Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
Sistema de Información Científica

Gómez, Emilse; Batanero, Carmen; Contreras, José Miguel

Conocimiento Matemático de Futuros Profesores para la Enseñanza de la Probabilidad desde el Enfoque Frecuencial

Boletim de Educação Matemática, vol. 28, núm. 48, abril, 2014, pp. 209-229
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Rio Claro, Brasil

Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291231123012

Boletim de Educação Matemática,
ISSN (Versión impresa): 0103-636X
bolema@rc.unesp.br
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Brasil

¿Cómo citar? | Número completo | Más información del artículo | Página de la revista

www.redalyc.org
Proyecto académico sin fines de lucro, desarrollado bajo la iniciativa de acceso abierto

CC BY NC ND

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

Conocimiento Matemático de Futuros Profesores para la Enseñanza de la Probabilidad desde el Enfoque Frecuencial

Pre-Service Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching Probability Using a Frequentist Approach

Emilse Gómez[*]
Carmen Batanero[**]
José Miguel Contreras[***]

Resumen

En este trabajo se evalúan algunos componentes del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad (desde el enfoque frecuencial) de futuros profesores de Educación Primaria. Para evaluar el conocimiento común del contenido se analizan las soluciones dadas individuamente por 157 futuros profesores españoles de Educación Primaria a un problema abierto. Una vez discutidas con los participantes sus soluciones al problema, se analizan dos componentes del conocimiento didáctico, en 81 de estos profesores, trabajando en pequeños grupos: (a) para evaluar el conocimiento especializado del contenido se pide a los participantes identificar los contenidos matemáticos en la tarea; (b) evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes se les pide identificar y justificar, entre un grupo de respuestas dadas por alumnos de Educación Primaria, cuáles son correctas e incorrectas. Mientras que en la evaluación inicial se observaron diversas concepciones erróneas, como sesgo de equiprobabilidad, heurística de representatividad y subestimación de la variabilidad en el muestre, en la segunda los futuros profesores son capaces de identificar las respuestas correctas e incorrectas, explicando la razón de los errores. Aunque el conocimiento didáctico es aún insuficiente, pues se identifican pocos objetos matemáticos en la tarea, se deduce la utilidad de la actividad para el desarrollo del conocimiento de los futuros profesores.

Palabras-clave: Probabilidad. Significado Frecuencial. Conocimiento Matemático para la Enseñanza. Formación de Profesores.

Abstract

The aim of this research was to assess mathematical knowledge for teaching probability (using a frequentist approach) in prospective elementary teachers. Common knowledge of content is analysed based on individual answers to an open problem by 157 Spanish prospective primary school teachers. After discussing with the participants their responses to the problem, two components of pedagogical knowledge are also analysed in 81 of these prospective teachers, working in small groups: (a) to assess specialized content knowledge, we ask participants to identify the mathematical contents in the task; (b) to assess knowledge of content and students, we ask participants to identify which are correct or incorrect among some responses given to the task by children. While in the first part of the assessment we observed misconceptions, such as equiprobability bias,

[*] Maestría en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España. Profesora Asistente de la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia. Dirección Postal: Carrera 30, n. 45-03, Bogotá, Colombia. *E-mail*: egomezt@unal.edu.co.
[**] Doctorado en Matemática por la Universidad de Granada, España. Catedrática de la Universidad de Granada, Granada, España. Dirección postal: Campus de Cartuja, 18071, Granada, España. *E-mail*: batanero@ugr.es
[***] Doctorado en Matemáticas por la Universidad de Granada, España. Ayudante Doctor de la Universidad de Granada, Granada, España. Dirección postal: Campus de Cartuja. 18071, Granada, España. *E-mail*: jmcontreras@ugr.es.

CC BY NC ND

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

representativeness heuristic and underestimation of sampling variation, in the second, participants recognised the correct and incorrect answers of students and could explain the reasons for their errors. Although their didactic knowledge was still poor, since they identified few mathematical objects in the task, we deduce the usefulness of the activity to develop the mathematical knowledge of teachers.

Keywords: Probability. Frequentist Approach. Mathematical Knowledge for Teaching. Teacher Education.

1 Introducción

Aunque la enseñanza de la probabilidad ha estado presente en los currículos españoles en los últimos 20 años, los últimos documentos oficiales (MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE ESPAÑA-MEC, 2006) proponen hacerla más experimental, de forma que se pueda proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde su infancia, reforzando sus intuiciones probabilísticas. Este programa, siguiendo la misma tendencia en los currículos americanos (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS-NCTM, 2000) incluye la probabilidad desde la Educación Primaria. Mediante un lenguaje elemental probabilístico, juegos, experimentos y observación de fenómenos naturales, se intenta que el niño aprenda a reconocer la aleatoriedad y, al final de este ciclo educativo, sea capaz de comparar y estimar algunas probabilidades sencillas. Una novedad en esta propuesta es un cambio desde un significado exclusivamente clásico de la probabilidad a un significado frecuencial, que conecta estadística y probabilidad (BATANERO, 2005).

Para llevar a cabo esta enseñanza, se requiere una gama muy variada de conocimiento y experiencia por parte del profesor de matemáticas, algunos de cuyos componentes tratamos de evaluar en este trabajo en futuros profesores, en relación con el enfoque frecuencial de la probabilidad.

Marco teórico

Nuestro trabajo se apoya en el marco teórico de Ball, Lubienski y Mewborn (2001), quienes denominan *conocimiento matemático para la enseñanza* al "conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno" (HILL; BALL; SCHILLING, 2008, p. 374), y que está conformado por el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento pedagógico del contenido.

Dentro del primero, distinguen tres componentes: el Conocimiento Común del Contenido, es el que posee cualquier persona instruida en matemática; el Conocimiento Especializado del Contenido, aplicado por el profesor para articular tareas de enseñanza, por ejemplo, buscar actividades para presentar el concepto de independencia; el Conocimiento en el Horizonte Matemático, sirve al profesor para establecer conexiones de un contenido

CC BY NC ND
ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

particular con otros temas. El conocimiento pedagógico del contenido se desglosa en tres componentes: El Conocimiento del Contenido y los Participantes incluye el conocimiento de sesgos, errores y dificultades, estrategias y aprendizaje del alumno. El Conocimiento del Contenido y la Enseñanza se refiere a los procesos adecuados para enseñar y evaluar un tema; el último componente es el Conocimiento del Currículo.

