Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias
Año 2 – Número 1 – julio de 2007

Concepciones de estudiantes de profesorado acerca del aprendizaje de la demostración

Virginia Montoro

vmontoro@crub.uncoma.edu.ar / vmontoro@gmail.com

Centro Regional Bariloche - Universidad Nacional del Comahue

Argentina

Resumen

El presente trabajo está enmarcado en el proyecto de investigación: *La demostración en geometría en la formación de profesores,* que con el objetivo general de estudiar el proceso de aprendizaje de la demostración en geometría de estudiantes de Profesorado de Matemática, se propone en particular indagar acerca de las concepciones de estos estudiantes sobre la demostración matemática.

Reportamos aquí el análisis de una entrevista realizada a estos estudiantes con el fin de obtener indicios de sus concepciones sobre el aprendizaje de la demostración y las posibles relaciones de estas ideas con las pruebas que estos estudiantes producen frente a un problema de demostrar. Encontramos principalmente las siguientes tres ideas: *se aprende a demostrar estudiando lógica*; a *demostrar se aprende demostrando* y se aprende de *entender demostraciones bien presentadas;* relacionadas con estudiantes que producen pruebas *ingenu*as; de *ejemplo genérico-crucia*l y *formales* respectivamente.

Palabras claves: demostración – profesorado – concepciones

ABSTRACT

The present article is part of the research project named "geometrical proof in the formation of teachers" that has the general aim of studying the learning process of demonstration in geometry in students that study to become teachers. In particular, we study the students' conceptions of proofs.

In this article, we report the analysis of interviews made to the students to find hints about their conceptions and the possible relationships between these ideas and proofs that students make when they deal with a proof problem. We mainly found the following three ideas: you can learn a *how to demonstrate* theory, you learn to demonstrate by making proofs and you learn to demonstrate by understanding well presented proof; related respectively with students that produce naive proofs, generic-crucial example proofs and formal proofs.

INTRODUCCIÓN

Desde la tradición platónico-aristotélica y hasta nuestros días, la noción filosófica de demostración se relaciona con la derivación de un enunciado a partir de otros enunciados, llamados premisas, mediante la aplicación de determinadas leyes lógicas; en esta idea de demostración subyace siempre una búsqueda razonable de la verdad.

En el ámbito matemático la idea de demostración y el verbo demostrar adquieren, históricamente, una dimensión precisa y notable. La demostración matemática es un procedimiento ligado a establecer propiedades de los conceptos, equivalencia de definiciones o confirmación de conjeturas en el contexto de un sistema axiomático. Sin embargo, demostrar en matemática es una tarea cognitivamente compleja, no siempre tan diáfana como su redacción final parece indicar; la denominada *demostración final* de un teorema es la culminación de un proceso, la presentación limpia y ordenada de una larga investigación nunca exenta de intuición, pruebas, errores, refinamientos, etc. (Polya.1954, Lakatos.1976, Schoendfeld.1992).

En el proceso de aprendizaje de la matemática la argumentación utilizada para *demostrar* una proposición matemática, puede aparecer bajo distintos aspectos, con mayor o menor grado de explicitación y con distintos niveles de rigor; como un medio de autovalidar los conocimientos o como un contenido a aprender.

Respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje de la demostración, encontramos los trabajos precursores de Polya (1954), Fischbein (1982), Balacheff (1987), Arsac (1992) y Duval (1991) que estudian situaciones de validación y prácticas argumentativas de los alumnos, las concepciones de verdad y falsedad y la tipología de pruebas que ellos producen. No podemos dejar de considerar los aportes (entre otros) de Dreyfus (1999), Godino y Martínez Recio (1997 – 2001), Martínez Recio (2002), Ibáñez Jalón, (2002) Sáenz Castro (2002) que analizan los rasgos característicos del significado de la demostración en distintos contextos institucionales y las distintas dimensiones para este concepto como así también las dificultades con que se encuentran los estudiantes universitarios para producir demostraciones formales.

El presente trabajo está enmarcado en el proyecto de investigación: *La demostración en geometría en la formación de profesores*[1], que con el objetivo general de estudiar el proceso de aprendizaje de la demostración por parte de estudiantes de Profesorado de Matemática en el contexto de problemas de Geometría Euclídea, se propone, como objetivo particular, indagar acerca de las concepciones de estos estudiantes sobre la demostración.

En el proyecto marco trabajamos bajo la hipótesis del papel fundamental que juega en la formación de los futuros docentes el aprendizaje de procedimientos del método matemático por lo que hemos considerado investigar el proceso de aprendizaje de los estudiantes de profesorado enfocando especialmente en la demostración.

Consideramos de interés el estudio de las concepciones de los estudiantes en los dominios específicos de conocimiento (Pozo y Carretero. 1987- 1992, Carretero. 1997) ya que acordamos con que el estudio de las concepciones de los estudiantes debe ser punto de partida de la enseñanza, debido a que para que el aprendizaje sea significativo (Ausubel y col 1978/83) es necesario partir de las ideas que los aprendices ya poseen, interactuando con ellas a fin de enriquecerlas o modificarlas.

Sabemos que la tarea de conocer las concepciones de los sujetos es dificultosa y que se ha encarado en la investigación de diversas maneras. En Rodríguez Moneo (1999) se realiza un relevamiento de los procedimientos utilizados al respecto en numerosos trabajos de investigación en diversos dominios de conocimiento; de hecho podemos afirmar que no es una tarea sencilla.

