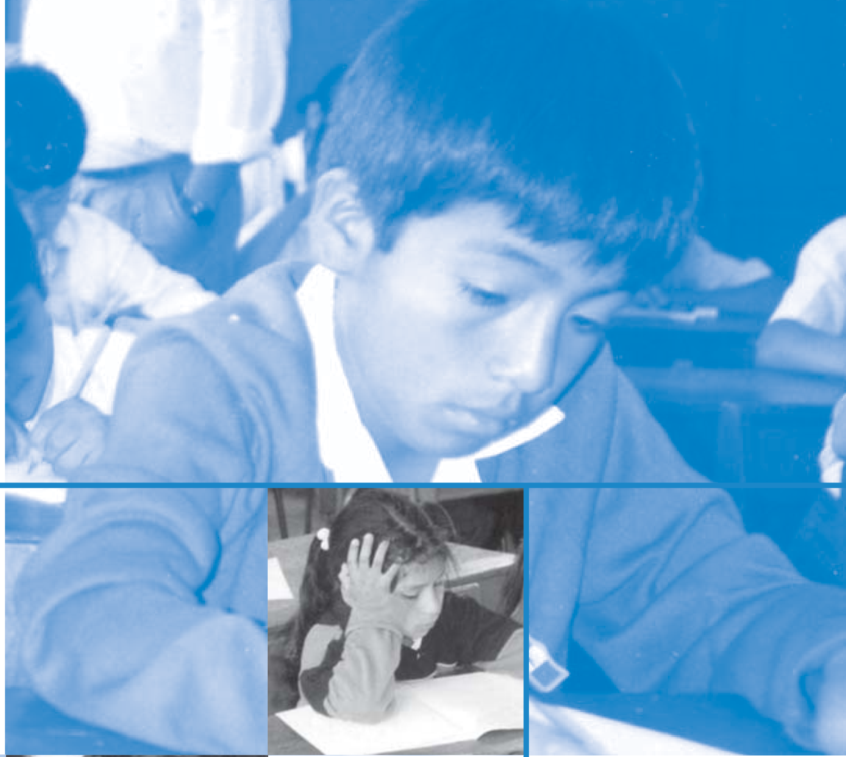
Unidad de Medición
de la Calidad Educativa
UMC



Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004

Informe pedagógico de resultados

Formación matemática

Segundo grado de Primaria

Sexto grado de Primaria

14

Documento de trabajo
UMC

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
REPÚBLICA DEL PERÚ

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Javier Sota Nadal

SECRETARIO DE PLANIFICACIÓN ESTRATÉGICA
Enrique Prochazka Garavito

SECRETARIO ADJUNTO DE PLANIFICACIÓN ESTRATÉGICA
Walter Twanama Altamirano

JEFE DE LA OFICINA DE PLANIFICACIÓN ESTRATÉGICA
Carlos Pizano Paniagua

JEFA DE LA UNIDAD DE MEDICIÓN DE LA CALIDAD EDUCATIVA (UMC)
Liliana Miranda Molina

COORDINADORA DEL EQUIPO DE EVALUACIÓN
Tania Pacheco Valenzuela

EQUIPO DE EVALUACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
David Palomino Alva (especialista en segundo grado de primaria)
Karim Boccio Zúñiga (especialista en sexto grado de primaria)
Úrsula Asmad Falcón
Gustavo Cruz Ampuero

EDITORA
Ximena Urbina Keller

Calle Van de Velde N° 160, Lima 41 – Perú
Teléfono: 215 5800
www.minedu.gob.pe

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº XXXXXXXXx

ISBN: XXXXXXXXX

Contenido

Presentación

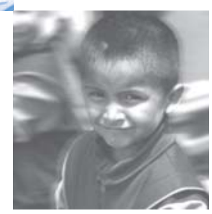
Este informe presenta los resultados de los estudiantes de segundo grado y sexto grado de primaria en las pruebas de Matemática que formaron parte de la Evaluación Nacional 2004 (EN 2004) realizada por la Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC).

La UMC es la instancia técnica del Ministerio de Educación del Perú responsable de diseñar e implementar evaluaciones nacionales de rendimiento. Estas evaluaciones constan de un conjunto de pruebas y cuestionarios, y nos proporcionan información acerca del nivel de rendimiento académico de los estudiantes de las escuelas del Perú. Además, nos brindan información acerca de los factores escolares y extraescolares que influyen en dicho rendimiento.

Los resultados de las evaluaciones nacionales de rendimiento son muy importantes porque ofrecen información que sirve para propiciar acciones de mejora y tomar decisiones de política educativa en diversas instancias. Para que la información obtenida en la evaluación cumpla estos propósitos es necesario que sea difundida no solo entre las autoridades y los especialistas en la materia, sino también entre los docentes, directores, padres de familia y la sociedad en general. Este informe pedagógico está dirigido especialmente a los docentes, pues les brinda información para reflexionar acerca de algunos aspectos de su práctica pedagógica y les proporciona herramientas para mejorarla en el área de Matemática.

Este informe proporciona, además, una descripción de las habilidades que deberían tener los estudiantes en el grado que cursan, un análisis de aquellas con las que cuentan efectivamente y una aproximación a las dificultades que presentan al enfrentarse a la resolución de situaciones problemáticas. Asimismo, se brindan algunas sugerencias para mejorar el rendimiento de los estudiantes en el área de Matemática desde el aula.

Este informe consta de cuatro partes: la primera presenta información general acerca de la EN 2004 y un resumen de su marco de trabajo; la segunda parte ofrece los resultados en segundo grado de primaria; la tercera, los resultados en sexto grado de primaria; finalmente, la cuarta parte presenta las conclusiones y la bibliografía. Además, en los anexos se incluye una descripción de los problemas aritméticos aditivos y un glosario con la explicación de los términos técnicos utilizados.



PARTE I

LA EVALUACIÓN DEL RENDIMIENTO ESTUDIANTIL

1 La Evaluación Nacional 2004

¿Qué es la Evaluación Nacional 2004?

La Evaluación Nacional 2004 (EN 2004) es la cuarta de las evaluaciones nacionales del rendimiento estudiantil realizadas por el Ministerio de Educación (MED). Esta evaluación recoge información acerca del sistema educativo peruano en su conjunto mediante la aplicación de diversos instrumentos de medición, como pruebas de rendimiento y cuestionarios, a los diferentes actores que intervienen en el proceso educativo.

Evaluaciones de este tipo se llevan a cabo periódicamente con el fin de proporcionar al sistema educativo, a los investigadores y a la sociedad en general información válida y oportuna sobre el rendimiento académico de los estudiantes y sobre los factores o condiciones escolares y extraescolares asociados a este rendimiento. De esta manera, la evaluación identifica los aspectos que deben ser considerados para mejorar el aprendizaje de los estudiantes peruanos.

Las pruebas de rendimiento aplicadas a los estudiantes en la EN 2004 han sido diseñadas bajo un modelo de evaluación basado en criterios. Este modelo permite identificar lo que deberían saber los estudiantes de acuerdo con el grado de estudios que cursan, los conocimientos con los que cuentan y lo que hacen con ellos. También permite ordenar a los estudiantes en función de su rendimiento y efectuar una comparación relativa entre ellos.

¿Qué áreas y grados se evaluaron?

En la EN 2004, han sido evaluadas las áreas curriculares de Comunicación[1] y de Matemática,[2] pues proporcionan las herramientas necesarias para el logro de aprendizajes en otras áreas. Además, se recogió información para un estudio que tiene el objetivo de aproximarse al eje curricular de Formación Ciudadana.[3]

Grados evaluados en la EN 2004 según área

		Matemática	Comunicación	Formación Ciudadana
Primaria	Segundo	✔	✔	—
	Sexto	✔	✔	✔
Secundaria	Tercero	✔	✔	—
	Quinto	✔	✔	✔

1. El término Comunicación se utilizará también para el área de Comunicación Integral del nivel primario.
2. Asimismo, en esta Parte I, el término Matemática se empleará también para referirse al área de Lógico Matemática del nivel primario.
3. Los resultados de este estudio se presentarán en un informe aparte.

Como se aprecia en el cuadro anterior, se eligieron los grados de segundo y sexto de primaria y tercero y quinto de secundaria. Se decidió evaluar sexto grado de primaria y quinto grado de secundaria, pues es muy importante recoger información sobre los logros alcanzados por los estudiantes al término de cada nivel educativo. Los estudiantes de quinto grado de secundaria no solo están finalizando el nivel sino que están terminando la escolaridad, por lo que esta evaluación constituye un buen diagnóstico de las capacidades que han desarrollado tras su paso por la educación básica regular (EBR). Asimismo, se eligió evaluar segundo grado de primaria y tercer grado de secundaria por tratarse de los grados finales del primer ciclo en sus respectivos niveles.[4]

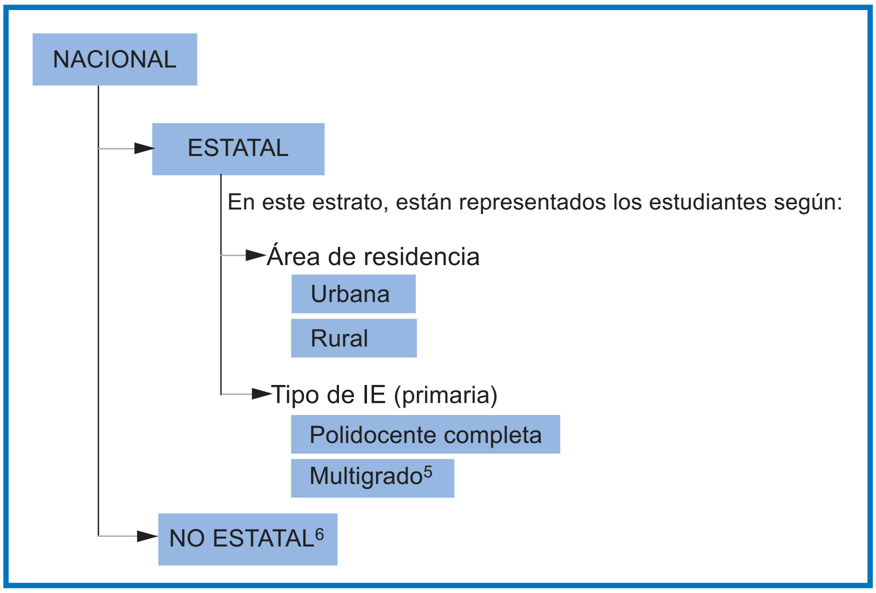
¿Quiénes participaron en la EN 2004?

En la EN 2004 participaron estudiantes de aproximadamente 850 instituciones educativas (IE) de educación primaria y 640 de educación secundaria de todas las regiones del Perú. Se evaluaron alrededor de 14 500 estudiantes en cada grado.

¿Cómo se eligieron a las IE participantes?

Las IE se seleccionaron de manera aleatoria (al azar) con el propósito de que la muestra fuese técnicamente adecuada para realizar inferencias generales acerca del rendimiento de toda la población estudiantil del Perú y de los estratos establecidos (para los grados evaluados). Una vez definidas las IE participantes, se seleccionaron también de manera aleatoria el turno, la(s) sección(es) y un total de treinta estudiantes, como máximo, en cada grado evaluado.

Estratos representativos de la muestra de la EN 2004



---

4. Este criterio tuvo como base los currículos vigentes en la etapa de diseño la evaluación. El Plan de Estudios de la Educación Básica Regular actual establece que segundo de primaria es el último grado del ciclo III y tercero de secundaria es el primer grado del ciclo VII (ciclo final de la educación secundaria).
5. En este estrato están incluidas las IE unidocentes.
6. Entre otras IE, en este estrato se encuentran aquellas IE cooperativas, parroquiales, particulares, comunales, etc.

Los recuadros sombreados en el gráfico muestran los estratos representados en la EN 2004. La información ofrecida en este reporte tiene índices de precisión y confiabilidad aceptables en estos estratos.[7]

¿Qué instrumentos se aplicaron?

Se aplicaron dos tipos de instrumentos: pruebas de rendimiento y cuestionarios de factores asociados.

- *Pruebas de rendimiento*

  Evalúan el nivel de dominio de las capacidades y los contenidos curriculares. Constan de una serie de preguntas para que el estudiante marque o elabore su respuesta. Si bien las pruebas de rendimiento elaboradas para la EN 2004 son pruebas de lápiz y papel, presentan una serie de situaciones significativas para los estudiantes con la intención de evaluar el grado de desarrollo de las capacidades como una herramienta útil para enfrentar diversas situaciones dentro y fuera de la escuela.

- *Cuestionarios de factores asociados al rendimiento*

  Recogen información acerca de diversos aspectos que influyen en el rendimiento académico de los estudiantes. Estos instrumentos constan de varias preguntas cuyo objetivo es recoger información que permita interpretar los resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas de rendimiento con la finalidad de identificar los factores que lo favorecen o desfavorecen. Cada uno de estos cuestionarios está dirigido a uno de los actores del sistema: los estudiantes evaluados, sus profesores, y sus padres o apoderados.

¿Cómo son las pruebas de rendimiento de la EN 2004?

Las pruebas de rendimiento de la EN 2004 presentan preguntas de diversos formatos. Entre estos, destacan las preguntas de «producción de respuesta», llamadas así porque se pide a los estudiantes que elaboren o produzcan su propia respuesta. Por ejemplo, se les pide que redacten y justifiquen su respuesta o que muestren el procedimiento completo para llegar a ella.

Considerando el área, las pruebas de rendimiento estaban constituidas por preguntas que han sido elaboradas según los siguientes formatos:

- *En el área de Matemática*. La prueba está constituida por un conjunto de preguntas para marcar la opción correcta, aparear, escribir una respuesta corta (una palabra, un número, etc.), desarrollar el procedimiento necesario para resolver un problema (respuesta extensa), justificar una afirmación, etc.

- *En el área de Comunicación*. Para esta área se han elaborado dos pruebas que evalúan comprensión y producción de textos.

---

7. El margen de error es de cinco puntos porcentuales como máximo, con un nivel de confianza de 95%.

- *Comprensión de textos*: La prueba está constituida por diversos textos seguidos de un conjunto de preguntas de diferentes formatos, como marcar la opción correcta, escribir una respuesta corta o desarrollar una respuesta extensa.
- *Producción de textos*: La prueba está constituida por estímulos que invitan a los estudiantes a escribir un texto y, a continuación, presentan un espacio para que el estudiante lo produzca.

El modelo de evaluación empleado en la EN 2004, llamado «evaluación basada en criterios», requiere de una gran cantidad de preguntas para poder recoger información sobre lo que saben y hacen los estudiantes respecto de lo que deberían saber y deberían hacer de acuerdo con la estructura curricular. Estas preguntas responden a una propuesta de evaluación en la que las especificaciones de las pruebas determinan el número necesario de preguntas para evaluar las capacidades más importantes del área. Este número excede lo que podría realizar un estudiante, incluso en varias sesiones, pues se trata de más de un centenar de preguntas para cada una de las pruebas. Por esta razón, se ha recurrido al diseño de bloques rotados y al modelo de análisis Rasch[8] que permiten estimar el desempeño del estudiante en toda la prueba a partir de las respuestas que dio a las preguntas a las que se enfrentó. Metodologías como estas son altamente confiables y se suelen usar en este tipo de estudios.

¿Cómo se elaboraron las pruebas de rendimiento?

Para la elaboración de las pruebas de rendimiento se ha tomado como base, tanto para seleccionar los contenidos como para determinar las capacidades por evaluar, los currículos oficiales vigentes de cada uno de los niveles. A continuación se describe el proceso de elaboración de las pruebas.

1) Análisis curricular. Se analizaron no solo los documentos oficiales como la Estructura Curricular Básica (ECB) de Educación Primaria y el Diseño Curricular Básico (DCB) de Educación Secundaria,[9] sino también los textos educativos de cada área de mayor circulación comercial en el medio.
2) Elaboración del marco de trabajo. Este marco incluye el enfoque del área, las especificaciones de las pruebas, es decir, la selección y adecuación de las capacidades y contenidos a evaluar, la determinación del número apropiado de las preguntas y el diseño adecuado de estas.
3) Elaboración de las preguntas según las especificaciones de la prueba.
4) Aplicaciones piloto de las preguntas de la prueba.[10]
5) Análisis estadístico y pedagógico de los resultados de las aplicaciones piloto.
6) Elaboración de las pruebas definitivas.

8. Este modelo estima la probabilidad de que un estudiante con una habilidad específica responda en forma correcta una pregunta con una dificultad particular.
9. Vigentes al momento de diseñar la evaluación.
10. De acuerdo con las necesidades técnicas de algunas de las pruebas, se llevaron a cabo varias aplicaciones piloto a diversas muestras.

Todos estos procesos han comprometido la participación de diversos especialistas. Algunos han requerido de talleres de consulta a especialistas de las áreas evaluadas, a docentes con experiencia en la enseñanza a los estudiantes de los grados que evalúan las pruebas y a otros profesionales que pudieran aportar, desde sus perspectivas, a la generación de pruebas apropiadas, no solo en términos estadísticos sino también en términos conceptuales. La construcción de las pruebas de la EN 2004 ha sido, entonces, un ejercicio colectivo desarrollado en múltiples fases interdependientes y coordinado por un equipo interdisciplinario. Finalmente, ha tenido una importancia especial la observación del comportamiento estadístico de las preguntas en el campo. Las aplicaciones piloto permitieron el acercamiento a los propios estudiantes y la puesta a prueba de los instrumentos. Esto ha sido decisivo para evaluar la mejor manera de formular las preguntas, detectar y relativizar los posibles sesgos culturales o sociales, y establecer los tiempos e indicaciones requeridos por los estudiantes para responder a los instrumentos.

¿Cuándo y cómo se aplicaron las pruebas?