La finalidad de este trabajo es evaluar el conocimiento común y especializado del contenido y del conocimiento del contenido y los estudiantes en relación con el enfoque frecuencial de la probabilidad. A continuación presentamos, en primer lugar, los antecedentes del trabajo y describimos su metodología. En segundo lugar, analizamos las soluciones dadas por 157 futuros profesores de Educación Primaria a un problema abierto, para evaluar su conocimiento común del contenido. Seguidamente se evalúa el conocimiento especializado del contenido, a partir de los contenidos matemáticos que 81 de estos participantes, trabajando en grupo, identifican, en dichos problemas. El conocimiento del contenido y los estudiantes se deduce de las evaluaciones que los mismos grupos de participantes realizan de las respuestas al problema proporcionadas por algunos niños ficticios. Finalizamos con la discusión y conclusiones.

2 Antecedentes

Para este trabajo son las investigaciones relacionadas con la comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad, y con la comprensión de la probabilidad por parte de futuros profesores que se resumen en lo que sigue.

2.1 Comprensión del significado frecuencial de la probabilidad

La investigación sobre la enseñanza-aprendizaje del significado frecuencial de la probabilidad se ha centrado en dos puntos: (a) la posibilidad de estimar una probabilidad teórica a partir de datos de frecuencias y (b) la comprensión de las características de las secuencias de resultados aleatorios y de la convergencia.

Estimación frecuencial de probabilidades

Green (1983) realiza un estudio con niños ingleses (de 11 a 16 años) donde incluye un ítem sobre la comprensión de la estimación frecuencial de la probabilidad (en el experimento consistente en lanzar al aire 100 chinchetas). En una primera versión de la pregunta, el autor preguntó a 66 niños qué resultado esperaban, sin mencionar una experimentación previa; el

CC BY NC ND
ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

61% mostraron preferencia por la equiprobabilidad de resultados. Modificó posteriormente el ítem, pidiendo a los niños elegir entre cinco opciones de posibles resultados, dando la información de las frecuencias obtenidas en un experimento previo (68 chinchetas con la punta hacia abajo). En una muestra de 2930 niños, el 17% dan una estimación correcta de tipo frecuencial, el 64% optan por considerar los resultados equiprobables y el resto se reparten en las otras opciones. Cañizares (1997) aplicó el mismo ítem a 253 niños españoles (11-14 años) obteniendo respuestas similares (15% correctas y 64% con sesgo de equiprobabilidad; Lecoutre (1992)).

Comprensión de las secuencias aleatorias

Puesto que en el enfoque frecuencial los alumnos habrán de realizar experiencias y registrar datos de secuencias de resultados aleatorios, es necesario comprender las características de dichas frecuencias. Este punto es estudiado por Green (1991), con 305 niños de 7 a 11 años, a quienes pidió escribir una sucesión de 50 símbolos, simulando los resultados de lanzamientos sucesivos de una moneda. El autor observó una tendencia a igualar el número de caras y cruces y a producir rachas demasiado cortas, lo que el autor interpreta como falta de comprensión de la independencia. También observa tendencia a subestimar la variabilidad en las secuencias, produciendo secuencias con dispersión más pequeña de lo esperado para una secuencia realmente aleatoria.

Serrano (1996) preguntó a 277 participantes españoles, de entre 13 y 17 años, como reconocer, entre varias, algunas secuencias aleatorias. Detectó tres concepciones: variabilidad local (se esperan frecuentes alternancias entre distintos sucesos), regularidad global (convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica) y grado de discrepancia entre la distribución esperada y la observada (se espera un ajuste casi exacto). Además identificó tres aspectos poco comprendidos: (a) la estimación frecuencial de una probabilidad no sirve para predecir la ocurrencia del resultado en un único experimento; (b) uso de razones frecuenciales para explicar la ocurrencia de un suceso poco probable y (c) estimación de la frecuencia relativa de un suceso en una serie futura de experimentos cuando se conoce su probabilidad.

2.2 Investigaciones sobre conocimiento de la probabilidad frecuencial por profesores

Algunas investigaciones analizan la comprensión de profesores en formación respecto a algunos puntos relacionados con la probabilidad frecuencial. Por ejemplo, Carter (2008)

CC BY NC ND
ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

analizó las respuestas de 210 futuros profesores de secundaria, a un cuestionario, observando errores en la comprensión de secuencias aleatorias, tendencia a alternar diferentes resultados (11% de los participantes), sesgo de equiprobabilidad (36%) e indiferencia al efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad del muestreo (70%). En tres ítems se pidió, también, explicar el razonamiento seguido en su solución a un alumno ficticio, uno de ellos con relación a la convergencia, donde sólo 11% dieron una explicación adecuada y 4% dieron explicaciones aceptables.

Mohamed (2012) aplicó a 283 futuros profesores un cuestionario de probabilidad que incluye la versión final del ítem sobre probabilidad frecuencial de Green (1983); sólo el 31% responde en forma correcta y el 62% muestra sesgo de equiprobabilidad. El autor evalúa, también, el conocimiento pedagógico del contenido sobre juego equitativo y espacio muestral, pidiendo a los profesores que evaluasen respuestas de niños para cuatro problemas. Indica que la mayoría de futuros profesores discriminaron bien las respuestas correctas e incorrectas; sin embargo, la argumentación para explicar el error del niño fue, con frecuencia, inconsistente

Otros autores se han preocupado del diseño de acciones formativas para ayudar a los futuros profesores a mejorar su razonamiento probabilístico. Por ejemplo, Batanero, Godino y Cañizares (2005) proponen un cuestionario a 132 futuros profesores de educación primaria, observando sesgos en su razonamiento probabilístico, como la heurística de la representatividad (TVERSKY; KAHNEMAN, 1982), consistente en juzgar la probabilidad de una muestra en base a su similitud con la población de la que se toma, y la heurística de la equiprobabilidad (considerar todos los casos equiprobables). Estos sesgos se vieron notablemente reducidos después de un experimento de enseñanza basado en la simulación.

En este trabajo continuamos las investigaciones anteriores, centrándonos, específicamente, en el enfoque frecuencial que apenas ha sido considerado en los antecedentes, y analizando tanto el conocimiento matemático, como el didáctico de los futuros profesores. A continuación describimos la metodología y los resultados obtenidos.