En este trabajo realizamos una entrevista con preguntas abiertas, que si bien son muy generosas en aportar información acerca de las formas de pensar de los

[1] Proyecto de Investigación 04B105, aprobado y subsidiado por la secretaría de Investigación de la Universidad Nacional del Comahue: Dirigido por C. Ferraris y Co-dirigido por V. Montoro; otros integrantes del mismo son: R. Santinelli, L. Siñeriz , M. Ferrero y M. Juan.

estudiantes, su análisis se suele tornar muy dificultoso y complejo. En este trabajo comunicamos una forma de análisis, que creemos eficiente, para este tipo de indagación. Hemos utilizado para ello el análisis lexicográfico o análisis estadístico de datos textuales (Benzecri 1981; Lebart y Salem 1989 - 1994) que proporciona una descripción sistemática y exhaustiva del vocabulario utilizado en las respuestas abiertas y permite describir, analizar e interpretar las similitudes y diferencias entre los discursos y entre grupos de individuos. Este es un método especialmente diseñado para encontrar regularidades en un corpus textual, elaborar tipologías mediante el recuento de formas gráficas y relaciones entre ellas. Asumimos esta metodología como una manera eficiente de acceder a las concepciones de los estudiantes; referenciadas en el lenguaje que utilizan.

En el marco del citado proyecto de Investigación, se les propuso a l3 estudiantes (E1, E2,…E13) del Profesorado de Matemática del Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue; al comienzo de la asignatura Geometría Euclídea del Plano tres tareas relacionadas con *demostrar*, luego se los entrevistó individualmente mediante preguntas abiertas a fin de profundizar la indagación sobre sus concepciones.

Reportamos en el presente trabajo el análisis del varias preguntas abiertas realizadas durante la citada entrevista con el fin de delinear aspectos de las concepciones de los estudiantes sobre el aprendizaje de la Demostración; como así también obtener información sobre posibles relaciones de estas concepciones con el tipo de pruebas que producen cada uno de ellos al comienzo del estudio de la Geometría.

La Tarea 1 que se les propuso fue de asociación libre de palabras a los términos *demostración* y *justificación* y las Tareas 2 y 3 consistentes en resolver problemas de demostrar.

La Tarea 1 fue analizada en un trabajo anterior (Montoro y Juan 2005) en el que realizamos una caracterización de los estudiantes según las palabras que asocian a los términos *demostración* y *justificación*. Los estudiantes quedaron clasificados en cuatro grupos:

Grupo 1: asocian exclusivamente *procesos* tanto a *demostración* como a *justificación*. E1; E9; E10 y E4

Grupo 2: asocian tanto *procesos* como *objetos* a ambos términos: E2 y E6

Grupo 3: dan respuestas netamente *descriptivas* para ambos términos: E3 y E8

Grupo 4: asocian *objetos* a *demostración*: E5, E12; E13; E11 y E7.

Encontramos; además, indicios sobre una primera diferenciación entre las concepciones posibles para *demostración*, estos estarían relacionados con el concebirla como un *objeto*, (fijo, determinado, acabado, "eso que está en el libro") o como un *procedimiento*, (algo que uno puede realizar, que se puede mejorar, puede crearse o re-crearse)

Para las Tareas 2 y 3 se realizó una categorización de las pruebas producidas por los estudiantes, basada en la tipología de pruebas realizada por Siñeriz y Ferraris (2005); para luego, a través de la aplicación de métodos multivariados buscar asociaciones entre los tipos de pruebas producidos por los estudiantes y delinear una caracterización de grupos de estudiantes según sus producciones (Montoro. 2005).

La citada topología de pruebas producidas por los estudiantes distingue principalmente entre pruebas empíricas e intelectuales. Se denomina como *pruebas empíricas* aquellas que se sustentan en conocimientos prácticos que se captan a través de los sentidos y/o la acción; procedimientos de validación en los cuales se utilizan los ejemplos como elementos para convencer. Los ejemplos tienen un sustento "concreto", se realizan acciones sobre objetos materiales o representaciones gráficas; ejemplos y acciones son utilizados como muestra de lo que se quiere probar, y la comunicación de este tipo de prueba se hace por ostensión. Diferenciando según sea el papel del ejemplo en: *prueba ingenua* que consiste en extraer de la observación de un pequeño número de casos (en ocasiones sólo un caso) la certeza de verdad de una aserción; *prueba crucial* es aquella en la cual se usa un ejemplo cuidadosamente seleccionado por quien argumenta, tomado como representante de clase y finalmente *prueba genérica* es un procedimiento de validación realizado mediante operaciones o transformaciones sobre un ejemplo. Las *pruebas intelectuales* son aquellas que se componen de argumentaciones que implican propiedades y relaciones entre propiedades y su comunicación está caracterizada por el lenguaje matemático. Las pruebas intelectuales se diferencian entre sí por el grado de sofisticación de los argumentos deductivos. En este sentido, distinguiremos la experiencia mental y la deducción formal. En la *experiencia mental* se consideran ejemplos que no son tomados como elementos de convicción sino para ayudar a organizar la justificación o como soporte de la argumentación. Si bien los argumentos pueden ser informales, ya de un lenguaje exclusivamente coloquial o por la existencia de inferencias incompletas en la cadena deductiva, se sabe que con verificar en uno o varios casos no alcanza; hay conciencia de lo que falta, lo que lleva a producir otra clase de argumentos para convencer y por último en la *deducción formal* la justificación se basa en operaciones mentales sin recurrir necesariamente a la ayuda de ejemplos específicos. Se hacen inferencias en base al conocimiento de propiedades y definiciones, se realizan operaciones sintácticas con los enunciados que permiten trascender al ejemplo. La esencia de la justificación es la transformación de las expresiones simbólicas que se conectan en la argumentación. (Siñeriz y Ferraris. 2005)

Según nuestros resultados (Montoro. 2005) podemos decir que, en el momento de comenzar el estudio de la Geometría; los estudiantes E2, E6 y E10 producen *pruebas intelectuales formales.* E1; E4 y E7 proponen pruebas intelectuales del tipo coloquial (*Experiencia Mental*); E3 y E5 producen pruebas *empíricas genéricas y cruciales;* E11 en un campo intermedio entre *ingenuas y cruciales* y E9; E8; E12 y E13 producen *pruebas ingenuas.*

METODOLOGÍA

Participantes

Participaron 13 estudiantes cursantes de la asignatura Geometría Euclídea del Plano del Profesorado de Matemática del Centro Regional Universitario Bariloche. La asignatura citada corresponde al segundo año de estudios. Las edades de estos estudiantes oscilan entre 19 y 33 años, y en su totalidad han cursado previamente las asignaturas Álgebra I y Geometría Analítica, en ambas tienen contacto con numerosas demostraciones y en la primera estudian elementos de lógica proposicional y métodos de demostración

