

En qué consiste el “conocimiento matemático para la enseñanza” de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria

Simón Mochón y Melchor Morales Flores

Resumen: Para mejorar la educación, se tiene que llegar hasta el elemento conductor del aula, el profesor, y a los requerimientos necesarios en lo que se refiere a su conocimiento y habilidades de enseñanza. La gran mayoría de las propuestas de reforma educativa no han alcanzado esto. Aquí se describe un proyecto de investigación con dos propósitos paralelos: poder diagnosticar los conocimientos pedagógico y “matemático para la enseñanza” de los profesores de la escuela primaria y proponer un método eficaz que propicie su desarrollo. Para esto, se diseñaron talleres de discusión centrados en el conocimiento que el profesor necesita en el aula, en los que se le hizo reflexionar sobre su práctica docente y se le motivó a mejorarla. Los resultados de la investigación identificaron varias áreas deficientes del conocimiento de los profesores, las cuales deben ser reforzadas en general.

Palabras clave: desarrollo, conocimiento, matemático, pedagógico, profesores.

What is the "mathematical knowledge for teaching" a teacher and how to foster his/her development: a study in primary school

Abstract: To improve education, you have to reach to the conducting element of the classroom, the teacher, and to what is required, related to his knowledge and teaching skills. Most of the proposals to improve education, don't go this far. Here we describe a research project with two main purposes: to be able determine the teacher's pedagogical and mathematical knowledge for teaching at the elementary school and to advance an efficient method to bring about its development. For this, we designed workshops, centered on the knowledge needed in the teacher's practice, in which the teachers were made to reflect upon what is missing in their practice and was motivated to acquire it. The results of the research showed areas of teachers' knowledge which are deficient and must be reinforced in general.

Keywords: development, knowledge, mathematical, pedagogical, teachers.

Fecha de recepción: 25 de mayo de 2009.

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Para tratar de mejorar la educación, durante varias décadas se han renovado una y otra vez los planes y programas de estudio con diferentes enfoques, se han generado múltiples nuevos libros de texto y materiales de enseñanza y se han introducido nuevas tecnologías en las aulas. A pesar de estos esfuerzos, no se ha notado un avance perceptible en el aprovechamiento de los estudiantes. Esto podrá sorprender, pero en realidad tiene una explicación muy sencilla. Estas estrategias no alteran de manera apreciable el elemento más determinante del aula: el profesor. Este artículo se centra en indagar los conocimientos que requiere el profesor en el aula (los cuales influyen directamente en su capacidad didáctica) y cómo se pueden fortalecer dichos conocimientos.

El objetivo central de la enseñanza es el desarrollo cognitivo de los estudiantes, el cual, se ha observado en investigaciones, está fuertemente correlacionado con la forma de instrucción e interacción del profesor en el aula.

Para la primera característica citada de la enseñanza, la instrucción (que se refiere a las acciones del profesor en el aula), Carpenter *et al.* (2000) definen cuatro modos de instrucción y creencias de los profesores, los cuales se describen brevemente a continuación.

Nivel I. Creen que se debe enseñar de manera explícita. Así, muestran procedimientos y hacen que los estudiantes los practiquen. *Nivel II.* Abren más su modo de enseñanza, dando a los estudiantes algunas oportunidades de resolver problemas por sí mismos. *Nivel III.* Aceptan que los estudiantes pueden tener sus propias estrategias de solución y, por tanto, dan a los estudiantes problemas o tareas para que éstos expongan sus procedimientos. *Nivel IV.* El modo de trabajo es parecido al anterior, pero se vuelve más flexible. El profesor va adaptando su instrucción de acuerdo con lo que van manifestando los estudiantes.

Para la segunda característica de la enseñanza citada, la interacción (que se refiere a la conversación profesor-alumno), Jacobs y Ambrose (2003), al investigar el efecto que tiene entrevistar a niños sobre la habilidad de cuestionamiento de los profesores para mejorar su comunicación en el aula, propusieron cuatro categorías para definir modos de interacción del profesor. *i) Directivo.* Su intervención es activa pero hay demasiado control y ayuda. Sus preguntas suelen inducir la respuesta correcta. *ii) Observador.* Su comportamiento es pasivo. Se limita a observar y a dar comentarios correctivos como “bien”, “no”, etc. *iii) Exploratorio.* Su comportamiento es activo, pero sus preguntas no son específicas (no llegan a la esencia). Por lo general sólo tienen en cuenta respuestas correctas. *iv) Responsivo.*

El profesor va descubriendo el razonamiento de sus alumnos y procede de acuerdo con ello. Hace preguntas competentes y de extensión de ideas.

Pero, ¿qué se requiere para que un profesor de matemáticas pueda desenvolverse en los niveles más altos de instrucción e interacción? Lo primero que viene a la mente es que necesitaría un conocimiento sólido de las matemáticas y de técnicas pedagógicas. Sin embargo, esto no es suficiente, ya que, además, requeriría muchas otras habilidades y conocimientos relacionados. De acuerdo con Ball y Bass (2000), un profesor de matemáticas debe realizar cuatro actividades centrales: 1) desglosar ideas y procedimientos matemáticos; 2) escoger representaciones para mostrar ideas matemáticas; 3) analizar métodos y soluciones diferentes de las propias, y 4) deducir lo que entienden sus alumnos. En el párrafo siguiente se describen e ilustran estas tareas.

Lo más sustancial que un profesor tiene que hacer es dar razones y explicaciones para que sus estudiantes comprendan una idea. Para esto, requiere entender y analizar las ideas matemáticas de una manera más profunda que le permita, por ejemplo, desglosar un procedimiento o una idea para extraer los conceptos básicos requeridos para su comprensión. Ilustraciones concretas de esto son: entender cada uno de los pasos del procedimiento de “llevar” en el algoritmo de la resta; dar varias explicaciones de por qué $2\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 10$ (utilizando diferentes significados de la división); o saber por qué dos aumentos consecutivos de 10% de un salario no son lo mismo que un aumento único de 20%. Además, el profesor requiere un conocimiento de modelos de representación o ilustración con materiales y situaciones reales. Por ejemplo, cómo representar la operación $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} =$ para que quede claro su significado y cuáles situaciones reales la podrían ilustrar. El profesor necesita entender y evaluar el razonamiento de sus estudiantes, sus estrategias, métodos, explicaciones y razones. Además, debe tener la habilidad de descubrir el motivo de los errores, confusiones o dificultades de sus estudiantes.

Desde hace más de veinte años, la comunidad de educación matemática ha centrado su atención en los diferentes conocimientos interconectados que un profesor necesita utilizar en su práctica docente. El término general propuesto por Shulman (1987), “conocimiento pedagógico del contenido”,¹ se refiere a una mezcla

¹ Conviene aclarar que la traducción al español de “Pedagogical Content Knowledge” (PCK) no da el significado preciso, por lo cual, se debe tener en mente que se refiere a una combinación del contenido con su pedagogía.

compleja de conocimientos y capacidades del profesor relacionados con los contenidos que enseña, su organización en tópicos y problemas, su manera de ser presentados a los alumnos, sus diversos modelos y representaciones, sus conexiones con las concepciones y dificultades de los estudiantes. Algunos elementos de este conocimiento mixto (como los referidos en los párrafos anteriores) están conectados con más fuerza a los propios contenidos matemáticos que a su componente pedagógico; por ello, Ball y Bass les asocian el término especial de “conocimiento matemático para la enseñanza” (Mathematical Knowledge for Teaching - MKT). Sin este saber multifacético, es muy difícil que un profesor pueda atender los múltiples requerimientos de sus alumnos.

