Estructuras argumentativas de estudiantes para profesores de matemáticas en un entorno en línea

Ana Isabel Roig, Salvador Llinares y M. C. Penalva

Resumen: El objetivo de esta investigación fue estudiar cómo aprenden estudiantes para profesores de educación secundaria a analizar la enseñanza de las matemáticas como un aspecto del desarrollo de su competencia docente. Para ello, analizamos la estructura argumentativa de una discusión en línea entre estudiantes para profesores de enseñanza secundaria cuando están identificando e interpretando aspectos de la comunicación matemática como un rasgo característico de la enseñanza de las matemáticas. Para realizar el análisis, usamos el esquema de un argumento de Toulmin y centramos nuestra atención en cómo los estudiantes para profesor establecían la relación entre las conclusiones y los datos y cómo usaban las garantías. Los resultados muestran tres características de las estructuras argumentativas generadas por los estudiantes para profesor en un debate en línea que determinan oportunidades para el aprendizaje de la competencia docente "mirar con sentido" la enseñanza de las matemáticas: refinar garantías para apoyar una conclusión, discutir sobre cómo se debe establecer una conclusión para que sea admitida, y poner en duda las conclusiones.

Palabras clave: aprendizaje del profesor, competencia docente "mirar con sentido", comunicación matemática, interacción en línea.

Argumentative structure of students for mathematics teachers in an online environment

Abstract: The goal of this study was to analyze how pre-service mathematics secondary teachers learn to analyze the mathematics teaching as an aspect of teaching expertise. We analyze pre-service mathematics teachers' argumentative structure in online discussion when they are learning to notice relevant aspects of mathematical communication in mathematics teaching. We use Toulmin's argumentative scheme and specifically the relationships between claims, supports and how are used the warrants. The analysis identified three characteristics of

Fecha de recepción: 2 de febrero de 2011.

student mathematics teachers' argumentative structure in an online debate that define learning opportunities to professional noticing of mathematics teaching: refining warrants to support claim, discussing about how a conclusion can be admitted, and doubting of the claim.

Keywords: teacher's learning, teaching expertise, professional noticing, mathematical communication, online interaction.

"MIRAR CON SENTIDO" COMO COMPETENCIA DOCENTE DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Una competencia docente importante para el profesor de matemáticas es "mirar con sentido" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Esta competencia diferencia a un profesor de matemáticas de alguien que no es profesor y se caracteriza por identificar e interpretar los aspectos relevantes en determinadas situaciones (Eraut, 1996). La idea es que, cuando alguien llega a formar parte de una disciplina profesional (como es el ser maestro o profesor de matemáticas), debería ser diestro en "mirar con sentido" un cierto conjunto de hechos en las situaciones de enseñanza de las matemáticas (Sherin, 2001).

Mason (2002) señala que la competencia docente "mirar con sentido" (*the discipline of noticing*) permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas. Mason indica algunas características que pueden ayudar al desarrollo del proceso de mirar con sentido de una manera efectiva (*disciplined noticing*): i) desarrollar la sensibilidad aprendiendo a identificar lo que puede ser considerado relevante teniendo en cuenta un cierto objetivo que guía la observación (*intentional noticing*); ii) describir los aspectos observados manteniendo registros de lo observado, separando la descripción de los juicios (*marking and recording*); iii) reconocer posibles alternativas (*recognizing choices*), y iv) validar lo observado, intentando que los otros reconozcan lo que ha sido descrito o sugerido (*validating with others*).

Por otra parte, Van Es y Sherin (2002) y Sherin (2001) caracterizan la competencia docente "mirar con sentido" considerando tres destrezas: *identificar* los aspectos relevantes de la situación de enseñanza; *usar* el conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las interacciones en el aula, y *realizar conexiones entre sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales* sobre la enseñanza-aprendizaje. Esta manera de plantear la relación entre las acciones cognitivas de identificar, registrar e interpretar hace más explícita la necesidad de considerar el papel que desempeñan el conocimiento de matemáticas y el de didáctica de las matemáticas en guiar la observación y la interpretación de los hechos identificados y descritos. Sherin y sus colegas introducen en esta manera de entender el desarrollo de la competencia "mirar con sentido" (es decir una mirada profesional del profesor de matemáticas) la necesidad de explicitar la relación entre las evidencias y las "ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje". Recientemente, la caracterización y análisis del desarrollo de esta competencia docente del profesor de matemáticas ha empezado a ser foco de atención en el ámbito de la educación matemática (Jacobs, Lamb y Phillipp, 2010; Mason, 2002; Lin, 2005; Llinares, y Valls, 2009; Star y Strickland, 2008 y Sherin, 2001). Los resultados obtenidos indican que esta competencia docente genérica debe particularizarse considerando aspectos específicos de la enseñanza de las matemáticas, como por ejemplo, las características de la comunicación matemática en el aula.

CARACTERÍSTICAS DE LA COMUNICACIÓN MATEMÁTICA COMO CONTENIDO DEL APRENDIZAJE DEL ESTUDIANTE PARA PROFESOR

Uno de los aspectos con potencial para explicar el aprendizaje matemático en las clases de matemáticas es el de las características de la comunicación matemática (Lampert, 2003; Sfard, 2001; Wertsch y Toma, 1995). Los estándares de la NCTM (2003) subrayan la necesidad de crear aulas en la que se exploren las ideas desde diferentes perspectivas, permitiendo a los alumnos compartir lo que piensan y hacer conexiones. Estos estándares destacan el papel que desempeña la comunicación matemática en organizar y consolidar el pensamiento matemático de los estudiantes entrelazando los procesos de reflexión y comunicación. Esto ha hecho surgir una línea de investigación en educación matemática centrada en identificar patrones de interacción y regularidades en el aula de matemáticas que pueden ayudar a caracterizar la discusión matemática (Cobb y Bauersfeld, 1995). Los patrones de interacción se consideran regularidades que son interactivamente constituidas por el profesor y los estudiantes (Voigt, 1995). Los patrones de interacción funcionan para minimizar el riesgo de colapso y desorganización en el proceso interactivo en el aula de matemáticas. Son una consecuencia de la tendencia natural a hacer las interacciones humanas más predecibles, menos arriesgadas en su organización y evolución. Los patrones de interacción se ponen en juego en situaciones sin que sean pretendidos ni reconocidos necesariamente por los participantes. Cuando los participantes constituyen una regularidad que el observador describe como un patrón de interacción, dicha regularidad está estabilizando un proceso frágil de negociación de significados. Algunas investigaciones han identificado dos grupos de patrones de interacción (Wood, 1998; Voigt, 1995).

El patrón de extracción (llamado algunas veces patrón de embudo o focalización) se genera cuando los estudiantes tienen dificultades con la tarea propuesta por el profesor. En este caso, las acciones del profesor se dirigen a ayudar a los estudiantes a reducir la ambigüedad de la tarea para poder terminarla. Para ello, el profesor detalla y especifica las condiciones de la tarea, estrechando los objetivos pretendidos. En este patrón de interacción, el profesor guía a sus estudiantes hacia una solución determinada. Creyendo que ayuda a los estudiantes, el profesor plantea pequeñas cuestiones y transforma en algoritmo el proceso de resolución. Esta fase corresponde a la idea socrática según la cual el profesor extrae fragmentos de conocimiento que están asociados con pequeños pasos en el razonamiento. Un segundo patrón de interacción lo constituye *el patrón de discusión* (*discussion pattern*) en el que los estudiantes han resuelto el problema propuesto durante el trabajo en pequeños grupos y, a continuación, el profesor pide que lo informe un estudiante. El estudiante presenta una solución al problema y lo explica. El profesor contribuye a la explicación del estudiante mediante preguntas adicionales, observaciones, reformulaciones, o juicios, de manera que surge una explicación o solución conjunta y se toma como válida. El profesor pregunta a los estudiantes por otros modos de solución.