3 Método

3.1 Muestra

La muestra participante en la primera parte de la evaluación estuvo formada por 157 futuros profesores de Educación Primaria de la Universidad de Granada, España, en su primer año de estudios; de los cuales 81 participaron también en la segunda parte. Todos ellos habían estudiado probabilidad simple y condicional, durante la Educación Secundaria.

3.2 Tarea propuesta

En l Cuadro 1 se muestra la tarea utilizada en esta investigación.

Parte 1. Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados:

68 caen con la punta para arriba  y 32 caen hacia abajo  .
Supongamos que el profesor pide a 4 niños repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo.

1. Escribe en la siguiente tabla un posible resultado para cada niño:

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:
Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:

Parte 2. Cuatro alumnos completaron cada uno la tarea anterior. Estas fueron sus respuestas

Alumno1	Daniel	Martín	Diana	María
	Punta arriba: 32	Punta arriba: 70	Punta arriba: 35	Punta arriba: 65
	Punta abajo: 68	Punta abajo: 30	Punta abajo: 65	Punta abajo: 35
Alumno2	Daniel	Martín	Diana	María
	Punta arriba: 67	Punta arriba: 68	Punta arriba: 70	Punta arriba: 71
	Punta abajo: 33	Punta abajo: 32	Punta abajo: 30	Punta abajo: 29

Alumno 3	Daniel	Martín	Diana	María
	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68
	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32
Alumno 4	Daniel	Martín	Diana	María
	Punta arriba: 50	Punta arriba: 51	Punta arriba: 48	Punta arriba: 53
	Punta abajo: 50	Punta abajo: 49	Punta abajo: 52	Punta abajo: 47

2. Indica el contenido matemático que tienen que usar los alumnos para dar la respuesta correcta
3. Señala cuál o cuáles de estas respuestas son correctas
4. Para cada una de las respuestas incorrectas explica cuáles son las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los participantes a dar una respuesta errónea

Cuadro 1 – Problema propuesto
Fuente: desarrollado por los autores

Para evaluar el conocimiento común del contenido, se pide a los futuros profesores resolver un problema (Pregunta 1); para evaluar el conocimiento especializado del contenido se les pide identificar los objetos y procesos matemáticos puestos en juego en la solución (Pregunta 2); para evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes, se les pide describir posibles razonamientos o estrategias de los alumnos para resolver el problema, de manera correcta o no (Preguntas 3 y 4). Esta metodología es sugerida por Godino (2009) y también utilizada por Mohamed (2012).

El problema propuesto en la Parte 1 es una adaptación del propuesto por Green (1983).

CC BY NC ND

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

Se debe reconocer la ausencia de equiprobabilidad ocasionada por la asimetría física en el dispositivo, y utilizar la información de la primera experimentación para predecir la frecuencia en repeticiones sucesivas, estimando la variabilidad del muestreo.

Una buena comprensión del significado frecuencial se refleja en la asignación de frecuencias de resultados no constantes para Daniel, Martín, Diana y María, con valores por encima y por debajo a los observados por el profesor. La distribución del número de chinchetas que caen punta arriba sigue el modelo binomial $B(p,n)$ con n=100 y p desconocida, que se puede estimar. El valor esperado es np, para este caso, estimado por 68, y su desviación estándar 4,7, aproximadamente igual a 5. La propuesta de valores por encima y por debajo de 68 indica la comprensión del experimento en su totalidad, en especial, si oscilan en el intervalo (63,73), que es la media más o menos una desviación típica.

La segunda parte está compuesta de tres preguntas para evaluar el conocimiento pedagógico del contenido. La pregunta 2 pide analizar el contenido matemático necesario para resolver el ítem, siguiendo la metodología propuesta por Godino (2009). Para dar la solución correcta del problema, en primer lugar hay que considerar los conceptos de aleatoriedad y experimento aleatorio, ensayos repetidos, suceso posible, frecuencia (absoluta, relativa), y distribución, probabilidad (teórica, aproximación frecuencial), muestreo, variabilidad del muestreo y valor esperado (o esperanza matemática) de la variable aleatoria *número de chinchetas con la punta hacia arriba*. También intervienen propiedades, como que los dos sucesos implicados no son equiprobables, la independencia de resultados en ensayos sucesivos, y la convergencia de la frecuencia a la probabilidad. Finalmente, se utilizarían conceptos numéricos (número, proporción) junto con sus propiedades. Como procedimientos para llegar a una respuesta correcta, los alumnos necesitarían estimar el valor teórico de la probabilidad a partir de ensayos repetidos y reconocer el carácter aproximado de esta estimación, además de procedimientos aritméticos, tales como suma u otras operaciones.

En la pregunta 3 se debe decidir, entre cuatro respuestas dadas por niños ficticios a la pregunta 1, cuáles son correctas, y en la 4 indicar las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los participantes a dar una respuesta errónea, evaluando, por tanto, el conocimiento del contenido matemático y los estudiantes. Esperamos unas respuestas similares a las siguientes:

- El alumno 1 da una respuesta incorrecta. Aunque da valores alrededor de los obtenidos por el profesor, intercambia los correspondientes a punta hacia arriba y hacia abajo y alterna estas respuestas con una similar a la del profesor en los cuatro experimentos

cc BY NC ND
ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

propuestos. Parece esperar que se equilibren los resultados en los sucesivos lanzamientos, es decir, no comprende la independencia de resultados ni que al ser la probabilidad de caer hacia arriba mayor casi siempre caerán más con la punta hacia arriba. Manifiesta la heurística de la representatividad.

- El alumno 2 da una posible respuesta correcta. Tiene en cuenta los valores esperados (parecidos a los que obtuvo el profesor) y también la variabilidad de un fenómeno aleatorio (no siempre saldrán exactamente los mismos resultados). Asimismo, entiende que el valor de frecuencias obtenido por el profesor es sólo una estimación del verdadero valor de la probabilidad (teórico y desconocido), por lo que, al tomar otras muestras de resultado, la estimación puede variar.
- El alumno 3 comprende la idea de valor esperado (la probabilidad teórica será parecida a lo que obtuvo el profesor), pero no tiene en cuenta la variabilidad de un fenómeno aleatorio y repite, exactamente cuatro veces, los mismos resultados.
- El alumno 4 no tiene en cuenta los datos dados por el profesor y considera igualmente probables los dos sucesos; por ello da valores sobre el 50%; tiene en cuenta, sin embargo, la variabilidad aleatoria, pues da diferentes resultados.