El profesor también utiliza este *conocimiento matemático para la enseñanza* para la planeación de secuencias didácticas de estudio, diseñadas especialmente para las habilidades y necesidades cognitivas de sus estudiantes y que pueden ser modificadas de acuerdo con el progreso y dificultades que vaya observando en ellos. Para esto, otra tarea importante del profesor es escuchar los razonamientos de sus estudiantes mediante una dinámica especial de clase en la que interactúe con ellos. Esta comunicación también requiere que el profesor utilice este conocimiento especializado para responder de manera eficaz a sus estudiantes.

Se puede percibir, de la descripción anterior sobre los diversos quehaceres y las extensas demandas al profesor; que su capacitación en esta dirección debe ser una de las principales preocupaciones del sistema educativo. Desarrollos curriculares y novedosos materiales educativos no pueden, por sí solos, producir mejoras significativas en el aprendizaje de los estudiantes.

Se pueden encontrar en la literatura diversos programas de desarrollo profesional de profesores en otros países (sobre todo en Australia y Estados Unidos de América). Entre los más relevantes, por sus conclusiones, tenemos un estudio de casos realizado por Cooper, Baturó y Grant (2006) dentro de un proyecto de desarrollo profesional de profesores utilizando el método de acción colaborativa. Estos autores determinaron las características de las interacciones didácticas que llevan a alcances positivos en el aprendizaje de los estudiantes. Su resultado principal fue que una enseñanza exitosa requiere necesariamente pedagogía en tres niveles, los cuales se definen en la lista siguiente:

- *Técnicas*. Se refieren a consejos y sugerencias prácticas relacionados con los aspectos técnicos de una lección particular, una actividad o el uso de un material (éste es el tipo que generalmente intercambian los profesores).

- *De dominio*. Se refieren a estrategias de enseñanza apropiadas a un tópico particular. Éstas están conectadas con las actividades desarrolladas, la conversación en el aula y las herramientas utilizadas.
- *Genéricas*. Métodos de enseñanza aplicables a todos los tópicos matemáticos. Ejemplos conocidos son los tres recursos sugeridos por Krutetskii: a) *flexibilidad*, b) *inversión* y c) *generalización* y otro más identificado por Hershkowitz: *uso de ejemplos no prototípicos*.

En otra investigación, Seago y Goldsmith (2006), al igual que otros investigadores, estudiaron la posibilidad de usar “artefactos” del aula como videos de clase o las producciones escritas de los estudiantes para evaluar y promover el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores. En particular, en este artículo se ilustran las cuatro actividades centrales relacionadas con este conocimiento definidas por Ball y Bass dentro de los temas de pensamiento algebraico y funciones lineales. Aquí, Seago y Goldsmith proporcionan información adicional valiosa sobre esta noción importante del conocimiento matemático para la enseñanza.

En un curso para maestros en formación, Amato (2006) efectuó un estudio con el objetivo de mejorar el entendimiento relacional (término definido por Skemp (1976) y el cual se explicará un poco más adelante) de estos estudiantes de educación sobre el tema de fracciones. Los participantes realizaron juegos del tipo sugerido para sus propios estudiantes, como hacer cambios (aumentos y disminuciones) en una tabla decimal. Los resultados muestran un progreso en el entendimiento relacional de las fracciones de estos maestros en formación, además de una mejoría en su conocimiento pedagógico del contenido, especialmente en lo que se refiere a distintos modos de representación.

Un artículo central para nuestra investigación es el publicado por Chick, Baker, Pham y Cheng (2006). En él, se propone un marco teórico con tres categorías (traducidas abajo textualmente) para analizar el “conocimiento pedagógico del contenido”, cuyos elementos se sintetizan a continuación:

1. *Conocimiento pedagógico en un contexto de contenido*. Elementos que incluye: objetivos del aprendizaje, atraer y mantener la atención de los estudiantes y técnicas de clase.
2. *Claramente, conocimiento pedagógico del contenido*. Elementos que incluye: estrategias de enseñanza (relacionadas explícitamente con matemáticas), pensamiento de los estudiantes, demandas cognitivas de tareas,

representaciones apropiadas de conceptos, conocimiento de recursos y del currículo, y conocimiento de los propósitos de sus contenidos.

3. *Conocimiento de contenido en un contexto pedagógico.* Elementos que incluye: entendimiento profundo de las matemáticas fundamentales, desmenuzar contenidos en sus componentes clave, estructura matemática y conexiones, y conocimiento de procedimientos y métodos de solución.

La primera categoría se centra en las técnicas pedagógicas relacionadas con un contenido específico (aunque algunos de los elementos que cita el autor son de carácter general). En la segunda, el conocimiento pedagógico y el de contenido están completamente entrelazados. La tercera se enfoca principalmente en el contenido, pero dentro de una situación didáctica. Estos autores utilizaron este marco para analizar el conocimiento pedagógico del contenido de profesores sobre el tema de decimales.

En un trabajo que expande aún más las ideas anteriores, Powell y Hanna (2006) exploran cómo desarrollan los maestros su conocimiento matemático para la enseñanza en el ámbito discursivo de su práctica docente. En sus observaciones, estos autores proponen una perspectiva teórica más elaborada que se basa en la idea de que el conocimiento matemático para la enseñanza y el conocimiento pedagógico se intersectan en la práctica de tal manera que resultan inseparables e indistinguibles. Además, extienden la noción del componente epistemológico del conocimiento del profesor a una idea extra, que es la de inferir el conocimiento matemático existente de los estudiantes y la evolución de éste. De acuerdo con los autores, este nuevo componente es esencial para que el profesor dé sentido a las producciones, ideas y argumentos de los estudiantes.

Teniendo en cuenta todas estas contribuciones y reformulándolas, construimos un marco teórico integrado para la descripción de los diferentes tipos de conocimientos que contienen, en diferentes grados, aspectos matemáticos y pedagógicos. Éstos se han agrupado en cinco categorías, las cuales se describen brevemente a continuación y se diferencian posteriormente.

Conocimiento pedagógico general. Conocimientos pedagógicos aplicables a todas las disciplinas. Propósitos del aprendizaje. Estrategias para mantener la atención e interés de los estudiantes. Técnicas de clase.

Conocimiento pedagógico en matemáticas. Incluye los tres niveles de pedagogía (técnicas, de dominio y genéricas) de Cooper *et al.* (2006), mencionadas antes.

Conocimiento matemático para la enseñanza. Forma parte y extiende el llamado conocimiento pedagógico del contenido pero con un predominio matemático.

Conocimiento matemático instrumental para la enseñanza. Procedimientos mecánicos y solamente el primer nivel de pedagogías técnicas de Cooper.

Conocimiento matemático común. Completamente matemático.

Los primeros dos tipos de conocimiento (pedagógico general y pedagógico en matemáticas) tienen un carácter distintivamente pedagógico, aunque el segundo está especialmente dirigido al contexto de las matemáticas. En tercer término, y como parte central de nuestra investigación, encontramos el conocimiento matemático para la enseñanza, el cual es una mezcla de contenido y pedagogía fundamental para el profesor dentro del aula (por su importancia en este estudio, se caracterizará en detalle más adelante). Las dos últimas categorías sirven para contrastar este conocimiento matemático para la enseñanza. El conocimiento matemático instrumental para la enseñanza se basa en un entendimiento instrumental-procedimental (definido por Skemp (1976) como “reglas sin razones”), mientras que el conocimiento matemático para la enseñanza se basa en un entendimiento relacional-conceptual (definido por Skemp (1976) como “saber tanto qué hacer como el porqué”). Por último, el conocimiento matemático común representa el conocimiento matemático de una persona bien preparada, pero no comprende el conocimiento más especializado que se requiere en la enseñanza en sí dentro del aula.