Estas ideas sobre la comunicación matemática generan una responsabilidad en el profesor en el sentido de tener que identificar, interpretar y gestionar los aspectos relevantes de la comunicación en el aula que son pertinentes para potenciar el aprendizaje de las matemáticas (Knott, 2009; Silver, y Smith, 1996). Así, comprender mejor la comunicación matemática y el papel potencial del profesor en la generación de contextos comunicativos adecuados forma parte de las competencias docentes por desarrollar en el proceso de llegar a ser profesor de matemáticas (Douek, 2005; Stein, Engle, Smith y Hughes, 2008) y en las iniciativas de desarrollo profesional (Brantlinger, Sherin y Linsenmeier, 2011). Siguiendo estos estudios sobre la comunicación matemática en el aula, nosotros estamos interesados en explorar cómo pueden iniciar los estudiantes para profesor el desarrollo de la competencia docente de identificar e interpretar los patrones de interacción y analizar las condiciones del aula en las que se dan determinados tipos de interacción.

INTERACCIÓN Y DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DOCENTE "MIRAR CON SENTIDO"

Las perspectivas socioculturales del aprendizaje subrayan la importancia de la interacción en los proceso de construcción de conocimiento (Wenger, 1998; Wells, 2002). Cuando esta perspectiva se aplica a los procesos de formación de futuros profesores de matemáticas, se genera la hipótesis de la relevancia de la interacción entre los estudiantes para profesor en el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" la enseñanza de las matemáticas. En línea con esta hipótesis, las nuevas tecnologías están proporcionando a los formadores de profesores instrumentos para diseñar entornos de aprendizaje que pueden ayudar a potenciar los contextos interactivos durante la resolución de problemas profesionales por parte de los estudiantes para profesor (Llinares y Olivero, 2008; Prieto y Valls, 2010).

En un contexto *b-learning* una cuestión importante es cómo caracterizar los procesos de construcción colaborativa del conocimiento que ocurren en discusiones asincrónicas (debates *online*) entre estudiantes para profesor (De Wever, Schellens, Valcke y Van Keer, 2006). En este tipo de contextos, las características del proceso argumentativo de los estudiantes para profesor se relacionan con otras dimensiones que definen la calidad del discurso generado, como son la forma de participar y el contenido del discurso. Esta situación genera cuestiones específicas que intentan aportar una explicación de los procesos de desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" (o ausencia de desarrollo) generados en dichos contextos. Desde un punto de vista conceptual, Wells (2002) señala que es en la interacción donde se puede producir progreso en el sentido de que, compartir, cuestionar y revisar opiniones puede conducir a una nueva comprensión de todos los que participan. Una característica adicional de esta hipótesis es que el contenido del discurso sea considerado un "artefacto del conocimiento" sobre el que los participantes trabajan colaborativamente para mejorar. Esta hipótesis plantea cuestiones en investigación en Educación Matemática sobre qué formas debe tomar el discurso para considerarlo vinculado a la emergencia de situaciones de aprendizaje en las que se inicie el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" y qué tipo de condiciones permiten que esto ocurra de esta manera.

Los resultados de las investigaciones previas indican que la estructura de los entornos de aprendizaje parece influir en la manera en la que los estudiantes para profesor interaccionan entre ellos en un intento de ampliar y transformar su comprensión de la enseñanza de las matemáticas (Lin, 2005; Morris, 2006; Star y Strickland, 2008). En este sentido, las interacciones parecen potenciarse cuando asumen un foco de interés específico, lo que les permite llegar a compartir un cierto nivel de comprensión de la situación (Llinares y Valls, 2010; Prieto y Valls, 2010; Penalva, Rey y Llinares, 2011).

Este contexto genera cuestiones sobre la relación entre la interacción en entornos virtuales y la construcción de conocimiento necesario para enseñar matemáticas. La investigación presentada aquí intenta responder a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuáles son las características de la estructura argumentativa generada por estudiantes para profesor de matemáticas en un debate en línea? y
- ¿Cómo determinan estas características de la estructura argumentativa oportunidades de aprendizaje y desarrollo de la competencia docente *mirar con sentido la enseñanza de las matemáticas*?

Las características de las estructuras argumentativas que surgen en las discusiones colectivas son relevantes para entender el proceso por el cual los estudiantes para profesor crean argumentos como focos alrededor de los cuales se organiza la negociación de significados relativos a la enseñanza de la matemática que es parte constitutiva de su aprendizaje como profesores.

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes en este estudio fueron 29 estudiantes que cursaban una asignatura de Didáctica de las Matemáticas de la Licenciatura en Matemáticas. La asignatura adoptó una metodología *b-learning* que consiste en integrar actividades presenciales con actividades en línea. En este caso, 50% de las actividades fueron realizadas presencialmente y otro 50% fueron realizadas en línea. El diseño *b-learning* fue realizado siguiendo el modelo del aprendizaje sociocultural de Wells (2002) y ha sido evaluado y modificado durante un periodo de cinco años

(Llinares, 2009; Llinares, Valls y Roig, 2008). De manera específica, en este entorno virtual de aprendizaje los estudiantes tienen la posibilidad de ver video-clips de lecciones de matemáticas, leer documentos teóricos, participar en foros interactivos respondiendo a preguntas específicas y escribir informes síntesis en grupos, en respuesta a las cuestiones planteadas en el foro. En la participación en los foros (discusiones en línea) los estudiantes tenían que apoyar sus aportaciones y sus argumentos vinculando sus inferencias a evidencias empíricas procedentes de los video-clips y a la información proporcionada en los documentos teóricos. El objetivo de estas cuatro actividades era permitir que los estudiantes para profesor empezaran a desarrollar la competencia de identificar aspectos de la enseñanza de las matemáticas que son pertinentes para explicar el aprendizaje matemático de los estudiantes, interpretarlos desde alguna perspectiva teórica y usar estos registros para comunicarse con otros y poder validarlos al exponerlos al escrutinio de sus compañeros.

El informe presentado aquí se ha organizado alrededor del análisis de una de las actividades en línea centrada en el desarrollo de la capacidad de identificar y dotar de sentido a las características del discurso y la comunicación matemática en el aula (y en particular el patrón de discusión y patrón extractivo/focalización, Cobb y Bauersfeld, 1995). El entorno de aprendizaje integraba un video-clip en el que un profesor intentaba que sus alumnos pudieran generar una definición de figuras simétricas relacionando las propiedades de puntos simétricos, eje de simetría y mediatriz de un segmento. El video-clip es un contexto para discutir sobre cómo se apoya el aprendizaje de las matemáticas en la generación paulatina y progresiva de una comunicación matemáticamente más rica, ya que muestra la transición desde construir un discurso apoyado con la idea del espejo y su reflejo al uso de la idea de mediatriz de un segmento para manejar la idea de que dos puntos son simétricos si el eje forma la mediatriz del segmento que los une (Valls y Llinares, 2011). A los estudiantes para profesor se les proporcionaron documentos que describían el contexto de la lección desde la que provenía el video-clip y una serie de documentos teóricos sobre los patrones de interacción (Wood, 1998), y sobre característica de la comunicación matemática en el aula (estándares sobre la comunicación de la NCTM, 2003).

El debate se inicia con una intervención del formador en la que se señala el objetivo y cómo se deben organizar las participaciones para responder a la cuestión planteada.