La tabla 1, que presentamos a continuación, muestra para cada estudiante la edad, el avance en la carrera; grupo en que quedó clasificado según las palabras que asocia a los términos *demostración* y *justificación* en la Tarea 1 (Montoro y Juan. 2005) y por último el tipo de pruebas que produjeron, en general, en las Tareas 2 y 3 (problemas de demostrar) del Test (Montoro. 2005)

El avance de la carrera se categórico del siguiente modo; si el estudiante posee 4 o menos materias aprobadas se lo considero con un avance *menor*; si posee entre 5 y 8 materias aprobadas se lo considero avance *medio* y si tiene 9 o más materias aprobadas se lo denominó *avanzado*

0rden	**Edad**	**Avance en al carrera**	**Grupo Tarea 1**	**TIPO de PRUEBA**
E1	Más de 25	Avanzado	Procesos	Experiencia Mental
E2	22-24	Medio	O-P	Formales
E3	19-21	Medio	Descriptores	Genérica-Crucial
E4	19-21	Medio	Procesos	Experiencia Mental
E5	Más de 25	Medio	Objetos	Genérica-Crucial
E6	22-24	Medio	O-P	Formales

E7	19-21	Medio	Objetos	Experiencia Mental
E8	19-21	Menor	Descriptores	Ingenuas
E9	19-21	Medio	Procesos	Ingenuas
E10	19-21	Medio	Procesos	Formales
E11	19-21	Medio	Objetos	Ingenuas- Crucial
E12	19-21	Medio	Objetos	Ingenuas
E13	22-24	Avanzado	Objetos	Ingenuas

Tabla 1: muestra para cada estudiante la edad, el avance en la carrera; grupo en que quedó clasificado según las palabras que asocia a los términos *demostración* y *justificación* en la Tarea 1 y el tipo de pruebas que produjeron, en problemas de demostrar.

Instrumento de indagación

Se realizó una entrevista individual a cada uno de los participantes, con la presencia de una investigadora a cargo de la entrevista y otra observadora.

Las preguntas realizadas fueron las siguientes:

1) *¿Cómo piensas que se aprende a demostrar?*
2) *¿Qué consideras que te sirvió para aprender a demostrar?*
3) *¿Cómo hacías tus primeras demostraciones?*
4) *¿Y las actuales?*
5) *¿Cómo imaginas tus demostraciones después de recibido/a?*
6) *¿Cómo sabes cuando una demostración es correcta?*

Las respuestas fueron orales y en forma de dialogo con la entrevistadora, que solo intervenía si era necesario aclarar algún aspecto; las respuestas fueron grabadas y luego trascriptas en su totalidad

Metodología de análisis

Se confeccionó una base de datos donde se le asoció a cada estudiante su respuesta literal a cada una de las preguntas; como así también su edad, el avance en la carrera; el grupo en que quedó clasificado según la Tarea 1 y finalmente el tipo de pruebas producidas en las tareas 2 y 3 del Test.

En este caso contábamos con respuestas abiertas a preguntas y se buscó una metodología que nos permitiera evidenciar similitudes y diferencias entre las respuestas de los distintos grupos de estudiantes, y mediante la interpretación del léxico utilizado poner de manifiesto posibles concepciones presentes en distintos grupos de estudiantes.

Se utilizó para ello el análisis lexicográfíco del corpus de respuestas; respecto de las formas léxicas utilizadas por los estudiantes; de los segmentos repetidos y luego una análisis factorial de la tabla léxica agregada, que es aquella que cruza los grupos de individuos (según sea el tipo de pruebas que producen) con las formas léxicas utilizadas.

Con el propósito de descubrir ideas diferenciadas presentes en el corpus como así también tipos de respuestas y su relación con los tipos de pruebas que producen los estudiantes; se realizaron 3 análisis lexicográficos de la tabla léxica agregada, cada uno correspondiente a las respuestas a las preguntas: 1 y 2, que entendemos, indagan sobre *cómo se aprende a demostrar*; un segundo análisis correspondiente a las preguntas 3 y 4 que lo hacen sobre *qué cambia al aprender a demostrar* y por último una de las respuestas a las preguntas 5 y 6 sobre: *cómo es una demostración correcta*. A modo ilustrativo se las relacionó también con la edad; avance en la carrera de los estudiantes y sus respuestas a la Tarea 1.

En cada análisis se realizó, además, una clasificación de las palabras (o segmentos) utilizadas en las respuestas según estuviesen presentes en las mismas repuestas y su correspondiente asociación con alguno de los grupos de Tipos de Pruebas. Se realizó una clasificación *jerárquica ascendente* (Ward, 1963) previo análisis factorial de correspondencias.

Análisis N	Respuestas a las preguntas	Indagan sobre
1	1y 2	¿Cómo se aprende a demostrar?
3	3 y 4	¿Que cambió al aprender a demostrar?
4	5 y 6	¿Cómo es una demostración Correcta?

RESULTADOS Y DISCUSION

Se presenta para cada análisis el primer plano factorial del AFC de la tabla léxica agregada descripta; en el cual dos palabras próximas (o segmentos) se deben interpretar como presentes en las mismas respuestas; cada grupo de individuos según los tipos de prueba que producen deben interpretarse como el baricentro de las palabras que utilizan, es decir estarán mas cerca de las palabras que más usan. También se han proyectado los baricentros de las clases obtenidas por el método de clasificación.

En los gráficos se han conservado las palabras y grupos de individuos que están bien representados en este plano y sobre los cuales se han realizado las interpretaciones.

En la periferia de los gráficos se encuentran las palabras características de distintos tipos de respuestas; ya que alejadas del centro de gravedad (centro del gráfico) se encontraran las palabras (o segmento) más característicos. Para mayor detalle en la aplicación del análisis lexicográfíco puede consultarse a Béncue Bertaut; 1991; Lebart y Salem. 1994; Lebart y col.2000.