En la investigación informada en este artículo consideramos dos aspectos. El objetivo principal del estudio fue averiguar el conocimiento matemático para la enseñanza (en sus tres aspectos mencionados más adelante) de un grupo pequeño de profesores de primaria y cómo se puede mejorar éste. Como segundo objetivo, tuvimos que delimitar sus capacidades pedagógicas e indagar cómo se pueden ampliar. Nuestra estrategia general de trabajo fue entonces la siguiente. Diseñamos e implementamos talleres con profesores, lo cual creemos que es la manera idónea de lograr los objetivos planteados. Como instrumentos para recabar información al respecto, además de analizar las actividades que se realizaron en cada sesión de los talleres, cada taller incluyó un cuestionario inicial, otro final y observaciones iniciales y finales de clase de los profesores participantes.

Para determinar el conocimiento matemático para la enseñanza que tienen los profesores, había primero que precisarlo. A continuación, se hace esto dividiéndolo en tres secciones diferentes, pero que, por su naturaleza común, es difícil delimitarlas y, en realidad, aparecen interconectadas en una situación de enseñanza específica.

Conocimiento matemático para la enseñanza. Consta de tres partes:

- A. **Conocimiento matemático especializado.** El profesor requiere un conocimiento matemático suplementario que le sea útil en sus múltiples actividades educativas dentro y fuera del aula. Mencionamos a continuación aspectos relacionados con este conocimiento especializado:
- Conocer con profundidad los conceptos fundamentales de cada uno de los tópicos.
 - Conocer no sólo el cómo sino los porqués de lo que se va a enseñar.
 - Desglosar ideas y procedimientos matemáticos para hacerlos más simples (en niveles comprensibles para sus estudiantes).
 - Conocer las conexiones entre diferentes tópicos, entre diferentes conceptos e inclusive entre su materia y las demás del plan de estudios.
- B. **Conocimiento para la instrucción.** Este conocimiento matemático-pedagógico se requiere en el diseño y planeación del trabajo en el aula para responder preguntas como: ¿cuál sería la secuencia más adecuada?; ¿qué ejemplo es el más apropiado para ilustrar esto?; ¿qué paradigma debo utilizar? Puntos conectados a este componente serían:
- Relevancia de los tópicos y de las ideas matemáticas.
 - Diseño y secuenciación de clases, actividades y tareas.
 - Selección de representaciones e ilustraciones apropiadas que exhiban nociones matemáticas.
 - Preparar y dar explicaciones.
- C. **Conocimiento de estudiantes.** Este conocimiento, también relacionado con contenido y pedagogía, está ligado al razonamiento matemático de los niños. Aspectos relacionados a este componente serían:
- Conocer la manera de pensar, las estrategias, dificultades y concepciones erróneas de los estudiantes.
 - Inferir y deducir lo que entienden los estudiantes y sus confusiones.
 - Entender, analizar y evaluar sus métodos y soluciones.

Por otro lado, mediante cuestionarios, se pueden averiguar el conocimiento pedagógico de los profesores y sus creencias. Sin embargo, además de este conocimiento, es más importante saber cómo lo aplica a su práctica docente. Por ello, se realizaron también observaciones de clase a los profesores participantes del taller. El análisis de ellas se basó en el marco de análisis siguiente.

Para que el aprendizaje de los estudiantes sea realmente efectivo, deben construir su propio conocimiento por medio de exploración, reflexión e interacción. De acuerdo con Askew, Brown, Denvir, y Rhodes (2000), esto se puede lograr,

siempre y cuando los siguientes cuatro parámetros principales del aula satisfagan ciertos requisitos:

- i. *Actividades*. Deben estimular y desafiar el intelecto de los estudiantes, captar su interés en el contenido matemático y conservar los significados matemáticos.
- ii. *Conversación*. Debe facilitar el aprendizaje, centrándose en significados y comprensión, y motivar la participación de todos los alumnos y entre ellos mismos.
- iii. *Herramientas*. Deben cubrir una variedad de estilos de aprendizaje y de modelos efectivos.
- iv. *Relaciones y normas*. Deben servir para crear una atmósfera propicia a fin de que los estudiantes adquieran confianza y puedan desenvolverse de manera adecuada.

Los autores proponen evaluar las prácticas en el aula, asignando uno de cuatro niveles, a cada uno de los elementos de estos cuatro parámetros. Por ejemplo, el desafío matemático o el captar el interés se podrían evaluar con los niveles: A) “Casi todos los alumnos”; B) “Alrededor de la mitad”; C) “Algunos” y D) “Muy pocos”. Esta escala se utilizará en el análisis del trabajo de los profesores.

METODOLOGÍA

Se llevaron a cabo dos proyectos de investigación relacionados con esta temática. El primero tuvo como finalidad diseñar y probar cuatro tipos de instrumentos (cuestionario abierto, entrevista, observaciones de clase y cuestionario cerrado) que den indicios de los conocimientos del profesor necesarios en el aula: su conocimiento pedagógico en los tres niveles de Cooper descritos en la sección anterior y las tres secciones del conocimiento matemático para la enseñanza, con sus varios aspectos. Nos concentramos en algunos de los tópicos relevantes de aritmética de la educación primaria. Los temas contemplados fueron: 1) sistema decimal y operaciones, 2) cálculo mental y estimación, 3) fracciones y decimales, y 4) razonamiento proporcional. Los resultados de cada instrumento se compararon para establecer sus coincidencias y determinar la manera más valiosa de combinarlos para un diagnóstico útil. No describiremos aquí los detalles de este proyecto; sin embargo, parte de los reactivos obtenidos, se utilizaron en el segundo proyecto, el cual se describe en este artículo.

El segundo proyecto, como ya mencionamos, tenía como objetivo investigar el conocimiento del profesor de primaria en sus aspectos de contenido y pedagógico y, además, desarrollar un método eficaz para mejorarlo. Decidimos centrarnos en el *conocimiento matemático para la enseñanza* y en el *conocimiento pedagógico en matemáticas*, ya que otros aspectos del conocimiento del profesor (como el matemático común y el pedagógico general) tendrían que surgir espontáneamente de todas maneras por ser los conocimientos más básicos.

Así, se planearon tres talleres piloto para profesores (uno en cada uno de los tres ciclos de la educación primaria: primero y segundo grados; tercero y cuarto; y quinto y sexto). Cada uno de estos talleres estaba dirigido por un estudiante-investigador de la maestría en matemática educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México (con el apoyo de un profesor-investigador en esta área) y contaba con alrededor de ocho maestros en servicio, de diferentes escuelas primarias de una zona de la Ciudad de México, que se reunieron una vez por semana durante un semestre en una de las escuelas. Por su relevancia y para concentrarse en un tema específico, el eje central que se eligió para los talleres fue: *¿Cuáles son las ideas más importantes de la aritmética?* Cada taller se organizó en una serie de actividades, problemas y materiales de lectura. Para indagar el nivel de los conocimientos de los profesores y su desarrollo, se utilizaron un cuestionario inicial, un cuestionario final, sus participaciones y tareas realizadas durante las sesiones del taller y observaciones de algunas de sus clases, también antes y después del taller.

