

## Los fundamentos de la mecánica cuántica en la escuela secundaria utilizando el concepto de integral de camino

Arlego, Marcelo J. F.

arlego@fisica.unlp.edu.ar

*Instituto de Física La Plata (IFLP), Universidad Nacional de La Plata, Calle 49 y 115 s/n, c.c. 67, (1900) La Plata, Argentina*

**Resumen** Analizamos las posibilidades de introducir las ideas básicas de la mecánica cuántica en la escuela secundaria, adaptando los conceptos de la formulación de integrales de camino (path integrals) para los estudiantes. Este trabajo focaliza en el fundamento teórico de la propuesta y en las adaptaciones necesarias para una posible implementación de esta en un curso del último año.

**Palabras clave:** Mecánica Cuántica -Integral camino – Escuela Secundaria

**Abstract** We analyze the possibilities of introducing the basic ideas of quantum mechanics into secondary school, by adapting the path integral formulation's concepts for the students. This work focuses on this proposal's theoretical basis and what aspects of the formalism should be adapted in order to be implemented in the last year's course

**Keywords:** Quantum Mechanics – Path integrals – High School

### 1. INTRODUCCIÓN

El descubrimiento de las leyes de la mecánica cuántica en el primer cuarto del siglo XX produjo una revolución en el campo de la física. Los conceptos de la mecánica cuántica desafían la experiencia macroscópica acerca del comportamiento ondulatorio y corpuscular como mutuamente excluyentes.

La cuestión central en el contexto de este trabajo es cómo introducir las ideas básicas de un tema tan complejo como este a un nivel que sea accesible a estudiantes de la escuela secundaria. Usualmente, en los libros de texto, el tema se introduce siguiendo una ruta histórica. Se mencionan algunos experimentos clave y se finaliza con la relación de De Broglie, por ejemplo, que el alumno utiliza sin entender. El resultado es completamente insatisfactorio tanto para docentes como alumnos.

Esta propuesta no sigue el desarrollo histórico, sino que se basa en los conceptos de la formulación de integrales de camino desarrollada por R. Feynman en 1949, basado en ideas previas de P. Dirac. Dicha formulación es equivalente al enfoque tradicional de la

mecánica cuántica, el formalismo Hamiltoniano canónico, desarrollado previamente por E. Schrödinger, W. Heisenberg y P. Dirac en 1925-1926. La utilización de uno u otro formalismo es cuestión de conveniencia y a menudo resultan complementarios. Para un enfoque tradicional a este nivel véase Müller, R; Wiesner, H. (2002) y Olsen, R. (2002).

Para los propósitos de este trabajo, la ventaja principal del formalismo de integrales camino es que en este resulta posible mostrar la transición entre el comportamiento clásico y cuántico, haciéndolo accesible a estudiantes de escuela secundaria. Además, dicha formulación muestra claramente la emergencia del comportamiento ondulatorio y corpuscular en un marco unificado y conceptualmente simple.

El objetivo es exponer las ideas principales del método, eliminando el manejo matemático formal, e implementarlas con asistencia de software como herramienta para introducir los conceptos cuánticos. Sobre esta base, se analiza una posible [secuencia](#) de contenidos para aplicarla en un curso de escuela secundaria de últimos años (ver también: Fanaro, M; Otero, M; Arlego M. (2007)).

Se han elaborado propuestas de enseñanza de la mecánica cuántica basadas en el enfoque de integrales de camino y el uso de herramientas computacionales, entre las que podemos mencionar a Dowrick, N. (1997), Taylor E. (2003) y Hanc, J; Tuleja S. (2005). En general, estas propuestas se concentran en el comportamiento dual de la luz. Partiendo del carácter ondulatorio de la radiación electromagnética se arriba al concepto de fotón. Si bien esta es una alternativa posible, un tratamiento adecuado del fotón requiere conceptos de relatividad y teoría de campos, que son muy avanzados para el nivel secundario. Por ende, tal vez ésta, no sea la forma más sencilla de introducir el tema, al menos en una primera etapa (Jones D. (1991)).

En el enfoque propuesto aquí se construirá una imagen del comportamiento dual de la materia a través del análisis de la emergencia del comportamiento ondulatorio a partir del comportamiento corpuscular, siendo ambos relativamente familiares a los estudiantes. Como caso paradigmático se considerará el experimento de la doble rendija con partículas de masas cada vez más pequeñas. En dicho experimento, que simularemos con herramientas computacionales existentes (por ejemplo Muthsam, K. (2003)), la transición entre el comportamiento corpuscular a ondulatorio se manifiesta a través de la aparición de un patrón de interferencia en la pantalla de detección al tender al dominio atómico.

## 2. FORMULACIÓN DE INTEGRALES DE CAMINO DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

De acuerdo a la mecánica clásica, dada una partícula en un estado inicial  $I = \mathbf{r}_i (t=0)$  y un estado final  $F = \mathbf{r}_f (t=T)$ , donde  $\mathbf{r}(t)$  es el vector posición en función del tiempo  $t$ , existe una *única* trayectoria:  $\mathbf{r}_{cl}(t)$ , que conecta ambos estados, la cual está dada por la solución de la *segunda ley de Newton*.