Análisis lexicográfico de las respuestas 1 y 2: ¿Cómo se aprende a demostrar?

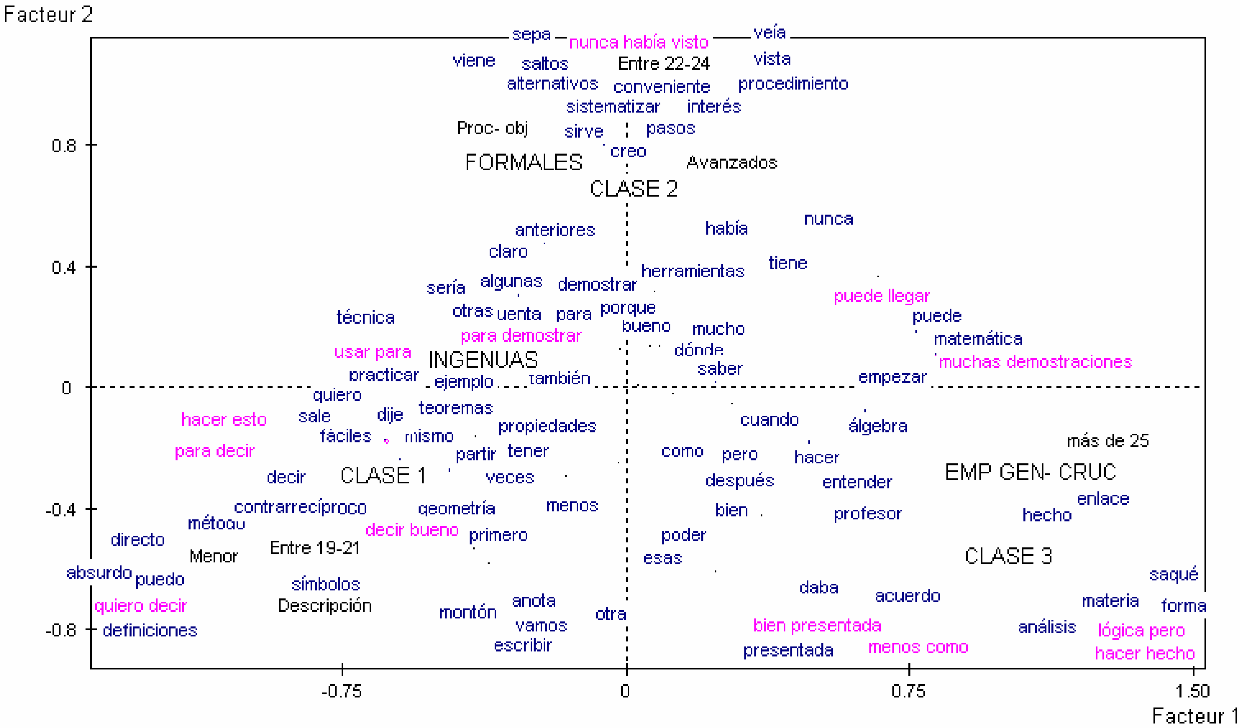

Grafico 1: Primer plano factorial del Análisis lexicográfico de las respuestas 1 y 2**:** en el cual dos palabras (o segmentos) próximas, se interpretan como presentes en las mismas respuestas; cada grupo de individuos debe interpretarse como el baricentro de la palabra que utilizan, es decir estarán mas cerca de las palabras que más usan. También se han proyectado los baricentros de las clases obtenidas por el método de clasificación con las denominaciones CLASE 1, CLASE 2 y CLASE 3. En los gráficos se han conservado las palabras y grupos de individuos que están bien representados en este plano y sobre los cuales se han realizado las interpretaciones. En la periferia del grafico se encuentran las palabras características de distintos tipos de respuestas por lo que pueden interpretarse como ideas diferencias en las distintas respuestas.

Interpretación del Análisis lexicográfico de las respuestas 1 y 2

¿Cómo se aprende a demostrar?

En la periferia del grafico se encuentran las palabras características de distintos tipos de respuestas; las que están próximas deben interpretarse como presentes en las mismas respuestas; por lo que haciendo un recorrido de la periferia podemos interpretar ideas diferencias en las distintas respuestas. Por ejemplo en la esquina inferior izquierda cerca del centro de gravedad de la CLASE 1 encontramos las palabras *método –directo – contrareciproco – absurdo* de lo cual inferimos como presente en esas respuestas la idea de *se aprende a demostrar estudiando los métodos de demostración.*

Ideas diferenciadas en cuanto a ¿Cómo se aprende a demostrar?

Observando las palabras (o segmentos) presentes en la periferia y cuales están cerca de cuales podemos inferir las siguientes ideas diferenciadas

Se aprende a demostrar:

- ✓ estudiando los métodos de demostración
- ✓ aprendiendo una técnica: *de que se parte, a donde se llega*
- ✓ según el contenido (materia): Algebra – Análisis - Geometría
- ✓ estudiando lógica
- ✓ de las demostraciones *bien presentadas*; del profesor ; de los libros
- ✓ haciendo muchas demostraciones; realizando los pasos
- ✓ de haberlo visto antes
- ✓ adquiriendo herramientas; mañas; procedimientos. *Lo que sirve para demostrar.*
- ✓ practicando teoremas; propiedades; ejemplos
- ✓ usando *lo que tenés*; *viendo de donde partís.*

Encontramos que las respuestas se pueden agrupar en tres clases de respuestas:

C1: **Aprender la "teoría" de demostrar – demostrar como contenido a estudiar**

Aprender los métodos de demostración (directo, indirecto, por el absurdo); teoremas, ejemplos; definiciones; propiedades. Usar una técnica; símbolos.