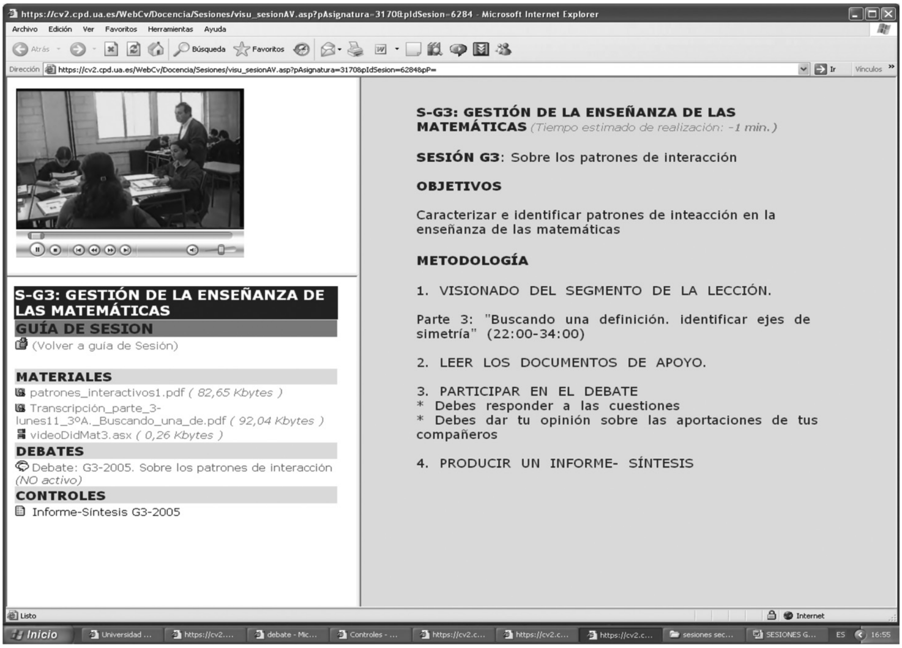
El objetivo de este debate es identificar y compartir los aspectos caracterís-

ticos de la interacción entre el profesor y los alumnos durante la enseñanza de las matemáticas.

¿Puedes identificar algún patrón de interacción entre el profesor y sus alumnos? Indica claramente en qué apoyas tu aportación.

Los estudiantes para profesor tenían que argumentar sus intervenciones de modo que, al considerar que una determinada interacción entre el profesor y sus alumnos reflejaba las características de algún patrón de interacción, debían justificar su interpretación usando las ideas teóricas proporcionadas sobre las características de los patrones de interacción. La figura 1 refleja la página inicial del entorno de aprendizaje.

Figura 1 Página inicial del entorno de aprendizaje



Análisis

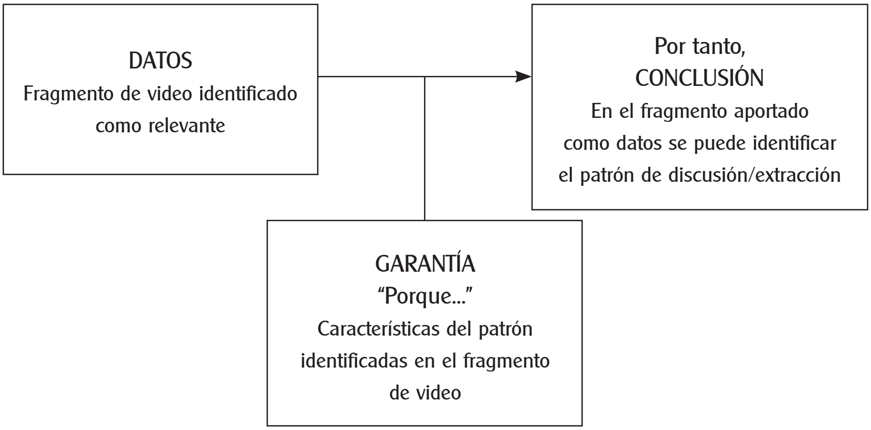
Los datos de esta investigación son las 93 contribuciones de los estudiantes para profesor en el tercer debate en línea sobre la comunicación matemática que estuvo activo durante dos semanas. Las contribuciones de los estudiantes se agruparon formando tres cadenas conversacionales consideradas como conjunto de participaciones relacionadas (Andriessen, Erkens, Van de Laank, Peters y Coirier, 2003) en las que se trataron tres focos comunes de atención.

- Foco 1: se discute sobre las características del "Patrón de discusión".
- Foco 2: se discute sobre las características del "Patrón de extracción" (y focalización).
- Foco 3: se contrastan las características de ambos patrones.

En un segundo nivel de análisis, consideramos en cada una de las cadenas conversacionales las aportaciones en las que se podían identificar las tres componentes del esquema de un argumento según Toulmin (2007): la *conclusión* alcanzada, los *datos* (fragmento de video identificado como relevante), y las *garantías* (características del patrón identificadas en el fragmento de video). Este esquema ha sido usado para explicar la relación entre la argumentación y el aprendizaje en el aula de matemáticas (Krummheuer, 1995; Weber, Maher, Powell, y Stohl Lee, 2008), pero no ha sido usado en la misma medida en el análisis del aprendizaje de los estudiantes para profesores de matemáticas y, en particular, en un contexto *b-learning*. Consideramos que el modelo de Toulmin puede ser una herramienta analítica útil para comprender cómo se da la estructura de una argumentación y se crean oportunidades de aprendizaje de los estudiantes para profesor durante las discusiones colectivas. En esta investigación, el significado de un argumento está vinculado a las interacciones en el debate en línea generadas por las participaciones que tienen que ver con las explicaciones dadas por los estudiantes para profesor ante el cuestionamiento de sus compañeros. Los argumentos presentados son, por tanto, producto de la realización de la tarea propuesta y de la interacción en línea que surge con posterioridad.

En este esquema, cuando alguien presenta una conclusión, intenta convencer a sus compañeros. Para apoyar esta conclusión, se deben presentar evidencias: los datos. A partir de entonces, los otros miembros del grupo pueden cuestionar por qué se debe deducir la conclusión a partir de los datos. Esta situación exige que el estudiante para profesor que ha presentado la conclusión genere una

Figura 2 Estructura de un argumento (Toulmin, 2007) como herramienta analítica en esta investigación



explicación para intentar apoyarla. Esta explicación se denomina *garantía* en el esquema de Toulmin (figura 2).

Es posible que el grupo pueda aceptar los datos presentados para apoyar la conclusión expuesta pero que no necesariamente esta conclusión derive de los datos presentados, es decir, que se cuestione la validez de las garantías presentadas. Cuando esto ocurre en una discusión, el estudiante para profesor que ha presentado la conclusión puede apoyar las garantías refinándolas mediante *cualificadores modales* que permiten expresar grados de confianza y enfrentarse a *refutaciones* que establecen las condiciones por las cuales no se puede aceptar la conclusión presentada. Estos elementos de la estructura de un argumento, propuestos por Toulmin, nos han permitido proporcionar una descripción de las argumentaciones generadas en el debate en línea que nos ha ayudado a identificar características de la estructura argumentativa que podemos considerar como oportunidades de aprendizaje para los estudiantes para profesor. De esta manera, el uso que nosotros hacemos del esquema de Toulmin se hace con el objetivo de identificar características de la discusión en línea que podíamos asumir que permitían a los estudiantes para profesor aprender a identificar aspectos relevantes en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, interpretarlos desde determinadas referencias teóricas e intentar validar con otros estas interpretaciones (Mason, 2002). Es decir, el uso del esquema de Toulmin nos ha permitido mostrar cómo los desafíos a los argumentos inicialmente presentados pueden conducir a los estudiantes para profesor a refinar las garantías presentadas y cómo las interacciones con otros pueden llegar a centrar el debate, determinando en qué condiciones son apropiadas estas garantías.