La aplicación de los instrumentos se llevó a cabo de manera simultánea en todas las IE de la muestra durante la segunda semana del mes de noviembre de 2004. Para ello, se tuvo que establecer una red de aplicación tanto para la distribución de los instrumentos como para la selección y capacitación de profesionales de distintas áreas para la administración, coordinación, supervisión, control de calidad y aplicación de los instrumentos. Dicha red incluía a dos docentes[11] por cada una de las IE de la muestra. La decisión de fijar la aplicación de la prueba en noviembre obedeció básicamente a la necesidad de garantizar que, para entonces, los estudiantes evaluados hubieran tenido la oportunidad de realizar la mayoría de las actividades programadas para el año lectivo.

En cada uno de los grados, los estudiantes resolvieron una sola prueba de rendimiento por día. El tiempo máximo con el que contaba cada estudiante para la resolución de una prueba fue de sesenta minutos, con la posibilidad de una extensión de diez minutos si existía en el grupo evaluado algún estudiante que manifestara no haber concluido su prueba.[12] La distribución de las horas de las pruebas buscó que el rendimiento de los estudiantes no se viera afectado por el cansancio.

Como se ha indicado, tanto el número de preguntas como el tiempo otorgado para su resolución fueron determinados mediante el análisis y revisión de la información recogida en las aplicaciones piloto realizadas en la fase previa en cada una de las áreas.

Para rendir las pruebas en condiciones estandarizadas, cada estudiante recibió un cuadernillo con la prueba y una cartuchera con los útiles necesarios para desarrollarla (lápiz, tajador, borrador y regla). Los estudiantes respondieron a las preguntas en el mismo cuadernillo de la prueba.

---

11. Los docentes que desempeñaban el papel de examinadores en el nivel de su especialidad no pertenecían a las IE de la muestra y fueron capacitados en forma rigurosa para la aplicación de los instrumentos de manera estandarizada. Debido a la corta edad y a las características de los estudiantes de segundo grado de primaria, las pruebas fueron aplicadas en grupos de no más de quince estudiantes, de modo que los examinadores pudieran aplicar los instrumentos de manera estandarizada y, a la vez, establecer condiciones adecuadas para que los estudiantes resolvieran la prueba.

12. En promedio, los cuadernillos de las pruebas tenían veinte preguntas.

¿Cómo se codificaron las respuestas de los estudiantes?

El proceso de codificación de los instrumentos se llevó a cabo por un grupo de docentes especialmente capacitados y seleccionados.[13] En efecto, como se ha señalado, las pruebas constan no solo de preguntas de opción múltiple, sino de otros formatos en los que el estudiante debía elaborar su propia respuesta, la cual sería codificada posteriormente. Esto último ha permitido obtener una mayor cantidad de información (en especial, la relacionada con las habilidades más complejas).

La codificación consistió en la clasificación de las respuestas[14] de los estudiantes de acuerdo con la diversidad de estrategias empleadas para resolver las preguntas. Dicha clasificación se llevó a cabo a partir de un conjunto de criterios específicos definidos previamente para cada pregunta y que figuraban en los manuales de codificación. Estos criterios de codificación recogen evidencias del grado de desarrollo de las habilidades evaluadas en las respuestas de los estudiantes.

Para asegurar que el proceso fuera lo más objetivo posible y que todas las respuestas fueran codificadas bajo los mismos criterios, además de trabajar con docentes capacitados y manuales de codificación detallados, se aplicaron mecanismos de control de calidad para evaluar la adecuada aplicación de los criterios por parte de cada codificador a lo largo de los dos meses que duró la codificación.

¿Cómo se procesaron y analizaron los datos?

Después de codificar las respuestas de todos los estudiantes evaluados, se consolidaron y depuraron las bases con los datos, a partir de las cuales se realizaron los análisis psicométricos utilizando la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI), en particular el modelo Rasch. Como se ha señalado, este modelo permite estimar tanto la habilidad de los estudiantes como la dificultad de las preguntas. Además, se realizó un análisis pedagógico, que consistió en el estudio del comportamiento de cada una de las preguntas y de sus criterios de codificación, de manera que la prueba en su conjunto reflejara fielmente el enfoque formulado en el marco de trabajo para cada una de las áreas. Un propósito que se debe destacar, porque atraviesa ambos enfoques de las áreas consideradas, es la búsqueda de una evaluación que permita recoger información de un aprendizaje funcional, formativo y útil a la vez, que trascienda los muros de la escuela y que se refleje en la mejora de la calidad de vida de los ciudadanos.

Por otro lado, los cuestionarios de factores asociados fueron procesados y analizados de muy diversas maneras debido a su distinta naturaleza y formato. Así, algunos cuestionarios han sido analizados mediante el análisis TRI y otros tipos de análisis —como el análisis multivariado— para identificar factores que están relacionados con las variables investigadas.

---

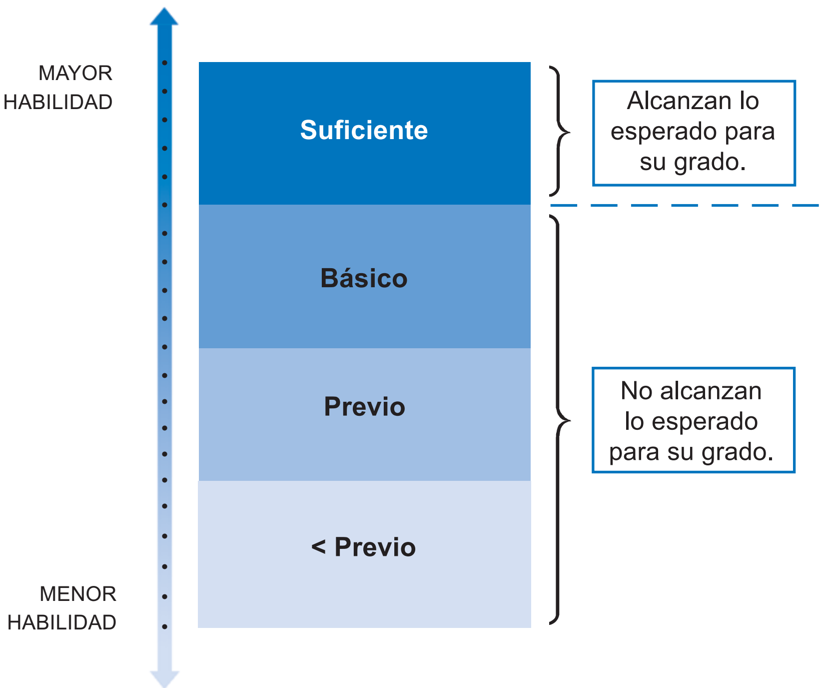
13. Muchos de estos «docentes codificadores» poseen la experiencia de haber participado en anteriores procesos de codificación durante la fase piloto e, incluso, en anteriores evaluaciones nacionales.
14. Nos referimos a todo el proceso mostrado por el estudiante («procedimiento y respuesta») y no solo a la respuesta final.

2 Niveles de desempeño en las pruebas de rendimiento

Como ya se indicó, el modelo de evaluación de la EN 2004 permite estimar lo que saben y hacen los estudiantes, a partir de su desempeño en las pruebas, respecto de lo que deberían saber y deberían hacer.

La Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC) realizó diversas consultas a grupos de expertos en educación[15] con la finalidad de determinar cuáles son los niveles de desempeño pertinentes para clasificar a los estudiantes según su rendimiento. Para esta labor, se partió del análisis de cada una de las preguntas que formaron parte de las pruebas. Estas preguntas se ordenaron de acuerdo con su nivel de dificultad desde la más difícil hasta la más fácil formando una escala en la que se determinaron tres niveles de desempeño: suficiente, básico y previo.

DISTRIBUCIÓN DE LOS ESTUDIANTES SEGÚN SU HABILIDAD



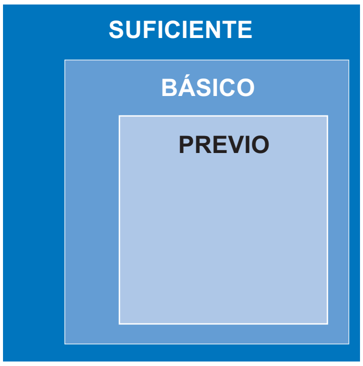
15. Se consultó a alrededor de 160 personas, entre docentes, representantes de editoriales, investigadores, especialistas del área pedagógica de las instancias de gestión descentralizada y del MED para que determinaran los puntos de corte entre los niveles. Por lo tanto, se convocó no solo a «expertos teóricos», sino también a «expertos prácticos», conocedores de la realidad, de los intereses y de las necesidades de los estudiantes de diversas zonas del país.

Los límites que indicaron hasta qué pregunta (de la escala ordenada por dificultad) tenía, por lo menos, que responder un estudiante para ser considerado en uno de los niveles de desempeño fueron definidos por un grupo de expertos en cada una de las áreas evaluadas. A este procedimiento se le conoce como establecimiento de «puntos de corte».[16]

Establecer los puntos de corte de las pruebas ha permitido identificar el conjunto de preguntas que debe resolver un estudiante para ser clasificado en uno de los niveles de desempeño para el grado que cursa. De esta manera, la población evaluada ha podido ser categorizada en función de los niveles de desempeño definidos para la prueba y se ha obtenido el porcentaje de población que pertenece a cada uno de dichos niveles.

Una característica importante de estos niveles es que son inclusivos, es decir:

- los estudiantes que se encuentran en el nivel básico pueden resolver las preguntas que pertenecen a ese nivel y al nivel previo; y
- los estudiantes que están en el nivel suficiente pueden resolver todas las preguntas de los niveles previo, básico y suficiente.



Se presentan a continuación las características de cada uno de los niveles de desempeño establecidos a partir de la EN 2004.

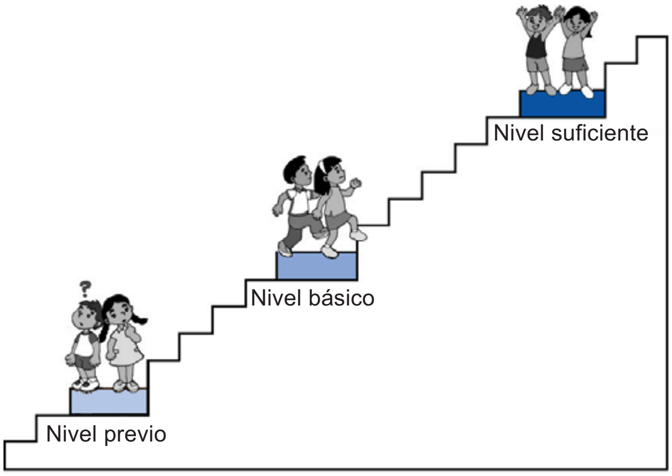
Nivel suficiente: Los estudiantes ubicados en este nivel demuestran el dominio de las capacidades evaluadas para el grado. No son estudiantes avanzados ni destacados los que predominan en este nivel, sino estudiantes que han alcanzado los objetivos del grado. Al finalizar el grado, todos o la gran mayoría de los estudiantes deberían encontrarse en este nivel.

Nivel básico: Los estudiantes agrupados en este nivel demuestran un dominio incipiente o elemental de las capacidades esperadas para el grado. Esto quiere decir que las han desarrollado solo parcialmente a pesar de estar por terminar el grado.

Nivel previo: Los estudiantes en este nivel demuestran solo un dominio de las capacidades desarrolladas en grados anteriores. Esto quiere decir que, a pesar de estar por concluir el grado, solo tienen desarrolladas habilidades que ya han trabajado en grados anteriores.

Los estudiantes que no lograron resolver el conjunto de preguntas necesarias para ser considerados en el nivel previo fueron catalogados en un grupo llamado «por debajo del previo». Este grupo de estudiantes solo logra resolver preguntas aisladas del nivel previo, en el que se ubican los estudiantes que no lograron resolver las preguntas más sencillas (que, generalmente, corresponden a ciclos anteriores).

16. Los niveles de desempeño se establecieron mediante un procedimiento especial enmarcado en el Método Bookmark. (Véanse: Hambleton 2001, y el documento de la UMC <http://www.minedu.gob.pe/umc/2001/doctec/informe_puntos_corte.pdf>.)



Nivel suficiente: Los estudiantes alcanzan el nivel esperado para el grado.

Nivel básico: Los estudiantes muestran un dominio incipiente o un manejo elemental de las capacidades evaluadas en el grado.

Nivel previo: Los estudiantes demuestran un manejo adecuado de solamente las capacidades desarrolladas en los grados anteriores.

Se espera que todos o la mayoría de los estudiantes se encuentren en el nivel suficiente.

El gráfico anterior ilustra la idea del aprendizaje como un proceso continuo: el desarrollo de las capacidades de los estudiantes desde el nivel previo (menor habilidad) hasta el nivel suficiente (mayor habilidad) es gradual.

3 Marco de evaluación del área de Matemática

La matemática en la educación básica

La matemática escolar ha tenido diversos enfoques didácticos a lo largo de su historia, influenciada sobre todo por el desarrollo de la propia disciplina y por las tendencias de los matemáticos de cada época. Así, en la década de 1970 en Francia, el Grupo Bourbaki[17] emprendió una revisión de los fundamentos de la matemática y trató de reorganizarla y unificarla partiendo de un enfoque estructuralista. Esta revisión, que se tradujo en la publicación de *Eléments de Mathématique*, puso en debate la organización del conocimiento matemático que hasta entonces se había aceptado. La influencia del Grupo Bourbaki fue en aumento y se cristalizó en el campo educativo en el movimiento denominado Matemática Moderna. Este movimiento planteaba que la educación matemática debía privilegiar el conocimiento de las estructuras matemáticas pues creía que, con el conocimiento y dominio de dichas estructuras, los estudiantes podrían comprender los conceptos, operar mejor y tener así una mayor eficacia al momento de resolver problemas.

Este movimiento de reforma educativa influyó de manera notable en la educación peruana debido, entre otras razones, a la firma de un convenio de cooperación con Francia gracias al cual este país envió grupos de investigadores y docentes para difundir y capacitar en el nuevo enfoque pedagógico. El grupo de técnicos del Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo de la Educación (INIDE)[18] llevó adelante una propuesta curricular basada en este enfoque y, además, elaboró y distribuyó materiales de capacitación inscritos en esta tendencia. Los textos escolares que se publicaron en esa década privilegiaban el contenido conceptual, la teoría de conjuntos, las estructuras algebraicas y el método axiomático. Estos textos poco tenían que ver con la realidad cotidiana de los estudiantes, pues se centraban en el estudio de hechos, conceptos y estructuras fundamentales de la matemática.

La Matemática Moderna no tuvo el éxito que esperaban sus propulsores. Con la publicación de *Why Johnny can't add?*, obra del matemático estadounidense Morris Kline (1984), se agudizó el debate sobre la pertinencia de este enfoque. La Matemática Moderna no tardó en ser cuestionada y en desaparecer de la mayoría de los países que la habían incorporado a sus sistemas educativos. En nuestro país, este enfoque tampoco logró los objetivos que se planteaba, motivo por el cual los programas y currículos retornaron a la división clásica del contenido matemático escolar (aritmética, álgebra, geometría, trigonometría). Ante la ausencia de un enfoque pedagógico, la mayoría de docentes empezó

17. Grupo de influyentes matemáticos franceses que se interesaron por plantear modelos y reformas a la educación matemática de su época. Entre sus integrantes podemos mencionar a Jean Dieudonné y a Hugo Weyl.
18. Dependencia del Ministerio de Educación del Perú en esa época.

a trabajar asociando la matemática con la capacidad de calcular. En primaria, lo fundamental era el dominio de los cálculos aritméticos, mientras que en secundaria, el de los cálculos algebraicos, geométricos y trigonométricos. Este regreso a lo básico prevalece hasta hoy en la práctica docente, lo que confirman los estudios que señalan que casi el 85% de los ejercicios resueltos por los estudiantes en sus cuadernos de trabajo y de clase se centran en la aplicación de algoritmos convencionales (Cueto y otros 2003).

Hacia finales de la década de 1980 y durante la década de 1990, el empleo de las calculadoras y de las computadoras empieza a difundirse en nuestro país. Los educadores matemáticos veían entonces con preocupación su inclusión en la educación básica. Se cuestionaba la idea de si lo primordial de una enseñanza matemática era el dominio de los cálculos aritméticos y algebraicos. Algunos docentes llegaron, incluso, a temer que en un futuro cercano pudiesen ser reemplazados por las calculadoras o por las computadoras.

En el contexto mundial, la mayoría de matemáticos de la década de 1990 ya no se dedica al estudio de la ciencia pura y, cada vez con mayor frecuencia, se incorporan matemáticos a los campos financiero, industrial y comercial. En consecuencia, las especialidades de matemática privilegian la matemática aplicada y los artículos de la disciplina versan, en su mayoría, sobre las aplicaciones de la matemática en situaciones reales. Es en esta perspectiva que el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) de Estados Unidos promovió una discusión entre investigadores del mundo docente y matemático que se tradujo en la publicación del documento *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989), en el cual se propuso cuatro estándares fundamentales para una educación matemática de calidad:

- Resolución de problemas
- Comunicación
- Razonamiento
- Conexiones matemáticas

Dentro de este marco del debate mundial, en el Perú se inició la reforma de la Educación Básica. Los programas curriculares de inicial, primaria y secundaria se revisaron y se propusieron nuevos enfoques para la educación. En el caso de la matemática, el MED adoptó el enfoque centrado en la resolución de problemas, declarando que:

> El proceso de solución de problemas es esencial en el aprendizaje matemático, no como motivación inicial o aplicación final, sino como el medio mismo por el cual se aprende. Es precisamente la capacidad resolutiva que logren los niños y niñas lo que indicará la calidad de la educación matemática que se imparta en nuestro país; por ello constituye el quehacer fundamental en la escuela. (MED 2000a: 59)

La Estructura Curricular Básica de Educación de Menores se generalizó en el año 1999 y el Ministerio de Educación promovió procesos de capacitación que partían del enfoque de resolución de problemas para la enseñanza y aprendizaje de la matemática. En el caso de la educación secundaria, tanto la reforma aplicada en la Modernización de la Educación Secundaria, iniciada en 1996, como la Nueva Secundaria, que comienza en 2001 y se generaliza en 2003, se desarrollaron a la luz del enfoque de resolución de problemas. Asimismo, los diseñadores del currículo destacaron el papel de la matemática como medio de comunicación en primaria y en secundaria. Este proceso es muy importante pues la matemática permite comunicar ideas e información en forma «económica, potente y sin ambigüedades» (Cockcroft 1985). Así, en el Diseño Curricular Básico de

Educación Secundaria (DCB —MED 2003), en el área de Matemática, se afirma que los estudiantes deben aprender a valorar la matemática, a sentirse seguros de su capacidad, a resolver problemas, a comunicarse y a razonar matemáticamente.