Asociadas a los estudiantes que suelen dar *pruebas ingenuas*; más jóvenes, con menos avance en la carrera

C2: **A demostrar se aprende demostrando. Se adquiere una habilidad – demostrar como un procedimiento**

Haciendo muchas demostraciones. Se adquiere habilidades- herramientas – mañas

Se tienen en cuanta los saltos; se sabe. Se lo ve como un procedimiento (Sistematizar – pasos)

No se aprende hasta no verlo "no lo había visto antes"

Asociadas a estudiantes que suelen dar pruebas formales; de mediana edad; avanzados en la carrera y que asocian tanto objetos como procedimientos a lo términos *demostración y justificación.*

C3: **Se aprende mirando; la demostración como objeto**

Se aprende entendiendo. Se aprende de las demostraciones bien presentadas. Se aprende en las materias (Algebra – Análisis)

Asociadas a estudiantes que suelen dar pruebas Empíricas Genérico – Cruciales y a los estudiantes de mayor edad

Análisis lexicográfico de las respuestas 3 y 4: ¿Qué cambió con el aprendizaje?

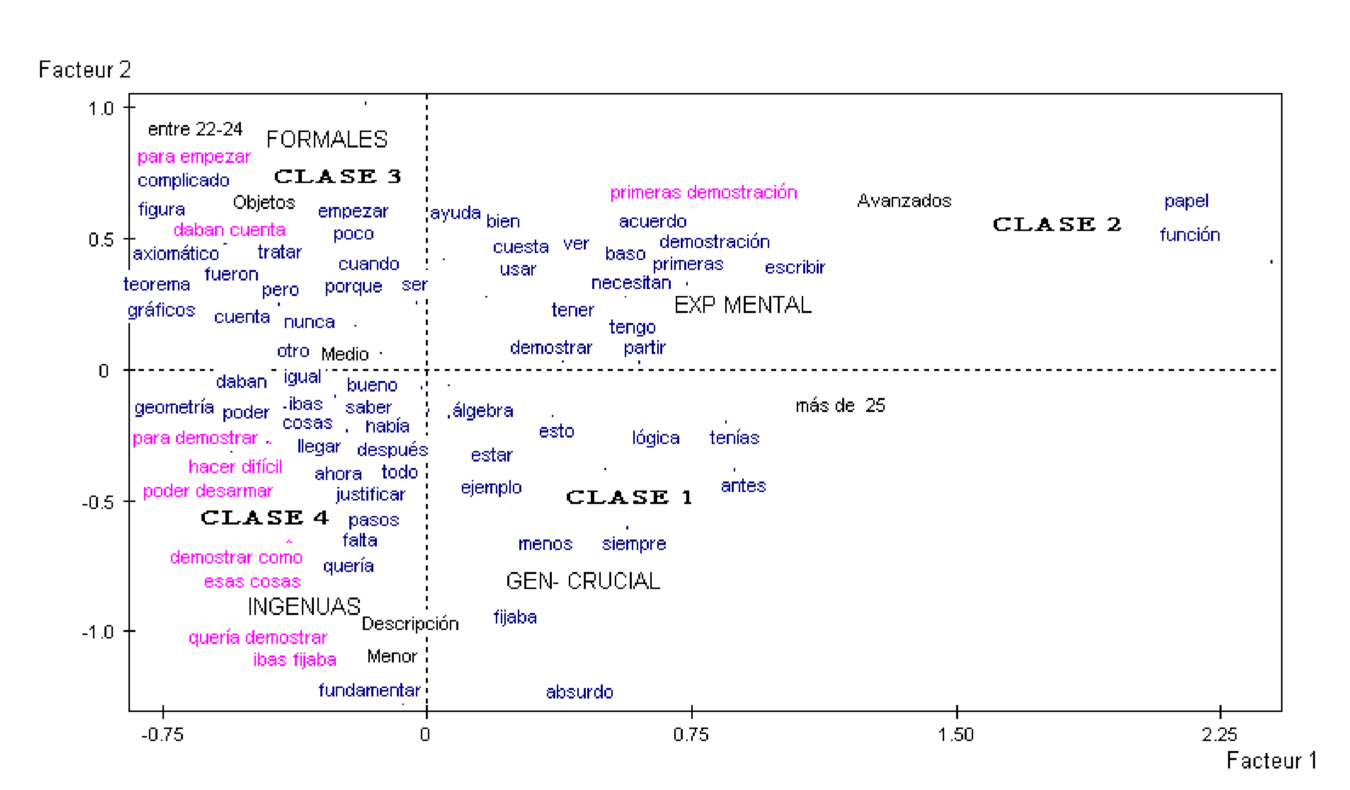

Grafico 2: Primer plano factorial del Análisis lexicográfico de las respuestas3 y4**:** en el cual dos palabras (o segmentos) próximas, se interpretan como presentes en las mismas respuestas; cada grupo de individuos según los tipos de prueba que producen debe interpretarse como el baricentro de la palabra que utilizan, es decir estarán mas cerca de las palabras que más usan. También se han proyectado los baricentros de las clases obtenidas por el método de clasificación con las denominaciones CLASE 1, CLASE 2, CLASE 3 y CLASE 4. En los gráficos se han conservado las palabras y grupos de individuos que están bien representados en este plano y sobre los cuales se han realizado las interpretaciones. En la periferia del grafico se encuentran las palabras características de distintos tipos de respuestas por lo que pueden interpretarse como ideas diferencias en las distintas respuestas.

Interpretación del Análisis lexicográfico de las respuestas 3 y 4

En la periferia del grafico se encuentran las palabras características de distintos tipos de respuestas; las que están próximas deben interpretarse como presentes en las mismas respuestas; por lo que haciendo un recorrido de la periferia podemos interpretar ideas diferencias en las distintas respuestas. Por ejemplo en el cuadrante inferior izquierdo cerca del centro de gravedad de la CLASE 4 encontramos las palabras *fundamentar; justificar; desarmar; seguir los pasos.* Inferimos como presente en esas respuestas la idea de que el aprendizaje de la demostración está centrado en la justificación de cada paso.

Ideas diferenciadas en cuanto a ¿qué cambió con el aprendizaje?

