é um erro ir direto ao algoritmo

padrão, ignorando os produtivos algoritmos das crianças. Os autores alertam que sua posição não significa que eles vêem a criança como uma contadora e que pretendem deixá-la nesse estado, já que a primeira resposta da criança a problemas aritméticos é contar. Mas têm a profunda convicção de que os algoritmos padrão devem derivar dos conceitos e esquemas das crianças. Tais esquemas são intuitivos, caracterizados por uma assimilação irreversível. São raciocínios ligados a uma dada configuração perceptiva, ainda não operatórios (PIAGET, 1978).

Várias crianças deram respostas imediatas, indo direto à multiplicação 6 vezes 2, abstraindo a atividade com os dedos ou com o material. A contagem foi abandonada e a situação foi facilmente coordenada com a seqüência numérica disponível para a criança. No dizer de Piaget (1978, p. 328), “o essencial não é o esquema como estrutura, mas a atividade estruturante que dá origem aos esquemas”.

### 7.3.3 Esquema de Coordenação de Unidades em Ação

O esquema de coordenação de unidades em ação foi investigado a partir da proposta que segue:

A pesquisadora orienta o aluno a formar 9 linhas de 3 fichas em cada linha. A seguir, cobre as fichas e pergunta: Quantas fichas têm aqui?

No esquema de coordenação de unidades em ação, assim como no esquema pré-multiplicativo, encontramos duas situações nitidamente distintas. Observamos esquemas iniciais e intermediários sem controle dos grupos equivalentes, ou seja, o aluno não controla o número de vezes em que conta os grupos de 3 ou 9. Observamos, ainda, esquemas iniciais, intermediários e consolidados com controle

dos grupos equivalentes, ou seja, o aluno controla o número de vezes em que conta os grupos de 3 ou de 9.

Nos casos em que não há controle dos grupos equivalentes, a maior parte das respostas são incorretas. Quando há controle dos grupos equivalentes, são dadas respostas corretas.

Esquemas iniciais, sem controle dos grupos equivalentes, foram encontrados apenas em alunos de 3ª e 4ª séries. Além do uso intenso ou imperceptível dos dedos, foi utilizado um esquema de contagem entre alunos de 5ª série. Assim, os esquemas iniciais foram encontrados nas crianças de menos idade. Gradativamente, foram sendo observados esquemas mais avançados nas crianças maiores.

## ESQUEMAS INICIAIS

Sem controle dos grupos equivalentes

Contagem das fichas durante a colocação das mesmas

LGUS, VER e LAU, da 5ª série, contam as fichas uma a uma, durante a organização de 9 linhas de 3 fichas.

Exemplo:

**P: *Quantas fichas têm aqui?*** LGUS, da 5ª série: 27 **P: *Como pensaste?*** LGUS: *Na cabeça.* **P: *O que tu pensaste?*** LGUS: *Fui botando e fui contando.*

Uso intenso dos dedos

CARO, da 3ª série, com a mão direita segura três dedos da mão esquerda, depois, com a mão esquerda segura três dedos da mão direita. Segue assim,

silenciosa e sucessivamente, sem controlar o número de vezes em que conta 3, chegando a uma resposta incorreta.

Com controle dos grupos equivalentes

Uso intenso dos dedos

RAFA, da 4ª série, com a mão direita bate na mesa com o indicador, o médio e o anular. A cada contagem de 3, levanta um dedo da mão esquerda. Apesar de controlar os grupos equivalentes, confunde-se na contagem, chegando a uma resposta incorreta.

FIA, da 5ª série, com os dedos da mão direita toca os dedos da mão esquerda e murmura 19, 20, 21, 22, 23. Depois levanta quatro dedos da mão direita e murmura 24, 25, 26 e 27. Controla o número de vezes em que conta 3, chegando a uma resposta correta.

CINT, da 3ª série, com a mão direita bate, sucessivamente, o polegar, o indicador e o médio na mesa. A cada contagem de 3 levanta um dedo da mão esquerda. Controla o número de vezes em que conta 3 e chega a uma resposta correta.

SER, da 3ª série, bate na mesa, sucessivamente, com o mínimo, o anular e o médio da mão direita. Depois passa para o mínimo, anular e médio da mão esquerda. Vai alternando as mãos. Controla o número de vezes em que conta 9, chegando a uma resposta correta.

EDU, da 4ª série, move, no colo, o polegar, o indicador e o médio, controlando o número de vezes em que conta 3. Chega a uma resposta correta.



## ESQUEMAS INTERMEDIÁRIOS

Sem controle dos grupos equivalentes

Uso imperceptível dos dedos

VIT, da 3ª série, e FAB, da 4ª série, movem os dedos imperceptivelmente, não controlando o número de vezes em que contam 3 ou 9, chegando a uma resposta incorreta.

Exemplo:

**P: *Quantas fichas têm aqui?*** VIT, da 3ª série, move dedos e lábios imperceptivelmente. O processo é demorado: 64. **P: *Como pensaste?*** VIT: *Nos dedos.* **P: *Como contaste nos dedos?*** VIT: *De 9 em 9.* **P: *Quantas vezes contaste 9?*** VIT: *Não sei.*

Com controle dos grupos equivalentes

Uso imperceptível dos dedos

JON, da 3ª série; CLA, JESSI e PRIS, da 4ª série; JES, MARI, RAÍ e JONA, da 5ª série, movem os dedos imperceptivelmente. Controlam o número de vezes em que contam 3 ou 9, chegando a uma resposta correta.

Uso da contagem

PROB, da 5ª série, conta 1, 2, 3 e estende o polegar da mão direita; conta 4, 5, 6 e estende o indicador; conta 7, 8, 9 e estende o médio. Segue assim até 27, controlando o número de vezes em que conta 3.

GUST, da 5ª série, conta 1, 2, 3,... 4, 5, 6... 7, 8, 9... até 27, controlando o número de vezes em que conta 3.

## ESQUEMAS CONSOLIDADOS

Respostas imediatas, multiplicando  $9 \times 3$  ou  $3 \times 9$

CAMI, da 3ª série; PAT, JEN e PAUL, da 4ª série; JOHN, RAPH, ACAR, WAG, LUA, LUAN, VAN, FEL, LUI, GIO, TAL, BRU, JUL, LET, da 5ª série, dão respostas imediatas, multiplicando  $9 \times 3$  ou  $3 \times 9$ , sem utilização dos dedos ou de contagem.

Exemplos:

**P: Quantas fichas têm aqui?** PAT, da 4ª série: 27. P: *Como pensaste?* PAT: Nove vezes 3. JEN, da 4ª série: 27. P: *Como pensaste?* JEN: *Três vezes 9.* RAPH, da 5ª série: *Tem... 27* P: *Como pensaste?* RAPH: *Já que tem 9 linhas de 3, eu multipliquei 3 vezes o 9.* P: *Quantas fichas têm aqui?* LUAN, da 5ª série: 27. P: *Como pensaste?* LUAN: *Eu fiz uma multiplicação de 9 vezes 3.* JUL, da 5ª série, move os lábios, os braços permanecem cruzados: 26. P: *Como chegaste no 26?* JUL, irritado: *A mesma coisa, nos dedos (mostra 3 dedos). Eu podia ter feito multiplicando.* P: *Como?* JUL: *Eu podia ter feito 9 vezes 3.* P: *Quanto é 9 vezes 3?* JUL: 27.

## OUTRAS RESPOSTAS

JULI e VANE, da 3ª série, não interpretaram adequadamente a situação.

Exemplos:

**P: Quantas fichas têm aqui?** JULI: 18. P: *Como pensaste?* JULI: *Nove mais 9.* VANE: *Ao todo?* P: *Ao todo.* VANE: 9. P: *Como pensaste?* VANE: *Eu pensei assim, 3 vezes 3 dá 9.* P: *Tem 9 linhas...* VANE: *de 3.* P: *Então?* VANE: *É 9.*

Alguns alunos confundiram-se na contagem.

Exemplos:

**P: *Quantas fichas têm aqui?*** GUIL, da 3ª série, demoradamente: 48. P: *Como pensaste?*  
 GUIL: *Nos dedos.* P: *Sim, mas como fizeste com os dedos?* GUIL: *Fiz 20.* P: *Como chegaste no 20?* GUIL: *Eu somei 24, daí 29, e daí foi indo...* FER, da 4ª série: 26. P: *Como chegaste no 26?* FER: *Fazendo 3 vezes 9.* P: *Três vezes 9 é 26?*  
 FER: *Não* (FER bate com o mínimo, o anular e o médio, na mesa, sucessivamente).  
 É 28.

Na tarefa de contar 9 linhas de 3 fichas, a quantidade a ser contada era grande demais para a criança usar um padrão de dedos. Mesmo assim, poucas delas não controlaram os grupos equivalentes, ou seja, quantas iterações de 3 estavam fazendo. Como já foi analisado anteriormente, as crianças que controlam as iterações dos grupos equivalentes já interiorizaram a seqüência numérica inicial, dispondo de uma seqüência numérica implícita, ou seja, itens contáveis abstratos.

Nessa situação, o grupo de crianças que utilizou os dedos – intensa ou imperceptivelmente – foi maior do que o grupo que deu respostas imediatas, apresentando esquemas de seqüência numérica explícita.

Os alunos que usaram intensamente os dedos fizeram como CARO, por exemplo, que com a mão direita segurava 3 dedos da mão esquerda e, com a mão esquerda, segurava 3 dedos da mão direita. Nessas condições, ficou difícil controlar as iterações de 3. Os alunos que usaram imperceptivelmente os dedos fizeram como PROB, por exemplo, que contava 1, 2, 3 e estendia o polegar; contava 4, 5, 6 e estendia o indicador; contava 7, 8, 9 e estendia o médio, e assim, sucessivamente, controlando as iterações de 3, pois uma coleção de 3 itens era tomada como uma unidade, formando conjuntos implícitos, dentro da seqüência de 1 a 27. Enquanto PROB utilizou um esquema de seqüência numérica implícita, CARO utilizou um esquema de seqüência numérica inicial. Os esquemas multiplicativos tornaram-se

possíveis para PROB, mas não para CARO. PROB utilizou um esquema de coordenação de unidades em ação e um conceito iterativo de multiplicação como uma adição repetida, ao lembrar cada unidade de 3 até alcançar 9. O padrão numérico de 3 funcionava como um dispositivo, pronto para ser acionado, repetido 9 vezes, de acordo com a contagem nos dedos.

Embora as crianças com uma seqüência numérica implícita possam começar a construir estruturas multiplicativas, elas ficam limitadas justamente pela natureza implícita da sua seqüência numérica. Olive (2001) esclarece que para estabelecer esquemas multiplicativos abstratos – tais como os que apresentam as crianças que dão respostas imediatas –, cada elemento de uma seqüência numérica precisa ser uma unidade composta abstrata. No caso de 9 vezes 3, por exemplo, não há contagem de 1 a 3 nem nos dedos, nem com material, nem verbalmente. O 3 é uma unidade abstrata, como resultado de mais uma re-interiorização da seqüência numérica.

Como se vê, os esquemas se diversificam na interação com o real, numa complexidade crescente. Mas “a construção de esquemas complexos explica-se pelo funcionamento de esquemas mais elementares no quadro da função de adaptação” (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 170). Pode-se, assim, compreender a razão pela qual algumas crianças permaneceram presas à atividade com os dedos, enquanto outras desenvolveram formas abstratas. Piaget (1996, p. 16) designou “esquemas de ações o que, numa ação, é assim transponível, generalizável ou diferenciável de uma ação à seguinte, ou seja, o que há de comum nas diversas repetições ou aplicações da mesma ação”. As ações tendem a se repetir em situações análogas. Só vai ocorrer diferenciação e novas combinações de

esquemas quando surgirem novas necessidades, quando as situações forem reconhecidas como diferentes.

## 7.4 ESQUEMAS MULTIPLICATIVOS

### 7.4.1 Esquema de Coordenação Parte-Todo

O primeiro esquema multiplicativo investigado foi o esquema de coordenação parte-todo, com duas diferentes propostas.

Primeira proposta

O aluno organiza 4 linhas de 3 fichas. A pesquisadora faz algumas outras linhas e as cobre. A seguir, pergunta: Agora há 7 linhas de 3. Quantas linhas estão escondidas?

Segunda proposta

O aluno organiza 5 linhas com 4 fichas em cada linha. A pesquisadora cobre o material e pergunta: Quantas fichas têm nas 3 primeiras linhas?

Encontramos esquemas bastante iniciais, envolvendo o uso intenso dos dedos. Encontramos, também, esquemas mais avançados, intermediários, envolvendo o uso imperceptível dos dedos. Por fim, encontramos esquemas consolidados, com respostas imediatas, sem utilização dos dedos.

Todos os tipos de esquemas foram encontrados em todas as faixas etárias.

Entre as crianças menores estava o maior número das que necessitaram da intervenção da pesquisadora ou que não conseguiram interpretar a situação.

Entre as crianças maiores encontramos o maior número das que apresentaram esquemas consolidados.

## ESQUEMAS INICIAIS

Uso intenso dos dedos

CARO, da 3ª série, com a mão direita segura quatro dedos da mão esquerda.

Repete três vezes esse gesto;

PROB, da 5ª série, com a mão fechada estende, sucessivamente, o polegar, o indicador, o médio e o anular. Repete três vezes esse gesto;

CARO, da 3ª série, e LGUS, da 5ª série, estendem, sucessivamente os dedos da mão direita, enquanto contam 9, 10, 11, 12;

VER e LAU, da 5ª série, tocam o polegar, sucessivamente, no indicador, no médio, no anular e no mínimo. Repetem o gesto três vezes.

## ESQUEMAS INTERMEDIÁRIOS

Movimentos imperceptíveis da cabeça ou dos dedos

MARI, da 5ª série, faz movimentos imperceptíveis com a cabeça;

PAT, JEN e FAB, da 4ª série, JES e FLA, da 5ª série, movem os dedos, imperceptivelmente.

## ESQUEMAS CONSOLIDADOS

Respostas imediatas, multiplicando 3 x 4 ou 4 x 3

JULI, GUIL, VIT e CINT, da 3ª série; FER, CLA, JESSI, PAUL, FAB, EDU, PRIS, da 4ª série; JOHN, RAPH, ACAR, WAG, LUA, LUAN, VAN, FEL, LUI, JES,

MARI, PROB, GIO, RAÍ, JONA, GUST, LGUS, VER, LET, LAU, TAL e JUL, da 5ª série, dão respostas imediatas, sem uso dos dedos ou do material manipulativo.

Exemplos:

**P: Quantas linhas estão escondidas?** PRIS, da 4ª série: 3. P: *Como pensaste?* PRIS: *Se aqui tem 4, eu vou contar 5, 6 e 7.* PROB, da 5ª série: 3. P: *Como pensaste?* PROB: *Quatro mais 3 é 7.* ACAR, da 5ª série: 3. P: *Como pensaste?* ACAR: *Se são 7 linhas e aqui a gente tem 4, lá atrás (escondidas) só pode ter 3.* RAÍ: 3. P: *Como pensaste?* RAÍ: *Aqui tem 4 linhas. Para chegar no 7 fica faltando 3.* VER: 3. P: *Como pensaste?* VER: *Sete menos 4.*

**P: Quantas fichas têm nas 3 primeiras linhas?** JULI, da 3ª série: 12. P: *Como pensaste?* JULI: *Quatro mais 4, mais 4.* P: *Quantas fichas têm nas 3 primeiras linhas?* GUIL, da 3ª série: 12. P: *Como pensaste?* GUIL: *Contando 9, 10, 11, 12.* VIT, da 3ª série: 12. P: *Como pensaste?* VIT: *Eu fui tirando 4, 4 e 4.* PAUL, da 4ª série: *Nas 3 primeiras?* P: *Sim.* PAUL: 12. P: *Como pensaste?* PAUL: *Quatro vezes 3 é igual a 12.* RAPH, da 5ª série: 12. P: *Como pensaste?* RAPH: *Somando todas dá 20. Eu diminuí 20 menos 8, deu 12.* GUST, da 5ª série: *Nas 3 primeiras? É 12.* P: *Como pensaste?* GUST: *Eu contei de 4 em 4 até chegar na terceira linha.*

## OUTRAS RESPOSTAS

Vários alunos precisaram da intervenção da pesquisadora para compreender/ responder/ corrigir a situação formulada. São eles: CAMI, SER, JON, CINT, da 3ª série; RAFA, da 4ª série; LUAN, TAL, JUL, FLA, FIA, VAN, FEL, LUI, GIO, JONA, da 5ª série.