3.3 Método de recogida de datos

Los datos se recogieron dentro de una asignatura de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, obligatoria en el plan de estudios de estos profesores, a lo largo de tres sesiones. En la primera, se planteó a los futuros profesores la pregunta 1 de la tarea presentada en la Figura 1, pidiéndoles que la resolvieran por escrito. Finalizada la recogida de datos, en la segunda sesión, se corrigieron colectivamente las respuestas, adoptando el siguiente esquema:

1. El formador de profesores presenta el ítem y pide a los futuros profesores sus respuestas.
2. Se abre un debate donde los diferentes participantes tratan de diferenciar las respuestas correctas e incorrectas. Se realizan actividades de experimentación con cajas de chinchetas, para observar la tendencia y variabilidad del experimento. Estas actividades ayudan al reconocimiento de concepciones e intuiciones incorrectas.
3. Finalizada la segunda sesión, el formador de profesores pone a disposición de los futuros profesores un documento con un resumen de lo tratado en la actividad.

En la tercera sesión, aproximadamente la mitad de los participantes (81 futuros profesores) resolvió por escrito la parte 2, trabajando en pequeños grupos (39 parejas y un

BY NC ND

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

grupo de tres alumnos). En la siguiente sesión se corrigieron colectivamente estas respuestas, adoptando un esquema similar al descrito anteriormente.

4 Conocimiento común del contenido

Recogidas las respuestas de los futuros profesores a la pregunta 1, se realizó un análisis de contenido de las mismas, teniendo en cuenta los valores medios y la dispersión de las frecuencias para los cuatro ensayos dados por cada futuro profesor, que se han asumido como una muestra.

4.1 Valores medios de las frecuencias

Analizada la distribución de las medias de los cuatro valores dados para el número de chinchetas con la punta arriba (Figura 1) se obtuvieron un valor medio de 57,7 y una moda igual a 65. El valor medio esperado es 68 (línea vertical en la Figura 1), por tanto los participantes presentan una buena estimación de la probabilidad, aunque algo sesgada hacia el valor 50 (algunos muestran el sesgo de equiprobabilidad descrito por Lecoutre (1992)).

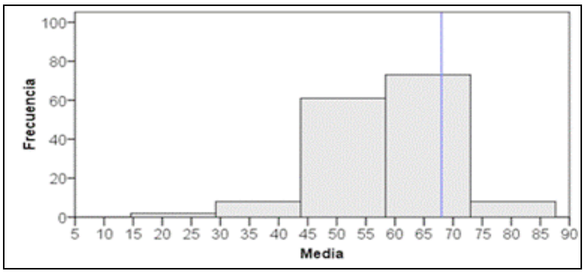

Figura 1 – Distribución del número medio de chinchetas con la punta hacia arriba
Fuente: desarrollado por los autores

En la Tabla 1 se estudian las frecuencias con que estos valores medios se presentan en ciertos intervalos, que sugieren diferentes tipos de razonamiento. La tercera parte de los futuros profesores (33,8%) da valores próximos al esperado (63-73), que sería la respuesta correcta. Un segundo grupo (20%) obtiene medias próximas a la teórica, algo sesgadas hacia arriba o abajo. Otro grupo (33,8%) proporciona valores medios entre 45 y 55 y no tiene en cuenta la información frecuencial, bien por dar valores cercanos al 50%, o bien por alternancia de resultados, compensando frecuencias altas de punta arriba para dos de los valores pedidos, con frecuencias altas para punta abajo en los otros dos; estos alumnos mostrarían el sesgo de equiprobabilidad (LECOUTRE, 1992). El último grupo (9%) con tendencia a valores medios bajos (mayor proporción punta abajo), trata de *compensar* el

BY NC ND

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

resultado inicial, mostrando la heurística de representatividad (TVERSKY; KAHNEMAN, 1982).

Tabla 1 – Frecuencia y porcentaje de intervalos de las medias

Intervalo	Frecuencia	%
Hasta 45 (Representatividad)	14	8,9
45-55 (Equiprobabilidad)	53	33,8
55-63 (Aceptable, bajo)	25	15,9
63-73 (Correcto)	53	33,8
Mayor que 73(Aceptable, alto)	7	4,4
No dan respuesta	5	3,2
Total	157	100,0

Fuente: desarrollado por los autores

4.2 Dispersión de valores

También se analizó la dispersión de los valores dados por los futuros profesores (Figura 2). La desviación típica en este experimento es aproximadamente igual a 5. El valor medio de la distribución de los rangos fue 28,7, algo mayor de lo esperado, pero compatible con un intervalo de tres desviaciones típicas (99,9%). La asimetría en los datos es un reflejo de la tendencia de algunos participantes a dar valores extremos. Hemos clasificado, también, la variabilidad de los datos, en varios grupos, que comentamos dando las cuaternas de valores de chinchetas con punta hacia arriba:

Variabilidad adecuada. Cuando el rango de valores está entre 10 y 20, esto es entre una y dos veces la desviación típica, por ejemplo la respuesta del participante P141: (63, 75, 70, 78). En algunos casos, esta variabilidad moderada se combina con un sesgo de equiprobabilidad, con valores más cercanos a 50, por ejemplo, P122: (43, 60, 59, 53).

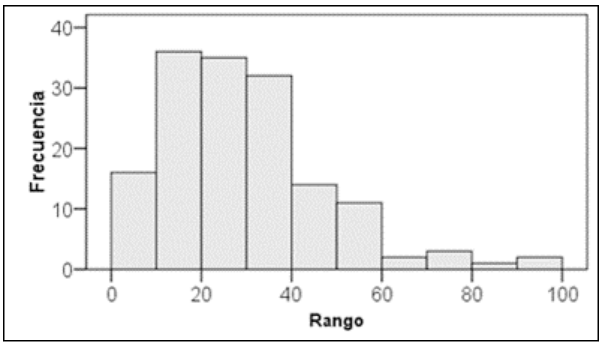

Figura 2 – Distribución de rangos en los datos dados por los alumnos
Fuente: desarrollado por los autores

Dispersión alta pero aceptable. Los evaluados asignan valores cuyo rango está entre 20 y 30, esto es entre dos y tres veces la desviación típica; reflejan una comprensión aceptable de la aleatoriedad o de la ley de los grandes números. Por ejemplo, P035: (60, 72, 58, 81).

cc BY NC ND

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

Concentración alta o rango inferior a 10. Indica una comprensión parcialmente correcta de la ley de los grandes números; el participante espera que los resultados estén siempre muy cerca de un teórico. La mayoría de los evaluados que utilizan esta estrategia tienen promedios entre 63 y 68, como P132: (67, 66, 69, 70).