- ✓ Aprendí Lógica. Tener en cuenta axiomas, teorema
- ✓ Utilizar gráficos; figuras – Ayuda
- ✓ Fundamentar – justificar - desarmar - seguir los pasos
- ✓ Fijarte que te dan - Ver lo que tengo; de donde parto; en que me baso
- ✓ Necesidad de escribir

Encontramos principalmente cuatro clases de respuestas:

C1: Aprender Lógica

Aprendí Lógica - Demostrar por el absurdo - Fijarme que tenía

Asociada a pruebas Genéricas-cruciales

C2: Fijarme de donde parto

Ver lo que tengo; de donde parto; en que me baso. Necesidad de escribir

Asociados a pruebas de tipo experiencia mental; a estudiantes avanzados y mayores de 25

C3: Lo que uso para demostrar

Tener en cuenta axiomas, teorema. Utilizar gráficos; figuras

Asociada a pruebas de tipo formales

C4: Fundamentar; poder llegar

Fundamentar; justificar. Desarmar, seguir los pasos. Fijarte que te dan para demostrar; para poder llegar

Asociada a pruebas tipo ingenuas

Análisis lexicográfico de las respuestas 5 y 6: ¿Cómo es una buena demostración?

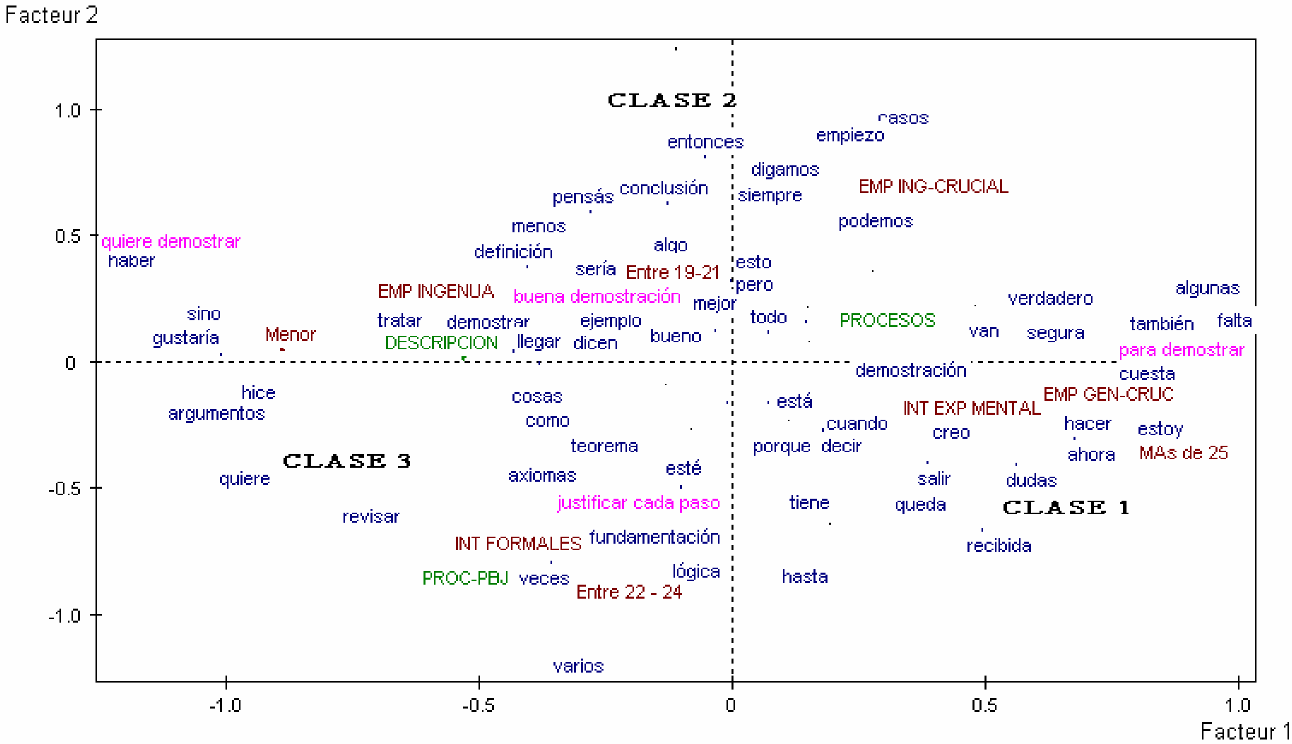

Grafico 3: Primer plano factorial del Análisis lexicográfico de las respuestas 5 y6**:** en el cual dos palabras (o segmentos) próximas, se interpretan como presentes en las mismas respuestas; cada grupo de individuos según los tipos de prueba que producen debe interpretarse como el baricentro de la palabra que utilizan, es decir estarán mas cerca de las palabras que más usan. También se han proyectado los baricentros de las clases obtenidas por el método de clasificación con las denominaciones CLASE 1, CLASE 2 y CLASE 3. En los gráficos se han conservado las palabras y grupos de individuos que están bien representados en este plano y sobre los cuales se han realizado las interpretaciones. En la periferia del grafico se encuentran las palabras características de distintos tipos de respuestas por lo que pueden interpretarse como ideas diferencias en las distintas respuestas.

Interpretación del Análisis lexicográfico de las respuestas 5 y 6

En la periferia del grafico se encuentran las palabras características de distintos tipos de respuestas; las que están próximas deben interpretarse como presentes en las mismas respuestas; por lo que haciendo un recorrido de la periferia podemos interpretar ideas diferencias en las distintas respuestas. Por ejemplo al medio a la derecha encontramos las palabras dudas, cuesta, segura; y constatando en las respuestas literales de los estudiantes; vemos que hace referencia a la idea, de *una demostración es correcta cuando no te cuesta, cuando estás segura, cuando no tenés dudas.*

Ideas diferenciadas en cuanto a ¿cómo es una buena demostración?