Como se puede observar, el enfoque actual se centra en el desarrollo de las capacidades del individuo que le permitirán resolver problemas, construir razonamientos válidos y comunicar información mediante el uso de conceptos y términos matemáticos. No obstante, se debe señalar que estas tres capacidades, si bien son las más amplias y complejas de desarrollar, no pueden dejar de lado el uso y aplicación de rutinas y procedimientos matemáticos estandarizados.

En la actualidad, se utilizan contenidos de carácter matemático cada vez con mayor frecuencia para presentar y analizar información, para tomar decisiones y para solucionar situaciones en la industria y en el comercio. Resulta claro que todo ciudadano de hoy debe poseer un bagaje cultural de conocimientos y procedimientos matemáticos que le permita comprender los procesos de cambio, la dinámica del azar, las situaciones cuantitativas y las representaciones espaciales, entre otros fenómenos. Por este motivo, resulta muy importante involucrar en forma progresiva a la población en el conocimiento y dominio de las capacidades y contenidos matemáticos.

Las cuatro capacidades mencionadas (resolución de problemas, razonamiento,[19] comunicación y aplicación de algoritmos), trabajadas en forma sistemática en combinación con los contenidos adecuados y aplicados en contextos diversos, serán de gran utilidad para el estudiante al enfrentar los diversos retos que la vida laboral y académica le presentan.

Un buen desempeño matemático contribuye al desarrollo de las sociedades, pues aporta tanto a su avance científico y tecnológico como a su evolución económica y política. Precisamente por ello, los países de mayor desarrollo científico y tecnológico prestan especial atención a la evaluación y perfeccionamiento de esta área. Por otro lado, se puede afirmar que, en el ámbito personal, el aprendizaje de la matemática contribuye con la formación integral del individuo desde diversos aspectos: cognitivo, comunicacional, instrumental y cultural, entre otros.

Por estas razones, la EN 2004 ha propuesto, en el área de Matemática, evaluar el nivel de incorporación de estos aprendizajes en el sistema educativo nacional. De esta manera se podrá proveer a los organismos, instituciones e investigadores del sector, a la luz de los resultados y su respectivo análisis, de información útil y oportuna como insumo para la mejora de la calidad de la educación matemática de los estudiantes peruanos.

19. Aunque se considera de gran importancia la capacidad de razonamiento, las características de la evaluación que realiza la UMC no permiten analizar esta capacidad con el rigor requerido.

Delimitación del campo a evaluar

En la EN 2004 se evalúa la *formación matemática* de los estudiantes que es definida de la siguiente manera:

> La formación matemática es el dominio de **habilidades** y **conocimientos matemáticos** útiles para **desempeñarse con eficacia** ante **situaciones problemáticas** novedosas o rutinarias, cuya solución requiera **la puesta en práctica** de dichas habilidades y conocimientos.

A continuación se precisan algunos aspectos de esta definición:

…**habilidades matemáticas**: El término *habilidades* se refiere tanto al conjunto de estrategias de resolución como a los procedimientos operativos comunes que un individuo utiliza deliberadamente, con cierto control y orden lógico, para solucionar problemas.

…**conocimientos matemáticos**: Las habilidades matemáticas no se pueden desarrollar sin los contenidos conceptuales propios de la disciplina. Estos han sido seleccionados de las estructuras y diseños curriculares vigentes (ECB y DCB) e incluyen tanto el componente semiótico de la matemática (sintaxis, símbolos, notaciones, etc.) como los elementos constitutivos de la estructura matemática (definiciones, axiomas, lemas y teoremas). En las pruebas del área de Matemática de la EN 2004 se consideraron tanto los contenidos de mayor aplicabilidad en la vida cotidiana del estudiante como aquellos indispensables para seguir aprendiendo.

…**desempeñarse con eficacia**: La matemática ayuda al individuo a desenvolverse en el mundo actual, a comunicarse en forma eficiente, a elaborar juicios bien fundamentados y a desarrollar la capacidad humana de resolver problemas.

…**situaciones problemáticas**: Las situaciones problemáticas elegidas para esta evaluación se pueden clasificar en dos grandes categorías: situaciones de contexto realista y situaciones de contexto matemático.

…**la puesta en práctica**: La matemática debe ser entendida como un método antes que como un conjunto de contenidos. Por esta razón, una educación matemática de calidad debe brindar oportunidades para que los estudiantes:

- desarrollen su capacidad de utilizar las herramientas matemáticas para comunicar de manera óptima ciertas ideas e información;
- identifiquen aquellas situaciones susceptibles de ser expresadas en lenguaje matemático y las resuelvan haciendo uso de medios matemáticos;
- desarrollen habilidades matemáticas para el dominio de diversos conocimientos matemáticos que les permitan desempeñarse con éxito al resolver situaciones matemáticas novedosas o habituales o situaciones cotidianas; y
- comprendan y comuniquen información de tipo matemático, establezcan y realicen conexiones entre los conceptos matemáticos y las otras disciplinas.

Dimensiones del modelo de evaluación

El modelo de evaluación del área de Matemática considera tres dimensiones para medir el desempeño de los estudiantes: capacidades, contenidos y contextos. A continuación se desarrolla cada una de estas dimensiones.

CAPACIDADES

Las capacidades son habilidades matemáticas complejas que el estudiante debe poner en práctica al enfrentarse a las preguntas de la prueba que han sido elaboradas buscando situaciones similares a las que se le podrían presentar en su vida cotidiana. En las pruebas de matemática se han considerado tres capacidades: resolución de problemas, comunicación matemática y aplicación de algoritmos. A continuación se explican estas capacidades.

Resolución de problemas

Cuando tienen que seleccionar las golosinas que pueden comprar con su propina, o estimar la longitud de un arco de fútbol, o decidir la ruta más corta para ir al colegio, los estudiantes de primaria se están enfrentando a situaciones que pueden resolverse haciendo uso de procedimientos y contenidos matemáticos.

El desempeño eficaz en matemática está asociado con la capacidad de resolver problemas, pues es por medio de ellos que se introducen conceptos nuevos, se aplican los ya aprendidos o se realizan conexiones entre estos para formar redes conceptuales más amplias y afianzar los conocimientos.

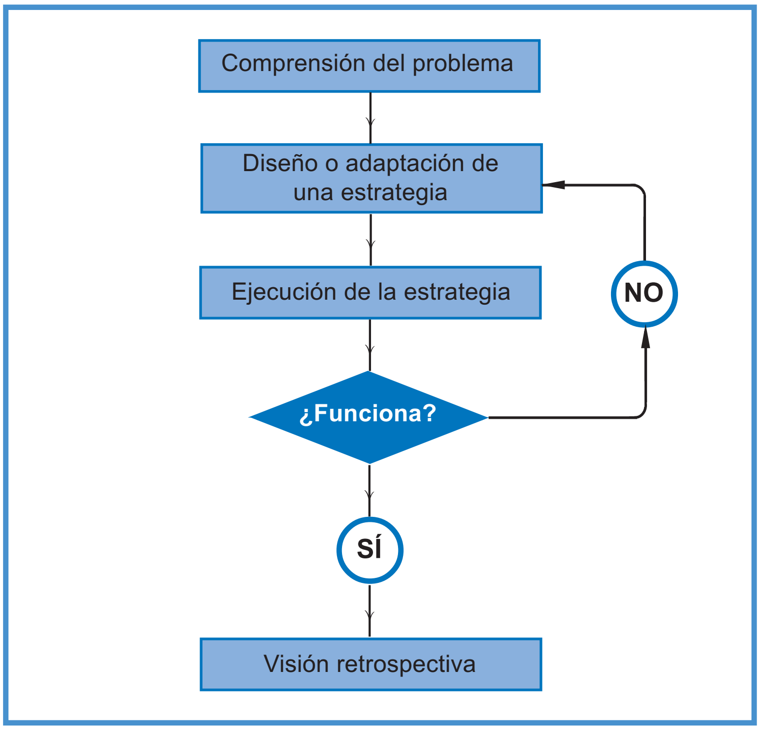
La elaboración de estrategias personales para resolver problemas genera en los estudiantes confianza en sus posibilidades de hacer matemática, estimula su autonomía y creatividad, pone de manifiesto el grado de comprensión de los conocimientos y facilita mecanismos de transferencia a otras situaciones.

En la EN 2004 se entiende como *problema* aquella situación que plantea una cuestión de contenido matemático inscrita en la matemática escolar y cuyo método de solución no es accesible en lo inmediato al sujeto que intenta responderla (bloqueo). Este deberá buscar, investigar y establecer relaciones para hacer frente a la nueva situación. Estas situaciones se presentan en forma impresa y están referidas a contextos matemáticos y a contextos propios de la vida real. Para resolverlas, el individuo deberá leer, comprender e interpretar la situación presentada; diseñar una estrategia novedosa o adaptar una ya conocida para resolverla; llevar a cabo su estrategia, paso a paso; y, finalmente, interpretar sus resultados matemáticos dentro del contexto de la situación presentada. Las fases o etapas por las que atraviesa el estudiante en la resolución de los problemas pueden dividirse en cuatro:

- Fase 1: Comprensión del problema
- Fase 2: Diseño o adaptación de una estrategia
- Fase 3: Ejecución de la estrategia y control
- Fase 4: Visión retrospectiva

Estas cuatro fases del proceso mental y actitudinal que atraviesa un individuo al momento de resolver un problema se pueden esquematizar así:

Proceso de resolución de un problema



En la fase de comprensión del problema, el estudiante debe leerlo atentamente; si es posible, debe expresarlo en sus propias palabras, aunque su lenguaje no sea riguroso. Intentará hacerse una imagen mental de la situación, buscando casos particulares o, tal vez, simulando la situación o traduciéndola a un diagrama visual que le ayude a comprender mejor la interrelación entre la información presentada y la solicitada. En este diálogo consigo mismo, el estudiante tratará de identificar la incógnita, los datos, las condiciones y si estas son suficientes, si son necesarias o si son complementarias.

En la fase de diseño o adaptación de una estrategia, el estudiante comienza a explorar la situación. En esta fase resulta útil establecer una lista de estrategias heurísticas. Dependiendo de la estructura del problema, el estudiante podrá elegir la más adecuada entre las aprendidas anteriormente o combinar en forma creativa estrategias para crear una novedosa que le señale un camino plausible hacia la solución del problema. Esta es una de las fases más importantes en el proceso de solución de problemas que depende mucho de la base de conocimientos y de la calidad del pensamiento del estudiante.

Luego de haber decidido el camino que se va a seguir y de comprender qué se pretende lograr, se procede a ejecutar la estrategia de solución. Es en este momento cuando entran a tallar los mecanismos de regulación mental y la habilidad para superar los bloqueos. El estudiante, al ejecutar su plan, puede observar que este no lo conduce a la solución, entonces tendrá que tomar una decisión: seguir por el camino elegido o volver a la fase anterior y elegir una estrategia distinta. Esto último es bastante difícil para aquellos que no tienen experiencia en resolver problemas, pues los mecanismos de control del proceso son muchas veces bloqueados desde la misma escuela. La ocurrencia de este bloqueo se debe a que, usualmente, el docente presenta en la pizarra los problemas ya resueltos y «en limpio» y siempre muestra a los estudiantes la estrategia que llevará a la solución.

Para que el estudiante pueda seguir con el proceso de resolución, la actitud tiene aquí un rol crucial: es importante no abandonar una estrategia antes de revisar sus diversos aspectos y perseverar, pero sin perder de vista que existen otras estrategias que, eventualmente, podrían ser útiles en este momento.

Cuando se ha obtenido una solución (no una respuesta, pues podría haber varias o ninguna), se ingresa a la cuarta fase en la que se efectúa una reflexión acerca del proceso de solución, se hace una verificación de la solución y se puede modificar el problema o generalizar los resultados. Esta fase hace referencia a procesos metacognitivos. Recientes investigaciones afirman que es posible mejorar las habilidades para resolver problemas si se mejora el aspecto metacognitivo. Por esta razón, la visión retrospectiva es considerada por muchos como la fase más importante en el proceso heurístico.

La EN 2004 pretende evaluar en qué medida el estudiante:

> Resuelve situaciones problemáticas susceptibles de ser abordadas matemáticamente, mediante diversas estrategias heurísticas y algoritmos, convencionales o no, considerando diferentes contextos y niveles de dificultad.

Comunicación matemática

En la actualidad, las publicaciones de carácter masivo —como periódicos, revistas o folletos publicitarios— incluyen en la presentación de la información que brindan diagramas geométricos, gráficos estadísticos, tablas numéricas y otros esquemas de tipo matemático que permiten acceder a la información de una manera compacta, sintética y precisa. Debido a este aumento en el uso de símbolos y conceptos matemáticos en los procesos de comunicación social, la educación básica en matemática debe incorporar la codificación y decodificación de estos elementos, su interpretación y la capacidad de argumentar utilizando fundamentos de base matemática.

La EN 2004 considera la comunicación matemática como aquella capacidad que faculta al estudiante para interpretar, relacionar, clasificar, representar y recodificar tanto la información que le presenta el medio como la que necesita producir para responder a distintas situaciones. La matemática cobra cada vez mayor importancia como un lenguaje preciso por medio del cual se intercambia gran cantidad de información. Actualmente, la información cuantitativa y sus representaciones tienen una presencia cada vez más significativa en la vida cotidiana, por lo que adquiere gran importancia la habilidad para expresar las ideas en forma coherente y comunicarlas a otras personas.

Asimismo, el lenguaje matemático es un poderoso medio para comprender y comunicar ideas de la ciencia y de la tecnología, pues permite presentar dichas ideas en forma verbal, gráfica o simbólica (o mediante combinaciones de estos lenguajes).

Los procesos de comunicación también ayudan a construir significados, a fijar nuevas nociones y a hacer públicas las propias. Representar, hablar, escuchar, escribir y leer son destrezas comunicativas básicas. La puesta en práctica de estas capacidades ha de constituir una forma fundamental de expresar ideas matemáticas en todos los niveles y, en especial, en los primeros grados escolares. Por ello, los estudiantes deben ser capaces de construir enunciados estructurados lógicamente, que argumenten o sustenten un procedimiento o un razonamiento.

La comunicación es un elemento fundamental del aprendizaje de la matemática, pues los estudiantes se convertirán en mejores pensadores matemáticos en la medida en que desarrollen una comunicación más clara y coherente, mediante el uso correcto y apropiado del lenguaje matemático y de los símbolos para expresar ideas de manera precisa.

La EN 2004 pretende evaluar en qué medida el estudiante:

- recibe y comunica información de forma clara y eficiente mediante el uso del lenguaje matemático; y
- argumenta de manera fundamentada, sobre la base de conocimientos matemáticos, las afirmaciones que realiza.

Aplicación de algoritmos

Cuando aprenden las instrucciones para manejar una computadora, siguen las reglas de un determinado juego o los pasos para preparar un postre, los estudiantes están utilizando algoritmos. Los algoritmos son un conjunto de acciones (operaciones y procedimientos), pasos secuenciales previamente establecidos y formas definidas de acción para llegar a resolver diversas situaciones. Se trata siempre de formas de proceder prefijadas, efectivas y sistemáticas que se orientan al logro de un objetivo específico.

En la vida cotidiana, se puede encontrar continuamente algoritmos y es necesario enfrentarlos de manera adecuada. Por ejemplo, un estudiante debe alistarse cada mañana para ir a la escuela, tomar sus alimentos, seleccionar los útiles y materiales correspondientes al horario de clases de ese día, etc. Cada una de estas actividades puede ser realizada mediante una secuencia ordenada de pasos, en la que es muy importante poseer fluidez operacional, es decir, tener y usar métodos eficientes y precisos para efectuar el algoritmo.

La elaboración y diseño de algoritmos es una etapa indispensable para la automatización: lo que ayer era un problema hoy es un algoritmo, lo que hoy se ha convertido en algoritmo mañana podrá ser ejecutado por máquinas con gran eficiencia y eficacia.

Los algoritmos son importantes al resolver un problema, ya que, establecida la estrategia de solución, sin su conocimiento y manejo adecuado probablemente no se podría llegar con éxito al término del proceso de solución. Desde esta perspectiva, los algoritmos deben ser entendidos como medios para resolver problemas y no como fines en sí mismos.

En la EN 2004 se ha incluido la aplicación de algoritmos porque constituyen un conjunto de herramientas útiles para solucionar una diversidad de problemas.

Es necesario evaluar en qué medida los estudiantes han aprendido a utilizar y seleccionar determinados algoritmos para poder enfrentarse adecuadamente a los problemas que se les presentan.

CONTENIDOS

Los *contenidos* son las unidades de información (definiciones, hechos, nombres, conceptos, etc.) pertenecientes al área curricular. Estos contenidos han sido seleccionados de la ECB (MED 2000a y 2000b) y reagrupados en cuatro categorías: número y cantidad, álgebra y funciones, espacio y forma, y estadística y probabilidad.[20] A continuación se detalla cada una de estas categorías.

Número y cantidad

Las competencias numéricas requeridas por los futuros ciudadanos no pueden limitarse al aprendizaje de las operaciones básicas y al trabajo con expresiones algebraicas. Es necesario que posean las habilidades necesarias para interpretar los números usados para describir procesos complejos, razonar con conjuntos de variables interrelacionadas, crear e interpretar de manera crítica fenómenos cuando no existe un modelo preestablecido, etc.