Las leyes de la Física clásica no son válidas en el dominio atómico. En dicho caso la descripción adecuada es a través de las leyes de la mecánica cuántica. Estas leyes describen correctamente el comportamiento a escala atómica e incluyen a la mecánica clásica como caso particular cuando las masas se vuelven macroscópicas. El principal cambio conceptual en la mecánica cuántica, respecto de la mecánica clásica, es que dadas ciertas condiciones iniciales y finales, en la mecánica cuántica ya no se considera una *única* trayectoria  $\mathbf{r}_{cl}(t)$ , describiendo la evolución del sistema desde un estado inicial  $I$  hasta un estado final  $F$ , sino la *probabilidad*  $P$  de arribar a  $F$  partiendo de  $I$ , lo cual denotamos con  $P [I \rightarrow F]$ . Ésta, a su vez, se obtiene evaluando el módulo cuadrado de otra cantidad: la *amplitud de probabilidad*  $A [I \rightarrow F]$ , es decir:

$$P [I \rightarrow F] = |A [I \rightarrow F]|^2, \quad (1)$$

Derivaremos una expresión para el cálculo de la amplitud de probabilidad  $A [I \rightarrow F]$  como integral de camino, considerando como *primer postulado* de la mecánica cuántica el *principio de superposición*.

Para explicar el concepto, consideraremos un experimento en el que una fuente  $I$  emite electrones en  $t=0$ . La llegada de los electrones en un tiempo  $T$ , a diferentes puntos  $F$  de la pantalla ubicada a cierta distancia de  $I$  es registrada mediante detectores montados sobre esta. Nuestro objetivo es evaluar  $A [I \rightarrow F]$  en  $t=T$ .

Ahora supongamos que entre medio de  $I$  y  $F$  insertamos otra pantalla  $M$  con varios orificios, que son los únicos lugares por donde los electrones pueden atravesarla, como se muestra en la Fig.(1a). En este caso, el principio de superposición postula que:

$$A_M(I \rightarrow F) = \sum_i A(I \rightarrow M_i \rightarrow F). \quad (2)$$

Es decir, la amplitud total es la suma (superposición) de las amplitudes de ir de  $I$  a  $F$  en  $t=T$ , a través de cada uno de los orificios de  $M$ . Por supuesto ahora estamos calculando la amplitud de propagación  $A_M$  con  $M$  entre medio de  $I$  y  $F$ , no la amplitud  $A$  original, pero como veremos esto es sólo un artificio para el cálculo.

Agreguemos ahora una segunda pantalla  $N$  con otra cantidad arbitraria de orificios (Fig. (1b)).

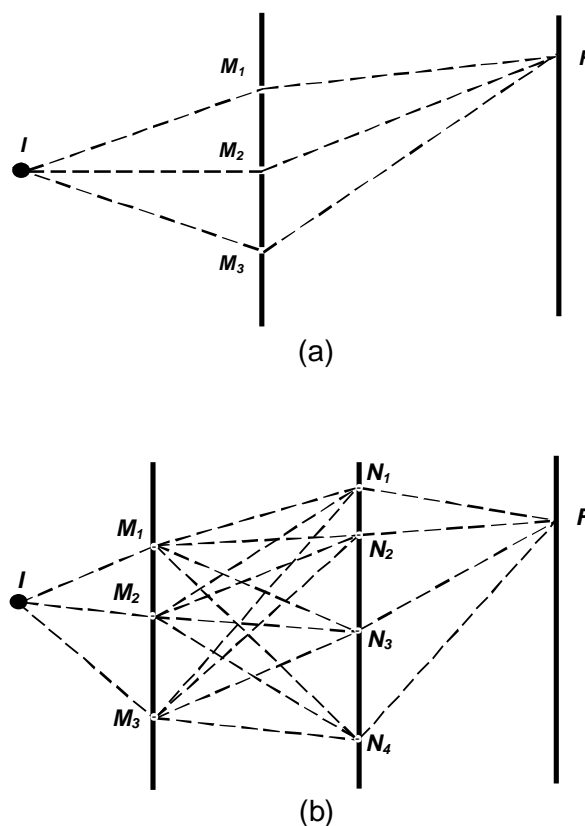


Figura 1: El principio de superposición de la mecánica cuántica. La amplitud de probabilidad de ir desde la fuente  $I$  hasta el punto de detección  $F$  en la pantalla es la

suma de las amplitudes de ir por cada una de las diferentes alternativas. El número de alternativas o caminos crece con el agregado de más pantallas

Aplicando nuevamente el principio de superposición obtenemos:

$$A_{M,N}(I \rightarrow F) = \sum_{i,j} A(I \rightarrow M_i \rightarrow M_j \rightarrow F).$$