La primera etapa de este proyecto consistió en preparar a los estudiantes-investigadores que conducirían los talleres y elaborar parte de los materiales que se utilizarían durante éstos. Después de leer y discutir la literatura relevante sobre el tema, los estudiantes-investigadores se dieron a la tarea de escribir problemas interesantes que pudieran servir para promover la discusión entre los maestros.²

² Es interesante notar que sus primeras tareas propuestas fueron muy generales y con una orientación matemática y poco pedagógica. Ejemplo de estos primeros problemas son: “Escribe un problema que muestre la importancia del sistema decimal” o “Encuentra todos los números a y b que satisfagan la igualdad: $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1$.” Más adelante, empezaron a diseñar preguntas más centradas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de problemas posteriores es: “A las 8 de la mañana, las manecillas del reloj dividen su carátula en dos partes. Juan dice que estas fracciones son $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{6}$, pero Luis dice que son $\frac{4}{12}$ y $\frac{8}{12}$. ¿Quién tiene la razón? ¿Qué posible explicación esperarías de cada uno de ellos?”

Antes de comenzar los talleres, se aplicó un cuestionario inicial que tuvo como propósito indagar las creencias y actitudes de los profesores y las técnicas de enseñanza que utilizan. Al término de los talleres, se aplicó un cuestionario final, a fin de conocer la opinión de los profesores sobre algunos aspectos del taller y las aportaciones que ellos creen que obtuvieron.

Dentro de los propios talleres, se plantearon preguntas, tareas o problemas de contenido aritmético para su discusión, adecuados a los grados en los que enseñaban los profesores. Las sesiones del taller se centraron en la siguiente secuencia de temas (los profesores llenaban previamente un pequeño formato con una o varias preguntas relacionadas):

- Introducción
- Discusión del cuestionario inicial
- ¿Cuáles son los conceptos y habilidades aritméticos más importantes? “Escribe una lista de conceptos y habilidades de aritmética que consideres más importantes en tu curso.”
- ¿Cuáles son las ideas y conceptos equivocados de los niños? “Escribe una lista de ideas equivocadas o conceptos erróneos frecuentes de tus estudiantes.”
- ¿Cuáles son las dificultades del docente? “Escribe tres ideas o conceptos en aritmética que te parecen complejos.”
- Una serie de sesiones en las que se alternaron discusiones relativas al “conocimiento matemático para la enseñanza” y al “conocimiento pedagógico en matemáticas”.

Las tareas de clase y problemas para reflexionar sobre el conocimiento matemático para la enseñanza fueron principalmente de nuestro propio diseño, pero teníamos también otras fuentes, como por ejemplo, tareas de clase utilizadas en programas anteriores, informadas en la literatura, e ítems de evaluación producidos por el grupo de Hill y Ball (2004), pero reescritos como preguntas abiertas. En cada taller, correspondiente a un ciclo de la educación primaria, nos centramos en los temas matemáticos principales de cada uno de ellos.

En las sesiones alternas se abordaron temas pedagógicos a través de una lectura previa de resúmenes traducidos al español de artículos de investigación.³

³ Por ejemplo: Schwarz, Hershkowitz y Azmon (2006), “El papel del maestro en sustituir afirmaciones por argumentos” (The role of the teacher in turning claims to arguments); Carpenter, Fennema *et al.* (2000), “Instrucción cognitivamente guiada” (Cognitively guided

- Conclusiones y recomendaciones.

Además, se realizaron observaciones de clase a cuatro de los profesores de cada uno de los tres talleres (al inicio y al final), con el propósito de indagar sus métodos de enseñanza y para determinar si hubo algún avance directo en su práctica docente (el análisis de éstas se hizo principalmente tomando como base los cuatro parámetros de Askew *et al.* (2000): *actividades, conversación, herramientas y normas*).

RESULTADOS Y CONCLUSIONES PARTICULARES

Este apartado está dividido en tres: I. Resultados de las sesiones del taller; II. Resultados de las observaciones de clase y III. Resultados del cuestionario inicial y final.

I. SESIONES DEL TALLER

Lo primero que se pudo observar sobre los maestros que participaron en el taller es que ya cuentan con un conocimiento matemático para la enseñanza, pero limitado, formado durante su experiencia docente y basado en sus intuiciones naturales. Éste se caracteriza por un conocimiento matemático del tipo instrumental (“háganlo así porque así sale”) y por un conocimiento pedagógico técnico (originado de los consejos y sugerencias de otros profesores). En el marco teórico que propusimos, éste corresponde a la categoría “conocimiento matemático instrumental para la enseñanza”.

A continuación, discutiremos partes de las sesiones referentes al conocimiento de contenido clasificándolas de acuerdo con las tres categorías citadas del conocimiento matemático para la enseñanza. Al finalizar esto, pasaremos a describir algunas de las sesiones del taller dedicadas al conocimiento pedagógico de los profesores.

instruction); McDonough y Clarke (2003), “Describiendo la práctica de maestros de matemáticas efectivos en los primeros años” (Describing the practice of effective teachers of mathematics in the early years); Borasi y Fonsi (1998), “Prácticas de enseñanza que apoyan un acercamiento de indagación en la instrucción matemática” (Teaching practices that support an inquiry approach to mathematics instruction).

1.A. Conocimiento matemático especializado

Las primeras sesiones tuvieron más un carácter exploratorio. Cuando se preguntó a los profesores sobre las ideas y conceptos más importantes de la aritmética en su programa, ellos respondieron sólo con una lista de temas: “números naturales”, “fracciones”, “operaciones”, “porcentajes”, etc. Aun después de pedirles que puntualizaran más, tuvieron dificultades para profundizar en las ideas fundamentales de cada uno de los tópicos. Las respuestas estuvieron marcadamente dirigidas a procedimientos operativos.

También se les pidió a los profesores que escribieran una lista de conceptos o ideas complejas en aritmética. Mencionaron, entre otras, las fracciones y los números decimales. Es interesante que no las definan como intrínsecamente complicadas, sino que las asocien a su propia incapacidad de entenderlas: “Porque se me hacen difíciles de entender”, “Se me dificultan. No entiendo el porqué y entonces cómo les enseño a ellos”, “Yo lo entendí de manera mecánica...” Estas percepciones que tienen los maestros sobre las deficiencias en su conocimiento especializado se tomaron como oportunidades para discutir cómo podrían ampliar su conocimiento.

La finalidad de las siguientes sesiones del taller fue profundizar en cada uno de los temas citados por ellos. Los profesores, a través de discusiones posteriores, llegaron a definir con mayor precisión lo más importante de su programa, aun cuando no van más a fondo de los propios subtemas (es decir, no logran desmenuzarlos e identificar conceptos e ideas importantes).

Durante las sesiones del taller surgían oportunidades de discusión de distintos problemas y de sus posibles soluciones. En estas instancias, se pudo apreciar mejor el conocimiento matemático especializado de los profesores, por tratarse de situaciones más espontáneas. En una de ellas, por ejemplo, surgió el problema: “El precio de una estufa con el impuesto de 8% incluido es de \$9 277.20, y se desea obtener el precio original sin impuesto”. Parte de la interacción entre los profesores en relación con esta situación fue la siguiente:

Prof. J: Es sacar el ocho por ciento de esa cantidad y después restárselo.

Prof. I: Pero esa cantidad ya tiene el ocho por ciento incluido en el cien por ciento del valor.

Prof. P: El precio (y se queda pensando).

Prof. A: Podría ser, por ejemplo, obtener ocho por ciento de nueve mil y agregarlo a ver si nos da la cantidad.

Prof. L: Yo estoy de acuerdo con el razonamiento del profesor J.