Exemplos:

**P: Quantas linhas estão escondidas?** RAFA, da 4ª série: *Aqui tem 4 e ali tem 7?* P: *Não. Ao todo tem 7.* RAFA: *Quanto tem ali?* P: *Sim.* RAFA: 3. LUAN, da 5ª série: 12. P: *Ao total temos 7. Quantas linhas estão escondidas?* LUAN: 3. TAL, da 5ª série: 11. P: *Ao todo tem 7 linhas.* TAL: *3 linhas.* JUL, da 5ª série: *Quatro mais 7?* P: *Ao todo tem 7 linhas.* JUL: *Ah! Lá tem 3 linhas.* FIA, da 5ª série: *Ao total é 7?* P: *Sim.* FIA *masca, faz balão, vira os olhos: Tu quer saber quantas estão aqui?* (apontando

para as fichas escondidas). P: *Sim. Quantas linhas estão lá. Aqui tem 4 linhas de 3. Ao todo tem 7 linhas. Eu quero saber quantas tem lá.* FIA: 3. P: *Como pensaste?* FIA: *Aqui tem 4..* (os dedos da mão direita pegam, sucessivamente, os dedos mínimo, anular e médio da mão esquerda) 5, 6 e 7.

**P: Quantas fichas têm nas 3 primeiras linhas?** CAMI, da 3ª série, olha com ar de surpresa para a pesquisadora. Ri. P: *Tu organizaste 5 linhas, não é?* CAMI: *Cinco vezes 4..* P: *Mas eu estou perguntando quantas fichas têm nas 3 primeiras linhas.* CAMI: *O que tu me perguntaste?* P: *Quantas fichas têm nas 3 primeiras linhas.* CAMI: *Quatro vezes 3. É 12.* SER, da 3ª série: *Como assim?* P: *Tu fizeste 5 linhas, não é? Quantas fichas têm nas 3 primeiras linhas?* SER abre as mãos e vai flexionando, sucessivamente, os cinco dedos da mão direita e depois os cinco dedos da mão esquerda. Repete o processo: 20. P: *Vinte ao todo. E nas 3 primeiras linhas?* SER: *Ah! Está, nas 3 primeiras.* Abre as mãos e flexiona quatro dedos da mão direita, depois quatro dedos da mão esquerda e novamente quatro dedos da mão direita: 12. JON, da 3ª série: *Nas 3 primeiras? 8.* P: *Nas 3 primeiras linhas. São 3 linhas de 4 fichas.* JON: *Não.* P: *Tu fizeste 5 linhas, mas eu estou te perguntando quantas fichas têm nas 3 primeiras linhas.* JON coloca as mãos sobre as pernas e bate o polegar, o indicador, o médio e o anular da mão direita, depois da mão esquerda e da mão direita novamente: 12. CINT, da 3ª série: 20. P: *Como pensaste?* CINT: *O mesmo.* P: *O que tu pensaste?* CINT coloca quatro dedos da mão direita sobre a mesa e levanta um dedo da mão esquerda. P: *Contaste de 4 em 4?* CINT: *Sim.* P: *Quantas vezes contaste de 4 em 4?* CINT: 5. P: *Mas eu te perguntei quantas fichas têm nas 3 primeiras linhas.* CINT: 12. VAN, da 5ª série, balança a cabeça e move os lábios: 9. P: *Como pensaste?* VAN: *Ah! É 12.* FEL, da 5ª série, levanta os olhos, move os dedos: 9. *Não, 16.* P: *Como pensaste?* FEL: *Quatro vezes 3.* P: *E chegaste no 16?* FEL: *Não. Quatro vezes 3 é 12.* LUI, da 5ª série: *Ah! Eu não me lembro. Eu esqueci. Quantas fichas tinham em cada linha?* P: 4. LUI: *E eram 5 linhas de 4.* P: *Eu estou te perguntando quantas fichas têm nas 3 primeiras linhas.* LUI: 12. P: *Como pensaste?* LUI: *Três vezes 4.* GIO, da 5ª série: 16. P: *Como pensaste?* GIO: *Contei de 4 em 4.* P: *Quantas vezes contaste 4?* GIO: *Quatro (Gio ri) São 12.* JONA, da 5ª série, faz movimentos imperceptíveis com os dedos: 9. P: *Como chegaste no 9?* JONA: *É 4?* P: *Sim, linhas de 4.* JONA: *É 12.*

Vários alunos não compreenderam/ interpretaram/ resolveram a situação proposta apesar da intervenção da pesquisadora. São eles: SER, VANE, FELI, JON, VIT, CARO, da 3ª série; FER, JEN, RAFA, EDU, PRIS, da 4ª série; e BRU, da 5ª série.

Exemplos:

**P: Quantas linhas estão escondidas?** SER, da 3ª série: *Linhas?* P, mostrando uma linha: *Quantas linhas estão aqui?* SER conta as fichas, apontando com o indicador da mão direita. P: *Não são fichas. São linhas de fichas.* SER: *Ah!* (e conta



uma, duas, três, quatro, apontando com o indicador) são 4. P: *Ao todo tem 7 linhas.* SER, apontando para as linhas escondidas: *Lá tem 7.* P: *Não, ao todo tem 7* (mostrando, com um gesto, as linhas visíveis e as escondidas). SER olha suas mãos, com os dedos estendidos, no colo: 11. FELI, da 3ª série, organiza uma linha de 4 e conta, com o indicador apontando as fichas. Organiza outra linha de 4 e conta novamente. Organiza mais uma terceira linha e conta: *Quatro linhas.* P: *Como pensaste?* FELI ri: *Na cabeça.* P: *Sim. Mas que pensamento tiveste?* FELI: *Eu contei 4 aqui e lá, quando a senhora estava colocando.* JON, da 3ª série: *Quatro linhas de 3.* P: *Por quê?* JON: *Quatro linhas, tu botaste 4 linhas.* P: *Como é que tu sabes que eu coloquei 4 linhas?* JON: *Porque ali tem 4 linhas de 3* (mostrando as linhas que estão à mostra). P: *Ao todo formam 7 linhas. Aqui tem 4. Quantas têm lá?* JON estende a mão para as fichas escondidas: *Aqui também tem 4.* VIT, da 3ª série: 7 P: *Sete tem ao todo. Estas 4 e mais as outras escondidas. Quantas estão escondidas?* VIT: 6. CARO, da 3ª série, segura com a mão direita três dedos da mão esquerda e segura com a mão esquerda três dedos da mão direita: 21 P: *Ao todo têm 7 linhas. Aqui tem 4* (mostrando as linhas visíveis). *Quantas linhas tem lá?* CARO bate com os dedos da mão direita na mesa: 11. FER, da 4ª série: *Quantas linhas?* P: *Tem 7. As 4 que tu fizeste aqui e mais as outras que estão escondidas lá.* FER: 44 P: *Como é que pensaste?* FER: *Sete vezes 4* JEN, da 4ª série: 4? P: *Como pensaste?* JEN: *Aqui têm 4 e lá têm 4.* P: *E quanto é 4 mais 4?* JEN: *Quatro mais 4 é 8.* P: *E quantas linhas eu disse que tinha ao todo?* JEN: *Ao todo? 8.*

**P: Quantas fichas têm nas 3 primeiras linhas?** VANE, da 3ª série, olha para baixo, em silêncio. P: *Como é que tu estás pensando?* VANE: *Eu estou pensando assim, ó, quanto é 3 vezes 4... é 7.* RAFA, da 4ª série: *Nas 3 primeiras?* 15. P: *Como pensaste?* RAFA: *Somei 5 mais 5, mais 5, dá 15. Cinco mais 5 é 10, mais 5 é 15.* EDU, da 4ª série: *Nas 3 primeiras linhas?* 6, P: *Como chegaste em 6?* EDU: *Eu fiz 3 vezes 6.* PRIS, da 4ª série: 9. *Não, pára aí.* (coloca as mãos sobre o colo, movimenta dedos e lábios rapidamente) 32. P: *Como pensaste?* PRIS: *Eu pensei assim. Tem 4, não é? Então eu vou contar 8 mais 8 dá 16, mais 8 dá...* 24 P: *Mas tem 8 em cada linha?* PRIS: *Não, eu contei 2 linhas por vez.* P: *Mas a pergunta que eu te fiz é assim: quantas fichas tem nas 3 primeiras linhas?* PRIS: *Três?* P: *Nas 3 primeiras.* PRIS: 16. *Nas 3 primeiras linhas é 16.* BRU, da 5ª série: 15. P: *Como pensaste?* BRU: *Três vezes 5 é 15.* P: *Eu te perguntei quantas fichas têm nas 3 primeiras linhas.* BRU olha, demoradamente: 16.

Nos esquemas de coordenação parte-todo, mais especificamente, na questão sobre quantas fichas havia nas 3 primeiras linhas, surgiram tanto respostas de 4 vezes 3, como a de PAUL, por exemplo, quanto de 3 vezes 4, como, por exemplo, a de LUI.

Tudo leva a crer que, nesse caso, a comutatividade não surgiu como resultado de uma lógica interna, nem como objeto da consciência. Como advertem Steffe e Cobb (1998), o desenvolvimento desse princípio, provavelmente, resulta da

experiência informal. Na visão dos autores, um conceito pode ser complementado por procedimentos, assim como pode ser informado por procedimentos. Steffe e Cobb (1998) enfatizam que os conceitos estão em contínua evolução e que não há um único conceito multiplicativo ou divisional. A formação dos conceitos se caracteriza por elaborações e reorganizações que resultam de acomodações que surgem no uso de esquemas multiplicativos ou divisionais.

É por isso que Steffe e von Glasersfeld (1985) destacam que as operações de multiplicação e divisão são construídas como modificações da seqüência de números desenvolvidas pela criança, em qualquer fase do desenvolvimento. Isso explica a diversidade de respostas obtidas, como a de VIT ( fui tirando 4, 4 e 4) ou a de RAPH (Somando todas dá 20. Eu diminuí 20 menos 8, deu 12). Vê-se que RAPH usou a propriedade distributiva  $(2 \times 4) + (3 \times 4)$ , o que os autores concebem como uma adaptação de importância vital no desenvolvimento de procedimentos mais avançados do que a contagem, para encontrar produtos mais sofisticados. No entanto, Steffe e Cobb (1998) não deixam de frisar que esta propriedade é bastante difícil para as crianças, na medida em que requer uma reorganização que deve ser feita antes da multiplicação.

Na situação “Agora há 7 linhas de 3. Quantas linhas estão escondidas?”, a comutatividade também foi aplicada na adição, aparentemente de modo implícito, decorrente da experiência por PRIS e FIA (se aqui tem 4, eu vou contar 5, 6 e 7) e PROB ( 4 mais 3 é 7), por exemplo.

LUI, GIO, JONA, entre outros, depois de organizarem 5 linhas com 4 fichas em cada linha, responderam, de imediato, que havia 12 fichas nas três primeiras linhas. Eles uniram uma pluralidade de unidades compostas, formando uma unidade de unidades de unidades, envolvendo-se em refinados raciocínios parte-todo.

Também RAPH apresentou um raciocínio parte-todo elaborado ao chegar a 20 ( $5 \times 4$ ), diminuir 8 ( $2 \times 4$ ) e encontrar 12 ( $3 \times 4$ ).

Observou-se uma diminuição do uso intenso ou imperceptível dos dedos em favor das respostas imediatas, porque, do ponto de vista numérico, as propostas não apresentavam dificuldade.

A investigação do esquema de coordenação parte-todo prosseguiu com mais duas diferentes propostas.

Terceira proposta

A pesquisadora pega mais 8 fichas e pergunta: Quantas linhas mais posso fazer com estas fichas?

Quarta proposta

A pesquisadora pega 12 fichas e pergunta: E agora, quantas linhas mais?

Encontramos uma predominância de esquemas consolidados, com respostas imediatas, sem utilização dos dedos ou do material multiplicativo. É provável que se verifique essa predominância porque as fichas ficam à mostra, facilitando a resolução da situação.

Encontramos, também, esquemas iniciais, envolvendo a manipulação das fichas e, em menor número, esquemas intermediários, envolvendo o uso imperceptível dos dedos.

## ESQUEMAS INICIAIS

Uso das fichas

SER, da 3ª série, coloca os dedos das suas mãos sobre as fichas, formando 2 grupos de 4;

TAL, da 5ª série, conta as fichas, o dedo indicador batendo em cada uma delas;

RAPH, da 5ª série, conta as fichas, apontando com o indicador da mão direita;

CAMI e JON, da 3ª série; FAR, RAFA e PAUL, da 4ª série; GUST, TAL, FIA, da 5ª série, formam grupos com as fichas.

## ESQUEMAS INTERMEDIÁRIOS

Uso imperceptível dos lábios e dedos

PRIS, da 4ª série, e JOHN, da 5ª série, movem os lábios imperceptivelmente;

FAB, da 4ª série, e PROB, da 5ª série, movem os dedos imperceptivelmente.

## ESQUEMAS CONSOLIDADOS

Respostas imediatas

JULI, VANE, GUIL, JON, VIT, CINT, CARO, da 3ª série; FER, CLA, PAT, JEN, FAB, EDU, JESSI, PRIS, PAUL, da 4ª série; RAPH, ACAR, WAG, LUA, LUAN, VAN, FEL, LUI, JES, MARI, GIO, RAÍ, JONA, GUST, BRU, JUL, LGUS, VER, FLA, LAU, da 5ª série, dão respostas imediatas, sem utilização dos dedos ou do material manipulativo.

Exemplos:

**P: *Quantas linhas mais posso fazer com estas fichas?*** VANE, da 3ª série: *De 4?*  
**P: *Linhas de 4.*** VANE: *2.* **P: *Como pensaste?*** VANE mostra com as fichas: *Eu*

*pensei assim, ó, aqui dá 4, forma uma linha e ali dá 4, forma 2 linhas.* CARO, da 3ª série: *De 4?* P: *De 4.* CARO: 2. P: *Como pensaste?* CARO, apontando para as fichas: *Eu pensei aqui tem 4 e ali tem mais 4. Então são 2 linhas.* EDU, da 4ª série: 2. P: *Como pensaste?* EDU: *Olhando aqui (e aponta as fichas, assinalando 2 grupos de 4).* P: *Quantas linhas mais posso fazer com estas fichas?* PRIS: *Mais 2.* P: *Como pensaste?* PRIS: *Eu olhei bem para cá e eu vi que se eu contasse de 4 em 4 ia dar mais 2 linhas.* RAPH, da 5ª série: *Mais 2.* P: *Como pensaste?* RAPH: *Aqui tem 8. Tinha que fazer linhas de 4. Então dá 2.* LUA, da 5ª série: 2. P: *Como pensaste?* LUA: *Eu dividi as fichas em 2 grupos de 4.* FEL, da 5ª série: 2. P: *Como pensaste?* FEL: *Duas vezes 4.* MARI, da 5ª série: 2 P: *Como pensaste?* MARI: *Eu contei 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 (Mari aponta as fichas com o indicador).*

**P: E agora, quantas linhas mais?** CINT, da 3ª série: 3. P: *Como pensaste?* CINT separa as fichas em 3 grupos de 4. CLA, da 4ª série, olha, demoradamente: 3. P: *Como pensaste?* CLA: *Eu contei e dividi por 4.* LUI, da 5ª série: 3. P: *Como pensaste?* LUI: *Doze dividido por 4.* BRU, da 5ª série: 3. P: *Como pensaste?* BRU: *Tem 12 (e Bru forma 3 grupos de 4 fichas).*

## OUTRAS RESPOSTAS

Alguns alunos precisaram da intervenção da pesquisadora para compreender/ responder/ corrigir a situação formulada. São eles: SER, da 3ª série; RAFA e JESSI, da 4ª série; FIA, LUAN, JUL, LET, da 5ª série.

Exemplos:

**P: Quantas linhas mais posso fazer com estas fichas?** RAFA, da 4ª série: *Mais 1. (Separa 5) Aqui tem 4 e sobram estas 3.* P: *Vê bem como separaste 4.* RAFA: *Ah! Não. (desloca a ficha que estava a mais, formando 2 grupos de 4).* P: *Quantas linhas dá para formar?* RAFA: 2. JESSI, da 4ª série: *Mais 1.* P: *Linhas de 4.* JESSI: *Mais 2.* P: *Como pensaste?* JESSI forma 2 grupos de 4 fichas. FIA, da 5ª série: 3. P: *Mostrame como achaste 3 linhas.* FIA faz 2 linhas de 3 e sobram 2 fichas. Faz ar de dúvida, põe a mão na boca. Desloca as fichas e forma 2 grupos de 4. P: *Quantas linhas?* FIA: 2.