Ahora aplicaremos el razonamiento de las “infinitas pantallas con infinitos orificios”: Supongamos que agregamos un gran número de pantallas intermedias con cantidad arbitraria de orificios en cada una. Luego, hagamos tender el número de orificios en cada pantalla a infinito, entonces cada pantalla tiende a desaparecer! y la amplitud resultante tiende a la de la propagación original en el vacío  $A[I \rightarrow F]$  en  $t=T$ , sin pantallas intermedias, es decir

$$A(I \rightarrow F) = \sum_{\substack{\text{todos los} \\ \text{caminos } r(t)}} A_{\text{cada } r(t)}(I \rightarrow F). \quad (3)$$

La Ec.(3) es la expresión para obtener la amplitud de probabilidad  $A[I \rightarrow F]$  de un electrón que es emitido por la fuente en  $t=0$  y arriba a un punto  $F$  de la pantalla en  $t=T$ , atravesando el espacio vacío intermedio. Como puede observarse, consiste en sumar todas las amplitudes correspondientes a cada camino posible  $r(t)$  que conecte  $I$  con  $F$ . El resultado se muestra esquemáticamente en la Fig. (2).

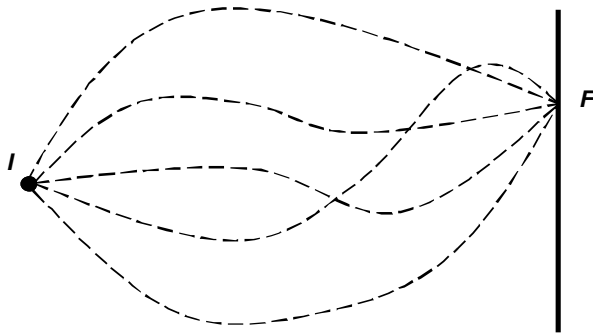


Figura 2: La amplitud de probabilidad de ir desde  $I$  a  $F$  a través del vacío es la suma de las amplitudes asociadas a todos los caminos posibles que conectan  $I$  con  $F$  (se muestran sólo algunos). Arribamos a este resultado mediante el razonamiento de las “infinitas pantallas con infinitos orificios” siguiendo la tendencia mostrada en las Figs. (1a y 1b), como se explica en el texto.

Sin embargo, todavía debemos determinar la forma de calcular la amplitud para cada camino en la Ec. (3). Este será nuestro *segundo postulado*, que enunciamos a través de las siguientes reglas:

Primero, para cada trayectoria posible,  $r(t)$ , que une el estado inicial  $I = r_i$  ( $t=0$ ) con el estado final  $F = r_f$

intermedias y más orificios en cada una (comparar (a) con (b)).

( $t=T$ ), se calcula la acción correspondiente  $S[r(t)]$ , donde:

$$S[r(t)] = \int_0^T L[r(t)] dt, \quad (4)$$

siendo  $L[r(t)]$  el *Lagrangiano* del sistema, en este caso:  $L[r(t)] = (1/2)mv(t)^2$ , es decir, la energía cinética (la energía potencial es cero aquí).<sup>1</sup>

Segundo, la amplitud asociada a esa trayectoria viene dada por:

$$A_{\text{cada } r(t)}(I \rightarrow F) = \exp[iS[r(t)]/\hbar], \quad (5)$$

donde  $\hbar = h/2\pi$ , siendo  $h = 6.625 \times 10^{-34}$  J.s, la *constante de Planck*.

La expresión (5) se interpreta del siguiente modo: cada camino que conecta  $I$  con  $F$  contribuye a la amplitud de probabilidad con un número complejo de módulo 1 y una fase dada por  $S[r(t)]/\hbar$ , que, en general, será diferente para cada camino.

En resumen, las Ecs. (1), (3), (4) y (5) son la base de la formulación de integrales de camino de la mecánica cuántica. La amplitud de probabilidad resultante (Ec.(3)) se obtiene al sumar cada una de las amplitudes asociadas a cada camino posible (Ecs. (4) y (5)). Luego se eleva al cuadrado el módulo de la amplitud de probabilidad resultante  $A[I \rightarrow F]$ , para obtener la probabilidad de arribar a  $F$  partiendo de  $I$  (Ec.(1)).

La suma sobre todos los caminos se formaliza mediante un procedimiento de discretización y pasaje al límite, que es una generalización del método habitual para evaluar integrales ordinarias, de allí el nombre *integrales de camino*. En la práctica, la integral de camino sólo puede evaluarse en algunos casos sencillos como el de la partícula libre o el oscilador armónico. En dichos casos se puede obtener una expresión analítica exacta. En los otros casos se tiene que recurrir a métodos aproximados, como teoría de perturbaciones o soluciones numéricas.

Antes de concluir esta Sección mencionamos que los lectores que prefieran un desarrollo matemático formal al razonamiento de las “infinitas pantallas con infinitos

<sup>1</sup> Recordemos que el *principio de mínima acción* establece que de todas las trayectorias posibles,  $r(t)$ , la trayectoria clásica  $r_{cl}(t)$ , es la que minimiza a la acción, es decir:  $S[r_{cl}(t)]$  es mínimo. La equivalencia entre el principio de mínima acción y la segunda ley de Newton se muestra, por ejemplo, en Goldstein, H. (1966).

orificios”, la equivalencia entre la formulación de integrales de camino y el método canónico de operadores se muestra en muchos libros de texto de mecánica cuántica (por ej. Shankar, R. (1980)).