Dispersión alta o rango mayor que 30. Puede indicar que el participante espera una compensación entre los resultados, pues la mayoría de los que utilizan esta estrategia tienen promedios entre 41 y 57, como P025: (56, 69, 30, 46). Otros tienen promedios entre 60 y 76, pero incluyen un valor cercano a 50. Por ejemplo, P003: (57, 73, 81, 48).

Casos extremos. Unos pocos evaluados respondieron a la tarea con conjuntos de valores incluyendo dispersiones extremas: o bien ausencia de variabilidad, con los mismos pares de valores para los cuatro niños (por ejemplo, 50, 50, 50, 50, dado por P069) o excesivamente alta, con rango mayor que 70 como P022: (100, 50, 0, 50).

En la Tabla 2 se resumen los datos. Observamos que 45,2% tienen una buena comprensión de la variabilidad en la experimentación (22,9% proponen datos con variabilidad adecuada y 22,3% alta, pero aceptable); 8,3% tienden a la excesiva concentración para un proceso aleatorio; 37,6% muestran una percepción de variabilidad alta y 5,7% asignan valores con dispersión extrema. Entre los participantes con una comprensión correcta del valor adecuado para la estimación (media entre 63 y 73), 70% tienen una variabilidad de resultados buena (47,2%) o aceptable (22,6%); esto supone que el 23,5% del total de futuros profesores participantes en el estudio muestran una percepción integral del significado frecuencial en la experimentación. Por otro lado, 51,5% de participantes de los que dan una media incorrecta, asignan alta variabilidad, y 9,1% poca dispersión.

Tabla 2 – Frecuencia y porcentaje de categorías de percepción de variabilidad, de acuerdo con respuesta considerada correcta

	Media entre 63 y 73 (Respuesta correcta)					
	Sí		No			
Categoría	Frec.	%	Frec.	%	Total	Porcentaje
Variabilidad adecuada (Rango entre 10 y 20)	25	47,2	11	11,1	36	22,9
Dispersión alta, pero aceptable (Rango entre 20 y 30)	12	22,6	23	23,2	35	22,3
Concentración alta (Rango entre 1 y 10)	8	15,1	5	5,1	13	8,3
Dispersión alta (Rango entre 30 y 70)	8	15,1	51	51,5	59	37,6
Casos extremos (Rango 0 o mayor que 70)			9	9,1	9	5,7
No responden					5	3,2
Total	53	100,0	99	100,0	157	100,0

Fuente: desarrollado por los autores

En nuestra muestra hubo mayor proporción de respuestas correctas, y menor de no respuesta y del sesgo de equiprobabilidad que en Green (1983), Cañizares (1997) y Mohamed

(2012), quienes aplicaron un ítem similar en formato de selección múltiple con única respuesta, como se describió en los antecedentes. Los tres estudios mostraron baja proporción de respuestas correctas (17% entre niños ingleses, 15% entre niños españoles y 31% entre futuros profesores) y alta proporción del sesgo de equiprobabilidad (61% entre niños ingleses, 64% entre niños españoles y 62% entre futuros profesores españoles). Consideramos que nuestra forma de plantear la pregunta permite medir, de forma más integral, la comprensión del significado frecuencial, pues, además de la estimación de la probabilidad, observamos la percepción de la variabilidad en el muestreo.

5 Conocimiento especializado del contenido

En general, casi todos los grupos fueron capaces de identificar algún objeto matemático presente en esta tarea (descritos en el apartado 3.2), aunque el número dado fue pequeño. La mitad de los equipos identifican entre dos y tres objetos matemáticos, 7 (17,4%) identifican sólo uno, 4 equipos (10%) identifican 4, sólo 2 equipos (5%) identifican 6 y 7 equipos (17,4%) no contestan esta pregunta.

Los objetos correctamente identificados por más de un grupo se presentan en la Tabla 3. El mencionado con mayor frecuencia es probabilidad, aunque pocos grupos especifican que se trata de una asignación frecuencial de la misma o hacen referencia a la frecuencia. El resto de objetos es identificado únicamente por una proporción pequeña de los grupos. Observamos que se tiende a identificar más conceptos que procedimientos, y que no hay mención a propiedades.

Tabla 3 – Frecuencias de los objetos matemáticos con más menciones

Tipo de objeto matemático	Objeto matemático	Frecuencia	% (Frecuencia/40)
Concepto	Probabilidad	29	72,5
	Esperanza matemática	6	15,0
	Aleatoriedad (azar)	5	12,5
	Frecuencia	5	12,5
	Proporcionalidad	4	10,0
	Números naturales	3	7,5
	Proporción	2	5,0
Procedimiento	Enumeración de posibilidades	7	17,5
	Suma	4	10,0
	Asignación frecuencial	4	10,0
	Comparación de probabilidades	2	5,0

Fuente: desarrollado por los autores

También se identificaron objetos que no aparecen en la actividad, tales como el principio de conservación, u objetos no matemáticos como la intuición. No llegan a

CC BY NC ND
ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

nombrarse las ideas de población o muestra, distribución, ensayos repetidos, fiabilidad de la estimación, o el carácter aproximado de esta estimación.

En consecuencia, los futuros profesores muestran algún conocimiento especializado del contenido, pero aún insuficiente, corroborando la investigación de Chick y Pierce (2008), cuyos profesores fallaron en identificar los conceptos latentes en una situación didáctica propuesta para la enseñanza de la probabilidad. Son mejores que los de Ortiz, Batanero y Contreras (2012) y Mohamed (2012), quienes encontraron insuficiente el Conocimiento Especializado del Contenido, con relación al juego equitativo y espacio muestral, pues el número de objetos correctamente identificados en nuestro estudio es algo mayor y apenas aparecen objetos no necesitados en la solución del problema. Puesto que los participantes de estos estudios no realizaron previamente la actividad de discusión de las soluciones al problema y de simulación efectuada por nuestros participantes, deducimos que esta actividad fue productiva para desarrollar algo su conocimiento especializado del contenido.