**P: E agora, quantas linhas mais?** SER, da 3ª série, forma 3 linhas de 4. Soma com as 5 linhas anteriormente feitas, apontando com o dedo médio da mão direita: 8. P: *Só com estas aqui (12) quantas linhas dá para fazer?* SER: 3. P: *E agora, quantas linhas mais?* LUAN, da 5ª série, olha, demoradamente: 4. P: *Quantas fichas têm em cada linha?* LUAN: 4. P: *Então quantas linhas posso fazer com estas fichas?* LUAN: 3. JUL, da 5ª série, conta, em voz baixa: *Tem 4.* P: *Quatro linhas mais?* JUL volta a

contar, sem tocar nas fichas: *Tem* 3. LET, da 5ª série, remexe as fichas: 4. P: São linhas de 4. LET move dedos e lábios imperceptivelmente: 3.

Apenas FELI, da 3ª série, não compreendeu/ interpretou a situação proposta.

Quanto às respostas às situações aqui apresentadas, houve uma predominância de respostas imediatas, com ou sem o apoio das fichas, que estavam à mostra.

Algumas crianças precisaram manipular as fichas para encontrar quantas linhas de 4 havia em 8 fichas. Outras, sem manipular, apoiaram sua resposta na visualização das fichas. Pode-se dizer que essas crianças estão começando a construir estruturas multiplicativas, ainda limitadas à natureza implícita da sua seqüência de números, na qual os elementos ainda não constituem uma unidade composta abstrata, ou seja, uma unidade iterável.

Outras respostas foram mais avançadas, envolvendo a divisão por quotas, como, por exemplo, as de CLA e MARI (eu contei e dividi por 4) ou a divisão partitiva de LUI, por exemplo ( eu dividi as fichas em 2 grupos de 4). Nesses casos, cada elemento da seqüência numérica é uma unidade composta abstrata. Na divisão por quotas, o 4 é uma unidade iterável e, para saber quantos 4 há em 12, a criança precisa fazer uma dupla contagem, pois, cada vez que conta 4 cria um item na subseqüência. Como já foi visto, trabalhando com unidades iteráveis, o aluno está utilizando uma seqüência numérica explícita. Nesse caso, o 4 pode ser “desencaixado” do 12, sem destruir o todo 12.

Enquanto algumas crianças trabalharam com unidades iteráveis, utilizando uma seqüência numérica explícita, outras necessitaram da intervenção da pesquisadora para compreender a situação, como SER ou FIA, por exemplo, que

não utilizaram adequadamente o material manipulativo disponível. Tais crianças podem estar defasadas sem, necessariamente, serem defasadas (RAMOZZI-CHIAROTTINO, 1988).

Sem dúvida, aqui estamos em presença de decalagens verticais, resultantes da discordância entre o real e o pensamento, ou seja, entre assimilação e acomodação. Decalagens verticais consistem na reconstrução de uma estrutura por meio de outras operações. Processos ou estruturas surgem em momentos distintos do desenvolvimento. É o que se observa em SER, da 3ª série, ou FIA, da 5ª série. Eles são capazes de fazer uma unidade composta  $x$  por  $n$  vezes, perceptivelmente, mas não desenvolveram a possibilidade de coordenar, simultaneamente, dois esquemas de contagem: a contagem por unidades e a contagem por uma unidade iterável.

É por isso que Montangero e Maurice-Naville (1998, p. 135) dizem que “a noção de decalagem vertical compreende a idéia de retardo temporal entre condutas” e “é em uma teoria do desenvolvimento que distingue diferentes planos hierárquicos de conhecimento que essa noção toma sentido”.

Cabe, aqui, o exemplo de Becker (2003, p.89 ): “Mesmo com acesso aos bens culturais e sem problemas hereditários, na falta da intermediação adequada da família e da escola, a criança poderá apresentar as mesmas decalagens que outra, desnutrida e sem acesso aos benefícios da cultura”.

A investigação do esquema de coordenação parte-todo finalizou com mais duas diferentes propostas.

Quinta proposta

Quantas linhas têm ao todo?

Sexta proposta

Quantas fichas têm ao todo?

Encontramos esquemas bastante iniciais, envolvendo o uso intenso dos dedos e/ou do material manipulativo. Também encontramos esquemas mais avançados, intermediários, envolvendo um menor uso do material manipulativo e uso imperceptível dos dedos. Por fim, encontramos esquemas consolidados, relativos a respostas imediatas, sem uso dos dedos e com um mínimo de uso do material manipulativo.

Predominaram os esquemas intermediários, com alguma utilização do material manipulativo, pelas próprias características da situação. No entanto, em todas as faixas etárias foram encontrados todos os tipos de esquemas

Como seria esperado, os esquemas iniciais predominaram entre as crianças de menos idade. Progressivamente, foram sendo verificados esquemas mais avançados entre as crianças maiores.

## ESQUEMAS INICIAIS

Uso intenso das fichas e/ou dos dedos

PAUL, da 4ª série, pega o grupo de 8 fichas e faz 2 linhas de 4 abaixo das 5 linhas iniciais. Depois pega o grupo de 12 fichas e faz mais 3 linhas acima das 7 já formadas. Conta linha por linha, apontando com o indicador da mão direita;

FIA, da 5ª série, conta as fichas uma a uma, tocando-as com o indicador da mão direita;



SER, da 3ª série, LUAN e PROB, da 5ª série, apontam linha por linha, com o indicador da mão direita;

CINT, da 3ª série, bate na mesa com o indicador, o médio, o anular e o mínimo da mão direita, por 10 vezes;

JULI, da 3ª série, e LET, da 5ª série, contam as fichas uma a uma.

## ESQUEMAS INTERMEDIÁRIOS

Uso superficial das fichas

CAMI, JULI e JON, da 3ª série, JOHN, RAPH e WAG, da 5ª série, somam 5 linhas mais 3 linhas, mais 2 linhas;

CAMI, da 3ª série, e JOHN, da 5ª série, apontam as 5 linhas de 4 fichas, as 3 linhas de 4 fichas e as 2 linhas de 4 fichas.

Exemplo:

**P: *Quantas fichas têm ao todo?*** JOHN, da 5ª série, apontando para o grupo de 20 fichas, para o grupo de 12 e para o grupo de 8 fichas: *40 fichas*. P: *Como pensaste?*  
JOHN: *Dez filas de 4 dá 40.*

RAFA e JEN, da 4ª série, LUI, MARI, JONA, GUST, TAL e LAU, da 5ª série, contam as linhas com leves movimentos de cabeça.

Exemplo:

**P: *Quantas linhas têm ao todo?*** LUI, da 5ª série, conta 5, com movimentos de cabeça, olha para as demais fichas e de imediato responde: *10*. P: *Como pensaste?*  
LUI: *Eu sabia quanta linha tinha aqui, aqui e aqui (apontando os grupos). Só somei.*

GUIL e VIT, da 3ª série; RAFA, JEN, JESSI e PRIS, da 4ª série; EDU, GUST, JUL, FEL, JES, PROB, GIO, da 5ª série, contam ficha por ficha, com leves movimentos de cabeça.

Exemplos:

**P: Quantas fichas têm ao todo?** LAU, da 5ª série, sem tocar, olha para as fichas, fazendo movimentos com a cabeça, visivelmente contando de 1 a 1: 40. P: *Como pensaste?* LAU: *Contei estas fichas ( as 5 linhas de 4). Depois contei estas. Ao todo deu 40.* GUST, da 5ª série, movimenta os lábios e a cabeça, contando de 1 em 1: 40. P: *Como é que pensaste?* GUST: *Fui contando de 4 em 4.*

GUIL, da 3ª série; FER, CLA, EDU e PRIS, da 4ª série; ACAR, FEL, JES, LET, LGUS e BRU, da 5ª série, deslocam o olhar pelos grupos de fichas.

Exemplos:

**P: Quantas linhas têm ao todo?** PRIS, da 4ª série, olha atentamente: 10. P: *Como pensaste?* PRIS: *Eu contei estas aqui (5 linhas). Aí eu fiz 4, 4 e 4 e contei 6, 7 e 8. (Separa as 8 fichas restantes em 2 grupos de 4 e conta: 9 e 10).* FEL, da 5ª série, olha para os grupos: 10. P: *Como pensaste?* FEL: *Eu fiz 2 mais 3, mais 5.*

CLA, PAT e FAB, da 4ª série, JONA e BRU, da 5ª série, deslocam o olhar, contando rapidamente as fichas.

Exemplos:

**P: Quantas fichas têm ao todo?** JONA, da 5ª série, desloca o olhar, contando ficha por ficha: 40. P: *Como pensaste?* JONA mostra com o dedo, apontando ficha por ficha. BRU, da 5ª série, percorre as fichas com os olhos: 40. P: *Como pensaste?* BRU: *Dez vezes 4 é 40.*

RAPH conta 20, 24, 28, 32, 36, 40.

## ESQUEMAS CONSOLIDADOS

### Respostas imediatas

JON, VANE e CARO, da 3ª série; FAB, JESSI, FER, EDU e PAUL, da 4ª série; LUA, RAÍ, VER, FLA, LGUS, VAN, MARI, ACAR, WAG, LUAN, da 5ª série, deram respostas imediatas, fazendo um mínimo uso das fichas.

### Exemplos:

**P: Quantas linhas têm ao todo?** VANE, da 3ª série: 10. P: *Como pensaste?* VANE: *Eu pensei que 2 mais 3 dá... 5, né? E depois mais 5 dá 10.* CARO, da 3ª série, põe a mão direita na boca e olha para as fichas: 10. P: *Como pensaste?* CARO: *Aqui tinha 5, ali 3 e aqui 2* (apontando para os grupos de fichas).

**P: Quantas fichas têm ao todo?** JON, da 3ª série: 40. P: *Como pensaste?* JON: *Aqui tem 10* (mostrando as linhas). *Dez vezes 4 é 40.* PAUL, da 4ª série: 40. P: *Como pensaste?* PAUL: *É 10 vezes 4.* FLA, da 5ª série: 40. P: *Como pensaste?* FLA faz ar de dúvida. P: *Está certo. Como pensaste?* FLA: *Dez vezes 4.* LGUS: 40. P: *Como pensaste?* LGUS: *Contando.* P: *Contaste uma a uma?* LGUS: *Não. Aqui tem 20, aqui tem 28* (apontando para o grupo de 8), *aqui tem 40* (apontando para o grupo de 12). MARI, da 5ª série: 40. P: *Como pensaste?* MARI: *Aqui eu contei 3 vezes 4, aqui eu contei 1 vez 8 e aqui eu contei 5 vezes 4. Aqui dá 20* (apontando para os grupos de 12 e 8 fichas) e *aqui dá 20* (apontando para 5 vezes 4).

## OUTRAS RESPOSTAS

Alguns alunos precisaram da intervenção da pesquisadora para compreender/ responder/ corrigir a situação formulada. São eles: VIT e VANE, da 3ª série; PAT, da 4ª série; LUAN, VAN, GIO, JUL, RAÍ, VER, LUI, da 5ª série.

### Exemplos:

**P: Quantas linhas têm ao todo?** VIT, da 3ª série: percorre as fichas com o olhar, balançando a cabeça: 11. P: *Como contaste 11?* VIT conta 5 linhas. Depois separa 12 fichas em 3 grupos de 4 e diz: 8. Separa as 8 fichas restantes em 2 grupo de 4 e diz: 10. PAT, da 4ª série, desloca o olhar pelos grupos de fichas: 11. P: *Como contaste 11?* PAT: *Essas são 4* (apontando para as 5

linhas de 4. Começa a remexer as fichas, em silêncio). P: *Quantas linhas têm aqui?* (apontando para as 5 linhas de 4) PAT: 5. P: *Aqui?* (apontando para o grupo de 8 fichas)

PAT: 2. P: *E aqui?* (apontando para o grupo de 12 fichas) PAT: 3. P: *Então, quantas linhas têm?* PAT: *Oito, não* 9. LUAN, da 5ª série: 11. P: *Mostra-me como contaste as linhas.* LUAN aponta com o indicador: *Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito* (faz uma parada), *nove e dez.* VAN, da 5ª série, olha para o grupo de 8, para o grupo de 12 e depois para as 5 linhas: 12. P: *Como é que contaste 12?* VAN aponta para o grupo de 8 fichas. *Aqui são 2.* Apontando para o grupo de 12 fichas diz: *Aqui são 4. Não, não está certo.* E recomeça. Aponta para o grupo de 5 linhas. *Aqui são 5. Aponta para o grupo de 12. Mais 4 são 9.* Aponta para o grupo de 8. *Aqui são 3, não é?* P: *Aqui tem 12 fichas. Quantas linhas dá para fazer?* VAN: 3. P: *Aqui tem 8. Quantas linhas?* VAN, rindo: 2. Aponta as linhas com o indicador da mão direita: 10. GIO, da 5ª série: *Tem 5* (apontando as 5 linhas de 4)... 8 (apontando as 12 fichas)... 11 (apontando as 8 fichas).

P: *Quantas contaste aqui?* GIO: 2, *ah, não, espera aí, 5 mais 2 é 7, mais estas é 8, 9, 10.* JUL, da 5ª série: *Bah!* (começa a contar ficha por ficha, balançando a cabeça) 40. P: *Eu perguntei quantas linhas têm ao todo.* JUL: *Ah! Quantas linhas.* (Conta, balançando a cabeça) 1, 2, 3, 4, 5... 1, 2, 3... 1, 2... 10.

**P: Quantas fichas têm ao todo?** VANE, da 3ª série: 10. P: *Como pensaste?* VANE, apontando as linhas, vai contando 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. P: *Tu contaste as linhas, mas não as fichas. Quantas fichas têm ao todo?* VANE move a cabeça, conta uma a uma: 40. RAÍ, da 5ª série, olha ficha por ficha, fazendo contagem uma a uma: 37? 38? *É alguma coisa assim.* P: *Tu estás contando?* RAÍ: *Contei.* P: *Como é que estás contando?* RAÍ: *Contando* (e aponta as fichas). P: *Uma a uma?* RAÍ: *É. Está certo?* P: *Não.* RAÍ conta novamente: 39. VER, da 5ª série, conta as fichas e conta nos dedos: 47.

P: *Como pensaste?* VER mostra as 5 linhas de 4: *Aqui tem 27, aqui 12, aqui 8.*

P: *Aqui tem 27?* VER: *Não, “perai”, 5 vezes 4 é 20.* P: *Então, quantas fichas têm?*

VER conta uma a uma, a partir de 20: 21, 22, 23, 24,...40. LUI, da 5ª série, conta uma a uma, movendo os lábios e balançando a cabeça: 44? *Aqui tem 20, aqui 8, são 28, 3 vezes 4 é 12, 28 mais 10, sobe 1...* (“escrevendo” na classe com o dedo) É 30. P: *Mas se já tinhas 28.* LUI conta 28 mais 12, com os dedos da mão direita tocando o polegar. Rindo diz: 40.

FELI, da 3ª série, e FIA, da 5ª série, não compreenderam/ interpretaram a proposta.

Exemplos:

**P: Quantas linhas têm ao todo?** FELI, da 3ª série: 40. P: *Como pensaste?* FELI, referindo-se a uma atividade anterior: *A senhora disse antes que tudo aqui era 40* (Feli deixa claro que não sabe o que são as linhas). FIA, da 5ª série, olha para as fichas: 18. P: *Como contaste?* FIA: *Contei por filas...2...4... É, contei por filas* (parece que ainda há confusão entre fichas e linhas).

Para encontrar o número de linhas ou o número de fichas, assim como em outras situações, várias crianças usaram diferentes processos de contagem um a um. Utilizaram os dedos, as fichas, acompanharam a contagem com movimentos de cabeça. Como já foi apontado, segundo Steffe e Cobb (1998), a primeira resposta da criança diante de problemas matemáticos é contar. No entender de Olive (2001), a contagem é a atividade básica que leva à construção das seqüências numéricas, as mais fundamentais estruturas matemáticas que a criança desenvolve cedo na vida. Entretanto, assim como não é indicado impor o algoritmo-padrão (STEFFE; COBB, 1998), também não é o caso de deixar a criança permanecer como uma “contadora”. Como já foi destacado, para alunos de 3ª a 5ª série, a contagem um a um é ineficaz. Trata-se de um recurso ineficiente para a resolução de situações mais abstratas, como as envolvidas na divisão, nas frações ou nas medidas, por exemplo.

Vale lembrar que os esquemas de contagem das crianças não devem permanecer estáticos e, sim, progredir através do desenvolvimento. Esse progresso é atingido quando a criança é confrontada com problemas que a desafiem e a façam utilizar seus recursos lógicos. Quando RAPH, da 5ª série, contou de 4 em 4 (20, 24, 28, 32, 36, 40), indicou que superou a contagem um a um e usou um esquema de contagem mais refinado, assimilado à unidade 4.

As crianças que contaram um a um, apontando com o dedo as fichas a serem contadas, utilizaram um procedimento próprio da seqüência numérica inicial, no qual os itens a serem contados precisam ser visualizados.