### 3. TRANSICIÓN COMPORTAMIENTO CUANTICO-CLÁSICO: EL PAPEL DE LA CONSTANTE DE PLANCK

La mecánica cuántica predice los mismos resultados que la mecánica clásica cuando las magnitudes de las masas de los objetos considerados se vuelven macroscópicas. Más precisamente, es la relación entre la magnitud de la acción  $S$  y la constante de Planck (o  $\hbar$ ), quien define el comportamiento de un sistema. Cuando  $S \approx \hbar$  el mismo se considera cuántico, mientras que cuando  $S \gg \hbar$  el comportamiento clásico domina. Esto se debe, como veremos, al extremadamente pequeño valor de la constante de Planck,  $h$ , en un contexto macroscópico.

Una ventaja conceptual importante del enfoque de integrales de camino, es que permite explicar la transición entre el comportamiento microscópico y macroscópico de una forma simple.

Haremos una *demostración* gráfica de dicha transición, dejando de lado el formalismo matemático (ver Shankar, R. (1980)). Podemos visualizar la amplitud resultante directamente graficando la suma de las amplitudes asociadas con las diferentes trayectorias. Esto es una suma de números complejos en el plano Re, Im, donde cada una tiene módulo unidad y una fase dada por  $S / \hbar$  (ver Ec. (3)).

Mientras que en el dominio atómico, en general, se deberán considerar todos los caminos, en un contexto macroscópico la situación es diferente. En este caso,  $S \gg \hbar$  y el cambio de fase al pasar de una trayectoria a la otra es extremadamente grande. Por lo tanto, en promedio, al sumar los aportes correspondientes a trayectorias arbitrarias habrá una tendencia a anularse y no aportarán a la suma. Sin embargo esto no sucederá para *todas* las trayectorias ¿Que ocurre con la trayectoria clásica, que sigue la partícula macroscópica? Como se sabe, la acción es mínima en ese caso. Esto implica que al menos en un entorno extremadamente reducido alrededor de la trayectoria clásica, todos los caminos aportan con aproximadamente la misma fase. Es decir la trayectoria clásica es la *única* que prácticamente aporta a la suma. Por lo tanto, para una masa macroscópica, la probabilidad para la trayectoria de mínima acción tiende a uno y así obtenemos, a partir de la mecánica cuántica, vía la formulación de integrales de camino, los mismos resultados de la mecánica clásica.

En la Fig. (3) muestra una representación esquemática del proceso de suma, que ilustra el razonamiento anterior. En la misma se puede observar que los caminos

cercanos a la trayectoria clásica contribuyen en fase (línea recta central), mientras los otros se cancelan unos con otros y por lo tanto no aportan a la amplitud de probabilidad (extremos).

Para los propósitos de nuestro trabajo es importante notar que en el caso de un sistema libre ( $V=0$ ), incluso en el dominio atómico la trayectoria clásica y su entorno mantienen un rol especial. Sólo que ahora el entorno puede ser una región más extendida alrededor de la trayectoria clásica. De hecho, la amplitud de probabilidad (Ec. (3)), para el caso de una masa arbitraria (incluso a nivel atómico) y libre puede expresarse en una forma factorizada exacta, incluyendo sólo el aporte de la acción clásica:  $S[x_{cl}]$  en el exponencial y multiplicado por un factor  $C$  que tiene en cuenta las contribuciones en fase de los caminos en la vecindad de la trayectoria clásica, es decir:

$$A(I \rightarrow F) = C \exp(i S_{cl} / h) \quad (V=0, m \text{ arbitraria}). \quad (6)$$

La demostración de la Ec.(6) nos aleja de los objetivos del trabajo y remitimos al lector interesado a la bibliografía (Shankar, R. (1980)).

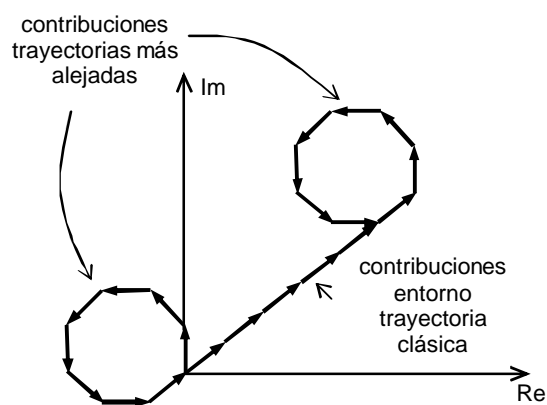


Figura 3: Representación esquemática de la suma de amplitudes de probabilidad. Cada amplitud es representada por un número complejo de módulo unidad y ángulo de fase  $S / \hbar$ . El caso mostrado puede representar un objeto macroscópico en que sólo los caminos extremadamente cercanos a la trayectoria clásica aportan a la suma (línea recta central). Otros caminos tienden a anularse mutuamente (extremos). Ver explicación en el texto.