Los estudiantes necesitan desarrollar una capacidad flexible para identificar relaciones críticas en situaciones nuevas y expresarlas en una forma simbólica eficaz. Asimismo, necesitan saber usar herramientas para el procesamiento de la información e interpretar los resultados de estos cálculos.

Los estudiantes deben comprender las propiedades fundamentales de los sistemas numéricos y la vinculación entre estos sistemas matemáticos y las situaciones de la vida real en que están incluidos. Deben también describir e interpretar estructuras cuantitativas mediante representaciones verbales, simbólicas y gráficas. Asimismo, deben ser capaces de efectuar cálculos, tanto exactos como aproximados, en los que intervienen ideas aritméticas por medio de diversos métodos (mental, lápiz y papel, calculadora, computadora), y de aplicar sus destrezas en el manejo de los números para resolver problemas.

En la EN 2004 se evaluaron contenidos relacionados con los diversos conjuntos numéricos (N, Z, Q y R), las operaciones básicas, sus propiedades y algoritmos; las razones, proporciones y porcentajes; los patrones numéricos, las relaciones entre los números, sus diversas formas de representación y equivalencias; y las magnitudes y sus unidades.

Álgebra y funciones

El álgebra puede ser definida como el arte de descubrir las leyes o los patrones que rigen la relación entre diversas variables con independencia de los valores involucrados. El álgebra es el lenguaje con el que se comunica la mayor parte de la matemática. Permite transformar expresiones matemáticas complejas en otras equivalentes y más sencillas. Es una herramienta poderosa pues permite generalizar situaciones diversas mediante la simbolización. Ofrece, también, un medio para trabajar con conceptos en un nivel abstracto, lo que facilita su comprensión y sus relaciones.

El estudio de patrones numéricos y geométricos es deseable en una formación matemática inicial, pues facilita en el estudiante la incorporación de procesos más complejos como la simbolización. Es un mito pensar que el álgebra solo se debe enseñar en secun-

---

20. Esta forma de agrupar los contenidos responde al enfoque fenomenológico planteado en el año 2000 por el Comité de Planes de Estudio del Mathematical Science Education Board (MSEB) y asumido en la evaluación PISA. (Para mayor información, véase Steen 1998.)

daria: el docente de primaria puede y debe incorporar tareas que establezcan las bases para el estudio de la cantidad en general.

La identificación y la expresión verbal de diversos patrones numéricos y geométricos ayudarán al estudiante en el tránsito desde la aritmética y el estudio concreto de la cantidad hacia una simbolización efectiva y hacia la construcción del concepto de variable.[21]

La noción de función constituye una idea unificadora de gran importancia en la matemática. Las funciones son correspondencias especiales entre los elementos de dos conjuntos. Esta noción es importante porque constituye la representación matemática de muchas situaciones de entrada – salida que se encuentran en el mundo real. En ocasiones, las personas hacen uso de las funciones aun cuando no son conscientes de ello. Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver diversas situaciones de la vida diaria como problemas de finanzas, economía, estadística, ingeniería, medicina, química y física, astronomía o geología y, en general, cualquier situación en la que haya necesidad de relacionar variables.[22]

En la EN 2004 este núcleo conceptual no se evaluó en primaria, debido a que no se trabaja el álgebra en este nivel; solo se consideró para la evaluación en secundaria (grados tercero y quinto).

Espacio y forma

El manejo del espacio y de la forma provee a las personas de herramientas tanto para realizar, representar y estructurar sus actividades y movimientos, como para organizar su pensamiento y su razonamiento. El logro de esta estructuración será posible si el sujeto es capaz de comprender las propiedades, posiciones, representaciones y transformaciones de los objetos y las relaciones entre ellos, lo cual implica comprender las relaciones entre formas y representaciones visuales.

En la actualidad, es necesario aplicar nociones de espacio y forma en diversas actividades, como la representación de objetos tridimensionales en dibujos bidimensionales (diagramas, esquemas, planos, etc.) y el diseño de formas de representación de información (elaboración de diagramas, secuencias, etc.). Se puede apreciar la aplicación de nociones de espacio y forma en actividades tan cotidianas como la elección de la ruta adecuada para ir de un lugar a otro, la estimación de la capacidad de una mochila o del tamaño del papel para envolver un regalo, la elección de la pieza que falta en un rompecabezas, etc.

En la EN 2004 se consideraron los aspectos espaciales de los sólidos y de las figuras (objetos geométricos); sus elementos, relaciones y propiedades; la representación e interpretación de objetos tridimensionales en el plano; los patrones geométricos como modelo de muchos objetos y fenómenos; el manejo del vocabulario básico estandarizado; la orientación espacial; la comparación de figuras geométricas; y el cálculo de medidas tales como área, volumen y perímetro.

---

21. Para actividades con patrones numéricos, véase Casas 2005.

22. Para actividades con funciones en primaria, véase Shell Centre for Mathematical Education (1990).

Estadística y probabilidad

La estadística permite organizar, representar y realizar el análisis e interpretación de datos para elaborar conclusiones y tomar decisiones sobre una base científica. También posibilita la predicción de los comportamientos de determinados fenómenos.

En una sociedad como la actual en la que la información está en constante crecimiento, la estadística se convierte en una herramienta muy útil para recolectar, describir y organizar dicha información. Así, son numerosas las aplicaciones de métodos estadísticos en las diferentes áreas de la actividad humana. Por ejemplo: la tabla de posiciones en un campeonato deportivo; el conteo para elegir a delegados estudiantiles; la lista de asistencia; el cálculo de promedios; la elaboración de censos y cuadros de distribución de la población por edades, tallas, preferencias de programas; etc.

Resulta imposible pronosticar el futuro con absoluta certeza, sin embargo, la necesidad de entender la incertidumbre hizo necesario buscar medios y formas de administrar el azar, así nace la teoría de la probabilidad. En muchos casos, se puede tener algún conocimiento sobre los posibles resultados de una decisión. Si se organiza esta información y se analiza de manera sistemática, se podrá reconocer las suposiciones, comunicar los razonamientos y tomar una decisión más acertada de lo que se lograría recurriendo a un método que no fuese científico.

En la EN 2004 este núcleo conceptual se evaluó mediante preguntas referidas a la recolección, organización, presentación y análisis de datos, el análisis combinatorio y la probabilidad. En el caso de primaria, este núcleo conceptual se evalúa solo en sexto grado.

CONTEXTOS DE APLICACIÓN

Un aspecto importante de la formación matemática es el desarrollo en el estudiante de las capacidades que le permitan usar y hacer matemática en gran variedad de situaciones. La EN 2004 ha considerado dos tipos de contexto: el intramatemático y el extramatemático. El primero trata de las tareas del universo matemático, utiliza sus propios símbolos y presenta objetos matemáticos sin referirlos o inscribirlos en el mundo real. El segundo ubica los objetos matemáticos en relación con los objetos de la vida del individuo. Los contextos extramatemáticos pueden clasificarse de acuerdo con el nivel de uso o de familiaridad que tengan para el individuo.

Con independencia de su distancia de las situaciones propias de la vida cotidiana de los estudiantes, las preguntas de la EN 2004 están basadas en contextos auténticos, es decir, que es probable que ocurran en el mundo real. Si la educación matemática debe preparar a los estudiantes para que sean ciudadanos activos e informados, tiene que tratar con contextos reales tales como los que se presentan en las noticias, las situaciones de compraventa y la elaboración de presupuestos para realizar un trabajo. Esto no excluye, sin embargo, contextos ficticios o artificiales basados en representaciones estilizadas de problemas como, por ejemplo, sistemas ficticios de medidas y de monedas, juegos matemáticos, acertijos, etc.

PARTE II

SEGUNDO GRADO DE PRIMARIA

1 Importancia y alcances de la evaluación

Uno de los grandes retos que asumió la EN 2004 fue la evaluación de segundo grado de primaria en las áreas de Comunicación Integral y de Lógico Matemática. Evaluar a estudiantes de esta edad supuso un diseño particular de las pruebas y un tratamiento especial en la aplicación de los instrumentos, sobre todo porque es en los primeros grados cuando se empiezan a adquirir las habilidades básicas de lectura y escritura.

La elección del segundo grado de primaria se fundamenta en la estructura curricular básica (ECB) que establece que en este grado se espera que los estudiantes hayan adquirido el dominio básico de la lectoescritura y de algunos conceptos matemáticos fundamentales. Estas habilidades son la base de futuros aprendizajes que permitirán a los estudiantes obtener, de manera efectiva, el bagaje cultural que necesitan para integrarse a la vida social y al mundo del trabajo. Tanto el aprendizaje de la lectoescritura como el de la numeración y del cálculo básico son procesos que deben producirse en un determinado momento del desarrollo evolutivo del niño. Diversos estudios han comprobado que, si estos aprendizajes ocurren a destiempo, será difícil que el individuo los incorpore de manera tal que pueda utilizarlos con fluidez.

En el caso del área de Lógico Matemática, las capacidades que la ECB propone para este ciclo son fundamentales para el desarrollo del razonamiento lógico del estudiante. Por ejemplo, las capacidades relacionadas con la comprensión del significado de operaciones como la adición y la sustracción son la base para el trabajo posterior con las operaciones de multiplicación y división. Asimismo, si el tema de la organización espacial no es trabajado a esta edad, puede originar en el estudiante dificultades relacionadas con su orientación en el espacio y con el dominio del entorno tridimensional y sus representaciones en el plano. De otro lado, el aprendizaje de estrategias heurísticas básicas que se debe llevar a cabo en este ciclo (tales como el empleo de diagramas para representar o comprender una situación, la búsqueda y el uso de patrones, o la identificación de información relevante) provee a los estudiantes de un sólido método de trabajo para enfrentarse a nuevos problemas, a la vez que los ayuda a mejorar sus niveles de razonamiento lógico. Como puede apreciarse, muchas de las habilidades que empiezan a adquirirse en estos primeros ciclos se irán desarrollando conforme avancen los grados de escolaridad, pues el ámbito matemático es cada vez más amplio y requiere de procesos mentales más complejos.

Dado el tipo de evaluación que se realiza, no se han podido incluir actividades relacionadas con el cálculo mental, la medición o la representación de conceptos mediante el empleo de material concreto, a pesar de lo importantes que son para el aprendizaje de la matemática. Por ejemplo, el uso de material concreto brinda al estudiante soportes para visualizar relaciones e invariantes y lo provee de esquemas analógicos y dinámicos que facilitan la comprensión de los conceptos abstractos. De igual manera, el cálculo mental promueve la autonomía del estudiante, estimula su creatividad y constituye la base de la capacidad de estimar.

Por todas estas razones, la evaluación de este grado ofrece datos importantes que sirven como herramientas para analizar y predecir el posible futuro rendimiento de los estudiantes. En ese sentido, se pretende identificar tempranamente sus principales dificultades, proponer estrategias que permitan a los docentes mejorar su propia práctica pedagógica y, en general, brindar información a partir de la cual se puedan tomar decisiones oportunas de política educativa.

Capacidades curriculares evaluadas en la EN 2004
en segundo grado de primaria

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	• Resuelve situaciones problemáticas reales de su entorno cuya solución requiere identificar y elaborar progresiones aritméticas, o establecer relaciones de orden entre grupos de números naturales menores que cien. • Resuelve problemas aditivos de enunciado verbal y contexto realista cuya solución requiere la elaboración de una estrategia adecuada y el uso de una operación (adición, sustracción) con números de hasta dos cifras.
COMUNICACIÓN MATEMÁTICA	• Identifica y ubica posiciones de objetos (direcciones y niveles) con relación a sí mismo y a otros puntos de referencia. • Clasifica objetos de acuerdo con uno o dos atributos e indica el criterio de clasificación utilizado, seria objetos de acuerdo con una propiedad o característica determinada. • Identifica figuras y cuerpos geométricos (rectángulo, cuadrado, triángulo, círculo, cubo y cilindro) y sus elementos (lados, caras, vértices o esquinas), relacionándolos con objetos de su entorno. • Aplica los principios del sistema de numeración decimal para interpretar y representar de diversas formas números naturales de hasta tres dígitos (unidades, decenas y centenas).
APLICACIÓN DE ALGORITMOS	• Aplica algoritmos convencionales de cálculo para hallar el resultado de operaciones de adición y sustracción con números naturales hasta 999. • Establece relaciones de orden entre grupos de números naturales hasta 99.

Es importante señalar que todo lo que se reporta en este informe acerca de resultados y dificultades de los estudiantes corresponde únicamente a los aspectos evaluados y no pretende ir más allá de lo considerado en esta evaluación.

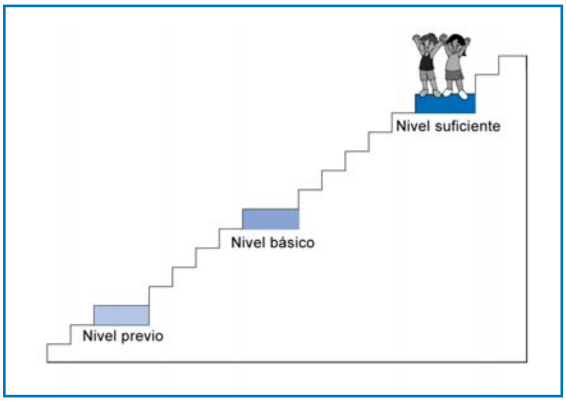
2 ¿Qué pueden hacer los estudiantes en cada nivel de desempeño?

En este capítulo se describen los niveles de desempeño en el segundo grado de primaria para el área de Lógico Matemática y las tareas que pueden realizar los estudiantes que se encuentran en cada nivel. Además, se incluyen algunos ejemplos ilustrativos de cada nivel luego de cada pregunta. Asimismo, se comentan algunos aspectos de esta (qué evalúa, qué pueden hacer los estudiantes para resolverla) y se ofrecen ejemplos de respuestas de los estudiantes. Se presenta también una ficha técnica en la cual se indica la capacidad matemática que evalúa la pregunta, su contenido matemático, el contexto en el que se sitúa, su formato (selección múltiple, respuesta corta, respuesta extensa, entre otros), el nivel de desempeño y su dificultad Rasch.[23]

2.1. Lo que hacen los estudiantes que alcanzaron el nivel suficiente

NIVEL SUFICIENTE

Que un estudiante se ubique en este nivel significa que ha desarrollado adecuadamente las capacidades correspondientes al grado evaluado.



Los estudiantes en este nivel demuestran un manejo suficiente y necesario de las capacidades evaluadas: exhiben las habilidades que se esperan de un estudiante que está por terminar segundo grado de primaria. No son estudiantes avanzados ni destacados los que predominan en este nivel, sino adecuados para el grado; por ello, al finalizarlo, todos o la gran mayoría de los estudiantes deberían encontrarse en este nivel.

Los estudiantes ubicados en el nivel suficiente pueden calcular la suma de dos números (de tres cifras cada uno) con una o dos transformaciones, en cualquiera de las posiciones, y calcular restas de números de tres cifras con una transformación. Estos estudiantes pueden completar progresiones aritméticas con razones pequeñas y recodificar números de dos cifras de su representación simbólica a su descomposición en decenas y unidades.

23. Es el puntaje que determina la ubicación de la pregunta en la escala de dificultad. En esta escala, en la medida en que aumenta el puntaje, aumenta también la dificultad de la pregunta.

Respecto de la gestión y administración del entorno, dominan la lateralidad y combinan relaciones espaciales para ubicar objetos. Además, identifican tanto las formas cúbicas presentes en su entorno como triángulos y cuadrados en diversas posiciones y contextos. También pueden clasificar objetos de acuerdo con dos atributos.

Respecto de la estructura aditiva, esta se encuentra en proceso de desarrollo pues resuelven diversos tipos de problemas aditivos presentados en distintas formas. En general, no dependen de la forma de presentación para resolverlos; es decir, estos estudiantes resuelven de manera adecuada los problemas que se presentan como un texto continuo y aquellos que se proponen como historieta.

TAREAS QUE REALIZA EL ESTUDIANTE EN EL NIVEL SUFICIENTE

- Calcula la suma de dos números de tres cifras «llevando»; la suma de dos números de dos cifras presentados en forma horizontal; restas del tipo 15 – 8, 12 – 7, 13 – 4, etc.; restas con minuendos de tres cifras y sustraendos de dos o tres cifras en las que se requiere una transformación.
- Calcula el término faltante en progresiones aritméticas de razones: +3, –3, –2.
- Identifica formas cúbicas en objetos de su entorno, todos los tipos de triángulos en diversas posiciones, el cuadrado en un contexto cotidiano, la lateralidad en representaciones de seres humanos, objetos que se encuentran «delante de» y «detrás de» uno referencial, y objetos de acuerdo con condiciones dadas.
- Recodifica números de dos cifras de su representación simbólica a su descomposición en decenas y unidades, o viceversa.
- Clasifica objetos de acuerdo con dos atributos que pueden ser de uso cotidiano, de cantidad y ubicación, entre otros.
- Resuelve problemas de estructura aditiva de Cambio 1, Cambio 2, Cambio 4, o Igualación 1.[24]

A continuación, se presentan algunos ejemplos de preguntas que pueden resolver los estudiantes que se ubican en el nivel suficiente.

24. Para la descripción de estas categorías ver Anexo 1.

M2P01

Suficiente

Escribe en el $\square$ el resultado de la operación.

$$\begin{array}{r} 657 \\ +\ 299 \\ \hline \square \end{array}$$

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Aplicación de algoritmos

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Intramatemático

Formato: Respuesta corta

Nivel de desempeño: Suficiente

Dificultad Rasch: 298

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para calcular sumas de dos números de tres dígitos en los que, si se emplease el algoritmo de cálculo convencional, se tendría que realizar la transformación de unidades en dos momentos del proceso de cálculo.