LGUS, da 5ª série, contou 20 (+8), 28, (+12), 40, demonstrando que já adquiriu uma seqüência numérica implícita, com itens contáveis abstratos, no qual os resultados interiorizados da contagem formavam uma unidade composta. Por outro lado, várias crianças, como JON, da 3ª série; PAUL, da 4ª série; e FLA, da 5ª

série, deram respostas imediatas – 10 vezes 4 é 40 – sem qualquer contagem. Elas têm seqüências numéricas explícitas e operam com mais de uma unidade composta.

#### 7.4.2 Esquemas Reversíveis de Coordenação de Unidades

Os esquemas reversíveis de coordenação de unidades foram investigados a partir das seguintes propostas:

Primeira proposta

Quantas linhas de 3 fichas podem-se fazer com 12 fichas?

Segunda proposta

A pesquisadora coloca 27 fichas num recipiente e pergunta: Quantas linhas de 3 estão aqui dentro se têm, ao todo, 27 fichas?

Encontramos esquemas iniciais, envolvendo o uso intenso dos dedos. Entre esses esquemas observamos alunos que faziam a contagem dos grupos de 3, sem controle dos grupos equivalentes, e alunos que faziam a contagem controlando os grupos equivalentes.

Verificamos, também, esquemas mais avançados, intermediários, envolvendo movimentos de cabeça e movimentos imperceptíveis de dedos.

Por fim, encontramos esquemas consolidados, envolvendo respostas imediatas, principalmente entre as crianças maiores. Em todas as faixas etárias foram encontrados todos os tipos de esquemas.

Vários alunos, principalmente entre os menores, apresentaram respostas inconsistentes como se podem ver nos exemplos

**P: Quantas linhas de 3 fichas podem-se fazer com 12 fichas?** CAMI, da 3ª série, une o polegar ao mínimo e mostra os 3 dedos restantes. Ri: *Não sei como fazer o cálculo.* JULI, da 3ª série, fica em silêncio, faz imperceptíveis movimentos com os dedos: 36. P: *Como pensaste?* JULI: *Doze vezes 3.* VANE, da 3ª série: 10. P: *Como pensaste?* VANE: *Eu? Eu “chutei”.* FELI, da 3ª série põe a mão na boca: *Como é mesmo?* P: *Quantas linhas de 3 fichas pode-se fazer com 12 fichas?* FELI não responde, sacode os ombros. CINT, da 3ª série: *Como assim?* P: *Se eu quiser fazer linhas de 3, quantas linhas posso fazer com 12 fichas?* CINT: 6. P: *Como pensaste?* CINT: *Na cabeça.*

**P: Quantas linhas de 3 estão aqui dentro se têm, ao todo, 27 fichas?** GUIL, da 3ª série: 2. P: *Como pensaste?* GUIL: *Na cabeça.* VIT, da 3ª série: 12. P: *Como pensaste?* VIT: *na cabeça.* FAB, da 4ª série põe a mão na boca: *Tem 27?* P: 27 fichas. FAB coloca 2 e depois 3 dedos sobre a mesa. P: *Como é que tu estás pensando?* FAB: *Eu estou tentando fazer a conta de divisão. Não estou conseguindo.* JESSI, da 4ª série, esfrega as mãos: 18 e sobra 1. P: *Como pensaste?* JESSI: *Dividindo 18 por 3.* JONA, da 5ª série, faz movimentos imperceptíveis com os dedos: 7. P: *Como chegaste em 7?* JONA: *27 dividido por 3.* P: *Como fizeste para achar o resultado de 27 dividido por 3?* JONA: *Somando.* FLA, da 5ª série: *Quantas têm aqui?* P: 27. FLA: 5. P: *Como pensaste?* FLA: *Quatro deu 24, 24 mais 3 é 25.*

## ESQUEMAS INICIAIS

Uso intenso dos dedos

Sem controle dos grupos equivalentes

SER, VIT, JON, da 3ª série; FER, PAT, EDU, da 4ª série; LGUS, da 5ª série, contam de 3 em 3, sem controlar o número de vezes em que contam os grupos equivalentes, chegando a respostas incorretas.

Exemplos:

**P: Quantas linhas de 3 estão aqui dentro se têm, ao todo, 27 fichas?** SER, da 3ª série, com a mão direita segura os dedos indicador, médio e anular da mão esquerda. Depois inverte as mãos, sempre tomando os dedos de 3 em 3, sem controlar quantos movimentos faz: 15. PAT, da 4ª série. remexe com os dedos e balbucia: 27...P: *Como tu estás pensando?* PAT: *Eu estou pensando...estou indo de 3 em 3.* P: *Tu vais de 3 em 3 até quanto?* PAT: *Até 27.* P: *E não estás conseguindo?*

PAT: *Não, eu me atrapalho.* EDU, da 4ª série, move o polegar, o indicador e o médio: 11? P: *Como pensaste?* EDU: *12 dá para fazer 4. Daí eu fiz mais 3 linhas...*

Com controle dos grupos equivalentes

CARO, da 3ª série, separa 3 dedos da mão esquerda com a mão direita e depois separa 3 dedos da mão direita com a mão esquerda;

VER, da 5ª série, toca o indicador da mão esquerda no indicador, médio e anular da mão direita, enquanto conta 1, 2, 3...1, 2, 3,... 1, 2, 3,... 1, 2, 3;

VER, da 5ª série, toca o polegar no indicador, médio e anular da mão direita. Na mão esquerda, os dedos se flexionam a cada contagem de 3;

FIA, da 5ª série, com os dedos da mão direita, toca repetidamente os dedos mínimo, anular e médio da mão esquerda;

JEN, da 4ª série, e FIA, da 5ª série, batem com o indicador na mesa, contando de 3 em 3;

RAFA, da 4ª série, FLA e LAU, da 5ª série, batem 4 vezes na mesa com o mínimo, o anular e o médio da mão direita;

JEN, da 4ª série, bate na mesa com o polegar, o indicador e o médio;

TAL, da 5ª série, desloca o polegar, o indicador e o médio, enquanto conta 1, 2, 3... 4, 5, 6... 7, 8, 9...10, 11, 12;

PRIS, da 4ª série, levanta 3 dedos, começando pelo mínimo da mão direita e pelo mínimo da mão esquerda;

JON, da 3ª série, e PRIS, da 4ª série, levantam o indicador, o médio e o anular;

EDU, da 4ª série, move o polegar, o indicador e o médio.



## ESQUEMAS INTERMEDIÁRIOS

### Movimentos imperceptíveis de cabeça e dedos

JUL, da 5ª série, movimenta a cabeça, enquanto conta;

GUIL e JULI, da 3ª série; FAB e CLA, da 4ª série; VAN, FAL, JES, PROB, RAÍ, JONA, LGUS, da 5ª série, movimentam imperceptivelmente os dedos.

## ESQUEMAS CONSOLIDADOS

### Respostas imediatas

CINT, da 3ª série; FER, RAFA, CLA e PAUL, da 4ª série; JOHN, RAPH, ACAR, WAG, LUA, LUAN, VAN, FEL, LUI, MARI, PROB, GIO, RAÍ, GUST, BRU, LET e LAU, da 5ª série, dão respostas imediatas, sem utilização dos dedos.

### Exemplos:

**P: Quantas linhas de 3 fichas podem-se fazer com 12 fichas?** PAUL, da 4ª série: 4. P: *Como pensaste?* PAUL: *Eu dividi 12 por 3.* ACAR, da 5ª série: 4. P: *Como pensaste?* ACAR: *Três vezes 4.*

**P: Quantas linhas de 3 estão aqui dentro se têm, ao todo, 27 fichas?** JOHN, da 5ª série: 9. P: *Como contaste?* JOHN: *Porque 3 vezes o 9 dá 27.* RAPH, da 5ª série: 9. P: *Como pensaste?* RAPH: *É assim, 27 dividido por 3 dá 9.* P: *Quantas linhas de 3 estão aqui dentro se têm, ao todo, 27 fichas?* LUA, da 5ª série: 9. P: *Como pensaste?* LUA: *Três dividido por 9, não, 27 dividido por 3 dá 9.* P: *Quantas linhas de 3 estão aqui dentro se têm, ao todo, 27 fichas?* FEL, da 5ª série: 9. P: *Como pensaste?* FEL: *Somando... fazendo 3 vezes 9.* MARI, da 5ª série: 9. P: *Como pensaste?* MARI: *Dividindo.* (Ri, passa o dedo na mesa, “escrevendo”) 27 por 3 dá 9.

## OUTRAS RESPOSTAS

CAMI, da 3ª série, TAL e JUL, da 5ª série, necessitaram da intervenção da pesquisadora para compreender/ responder/ corrigir as situações formuladas.

Exemplos:

**P: Quantas linhas de 3 estão aqui dentro se têm, ao todo, 27 fichas?** CAMI, da 3ª série: *Três mais 3 é 6... 7, 8, 9* (com a mão direita CAMI bate nos dedos da mão esquerda. CAMI ri e recomeça) *3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30*. P: *Então, quantas linhas deu?* CAMI: *Não sei* (e começa a rir). *São 10 linhas?* P: *São 27 fichas*. CAMI: *Tá, 27*. (Novamente batendo com os 3 dedos da mão direita em 3 dedos da mão esquerda) *3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30*. P: *São 27 fichas e não 30*. CAMI: *Dá para fazer 9*. TAL, da 5ª série, começa imaginando linhas de 3, deslocando o polegar, o indicador e o médio pela mesa. Confunde-se, suspira. Começa a contar nos dedos, de 3 em 3, os dedos da mão direita segurando os dedos da esquerda, de 3 em 3. Murmura *1, 2, 3, ... 4, 5, 6 ... 7, 8, 9*... Novamente atrapalha-se. Não consegue controlar quantas vezes já contou 3. Recomeça várias vezes: *Ai, meu Deus do céu!* P: *Como estás fazendo?* TAL: *Eu estou contando, só que quando eu conto eu me esqueço quantas linhas já contei*. P: *Até onde tu tens certeza que já fizeste?* TAL: *Até...* P: *Até 9, quantas linhas são?* TAL: *3*. *Mais uma, 12*. P: *Quantas linhas são?* TAL: *4...* *13, 14, 15*. P: *Quantas linhas são?* TAL: *5...* *16, 17, 18*. P: *Quantas linhas são?* TAL: *6...* *19, 20, 21 são 7, depois 22, 23, 24 são 8...* *9 linhas*. JUL, da 5ª série, baixa a cabeça: *27 fichas? "Peraí"* (baixa a cabeça, novamente) *Ah! Não sei...* (põe a mão na boca, rói uma unha). *Tem que dividir, não é? Posso fazer com as fichas?* P: *Pode*. JUL: *Que vergonha! Ai, como é que é* ( pega algumas fichas, faz 2 grupos de 3 fichas). P: *Tu podes multiplicar?* JUL: *Nove vezes 3 é 27*. P: *E 27 dividido por 3?* JUL: *Não sei*. P: *Então faz com as fichas*. JUL faz 3 linhas de 3 e pára. P: *Quanto já tens até aqui?* JUL conta de 1 em 1, apontando ficha por ficha, até 9 e não sabe como continuar. P: *Como podes continuar?* JUL: *Vou colocando de 3 em 3 até chegar no 27*. JUL faz 10 linhas e depois conta, linha por linha: *10*. P: *Tens aí 30 fichas*. JUL tira uma linha e conta, linha por linha: *9*.

As situações aqui apresentadas implicam a reversibilidade entre multiplicação e divisão. As crianças que deram respostas imediatas utilizaram tanto um procedimento multiplicativo como divisional.

Várias crianças da 5ª série utilizaram conscientemente essa reversibilidade, reconhecendo a situação de divisão. Por exemplo, PAUL, da 4ª série disse: "Eu dividi 12 por 3". RAPH, da 5ª série, disse: "27 dividido por 3 dá 9".

A maior parte dos alunos de 5ª série deu respostas imediatas. Os que não reconheceram, de forma consciente, a reversibilidade entre multiplicação e divisão, usaram a multiplicação, chegando à resposta correta. Esse foi o caso de JOHN, da 5ª série, que disse: 3 vezes o 9 dá 27, e ACAR, também da 5ª série, que respondeu “3 vezes o 4”, quando interrogada sobre quantas linhas de 3 podem-se fazer com 12 fichas.

Segundo Steffe e Cobb (1998), o princípio da reversibilidade se desenvolve de modo intuitivo, como resultado da experiência. Os autores consideram que a reversibilidade da contagem tem importantes implicações na resolução de problemas da criança. Seus achados indicam que as crianças, inicialmente, contam para a frente, quando usam seus esquemas iterativos, mas que elas podem inverter a direção da contagem quando surge a necessidade. Foi o que fez CAMI, da 3ª série. Ela contou 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 e respondeu “pode-se fazer 10 linhas. A pesquisadora, então, lhe disse: “São 27 fichas e não 30”. CAMI corrigiu-se: “Dá para fazer 9 linhas”. CAMI controlou que fez 10 iterações de 3 para chegar no 30. Tratando-se de 27, voltou para trás uma iteração de 3.

A reversibilidade dá flexibilidade aos esquemas iterativos. A falta de qualquer noção, mesmo implícita, de reversibilidade, torna os esquemas rígidos. Esse é o caso de JUL, da 5ª série, que sabe que 9 vezes 3 é 27, mas não sabe quanto é 27 dividido por 3.

Outro aspecto a ser aqui analisado se refere ao controle das iterações de 3. Tal como aconteceu nos esquemas pré-multiplicativos, também aqui, no esquema reversível, o controle das iterações de 3 foi fundamental.

Algumas crianças sabiam que deviam iterar 3, mas não controlavam onde parar de contar, ou perdiam-se na contagem, não conseguindo controlar as

iterações de 3. Por exemplo, PAT, da 4ª série, confessou: “Eu me atrapalho”. TAL e JUL, da 5ª série, necessitaram da intervenção da pesquisadora para controlar o número de iterações de 3.

Como já foi assinalado, as crianças que fazem as iterações sem controlar quantas vezes estão iterando apresentam um subesquema. O esquema completo implica a iteração – um subesquema – e no controle das mesmas – outro subesquema.

Os alunos que não controlavam as iterações, mesmo usando intensamente os dedos, não chegaram a respostas corretas. SER, por exemplo, com a mão direita segura os dedos indicador, médio e anular da mão esquerda. Depois inverte as mãos, pegando sempre os dedos de 3 em 3. Sem controlar os movimentos que faz, chega à resposta 15.

Controlando o número de iterações, o uso intenso dos dedos não impede a criança de chegar à resposta correta. É o que aconteceu com VER, da 5ª série, que tocava o polegar no indicador, no médio e no anular da mão direita, e na mão esquerda, os dedos se flexionavam a cada contagem de 3.

Assim como Johana, conforme o relato de Steffe (apud OLIVE, 2001), também VER resolveu problemas de contagem com unidades de 3, controlando o número de unidades compostas de 3, à medida que contava, coordenando uma dupla contagem de dois tipos diferentes de unidades. Na visão de Steffe, é possível essa aplicação recursiva do esquema de coordenação de unidades porque os elementos da sua seqüência numérica implícita foram se re-interiorizando, promovendo-lhe dois níveis de unidades abstratas – itens unitários e unidades compostas – como material para operar. Essas unidades compostas iteráveis são o cerne da multiplicação.

### 7.4.3 Esquema Iterativo de Multiplicação

Por último, foi investigado o esquema iterativo de multiplicação.

Sem nenhum material, a pesquisadora inicia: 1 é 3, 2 é 6, 3 é...?

A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6...

Encontramos esquemas iniciais, nos quais os alunos percebem, mas não dão prosseguimento à iteração de 3.

Encontramos, também, esquemas mais avançados, intermediários, de dois tipos. No primeiro tipo, os alunos percebem e dão prosseguimento à iteração de 3, contando de 3 em 3. No segundo, os alunos percebem e dão prosseguimento à iteração de 3, com a intervenção da pesquisadora, com ou sem contagem.

Por fim, observamos esquemas consolidados, nos quais os alunos percebem e dão prosseguimento à iteração de 3, sem contagem ou intervenção.

Constatamos a predominância dos esquemas iniciais.

Alguns alunos, principalmente de 3ª série, não perceberam e não deram prosseguimento à iteração de 3.

#### ESQUEMAS INICIAIS

Percepção do intervalo proposto e não prosseguimento da iteração de 3.

VANE, GUIL, CINT, da 3ª série; FER, RAFA, PAT, FAB, EDU, JESSI, da 4ª série; PROB, RAÍ, JONA, BRU, FLA, LAU, da 5ª série, perceberam, mas não deram prosseguimento à iteração de 3.