Una demostración es correcta:

- ✓ Cuando no te cuesta – no hay dudas
- ✓ Cuado es verdadera
- ✓ Justificás cada paso
- ✓ Fundamentás – argumentás
- ✓ Basada en axiomas y teorema
- ✓ Cuando llegas a la conclusión - tratás de llagar
- ✓ Cuando llegas a lo que tenés que llegar
- ✓ Cuando estás segura – estás convencido

Encontramos principalmente 3 clases de respuestas

C1: Estar convencido – centreada en la seguridad el resolutor

No cuesta – no hay dudas – es verdadero - estoy seguro

Asociado a pruebas de tipo experiencia mental y Genérico –Crucial

C2: Centrada en la conclusión

Si llegas a la conclusión; tratar de llegar; querer demostrar

Asociada a pruebas de tipo ingenuas e Ingenuas-cruciales; a estudiantes de menor edad y que asocian palabras que denotan procesos al término demostración

C3: Justificar cada paso

Intentar llegar – Axiomas- Teoremas – Lógica – Argumentos – Fundamentación.

Asociadas a pruebas de tipo formal y a estudiantes que asocian palabras que denotan descriptores al término demostración. Como así también a estudiantes con edades entre 22- 24 años.

CONCLUSIONES

En cuanto a lo que consideran estos estudiantes respecto a cómo se aprende a demostrar; podemos describir un gradiente entre la *teoría de demostrar* hacia la *practica de demostrar*. Desde los estudiantes que consideran que se aprende a demostrar, aprendiendo una *teoría de demostrar* como podría ser aprender los métodos de demostración o estudiar lógica; que son aquellos de menor edad y menor avance en la carrera y que producen pruebas ingenuas (es decir las pruebas más alejadas de una demostración matemática); luego aquellos que consideran que pueden aprender con demostraciones bien presentadas, entendiendo los razonamientos de otros (profesor- libros), es decir consideran que pueden aprender de “ejemplos” y que principalmente son estudiantes que producen pruebas genéricos o de ejemplo crucial, cuya principal característica es la de basarse en un ejemplo representativo. Por último los estudiantes que consideran que se aprende a demostrar *demostrando;* haciendo sus propias demostraciones, idea que se asocia a los estudiantes de mediana edad, avanzados en la carrera (es decir que hacen la carrera en el tiempo estipulado) y que producen pruebas formales, esto es pruebas que podrían considerarse demostraciones matemáticas.

En cuanto a lo que estos estudiantes consideran como una demostración correcta; tenemos un grupo que se centra en que una *buena demostración es la que llega a la conclusión*, sin embargo no nos dice nada de cómo llegar y bajo que condiciones. Se trata de un grupo de respuestas asociadas mayormente a estudiantes que dan pruebas ingenuas. Encontramos otro grupo de estudiantes que considera que una demostración es correcta cuando tienen la seguridad de que es así; parecieran confiar en sus propias argumentaciones. Este grupo está asociado a la última etapa de las pruebas empíricas y a la de experiencia mental; justamente las etapas en que comienzan las argumentaciones deductivas, aunque posiblemente en leguaje coloquial no formalizado.

Por otra parte los estudiantes que producen pruebas formales, centran la corrección de una demostración mayormente en la justificación de cada paso.

Destacamos que en general los estudiantes que brindan pruebas ingenuas consideran que se aprende a demostrar estudiando una teoría de la demostración y que estas serán correctas cuando se llega a *lo que hay que llegar* sin saber muy bien cómo fue este proceso; estos estudiantes mayormente asocian términos relacionados a *procesos* al término demostración. Se podría pensar en esto como una suerte de *idealización* que realizan en cuanto a las demostraciones; ya que estos mismos estudiantes cuando se enfrentan a la tarea de demostrar, se limitan a “mostrar” un caso donde “evidentemente” es cierta la proposición, sin sentir la necesidad de deducir; de producir un argumento lógico que valide la veracidad de la implicación.

Nos parece relevante resaltar los aspectos que los estudiantes destacan como importantes al momento de aprender a demostrar: Aprender Lógica (particularmente el método por el absurdo); prestar atención a las hipótesis (lo que conozco, lo que ya sé, lo que me dan). Tener en cuenta los axiomas. Utilizar gráficos y figuras. Aprender a fundamentar; a justificar. Aprender a analizar (desarmar); sintetizar (a donde llego) y a formalizar (necesidad de escribir).

Podemos resaltar aspectos comunes de las ideas diferenciadas en los tres análisis; destacando 5 componentes de la idea de aprender a demostrar; a saber:

- la teoría de demostrar; lógica, métodos de demostración
- de lo que partís; lo que te dan
- las herramientas, el cómo; lo que se usa, la trampita
- la fundamentación, justificar cada paso
- la conclusión, a lo que tenés que llegar
-

Estos 5 aspectos no están presente en todas las respuestas, por el contrario vemos que hay grupos de estudiantes que se centran sólo en uno de ellos.

Llama la atención que los estudiantes que producen pruebas ingenuas; están asociados principalmente al segundo de estos aspectos: *la teoría de demostrar*; lo que nos hace pensar en cierta desconexión entre aprender lógica sin relación a un contenido especifico y las pruebas que producen estos estudiantes puestos frente a una tarea de demostrar una propiedad específica.

Sin embargo en las respuestas de los estudiantes que producen pruebas Formales encontramos presentes los 5 aspectos; es decir que su concepción de la demostración matemática es más rica; es notable como consideran que se aprende a demostrar, “demostrando”; haciendo muchas demostraciones; es decir la conciben como un procedimiento; un hacer una habilidad que se adquiere relacionado con los contenidos desarrollándola concretamente.

Lo que nos lleva a la reflexión de que desarrollar contenidos de lógica en las asignaturas no garantiza un aprendizaje de la demostración, sino que debiera ser un procedimiento presente en toda la formación del estudiante de matemática; a fin de que pueda el estudiante interiorizarlo como parte inseparable del método Matemático.

Otro aspecto a destacar es que las repuestas de un grupo de estudiantes parecieran estar centradas más en la “tarea” que implica demostrar en general, que con validar conocimientos en relación a contenidos matemáticos específicos (conceptos – propiedades) implicados en las demostraciones. Es notable que en general no aparezca la demostración matemática como un medio para validar o convencerse de la verdad de una proposición, sino como un contenido dentro de las asignaturas. El aprender a demostrar aparece, más bien, relacionado con resolver la tarea de demostrar que se le plantea y no como una necesidad de validar los conocimientos.