6 Conocimiento del contenido y los participantes

En otras dos preguntas se pidió a los futuros profesores evaluar las respuestas de alumnos ficticios de Educación Primaria e indicar las causas de sus dificultades. La Tabla 4 resume sus valoraciones para cada respuesta. La identificación adecuada de las cuatro respuestas, como correctas e incorrectas, fue hecha por 14 equipos (35%); otros nueve (22,5%) calificaron como parcialmente correcta al menos una de las respuestas incorrectas; y siete (17,4%) acertaron la respuesta correcta, pero fallaron en la identificación de alguna de las tres incorrectas. Un equipo no responde; otros cinco interpretan mal el enunciado, dando otro tipo de respuesta.

Tabla 4 – Frecuencia y porcentaje de equipos según evalúan las respuestas de alumnos ficticios

Calificación por equipo	Alumno 1 (incorrecto)		Alumno 2 (correcto)		Alumno 3 (incorrecto)		Alumno 4 (incorrecto)	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Correcta	5	12,5	33	82,5	3	7,5	2	5,0
Incorrecta	19	47,5	1	2,5	29	72,5	29	72,5
Parcialmente correcta	9	22,5			2	5,0	3	7,5
Otra respuesta	5	12,5	5	12,5	5	12,5	5	12,5
No responde	2	5,0	1	2,5	1	2,5	1	2,5
Total	40	100,0	40	100,0	40	100,0	40	100,0

Fuente: desarrollado por los autores

Lo más sencillo fue identificar la respuesta correcta del Alumno 2 (82,5% de equipos), lo que indica el aprendizaje producido en la discusión colectiva, realizada al final de la primera sesión, pues en la pregunta 1 sólo 38,4% de respuestas fueron correctas y 20,3% parcialmente correctas. Fue también sencillo identificar como incorrectas las respuestas correspondientes a ausencia de variabilidad (Alumno 3) y sesgo de equiprobabilidad (Alumno 4), bien identificadas por 72,5% de los equipos. En relación con la variabilidad de los datos dados por estos futuros profesores en la pregunta 1, encontramos que sólo el 45,2% produjeron muestras de variabilidad adecuada o aceptable, mientas ahora la variabilidad demasiado pequeña es bien identificada y de nuevo se observa el efecto de aprendizaje. Fue más difícil identificar la respuesta incorrecta debido a un patrón alternante del Alumno 1 (47,5% de los equipos).

En resumen, la mayoría de equipos fueron capaces de reconocer las respuestas correctas e incorrectas, lo que evidencia el desarrollo logrado en su conocimiento común de la probabilidad mediante las actividades de experimentación y discusión colectiva, en comparación con los resultados en la primera pregunta. Este desarrollo del conocimiento probabilístico les ha permitido, también, adquirir un cierto conocimiento del contenido y el estudiante. A continuación se analizan las explicaciones de los equipos respecto a la causa del error, teniendo en cuenta los puntos considerados al analizar las respuestas a la pregunta 1.

6.1 Justificación de errores en base a la frecuencia de resultados

La mayoría de los grupos para dar su valoración analiza las frecuencias de chinchetas con la punta hacia arriba en las respuestas de los alumnos, con las siguientes variantes:

E1. Los resultados concuerdan con la frecuencia esperada, es decir, los resultados son parecidos a los del profesor, o bien el alumno ficticio piensa en términos de probabilidad. Este argumento se puede usar para identificar una respuesta como correcta, cuando los resultados son parecidos entre sí, pero no exactos, y para justificar la incorrecta, cuando se repiten exactamente los mismos resultados, por ejemplo:

> *Es casi imposible que el Alumno 3 obtenga en los 4 casos el mismo número de chinchetas con la punta hacia arriba y además, que los números coincidan con el ejemplo del enunciado (E22)*

E2. Los resultados de alguno de los experimentos no concuerdan con la frecuencia esperada. Algunos equipos consideran que hay demasiada discrepancia entre la frecuencia dada por el Alumno 1 o el Alumno 4 y el valor esperado, y utilizan este tipo de explicación para valorarla como incorrecta:

BY NC ND

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

> *Puede ocurrir que en la tirada salgan 2 casos con 68 y 65 puntas hacia abajo, pero es muy difícil obtener los resultados del Alumno 1, casi siempre saldrán más chinchetas con punta hacia arriba. (E04)*

E3. Los resultados son contrarios a la frecuencia esperada, tratando de compensarla para conseguir equiprobabilidad. Se indica que el alumno trata de compensar las frecuencias de punta arriba y abajo, para conseguir un número total igual de caras y cruces, es decir, se identifica la heurística de representatividad, aunque no se le dé este nombre. Un ejemplo es:

> *El alumno 1 ha escrito que en 2 casos es más probable que las chinchetas caigan con la punta hacia arriba y es muy difícil que eso ocurra así. Para dar esa respuesta es posible que el alumno haya pensado que los dos casos tienen la misma probabilidad. (E07)*

E4. Los resultados son muy próximos al 50%. Esta explicación del error en la respuesta del alumno 4 asume que el participante ficticio tiene un sesgo de equiprobabilidad, pues los valores dados de las frecuencias no corresponden con lo esperado para este experimento aleatorio. Algunos equipos tienden a sustentar la ausencia de equiprobabilidad en las características físicas de la chincheta por ejemplo:

> *En todos los casos las respuestas son muy cercanas al 50% cuando en realidad que las chinchetas caigan con la punta hacia arriba tiene más probabilidad. (E07)*

E5. Otras respuestas debidas a mala interpretación de la pregunta. Por ejemplo, leen en vertical los resultados y evalúan correctamente cuál de los niños (Daniel, Martín, Diana y María) da una mejor solución. O bien leen los resultados en forma aislada y evalúan cuál respuesta da una mejor solución.

En la Tabla 5 se presentan las frecuencias de los argumentos basados en frecuencia, usados, principalmente, para justificar respuestas incorrectas de los alumnos 1 y 4. La diferencia de frecuencias dadas por el profesor (E2) es el argumento mayoritario para el error del alumno 1 y la cercanía al 50% el preferido para valorar al alumno 4, aunque también se usa el de diferencias con las frecuencias dadas por el profesor.