M2P02

Suficiente

Lee y observa con atención:

¿Cuántos huevos usó para preparar la torta?

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Extramatemático

Formato: Respuesta extensa

Nivel de desempeño: Suficiente

Dificultad Rasch: 358

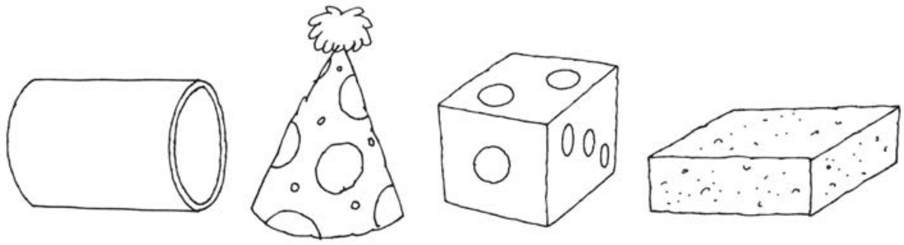
¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para resolver problemas aditivos presentados como historieta. La situación corresponde a la adaptación de un problema de transformación de estados en el que la incógnita es la cantidad de cambio.

M2P03

Suficiente

Une con una línea cada objeto con su nombre.



CUBO

CILINDRO

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Espacio y forma*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Para aparear*

Nivel de desempeño: *Suficiente*

Dificultad Rasch: 331

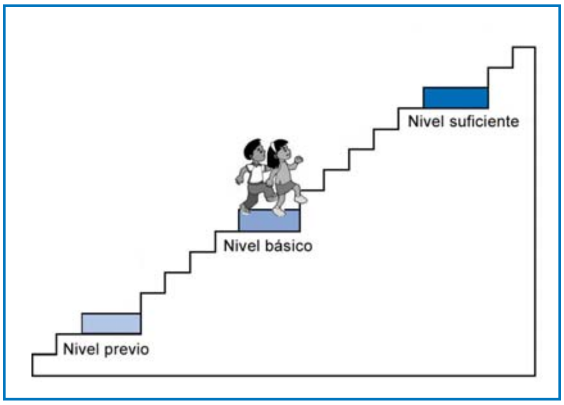
¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para identificar, mediante su denominación geométrica, sólidos geométricos relacionándolos con objetos presentes en su entorno cotidiano.

2.2. Lo que hacen los estudiantes que no alcanzaron el nivel suficiente

A continuación se describen las habilidades de los estudiantes que no alcanzaron el nivel suficiente, es decir, aquellos que se ubican en el nivel básico y en el nivel previo.

> NIVEL BÁSICO
>
> Que un estudiante se encuentre en el nivel básico significa que demuestra un desarrollo incipiente o inicial de las capacidades propias del grado.



Los estudiantes agrupados en el nivel básico demuestran un dominio incipiente, o un manejo elemental, de las capacidades evaluadas en el grado. No han logrado todavía un desarrollo adecuado de las habilidades esperadas para un estudiante que ya va a concluir el grado, sino que están en el proceso de desarrollarlas: las tienen desarrolladas en forma parcial a pesar de encontrarse a punto de terminar segundo grado de primaria.

A partir del análisis del conjunto de preguntas que este grupo de estudiantes responde correctamente, se puede afirmar que se encuentran en proceso de construcción de la estructura de orden de los números naturales, lo que les permite ordenarlos y completar progresiones aritméticas crecientes y decrecientes.

Asimismo, utilizan el algoritmo convencional para calcular sumas que requieren solo una transformación y restas sin transformación (con minuendo de dos cifras y sustraendos de una o dos cifras).

Respecto de la comprensión y administración del entorno, pueden identificar ciertos elementos de cuerpos y figuras geométricas, aunque con nombres coloquiales. Identifican triángulos equiláteros e isósceles cuando están en su posición más usual, y cuadrados en diversas posiciones. Además, han incorporado el uso del vocabulario geométrico básico para nombrar polígonos elementales (triángulo, cuadrado, rectángulo). En cuanto a la orientación espacial, estos estudiantes pueden identificar objetos que se encuentran «debajo de» y «encima de» otro objeto.

Asimismo, pueden recodificar números de dos cifras de su representación gráfica a la simbólica y en su descomposición en decenas y unidades, por lo que se puede afirmar que su sistema de numeración posicional está en proceso de construcción.

Estos estudiantes también pueden clasificar conjuntos de objetos de acuerdo con su cantidad o de acuerdo con dos atributos perceptivos, y completar una seriación gráfica elemental.

En cuanto a los problemas aditivos, los estudiantes de este nivel pueden resolver los problemas más sencillos de transformación de estados y de combinación de cantidades. No dependen de la forma en la que se presentan los problemas, pues resuelven tanto aquellos que aparecen como parte de un texto continuo como aquellos que tienen apoyo gráfico.

Tareas que realiza el estudiante en el nivel básico

- Calcula la suma de la combinación de tres sumandos (de una o dos cifras), la suma de dos sumandos con dos cifras y dos sumandos con tres cifras «llevando», y la resta con minuendo de dos cifras y sustraendo de hasta dos cifras sin transformación.
- Calcula los términos faltantes en progresiones aritméticas de razón: +5, –1.
- Ordena números de dos cifras en orden creciente y decreciente.
- Identifica triángulos en un contexto, cuadrados en diversas posiciones y contextos, los ángulos de una figura geométrica con el nombre de «esquinas», las caras del cubo en una representación en perspectiva, objetos que se encuentran «debajo» y «encima de» otro objeto, las formas cuadrangular, rectangular, triangular y circular con sus nombres.
- Recodifica números de dos cifras (decenas enteras) de su representación gráfica a su representación simbólica o a su descomposición en decenas y unidades (o viceversa).
- Clasifica objetos de acuerdo con su cantidad y de acuerdo con dos atributos: tamaño y color.
- Completa una seriación gráfica elemental.
- Resuelve problemas de estructura aditiva de Cambio 1, Combinación 1 y Cambio 2, en forma de texto o de historieta.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de preguntas que pueden resolver los estudiantes que se ubican en el nivel básico.

M2P04

Básico

Tenía 24 figuritas y compré 15 figuritas más. ¿Cuántas figuritas tengo ahora?

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Extramatemático

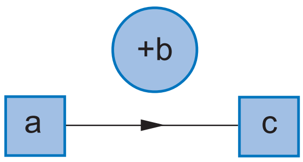
Formato: Respuesta extensa

Nivel de desempeño: Básico

Dificultad Rasch: 2.54

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para resolver problemas de texto que poseen una estructura aditiva. Este problema se considera como de transformación de estados, pues presenta una cantidad que cambia desde un estado inicial a otro final. Se proporcionan como datos la cantidad inicial y de cambio, y la cantidad final es mayor que la inicial. Los números involucrados son pequeños, pues lo que se pretende analizar es la comprensión de este tipo de estructura matemática presentada en forma verbal, y el contexto es muy cercano a la vida cotidiana de alumno. En forma esquemática lo podemos representar mediante el siguiente diagrama:

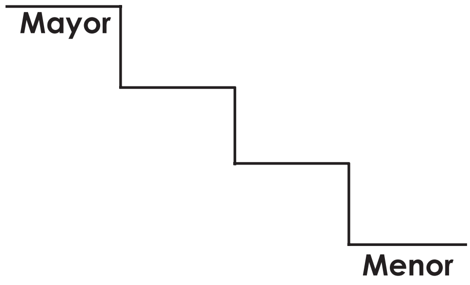


Se dan como datos a y b, la incógnita es c.

M2P05

Básico

Ordena los números 46, 48, 42, 44, del mayor al menor.



FICHA TÉCNICA

Capacidad: Aplicación de algoritmos

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Intramatemático

Formato: Respuesta corta

Nivel de desempeño: Básico

Dificultad Rasch: 288

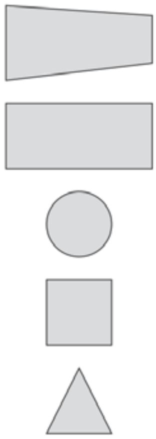
¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para ordenar números naturales en una secuencia ascendente o descendente de acuerdo con el gráfico presentado. Este tipo de tareas se puede resolver de manera algorítmica mediante las comparaciones necesarias y también recordando la secuencia numérica de conteo para, luego, relacionar el orden de esta secuencia con los números presentados.

M2P06

Básico

Une con una línea cada figura con su nombre.



CUADRADO

TRIÁNGULO

CÍRCULO

RECTÁNGULO

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Espacio y forma*

Contexto: *Intramatemático*

Formato: *Para aparear*

Nivel de desempeño: *Básico*

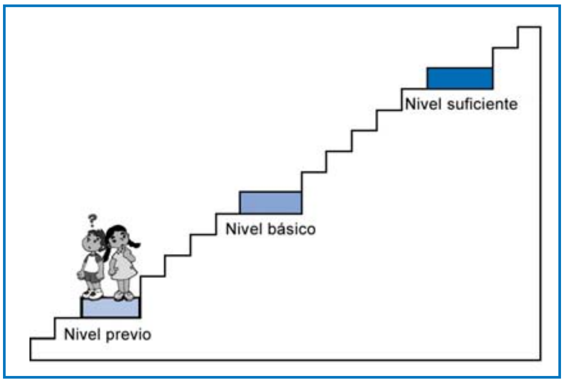
Dificultad Rasch: *270*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del alumno para identificar figuras geométricas elementales y asociarlas con sus respectivos nombres. El proceso de comunicación matemática no solo se refiere a la capacidad de interpretar, recodificar o representar; también evalúa el vocabulario de la propia disciplina y su grado de incorporación en el lenguaje del estudiante.

Nivel previo

Que un estudiante se ubique en este nivel significa que demuestra solamente un desarrollo de capacidades que son propias de grados anteriores.



Los estudiantes en este nivel demuestran un manejo de las capacidades desarrolladas en primer grado y en el nivel inicial. Sin embargo, pese a estar por concluir el segundo grado, no han logrado evidenciar el dominio de las habilidades que se esperan de un estudiante que está empezándolo, sino que solo tienen desarrolladas aquellas propias de primer grado de primaria e inicial.

A partir del análisis del conjunto de preguntas que este grupo de estudiantes responde correctamente, se puede afirmar que tienen ya afianzado el concepto de número,[25] lo que les permite representar los números mediante diversos soportes. Además, identifican la cantidad con la notación convencional, es decir, reconocen lo que el numeral significa en términos de la cuantificación como atributo de un conjunto de objetos.

Los estudiantes ubicados en este nivel pueden realizar conteos de números naturales hasta el 99 y pueden diferenciar el número mayor del número menor. Sin embargo, lo hacen por visualización de una recta numérica o por el reconocimiento de la secuencia de conteo; por ejemplo, saben que 45 es mayor que 32 «porque viene después en la serie» y no por comprensión del sistema de valor posicional. También han incorporado la noción de adición como proceso de reunir, juntar o aumentar. Asimismo, pueden realizar adiciones y sustracciones con números de una cifra y aplican estos conocimientos para calcular sumas de números de dos cifras sin «llevar».

Respecto de la comprensión y la administración de su entorno, estos estudiantes han logrado incorporar relaciones espaciales como «delante de», «detrás de», «encima de», «debajo de». Reconocen su propia lateralidad, identifican en su entorno formas geométricas como el cilindro y el triángulo equilátero en su posición más usual.

Finalmente, en cuanto a los problemas aditivos de texto, estos estudiantes resuelven problemas que involucran el cálculo de un total conociendo dos cantidades parciales.

Tareas que realiza el estudiante en el nivel previo

- Calcula la suma y la resta de números de una cifra, la suma de números de dos y una cifra y la de dos con dos cifras sin «llevar», sin importar su presentación.
- Calcula el término faltante en progresiones aritméticas de razón: +10, +1, +2. Identifica al mayor y al menor en un grupo de números de hasta dos cifras.

25. En el sentido que establece J. Piaget para quien el individuo construye el número por abstracción «reflexionante» a partir de dos procesos: el de asignación de un orden al contar y el de inclusión jerárquica.

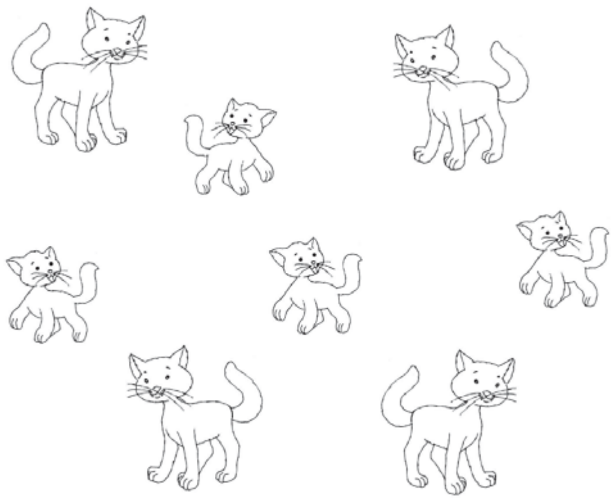
- Recodifica números de una cifra de su representación gráfica a su representación simbólica o viceversa.
- Identifica las siguientes relaciones de posición: «debajo de», «encima de», «delante de», «detrás de», «a la derecha»; atributos como altura o relativos al tamaño (grande, pequeño); objetos de acuerdo con su utilidad; formas cilíndricas en objetos de su entorno cotidiano; y el triángulo equilátero en su posición más usual.
- Resuelve problemas de texto de estructura aditiva de Combinación 1.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de preguntas que pueden resolver los estudiantes que se ubican en el nivel previo.

M2P07

Previo

Marca con **X** todos los gatos grandes.



FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Espacio y forma

Contexto: Extramatemático

Formato: Selección múltiple

Nivel de desempeño: Previo

Dificultad Rasch: 170

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para clasificar objetos de acuerdo con un atributo perceptivo. Se propone un conjunto de objetos de una misma categoría, en este caso gatos, formado por la unión de dos subconjuntos disjuntos en lo referente a dos atributos, que en este caso son grande y pequeño.

M2P08

Escribe en el ☐ el resultado de la operación.

$4 - 2 = \boxed{}$

Previo

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Aplicación de algoritmos

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Intramatemático

Formato: Respuesta corta

Nivel de desempeño: Previo

Dificultad Rasch: 199

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para calcular restas con números de una cifra. Se trata de una tarea bastante sencilla para segundo grado, pues este tipo de cálculos se realiza desde el inicio de la educación formal.

M2P09

Previo

Completa la tabla.

2	○ ○
	○ ○ ○ ○ ○ ○
8	
	○ ○ ○ ○
5	

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Intramatemático*

Formato: *Respuesta corta*

Nivel de desempeño: *Previo*

Dificultad Rasch: *227*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para recodificar números de una cifra de su representación con numerales convencionales a su representación gráfica y viceversa. La presentación en forma de «llenado de tabla» facilita la exploración de esta capacidad, pues el estudiante realiza diversas decodificaciones y codificaciones para completar lo solicitado. La pregunta incluye un ejemplo para ayudar al estudiante a comprender mejor la consigna.

Resumen de los niveles de desempeño en segundo grado de primaria

NIVEL SUFICIENTE

Los estudiantes ubicados en el nivel suficiente pueden calcular la suma de dos números (de tres cifras cada uno) con una o dos transformaciones, en cualquiera de las posiciones, y calcular restas de números de tres cifras con una transformación. Estos estudiantes pueden completar progresiones aritméticas con razones pequeñas y recodificar números de dos cifras de su representación simbólica a su descomposición en decenas y unidades.

Respecto de la gestión y administración del entorno, dominan la lateralidad y combinan relaciones espaciales para ubicar objetos. Además, identifican tanto las formas cúbicas presentes en su entorno como triángulos y cuadrados en diversas posiciones y contextos. También pueden clasificar objetos de acuerdo con dos atributos.

Respecto de la estructura aditiva, esta se encuentra en proceso de desarrollo pues resuelven diversos tipos de problemas aditivos presentados en distintas formas. En general, no dependen de la forma de presentación para resolverlos; es decir, estos estudiantes resuelven de manera adecuada los problemas que se presentan como un texto continuo y aquellos que se proponen como historieta.

NIVEL BÁSICO

Los estudiantes ubicados en el nivel básico se encuentran en proceso de construcción de la estructura de orden de los números naturales, lo que les permite ordenarlos y completar progresiones aritméticas crecientes y decrecientes.

Asimismo, utilizan el algoritmo convencional para calcular sumas que requieren solo una transformación y restas sin transformación (con minuendo de dos cifras y sustraendos de una o dos cifras).

Respecto de la comprensión y administración del entorno, pueden identificar ciertos elementos de cuerpos y figuras geométricas, aunque con nombres coloquiales. Identifican triángulos equiláteros e isósceles cuando están en su posición más usual, y cuadrados en diversas posiciones. Además, han incorporado el uso del vocabulario geométrico básico para nombrar polígonos elementales (triángulo, cuadrado, rectángulo). En cuanto a la orientación espacial, estos estudiantes pueden identificar objetos que se encuentran «debajo de» y «encima de» otro objeto.

Asimismo, pueden recodificar números de dos cifras de su representación gráfica a la simbólica y en su descomposición en decenas y unidades, por lo que se puede afirmar que su sistema de numeración posicional está en proceso de construcción.

Estos estudiantes también pueden clasificar conjuntos de objetos de acuerdo con su cantidad o de acuerdo con dos atributos perceptivos, y completar una seriación gráfica elemental.

En cuanto a los problemas aditivos, los estudiantes de este nivel pueden resolver los problemas más sencillos de transformación de estados y de combinación de cantidades. No dependen de la forma en la que se presentan los problemas, pues resuelven tanto aquellos que aparecen como parte de un texto continuo como aquellos que tienen apoyo gráfico.

NIVEL PREVIO

Los estudiantes ubicados en el nivel previo tienen ya afianzado el concepto de número, lo que les permite representar los números mediante diversos soportes. Además, identifican la cantidad con la notación convencional, es decir, reconocen lo que el numeral significa en términos de la cuantificación como atributo de un conjunto de objetos.