Exemplos:

**P: 1 é 3, 2 é 6, 3 é...?** VANE, da 3ª série: 7. P: *1 vale 3, 2 vale 6, 3 vale...?* VANE: 9. P: *4 vale...?* VANE: 13 A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6... VANE: 18...24...29...37. GUIL, da 3ª série: 9. P: *4 é...?* GUIL: 12 A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6... GUIL: 15. P: *O que é 15?* GUIL: 4, não, 5. P: *Depois...?* GUIL: 18 é 6, 21 é 7, 28...34...37. FER, da 4ª série, não responde. P: *1 vale 3, 2 vale 6, 3 vale...?* FER: 9. P: *4...?* FER: 12. A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6...FER: *5 vale 18, 6 vale 20, 7 vale 24, 8 vale 30, 9 vale 33, 10 vale 36.* RAFA, da 4ª série: *Como?* P: *1 vale 3, 2 vale 6, 3 vale...?* RAFA: 9. P: *4 vale?* RAFA: 12. A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6...RAFA: *5 vale 15, 6 vale 18...(Rafa recomeça) 1 vale 3, 2 vale 6, 3 vale 12, não, 9, 4 vale 12, 5 vale 15, 6 vale 18,20,21, 9 vale 24, 10 vale 27.* FAB, da 4ª série: *Como?* P: *1 vale 3, 2 vale 6, 3 vale...?* FAB: 9? A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6...FAB: *4 é 13, 5 é 13, 6 é 19, 7 é 25...RAÍ, da 5ª série: Como é?* P: *1 vale 3, 2 vale 6, 3 vale...?* RAÍ: *Não entendi.* P: *Faz de conta que eu estou falando de linhas: 1 vale 3, 2 vale 6, 3 vale...?* RAÍ: 9. P: *4 é...?* RAÍ: 12 A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6... RAÍ: *5 é 17, 6 é 20. Ai! Não sei, não estou conseguindo...*JONA, da 5ª série, ri: *Não entendi.* P: *1 vale 3, 2 vale 6, 3 vale...?* JONA: 9. A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6... JONA ri. P: *4 vale...?* JONA: 12. P: *Agora vai indo, 5, 6, 7...* JONA: *O 5 vale 17, não, 16, o 6 vale 19, o 7 vale...25, o 8 vale...32, o 9 vale...38.*

## ESQUEMAS INTERMEDIÁRIOS

Percepção e prosseguimento da iteração de 3, contando de 3 em 3

PRIS, da 4ª série, FIA, GUST, TAL, MARI, da 5ª série, perceberam e deram prosseguimento à iteração de 3, contando de 3 em 3.

Exemplos:

**P: 1 é 3, 2 é 6, 3 é...?** PRIS, da 4ª série, fica em silêncio. P: *1 vale 3, 2 vale 6, 3 vale...?* PRIS abre e fecha os dedos da mão esquerda: 9. P: *4 vale?* PRIS: 12. A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6... PRIS: 15. P: *O que é que vale 15?* PRIS: 5... *mais 3...*(Pris fica em silêncio, parece que se perdeu). P: *Quanto vale 6?* PRIS: 18... *7 vale* (bate na mesa com o mínimo, o anular e o médio) *21... 8 vale* (bate na mesa com o mesmo padrão de dedos) *24...9 vale* (bate na mesa com o mesmo padrão de dedos) *27, 10 vale* (o mesmo padrão de dedos)... 30. GUST, da 5ª série: 9. A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6... GUST continua, lentamente, contando de 3 em 3, com movimentos do corpo: *4 é...12, 5 é...15, 6 é...18, 7 é...21, 8 é...24, 9 é...27, 10 é...30.* TAL, da 5ª série: 9. A pesquisadora

convida o aluno a continuar: 4, 5, 6... TAL: 10, 11, 12, o 12 é 4, o 5 é 15, o 6 é 18, 7 é...21, 21, 22, 23, 24, 24 é 8, 25, 26, 27 é...9, 28, 29, 30 é 10.

Percepção e prosseguimento da iteração de 3, com a intervenção da pesquisadora

JEN e PAUL, da 4ª série, JUL, LET, JES, LUI e FEL, da 5ª série, perceberam e deram prosseguimento à iteração de 3, com a intervenção da pesquisadora.

Exemplos:

**P: 1 é 3, 2 é 6, 3 é...?** JUL, da 5ª série: *1 é quanto?* P: *1 vale 3, 2 vale 6, 3 vale...?* JUL pensa, demoradamente: *Não sei.* P: *Se tu tens 1 valendo 3, 2 valendo 6, qual é a lei? Quanto está sempre aumentando?* JUL: *Ah! 9.* A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6. JUL: *4 vale 12, 5 vale 15, 6 vale 18, 7 vale 21, 8 vale 24, 9 vale 27, 10 vale 30, 11 vale 33.* LET, da 5ª série, ri, hesita: 9. P: *4 é...?* LET esfrega as mãos: 18. P: *3 é 9... 4 é...?* LET hesita, esfrega as mãos: 12. A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6... LET: *Depois é 15, depois é 18, depois é 21, depois é 24, depois é 27, depois é 30.* JES: *Pode repetir?* P: *1 é 3, 2 é 6, 3 vai ser...?* JES: *Não entendi.* P: *Se 1 vale 3, 2 vale 6, 3 vai valer...?* JES: 9. A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6... JES, lentamente: *4 vai valer 12, 5 vai valer 15, 6 vai valer 18, 7 vai valer 21, 8 vai valer 24, 9 vai valer 27, 10 vai valer 30.* LUI, da 5ª série: *Ah?* P: *1 vale 3, 2 vale 6, 3 vale...?* LUI: *Não entendi.* P: *1 corresponde a 3, 2 corresponde a 6, 3 corresponde a ...?* LUI: 9. A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6... LUI, rapidamente: *4 corresponde a 12, 5 a 15, 6 a 18, 7 a 21, 8 a 24, 9 a 27, 10 a 30.*

## ESQUEMAS CONSOLIDADOS

Respostas imediatas, com percepção e prosseguimento da iteração de 3

CAMI e JULI, da 3ª série; CLA, da 4ª série; JOHN, RAPH, ACAR, WAG, LUA, LUAN, VAN, GIO, da 5ª série, imediatamente perceberam e deram prosseguimento à iteração de 3.

Exemplos:

**P: 1 é 3, 2 é 6, 3 é...?** CLA, da 4ª série: 9. P: *4 é...?* CLA: 12. A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6... CLA: *5 é 15, 6 é 18, 7 é 21, 8 é 24, 9 é 27, 10*

é 30. JOHN, da 5ª série: 9 A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6... JOHN: 4 é 12, 5 é 15, 6 é 18, 7 é 21, 8 é 24, 9 é 27, 10 é 30. WAG, da 5ª série: 9. A pesquisadora convida o aluno a continuar: 4, 5, 6... WAG: 4 é 12, 5 é 15, 6 é 18, 7 é 21, 8 é 24, 9 é 27, 10 é 30.

## OUTRAS RESPOSTAS

Alguns alunos, em especial da 3ª série, não perceberam e não deram prosseguimento à iteração de 3. São eles: SER, FELI, JON, VIT, CARO, da 3ª série, LGUS e VER, da 5ª série.

Exemplos:

**P: 1 é 3, 2 é 6, 3 é...?** JON, da 3ª série: *Como é mesmo?* P: *1 vale 3, 2 vale 6, 3 vale...?*

JON: 4. P: *5 vale...?* JON: *Como assim, eu não entendi.* P: *1 corresponde a 3, 2 corresponde a 6, 3 corresponde a ...?* JON: 4. P: *5 corresponde a ...?* JON: 6 VIT, da 3ª série: 6. P: *1 vale 3, 2 vale 6, 3 vale...?* VIT: 7. P: *1 corresponde a 3, 2 corresponde a 6, 3 corresponde a ...?* VIT: *Não sei.* CARO, da 3ª série : 1? P: *1 vale 3, 2 vale 6, 3 vale...?*

CARO: 15. LGUS, da 5ª série: 1. P: *1 vale 3, 2 vale 6, 3 vale...?* LGUS: 5, não, 3 vale 3.

VER, da 5ª série: *Hein?* P: *1 vale 3, 2 vale 6, 3 vale...?* VER: *Não entendi nada.* P: *Para 1 tens 3, para 2 tens 6, para 3 tens?* VER: *Não sei.*

A proposta de esquema iterativo de multiplicação não traz nenhuma sugestão de contagem. Não há disposição de fichas nem sugestões verbais como nas situações anteriores e a iteração de 3 é sugerida de forma totalmente abstrata.

Alguns alunos nem sequer perceberam que a proposta implicava a iteração de 3. Vários perceberam, mas não conseguiram dar prosseguimento à iteração por não utilizarem corretamente a contagem de 3 em 3. Outros deram prosseguimento à iteração, contando de 3 em 3, por si sós ou com a intervenção da pesquisadora. Este é o caso de TAL, que dizia: 10, 11, 12, o 12 é 4... 7 é 21, 22, 23, 24, 24 é 8, 25,



26, 27 é 9, 28, 29, 30 é 10. TAL demonstrou ter desenvolvido unidades compostas abstratas. O seu nível de interiorização estava acima de unidade composta experiencial, graças à representação e à possibilidade de dispensar o material manipulativo.

Foram poucos os alunos que deram respostas imediatas, com percepção e prosseguimento da iteração de 3, sem contagem de um a um. De acordo com a concepção de von Glasersfeld (apud STEFFE; COBB, 1998), pode-se dizer que esses alunos desenvolveram verdadeiros conceitos multiplicativos, ou seja, construtos suficientemente estáveis para serem representados na ausência de qualquer recurso perceptivo.

Também pode-se dizer que apresentaram uma seqüência numérica generalizada, re-interiorizando a seqüência numérica explícita, que simboliza as operações envolvidas na multiplicação e de onde surgem expressões como “4 vezes o 3”. Crianças com uma seqüência numérica explícita podem combinar 6 grupos de 5 como uma coleção de 6 itens, cada um dos quais é um 5. Podem, ainda, desmembrar cada 5 para chegar ao resultado 30. Elas podem produzir unidades de unidades. Porém, não podem, ainda, simbolizá-las. Isso só vai acontecer quando estiverem de posse de uma seqüência numérica generalizada.

PAUL, JES, LET, entre outros, resolveram a situação proposta mediante a intervenção da pesquisadora. Isso prova que os conceitos multiplicativos estão em contínua evolução, que sua formação se caracteriza por elaborações e reorganizações resultantes de progressivas acomodações.

Os esquemas desenvolvidos por CAMI, CLA, JOHN, entre outros, são flexíveis e reversíveis, na medida em que contaram por 3, como podiam ter contado por qualquer outra unidade composta.

A esse respeito, Steffe e Cobb (1998) sublinham que os conceitos não são simplesmente abstraídos das situações experimentais. Um novo conceito ultrapassa as atividades que serviram na sua implementação. Os conceitos multiplicativos e divisionais estão em contínua evolução, por meio de reorganizações resultantes de acomodações que ocorrem na utilização dos esquemas.

É provável que as crianças até então não tivessem sido confrontadas com a utilização de conceitos tão abstratos, tendo que isolar a unidade iterável da sua qualidade composta. Entretanto, algumas delas reorganizaram seus esquemas, apresentando uma evolução nos seus conceitos multiplicativos.

Nem todas as crianças dispunham de unidades iteráveis assim abstratas. Muitas utilizaram a contagem. Nem por isso pode-se dizer que não dispunham de esquemas multiplicativos: elas conceberam a situação na qual um esquema multiplicativo deveria ser usado, executaram o procedimento de multiplicação – a iteração de 3 – e apresentaram os resultados (STEFFE; COBB, 1998).

## 7.5 ANÁLISE GERAL DOS ESQUEMAS INVESTIGADOS

O resumo dos esquemas investigados resulta na seguinte seqüência.

1) Os primeiros esquemas multiplicativos utilizados envolvem o uso intenso dos dedos e da contagem um a um. Pode-se dizer que as crianças estão utilizando seqüências numéricas iniciais. Nesses esquemas,

- a) num primeiro momento, as crianças adicionam grupos equivalentes, ou seja, fazem iterações sem controlar quantos grupos estão sendo adicionados. Na maior parte dos casos, chegam a respostas incorretas;

- b) num segundo momento, as crianças adicionam grupos equivalentes, ou seja, fazem iterações controlando o número de grupos que estão sendo adicionados e chegando a respostas corretas.
- 2) Posteriormente, a utilização dos dedos decresce progressivamente, até que seu uso torna-se imperceptível. Pode-se dizer que as crianças estão utilizando seqüências numéricas implícitas. Nesses esquemas,
- a) num primeiro momento, as crianças adicionam grupos equivalentes, ou seja, fazem iterações sem controlar quantos grupos estão sendo adicionados. Nesse caso, chegam a respostas incorretas;
- b) num segundo momento, as crianças adicionam grupos equivalentes, ou seja, fazem iterações controlando o número de grupos que estão sendo adicionados, chegando a respostas corretas.
- 3) Os esquemas consolidam-se. As crianças dão respostas imediatas. Não fazem uso dos dedos, da contagem ou da adição. Vão direto à multiplicação. Pode-se dizer que estão utilizando seqüências numéricas explícitas.

Pelos resultados aqui apresentados, cabe repetir, com Piaget (1980), que a matemática pode ser considerada um sistema de construções que se apóia nas coordenações das ações e das operações do sujeito e procede por uma sucessão de abstrações reflexionantes, de níveis cada vez mais elevados.

O uso freqüente dos dedos, seguido do seu abandono, ilustra como, num processo de abstração reflexionante, as crianças transpuseram a um plano superior – o das relações multiplicativas – o que colheram em patamares precedentes. Mais ainda, ao justificarem suas respostas, elas não só realizaram os reflexionamentos mencionados, como reconstruíram sobre o novo plano o que foi colhido no plano de

partida, colocando em relação os elementos extraídos nos dois planos, isto é, fizeram reflexões. A abstração reflexionante consiste num mecanismo construtor e funcional, integrando estruturas inferiores em patamares mais avançados, seguindo estágios sucessivos de formação.

A pesquisadora perguntou a CAMI: “Quantas linhas de 3 estão aqui dentro se têm, ao todo, 27 fichas? CAMI respondeu: “Três mais 3 é 6... 7, 8, 9 (com a mão direita, CAMI bateu nos dedos da mão esquerda). Riu e disse: “3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30. A pesquisadora interrogou: “Então, quantas linhas deu?” CAMI respondeu: “São 10 linhas?” A pesquisadora explicou: “São 27 fichas, e não 30.” CAMI, então, disse que dava para fazer 9 linhas. Como se vê, a abstração reflexionante é um processo de equilibração que impõe reorganizações. Num primeiro momento, CAMI apenas contou de 3 em 3, sem controlar o número de vezes em que contou 3. Questionada, atingiu um novo patamar de reflexionamento, coordenando o número de fichas e o número de linhas. Novamente questionada, reorganizou sua resposta, diminuindo 3 fichas ou uma linha. Esse processo mostra que o conhecimento novo jamais é um início absoluto, isto é, os conhecimentos novos retiram seus elementos de uma realidade anterior. CAMI realizou uma abstração reflexionante, pois extraiu sua resposta da coordenação das ações e não do próprio objeto, como no caso de abstrações empíricas. O exemplo de CAMI também ilustra como cada reflexão – as formas – leva a novos patamares de reflexionamento – os conteúdos – num processo em espiral que dá ao sujeito novos instrumentos de assimilação e faz com que as operações se tornem objeto de pensamento, isto é, abstrações refletidas.

As abstrações reflexionantes efetuadas pelas crianças apoiaram-se em seus esquemas ou coordenações de ações, operações, estruturas, enfim, atividades

cognitivas de onde foram retirados elementos para novas adaptações (PIAGET, 1995).

Nas respostas de muitas crianças é interessante observar os esquemas que, mais do que estruturas, apareceram como atividade estruturante. Isso pode ser constatado nas situações em que, diante de uma dificuldade, a intervenção da pesquisadora resultou na utilização de um esquema disponível que não estava sendo utilizado.

Quando a pesquisadora perguntou: “1 é 3, 2 é 6, 3 é...?”, JUL respondeu que não sabia. A pesquisadora, então, disse: “Se tens 1 valendo 3, 2 valendo 6, qual é a lei? Quanto está sempre aumentando?” Com essa intervenção, JUL respondeu: “Ah! 9.” E, depois disso, prosseguiu com as iterações de 3 para 4, 5, 6... e assim por diante. Neste, e em muitos outros casos, se vê o esquema estruturar o campo da percepção e da compreensão, constituindo-se como totalidade.

Esquemas complexos, como os esquemas iterativos de multiplicação, por exemplo, são produto de construções cognitivas, pois os esquemas se diversificam e se tornam mais complexos na interação com o real, sempre a partir de esquemas mais elementares.