### 4. EXPERIMENTO DE LA DOBLE RENDIJA

La formulación de integrales de camino brinda un marco unificado en el cual los aspectos corpuscular y ondulatorio surgen naturalmente, junto con el concepto de longitud de onda asociada a una dada partícula.

Analizaremos el experimento de la doble rendija (Fig. (4)) desde el punto de vista de integrales de camino. Consideremos una fuente que emite electrones. A una cierta distancia se encuentra una pantalla con dos

orificios. Se supone que en las pantallas el electrón está sujeto a una barrera de potencial impenetrable  $V=\infty$ , excepto en los orificios y en el resto del espacio, donde el electrón es libre y por lo tanto es válida la Ec.(6). Nuestro tratamiento es simplificado, ya que ignora la difracción de los electrones en cada rendija y se supone que de cada rendija los electrones salen con velocidad media  $v$ . La pregunta que debemos responder es: ¿Cual es la probabilidad de que el electrón arribe a un punto a una distancia  $x$  del centro de la pantalla en la pantalla partiendo de la fuente? Para ello sean:

$$A(O_1 \rightarrow x) = C \exp(i S_{cl}[O_1 \rightarrow x]/\hbar) \text{ y } A(O_2 \rightarrow x) = C \exp(i S_{cl}[O_2 \rightarrow x]/\hbar),$$

las amplitudes de arribar a  $x$  pasando por uno de los dos orificios  $O_1$  o el otro orificio  $O_2$ , respectivamente, donde hemos utilizado la Ec.(6). Además, por el principio de superposición, la amplitud total de arribar a  $x$ , que denotaremos con  $A(x)$ , es la suma de arribar a  $x$  pasando por uno u otro orificio, es decir:

$$A(x) = A(O_1 \rightarrow x) + A(O_2 \rightarrow x) = C(\exp(i S_{cl}[O_1 \rightarrow x]/\hbar) + \exp(i S_{cl}[O_2 \rightarrow x]/\hbar),$$

donde la acción clásica  $S_{cl}[O_{1,2} \rightarrow x] = \frac{1}{2} m v^2 T_{1,2} = \frac{1}{2} m v R_{1,2}$ , siendo  $T_{1,2}$  el tiempo transcurrido para llegar a  $x$  desde cada orificio con una velocidad media  $v$  y  $R_{1,2}$  las distancias de los orificios  $O_{1,2}$  a  $x$ . La probabilidad de arribar a  $x$ , estará dada por:

$$P(x) = |A(x)|^2 = |C(\exp i \alpha R_1 + \exp i \alpha R_2)|^2; \quad (7)$$

siendo  $\alpha = m v / (2 \hbar)$

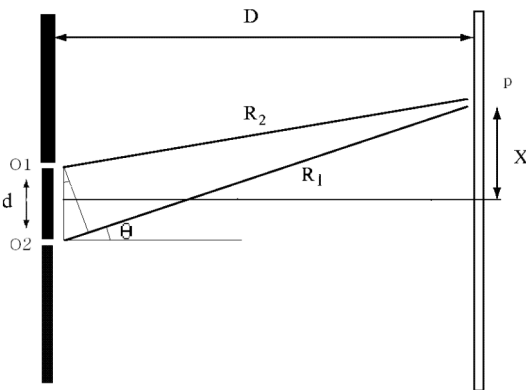


Figura 4: Ilustración esquemática de la experiencia de la doble rendija con electrones. Se muestran las variables geométricas involucradas.

Desarrollando la Ec.(7) se obtiene:

$$P(x) = 2 C^2 (1 + \cos[\alpha(R_1 - R_2)]) = 4 C^2 \cos^2[\alpha(R_1 - R_2)/2]. \quad (8)$$

Considerando que la pantalla está muy alejada de las rendijas, puede observarse a partir de la Fig.(4) que se cumple:  $R_1 - R_2 \sim d \operatorname{sen} \theta \sim d \operatorname{tg} \theta = d x / R$ , donde  $d$  es la separación de las rendijas. Reemplazando esto en la Ec. (8) se obtiene:

$$P(x) = c' \cos^2 [(p/\hbar)(dx/(4R))], \quad (9)$$

siendo  $p = mv$  es la *cantidad de movimiento* y  $c' = 4 C^2$  es un factor irrelevante para nuestros propósitos. La Ec.(9) predice el *patrón de interferencia* que resulta en la experiencia con electrones, la distribución de probabilidades relativa, está modelada con una función coseno cuadrado. La distribución de máximos y mínimos en la pantalla involucra dos conjuntos de parámetros. Uno depende de geometría de la disposición experimental:  $d x / (4 R)$ . El otro de las características cuánticas intrínsecas del electrón:  $p / \hbar$ .