BY NC ND

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

Tabla 5 – Frecuencias y porcentaje de justificaciones de respuestas correctas o incorrectas en base a las frecuencias

Explicación	Alumno 1 (incorrecto)		Alumno 2 (correcto)		Alumno 3 (incorrecto)		Alumno 4 (incorrecto)	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
E1. Concordancia de frecuencias con las dadas por el profesor			7	17,5	3	7,5		
E2. Diferencia de frecuencias con las dadas por el profesor	22	55,0	1	2,5	1	2,5	11	27,5
E3. Contrarios	2	5,0						
E4. Frecuencia alrededor del 50% o equiprobabilidad	1	2,5					16	40,0
E5. Otra interpretación del enunciado	7	17,5	5	12,5	5	12,5	5	12,5
No argumenta en base a la frecuencia	8	20,0	27	67,5	31	77,5	8	20,0
Total	40	100,0	40	100,0	40	100,0	40	100,0

Fuente: desarrollado por los autores

La respuesta del Alumno 3 fue considerada correcta por tres equipos, que se basaron en la cercanía de valores dados por los niños con las frecuencias dadas por el profesor (E1), mostrando una baja comprensión del significado frecuencial.

6.2 Justificación de errores en base a la variabilidad de resultados

En segundo lugar hemos estudiado los argumentos que se basan en un análisis de la variabilidad de resultados de Daniel, Martín, Diana y María. Las categorías encontradas son las siguientes:

E1. Hay una variabilidad adecuada en un experimento aleatorio. Argumento dado sólo por un equipo para analizar los razonamientos de los alumnos 2 y 4, en que todos los valores aportados se concentran alrededor de un mismo valor, pero con cierta dispersión. Este equipo, además, tiene en cuenta las tendencias de las frecuencias en ambos casos; es el que muestra una argumentación más completa, pues percibe simultáneamente las dos características del muestreo aleatorio: tendencia hacia el valor esperado y variabilidad. Su respuesta es la siguiente:

> *El alumno 4 determina que el número de chinchetas que caen con la punta hacia arriba es igual de probable que el número de chinchetas que caen con la punta hacia abajo. No obstante, no establece siempre los mismos resultados sino que varía el número. Este alumno tampoco tiene en cuenta los resultados dados por el profesor. (E01)*

E2. No hay variabilidad de resultados (o es muy baja). En este caso se argumenta que siempre aparece el mismo resultado, que no hay variabilidad o es pequeña, generalmente

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

cuando analizan el razonamiento del alumno 3, que corresponde a un patrón determinista, por ejemplo:

Está mal, ya que es poco probable que a los 4 niños, al lanzar las chinchetas, les salgan los mismos números (E03)

E3. Los resultados varían mucho. Sería el argumento de los grupos que consideran excesiva la variabilidad de los resultados, y sólo lo usa un equipo cuando analizan el razonamiento del alumno 1:

No tiene en cuenta la probabilidad, sino que tiene en cuenta datos muy distintos (E09)

El uso de estos tres argumentos se resume en la Tabla 6, donde vemos que son pocos los equipos que analizan la variabilidad, porque se contentan con dar un solo argumento, cuando dieron argumentos basados en las frecuencias, no analizan la variabilidad. En todo caso, cada argumento se usa preferentemente con una respuesta; consideramos que la mayoría de futuros profesores muestran un conocimiento adecuado de la variabilidad.

Tabla 6 – Frecuencias y porcentajes de argumentos basados en la variabilidad para justificar las respuestas como correctas o incorrectas

Explicación	Alumno 1 (incorrecto)		Alumno 2 (correcto)		Alumno 3 (incorrecto)		Alumno 4 (incorrecto)	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
E1. Variabilidad adecuada			1	2,5			1	2,5
E2. No hay (o es baja)	1	2,5			29	72,5	4	10,0
E3. Demasiada variabilidad	1	2,5						
No analizan la variabilidad	38	95,0	39	97,5	11	27,5	35	87,5
Total	40	100,0	40	100,0	40	100,0	40	100,0

Fuente: desarrollado por los autores

Estos resultados son mejores que los de Mohamed (2012), pues los futuros profesores evaluados en su estudio mostraron carencias al momento de explicar las razones de los errores en las respuestas. Por un lado, observó baja capacidad de argumentación y, por otro, encontró inconsistencias entre la clasificación de una respuesta y la razón dada para explicar su error (indicaban que la respuesta era incorrecta, argumentando que era correcta y el alumno no supo explicarse).

7 Discusión y conclusiones

En este trabajo se propuso una situación de estimación de la probabilidad, en su significado frecuencial, con el fin de evaluar y desarrollar algunos componentes del *conocimiento matemático para la enseñanza* (BALL; LUBIENSKI; MEWBORN, 2001; HILL; BALL; SCHILLING, 2008) en un grupo de futuros profesores de Educación Primaria.

BY NC ND
ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

Las principales conclusiones obtenidas respecto a los componentes de dicho conocimiento son las siguientes:

7.1 Conocimiento común de la probabilidad

Aunque algunos trabajos previos han analizado el conocimiento común de la probabilidad en futuros profesores, pocos se han centrado en su comprensión del significado frecuencial de la probabilidad. Además, la variación que hemos propuesto en la tarea introduce un elemento novedoso, que permite evaluar la comprensión, tanto de las tendencias o valores esperados en el experimento como de la variabilidad inherente en un proceso de muestreo.

Los datos recogidos sobre la primera pregunta muestran unas pobres intuiciones iniciales sobre los experimentos aleatorios, pues sólo la tercera parte, aproximadamente, tiene una intuición simultánea de la convergencia al valor esperado y de la variabilidad muestral. El resto muestra diferentes sesgos, como la equiprobabilidad, la heurística de la representatividad o piensa que no es posible hacer una predicción. Estos resultados coinciden con los estudios de Batanero, Godino y Cañizares (2005), Carter (2008) y Mohamed (2012); y son mejores que los observados en estudios con niños o adolescentes, como Green (1983, 1991), Serrano (1996) y Cañizares (1997). Además, añadimos información sobre la comprensión de la variabilidad, mostrando que una parte importante del grupo produce muestras de variabilidad extrema o de patrón determinista.

La identificación de las respuestas correctas e incorrectas en la tercera sesión indica, asimismo, el aprendizaje logrado por parte de los futuros profesores, mediante la metodología propuesta, consistente en la discusión colectiva en una segunda sesión de las soluciones a la primera pregunta, una vez completada, y la realización de experimentos en el aula.