Grande parte dos esquemas apresentados pelas crianças eram operatórios. Sendo esses esquemas ao mesmo tempo gerais e abstratos, tomando a forma de classes e relações, pode-se dizer que as crianças, em muitos casos, já tinham conceitos desenvolvidos. Interrogado sobre quantas linhas de 3 fichas poderiam se fazer com 12 fichas, PAUL respondeu que eram 4. Instado a justificar sua resposta, ele disse que dividiu 12 por 3. Para usar a expressão de Piaget (apud INHELDER; CELLÉRIER, 1996), PAUL usou um esquema presentativo, operativo semiótico, referindo-se a significantes, e não mais a objetos e explicações práticas. PAUL

apresentou aplicações teóricas, relacionadas com a dedução e explicação. Como ressalta Becker (2003): “temos aí o esquema como resultante de um processo de generalização”.

Cabe destacar que a maior parte das crianças apresenta respostas compatíveis com o período das operações concretas. Nesse caso, só efetuam construções apoiando-se sobre resultados constatáveis, efetuando, na maior parte das vezes, abstrações pseudo-empíricas. Embora a leitura dos resultados se faça a partir de objetos materiais – no caso, os dedos, já não se trata de abstrações empíricas, uma vez que as propriedades numéricas foram introduzidas nos objetos pela atividade cognitiva das crianças.

Observaram-se diferentes graus de reflexionamentos, quais sejam:

- 1) poucas crianças encontravam-se na passagem de um movimento pré-conceitual ao início de uma conceituação, apresentando os reflexionamentos elementares. Neste caso encontram-se as crianças que utilizaram os dedos para somar 7 mais 4, 8 mais 5 ou 9 menos 6. Ainda um passo atrás está SER, que nem sempre fez os reflexionamentos elementares das ações às representações, pois utilizou os dedos para somar 8 mais 5 e encontrou 12. É possível pensar que, neste caso, a criança não atingiu plenamente uma noção operatória do número, que seus raciocínios não se apóiam em estruturas operatórias de natureza lógica, enfim, que o número não surgiu, ainda, como resultado da síntese entre classificação e seriação; e
- 2) várias crianças reconstituíram as seqüências das suas ações, reunindo as representações em um todo coordenado. Encontram-se, aqui, as crianças que apresentaram esquemas pré-multiplicativos – tais como JESSI, que disse: “Contei as filas de 3, fui contando de 3 em 3”;

3) no terceiro e último patamar – o das comparações, estão principalmente as crianças de mais idade, da 5ª série. Elas reconstituíram a ação total, comparando-a com outras, análogas ou diferentes, nas relações multiplicativas. Este é o caso de JOHN, por exemplo. Ele respondeu que havia 9 linhas de 3 porque ao todo havia 27 fichas e justificou, usando a reversibilidade: “porque 3 vezes o 9 dá 27”.

A partir daí as crianças chegaram a reflexões sobre reflexões, ou a meta-reflexões, ou seja, a pensamentos reflexivos. Nessas abstrações refletidas os sujeitos encontraram explicações para as suas respostas. Esse é o caso de RAFA, da 4ª série, que responde: “Aqui tem 40. Ao todo tem 60. De 40 para 60 é 20. Eu somei”.

Nesses casos, o que permanecia como instrumento tornou-se objeto de pensamento. A reflexão de RAFA sobre a adição foi uma tematização.

Com o progresso da abstração reflexionante, as crianças dispensavam os apoios concretos, e a abstração refletida tornava-se cada vez mais importante, como mostra ACAR, da 5ª série, quando diz: “se a azul é igual a duas amarelas, então é fazer 2 vezes 6”.

Para explicar as novas construções, Piaget encontrou explicação nos processos de equilíbrio cognitivo que, em lugar de serem estados de inatividade, são sistemas de constantes trocas, nos quais os esquemas se diferenciam simultaneamente, enriquecendo-se e conservando seu estado anterior, sem perdas e sem a produção de esquemas radicalmente novos. Nessas situações encontraram-se os inúmeros casos em que as crianças, em desequilíbrio, reagiam positivamente às intervenções da pesquisadora. Aqui convém destacar que o equilíbrio nunca é atingido, a não ser, e nem sempre, em matemática pura. Sempre há possibilidades abertas pelo que foi construído no nível precedente. Como ressalta

Piaget (2000), é preciso distinguir, cuidadosamente, entre o que é produto da equilibração interna e o que é resultado da hereditariedade. Reconhecer que a lógica se impõe como uma necessidade é diferente de afirmar que a lógica é, em todos os seus aspectos, hereditária. A necessidade decorre da auto-regulação e não de elementos herdados. A reação das crianças às intervenções da pesquisadora testemunham a mobilidade da inteligência. Tais intervenções acionavam um desenrolar endógeno, mas não inato, que acontecia por combinações, por um lado, novas; e por outro, apoiadas em elementos precedentes.

É por isso que se pode dizer que a organização lógico-matemática não está somente no nível da hereditariedade ou da experiência, e, sim, no funcionamento organizador, ou seja, no nível do funcionamento cortical, que abrange tanto elementos hereditários quanto estruturas cognitivas. Na visão de Piaget, a organização viva é um sistema de trocas com o meio. Daí a concordância entre a matemática e a experiência, visto que o organismo não é independente do meio, mas vive, atua e pensa em interação com ele.

Em todas as séries pesquisadas, crianças de diferentes idades fizeram uso consistente dos dedos ou das fichas. Nem por isso se pode dizer que fizeram puras constatações. Como ensina Piaget (1974), toda leitura da experiência engloba, desde o começo, uma interpretação lógica, relativa a propriedades não constatadas atualmente. Mesmo fundamentada na percepção – como no caso dos dedos ou das fichas, a leitura se faz pela atividade do sujeito, comportando, portanto, uma parte de inferência lógica. Esse foi o caso de LET. Para responder à pergunta “Estando no 4, quanto falta para chegar no 10?”, inicialmente, ela fez um grupo de 4 fichas, outro grupo de 10 fichas e contou tudo. Mas ficou insatisfeita com o resultado. Manipulou novamente as fichas, desta vez retirando 4 do grupo de 10 e respondeu: “6”.



Na atividade de LET entrou em ação o fator da equilibração, que “se explica pelo fato de que cada uma das etapas sucessivas apresenta uma probabilidade crescente em função dos resultados obtidos na etapa precedente (Piaget, 1974 p. 35). No exemplo de LET, a experiência lógico-matemática foi além da experiência física. Não só se dirigiu às ações que utilizam os objetos, mas empregou uma abstração a partir dessas ações. Para atingir coordenações novas, a abstração lógico-matemática recorre a coordenações anteriores, das quais abstrai os elementos necessários à construção das novas coordenações. Sendo assim, as estruturas lógico-matemáticas vão no sentido da equilibração gradual, mas sempre inacabada, entre assimilação e acomodação.

Ao somar 4 fichas com 10 fichas, LET mostrou que a assimilação inicial tende a incorporar todo o meio a alguns poucos esquemas. Mas LET não se satisfaz com o resultado, mostrando que as perturbações do meio podem abalar essa estabilidade, forçando acomodações, modificando os esquemas e sua tendência à conservação.

O fluxo composto pelos resultados da pesquisa sugere uma progressiva interiorização das ações. É aqui que adquire relevância o processo de tomada de consciência. Como foi visto em Montangero e Maurice-Naville (1998), o estudo da relação entre ação e pensamento revela que a ação é uma forma de conhecimento autônomo que pode se organizar sem tomada de consciência dos meios empregados. É assim que VANE, da 3ª série, explica como chegou a 9 menos 6: “Eu pensei assim, ó, eu tenho 9 dedos na minha mão (VANE mostra 5 dedos da mão direita e 4 da mão esquerda). Daí tira esses daqui (VANE retira a mão direita e flexiona um dedo da mão esquerda). É 3.

VANE se limitou ao conhecimento dos objetivos e resultados, sem nenhuma consciência dos meios e da sua regulação. Mesmo se tratando de uma ação

material sem conceituação, constitui um saber muito elaborado. Pelo conjunto de esquemas envolvidos, são construções que conduzem a estruturas operatórias fundamentais, mas que ainda escapam à consciência do sujeito.

A tomada de consciência encontra-se em atraso a este saber inicial, ou seja, a conceituação apresenta retardo em relação à ação. A passagem da ação ao pensamento é feita por uma laboriosa reconstrução. É por isso que Montangero e Naville (1998) dizem que a tomada de consciência não consiste em iluminar o que não estava consciente, mas, sim, numa reconstrução cujos resultados são superiores ao conhecimento em ação.

Nesse sentido, Piaget (1977) ensina que a tomada de consciência se desencadeia quando as regulações automáticas não são mais suficientes e é preciso procurar novos meios mediante uma regulação mais ativa. Isso se observa em TAL, da 5ª série:

Pesquisadora: 1 é 3, 2 é 6, 3 é...?

TAL: 9

A pesquisadora convida a aluna a continuar com 4, 5, 6...

TAL: 10, 11, 12... o 12 é 4, o 5 é 15, o 6 é 18, o 7 é 21, ...22, 23, 24... 24 é 8, 25, 26, 27... 27 é 9, 28, 29, 30... 30 é 10.

As dúvidas nas iterações de 3 fizeram TAL retornar a suas atividades de contagem. Com as inadaptações, a regulação ativa ocupou o centro das tentativas. Assim, na medida que o objetivo e o resultado da ação desencadearam a consciência, o esquema tornou-se conceito. Pelo mecanismo da tomada de consciência houve uma interiorização da ação que levou à consciência dos meios para resolver o problema.

Nesse nível de conceituação, a interiorização das ações materiais ocorre por meio das representações semióticas, tais como a linguagem e as imagens mentais, por exemplo. As abstrações reflexionantes extraem das coordenações das ações os elementos necessários para a construção das coordenações inferenciais. Um exemplo de coordenação inferencial pode ser visto em JOHN, da 5ª série:

Pesquisadora: Quantas linhas de 3 estão aqui dentro se tem, ao todo, 27 fichas?

John: 9

P: Como pensaste?

John: Porque 3 vezes o 9 dá 27.

JOHN fez uma coordenação inferencial, ou seja, uma dedução por composição operatória que ultrapassou os dados da observação, introduzindo relações de necessidade.

Referindo-se às relações entre ação e pensamento, a tomada de consciência tem importante papel na construção do conhecimento matemático.

Convém considerar que a ação é uma forma de conhecimento autônomo que pode se organizar sem a tomada de consciência. A convite da pesquisadora, SER organizou 6 linhas de 3 fichas. A pesquisadora perguntou: “Quantas fichas têm, ao todo? SER bateu na mesa com três dedos da mão direita e depois da mão esquerda. Por fim, respondeu: “É 16”. A pesquisadora perguntou: “Como chegaste no 16?”. SER respondeu: “Contando de 3 em 3. Pesquisadora: “Quantas vezes contaste 3? SER: “Não sei”.

Nesse exemplo a conceituação está em atraso em relação à ação, e será necessário uma reconstrução no plano do pensamento (controlar quantas vezes é preciso contar 3) do que foi realizado no plano da ação (contar de 3 em 3).

Sendo assim, a tomada de consciência consiste numa reconstrução cujos resultados superam o conhecimento em ação. Isso porque a ação constitui um saber autônomo e eficaz. Mas, embora se trate somente de um saber-fazer inicial e não de uma compreensão conceituada, a ação é a fonte da conceituação. Isso ocorre quando as regulações automáticas não são mais suficientes e é preciso procurar novos meios por uma regulação mais ativa, processo no qual ocorre a tomada de consciência.

Esta tomada procede da periferia para o centro, sendo que a periferia não se define nem pelo objeto nem pelo sujeito, mas pela reação do sujeito em relação ao objeto. O sujeito procura alcançar um objetivo, sem a análise dos seus procedimentos.

Partindo da periferia para o centro, a tomada de consciência orienta-se para as regiões centrais da ação, reconhecendo os meios empregados. Daí que o conhecimento não provém nem só do sujeito, nem só do objeto, mas da interação entre eles.

É o que se pode ver no exemplo de LAU:

O menino organizou 6 linhas de 3 fichas, que foram escondidas.

Pesquisadora: Quantas linhas têm, ao todo?

LAU move o polegar, o indicador e o médio: É 18.

P: Como pensaste?

LAU: Eu fui contando (mostra a mão esquerda e aponta as fichas escondidas) e com esta mão eu fui marcando (controlando o número de vezes em que contava 3).

P: Então, com esta mão foste contando as...

LAU: Fileiras.

P: E com esta mão?

LAU: As fichas.

Nesse caso, em que o objetivo da ação foi atingido sem nenhum fracasso, o progresso da consciência resultou do próprio processo assimilador, na medida em que determinar um objetivo em face do objeto já é assimilar esse objeto a um esquema prático.

Quando há fracasso, também há tomada de consciência, pois o sujeito vai procurar os pontos em que houve falha de adaptação do esquema ao objeto. O exemplo de FEL mostra como a busca da razão do fracasso leva à tomada de consciência das regiões mais centrais da ação.

Pesquisadora: Quantos quadrados amarelos são necessários para cobrir a tira vermelha?

FEL desloca os dedos indicadores pelos retângulos azuis: 10.

A pesquisadora coloca mais dois quadrados sobre um retângulo azul: E agora, quantas amarelas cobrem a tira vermelha?

FEL mede o espaço ocupado pelas quatro amarelas, com os indicadores. Desloca os dedos mais duas vezes: É 12.

Noutro exemplo, a interiorização da ação levou LET a uma consciência dos problemas a resolver, assim como à consciência dos meios para resolvê-los.

Pesquisadora: Quantos quadrados amarelos são necessários para cobrir a tira vermelha?

LET olha, atentamente: 10.

P: Como pensaste?

LET pega um retângulo azul e coloca sobre ele dois quadrados amarelos. Aproxima o que fez da tira vermelha: Se esse aqui deu 6... (e desloca o retângulo azul sobre a tira vermelha).

A pesquisadora novamente coloca um retângulo azul sobre a tira vermelha. Depois coloca dois quadrados amarelos sobre o retângulo azul: Aqui tem 2, não é? Mais um azul vai dar?

LET: 4

P: Mais um azul vai dar?

LET: 6

P: Quantos azuis faltam?

LET: 3. Ah! Vai dar 12.

LET passou de uma assimilação prática à uma assimilação conceitual. LET passou por equilibrações, desequilíbrios e reequilibrações. Houve solidariedade entre o movimento de interiorização – que conduziu à tomada de consciência das ações e à conceituação lógico-matemática – e o movimento de exteriorização, que levou ao conhecimento experimental e às explicações causais.

Analisando as respostas das crianças, observa-se que a maior parte delas encontra-se ao nível das operações concretas. Nesse nível, o sistema de regulações alcança um equilíbrio estável. Atingindo o nível da reversibilidade completa, as operações concretas se coordenam em estruturas definidas, tais como as classificações, as seriações, as correspondências, etc.

Nesse sentido, foram freqüentes as respostas operatórias, tais como a de FEL.

Pesquisadora: Quantas fichas têm ao todo?

FEL: Seis vezes 3, 3 vezes 6... é 18.

Nos domínios do pensamento concreto, cada estado é concebido como resultado de uma transformação. Comparado ao pensamento pré-operatório, o pensamento operatório concreto se caracteriza por uma extensão do real na direção do virtual. É por isso que Inhelder e Piaget (1976) ressaltam que as operações concretas consistem na estruturação direta dos dados reais. Ao classificar, seriar, igualar, fazer corresponder, o sujeito introduz um conjunto de inclusões ou de relações que organizam esse conteúdo sob sua forma atual e real. FEL explica “ 6 vezes 3, e vezes 6... é 18” porque, para ele, o possível consiste no prolongamento virtual das ações ou operações.

Para encontrar quantas linhas de 4 fichas era possível fazer com 12 fichas, CLA disse que contou e dividiu por 4. É certo que ela não se limita mais a agir, já interiorizou suas ações. Entretanto, limitou-se a uma operação concreta, sem procurar a razão da correspondência. Soube agir de maneira adequada para atingir um objetivo, mas não procurou uma razão para suas ações. Esteve perto da descoberta da regularidade, mas não a descobriu por falta das operações necessárias para a elaboração de uma hipótese explicativa. CLA fez uma verificação de relações, deduziu a partir de situações reais, mas não juntou o possível e o necessário, entrando no campo das operações formais.

De um modo geral, as crianças desta pesquisa ficaram no nível das operações concretas de pensamento, indo de ligação em ligação, sem considerar, em cada ligação específica, o conjunto das outras. Não consideraram todas as combinações possíveis, o que seria uma característica do pensamento formal. Efetuaram operações passo a passo, características dos agrupamentos de classes e relações, e não operações combinatórias que assegurariam a necessidade dedutiva.

Nesse ponto, é importante lembrar que, embora tenha estabelecido níveis de desenvolvimento cognitivo, Piaget sempre recomendou que se considerasse com prudência a noção de estágio. Para tanto, desenvolveu a noção de decalagens, marcando os deslocamentos e as instabilidades entre as linhas de desenvolvimento, ou seja, para fazer “obstáculos à generalização dos estágios e introduzir considerações de prudência e de limitação” (PIAGET, 1973, p. 52).