Si calculamos el patrón de interferencia en el mismo experimento pero con ondas electromagnéticas clásicas o mecánicas de longitud de onda  $\lambda$ , siendo la intensidad del patrón en la pantalla equivalente a la probabilidad, obtendríamos idénticas expresiones si identificamos:

$$\lambda = h / p. \quad (10)$$

La Ec.(10) es la *fórmula de De Broglie*, que representa el carácter ondulatorio del electrón (y de la materia en general).

Cuando las masas se incrementan, por ejemplo repitiendo el experimento con perdigones, su longitud de onda de De Broglie asociada disminuye, eliminando el patrón de interferencia en la pantalla. El límite clásico de la mecánica cuántica es en este sentido equivalente al límite  $\lambda \rightarrow 0$  de la óptica geométrica de las ondas electromagnéticas.

## 5. ADAPTACIÓN DE LA FORMULACIÓN DE INTEGRALES DE CAMINO PARA LA ESCUELA SECUNDARIA – SECUENCIA DE CONTENIDOS

En esta sección se plantea una posible secuencia de contenidos tomando como referencia la formulación de integrales de camino. En la secuencia cambiaremos el nombre del método por el de *suma de todas las alternativas* (STA). Éste resultará más comprensible a los estudiantes, en función del planteo que se les propondrá.

A pesar de la matemática involucrada, los conceptos principales de la formulación STA pueden hacerse accesibles a los estudiantes de escuela secundaria mediante herramientas informáticas de simulación. En particular, estas herramientas reemplazan el lenguaje algebraico por el geométrico, utilizando un marco de operaciones básicas con vectores. El lenguaje geométrico permite a los alumnos visualizar el proceso de suma y entender que es la fase del número complejo asociado con dicha trayectoria y no su módulo quien varía de una trayectoria a otra.

Para evitar problemas conceptuales y de nomenclatura, en esta propuesta, se denominará *sistema cuántico* a un sistema formado por objetos a escala atómica.

Antes de comenzar la propuesta, los estudiantes deben poseer ideas básicas de mecánica clásica, tales como las leyes de Newton y el concepto de energía.

El objetivo central de esta propuesta es analizar la emergencia del comportamiento ondulatorio de objetos materiales al reducir la masa. Se comienza con el análisis de la experiencia de la doble rendija y la discusión de sus resultados. El esquema planteado para llevar a cabo esta propuesta es el siguiente:

### a) Experimento de la doble rendija

**a1) con perdigones.** Analizar los resultados de la experiencia de la doble rendija cuando se realiza con objetos macroscópicos, por ejemplo perdigones.

El análisis es el siguiente: como cada perdigón es un objeto clásico, que sigue una trayectoria definida, la distribución de los impactos en la pantalla es una curva de *no interferencia*, es decir se obtiene sumando los aportes separados de los perdigones que pasan por una rendija, manteniendo la otra cerrada y viceversa.

**a2) en cubas de agua.** Repetir la experiencia de la doble rendija con ondas mecánicas, por ejemplo en cubetas de agua. Dadas las dificultades de reproducir esto en el laboratorio, pueden utilizarse filmaciones o simulaciones, disponibles en Internet. Se deberá analizar la distribución de intensidades en la pantalla de detección debido a la interferencia de las ondas que se generan en cada rendija y el rol de la longitud de onda.

**a3) con electrones** Analizar los resultados del experimento de la doble rendija con electrones. Es probable que los estudiantes tengan conceptualizados a los electrones como *pequeñas partículas* y que por lo tanto, para ellos, no serían esperables diferencias significativas con el mismo experimento hecho con perdigones. Se pretende confrontar esto con el patrón de interferencia obtenido. Dada la dificultad de realizar esta experiencia en el contexto escolar, haremos uso de un software de simulación interactivo de la experiencia y una filmación de la misma (Muthsam (2003)). Con ambas herramientas es posible visualizar la *construcción* del patrón de interferencia obtenido a partir de los impactos de los electrones individuales al llegar a la pantalla. El principal aspecto a destacar aquí es que a pesar de que los electrones llegan en unidades discretas, el patrón resultante es de interferencia, es decir que la curva resultante cuando ambas rendijas están abiertas, no se puede obtener sumando las curvas individuales (abriendo las rendijas de a una por vez).

**b) Dualidad onda – partícula:** Respecto del experimento del inciso (a3), se busca que los

estudiantes comprendan que aunque los electrones llegan a la pantalla del detector en unidades enteras, es decir exhibiendo carácter de partícula, se distribuyen en la pantalla formando un patrón de interferencia, es decir, también exhiben características ondulatorias. Esto hace que ya no se los pueda seguir considerando como partículas, ni como ondas, sino como algo totalmente diferente que exhibe este carácter dual y que denominaremos *sistema cuántico*.