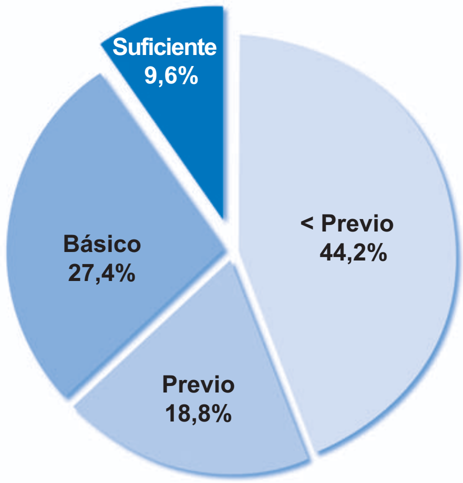
Los estudiantes ubicados en este nivel pueden realizar conteos de números naturales hasta el 99 y pueden diferenciar el número mayor del número menor. Sin embargo, lo hacen por visualización de una recta numérica o por el reconocimiento de la secuencia de conteo; por ejemplo, saben que 45 es mayor que 32 «porque viene después en la serie» y no por comprensión del sistema de valor posicional. También han incorporado la noción de adición como proceso de reunir, juntar o aumentar. Asimismo, pueden realizar adiciones y sustracciones con números de una cifra y aplican estos conocimientos para calcular sumas de números de dos cifras sin «llevar».

Respecto de la comprensión y la administración de su entorno, estos estudiantes han logrado incorporar relaciones espaciales como «delante de», «detrás de», «encima de», «debajo de». Reconocen su propia lateralidad, identifican en su entorno formas geométricas como el cilindro y el triángulo equilátero en su posición más usual.

Finalmente, en cuanto a los problemas aditivos de texto, estos estudiantes resuelven problemas que involucran el cálculo de un total conociendo dos cantidades parciales.

3 Resultados según niveles de desempeño

En el siguiente gráfico se presentan los resultados obtenidos a nivel nacional en la prueba de Lógico Matemática en segundo grado de primaria.



Solo el 9,6% de los estudiantes de segundo grado de primaria se ubica en el nivel suficiente, lo que significa que únicamente esta población demuestra un manejo suficiente, necesario y aceptable de las capacidades evaluadas, considerando los objetivos propuestos por la estructura curricular. No se trata de estudiantes avanzados sino de estudiantes con un nivel de desempeño adecuado al terminar el grado.

> El nivel suficiente es aquel que se espera que los estudiantes alcancen al terminar el grado. Un 90,4% de los estudiantes de la población nacional de segundo grado de primaria **no** alcanza este nivel.

El que la gran mayoría de estudiantes de segundo grado de primaria no pueda alcanzar el nivel suficiente significa que tendrán serias dificultades para emplear la matemática como herramienta eficiente y significativa en el proceso de ampliar sus conocimientos y desarrollar sus capacidades en esta y en otras áreas.

Asimismo, el 27,4% de los estudiantes de segundo de primaria se ubica en el nivel básico. Estos estudiantes tienen un manejo incipiente y elemental de las capacidades correspondientes al segundo grado de primaria.

El 18,8% de los estudiantes de segundo de primaria se ubica en el nivel previo. Estos estudiantes únicamente tienen un dominio de las capacidades que corresponden a primer grado y a la educación inicial.

Finalmente, el 44,2% de los estudiantes se encuentra por debajo del nivel previo. Se trata de un gran grupo de estudiantes que no muestra tener las habilidades necesarias para realizar, de manera consistente, todas las tareas que son propias del nivel previo; es decir, ni siquiera se puede afirmar que manejan las capacidades que han debido consolidarse en primer grado de primaria o en la educación inicial.

Si la población nacional de segundo de primaria fuera una clase de treinta estudiantes, esta sería su probable distribución:

- Tres estudiantes estarían en el nivel suficiente: tendrían un manejo aceptable de las capacidades evaluadas en el grado.
- Ocho estudiantes estarían en el nivel básico: presentarían un desarrollo incipiente y elemental de las capacidades propias de segundo grado.
- Seis estudiantes estarían en el nivel previo: tendrían solo la habilidad correspondiente a grados anteriores.
- Trece estudiantes no realizarían ni siquiera todas las tareas del nivel previo.

Lo que hacen los estudiantes que se encuentran debajo del nivel previo

Los estudiantes que se ubican por debajo del nivel previo no forman propiamente un nivel con características homogéneas; sin embargo, debido a que se ha encontrado gran cantidad de estudiantes que no llegaban a resolver todas las preguntas exigidas para estar en el nivel previo, es necesario describir a este grupo de estudiantes.

Como se aprecia en el siguiente gráfico, el grupo de los estudiantes que no llega a alcanzar ni siquiera el nivel previo (44,2% de la población nacional en segundo grado de primaria) ha sido dividido en tres subgrupos, de acuerdo con las tareas que logran realizar.

Por debajo del previo	44,2%	Subgrupo 1	13,4%
		Subgrupo 2	11,0%
		Subgrupo 3	19,8%

A continuación, se presenta una descripción de las tareas que pueden realizar los estudiantes de cada subgrupo ubicado por debajo del nivel previo.

Subgrupo 1

Este subgrupo está integrado por 13,4% de los estudiantes de segundo grado. Estos estudiantes tienen afianzada la noción de número, manejan un sistema de numeración de tipo aditivo basado en unidades aisladas, reconocen y reproducen la secuencia numérica y conocen los hechos aditivos básicos, es decir, calculan adiciones y sustracciones con términos de una cifra. Además, manejan los conceptos básicos de arriba – abajo y delante – detrás. Entre las preguntas que responden los estudiantes de este grupo no se ubica ningún problema de texto, por lo que se especula que tienen dificultades de lectura para la decodificación de textos. Además, respecto de la presentación de las preguntas, se puede observar que responden aquellas que solo requieren hacer marcas o trazar líneas para aparear: ninguna demanda la escritura o construcción de la respuesta solicitada.

Subgrupo 2

Este subgrupo está integrado por 11,0% de los estudiantes de segundo grado. Estos estudiantes solo pueden resolver algunas de las tareas más sencillas de la prueba, entre las que se encuentran las relacionadas con el conteo de objetos y sumas y restas de una cifra, entre otras preguntas de similar dificultad.

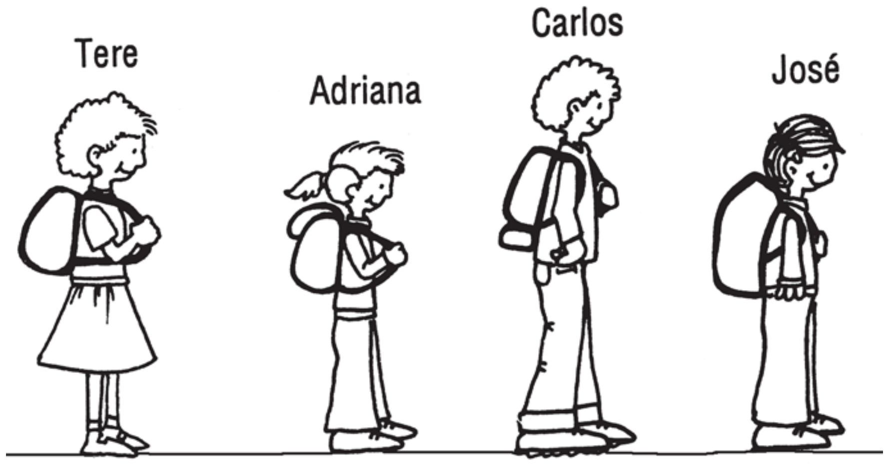
Subgrupo 3

El subgrupo 3, integrado por el 19,8% de los estudiantes de segundo grado, es el subgrupo con más bajo rendimiento. Estos estudiantes ni siquiera logran resolver aquellas tareas más fáciles de la prueba: las relacionadas con el conteo de objetos, la identificación del mayor de un grupo de números o la identificación de objetos arriba o debajo de otros, entre otras preguntas de similar dificultad.

A continuación, se presenta un ejemplo típico de pregunta que resuelven los estudiantes que se ubican por debajo del nivel previo.

M2P10

Marca con **X** al más alto.



FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Espacio y forma

Contexto: Extramatemático

Formato: Selección múltiple

Dificultad Rasch: 162

4 Análisis de las preguntas de la prueba y de las respuestas de los estudiantes

En esta sección se presentan algunas de las preguntas que integraron la prueba de segundo grado de primaria. Estas preguntas se dan a conocer para su uso por parte de personas interesadas en el tema.

Todas estas preguntas han sido diseñadas de acuerdo con las definiciones formuladas en el marco de trabajo de la EN 2004[26] y miden la formación matemática de los estudiantes. Cada una de ellas evalúa una capacidad, un contenido y un contexto específico que son señalados en una ficha técnica. Además, en esta ficha se indica el formato de presentación de la pregunta y su dificultad Rasch. Las preguntas se encuentran ordenadas de acuerdo con su dificultad, desde la más fácil a la más difícil. Asimismo, se describen los procedimientos matemáticos, estrategias y conceptos que los estudiantes pueden utilizar para responder con éxito las preguntas propuestas y se presentan los criterios empleados para la calificación de cada pregunta.

En algunos casos, especialmente en las preguntas que requieren de una respuesta extensa, se han reproducido algunas de las respuestas de los estudiantes. Estas preguntas, en particular, son fuente de mucha información, pues al registrar su procedimiento el estudiante permite conocer sus estrategias, sus patrones de pensamiento y el grado de estructuración del conocimiento matemático que posee, para aplicarlo a situaciones diversas. Por esta razón, al momento de codificar las respuestas se han considerado códigos específicos que permiten clasificarlas de acuerdo con las diversas aproximaciones a la respuesta correcta y con los posibles patrones de error, que muestran el tipo de razonamiento y el sistema de creencias que utilizan los estudiantes al momento de contestar determinadas preguntas matemáticas.

Luego de cada pregunta, se hace un breve comentario con el fin de ilustrar, mediante casos específicos, algunos de los patrones y esquemas de pensamiento de los estudiantes. Además, se proporciona el porcentaje estimado de la población nacional que está en la capacidad de responder con éxito cada pregunta.[27]

Cada pregunta tiene un código de clasificación que permite ubicarla en la escala de dificultad presentada en la página 125.

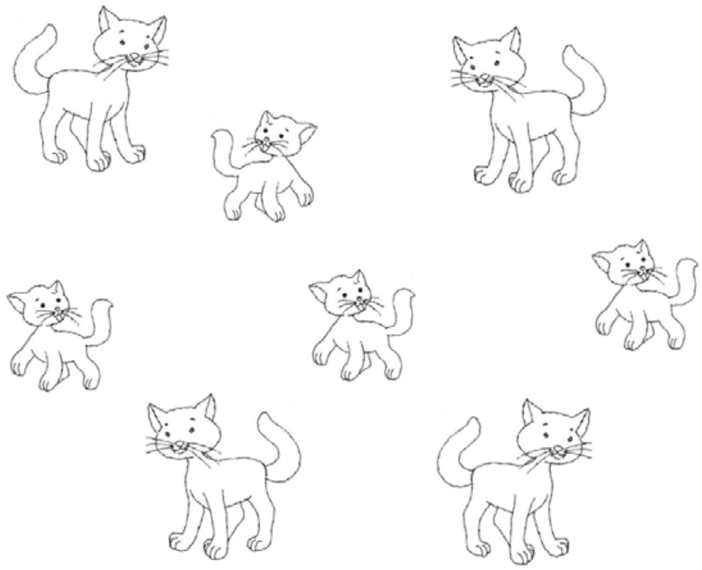
26. *Marco de trabajo de las pruebas de rendimiento.* En <http://www.minedu.gob.pe/umc/2004/marctrab/MarcTranPruebEN2004.pdf.pp 71-121>.

27. Este indicador señala que ese porcentaje de estudiantes de segundo grado tiene un 62% de probabilidad de responder correctamente la pregunta.

M2P07

Previo

Marca con **X** todos los gatos grandes.



FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Espacio y forma

Contexto: Extramatemático

Formato: Selección múltiple

Nivel de desempeño: Previo

Dificultad Rasch: 170

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para clasificar objetos de acuerdo con un atributo perceptivo. Se propone un conjunto de objetos de una misma categoría, en este caso gatos, formado por la unión de dos subconjuntos disjuntos en lo referente a dos atributos, que en este caso son grande y pequeño.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

En este caso, el estudiante debe discriminar entre los atributos de tamaño grande y pequeño. Aunque los conceptos involucrados son relativos, este tipo de tareas permite observar si, ante un estímulo dado, el estudiante ha incorporado las nociones de tamaño en forma global, ya que la pregunta solo coloca un conjunto de objetos similares (figuras del mismo gato, con distinta orientación) pero con diferentes dimensiones. La pregunta requiere que el estudiante observe el grupo de objetos presentado, identifique las semejanzas y diferencias entre dichos objetos y, luego, los clasifique en dos grupos de acuerdo con su tamaño.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como correctas aquellas respuestas en las que el estudiante identificó a *todos* los objetos pedidos. El tipo de marca que realizó no fue tomado en consideración; las marcas que identificaban a los gatos grandes podían ser una X, como se solicitaba, o cualquier otra marca. Si el estudiante, además de lo pedido, realizaba alguna marca sobre los otros gatos que no eran parte de la respuesta, esta era considerada incorrecta.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

Esta pregunta se ubica entre aquellas de nivel previo. El gran porcentaje que la respondió correctamente muestra que la clasificación de objetos mediante el atributo de tamaño es un proceso que la mayoría de los estudiantes de segundo grado domina.

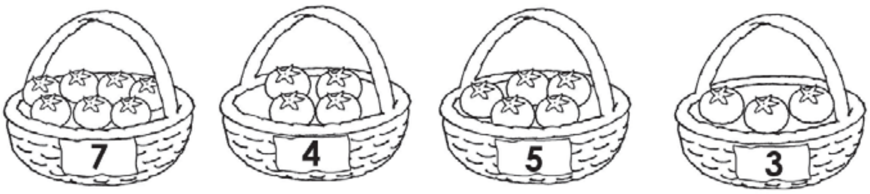
La actividad de clasificar es un proceso que se ejercita desde los primeros grados de la educación básica, el reconocimiento de atributos es un logro deseable pues esta capacidad proveerá al alumno de herramientas que le permitan luego enfrentarse con procesos más complejos como el de definir.

[Se estima que un 84% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

M2P11

Previo

Marca con **X** la cesta que tiene más tomates.



FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Aplicación de algoritmos*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Selección múltiple*

Nivel de desempeño: *Previo*

Dificultad Rasch: *194*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para establecer relaciones de orden en un grupo de números naturales pequeños.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para responder correctamente esta pregunta, el estudiante debe interpretar en términos matemáticos la frase «tiene más tomates» e identificar que la situación matemática asociada es hallar el máximo de un conjunto de números naturales. El estudiante puede realizar las comparaciones de manera visual pues se brindan imágenes con el número de tomates en cada cesta, o utilizar los numerales que etiquetan cada una de las cestas.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como correctas aquellas respuestas que seleccionaban la cesta que contenía siete tomates.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

La mayoría fue capaz de responder esta pregunta en forma adecuada. Entre las respuestas erradas, muchos estudiantes marcaron la cesta que contenía tres tomates, por lo que es posible suponer que no leyeron la consigna y, simplemente, relacionaron la forma de presentación con tareas similares de los libros de texto o de las clases, e interpretaron que se les pedía la cesta con menor cantidad de tomates. También puede ubicarse en este grupo a aquellos que confunden las relaciones «más que» y «menos que».

[Se estima que un 79% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

M2P12

Escribe en el $\square$ el resultado de la operación.

$$\begin{array}{r} 7 \\ -\,3 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

Previo

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Aplicación de algoritmos

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Intramatemático

Formato: Respuesta corta

Nivel de desempeño: Previo

Dificultad Rasch: 202

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para calcular restas con números de una cifra. Es una tarea bastante sencilla para segundo grado, pues este tipo de cálculos se propone desde el inicio de la educación formal.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver correctamente este cálculo, en primer lugar, deberá reconocer la operación propuesta como una de sustracción para lo cual necesita estar familiarizado con el signo de la resta «–». Si interpreta este cálculo como la resta de siete unidades menos tres, puede evocar el conocimiento adquirido en el aula, o realizar este cálculo mediante una estrategia de conteo o gráfica. Algunas estrategias posibles pueden ser:

Estrategia 1: dibujar siete bolitas y, luego, tachar tres para, finalmente, contar cuántas quedan.

Estrategia 2: utilizar sus dedos como instrumento para contar y realizar la cuenta regresiva desde siete hasta retroceder tres unidades, en este caso el alumno irá contando en forma regresiva: 6, 5, 4.

Estrategia 3: descomponer el número siete en 4 + 3, luego, al quitar tres unidades, se obtiene la respuesta: 4.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como correctas aquellas respuestas en las que el estudiante escribió «4».

¿Cómo respondieron los estudiantes?

Esta pregunta se ubica entre aquellas del nivel previo. El gran porcentaje que respondió correctamente certifica que el cálculo de restas de números de una cifra es un procedimiento que la mayoría de los estudiantes de segundo grado domina.

Se estima que un 76% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M2P13

En una canasta hay 2 plátanos y 5 manzanas. ¿Cuántas frutas hay en total?