Este tipo de comentarios, expresados durante el taller, ejemplifican muy bien los niveles de conocimiento matemático especializado (conocer con profundidad los conceptos fundamentales) de los maestros. En la conversación anterior, se puede notar que el Prof. J, y por consecuencia el Prof. L, tiene un concepto incongruente de porcentaje, por lo que su respuesta es equivocada (el conductor del taller, por medio de la verificación, llevó al grupo a darse cuenta de esto). El Prof. I tiene la intuición correcta, pero no sabe cómo concretar ésta en un procedimiento específico. El Prof. P se ve incierto y no puede dar una opinión. El Prof. A describe una idea que a la mayoría le parecería tonta, pero que, en realidad, podría ser la fuente de un procedimiento iterativo valioso de “ensayo y corrección”, pero no se da cuenta de ello. Más adelante, en la discusión que se da, el Prof. P propone el resultado correcto. Cuando el conductor le pide que lo explique, dice: “Ya no sé. Este precio ya tiene el cien por ciento, que sería el uno, pero también tiene el cero punto cero ocho que sería el ocho por ciento, entonces lo que hice fue dividir el precio entre uno punto cero ocho” (este razonamiento se basa en los elementos de la lectura que ya habían hecho los profesores sobre porcentajes antes de la sesión).

Otro de los contenidos matemáticos que se trabajó en las sesiones fue el cálculo mental y la estimación. Los profesores, al inicio, concebían al cálculo mental de una manera muy restringida y mecanizada, siguiendo reglas. Citan como ejemplo “la multiplicación y división abreviada con potencias de diez”, en donde “se agregan ceros” y “se mueve el punto decimal”. Éste fue un buen tema para mostrar a los profesores, mediante las estrategias del cálculo mental, cómo desglosar procedimientos y conocer las razones detrás de ellos. Estas estrategias también se contrastaron con los algoritmos convencionales.

1.B. Conocimiento para la instrucción

El tipo de instrucción que siguen los profesores en sus clases se basa en un conocimiento procedimental. Refiriéndose a los niños, dos profesores comentaron: “Lo mostramos mecánicamente y los estudiantes lo repiten”, “No entienden el porqué de lo que hacen”.

Como ya se mencionó, en algunas de las sesiones se presentaron y discutieron las soluciones de problemas dejados de tarea a los profesores. Uno de los objetivos de esta actividad era observar sus modelos de representación y después enriquecerlos. Un ejemplo de problema planteado fue: “En casa de Rosa compraron

pastel. El domingo se comieron $\frac{1}{2}$ del pastel, el lunes $\frac{1}{3}$ del pastel restante y el martes $\frac{1}{3}$ de lo que quedó. ¿Cuánto sobró del pastel?” Algo importante sobre

estas actividades es que tenían la oportunidad de ver otras maneras de solución y discutir su validez. Desde el punto de vista de la investigación, fue valioso observar los diferentes acercamientos de los profesores, ya que muestran su conocimiento matemático para la enseñanza. Casi todos utilizaron un círculo para representar las fracciones, apoyados en representaciones simbólicas (fueron éstas las que llevaron a algunos profesores a soluciones incorrectas). Sólo una maestra propuso emplear dibujos de regletas, los cuales ayudaron a visualizar la solución correcta, por la mayor facilidad de realizar las particiones en ellos. En general, pudimos observar poca diversidad en estas tareas en lo que se refiere a estrategias y representaciones. Esto es muy importante, ya que refleja la habilidad de los profesores para comunicar las ideas matemáticas a sus alumnos.

Como ejemplos adicionales, otro par de ejercicios propuestos a los profesores fueron los siguientes.

1. Describe cómo explicarías a tus estudiantes la razón del resultado de cada una de las operaciones siguientes (no el algoritmo): a) $4 \times \frac{3}{2} = 6$ b) $\frac{3}{4} \times 20 = 15$
2. Ilustra cómo representarías las siguientes multiplicaciones de fracciones a tus alumnos: a) $\frac{3}{2} \times 4 = 6$ b) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

Para el primer ejercicio, los profesores dieron soluciones, utilizando únicamente las ideas de que la multiplicación es “una suma abreviada” o que es “varias veces un número”, demostrando otra vez muy pocas estrategias de solución. Se esperaba que los maestros propusieran, por ejemplo, “tres cuartas partes de 20” o incluso “tres medios de 4”. El segundo ejercicio provocó aún más conflicto por la falta de propuestas de ilustración. Esto abrió una serie de discusiones con el conductor del taller (planteando ejercicios relacionados) que les ayudó a aclarar sus ideas. Sin embargo, se observó repetidamente una inclinación a dar explicaciones de tipo procedimental (sólo cómo se hace), en vez de las de tipo conceptual (dando explicaciones e ilustraciones del porqué).

Durante el taller, los profesores mostraron una mayor habilidad e interés en escoger y analizar tareas más apropiadas para sus estudiantes. Por ejemplo, en otra

sesión sobre diseño y trabajo con actividades, los profesores comentaron lo siguiente: “Hay que darles problemas, lo suficientemente diversos y con más de una operación para hacerlos razonar”, “Hay que dejarlos que los resuelvan de la manera que ellos lo entiendan”, “Hay que dejarlos que resuelvan los problemas en el pizarrón con la ayuda de sus compañeros”.

I.C. Conocimiento de estudiantes

Cuando en las sesiones del taller se les pidió a los profesores que dieran ejemplos de ideas erróneas comunes de los estudiantes (en aritmética), mencionaron principalmente errores de procedimiento en las cuatro operaciones básicas, como por ejemplo: “se les olvida llevar” o “restan el dígito mayor del menor”. Presentaron muy pocos errores de tipo conceptual como: “no dan valor al cero” o “para el siguiente número del 1 999, escriben 19 910 o 1 910”. Aquí se observó también un conocimiento deficiente de este tercer aspecto del conocimiento matemático para la enseñanza.

Se trató de remediar esta situación, en parte, pidiendo a los profesores que, además de mencionar las ideas equivocadas de los estudiantes, discutieran entre ellos posibles causas y maneras de resolver las dificultades. Esto les fue de utilidad, ya que tuvieron la oportunidad de escuchar y reflexionar sobre las ideas de otros profesores. Cada equipo de profesores, entonces, reescribió su lista, incluidos estos dos puntos. A continuación se reproduce, como ejemplo, una pequeña parte de las producciones que los propios profesores dan como “causas probables” y “alternativas de solución”:

Concepto erróneo o idea equivocada	Causas probables	Alternativas de solución
Punto decimal.	No ubican espacios, no han aprendido los valores posicionales, confusión al manejar diferentes formas de escritura, como son el uso de comillas para separar períodos.	Apoyarse en el sistema métrico decimal (metro), utilizar y ejemplificar con cantidades cortas con punto decimal e ir incrementando su complejidad.

Este trabajo se continuó en la siguiente sesión. Los profesores comentaron que los alumnos tienen conceptos erróneos o ideas equivocadas por lo complicado de la construcción del conocimiento y que el profesor debe estar atento a ello para poder corregir las interpretaciones falsas que puedan formar. Sin embargo, en lo que se refiere a alternativas de solución, los profesores sólo propusieron la reexplicación como estrategia, sin tener en cuenta otros acercamientos, posiblemente más efectivos, como son el conflicto cognitivo o un simple diálogo que lleve a entender al profesor el pensamiento del alumno y, así, esclarecer la situación.

En la discusión grupal, los profesores comentaron que uno de los problemas más graves que tienen es cómo vienen los niños de grados anteriores: “Los alumnos tienen ideas erróneas con las que han convivido desde segundo, tercero y, hasta ahora, cuando llegan a sexto grado, es cuando tenemos los problemas”; “Quitarles esas ideas cuesta mucho trabajo y el programa hay que retomararlo”. Pero algunos también aceptan que es parte de su trabajo: “Si en los primeros meses uno repasa y se va lentamente asegurando de que los alumnos entiendan, no es pérdida de tiempo. Ganas más de lo que pierdes”.