7.2 Conocimiento especializado del contenido

En concordancia con estudios previos con profesores en formación (CHICK; PIERCE, 2008; ORTIZ; BATANERO; CONTRERAS, 2012; MOHAMED, 2012) nuestro estudio indica pobre capacidad para identificar los objetos matemáticos en una tarea, incluso cuando los futuros profesores utilizaron dichos objetos al resolver correctamente los problemas planteados. De todos modos, los resultados son algo mejores que los citados, sin duda es

CC BY NC ND

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

efecto del aprendizaje en la segunda sesión. Será importante buscar formas alternativas de desarrollar este conocimiento especializado, pues su carencia podría dificultar algunas de las actividades que realiza el profesor, como se concluye de investigaciones previas con profesores en ejercicio (WATSON, 2001; STOHL, 2005).

7.3 Conocimiento del contenido y los estudiantes

Los resultados sobre el conocimiento del contenido y los estudiantes en relación a la probabilidad frecuencial también son originales. Para evaluarlos, se pidió a los futuros profesores, trabajando en grupos, que analizasen las respuestas dadas por cuatro alumnos ficticios. Al haber discutido colectivamente sus propias respuestas a la primera parte de la tarea, fueron capaces de discriminar, con facilidad, las respuestas correctas e incorrectas de dichos alumnos. Por ello deducimos que el avance en su conocimiento común del contenido ayudó a desarrollar su conocimiento del contenido y los estudiantes.

Un alto porcentaje de estos futuros profesores también fueron capaces de dar razones válidas para los errores en las respuestas; mostrando mejores resultados que estudios previos con profesores en ejercicio (WATSON, 2001; STOHL, 2005) o en formación (CARTER, 2008; MOHAMED, 2012). Los razonamientos erróneos mejor identificados fueron la ausencia de variabilidad en los valores dados, la diferencia con frecuencias dadas por el profesor y la cercanía al 50% de los valores dados. En todo caso, sería necesario mejorar la formación en este punto, dándoles a conocer los resultados de las investigaciones sobre didáctica de la probabilidad, que habría que transmitirles mediante una adecuada transposición didáctica.

7.4 Implicaciones del estudio

Una implicación de interés para los formadores de profesores de Educación Primaria es la necesidad de reforzar su formación para la enseñanza de la probabilidad, tanto en su conocimiento especializado del contenido matemático como en el conocimiento del contenido y los estudiantes.

Concerniente a la metodología, para llevar a cabo esta formación, se sugiere proponer a los futuros profesores una muestra de situaciones experimentales y contextualizadas, que sean representativas del enfoque frecuencial, confrontándolos con sus propios sesgos e

cc BY NC ND
ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

intuiciones incorrectas. Para prepararlos en la componente didáctica, serán de gran ayuda situaciones relacionadas con la docencia, como las usadas en este trabajo. Resaltamos, también, la necesidad de continuar la investigación sobre otros componentes del conocimiento del profesor en el campo de la probabilidad, como paso necesario para mejorar la formación de los profesores.

Agradecimientos

Proyecto EDU2010-14947 (MCINN-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

BALL, D. L.; LUBIENSKI, S. T.; MEWBORN, D. S. Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In: RICHARDSON, V. **Handbook of Research on Teaching**. Washington, DC: American Educational Research Association, 2001. p. 433-456.

BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Revista Latinoamericana de Matemática Educativa**, México D.F., v. 8, n.3, p. 247-264, oct. 2005.

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; CAÑIZARES, M. J. Simulation as a tool to train Pre-service school teachers. In: AFRICAN REGIONAL CONFERENCE OF ICMI, 1th, 2005, Ciudad del Cabo. **Proceedings**... Ciudad del Cabo: ICMI, 2005. p. 13-23. CD-ROM.

CAÑIZARES, M. J. **Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias**. 1997. 337 f. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) – Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, 1997.

CARTER, T. A. Preservice teacher knowledge and understanding of probability and statistics. In: KULM, G. **Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics**. Rotterdam: Sense Publishers, 2008. p. 19-43.

CHICK, H. L.; PIERCE, R. U. Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. In: ICMI STUDY AND IASE ROUND TABLE CONFERENCE: TEACHING STATISTICS IN SCHOOL MATHEMATICS. CHALLENGES FOR TEACHING AND TEACHER EDUCATION, 11th, 2008, Monterrey. **Proceedings…** Monterrey: ICMI and IASE, 2008. p. 1-8. Disponible en: <www.ugr.es/~icmi/iase_study>. Acceso en: 5 sept. 2012.

GREEN, D. R. From thumbtacks to inference. **School Science and Mathematics**, Ohio, v. 83, n.7, p. 541-551, nov. 1983.

GREEN, D. R. A longitudinal study of children's probability concepts. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 3rd, 1991, Dunedin. **Proceedings**… Dunedin: Universidad de Otago, 1991. p. 320-328.

GODINO, J. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. **UNIÓN**, Buenos Aires, v. 20, p. 13-31, dic. 2009.

BY NC ND

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a11

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, Virginia, v. 39, n. 4, p. 372-400. 2008.

LECOUTRE, M. P. Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 23, n. 6, p. 557-568, dic. 1992.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE ESPAÑA-MEC. **Real Decreto 1513/2006**, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Madrid: Boletín Oficial del Estado, nº 293. 2006.

MOHAMED, N. **Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad**. 2012. 287 f. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) – Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, 2012

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS-NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston: VA, NCTM. 2000

ORTIZ, J.; BATANERO, C.; CONTRERAS, C. Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. **Revista Latino Americana de Matemática Educativa**, México D.F., v. 15, n. 1, p. 63-91. 2012

SERRANO, L. **Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad**. 1996. 284 f. Tesis (Doctorado en Didáctica de la Matemática) – Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, 1996.

STOHL, H. Facilitating students’ problem solving: Prospective teachers’ learning trajectory in technological contexts. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Dordrecht, v. 8, n. 3, p. 223-254, jun. 2005.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Judgments of and by representativeness. In: KAHNEMAN, D.; SLOVIC, P.; TVERSKY, A. **Judgement under uncertainty**: Heuristics and biases. New York: Cambridge University Press, 1982. p. 117-128.

WATSON, J. M. Profiling teachers’ competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of data and chance. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Dordrecht, v. 4, n. 4, p. 305-337, dic. 2001.

Submetido em Novembro de 2012.
Aprovado em Abril de 2013.