Previo

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Extramatemático

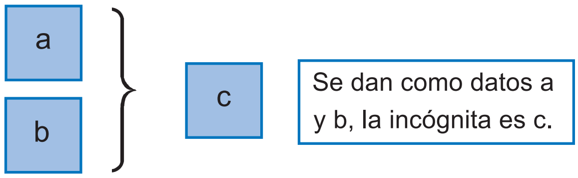
Formato: Respuesta extensa

Nivel de desempeño: Previo

Dificultad Rasch: 230

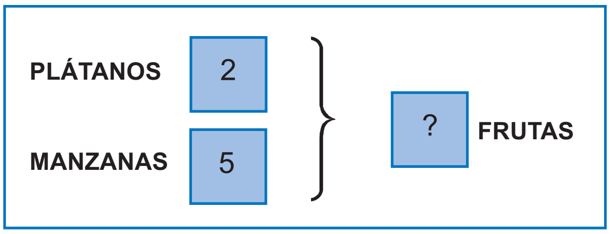
¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para resolver problemas de texto que presentan una estructura aditiva. El problema considera la relación entre parte y todo, en este caso se presentan como datos las dos partes de un todo y se solicita el todo. El siguiente esquema puede aclarar esta descripción:



¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

En el gráfico se presentan los datos del problema de acuerdo con el esquema anterior:



Para responder correctamente el estudiante debe, primero, identificar a los plátanos y a las manzanas como elementos pertenecientes a un conjunto más amplio: el conjunto de frutas, e interpretar que lo solicitado se refiere al cálculo del todo; a continuación, debe seleccionar la adición como la operación adecuada, hallar la suma de estos números y, finalmente, comunicar el resultado dentro del contexto de la situación planteada. Cada una de estas etapas en el proceso de solución está en relación directa con el esquema de resolución de problemas propuesto en el capítulo 5 de este reporte.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como respuestas correctas aquellas en las que el estudiante:

a) Planteó y ejecutó una estrategia adecuada y escribió la respuesta correcta en el contexto de la situación; por ejemplo: «7 frutas», «en total 7», «hay 7 en total», entre otras respuestas similares.

b) Planteó y ejecutó una estrategia adecuada y escribió la respuesta correcta, pero no la contextualizó; por ejemplo: «7».

c) Escribió solo la respuesta en el contexto de la situación.

d) Escribió solo la respuesta numérica o gráfica.

Se consideraron incorrectas aquellas respuestas en las que se planteó una estrategia adecuada sin llegar al resultado, o se escribió un resultado errado.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

En el proceso de calificación se observó que, en la mayoría de casos, los estudiantes registraron sus estrategias y cálculos, pero solo alrededor de la mitad de ellos contextualizó la respuesta. Son pocos los que no registraron el proceso de solución y solo escribieron la respuesta. Las respuestas que emplean estrategias numéricas que utilizan la suma fueron las más numerosas.

Esta pregunta se ubica entre aquellas que son parte del nivel previo. La clasificación de los problemas aditivos que utilizó la EN 2004 fue aquella que la mayoría de educadores matemáticos denomina «categorías semánticas». Esta clasificación se centra en el análisis global del texto y su significado; además, permite comparar los resultados con los obtenidos en otros estudios que utilizan esta clasificación (Nesher 1982, Ryley y otros 1983). Estas investigaciones muestran que esta categoría de problemas, conocida como de Combinación 1, es una de las más sencillas y suele ser dominada por alumnos de 6 o 7 años (Puig y Cerdán 1988).

Entre todos los problemas aditivos de texto propuestos en la prueba, este fue el de menor dificultad. El gran porcentaje que respondió correctamente permite conjeturar que esta categoría es comprendida mayoritariamente por los estudiantes de segundo grado. La elección de la operación adecuada puede deberse, entre otras razones, a la presencia de la palabra clave «total» que muchos de los estudiantes asocian con la adición. El hecho de que exista un porcentaje significativo de estudiantes que no contextualizó la respuesta puede deberse a que existe una asociación inconsciente que establece que las respuestas deben ser números. Es conveniente que, al resolver problemas de contexto real, el docente plantee la necesidad de contextualizar la respuesta e informe a sus estudiantes acerca de que el número absoluto da solo una información parcial.

Este tipo de problemas aparece con frecuencia en los textos de primer y de segundo grados que se encuentran en el mercado nacional; en el texto *Lógico Matemática 2* (Gaita y otros 2004), entregado por el MED a las IE, se ubica como una de las tareas más frecuentes al presentar problemas de adición.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de respuestas de los estudiantes.

✓ Respuestas correctas

Datos
Platonos -02
manzanas -05
Solución

C	D	U
		27
		5
		7

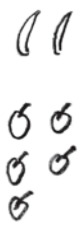
RESPUESTA: En total hay 7 frutas

En este ejemplo observamos el uso de una estrategia numérica basada en la comprensión de la situación como un caso de adición, el proceso de solución se muestra ordenado y por etapas.

RESPUESTA: Hay 7 en total.

En este ejemplo, el estudiante no registró su proceso de solución, pero la respuesta se consideró correcta.

En ambos casos se consideran las respuestas como correctas pues, en el segundo, el estudiante pudo haber realizado la operación mentalmente o con ayuda concreta, por lo que no tuvo necesidad de registrar todo el proceso de solución.



$$\begin{array}{r} 2 \\ +\,5 \\ \hline 7 \end{array}$$

RESPUESTA: En la canasta hay 7 frutas en total

En este ejemplo se observa una estrategia gráfica de conteo. Es posible que este estudiante todavía no opere las sumas con símbolos convencionales (cifras) en forma eficiente, por lo que debe ayudarse con material concreto, el cual registra en la prueba.

Se aprecia aquí que el estudiante ha reflexionado sobre el problema pues escribe su estrategia indicando la operación que va a utilizar; aplica el algoritmo convencional para calcular su resultado; finalmente, da una respuesta en el contexto de la situación planteada.

para saber cuantos platanos y manzanas Tengo que sumar

$$\begin{array}{r} 2+ \\ 5 \\ \hline 7 \end{array}$$

RESPUESTA: hay 7 Frutas

$$\begin{array}{r} 2+ \\ 5 \\ \hline 7 \end{array}$$

RESPUESTA: En total hay 7 manzanas y platanos

En este ejemplo se aprecia que el estudiante identifica la operación que tiene que realizar; sin embargo, al dar la respuesta no agrupa los plátanos y las manzanas en la categoría de frutas, pese a que en el enunciado de la pregunta así se le solicita, y prefiere indicar estas dos categorías por separado. Este tipo de razonamiento tiene que ver con dificultades en la inclusión jerárquica y en la reversibilidad del pensamiento que se comentarán en el capítulo 5 de esta parte.

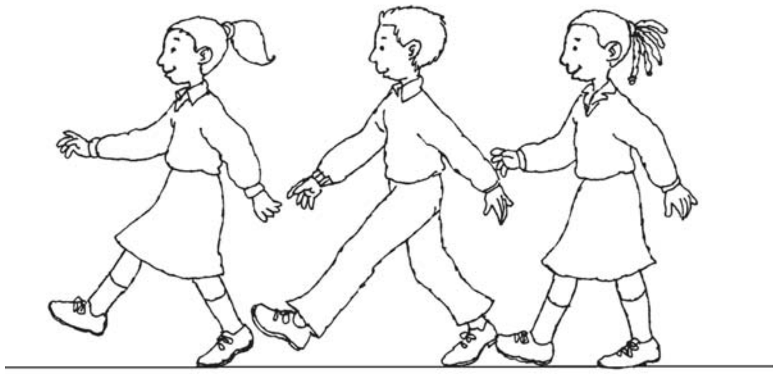
Existen muy pocos casos en los que un estudiante que diseña bien una estrategia de solución no llega a la respuesta correcta, por lo que parece que las operaciones y el significado de la adición en el contexto de las situaciones reales, al menos con números pequeños, son aprendizajes que se complementan y desarrollan en forma simultánea en el proceso evolutivo de los estudiantes.

[Se estima que un 69% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

M2P14

Ana está delante de Juan, márcala con **X**.

Previo



FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Espacio y forma

Contexto: Extramatemático

Formato: Selección múltiple

Nivel de desempeño: Previo

Dificultad Rasch: 237

¿Qué evalúa esta pregunta?

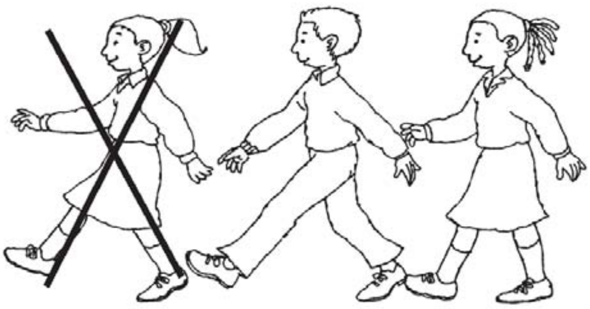
Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para ubicar un objeto con relación a un punto de referencia haciendo uso del concepto básico «delante de».

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para hacerlo debe imaginarse la situación, descentrándose y refiriéndose a la escena que representa a tres niños marchando en «fila india». Se sabe que la respuesta es una de las dos niñas mostradas, ya que la pregunta se refiere a un nombre de mujer, entonces, debe ubicarse en el caso del niño de la figura e identificar a la niña que marcha delante de él.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como respuestas correctas aquellas en las que el estudiante marcó, con x o con otro signo, a la niña mostrada.



¿Cómo respondieron los estudiantes?

Esta pregunta, que se ubica entre las tareas del nivel previo, fue contestada, como se esperaba, por la mayor parte de los estudiantes, pues los conceptos «delante de» y «detrás de» son trabajados desde el primer curso de matemática; además, son conceptos necesarios para la ubicación y orientación espacial de los niños. En las zonas rurales, estos conceptos básicos de ubicación adquieren gran importancia, ya que muchos niños caminan solos para llegar a las escuelas y son numerosas las referencias de ubicación que se suele escuchar en estas zonas que los emplean para indicar, por ejemplo, la ubicación de una plaza o de una escuela. Asimismo, se suelen incorporar en los juegos que realizan los niños muchos conceptos de orientación espacial. El que esta pregunta se ubique entre las de nivel previo nos permite afirmar que los conceptos básicos «delante de» y «detrás de» son comprendidos por una gran mayoría de los estudiantes que cursan el segundo grado.

Se estima que un 68% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M2P15

Escribe en el $\square$ el resultado de la operación.

$$\begin{array}{r} 24 \\ -\ 13 \\ \hline \square \end{array}$$

Previo

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Aplicación de algoritmos

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Intramatemático

Formato: Respuesta corta

Nivel de desempeño: Previo

Dificultad Rasch: 239

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad de calcular la resta de números de dos cifras sin transformación de unidades.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Aunque la sustracción se presenta en forma vertical, para que el estudiante utilice el algoritmo convencional al resolverla, puede hacer uso de otras formas de cálculo, como el mental o con ayuda gráfica y, luego, registrar su respuesta en el recuadro. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes optó por intentar responder haciendo uso del algoritmo convencional.

En este caso, para efectuar la resta basta que el estudiante calcule las diferencias entre dígitos correspondientes al mismo orden de posición pues, en la disposición vertical de esta operación, las cifras que forman el minuendo son siempre mayores que sus correspondientes en el sustraendo.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron respuestas correctas aquellas en las que el estudiante escribió «11».

¿Cómo respondieron los estudiantes?

Muy pocos estudiantes dejaron de contestar, lo que puede deberse a la familiaridad de la tarea por su frecuente presencia en la rutina escolar, lo que los motiva a enfrentar la pregunta e intentar responderla.

Esta pregunta se ubica entre las que son parte del nivel previo, en el que no hay sustracciones con transformación. Este tipo de tareas se encuentra con bastante frecuencia en los textos de primer y segundo grados. En el texto *Lógico Matemática 2* ya mencionado (Gaita y otros 2004), se ubica como una de las tareas más frecuentes. Sin embargo, el hecho de que casi una tercera parte de la población no se encuentre en capacidad de responder con éxito esta pregunta refleja que no es un logro totalmente alcanzado por los estudiantes de este grado y que requiere aún de un refuerzo sistemático.

[Se estima que un 68% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

M2P04

Tenía 24 figuritas y compré 15 figuritas más. ¿Cuántas figuritas tengo ahora?

Básico

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Extramatemático

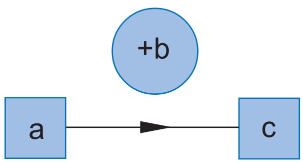
Formato: Respuesta extensa

Nivel de desempeño: Básico

Dificultad Rasch: 254

¿Qué evalúa esta pregunta?

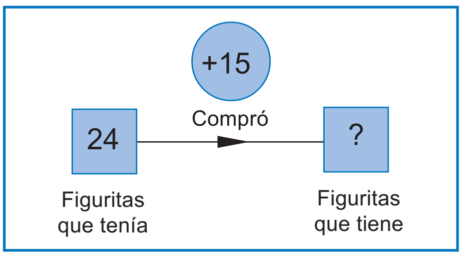
Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para resolver problemas de texto que posean una estructura aditiva de transformación de estados. En este caso se dan como datos las cantidades inicial y de cambio; además, la cantidad final es mayor que la inicial, lo que se llama cambio ascendente. El contexto es muy cercano a la vida cotidiana del estudiante y los números son pequeños pues se pretende analizar la comprensión de este tipo de estructura aditiva y no las destrezas para hacer cálculos aritméticos. En forma esquemática lo podemos observar en el siguiente diagrama:



Se dan como datos a y b, la incógnita es c.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El problema planteado puede representarse haciendo uso del esquema anterior:



Para resolver este problema, el estudiante debe comprender la situación de contexto real que se propone, representarla mentalmente y compararla con significados de situaciones similares para decidir qué estrategia utilizar; por ejemplo, identificar la cantidad inicial y sumarle la cantidad que se compra. Finalmente, debe interpretar el resultado a partir de la situación planteada.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como respuestas correctas aquellas en las que el estudiante:

a) Planteó y ejecutó una estrategia adecuada y escribió la respuesta correcta en el contexto de la situación; por ejemplo: «39 figuritas», «tiene 39», «hay 39 figuritas», entre otras respuestas similares.

b) Planteó y ejecutó una estrategia adecuada y escribió la respuesta correcta, pero no la contextualizó; por ejemplo: «39».

c) Escribió solo la respuesta en el contexto de la situación.

d) Escribió solo la respuesta numérica o gráfica.

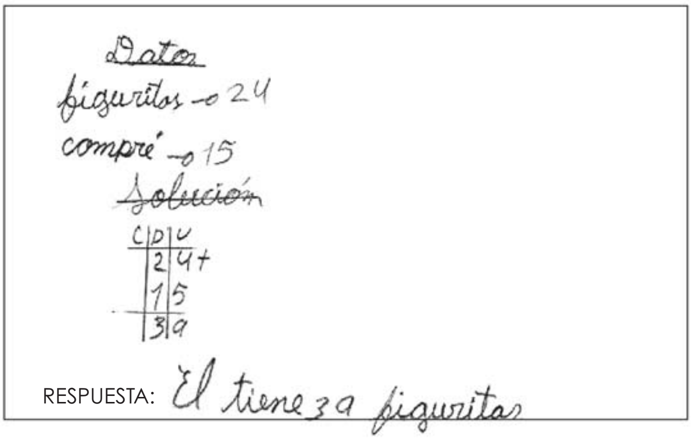
Las respuestas no se consideraron correctas si el estudiante planteó una estrategia adecuada pero no llegó a responder o presentó una respuesta errada.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

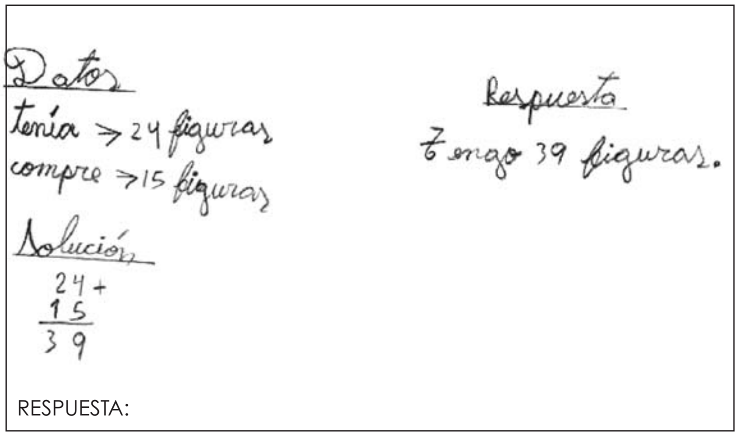
La mayoría de los estudiantes que respondió lo hizo registrando sus estrategias y cálculos, y más de la mitad contextualizó la respuesta. Solo unos pocos no registraron el proceso de solución y únicamente escribieron la respuesta.

Esta pregunta se ubica entre las que integran el nivel básico. Estudios realizados (Nesher 1982, Riley y otros 1983) muestran que esta categoría de problemas, conocida como Cambio 1, en general es una de las más sencillas de resolver.

✓ Respuestas correctas

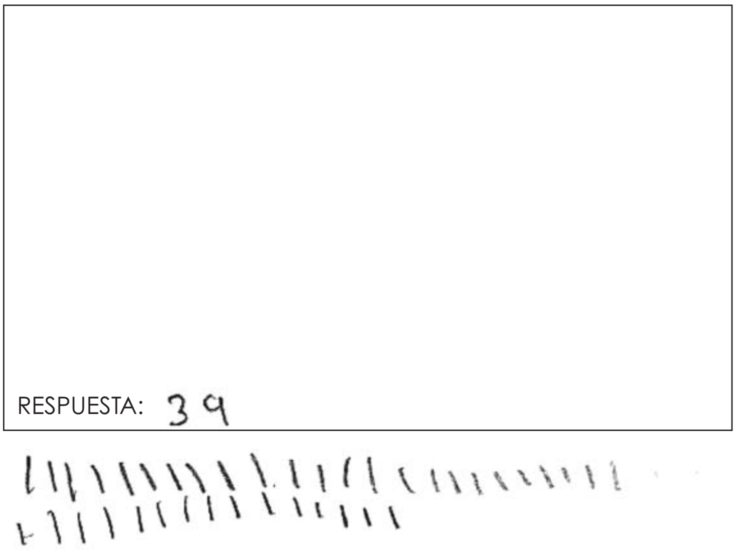


En este caso puede observarse que el estudiante decidió resolver el problema haciendo uso de la adición. El proceso de solución exhibe una secuencia ordenada: identifica los datos, luego realiza la operación requerida y, finalmente, registra la respuesta en el contexto de la situación presentada. Nótese en esta respuesta que el proceso realizado es ordenado y lógico. Sin embargo, es probable que esté reproduciendo un modelo previamente aprendido, como se observa en la ejecución del algoritmo operativo.