Así, en las aportaciones al debate en línea, los estudiantes para profesor presentaban argumentos del tipo "se presenta una conclusión relativa a unos datos que se indican y se justifica con ciertas garantías" y se seguían a partir de una serie de reacciones en las que se discutía sobre lo presentado. Cada una de estas secuencias de aportaciones la denominamos unidad argumentativa. Se produjeron un total de 17 unidades argumentativas en los tres tópicos específicos de discusión.

Cuadro 1 Focos de atención en las cadenas conversacionales

	UNIDADES ARGUMENTATIVAS		
INTERVENCIONES	Foco 1 Sobre el patrón de discusión	Foco 2 Sobre el patrón de extracción/focalización	Foco 3 Contrastando ambos patrones
57	5	6	1
13	1	3	0
14	0	0	1

En la sección de resultados, mostramos las características de las estructuras argumentativas de los estudiantes para profesor que son relevantes para el aprendizaje de las características de la comunicación matemática en este contexto en línea.

RESULTADOS

En esta sección, describimos las características de las unidades argumentativas que centraron la atención de los estudiantes y que permiten mostrar la relación entre la interacción, la negociación de los significados y el desarrollo de la competencia para mirar con sentido la enseñanza de las matemáticas. El análisis nos ha permitido identificar tres características de la estructura argumentativa que ayudan a explicar cómo los estudiantes para profesor identificaban determinadas interacciones en el aula, sucesos en el aula, y cómo las interpretaban, generando contextos de negociación de significados.

Refinando garantías para apoyar una conclusión

Una de las características de la interacción generada en el debate en línea tiene que ver con el proceso por el cual los estudiantes para profesor refinaban las garantías dadas para apoyar una conclusión. Este proceso de refinamiento podía ser realizado por el mismo estudiante para profesor que había propuesto la conclusión inicialmente, pero como respuesta a algún cuestionamiento previo, o podía ser realizado por algún compañero como apoyo a las garantías inicialmente propuestas para justificar la relación entre la conclusión y las evidencias dadas.

Por ejemplo, de las seis unidades argumentativas que se centraron en el patrón de discusión (foco 1), tres dieron lugar a una discusión sobre las conclusiones presentadas, convirtiéndose de esta manera en un contexto de aprendizaje. Un ejemplo de esta manera de proceder se da en el siguiente protocolo cuando la estudiante A12 identifica algunas características del patrón de discusión en un momento determinado de la secuencia de enseñanza observada en el video. Esta estudiante vincula la evidencia proporcionada (datos procedentes del video) con la conclusión y hace referencia a las diferentes características del patrón que ha identificado. Esta aportación inicial genera nuevas aportaciones que podemos considerar como ejemplo de cómo se *refinan las garantías para apoyar una conclusión,* mostrando un comportamiento característico de la estructura argumentativa generada.

CONCLUSIÓN
En el video se pueden identificar las características del Patrón de discusión

DATOS
Parte del fragmento 28:00 del video

Una opinión diferente (CADENA 2 – FOCO 1 – UNIDAD 3 / I06 – A12)

No sé si estoy en lo cierto, pero creo que el profesor durante el diálogo con los estudiantes sí emplea el patrón de discusión. Les voy a poner un ejemplo:

Profesor: *Ahora, tú tienes aquí por ejemplo una especie de [hace un dibujo a la izquierda del eje] ¿Sales y nos dibujas su simétrico?*

[El alumno pasa a la pizarra]

Profesor: *A ver, ¿cuál sería la figura simétrica de ésa respecto al eje?*

[El alumno dibuja el simétrico]

Profesor: *¿Qué opinan? Salvo medidas y tal es correcto. Rubén, ¿has seguido algún criterio? Quiero decir, tú cuando haces el dibujo simétrico lo haces, a ver... ¿te sale o has intentado seguir algún método?*

GARANTÍAS
Relaciona algunas características del patrón de discusión con lo sucedido en el video

Se da el patrón de discusión, puesto que aunque los estudiantes no han resuelto el problema en pequeños grupos, sí que es cierto que el profesor propone la tarea y el alumno, una vez que ha pensado en su solución, pasa a la pizarra y la expone al resto de sus compañeros. Además, posteriormente el profesor efectúa algunas preguntas como: "¿Qué opinan?" o "¿has intentado seguir algún método?", para contribuir así a la explicación del estudiante y llegar así a su objetivo que, en este caso, sería el concepto de punto simétrico. Por otra parte, en este caso, la solución del ejercicio es el punto de partida (en el documento aparece este punto como una característica propia del patrón de discusión). Esto le servirá al profesor, para explicar el porqué dos figuras son simétricas con respecto a un eje a partir del concepto de punto simétrico. ¿Qué opinan?

Esta conclusión es admitida por algunos estudiantes que, para mostrar su apoyo, aportan nuevas garantías o refinan las ya dadas por A12.

APOYA
Refina las garantías presentadas por A12

Totalmente de acuerdo (CADENA 1–FOCO 1–UNIDAD 3 / I23–A21)
Estoy de acuerdo con A12 en que, en el ejemplo que ha propuesto, se identifica un patrón de discusión. Además, para los que tengan un poco de duda, no sé si les servirá añadir que el profesor contribuye a la explicación del estudiante mediante las preguntas adicionales que ella ha comentado, que vienen a ser reformulaciones del ejercicio en otra figura. Aquí les aporto la parte del protocolo del video en la que se identifica esta característica propia del patrón de discusión:
Rubén: *He hecho como si pusiera un espejo en el centro e imaginándome la figura.*
Profesor: *Ah, en este caso no ha habido demasiado problema. Bien. ¿Qué pasaría ahora, Alberto, si cambiamos el eje y lo ponemos ya no horizontal o vertical, sino de esta forma* [dibuja un eje inclinado]*, por ejemplo? Y nosotros tenemos, ahora te lo pongo más fácil, una simple L. A ver, ¿cuál sería en este caso la figura simétrica?*

A21 intenta refinar una de las características identificadas por A12, poniendo de manifiesto que las preguntas formuladas por el profesor a las que A12 hacía referencia sirven además para reformular la tarea propuesta. De esta manera, hace referencia a una característica del patrón de discusión que no había sido mencionada por A12.

En este tipo de interacciones, se muestra de qué manera hacer explícitas las garantías; como sucedió en la aportación inicial, generó la oportunidad para que otros estudiantes para profesor pudieran refinar las garantías discutiendo sobre las características que debían ser contempladas para asumir que la interacción entre el profesor y los estudiantes en el video era un ejemplo de un patrón de discusión. Éste es el comportamiento que nosotros asumimos que es evidencia de la constitución de una oportunidad para aprender de los estudiantes para profesor.