**c) El principio de mínima acción:** Se comenzará con el estudio del caso de movimiento unidimensional libre, haciendo una revisión del significado de la relación  $x(t)$  como conjunto de pares (tiempo; posición). Luego se debe definir la acción para una partícula libre  $S$  dadas las condiciones iniciales  $(0, x_i)$  y finales  $(T, x_f)$ <sup>2</sup>:

$$S = \langle EC \rangle \cdot T,$$

donde  $\langle EC \rangle$  es el valor promedio de la energía cinética, concepto conocido por los estudiantes. Se puede utilizar un software de simulación interactivo para que los alumnos se familiaricen con el concepto de acción y evalúen el cambio de  $S$  al elegir diferentes trayectorias  $x(t)$ . La idea es que los alumnos *corrobo*ren que la acción  $S$  es mínima para la trayectoria  $x(t)$  clásica, una recta en este caso, comparándola con otras  $x(t)$  arbitrarias. Se debe enfatizar la idea de trayectoria única en el dominio clásico y que la física clásica describe correctamente el comportamiento de los objetos macroscópicos. Finalmente, aplicar estos conceptos al experimento de la doble rendija con perdigones.

**d)- Formulación de Suma de todas las alternativas (STA) de la mecánica cuántica.** Se introducen los principios de la mecánica cuántica a través de los conceptos de la STA. Se comienza con el problema de una masa libre y pequeña (por ejemplo un electrón) en una dimensión. En primer lugar se debe aclarar que a nivel cuántico sólo tiene sentido preguntar: ¿Cual es la probabilidad de arribar al estado final  $F(x_f, T)$  partiendo del estado inicial  $I(x_i, 0)$ ?. Dicha probabilidad será proporcional a la fracción de electrones que llegan a un estado final  $F$ . Se enuncian las reglas para obtener dicha probabilidad:

**d1)** Para cada trayectoria o alternativa  $x(t)$  posible que une el estado inicial  $I$  con el final  $F$ , se calcula la acción  $S$  correspondiente (como se hizo previamente).

**d2)** Con dicha acción  $S$  se asocia un vector en el plano de módulo uno y cuyo ángulo, con respecto al eje de abscisas positivo, está dado por  $S / \hbar$  (definir  $\hbar$ ). Notar la decisión didáctica de reemplazar el lenguaje de números complejos original por una formulación en términos de vectores en el plano, equivalente para los

<sup>2</sup> Si los estudiantes, al momento de implementar la secuencia no conocen los conceptos de derivada e integral, éstos se reemplazarán por incrementos finitos y valores medios.

propósitos de este trabajo, y más adecuada al nivel de los estudiantes de secundaria.

**d3)** La probabilidad de arribar al estado final, partiendo del estado inicial se obtiene sumando *todos* los vectores asociados a las diferentes trayectorias  $x(t)$  que conectan ambos estados y elevando el módulo del vector resultante, al cuadrado.

**e) Evaluación de casos simples mediante simulaciones** Familiarizar a los estudiantes con los conceptos de la formulación de la STA, enunciados en el ítem anterior, mediante el uso de un software de simulación que modela el comportamiento cuántico de los electrones en términos del enfoque STA. (por ejemplo MODELLUS, (2006)). El mismo permitirá la evaluación rápida del cambio de fase al pasar de un camino a otro, como así también sumar los aportes de diferentes caminos.

Comenzando por masas atómicas y libres, se propone que el alumno evalúe con el software los aportes de los diferentes caminos. Haciendo un muestreo de diferentes trayectorias se puede observar que no sólo aportan a la amplitud la trayectoria clásica sino que también las trayectorias de sus *alrededores* contribuyen constructivamente a la suma. También podrá observarse la anulación de los aportes provenientes de las trayectorias demasiado alejadas del camino clásico. Se busca arribar conceptualmente a la Ec.(6).

**f) Emergencia de la trayectoria clásica:** Como primer ejemplo de la transición de la física cuántica a la clásica, se propone repetir el cálculo anterior con una masa macroscópica. Se observará que la única contribución de la suma que no se anula es la de la trayectoria clásica, para la cual  $S$  es mínima y no como sucedía en el caso de la masa microscópica, en la cual los caminos *alrededor* de la trayectoria clásica contribuían constructivamente en la suma. Se interpretará esta transición en términos del valor de la constante de Planck.

**g) Interpretación del experimento de la doble rendija.** Este es uno de los puntos centrales de nuestro análisis. El objetivo es desarrollar los puntos Sección 4 en un lenguaje adecuado para los estudiantes. Para lograrlo, hemos de considerar los resultados de los experimentos de la doble rendija analizados (ítem **a**), los postulados de la formulación STA enunciados (ítems **c** y **d**) y el rol especial que juega la trayectoria clásica para el caso libre, independientemente de la masa (Ec. (6)). Con todas estas herramientas, el alumno, con la asistencia del profesor, debe ser capaz de seguir la línea deductiva que lleva de la Ec.(7) a la Ec.(9).

Se propone que los alumnos reconstruyan el patrón de interferencia mediante el análisis y la evaluación de la Ec.(9) en diferentes puntos de la pantalla, con la ayuda de software.