Diante da pergunta: “Quantas linhas de 3 estão aqui dentro se têm, ao todo, 27 fichas?”, FAB disse: “Estou tentando fazer a conta de divisão. Não estou conseguindo. FAB identificou a situação como divisional, fazendo o raciocínio adequado. Faltou-lhe flexibilidade de pensamento para usar um raciocínio multiplicativo. Tudo indica que FAB estava confuso e preso a um conhecimento escolar estanque para não conseguir dividir 27 por 3. Como pontua Stella Baruk (1996), as lições memorizadas não ajudam a encontrar a solução para os problemas.

O insucesso na matemática é um pesadelo cotidiano, produzido por determinadas pedagogias e psicologias. No entender de Baruk, o psicólogo poderia fazer com que a criança não se tornasse presa fácil das consultas “psi”, verificando se o pedagogo não falhou na sua tarefa. Isso freqüentemente acontece, e os alunos são forçados a reproduzir, a saber de memória, a sujeitar-se a um ensino sem sentido, numa dissociação entre aquilo que se faz e aquilo que se tem consciência de fazer, o que produz fissuras na construção matemática.

E assim, como a matemática é uma disciplina inteiramente dedutiva, a incompreensão e a ruptura de determinado elo tem, como conseqüência, uma dificuldade crescente. Com isso, o aluno desadaptado em relação a um determinado conteúdo não compreende o ponto seguinte e cada vez duvida mais de si próprio



(PIAGET, 1976). Daí surgem os sentimentos autodepreciativos na aprendizagem da matemática, sentimentos geralmente reforçados por professores e pais.

Por outro lado, é difícil compreender que indivíduos bem dotados na utilização de estruturas lógico-matemáticas espontâneas tenham dificuldade em aprendizagens que incidem sobre tais estruturas, uma vez que a matemática é um prolongamento da própria lógica. Nesse sentido, Piaget (1976, p. 52) concluiu que “o problema central do ensino da matemática é o ajustamento recíproco das estruturas operatórias espontâneas próprias à inteligência e do programa ou dos métodos relativos aos domínios matemáticos ensinados”. Isso porque as estruturas lógico-matemáticas não são conscientes. É justamente o ensino da matemática que deve fazer com que as estruturas sejam objeto de reflexão, por meio linguagem simbólica que exige diferentes níveis de abstração.

A questão pedagógica mais relevante é a de como encontrar os métodos indicados para passar dessas estruturas matemáticas naturais, espontâneas, não reflexivas, para a reflexão, pondo-as em teoria.

A axiomatização é o último nível a ser alcançado num percurso que vai da ação ao pensamento. Na escola, o ensino da matemática se desenvolve em torno da axiomática. Decorre daí um ensino verbalista e carente de sentido, imposto pelo professor, ao qual a criança se sujeita, em busca de aprovação.

O mais indicado no ensino da matemática é apreender os esquemas e as modificações que as crianças fazem neles, na resolução de situações.

CLA respondeu que 12 quadrados eram necessários para cobrir a tira vermelha, já que 6 azuis a cobriam. A pesquisadora pediu uma justificativa para a resposta e CLA afirmou: “Porque a amarela é a metade da azul”. Formalmente, a justificativa de CLA poderia ser representada por  $6 : \frac{1}{2} = 6 \times 2 = 12$ . O fato de não

ter aprendido a divisão de frações não impediu CLA de resolver a situação. Isso comprova que é grande o poder criativo das crianças para resolver questões numéricas. O desafio, para os educadores, é descobrir como aproveitar esse poder. Elas têm seus métodos próprios que desenvolvem tanto fora quanto dentro da escola, pelo ensino indireto, como os algoritmos que inventam nas tentativas de resolver uma tarefa por si próprias.

Interrogado sobre quantas fichas tinha ao todo, numa situação proposta, JOHN contou por linhas de 4 fichas e respondeu que havia 40. Essa contagem de 4 em 4 fez com que, quando solicitado a justificar sua resposta, JOHN respondesse “dez filas de 4 dá 40”. A autopercepção dessa capacidade de construir os meios de operar resulta em motivação no estudante. Ainda, é somente a partir dos próprios recursos conceituais que eles podem adquirir compreensão e progredir na matemática.

Ao concluir esta análise, vale lembrar que os esquemas multiplicativos – em que pese a sua importância – correspondem a uma pequena parte da totalidade das construções matemáticas – algébricas, de ordem e topológicas – que o indivíduo precisa construir ao longo do seu desenvolvimento matemático.

## CAPÍTULO 8

“A partir do momento em que escrevi esta página percebi claramente que minha busca de exatidão se bifurcava em duas direções. De um lado, a redução dos acontecimentos contingentes a esquemas abstratos que permitissem o cálculo e a demonstração de teoremas; do outro, o esforço das palavras para dar conta com a maior precisão possível, do aspecto sensível das coisas”.

Ítalo Calvino

## 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma primeira consideração refere-se ao objetivo do trabalho. Esta pesquisa foi levada avante com o objetivo de observar o desenrolar dos esquemas que, das seqüências numéricas iniciais, se tornam mais e mais complexos, culminando nos esquemas multiplicativos, tendo em vista o problema: como acontece o avanço dos conceitos implícitos de multiplicação, relacionados com as seqüências numéricas iniciais, para o esquema iterativo de multiplicação relacionado com a coordenação parte-todo, com a reversibilidade e com a iteração.

Pelo que foi descrito, o desenvolvimento da multiplicação se inicia com esquemas relacionados com as seqüências numéricas, passa pelos esquemas relacionados com as unidades compostas e esquemas pré-multiplicativos, na direção dos esquemas multiplicativos.

Também ficou evidente que a falta de esquemas prévios compromete o surgimento dos esquemas multiplicativos, pois a operação de multiplicação resulta de modificações das seqüências de números desenvolvidas pela criança, em qualquer fase do desenvolvimento.

De acordo com os resultados da pesquisa,

1) os primeiros esquemas multiplicativos utilizados envolvem o uso intenso dos dedos e da contagem um a um. Pode-se dizer que as crianças estão utilizando seqüências numéricas iniciais. Nesses esquemas:

a) num primeiro momento, as crianças adicionam grupos equivalentes fazendo iterações sem controlar quantos grupos estão sendo adicionados. Na maior parte dos casos, chegam a respostas incorretas;

b) num segundo momento, as crianças adicionam grupos equivalentes fazendo iterações, controlando o número de grupos que estão sendo adicionados e chegando a respostas corretas;

2) posteriormente, a utilização dos dedos decresce progressivamente, até que seu uso se torna imperceptível. Pode-se dizer que as crianças estão utilizando seqüências numéricas implícitas. Nesses esquemas, novamente:

a) num primeiro momento, as crianças adicionam grupos equivalentes fazendo iterações, sem controlar quantos grupos estão sendo adicionados. Nesse caso, chegam a respostas incorretas;

b) num segundo momento, as crianças adicionam grupos equivalentes fazendo iterações, controlando o número de grupos que estão sendo adicionados, chegando a respostas corretas;

3) os esquemas consolidam-se. As crianças dão respostas imediatas. Não fazem uso dos dedos, da contagem ou da adição. Vão direto à multiplicação. Pode-se dizer que estão utilizando seqüências numéricas explícitas.

O desenrolar dos esquemas principia com os de seqüência numérica.

Os esquemas mais elementares que foram encontrados referem-se à seqüência numérica inicial. Nesse caso, os itens a serem contados precisavam ser visualizados, por isso, o uso intenso dos dedos e a contagem um a um, nos três níveis de escolaridade pesquisados, em especial, entre as crianças menores, de 3ª série.

Além dos esquemas iniciais, as crianças apresentaram esquemas intermediários, que também envolviam o uso da contagem, dos dedos e/ou do material manipulativo, porém de forma imperceptível. Esses esquemas estão relacionados à seqüência numérica implícita, uma interiorização da seqüência

numérica inicial. Os sujeitos desta pesquisa superaram a estratégia de “contar tudo”, ou seja, já fizeram a transição para o “contar na seqüência”, dispensando a contagem do ponto de partida. Por isso, foram além da seqüência numérica inicial, desenvolvendo esquemas relativos à seqüência de unidade composta implícita, na qual os resultados interiorizados da contagem formam uma unidade composta.

Com uma seqüência numérica implícita, as crianças contaram para a frente, controlando seus atos de contagem, isto é, sabendo quando deviam parar, fazendo uma dupla contagem. É por isso que se pode dizer que a seqüência numérica implícita representa, simultaneamente, os atos de contagem e o resultado da contagem. Os elementos da seqüência numérica implícita são itens contáveis abstratos, e os resultados interiorizados da contagem formam uma unidade composta.

Muitos alunos, especialmente os de 5ª série, deram respostas imediatas às propostas relativas aos esquemas de seqüências numéricas, não fazendo uso dos dedos nem do material manipulativo. Constatou-se que já se tratava de operações e os resultados foram extraídos da memória. Estes alunos desenvolveram esquemas relativos à seqüência numérica explícita, tendo ultrapassado a seqüência numérica inicial e a seqüência numérica implícita. Ainda, nos esquemas relativos à seqüência numérica explícita, os alunos operaram com mais de uma unidade composta, utilizaram-nas em diferentes operações e representaram as relações de inclusão.

Assim como aconteceu historicamente, também nesta pesquisa os dedos funcionaram como símbolos a serviço do pensamento e foram usados tanto nas situações mais simples (somar 7 mais 4, por exemplo) quanto nas mais complexas, como 9 iterações de 3.

As crianças que foram metódicas na utilização dos dedos, começando pelo polegar, pelo mínimo ou pelo indicador, mas seguindo sempre a mesma seqüência, conseguiram resolver as situações propostas. As que utilizaram os dedos de forma inconsistente confundiram-se na contagem, chegando a respostas incorretas.

Para alunos de 3ª a 5ª série, a utilização dos dedos, em certa medida, é ineficiente. Mesmo assim, é fundamental respeitar os recursos próprios de cada criança, aqueles utilizados, independente de qualquer ensino, para não desencorajá-la na busca de autonomia, em favor de práticas impostas pelo professor.

A pesquisa mostrou que aprender matemática é construir meios de operar, mais do que saber fazer uma operação. Utilizando os dedos, as crianças demonstraram o quanto confiam nas suas estratégias espontâneas, intuitivas, que envolvem mais a contagem do que as quatro operações. Isso, mais uma vez, deixa claro que o conhecimento conceitual, mesmo sendo mediado pelo outro, deve ser construído com base na experiência do conhecedor, não podendo ser transferido “pronto” de uma pessoa a outra. Esclarece, também, que, quando confrontadas com situações numéricas, as crianças utilizam esquemas já disponíveis, pois as experiências matemáticas vão sendo assimiladas a estruturas que o sujeito já possui.

A passagem da seqüência numérica inicial para a seqüência numérica implícita, e desta para a seqüência numérica explícita, ilustra que, longe de serem estáticos, os esquemas de seqüências numéricas progridem com o desenvolvimento, à medida que as crianças enfrentam situações numéricas mais complexas.

Esse progresso está relacionado com as habilidades de contagem, que se desenvolvem gradativamente. As mais simples envolvem o uso dos dedos e a

contagem um a um. As mais elaboradas relacionam-se com a contagem de itens abstratos. A contagem é fundamental, pois é a atividade que leva à construção das seqüências numéricas. Estas, por sua vez, são as estruturas matemáticas mais fundamentais que a criança desenvolve cedo na vida.

As crianças transitaram dos esquemas de seqüências numéricas – nos quais é intenso o uso dos dedos – para os esquemas de unidades compostas, nos quais o uso dos dedos é abandonado ou persiste de modo imperceptível. As propostas relativas aos esquemas de unidades compostas foram mais complexas que as relativas aos esquemas de seqüências numéricas, uma vez que cada elemento precisava ser considerado uma unidade composta abstrata dentro da seqüência numérica. Nesse caso, as crianças coordenaram esquemas, deixando de apenas repetir e conservar para combinar e unir, pois os esquemas são unidades de comportamento que, na interação com o real, se diversificam, se tornam mais complexos e se generalizam.

Os esquemas pré-multiplicativos das crianças apresentaram uma complexificação dos esquemas de contagem. Indo além da contagem por unidades, elas contaram por uma unidade de qualquer cardinalidade. Nesses esquemas pré-multiplicativos verificou-se uma diferença fundamental. Alguns alunos controlaram as iterações, sabendo onde deviam parar, enquanto outros simplesmente iteravam uma quantidade, sem controlar quantas iterações estavam sendo feitas.

Crianças que dispõem somente de uma seqüência numérica inicial não sabem quando parar de contar para a frente, pois não fazem uma dupla contagem. Elas não são capazes de resolver uma situação multiplicativa pela impossibilidade de coordenar duas unidades compostas, de tal modo que uma seja distribuída sobre os elementos da outra.



Como já referimos, um esquema multiplicativo consiste de três partes. A primeira refere-se à concepção, pela criança, da situação na qual o esquema é utilizado; a segunda consiste no procedimento de multiplicação; e a terceira, na revisão dos procedimentos, de onde saem os resultados. As crianças que não controlaram as iterações apresentaram apenas a primeira parte do esquema, concebendo a situação multiplicativa. Já as que controlaram as iterações apresentaram o esquema completo: conceberam a situação na qual deviam aplicar um esquema multiplicativo, resolveram o algoritmo de multiplicação e revisaram os procedimentos de onde saíram os resultados. O controle de quantas vezes uma unidade é iterada provê a criança de recursos internos sobre os quais a abstração se fundamenta. Provê, também, a possibilidade para a criança de construir um conceito implícito de multiplicação. Se não há indicações de que essas coordenações tenham sido feitas antes de ativar os esquemas, trata-se, então, de conceitos em ação.

Ainda em relação aos esquemas pré-multiplicativos, vários alunos deram respostas imediatas, apresentando uma redução do esquema, ou seja, a diminuição de um processo na resolução de um problema. Trata-se do resultado de um esquema, de uma relação funcional entre uma situação e uma resposta. Essas reduções dos esquemas pela reflexão e pela abstração resultaram de uma sólida relação numérica, que compreende o conhecimento dos fatos básicos da operação de multiplicação. Ainda, crianças que desenvolveram uma seqüência numérica implícita apresentam esquemas pré-multiplicativos.

As unidades compostas iteráveis são o cerne da multiplicação. As crianças que dispõem, apenas, de uma seqüência numérica inicial precisam visualizar os itens a serem contados, não têm esquemas de unidades compostas, nem controlam

as iterações e, portanto, não desenvolvem estruturas multiplicativas. Ao dispor de uma seqüência numérica implícita, as crianças utilizam, minimamente, os dedos ou o material manipulativo. Como têm esquemas de unidades compostas, começam a controlar as iterações e a desenvolver estruturas multiplicativas. De posse de uma seqüência numérica explícita, as crianças dão respostas imediatas, sem utilizar os dedos ou o material manipulativo. Como operam com mais de uma unidade composta, têm controle absoluto das iterações e desenvolvem estruturas multiplicativas.

Nas respostas imediatas, a contagem – nos dedos ou com material – foi abandonada, e a situação foi coordenada com a seqüência numérica disponível para as crianças, que foram direto à multiplicação.

Parte das crianças, principalmente as de 3ª série, está começando a construir estruturas multiplicativas. No entanto, tais estruturas ainda estão limitadas à natureza implícita da sua seqüência de números, na qual os elementos ainda não constituem uma unidade composta abstrata.

Várias crianças, especialmente as de 5ª série, deram respostas imediatas, demonstrando ter construído estruturas multiplicativas. Elas trabalharam com unidades iteráveis, utilizando uma seqüência numérica explícita, na qual os elementos constituem unidades compostas abstratas.

A pesquisa revelou o desenvolvimento de princípios matemáticos, como veremos a seguir.

As crianças mostraram-se capazes de efetuar, ainda que intuitivamente, a reversibilidade entre adição e subtração e multiplicação e divisão. Resolvendo situações subtrativas pela adição e situações divisionais pela multiplicação, elas demonstraram que, no plano da ação, compreenderam o suficiente para resolver o

problema, mesmo sem ter, em muitos casos, um domínio operatório da reversibilidade. Isso porque não se trata de uma reversibilidade operatória e, sim, de operações realizadas de forma implícita, fora da consciência, uma vez que os esquemas sensório-motores e intuitivos se constroem por generalização, em parte inconsciente e espontânea. Em concordância com o paradigma da Epistemologia Genética, o princípio da reversibilidade se desenvolveu de modo intuitivo, como resultado da experiência.