Discutiendo sobre cómo se debe establecer una conclusión para que sea admitida

Otra característica de la interacción en el debate en línea que permitió que surgiera una oportunidad para mejorar la competencia docente de mirar con sentido las interacciones entre el profesor y sus alumnos durante la enseñanza de las matemáticas se da cuando los estudiantes para profesor discuten sobre cómo debe establecerse una conclusión para que sea admitida como válida. Un ejemplo de esta característica surgió cuando uno de los estudiantes para profesor fue relacionando cada parte del fragmento del video con distintas características del patrón de discusión. Así, el estudiante para profesor señala cómo el profesor, al presentar la tarea de la interacción entre el profesor y sus estudiantes, se centra en las contribuciones matemáticas de los estudiantes. Para ello, el estudiante para profesor subraya como una cuestión relevante que se debe tener en cuenta que el profesor contribuye a la explicación dada por el alumno cuando un alumno expone su solución al resto de la clase. La interacción siguiente es un ejemplo de esta manera de proceder durante la discusión en línea. En esta interacción, el estudiante para profesor subraya en su intervención que las interacciones entre el profesor y sus alumnos son relevantes para el aprendizaje de las matemáticas, ya que el profesor parece valorar lo que los estudiantes dicen, por lo que los induce a compartir sus ideas con los otros. Al mismo tiempo, también señala que el trabajo en pequeños grupos, que aparece como característica del patrón en el documento teórico, no se cumple. Esto desencadena una serie de intervenciones en las que se cuestionan las garantías presentadas por A12.

DUDA
Duda de las garantías presentadas

Duda (CADENA 2 – FOCO 1 – UNIDAD 3 / I07 – A26)

Pues me has dejado en duda. Bueno, yo creía que para que se diera un patrón tenía que cumplir todas las condiciones, entonces, al no haber primero una discusión por grupos entre los alumnos, pues he desechado que se pudiese dar el patrón que tú dices. Vale, si alguien me puede aclarar esto se lo agradecería.

A26 considera que es necesario poder reconocer todas las características del patrón de discusión para poder concluir que este patrón sí se da. Así, A26 cuestiona el argumento presentado por A12, argumentando con base en la suficiencia de las garantías presentadas. Este reto desencadena algunas reacciones en apoyo a la manera en que A12 establece la relación entre los datos y la conclusión.

APOYA
Apoya la manera en que A12 establece su conclusión

Mi opinión sobre este caso (CADENA 2 – FOCO 1 – UNIDAD 3 / I08 – A23)

Yo pienso que el ejemplo de A12 está bien, puesto que, a mi parecer, las características para identificar los patrones son siempre orientativas (no han de cumplirse estrictamente al pie de la letra). Es evidente que hay una comunicación explicativa por parte de ambas partes, una aportación de ideas para intentar comprender mejor la situación y yo creo que ésa es la esencia de este patrón. El hecho de que la discusión sea colectiva es algo secundario, pero no por ello poco importante, puesto que, cuanto mayor sea el grupo de personas participantes en la explicación, más enriquecidas estarán las conclusiones de la discusión.

APOYA
Apoya la manera en que A12 establece su conclusión

Respuesta (CADENA 2 - FOCO 1 - UNIDAD 3 / I09 - A15)

Yo creo también que, aunque no se den todas las condiciones de un patrón u otro, lo que nos puede ayudar a diferenciar uno de otro es fijarnos en si la solución es lo que se persigue (patrón extractivo) o si es de lo que uno parte (patrón de discusión). Por tanto, yo también lo veo como A12, porque aunque el problema no haya sido pensado en pequeños grupos y comentado entre ellos con anterioridad, es cierto que ellos ya han trabajo este tema y son capaces de resolverlo ellos solos y de explicarlo al resto de la clase.

En ambos casos los estudiantes consideran que las garantías presentadas por A12 son legítimas. A23 considera que las características para identificar los patrones son orientativas y, por tanto, no es necesario que se cumplan todas. A15 va un poco más allá y apunta que existe una característica del patrón que es determinante para su identificación: el hecho de que la discusión se produzca a partir de la solución de una tarea. De esta manera, A15 se centra más en las características que según el documento teórico distinguen a ambos patrones (discusión y extracción) que en las características del propio patrón de discusión.

En otra unidad argumentativa en la que A12 responde a otro estudiante, también cuestiona las garantías presentadas con base en la suficiencia. A12, de la misma manera que en los casos anteriores, defiende su conclusión utilizando las dos garantías anteriores: que no es necesario que se cumplan todas las características de un patrón y que la característica determinante del patrón es que el punto de partida sea la solución a la tarea.

A ver qué opinas (para A08) (CADENA 2 – FOCO 1 – UNIDA D 3 / I66 – A12)

APOYA
Apoya la manera en que ha establecido su conclusión

No estoy de acuerdo contigo. No tienen por qué cumplirse todas las propiedades de los patrones, sino que el ejemplo cumpla más o menos esas características. De hecho, creo (opinión personal) que es muy difícil encontrar un ejemplo que cumpla a la perfección todo. La principal característica que te marca que es un patrón de discusión (creo yo) es que, en este caso, la solución del ejercicio es el punto de partida. Posteriormente, la respuesta le servirá al profesor, para explicar el porqué dos figuras son simétricas con respecto a un eje a partir del concepto de punto simétrico.

Weeeeno (CADENA 2 – FOCO 1 – UNIDA D 3 / I67 – A08)

DUDA
Plantea las limitaciones de las garantías presentadas por A12

Sé que es difícil encontrar algo que coincida a la perfección, pero el considerarse que se cumpla “más o menos” va en función de las interpretaciones... Tú dices que comienza con la solución al ejercicio y, por ello, es patrón de discusión. Yo creo que, para que éste sea el motivo que fundamente la argumentación, habría que estar seguro de que el alumno ha trabajado antes (que en este caso no lo sabemos, puede que sí, puede que no ¿y si sale a la torera y lo hace bien de pura casualidad? ¿sería efectiva la labor del profesor?) y por eso he comentado lo de la actitud del profesor, porque dado que no lo sabemos seguro (que aun así, yo lo daría por hecho) la actitud del profesor me pareció muy adecuada al patrón de discusión.

A08 admite que puede resultar difícil identificar todas las características de un patrón y por eso también considera que no es necesario que se den todas. Sin embargo, A08 pone de manifiesto que tener que elegir la característica fundamental del patrón es algo subjetivo y, para demostrarlo, contrapone la que él considera como característica fundamental del patrón de discusión a la que considera A12 (A12: la solución al problema es el punto de partida de una discusión; A08: que el alumno haya trabajado previamente la tarea).

Este ejemplo describe una manera de proceder característica de la interacción que tenía como objetivo determinar si las garantías proporcionadas eran suficientes para admitir la conclusión. Las discusión entre los estudiantes para profesor sobre si la interacción profesor-estudiante centrada en las contribuciones matemáticas de los estudiantes durante la resolución de la tarea es una condición suficiente para asumir que se estaba ante un patrón de discusión, hizo surgir la necesidad de considerar o no las evidencias que podían proceder de la resolución de la tarea en grupo realizada previamente por los estudiantes. Estos ejemplos ilustran cómo el desafiar las conclusiones conducía a los estudiantes para profesor a reconocer la adecuación parcial de las garantías presentadas.

Poniendo en duda la conclusión

En algunas ocasiones, los estudiantes pusieron en duda la conclusión presentada por algún compañero. En estos casos, no hay un reto a las garantías sino a la conclusión presentada, de modo que se considera que, a partir de los mismos datos, se puede extraer una conclusión diferente. Por ejemplo, uno de los estudiantes para profesor considera que es un ejemplo de patrón extractivo el fragmento en el video-clip donde el profesor está discutiendo con sus alumnos sobre el número de ejes de simetría en diferentes tipos de flores y cómo es posible determinarlos, ya que considera que las preguntas que hace el profesor están motivadas por las dificultades que identifica en sus alumnos y este estudiante para profesor asume que la acciones del profesor están dirigidas a ayudar a sus alumnos, reduciendo la ambigüedad de la tarea. Sin embargo esta interpretación es puesta en duda por un compañero.