Es sumamente instructivo, además, que los alumnos reconozcan que para una geometría dada, el patrón de interferencia depende de características propias del electrón, a través del cociente:  $p/h$ . El paso final es arribar a la relación de De Broglie (Ec.(10)) por analogía a lo que obtendrían para el patrón de interferencia en el experimento de la doble rendija con ondas mecánicas de longitud de onda  $\lambda$ , por ejemplo en cubetas de agua (ítem a2).

**h)- de electrones a perdigones** Estudiar la transición entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica en el experimento de la doble rendija. El objetivo es que los alumnos identifiquen el papel de  $p$  y la constante de Planck en la formación del patrón de interferencia. Para ello se propone repetir los cálculos del ítem anterior con masas de tamaño creciente, hasta llegar a una masa macroscópica, manteniendo todos los demás parámetros constantes. Los alumnos deben observar la desaparición del diagrama de interferencia con el incremento de la masa. En este punto el docente debe guiar la discusión para reafirmar el concepto de que la longitud de onda de De Broglie asociada a dicha masa (Ec.(10)) es quien rige la transición entre el comportamiento cuántico o clásico de la misma.

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se propone una introducción alternativa a los principios de la mecánica cuántica en la escuela secundaria. A diferencia de las aproximaciones usuales al tema, se utiliza el formalismo de integrales de camino, desde un marco geométrico-vectorial.

La gran ventaja que tiene este enfoque, respecto a otros, es que en éste es posible *construir* con los estudiantes la idea de transición entre el comportamiento corpuscular a ondulatorio al pasar del dominio macroscópico al atómico, respectivamente.

Se propone el empleo de simulaciones informáticas que reducen al mínimo el formalismo matemático y ayudan a visualizar los conceptos involucrados, tomando como caso de estudio el experimento de la doble rendija con partículas de masas cada vez más pequeñas.

Se está implementando una secuencia didáctica en la escuela secundaria, basada en este trabajo y la viabilidad de la misma quedará determinada cuando se realice el análisis didáctico correspondiente.

## REFERENCIAS

- Dowrick, N. (1997). Feynman's sum-over-histories in elementary quantum mechanics. *European Journal of Physics* 18, 75-78.
- Fanaro, M; Otero, M; Arlego M. (2007). El método de caminos múltiples de Feynman para enseñar los conceptos fundamentales de la Mecánica Cuántica en

- la escuela secundaria. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, 24 (2) 233-260.
- Goldstein, H. (1966). *Mecánica Clásica*. Madrid: Aguilar.
- Greca, I; Moreira, M; Herscovitz, V. (2001) Uma Proposta para o Ensino de Mecânica Quântica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 23(4), 444-457.
- Hanc, J; Tuleja S. (2005). The Feynman Quantum Mechanics with the help of Java applets and physlets in Slovakia. *10<sup>th</sup> Workshop on multimedia in physics teaching and learning*. Berlin. [http://pen.physik.uni-kl.de/w\\_jodl/MPTL/MPTL10/contributions/hanc/Hanc-Tuleja.pdf](http://pen.physik.uni-kl.de/w_jodl/MPTL/MPTL10/contributions/hanc/Hanc-Tuleja.pdf).
- Jones D. (1991). Teaching modern physics-misconceptions of photon can damage understanding. *Physics Education*, 26 , 93-98.
- Lobato, T; Greca, I. (2005) Análise da inserção de conteúdos de teoria quântica nos currículos de física do ensino médio. *Ciencia y Educación*, 11(1), 119-132.
- MODELLUS. [www.phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus](http://www.phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus)
- Müller, R; Wiesner, H. (2002). Teaching quantum mechanics on an introductory level. *American Journal of Physics*, (70) 3.
- Muthsam, K. (2003). Simulations double slit experiment in quantum mechanics. *University of Munich*.  
[www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/Downloads/doppelspalt/dslit.html](http://www.physik.uni-muenchen.de/didaktik/Downloads/doppelspalt/dslit.html).
- Olsen, R. (2002). Introducing quantum mechanics in the upper secondary school: a study in Norway. *International Journal of Science Education* 24(6), 565-574.
- Shankar R. (1980). *Quantum Mechanics*. New York: Plenum Press.
- Taylor E. (2003). A call to action. *American Journal of Physics*, 71(5), 425.



**ARLEGO MARCELO J. F.**

Instituto de Física La Plata (IFLP), UNLP, La Plata, Argentina. E-Mail: [arlego@fisica.unlp.edu.ar](mailto:arlego@fisica.unlp.edu.ar)

**TÍTULO DE POSTGRADO:** Doctor en Física, (UNLP), La Plata, Argentina, (2004).

**ESTUDIOS POSTDOCTORALES:** TU Braunschweig (Alemania). 11/2004 al 06/2007.

**ÁREAS CIENTÍFICAS DE ACTUACIÓN MÁS RELEVANTES**

- **Física teórica:** sistemas de **electrones fuertemente correlacionados**, en particular **magnetismo cuántico**.
- **Enseñanza de las ciencias:** nuevas metodologías en la enseñanza de conceptos cuánticos en la escuela secundaria.

**OTROS DATOS DE INTERÉS:** Miembro de la carrera de investigador (asistente) del Conicet