Aun cuando estaban conscientes de algunas de las dificultades de sus estudiantes, no sabían cómo enfrentarlas, ya que no habían pensado en el papel del profesor en el aula como un investigador que averigua acerca de lo que los estudiantes están pensando y entendiendo. También veían la memorización como un hábito intrínseco de los estudiantes y no como algo promovido por su propio acercamiento didáctico.

En general, los profesores adquirieron poco a poco la habilidad e interés de reflexionar sobre el posible razonamiento de sus estudiantes, incluidas sus estrategias de solución y las dificultades que presentan.

Dejando ahora atrás el conocimiento de contenido y pasando a las sesiones que trataban sobre *conocimiento pedagógico general* y *conocimiento pedagógico en matemáticas*, las discusiones de las lecturas de artículos sobre temas centrales en pedagogía sirvieron para oír las opiniones y creencias de los profesores y para enseñarles algunas técnicas de enseñanza útiles. Por ejemplo, sobre la lectura “El papel del maestro en cambiar afirmaciones por argumentos”, los profesores expresaron que: “Es difícil que los alumnos se expresen sobre los contenidos”; “En ocasiones los alumnos no desean hablar más”; “... es un poco más difícil y más tardado y cedemos a la presión del tiempo...” En general, los profesores ven la falta de argumentación de los alumnos como una debilidad de sus alumnos y no como una falta de método de enseñanza de su parte. El conductor del taller trató de hacer evidente que se debe crear un ambiente propicio y que hay que motivar a los alumnos a argumentar sus respuestas.

Otra lectura fue el artículo citado anteriormente, “Describiendo la práctica de maestros de matemáticas efectivos en los primeros años”. Aquí es interesante observar que los maestros que participaron en el taller tienen una evaluación muy subjetiva de su propia práctica e interpretan las características mencionadas de maestros eficaces en el contexto de su propia experiencia, concluyendo que sí lo hacen de esa manera. Por ejemplo, un profesor expresa: “Yo los motivo. El primer equipo que termine tiene un punto”. Esto indica que les resulta difícil aprender simplemente de una lectura y que hay que hacerlos reflexionar sobre ella. Al sintetizar la lectura, mencionaron como una característica principal por desarrollar la de “extraer ideas matemáticas clave durante y al final de la lección”.

II. DENTRO DE LOS SALONES DE CLASE

Las observaciones de clase antes y después de realizado el taller sirvieron para tener cierta evidencia sobre los cambios en el desempeño de los profesores frente al grupo (debemos aclarar que esperábamos cambios muy tenues, ya que, de nuestra experiencia, consideramos que este proceso de cambio se da de una manera muy paulatina y lleva un tiempo considerable). El análisis de estas observaciones se realizó con base en los cuatro parámetros principales del aula identificados por Askew *et al.* (2000): *actividades, conversación, herramientas y relaciones y normas*, con sus respectivos elementos. Daremos aquí los resultados de esta parte del estudio sólo de manera concisa. Para esto, a cada parámetro se le asignó un nivel de entre cuatro, respondiendo a la pregunta: ¿Qué tanto lo logra? **A** ≡ “Casi todos los alumnos” (o en su caso “Casi completamente”), **B** ≡ “Alrededor de la mitad” (o “Medianamente”), **C** ≡ “Algunos” (o “Algo”) y **D** ≡ “Muy pocos” (o “Muy poco”). En el cuadro siguiente se resumen los resultados de cuatro profesores observados en uno de los talleres (quinto y sexto grados); se asigna un término que describe el cambio entre la observación inicial y la final y, para validar y dar mayor precisión, se indica el correspondiente cambio de nivel (como cada parámetro tiene varios elementos, el cuadro da el promedio de ellos, el cual a veces cae entre dos niveles. Por ello, para afinar la escala, estas literales pueden estar acompañadas del signo + o del signo -).

	Prof. I	Prof. P	Prof. A	Prof. L
<i>Actividades</i>	Mejóro De B- a B+	Mejóro poco De B- a B	Quedó igual C+	Mejóro De D+ a C+
<i>Conversación</i>	Mejóro De C a B	Mejóro De B- a A-	Quedó igual C+	Mejóro De C- a C+
<i>Herramientas</i>	Mejóro bastante De D+ a B	Mejóro De C a B	Mejóro De D a C	Mejóro De D a C
<i>Relaciones y normas</i>	Quedó igual (alto) B+	Quedó igual (alto) A	Quedó igual (alto) B+	Mejóro poco De D+ a C

Se puede notar que en tres de los cuatro profesores hubo una mejoría considerable y, en el cuarto, una visible mejoría sólo en herramientas. El parámetro en el que hubo mayor avance fue en el uso de herramientas. También en los dos parámetros, las actividades y la conversación, se notó una mejoría general. Relaciones y normas inició, de casualidad, ya alto para estos profesores.

En el caso del prof. I, en su segunda clase (después del taller), utilizó hojas divididas en cuatro partes y fichas para trabajar con diferentes bases del sistema de numeración, mejorando así su forma de trabajo y su interacción con sus alumnos.

El comportamiento del prof. P fue de tipo directivo en su primera clase (antes del taller) y, aunque los niños estaban organizados en equipos de cuatro, su interacción fue sólo grupal, dando instrucciones y haciendo preguntas, pero sin cuestionarlos de manera apropiada. El uso de los materiales se realizó de manera mecánica, sin reflexión.⁴ En contraste, en su clase después del taller, proporcionó cuatro problemas sobre porcentajes (cada uno con varias preguntas) para resolver por equipos. Ahora, la interacción la realizó el profesor con cada equipo, cuestionándolo y escuchando sus dudas y procedimientos. Durante la clase, este profesor entregó una tarjeta a cada uno de los alumnos con la ilustración de muebles o electrónicos con sus precios para que los propios niños propusieran ejercicios de aumento o descuento de porcentajes.

El prof. A sólo mejoró en el uso de herramientas. En su primera clase (antes del taller) utilizó el libro de texto para resolver algunas preguntas sin mucho reto

⁴ Por ejemplo, tomando 24 frijoles, el maestro pidió dividir este conjunto en tercios, en sextos, en doceavos, etc. Pero antes, en cada uno de los ejercicios, escribía las respuestas en el pizarrón: " $\frac{1}{6} = 4$ frijoles"; " $\frac{1}{12} = 2$ frijoles".

y los niños realizaron algunos ejercicios de proporcionalidad de manera mecánica con la regla de tres (procedimiento enseñado por el maestro). La conversación con los alumnos fue pobre (pregunta-respuesta rápida; repitiéndose este patrón) sin generar una discusión. En la clase después del taller, este maestro entregó a sus alumnos una hoja con información sobre descuentos en un centro comercial. La interacción siguió siendo directiva, con el profesor realizando preguntas y los niños respondiendo. Sin embargo, hubo una mejora en las representaciones utilizadas por el profesor para dar explicaciones a sus alumnos. Por ejemplo, ilustró los descuentos de los precios como fracciones (porcentajes) en un círculo.

Por último, el prof. L, aun cuando tuvo un bajo nivel en su primera observación de clase en todos sus aspectos, mejoró un poco en todos ellos en la observación final. En su primera clase (antes del taller), este maestro trabajó con conversión de unidades de área (hectárea, kilómetro cuadrado, hectómetro cuadrado y metro cuadrado). En general, debido a la dificultad del tema, los estudiantes contestaban las preguntas del profesor muy al azar, tratando de adivinar las respuestas. Por ello, el profesor recurrió al libro de texto e hizo que los estudiantes leyeran dos páginas relacionadas con este tema sin resolver nada. Después formó equipos para contestar las preguntas, pero aparecieron muchas dudas y los estudiantes dudaron de sus razonamientos y no supieron cómo resolver algunas cuestiones. El maestro pasó con cada equipo, pero se limitó a releer los datos y a repetir la pregunta del libro. En la clase después del taller, trabajó con el tema de proporcionalidad utilizando tablas (uno de los temas tratados en el taller), lo cual ya es un avance por el tipo de representación utilizado. Sin embargo, se siguió centrando en los resultados y no en los procedimientos de los estudiantes. Se observó también una intención por dialogar con los alumnos, motivándolos para que expresaran sus argumentaciones, pero sin mucho éxito. Esto realmente demuestra que estos cambios en los profesores son difíciles de conseguir y que pueden llevar tiempo por estar, a veces, tan alejados de su propia práctica docente.