CONCLUSIÓN
En el video se pueden identificar las características del *Patrón de extracción*

Ejemplo de focalización/extractivo (CADENA 1 – FOCO 2 – UNIDAD 9 / I34 – A21)

Profesor: *Sí. Por tanto, fijaos que tendríamos los cinco ejes porque las figuras podían ser distintas. Bien. ¿Nos describes, Esperanza, la segunda?*

DATOS
Parte del fragmento 26:00 del video

Esperanza: *Es que lo de, lo de, lo que tiene dentro la flor no es, no es simétrico.*
Profesor: *He de comentar que parece que todavía no han entendido que hay que dejar de lado las "impurezas en las simetrías de las figuras en la Naturaleza".*
Profesor: *Teníamos un círculo también. Ahí lo que apuntaba Adrián es más claro. Si antes, Adrián, los pétalos no eran iguales, ahora es evidente que son casi, casi cada uno, con perdón, de su padre y de su madre. Es decir, no parece haber ningún criterio, porque enfrente de un pétalo largo hay uno corto y luego, enfrente de uno largo hay otro largo. Pero, suponiendo que fueran iguales, en teoría ¿serviría lo mismo que dijo antes Juan o no?*

GARANTÍAS
Relaciona algunas características del patrón de extracción con lo sucedido en el video

El profesor vuelve a ayudar centrando la discusión, refiriéndose al comentario expuesto por Adrián en el ejemplo anterior y planteando la pequeña cuestión de que, si en esta segunda flor los pétalos no fueran tan desiguales, se podría aplicar el argumento proporcionado por Juan, que recordemos era: "cada pétalo corresponde a un eje de simetría". Esto también forma parte del patrón extractivo, pues el profesor, con esta cuestión, intenta que los alumnos, mediante el conocimiento de simetría en las flores que tenían del ejemplo anterior, razonen para ver qué sucede en este caso. También podría verse como una especie de patrón de focalización, pues en lugar de resolver él la cuestión, plantea esta pregunta con el objetivo de estrechar el foco de atención hacia el aspecto de las simetrías en las flores, que parecen no haber entendido. Pero esto era de esperar, pues el patrón de focalización [...]

DUDA
Plantea una conclusión alternativa a partir de los mismos datos

Duda (CADENA 2 – FOCO 1 – UNIDA D 9 / I35 – A11)
¿Aquí no existiría también un patrón de discusión? Si lo vemos como que el profesor a partir de la explicación de Juan pregunta al resto.
Profesor: *¿Serviría lo mismo que dijo antes Juan o no?...*
¿Podría ser que los dos patrones se relacionasen?

APOYA
Apoya la propuesta de A11

Podría darse el caso (CADENA 2 – FOCO 1 – UNIDA D 9 / I36 – A23)
Yo no veo en ese fragmento en concreto el patrón de discusión por ninguna parte, ya que la explicación de Juan creo que queda demasiado lejos, y justo lo que se expresa en el ejemplo que se ha propuesto, sacado del contexto de la clase, me parece que no representa el patrón de discusión. Ahora bien, si se entiende como tú dices que

> todo se basa a partir de la explicación de Juan (que puede ser, pero debería haberse indicado en la cita que se ha hecho al indicar el ejemplo), es posible ver un destello de patrón de discusión. Yo pienso que dentro de un patrón pueden darse otros, si este primero es muy extenso.

Las dudas sobre las conclusiones alcanzadas trasladan la atención de los estudiantes para profesor hacia el papel de las garantías. En el caso particular del protocolo usado como ejemplo, los estudiantes para profesor habían identificado como relevantes los mismos hechos en la secuencia de enseñanza, el que el profesor estaba planteando cuestiones adicionales sobre la tarea de identificar el número de ejes de simetría en diferentes tipos de flores al asumir que sus estudiantes tenían dificultades al resolverla. Sin embargo, la diferencia sobre la que surge la interacción entre los estudiantes para profesor fue al interpretar el papel del profesor. Mientras unos asumían que el profesor con sus preguntas podía estar vaciando la tarea de potencial matemático y, por tanto, lo que se estaba dando allí era un ejemplo de patrón extractivo, otros estudiantes para profesor interpretaban que, cuando el profesor intentaba poner en relación las diferentes respuestas de sus alumnos, estaba intentando centrarse en su potencial matemático.

Este tipo de interacción entre los estudiantes para profesor, más allá de lo que pudieran ser los objetivos del profesor en el video al plantear sus preguntas a sus alumnos (o reducir la ambigüedad de la tarea o subrayar lo matemáticamente válido de las respuestas de sus alumnos) indica que las situaciones en las que se ponían en duda las conclusiones propuestas obligaban a los estudiantes para profesor a explicitar y usar las referencias teóricas para refinar las garantías o para discutir sobre la relación entre los datos y la conclusión como una manera de establecer conexiones entre las características de los patrones de interacción según las descritas en los documentos teóricos y la secuencia de enseñanza grabada en el video-clip, convirtiéndose esta situación en una oportunidad de aprendizaje para ellos.

DISCUSIÓN

Aprender a identificar aspectos de la comunicación matemática en el aula que pueden ser relevantes para el aprendizaje de las matemáticas es un aspecto importante del aprendizaje de las competencias docentes para ser profesor de matemáticas (Lampert, 2003). En relación con el aprendizaje de características de la comunicación matemática y con el desarrollo de la capacidad de "observar con sentido" (el contenido del aprendizaje pretendido), los resultados señalan que los estudiantes fueron capaces de establecer conexiones entre las características del patrón de discusión y las del patrón extractivo/focalización (Cobb y Bauersfeld, 1995; Voigt, 1995; Wood, 1998) en diferentes momentos del extracto de la lección que ellos habían visto. La discusión sobre cómo debían ser consideradas las características de la interacción matemática en el aula y el foco sobre el contraste entre las características de los patrones de interacción señalan que, en cierta medida, los estudiantes estaban mejorando su destreza de "mirar con sentido" estos aspectos de la enseñanza de las matemáticas. Aun cuando no tenemos constancia de la consolidación de este aprendizaje, podemos asumir que el desarrollo de esta competencia, cuya construcción se ha iniciado en estos entornos, es todavía inestable, ya que las investigaciones sobre el aprendizaje del profesor señalan que la consolidación del conocimiento y el desarrollo de la competencia docente es un proceso a largo plazo (Sowder, 2007).

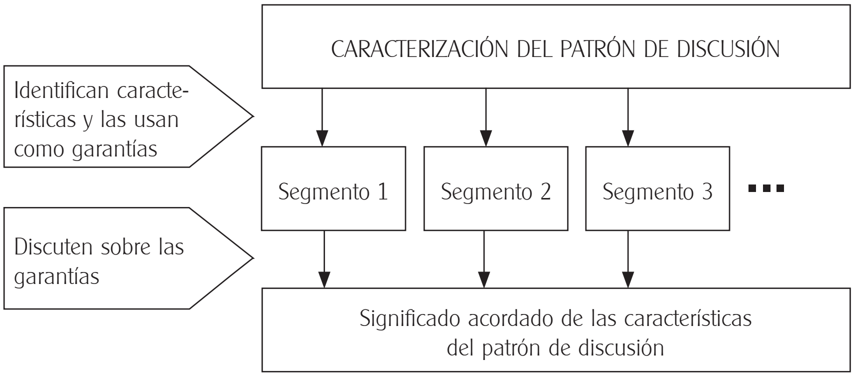
Por otra parte, en esta investigación hemos asumido una perspectiva sociocultural del aprendizaje de los estudiantes para profesor que subraya el papel de los contextos colaborativos en el desarrollo inicial de esta competencia cuando se analiza la enseñanza. Desde los resultados obtenidos, podemos considerar relevantes dos aspectos del aprendizaje de los estudiantes para profesor que hemos analizado. El primero se relaciona con la forma en la que se dio la interacción en este contexto en línea, es decir, con la estructura argumentativa generada como consecuencia de intentar resolver un problema profesional (interpretar hechos en la enseñanza de las matemáticas). El segundo se relaciona con la estructura del entorno de aprendizaje.