A atividade das crianças ilustrou que elas podem compreender, na ação, mais do que podem dominar em pensamento, coerentemente com as pesquisas da Epistemologia Genética.

Outro princípio foi o da comutatividade, que também apareceu não como resultado de uma lógica interna, nem como objeto da consciência, mas, sim, da experiência informal.

Ainda, além da comutatividade, surgiram alguns poucos exemplos de distributividade, propriedade bastante complexa para a criança, pois requer a reorganização de alguns esquemas, antes da multiplicação.

As elaborações e reorganizações feitas pelas crianças deram origem à formação de conceitos multiplicativos, conceitos estes que estão em contínua evolução até se tornarem construtos suficientemente estáveis para serem representados na ausência de qualquer recurso perceptivo.

Foi possível ver, na pesquisa, processos ou estruturas surgindo em diferentes momentos do desenvolvimento. Algumas crianças mostraram-se capazes de fazer uma unidade composta  $x$  por  $n$  vezes, com apoio perceptivo, mas não desenvolveram a possibilidade de coordenar, de forma abstrata, dois esquemas de contagem: a contagem por unidades e a contagem por uma unidade iterável.

Estamos diante de decalagens verticais, conceito que permite compreender as dificuldades apresentadas pelas crianças até para utilizar os dedos ou o material manipulativo na resolução das situações. Elas podem estar defasadas em determinados aspectos, sem que sejam, necessariamente, defasadas em todas as linhas do desenvolvimento. Nesse caso, mais do que problemas biológicos, pode haver falta de acesso aos bens culturais ou, principalmente, falta de adequada intermediação da família e da escola que permita as generalizações dos esquemas.

Foram observados diferentes graus de reflexionamento:

- algumas crianças, especialmente da 3ª série, encontraram-se na passagem de um nível pré-conceitual para o início da conceituação, apresentando reflexionamentos elementares. Neste caso estão crianças que não atingiram uma plena noção operatória do número;
- várias crianças, de todas as faixas etárias, reconstituíram as seqüências das suas ações, reunindo as representações em um todo coordenado. Essas crianças apresentaram, preponderantemente, esquemas pré-multiplicativos;
- no terceiro patamar estão, principalmente, as crianças de 5ª série. Elas reconstituíram a ação total, comparando-a com outras, análogas ou diferentes, nas relações multiplicativas.

Algumas crianças, dispensando os apoios concretos, chegaram a reflexões sobre reflexões, encontrando explicações para as suas respostas. O que tinha permanecido como instrumento passava a objeto de pensamento, e a abstração refletida tornava-se cada vez mais predominante.

Como já destacamos anteriormente, uma situação é considerada multiplicativa quando duas unidades compostas são coordenadas de modo tal que uma das unidades compostas é distribuída sobre os elementos da outra.

Observamos que crianças dispostas apenas de uma seqüência numérica inicial não foram capazes de fazer isso, enquanto as que dispunham de esquemas mais evoluídos modificaram sua seqüência de números a ponto de produzir esquemas multiplicativos.

As abstrações reflexionantes efetuadas pelas crianças apoiaram-se em seus esquemas ou coordenações de ações, operações, estruturas, enfim, atividades cognitivas de onde foram retirados elementos para novas adaptações.

Em muitas situações, a intervenção da pesquisadora resultou na utilização de um esquema disponível que não estava sendo utilizado. Por isso, nas respostas das crianças podem-se observar esquemas que apareceram como atividade estruturante, organizando o campo da percepção e da compreensão.

Os esquemas iterativos de multiplicação são esquemas complexos que surgiram como produto de construções cognitivas das crianças, diversificando-se na interação com o real, sempre a partir de esquemas mais elementares.

Grande parte dos esquemas apresentados pelas crianças eram esquemas operativo-semióticos, ao mesmo tempo gerais e abstratos, tomando a forma de classes e relações, relacionados com a dedução e a explicação, referindo-se a significantes e não mais a objetos e aplicações práticas.

De um modo geral, as crianças reagiram positivamente às intervenções da pesquisadora. Isso se explica pelos processos de equilíbrio cognitivo, que são sistemas de trocas, nos quais os esquemas se diferenciam, enriquecendo-se, ao mesmo tempo que conservando seu estado anterior, sem perdas e sem a produção de esquemas radicalmente novos. Sempre há possibilidades abertas pelo que foi construído no nível precedente, pois o equilíbrio nunca é atingido, a não ser em matemática pura.

Essas respostas positivas permitem dizer que a organização lógico-matemática é produto da equilibração. A lógica se impõe como uma necessidade e a necessidade decorre da auto-regulação, considerando a interação entre elementos inatos e da experiência. A lógica decorre do funcionamento organizador, ou seja, do plano cortical, que é um sistema de trocas com o meio. Daí a concordância entre a matemática e a experiência, visto que o organismo não é independente do meio, mas atua em interação com ele.

As respostas das crianças indicaram a existência de uma ação material, sem conceituação, que, no entanto, constitui um saber muito elaborado. Pelo conjunto de esquemas envolvidos, são construções que conduzem a estruturas operatórias fundamentais, mas que ainda escapam à consciência do sujeito. Os resultados da pesquisa mostraram que a tomada de consciência encontra-se em atraso a este saber inicial, ou seja, a conceituação apresenta retardo em relação à ação, e a passagem da ação ao pensamento é feita por laboriosas construções.

Na pesquisa, as tomadas de consciência se desencadearam quando as regulações automáticas não foram mais suficientes e as crianças precisavam procurar novos meios, mediante uma regulação mais ativa. Pelo mecanismo da tomada de consciência houve interiorização da ação, o que levou à consciência dos meios para resolver o problema.

Quando o objetivo da ação era atingido sem nenhum fracasso, o progresso da consciência resultava do próprio processo assimilador. Quando houve fracasso também houve tomada de consciência, pois os sujeitos foram procurar as falhas de adaptação do esquema ao objeto. Nesses processos, as crianças passaram por equilibrações, desequilíbrios e reequilibrações, havendo solidariedade entre a interiorização – que conduziu à tomada de consciência das ações e à conceituação

lógico-matemática – e a exteriorização – que levou ao conhecimento experimental e às explicações causais.

A maior parte das respostas das crianças encontrava-se ao nível das operações concretas. As crianças não mais se limitavam a agir, já haviam interiorizado suas ações. Souberam agir de maneira adequada para atingir seus objetivos, mas não descobriram as leis gerais por falta das operações necessárias para a elaboração de hipóteses explicativas. As crianças estabeleceram relações, deduziram a partir de situações reais, mas não entraram no campo das operações formais, juntando o possível e o necessário.

Não é a intenção principal derivar, da pesquisa pura, implicações para o ensino. No entanto, algumas contribuições para a sala de aula podem ser apontadas, na medida em que este trabalho examinou um grupo de 45 crianças de 3ª a 5ª série, e a maior parte das pesquisas consultadas ainda se fundamenta em estudos de casos.

De acordo com a revisão teórica e também com os resultados desta pesquisa, é fundamental, no ensino da matemática, apreender os esquemas de que as crianças dispõem e propor situações que propiciem a modificação de tais esquemas. Isso porque as crianças têm seus métodos próprios, que desenvolvem tanto fora quanto dentro da escola. E para auxiliar a criança na aprendizagem dos procedimentos formais, é preciso reconhecer os métodos que elas já usam, ajudando-as a compreender as relações entre o que fazem espontaneamente e o que o professor está ensinando.

Nesta pesquisa, algumas crianças, ocasionalmente, mostraram-se confusas, presas a um conhecimento escolar estanque, memorizado, sem significação e

facilmente esquecido. O insucesso na matemática é um transtorno freqüentemente produzido por determinadas pedagogias e psicologias.

Na verdade, causa estranheza que tantas crianças que se dão bem na construção de estruturas lógico-matemáticas encontrem obstáculos em aprendizagens que incidem sobre tais estruturas, pois a matemática é um prolongamento da lógica. É por isso que Piaget (1969/1976) concluiu que o mais sério problema no ensino da matemática é o do ajustamento entre as estruturas operatórias e os programas e métodos utilizados.

Com muita freqüência os educadores falham nessa tarefa. O mais freqüente, é que os alunos sejam forçados a reproduzir de memória, a sujeitar-se a um ensino sem sentido, a produzir fissuras nas suas aprendizagens matemáticas, pela dissociação entre aquilo que se faz e aquilo que se tem consciência de fazer.

A matemática é uma disciplina dedutiva. Assim, a incompreensão e a ruptura de determinado elo acarretam uma dificuldade crescente, de modo que o aluno desadaptado em relação a um determinado conteúdo não compreende o ponto seguinte e passa a duvidar de si próprio. O mais grave é que esses sentimentos autodepreciativos geralmente são reforçados por professores e pais.

Além do mais, na escola, o ensino da matemática se desenvolve em torno da axiomática, quando a axiomatização é o último nível a ser alcançado no percurso que vai da ação ao pensamento e do pensamento à reflexão. Em decorrência disso, o ensino é verbalista e carente de sentido, imposto pelo professor, ao qual a criança se sujeita em busca de aprovação.

Neste trabalho, ficou bastante evidenciado o papel dos dedos como símbolos a serviço do pensamento. Também ficou evidente que, progressivamente, esses esquemas iniciais vão sendo substituídos por outros, mais elaborados, que



dispensam elementos perceptivos em favor de processos de abstração. Isso não significa deixar a criança como uma “contadora”, mas, sim, fazer derivar desses esquemas e conceitos iniciais os algoritmos padrão, uma vez que a contagem é a atividade básica que leva à construção das seqüências numéricas, as mais fundamentais estruturas matemáticas que a criança desenvolve no início ou até mesmo antes da escolaridade. Para a criança superar a contagem um a um, é necessário que seja confrontada com problemas desafiadores que a façam utilizar seus recursos lógicos.

Algumas crianças apresentaram soluções muito criativas, mostrando que é grande o seu poder construtivo para resolver questões numéricas. O desafio, para os educadores, é descobrir a metodologia mais indicada para aproveitar essa capacidade, auxiliando as crianças a passar das estruturas matemáticas naturais, espontâneas, não reflexivas, para a reflexão e simbolização.

O grande mérito deste trabalho é descrever o conjunto de esquemas que, interligados, permitem a compreensão dos vários sentidos da multiplicação.

Assim, mostramos que a multiplicação não é uma operação simples, uma vez que está calcada em microconstruções anteriores, que somente inter-relacionadas vão dar sentido ao ato de multiplicar.

Pensamos ter atingido o objetivo geral desta pesquisa, trazendo uma importante contribuição para o ensino: é preciso descartar de vez a redução da construção e da aprendizagem da multiplicação a uma mera seqüência de procedimentos. A teoria revista e os resultados da investigação revigoram a complexidade da multiplicação e a necessidade de a escola se apropriar dessa complexa construção.

Daqui para diante, um tema importante a ser pesquisado se refere aos fatores que mantêm um número considerável de crianças presas aos esquemas multiplicativos rudimentares, relacionados com as seqüências numéricas iniciais.

## 9 REFERÊNCIAS

- BARUK, Stella. *Insucesso e Matemáticas*. Lisboa: Relógio D'Água Ed., 1996.
- BECKER, Fernando. *A Origem do Conhecimento e a Aprendizagem Escolar*. Porto Alegre: Artmed, 2003.
- BOOTH, L.R. Children's Conceptions and Procedures in Arithmetics: some implications. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 8<sup>th</sup>., 1984, Prescott. *Proceedings of...* Prescott: Southwell, B. & Matcham N.S.W, 1984.
- BOYER, Carl. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- COLL, César; PALACIOS, Jesús; MARCHESI, Álvaro. *Desenvolvimento Psicológico e Educação*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. V. 3.
- CONFREY, Jere. The concept of exponential function: a student perspective. In: EPISTEMOLOGICAL foundations of mathematical experience. Nova York: Springer-Verlag, 1991.
- DEHANE, Stanislav. *What are Numbers Really?: a cerebral basis for number sense*. Disponível em: <<http://www.edge.org/3culture/dehane/index.html>> Acesso em: 06 jul. 2001.
- DELVAL, Juan. *Introdução à Prática do Método Clínico*. Porto Alegre: Artmed, 2002.
- INHELDER, Bärbel; PIAGET, Jean. *Da Lógica da Criança à Lógica do Adolescente*. São Paulo: Pioneira, 1976.
- INHELDER, Bärbel; CELLÉRIER, Guy. *O Desenrolar das Descobertas da Criança*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.
- LERAY, Jean. A Invenção em Matemáticas. In: PIAGET, Jean et al. *Lógica e Conhecimento Científico*. Porto: Civilização Ed., 1980.
- LICHNEROWICZ, André. Notas sobre as Matemáticas e a Realidade. In: PIAGET, Jean et al. *Lógica e Conhecimento Científico*. Porto: Civilização Ed., 1980.
- MONTANGERO, Jaques; MAURICE-NAVILLE, Danielle. *Piaget ou a Inteligência em Evolução*. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- MULLIGAN, Joanne T.; MITCHELMORE, Michael. Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematical Education*, v. 28, n. 3, p. 309-330, 1997.
- NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. *Crianças Fazendo Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OLIVE, John. Children's Number Sequences: an explanation of Steffe's constructs and an extrapolation to rational numbers of arithmetic. *The Mathematics Educator*, v. 11, n. 1, p. 4-9, winter 2001.

PIAGET, Jean. *A Representação do Mundo na Criança*. Rio de Janeiro: Record, [19--].

PIAGET, Jean. *Problemas de Psicologia Genética*. Rio de Janeiro: Ed. Forense, 1973.

PIAGET, Jean. *A Equilíbrio das Estruturas Cognitivas*. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

PIAGET, Jean. *Psicologia e Pedagogia*. Rio de Janeiro: Ed. Forense Universitária, 1976.

PIAGET, Jean. *A Tomada de Consciência*. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1977.

PIAGET, Jean. *Fazer e Compreender*. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1978

PIAGET, Jean. *A Formação do Símbolo na Criança*. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

PIAGET, Jean. *O Nascimento da Inteligência na Criança*. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

PIAGET, Jean. *Sobre a Pedagogia*. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1998.

PIAGET, Jean. *Biologia e Conhecimento*. Petrópolis: Vozes, 2000.

PIAGET, Jean; GRÉCO, Pierre. *Aprendizagem e Conhecimento*. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.

PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. *A Psicologia da Criança*. São Paulo: Difel, 1980.

PIAGET, Jean et al. *Lógica e Conhecimento Científico*. Porto: Civilização Ed., 1980.

PIAGET, Jean et al. *Abstração Reflexionante*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

STEFFE, Leslie. The Learning Paradox: a plausible counterexample. In: EPISTEMOLOGICAL foundations of mathematical experience. Nova York: Springer-Verlag, 1991.

STEFFE, Leslie. Children Multiplying Schemes. In: HAREL, Guerson; CONFREY, Jere. *Multiplicative Reasoning*. Nova York: State University of New York Press, 1994.

STEFFE, Leslie; COBB, Paul. *Construction of Arithmetical Meanings and Strategies*. New York: Springer-Verlag, 1988.

STEFFE, Leslie; COBB, Paul. Multiplicative and Divisional Schemes. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, v. 20, n. 1, p. 45-61, winter 1998.

STEFFE, Leslie; VON GLASERSFELD, Ernst. *Analises of the Child Construction of Whole Numbers*. NSF GRAND No SED 80 16562, 1980.

STEFFE, Leslie; VON GLASERSFELD, Ernst. Helping Children Conceive of Number. *Recherches en didactique des mathematic*, n. 6, p. 2-3, 1985.

VON GLASERSFELD, Ernst. Subitizing: the role of figural patterns in the development of numerical concepts. *Archives de Psychologie*, v. 50, 1982.

VON GLASERSFELD, Ernst. Sensory Experience, Abstraction and Teaching. In: STEFFE, L.; GALE, J. (Ed.). *Constructivism in Education*. Hilladale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1995.

**ANEXO**

Srs. Pais

A prof.<sup>a</sup> Clarissa Golbert, doutoranda do Curso de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da UFRGS está realizando uma pesquisa sobre a aprendizagem da multiplicação, junto aos alunos da Escola Estadual Rio de Janeiro, com a finalidade de contribuir para o aperfeiçoamento do ensino da matemática.

A referida pesquisa será desenvolvida através de entrevistas individuais, videogravadas, versando sobre conteúdos relacionados com a multiplicação.

De acordo com os padrões de ética na pesquisa adotados pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a identidade e a imagem dos alunos ficarão em absoluto sigilo.

Sendo assim, solicitamos sua autorização para que se filho/filha participe do estudo proposto.

.....  
Autorizo.....a participar da pesquisa  
“Esquemas Multiplicativos” coordenado pela prof.<sup>a</sup> Clarissa Golbert, da Faculdade de  
Educação da UFRGS.

Em ...../...../.....

.....  
Assinatura do responsável