Es posible que estos aspecto no se hayan manifestado debido a la forma de indagación, ya que las preguntas que le realizamos están dirigidas hacia la demostración en general; pero se nos plantea aquí la posibilidad de buscar medios de indagación al respecto; es decir buscar un modo de sacar a la luz cómo se concibe a la demostración, si como una meta propuesta por las cátedras o un modo de validar una proposición o de convencerse de los conocimientos. Queda planteada esta posibilidad para seguir investigando porque de tratarse de una concepción arraigada, se convertiría en un obstáculo, muy importante para el aprendizaje.

A modo de cierre podemos decir, que las concepciones sobre la demostración de los futuros profesores de matemática distan de ser simple y uniforme y es un punto importante a tener en cuenta por los interesados en la formación de los futuros docentes de matemática. Reconocer esta multiplicidad de significados y componente nos sitúa en mejores condiciones para colaborar en el aprendizaje de este procedimiento esencial del método matemático

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arsac, G. Et al (1992) *Initiation au raissonnement au colllege*. Presses Universitaires de Lyon. IREM.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., y Henesian, H., 1978/83. *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo.* México, Trillas. Título original: *Educational psychology.* Now York, Holt Rinehart and Winton

Balacheff, N. (1987). *Processus de pruebe et situations de validation.* Educational Studies in Mathematics, vol 18 : 147-176

Béncue Bertaut; M. (1991). *Análisis de datos textuales. Metodos estadísticos y algoritmos.* Paris. CISIA

Benzecri**,** J. P. (1981) *Practique de l'analyse des données*. Tomo 3: Linguistique et lexicologie. Dunod. París.

Carretero, M., (1997). *Introducción a la Psicología cognitiva*. Colección: Psicología Cognitiva y Educación. AIQUE Grupo Editor. Buenos Aires.

Dreyfus, T. (1999). *Johnny can't prove*. Educational Studies in Mathematics, 38, 85-109

Duval, R. (1991). *Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la demostration.* Educational Studies in Mathematics,22,233-261

Fischbein, E (1982). *Intuition an Proof.* For the learning of Mathematics. 3,2,9-24

Godino, J. D. y Martínez Recio A., (1997). *Significado de la demostración en educación matemática.* Original Title: Approaching rational geometry: from physical relationships to conditional statements. PME XXI (Vol.2 pp. 313-320). Lahti, Finland. [Trad. castellana: www.lettredelapreuve,it/Resumes/Godino/Godino97ES.html].

Godino, J. D. y Martínez Recio A., (2001). *Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática.* Enseñanza de las Ciencias 19(3) 405 - 414 España

Ibáñez Jalón, M.J., (2002). C*uatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración.* Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Almería. España. (Septiembre de 2001) , Eds: M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y j. D. Godino. Servicio de Publicaciones. Universidad de Almería. 11-26.

Lakatos, I. (1976): *Proofs and Refutations*. Oxford University Press: London. [Trad. castellana: *Pruebas y refutaciones*. Alianza Ed.: Madrid, 1978].

Lebart L. y Salem A. (1989). *Analyse Statistique des Donnes Textuelles.* Paris. Dunod

Lebart L. y Salem A. (1994). *Statistique Textuelles.* Paris. Dunod

Lebart L., Salem A. y Bécue Bertaut M. (2000). *Análisis estadístico de textos.* Ed. Milenio.

Martínez Recio, A. (2002) *La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica*. Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Almería. España. (Septiembre de 2001) , Eds: M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y j. D. Godino. Servicio de Publicaciones. Universidad de Almería. 29-43

Montoro, V. (2005). *Explorando la producción de los estudiantes de profesorado en cuanto a la demostración en geometría euclídea.* Ponencia en XXVIII Reunión de Educación Matemática. Organizada por la Unión Matemática Argentina. Salta. Septiembre. *Resumen en Actas* XXVIII REM - UMA. 2005.

Montoro, V. y Juan; M. T. (2005). *Demostrar...demostrar...¿ Qué es eso? Modo de indagación sobre las concepciones de estudiantes de profesorado acerca de la demostración en geometría*. Memorias del VII Simposio de Educación Matemática Chivilcoy (Prov. de Bs. As). ISBN 987- 20239-3-X. Vol XII.

Polya, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning*. Vol II. Princeton University Press: Princeton, NJ. [Trad. castellana: *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid (1966)].

Pozo. J. I. y Carretero, M. (1987). *Del pensamiento formal a las concepciones espontáneas: ¿Qué cambia en la enseñanza de la ciencia?.* Infancia y Aprendizaje (38) pp35-52.

Pozo. J. I. y Carretero, M. (1992). *Causal theories, reasoning strategies, and conflict resolution by experts and novices in Newtonian mechanics*. En A. Demetriou, M Shayer, y A Efklides, (eds). *Neo-Piagetian Theories of Cognitive Development. Implications and Applications for education*. Londres: Routledge.

Rodríguez Moneo, M., (1999). *Conocimiento previo y cambio conceptual.* Colección: Psicología Cognitiva y Educación. AIQUE Grupo Editor. Buenos Aires.

Sáenz Castro, C., (2002). *Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas*. Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Almería. España. (Septiembre de 2001) , Eds: M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y j. D. Godino. Servicio de Publicaciones. Universidad de Almería. 47-62.

Schoenfeld, A. H. (1992) . *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*, en Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, NTCS, Macmillan Publishing Company, N.Y., 1992, págs.334-370. (The University of California -Berkeley).

Siñeriz, L. y Ferraris C. (2005). *Tipos de prueba: una de las categorías de un Modelo Teórico del proceso de aprendizaje de la demostración en geometría*.

Memorias del VII Simposio de Educación Matemática Chivilcoy (Prov. de Bs. As). ISBN 987- 20239-3-X. Vol XII.

Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal American Statistic Association 58*. pp 236-244