Cuando las garantías llegan a ser el objeto del debate

En relación con el primer punto, desde la perspectiva analítica adoptada hemos podido identificar las características de las estructuras argumentativas generadas por los estudiantes para profesor cuando analizaban segmentos de enseñanza de las matemáticas. Este foco analítico nos ha permitido mostrar que aprender sobre las características de la comunicación matemática en una lección de matemáticas no es un proceso fácil. En este sentido, hemos identificado tres aspectos de las estructuras argumentativas generadas y que, en cierta medida, muestran la forma que adopta el proceso mediante el cual los estudiantes para profesor generan focos de atención y procesos de negociación de significados (Wenger, 1998), creando oportunidades para el aprendizaje. En primer lugar, el proceso mediante el cual los estudiantes se veían obligados a refinar las garantías propuestas para apoyar sus argumentos (lo que Toulmin denomina cualificadores modales de los argumentos). En segundo lugar, el proceso por el cual los estudiantes discutían sobre cómo se debe establecer una conclusión para que sea admitida. Por último, cuando se ponía en duda la conclusión presentada por algún compañero. Estas tres características de las estructuras argumentativas generadas por los estudiantes para profesor cuando estaban aprendiendo a identificar aspectos relevantes de la comunicación matemática indican cómo se articula la relación entre la construcción de los argumentos, la interacción en los debates en línea y el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" en relación con las características de los patrones de discusión en una clase de matemáticas como un aspecto característico de la enseñanza de las matemáticas.

De esta manera, el hecho de vincular un determinado segmento del video con el patrón de discusión o con el patrón de extracción, identificando sus diferentes características, hace que podamos asumir que los estudiantes van construyendo el significado del patrón a medida que la discusión avanza. La figura 3 describe cómo procedía la interacción entre los estudiantes para profesor y qué refleja la secuencia seguida en el caso del patrón de discusión y qué refleja la manera en que se generaban los procesos argumentativos en este debate en línea.

Figura 3 Relación entre la estructura de la argumentación y el inicio del desarrollo de la competencia "mirar con sentido" la enseñanza de las matemáticas



Nosotros interpretamos que el proceso por el cual los estudiantes para profesor identificaban las características de los patrones de interacción (Wood, 1998) y la manera como se discutían las garantías o el papel que debían desempeñar las garantías en la relación entre los datos y la conclusión alcanzada es una oportunidad para la instrumentalización del conocimiento sobre la comunicación matemática que fundamenta la competencia docente "mirar con sentido". Este proceso de instrumentalización hay que entenderlo como la integración de las ideas teóricas procedentes de la didáctica de la matemática en los procesos de interpretación de los aspectos considerados relevantes en la enseñanza de las matemáticas. Es decir, es lo que Sherin y sus colegas denominan realizar *conexiones entre sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales* sobre la enseñanza-aprendizaje y que ha empezado a ser documento en otras investigaciones (Prieto y Valls, 2010).

Entornos de aprendizaje en la formación de profesores que fomentan el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido"

Diseñar entornos de aprendizaje que integren oportunidades para que los estudiantes para profesor puedan realizar discusiones dirigidas por objetivos concretos y que apoyen el desarrollo de diferentes aspectos de las competencias docentes para enseñar matemáticas es una cuestión de investigación en estos momentos (Gómez Blancarte, 2010; Llinares y cols., 2008). Los resultados de nuestro estudio indican que es posible generar discusiones en la que los estudiantes para profesor pueden tener en cuenta las aportaciones de sus compañeros mediante una estructura de la argumentación caracterizada por refinar las garantías para poder aceptar una conclusión, discutir sobre cómo se debe establecer una conclusión para que sea admitida y ponerlas en duda.

Los resultados de algunas investigaciones previas (Llinares y Valls, 2009, 2010; Penalva y cols., 2011, y Torregrosa, Haro, Penalva y Llinares, 2010) ya habían señalado que determinados elementos del entorno de aprendizaje nos permitían tener condiciones adecuadas para que los estudiantes para profesor generaran discusiones productivas. Estos elementos son las cuestiones iniciales de la actividad propuesta y del debate y los documentos teóricos que desempeñan el papel de "andamios" cognitivos para guiar las aportaciones de los estudiantes para profesor (determinando qué mirar y cómo mirar). Estos elementos característicos del entorno de aprendizaje nos colocaban en condiciones de poder estudiar las estructuras de la argumentación que emergía. Para ello, en este entorno de aprendizaje, puesto en funcionamiento en esta investigación, el formador de profesores no realizaba valoraciones de las aportaciones de los estudiantes para profesor al debate y por consiguiente les trasladaba la responsabilidad para determinar si una conclusión debía ser o no aceptada. Esta norma explícita de funcionamiento en la discusión en línea parece que ayudó a que los estudiantes para profesor atendieran, evaluaran y cuestionaran las aportaciones de sus compañeros, posibilitando el que se dieran las oportunidades de refinar las garantías que se aportaban para aceptar una conclusión y cuestionar lo que se aportaba como una garantía. De esta manera, estos elementos del entorno de aprendizaje fueron una condición necesaria para que la discusión en línea discurriera como lo hizo, creándose de esta manera las oportunidades de aprendizaje para los estudiantes para profesor.

Nosotros asumimos que crear oportunidades de aprendizaje para los estudiantes para profesor no es una tarea fácil, pero nuestra investigación ha aportado algunas características que inducen a pensar que es factible apoyar el aprendizaje y el inicio de algunas competencias docentes en los estudiantes para profesor con el diseño de entornos de aprendizaje que tengan en cuenta algunos de los elementos identificados en nuestra investigación. Sin embargo, queda todavía mucho camino que recorrer para tener aportaciones que nos permitan refinar nuestra conceptualización del aprendizaje de los estudiantes para profesor y del desarrollo de las competencias docentes necesarias para enseñar matemáticas, así como de información empírica que fortalezca la transferencia de conocimiento a los programas de formación. Por ello, la investigación sobre el aprendizaje de los estudiantes para profesor y sobre la relación entre el diseño de entornos de aprendizaje y las características del aprendizaje generado es una investigación potencialmente útil en estos momentos.

RECONOCIMIENTOS

1. Esta investigación ha recibido el apoyo del proyecto del Plan Nacional de Investigación I+D del Ministerio de Educación y Ciencia, Dirección General de Investigación, España, núm. EDU2008-04583/EDUC.
2. Una versión previa de este trabajo fue presentado en el XIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), realizado en Lérida, España, en septiembre de 2010; así como en la Con-

ference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, en Belo Horizonte, Brasil, en julio de 2010.

3. Los análisis sobre los que se ha construido este informe de investigación fueron iniciados por el primer autor durante una estancia de investigación posdoctoral en la Universidad Pedagógica Nacional, en la Ciudad de México.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andriessen, L., G. Erkens, C. van de Laank, N. Peters y N. Coirier (2003), "Argumentation as negotiation in electronic collaborative writing", en J. Andriessen, M. Baker y D. Suthers (eds.), *Arguing to learn: confronting cognition in computers-supporters collaborative learning environment,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 79-115.