Para complementar lo anterior, el cuadro siguiente muestra los resultados de otro grupo de profesores (tercero y cuarto grados).

	Prof. M	Prof. R	Prof. F	Prof. E
<i>Actividades</i>	Mejóro bastante De C+ a A-	Mejóro bastante De D+ a B+	Mejóro bastante De D a B-	Quedó igual C
<i>Conversación</i>	Mejóro poco De B a B+	Mejóro bastante De D+ a B	Mejóro bastante De D a B-	Quedó igual C
<i>Herramientas</i>	Mejóro poco De C+ a B-	Mejóro bastante De D+ a B	Mejóro De D a C+	Quedó igual C
<i>Relaciones y normas</i>	Mejóro De B a A	Mejóro bastante De C a A-	Mejóro De C a B	Quedó igual C

En el cuadro anterior, se puede notar que en tres de los cuatro profesores observados hubo una mejoría apreciable en el modelo pedagógico de las clases. Sus actividades estaban mejor diseñadas, trataban de interactuar más con los estudiantes (conversación) y sus representaciones eran más variadas (herramientas). El manejo de la clase mejoró por las propias actividades y la interacción (relaciones y normas). Del profesor en el que no se observó ningún avance (prof. E), sólo comentaremos que seguía una clase muy tradicionalista y fue muy renuente a los cambios sugeridos.

Desde luego que pudo haber otros factores en los cambios observados, como el tema en sí, pero creemos que, en gran parte, las mejoras se debieron al taller de maestros que se realizó con ellos. Sobre todo, hay que tener en cuenta que estos cambios en comportamiento llevan mucho tiempo, además de requerir un conocimiento mucho más profundo sobre los contenidos y técnicas pedagógicas.

III. CUESTIONARIO INICIAL Y FINAL

En el cuestionario inicial y la discusión que se tuvo en la primera sesión del taller sobre éste, algunas de las respuestas de los profesores fueron las siguientes. La mayoría pone a las matemáticas como la materia que más les gusta y como la más importante, pero admiten que tienen “dificultad para enseñarla”. Otro comentario sobre esto fue: “Para nosotros, es complicada aun siendo adultos”. La mayoría expresó inseguridad en lo que están haciendo. Algo importante es que relacionan su preferencia o desagrado por un tema de acuerdo con el dominio de conocimiento que sienten de él y su inhabilidad para ilustrar una idea o concepto: “Tú adquieres el gusto por las matemáticas, al entenderlas”, “No te gustan cuando

tienes miedo de no hacerlo bien”. Esto, de alguna manera, implica que, elevando su conocimiento sobre algún tema, mejoraría la disposición del profesor para enseñarlo. De la complejidad de enseñar matemáticas, citan como razones, entre otras, la dificultad de los libros de texto, la extensión del programa y los nuevos enfoques de enseñanza requeridos. También reconocieron sus limitaciones en la frecuencia del uso de materiales (ya que se basan por lo general en el libro de texto) y en las carencias que tienen en su manejo. A la pregunta de cómo comprueban que sus estudiantes entienden algo, respondieron que utilizan ejercicios escritos o exámenes. Esto muestra que no ven como un recurso posible y provechoso su conversación e interacción con los estudiantes en el salón de clase.

En el cuestionario final, los profesores manifestaron que el taller les fue útil para intercambiar estrategias e ideas pedagógicas, trabajar algunos contenidos de manera distinta y refrescar algunos conocimientos. Sobre los cambios en su práctica, todos expresaron que han implementado actividades y han modificado actitudes y formas de trabajo. Sin embargo, citan como problema para seguir con esto la falta de tiempo debido a la cantidad de tópicos que tienen que abordar en el año.

Reconocen la importancia de saber el pensamiento de los niños y deducir lo que entienden, expresando: “Debería de servir para corregir la enseñanza...” y “Fortalecería nuestra habilidad de atender mejor sus necesidades”, pero admitieron que “No hemos desarrollado esa habilidad”. También reconocen que las dificultades que ven en sus estudiantes podrían no ser culpa de ellos (por falta de atención o de interés en clase), como antes creían, y que podría deberse a su enfoque pedagógico. Mencionaron que se dan cuenta de que deben ser más tolerantes en cuanto a los errores de los estudiantes y que deberían aprovecharlos para mejorar la efectividad de su enseñanza.

Los profesores mencionaron como las más importantes contribuciones del taller que: *i*) reflexionaron sobre su propia práctica; *ii*) recibieron algunos elementos teóricos para apoyar su enseñanza y *iii*) valoran mucho más un trabajo colaborativo con otros profesores.

CONCLUSIONES GENERALES

Este artículo hace ver que los conocimientos del profesor deben ser muy variados y que no se deben limitar a técnicas pedagógicas y a un conocimiento del contenido matemático. Otros autores han identificado un conocimiento aún más signi-

ficativo para la enseñanza, el cual se ha denominado genéricamente como “conocimiento pedagógico del contenido”. Éste, como ya se explicó, es una amalgama de ambos conocimientos y, en matemáticas, contiene una parte fundamental referida como “conocimiento matemático para la enseñanza”, que engloba el conocimiento útil del profesor para su práctica docente. Creemos que éste es el aspecto que hay que atender en especial si se desean avances significativos en educación.

Las participaciones de los profesores en los talleres revelaron que su conocimiento matemático para la enseñanza es de tipo instrumental, ya que se basa principalmente en procedimientos mecánicos y en sus propias convicciones sobre la enseñanza. Encontramos que, aun cuando tienen además un conocimiento matemático para la enseñanza de tipo conceptual, éste es muy limitado, lo cual les causa inseguridad para dar explicaciones y los lleva a recurrir sólo a técnicas repetitivas de solución y a procedimientos aprendidos de memoria.

Observamos carencias importantes en los tres aspectos del conocimiento matemático para la enseñanza. En el *especializado*, la falta de una variedad de estrategias de solución y la habilidad de desglosar ideas y procedimientos. En el de *instrucción*, representaciones e ilustraciones muy reducidas. En el de *estudiantes*, el desconocimiento de los posibles razonamientos y las causas probables de las dificultades. Sin embargo, durante el taller, se vieron indicios de mejorías alrededor de los temas tratados en lo que se refiere a su interés para tratar de conocer cada uno de estos aspectos.

De las observaciones realizadas, se puede inferir que, de estos tres aspectos del conocimiento matemático para la enseñanza, el conocimiento matemático especializado es central para poder desarrollar con amplitud los otros dos componentes (el conocimiento para la instrucción y el conocimiento de estudiantes). Sin las diversas habilidades que comprende este conocimiento matemático especializado, será muy difícil para el profesor conducir adecuadamente su instrucción o entender las dificultades de los estudiantes.

Un contenido recurrente en las sesiones fue el de fracciones, debido a la existencia de problemas conceptuales y al dominio reducido que tenían los propios profesores de este tema. Esto se reflejó en sus enfoques procedimentales de clase, basados en reglas que seguir, acompañadas incluso de algunos errores elementales. El taller los ayudó a cuestionarse sobre estos problemas y a obtener respuestas del grupo, lo cual hubiera sido imposible de manera individual.