Brantlinger, A., M. G. Sherin y K. A. Linsenmeier (2011), "Discussing discussion: a video club in the service of math teachers' National Board preparation", *Teachers and Teaching. Theory and Practice,* vol. 17, núm. 1, pp. 5-33.

Callejo, M. L., S. Llinares y J. Valls (2008), "Using video-case and online discussion to learn to "notice" mathematics teaching", en O. Figueras y A. Sepúlveda (eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the XX North American Chapter,* Morelia, Michoacán, México, PME, vol. 2, pp. 233-240.

Cobb, P. y H. Bauersfeld (eds.) (1995), *The emergence of Mathematical meaning: interaction in classroom cultures,* Hillsdale, NJ, Erlbaum.

De Wever, B., T. Schellens, M. Valcke y H. van Keer (2006), "Content analysis schemes to analyze transcripts of online asynchronous discussion groups: a review", *Computers and Education,* núm. 46, pp. 6-28.

Douek, N. (2005), "Communication in the Mathematics classroom. Argumentation and Development of Mathematical Knowledge", en A. Chronaki e I. M. Christiansen (eds.), *Challenging perspectives on mathematics classroom communication,* Greenwich, IA, pp. 145-172.

Eraut, M. (1996), *Developing Professional Knowledge and Competence,* Londres, The Falmer Press.

Gómez Blancarte, A. L. (2010), *Un estudio sobre el aprendizaje de profesores de secundaria en servicio: el caso de un proyecto de desarrollo profesional en estadística,* Tesis doctoral inédita, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN-Cinvestav, México, D. F., México.

Jacobs, V. R., L. L. Lamb y R. A. Philipp (2010), "Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 41, núm. 2, pp. 169-202.

Knott, L. (ed.) (2009), *The role of Mathematics discourse in producing leaders of discourse,* Charlotte, NC, Information Age Publishing.

Krummheuer, G. (1995), "The Ethnography of Argumentation", en P. Cobb y H. Bauersfeld (eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning. Interaction in Classroom Cultures,* Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 229-270.

Lampert, M. (2003), "Communication and language", en J. Kilpatrick, W. Gary y D. Schifter (eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics,* Reston, VA, NCTM, pp. 237-249.

Lin, P. J. (2005), "Using research-based video-cases to help pre-service primary teachers conceptualize a contemporary view of mathematics teaching", *International Journal of Science and Mathematics Education,* núm. 3, pp. 351-377.

Llinares, S. (2009), "Learning to 'notice' the mathematics teaching. Adopting a socio-cultural perspective on student teachers' learning", en A. Gomes (coord.), *EME2008 Elementary Mathematics Education,* Braga, Portugal, Barbosa y Xavier, pp. 31-44.

Llinares, S. y F. Olivero (2008), "Virtual communities and networks of prospective mathematics teachers: technologies, interactions and new forms of discourse", en K. Krainer y T. Wood (eds.), *The International Handbook of Mathematics Education, vol. 3. Participants in Mathematics Teacher Education,* Rotterdam/Taipei, Sense Publishers, pp. 155-179.

Llinares, S. y J. Valls (2009), "The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies", *Instruction Science,* núm. 37, pp. 247-271.

——— (2010), "Prospective primary mathematics teachers' learning from online discussions in a virtual video-based environment", *Journal of Mathematics Teacher Education,* núm. 13, pp. 177-196.

Llinares, S., J. Valls y A. I. Roig (2008), "Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas", *Educación Matemática,* vol. 20, núm. 3, pp. 59-82.

Mason, J. (2002), *Researching your own practice. The discipline of noticing,* Londres, Routledge-Falmer.

Morris, A. (2006), "Assessing pre-service teachers' skills for analyzing teaching", *Journal of Mathematics Teacher Education,* núm. 9, pp. 471-505.

NCTM (2003), *Principios y estándares para la Educación Matemática,* Reston, VA, NCTM (traducción al castellano: SAEM-Thales, Sevilla).

Penalva, M. C., C. Rey y S. Llinares (2011), "Identidad y aprendizaje de estudiantes de psicopedagogía. Análisis de un contexto *b-learning* en didáctica de la matemática", *Revista Española de Pedagogía,* vol. LXIX, pp. 101-118.

Prieto, J. L. y J. Valls (2010), "El aprendizaje de estudiantes para maestro de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva. Negociación e instrumentalización", *Educación Matemática,* vol. 22, núm. 1, pp. 57-85.

Sfard, A. (2001), "There is more to discourse that meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 46, pp. 13-57.

Sherin, M. G. (2001), "Developing a professional vision of classroom events", en T. Wood, B. Scott Nelson y J. Warfield (eds.), *Beyond classical pedagogy: teaching elementary school mathematics,* Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 75-93.

Silver, E. A., y M-S. Smith (1996), "*Building discourse communities in mathematics classrooms: a worthwhile but challenging journey",* en P. C. Elliot y M. J. Kenney (eds.), *Communication in Mathematics. K-12 and Beyond,* Reston, VA, NCTM, pp. 20-28.

Sowder, J. (2007), "The Mathematical Education and Development of Teachers", en F. Lester Jr. (ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Charlotte, NC y Reston, VA, IAP-NCTM, pp.157-224.

Star, J. R. y S. K. Strickland (2008), "Learning to observe: using video to improve pre-service mathematics teachers' ability to notice", *Journal Mathematics Teacher Education,* vol. 11, núm. 2, pp. 107-125.

Stein, M. K., R. A. Engle, M. Smith y E. Hughes (2008), "Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell", *Mathematical Thinking and Learning,* núm. 10, pp. 313-340.

Torregrosa G., M. J. Haro, M. C. Penalva y S. Llinares (2010), "Concepciones del profesor sobre la prueba y *software* dinámico. Desarrollo en un entorno virtual de aprendizaje", *Revista de Educación,* vol. 352, núm. mayo-agosto, pp. 379-404.

Toulmin, S. (2007), *Los usos de la argumentación,* Barcelona, Ediciones Península.

Valls, J. y S. Llinares (2011), "Aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria", en J. M. Goñi (coord.), *Matemáticas. Didáctica y práctica docente,* Barcelona, Graó.

Van Es, E. y M. G. Sherin (2002), "Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions", *Journal of Technology and Teacher Education,* núm. 10, pp. 571-596.

Weber, K., C. Maher, A. Powell y H. Stohl Lee (2008), "Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 68, pp. 247-261.

Wells, G. (2002), *Dialogic inquiry. Towards a socio-cultural practice and theory of education,* 2a. ed., Cambridge, Cambridge University Press.

Wenger, E. (1998), *Communities of practice. Learning, meaning, and identity,* Nueva York Cambridge University Press.

Wertsch, J. y Ch. Toma (1995), "Discourse and Learning in the Classroom. A Sociocultural Approach", en L. Steffe y J. Gale (eds.), *Constructivism in Education,* Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 159-174.

Wood, T. (1998), "Alternative patterns of communication in the mathematics classes: funnelling or focusing?", en Steinbring y cols. (eds.), *Language and communication in the Mathematics Classroom,* Reston, VA, NCTM, pp. 167-178.

DATOS DE LOS AUTORES

Ana Isabel Roig
Universidad de Alicante, España.
Departamento de Innovación y Formación Didáctica.
aroigal@hotmail.com
Salvador Llinares
Universidad de Alicante, España.
Departamento de Innovación y Formación Didáctica.
sllinares@ua.es
M. C. Penalva
Universidad de Alicante, España.
Departamento de Innovación y Formación Didáctica.
carmina.penalva@ua.es