El propio taller, por su acercamiento práctico, se desarrolló utilizando técnicas didácticas que se pueden implementar en el propio salón de clase y que muestran al profesor el valor de la conversación e interacción entre compañeros con

la guía de una persona “experta”. Esta actividad de desarrollo de su conocimiento y la aplicación a su práctica docente debería tener siempre este componente social. Sin embargo, el profesor la realiza por lo general de manera individualizada, con lo cual sólo puede lograr avances muy pequeños.

Otra habilidad que adquirieron los profesores, por el propio diseño del taller, fue plantearse los cuestionamientos adecuados sobre su práctica docente, como: ¿cuáles son los conceptos que debo desarrollar en mis alumnos?, ¿cuáles son las dificultades que pueden tener?, ¿cuál sería una actividad apropiada para realizar?, ¿cuáles serían las representaciones más adecuadas?, ¿qué pretendo que aprendan?, ¿cómo lo puedo observar?, etcétera.

Con respecto a las observaciones de clase antes y después del taller, se observaron cambios apreciables en la práctica de los profesores que resumiremos más adelante. Igualmente importante es hacer notar algunas tendencias comunes de los profesores, parte de las cuales son difíciles de modificar.

- Se les dificulta convertirse en organizadores y propiciadores. Tienden a ser el centro de las actividades, a decir qué y cómo se hace.
- Ven la enseñanza como actividad unidireccional. Descartan las aportaciones de los alumnos y su creatividad para ayudar a dirigir la clase.
- El libro de texto y el programa enmarcan la actividad de la clase casi como únicos recursos. No reaccionan a los indicios de falta de conocimientos previos o falta de interés de los alumnos.
- Presentan el conocimiento matemático como algo terminado, estático y rígido, y no abren la posibilidad al alumno para recrearlo desde sus propias concepciones.
- No rescatan los conceptos importantes. Trabajan con la resolución de problemas pero, al final, no destacan ni concretan los puntos importantes, por lo que el conocimiento se diluye.

Un cambio perceptible común de los profesores fue la intención de cuestionar a los alumnos para obtener no sólo respuestas sino argumentaciones. No obstante, esta habilidad queda medianamente desarrollada, ya que los profesores no aprovechan sus ventajas y se nota una prisa por llegar a la respuesta.

Otros cambios observados en la práctica de los profesores fueron: 1) la formulación de problemas cotidianos que motivaran la participación; 2) las tareas propuestas fueron más adecuadas y desafiantes para sus alumnos; 3) trataron de utilizar mayor número de modelos y representaciones para mostrar las ideas

matemáticas; 4) manifestaron una voluntad de analizar las producciones escritas y los argumentos verbales de sus estudiantes para entender sus razonamientos e inferir sus posibles dificultades, y 5) interactuaron más y de una manera más productiva con sus alumnos dentro del salón de clase. Todo esto los mueve hacia un ligero progreso de su dominio de los elementos esenciales del “conocimiento matemático para la enseñanza” de nuestro marco teórico. El grado observable de estos logros dependió de cada maestro en particular.

En proyectos previos de otros investigadores, se han utilizado otros métodos para el desarrollo profesional de maestros, como el análisis de videos de clase o de producciones escritas de los estudiantes. Nuestro proyecto consiste en el trabajo con profesores por medio de un taller, teniendo como objetivo básico el desarrollo de su conocimiento matemático para la enseñanza. Los resultados muestran que este acercamiento, ante la problemática citada, es adecuado y conviene que se estudie más a fondo.

Posiblemente, la consecuencia más importante de todo lo descrito en este artículo es que poner atención únicamente en “introducir tecnologías en las aulas” o “diseñar materiales didácticos para el uso de los profesores” tendrá un impacto muy modesto para lograr una enseñanza eficaz y un aprendizaje auténtico de los estudiantes. Hay que darse cuenta de que el elemento más determinante de la enseñanza es el propio profesor y, sólo fortaleciendo sus conocimientos, se podrá llegar a un proceso de aprendizaje y enseñanza de calidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Amato, S. A. (2006), “Improving student teachers’ understanding of fractions”, en *Proceedings of PME-30*, Praga, República Checa, vol. 2, pp. 41-48.
- Askew, M., M. Brown, H. Denvir y V. Rhodes (2000), “Describing primary mathematics lessons observed in the Leverhulme Numeracy Research Programme: A qualitative framework”, en *Proceedings of PME-24*, Hiroshima, Japón, pp. 17-24.
- Ball, D. L. (2000), “Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach”, *Journal of Teacher Education*, vol. 51, núm. 3, pp. 241-247.
- Ball, D. L. y H. Bass (2000), “Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics”, en J. Boaler (ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics*, CT. Ablex, Westport, pp. 83-104.

- Borasi, R. y J. Fonzi (1998), *Teaching practices that support an inquiry approach to mathematics instruction*, http://www.rochester.edu/radiate/C/c1c_sttx.htm.
- Carpenter, T. P., E. Fennema, M. L. Franke, L. Levi y S. B. Empson (2000), *Cognitively guided instruction: A research-based professor professional development program for elementary school mathematics*, National center for improving student learning and achievement in mathematics and science, Report No. 003, Wisconsin Centre for Education Research, The University of Wisconsin-Madison.
- Chick, H. L., M. Baker, T. Pham y H. Cheng (2006), “Aspects of teachers’ pedagogical content knowledge for decimals”, en *Proceedings of PME-30*, Praga, República Checa, vol. 2, pp. 297-304.
- Cooper, T. J., A. R. Baturo y E. J. Grant (2006), “Collaboration with teachers to improve mathematics learning: Pedagogy at three levels”, en *Proceedings of PME-30*, Praga, República Checa, vol. 2, pp. 361-368.
- Hill, H. C. y D. L. Ball (2004), “Learning mathematics for teaching: results from California’s mathematics professional development institutes”, *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 35, núm. 5, pp. 330-351.
- Jacobs, V. y R. Ambrose (2003), “Individual interviews as a window into professors’ practice: A framework for understanding professor-student interactions during mathematical problem solving”, en *Proceedings of PME-27*, Honolulu, Estados Unidos, vol. 3, pp. 33-38.
- McDonough, A. y D. Clarke (2003), “Describing the practice of effective teachers of mathematics in the early years”, en *Proceedings of PME-27*, Honolulu, Estados Unidos, vol. 3, pp. 261-268.
- Powell, A. B. y E. Hanna (2006), “Understanding teachers’ mathematical knowledge for teaching: A theoretical and methodological approach”, en *Proceedings of PME-30*, Praga, República Checa, vol. 4, pp. 369-376.
- Schwartz, B., R. Hershkowitz y S. Azmon (2006), “The role of the teacher in turning claims to arguments”, *Proc. Psychology of Mathematics Education*, Praga, vol. 30, núm. 5, pp. 65-72.
- Seago, N. y L. Goldsmith (2006), “Learning mathematics for teaching”, *Proceedings of PME-30*, Praga, República Checa, vol. 5, pp. 73-81.
- Shulman, L. S. (1987), “Knowledge and teaching: Foundations of the new reform”, *Harvard Educational Review*, vol. 57, núm. 1, pp. 1-22.
- Skemp, R. R. (1976), “Relational understanding and instrumental understanding”, *Mathematics Teaching*, vol. 77, pp. 20-26.

DATOS DE LOS AUTORES

Simón Mochón

Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México
smochon@cinvestav.mx

Melchor Morales Flores

Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México
melmoralesf@hotmail.com