En este ejemplo el estudiante se ha asumido como protagonista de la situación, lo que se observa al identificar los datos del problema y que, de algún modo, ayuda a la comprensión del texto y de su estructura pues el estudiante se involucra en el problema, lo que contextualiza su razonamiento en una situación que se hace significativa para él. Se aprecia también la clásica división del proceso de solución de los problemas de texto en tres fases: datos, operación y respuesta. Al parecer, el estudiante tiene ya estos patrones incorporados en su quehacer, por lo que no escribe la respuesta en el lugar señalado sino que sigue su propia lógica de solución.

A pesar de que, por la magnitud de los números, una estrategia de tipo gráfico no sería la más adecuada, algunos estudiantes la utilizaron. Por ejemplo, en el caso mostrado, el estudiante utiliza esta estrategia. Al parecer, comprende el significado aritmético de la situación presentada pero, posiblemente, no tiene dominio de los cálculos necesarios por lo que busca un modelo intuitivo y cercano a su razonamiento para hallar la respuesta.



Existe un grupo significativo de estudiantes que no contextualiza la respuesta, lo que puede deberse a la asociación inconsciente que indica que las respuestas deben ser números. Por ello es conveniente que, al resolver problemas de contexto real, el docente señale la necesidad de contextualizar las respuestas pues los números solo tienen significado dentro del contexto planteado.

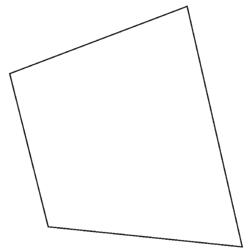
Este tipo de tareas se encuentra con bastante frecuencia en los textos de primer grado. En el texto *Lógico Matemática 2* (Gaita y otros 2004), se ubica como una de las tareas más frecuentes al momento de presentar problemas aditivos.

[Se estima que un 62% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

M2P16

Básico

Marca con **X** todas las esquinas de la siguiente figura.



FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Espacio y forma*

Contexto: *Intramatemático*

Formato: *Respuesta corta*

Nivel de desempeño: *Básico*

Dificultad Rasch: *268*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para identificar elementos de un objeto geométrico a partir de una consigna que utiliza lenguaje cotidiano no especializado.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para hacerlo, el estudiante debe distinguir entre los varios elementos posibles del cuadrilátero e interpretar la palabra «esquina». El uso de este término en el enunciado de la pregunta está justificado por el enfoque del aprendizaje de conceptos matemáticos mediante la identificación de estos en el entorno cotidiano del estudiante.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

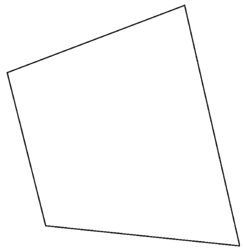
Se consideraron como respuestas correctas aquellas en las que el estudiante señaló, con x o con otro signo, la totalidad de las esquinas del cuadrilátero. No se consideraron como correctas aquellas respuestas en las que el estudiante marcó solo algunas de ellas, o marcó combinaciones de esquinas y lados del polígono.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

Esta pregunta se ubica entre las que forman parte del nivel básico. El término «esquina» es utilizado con frecuencia por los docentes para introducir después el concepto de vértice o de ángulo.

En la EN 2004 se planteó también la siguiente pregunta:

Marca con **X** todos los ángulos de la siguiente figura.



Como se observa, se trata del mismo cuadrilátero, la única diferencia radica en el reemplazo del término «esquina» por «ángulo»; sin embargo, los indicadores estadísticos obtenidos en esta pregunta señalaban que no correspondía a la variable medida (formación matemática). Una hipótesis que puede explicar esta situación es que el vocabulario geométrico convencional no suele ser utilizado con frecuencia en las clases de matemática de segundo grado y, por lo general, se emplean palabras del lenguaje cotidiano para denotar los objetos geométricos.

Se estima que un 55% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M2P17

Escribe en el ☐ el resultado de la operación.

$$\begin{array}{r} 243 \\ +\ 176 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

Básico

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Aplicación de algoritmos*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Intramatemático*

Formato: *Respuesta corta*

Nivel de desempeño: *Básico*

Dificultad Rasch: *270*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para utilizar el algoritmo más usual al calcular la suma de dos números de tres cifras que requiere una transformación de unidades.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Esta pregunta demanda que el estudiante haya incorporado el algoritmo convencional de la adición, proceso de cálculo que puede resumirse así: se deberán calcular las sumas en forma ordenada en cada columna, empezando por la columna de la derecha y, al encontrarse con un resultado mayor o igual a la decena, se debe acarrear a la unidad de orden superior. En este caso, esto ocurre al sumar la columna de las decenas (4 + 7 = 11); entonces, se debe colocar el 1 de las unidades y llevar el otro 1 a la columna de las centenas, con lo que el resultado de la suma es 419.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como respuestas correctas solo aquellas en las que el estudiante escribió «419». Entre las respuestas incorrectas, se registraron también aquellas en las que el estudiante olvidó o no realizó el acarreo a las centenas (en este caso el resultado registrado era «319»).

¿Cómo respondieron los estudiantes?

$$\begin{array}{r} 243 \\ +\ 176 \\ \hline \boxed{3119} \end{array}$$

Los errores al responder estuvieron más relacionados con la poca o nula comprensión del sistema de numeración decimal que con la propia lógica del algoritmo de cálculo. Los estudiantes consideraban que la suma expresaba tres sumas de números independientes (2 + 1, 4 + 7, y 3 + 6); este error puede deberse a que, en la enseñanza del algoritmo, cada cifra se trata por separado y no en conjunto ni referida al orden de unidades que representa. Esta pregunta se ubica entre las que integran el nivel básico, al parecer los estudiantes de este nivel pueden realizar estos cálculos ayudados por el mecanismo del algoritmo.

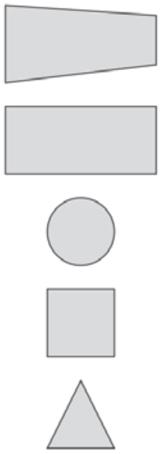
El currículo vigente exige este tipo de tareas para el segundo grado, por eso se incluyó en la evaluación; sin embargo, desde el punto de vista del desarrollo evolutivo de los niños, cabe reflexionar si es que el resultado que obtienen al sumar estos números adquiere algún significado para ellos pues, a la edad de 7 u 8 años, números de tal magnitud no suelen presentarse en su vida cotidiana.

[Se estima que un 53% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

M2P06

Básico

Une con una línea cada figura con su nombre.



CUADRADO

TRIÁNGULO

CÍRCULO

RECTÁNGULO

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Espacio y forma*

Contexto: *Intramatemático*

Formato: *Para aparear*

Nivel de desempeño: *Básico*

Dificultad Rasch: *270*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para identificar figuras geométricas elementales y asociarlas con sus respectivos nombres. La comunicación matemática no solo se refiere a la capacidad de interpretar, recodificar o representar, también evalúa el vocabulario de la propia disciplina y su grado de incorporación en el lenguaje del estudiante. Se deben distinguir dos tipos de conocimiento: el conocimiento social y el conocimiento lógico matemático. Los nombres de las figuras geométricas se inscriben en el conocimiento social, finalmente son convenciones; pero, cuando estos se asocian a un conjunto de invariantes y características de tipo matemático, se establecen relaciones y abstracciones que permiten que los estudiantes construyan determinado concepto matemático.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Cómo se ya se indicó, esta actividad está íntimamente relacionada con el uso del vocabulario matemático convencional, pues, para responderla correctamente, el estudiante debe, además de reconocer la figura visualmente, recordar su nombre.

Las preguntas para aparear, si bien poseen un formato conocido para la mayoría de los estudiantes, suelen tener un defecto cuando se propone el mismo número de objetos a aparear en ambas columnas, ya que se produce un fenómeno de «encaje». Para evitar esto, en la EN 2004 se decidió que toda pregunta para aparear tuviera un distractor adicional. En este caso, el distractor fue el trapecio que no tenía un letrero con su nombre y que, por lo tanto, debía quedar sin relacionar.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como respuestas correctas aquellas en las que el estudiante apareó bien las cuatro figuras mostradas con sus respectivos nombres. Se registraron como incorrectas, situaciones en las que el estudiante apareó correctamente algunas de las figuras presentadas o ninguna.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

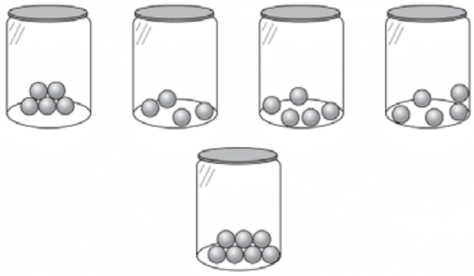
La pregunta se ubica entre aquellas que forman el nivel básico, en el que una parte considerable de los estudiantes está en el proceso de incorporar el vocabulario geométrico. Del análisis de las respuestas se puede concluir que los estudiantes suelen reconocer con mayor facilidad el círculo y el cuadrado, y la figura que es más difícil de identificar para ellos es el rectángulo.

Se estima que un 53% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M2P18

Básico

Marca con **X** los frascos que tienen la misma cantidad de bolitas.



FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Intramatemático*

Formato: *Selección múltiple*

Nivel de desempeño: *Básico*

Dificultad Rasch: *272*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para comparar grupos de objetos respecto del atributo de cantidad e identificar a aquellos que muestran la misma cantidad.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para hacerlo, el estudiante puede contar las bolitas en cada uno de los frascos y, luego, comparar estas cantidades para ubicar aquellas que tienen igual número de bolitas; su búsqueda es más abierta que si se le pidiera identificar aquellos frascos que tienen cinco bolitas. La solución de esta pregunta constará entonces de dos etapas: primero realizará el conteo y, luego, hará una comparación de los cinco frascos para identificar aquellos que tienen igual cantidad de bolitas. Al hacerlo, está dividiendo el conjunto presentado en dos subconjuntos: uno formado por aquellos frascos que comparten el mismo atributo de cantidad y otro formado por aquellos que no lo comparten.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como respuestas correctas aquellas en las que el estudiante marcó, con X o con otro signo, al menos dos de los tres frascos que contenían cinco bolitas. La gran mayoría de los que identificaron los frascos con la misma cantidad ubicaron correctamente los tres frascos; un porcentaje menor marcó solo dos frascos con cinco bolitas.

[Se estima que un 53% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

M2P19

Básico

El profesor tiene 6 pelotas, entregó 4 a los niños en el recreo.
¿Cuántas pelotas le quedan?

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Extramatemático*

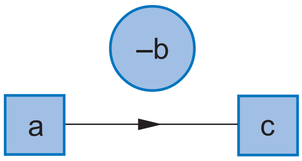
Formato: *Respuesta extensa*

Nivel de desempeño: *Básico*

Dificultad Rasch: *274*

¿Qué evalúa esta pregunta?

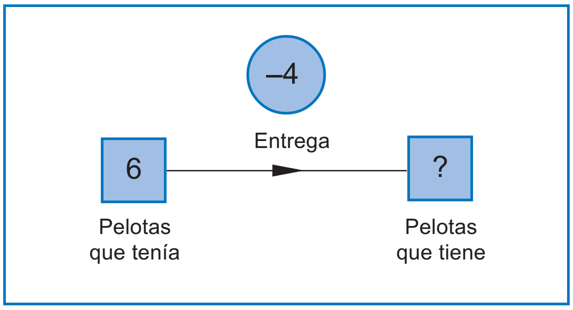
Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para resolver problemas de texto que poseen una estructura aditiva de transformación de estados, cuando se dan como datos las cantidades inicial y de cambio y, además, la cantidad final es menor que la inicial, lo que se llama cambio descendente. En forma esquemática se observa en el siguiente diagrama:



Se dan como datos a y b, la incógnita es c.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

De acuerdo con el esquema anterior, podemos plantear así el problema:



Para responder esta pregunta, el estudiante debe leer el enunciado, comprender la situación que se propone, representarla en términos de estructuras aditivas, identificar la cantidad inicial y restarle la cantidad que se entrega para, finalmente, interpretar el resultado a partir de la situación planteada. El entorno en el que se desarrolla la situación es muy cercano a la vida cotidiana del estudiante y los números son pequeños, pues lo que se pretende analizar es si el estudiante comprende este tipo de estructura presentada en forma verbal.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como respuestas correctas aquellas en las que el estudiante:

a) Planteó y ejecutó una estrategia adecuada y escribió la respuesta correcta en el contexto de la situación; por ejemplo: «2 pelotas», «quedan 2», «hay 2 pelotas», entre otras respuestas.

b) Planteó y ejecutó una estrategia adecuada y escribió la respuesta correcta, pero no la contextualizó; por ejemplo: «2».

c) Escribió solo la respuesta en el contexto de la situación.

d) Escribió solo la respuesta numérica o la graficó, es decir, dibujó dos pelotas.

Se consideraron sin puntaje a aquellas en las que el estudiante planteó una estrategia adecuada pero no llegó a responder, o presentó un resultado errado.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

La elección adecuada de la operación puede deberse, entre otras razones, a la presencia de la palabra clave «quedan» que muchos estudiantes asocian, de manera directa, con la sustracción.

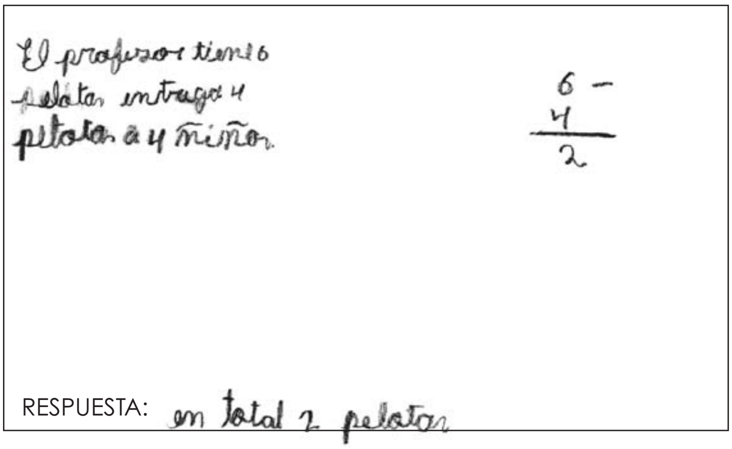
En la mayoría de los casos, los estudiantes anotaron sus estrategias y cálculos y más de la mitad contextualizó la respuesta. Muy pocos registraron directamente la respuesta obtenida.

Esta pregunta se ubica entre aquellas que forman el nivel básico. Estudios realizados (Nesher 1982, Riley y otros 1983) muestran que esta categoría de problemas, conocida como Cambio 2, es una de las más sencillas.

Este tipo de tareas se encuentra con bastante frecuencia en los textos de primer y segundo grados. En el texto *Lógico Matemática 2* (Gaita y otros 2004) se ubica como una de las tareas más frecuentes al presentar problemas aditivos.

En la siguiente página, se presentan algunos ejemplos de respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes que se enfrentaron a esta pregunta.

Respuestas correctas

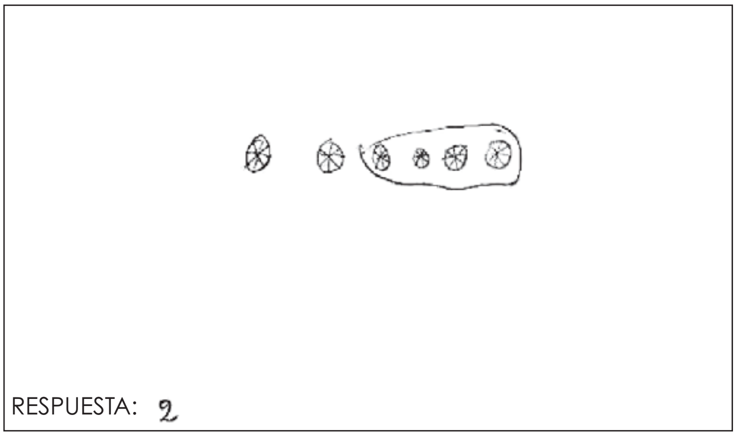

El profesor tiene 6 pelotas entrega 4 pelotas a 4 niños

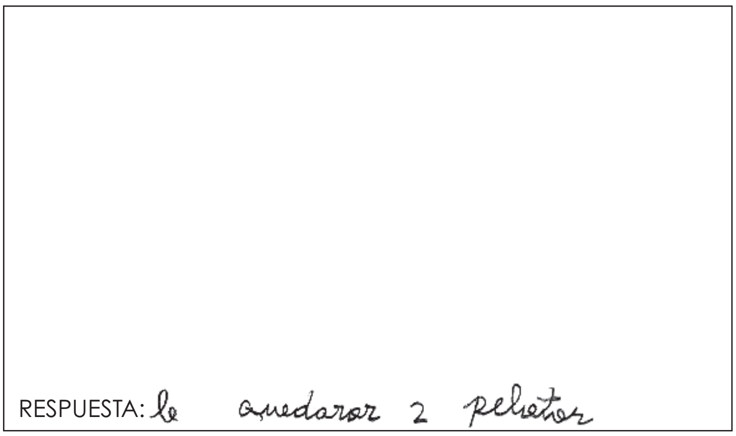
$$\begin{array}{r} 6\ - \\ 4 \\ \hline 2 \end{array}$$

RESPUESTA: en total 2 pelotas

En este caso puede observarse que el estudiante decide resolver el problema mediante la sustracción. Su proceso de solución incluye un esquema verbal; esta aparente repetición del enunciado es, en realidad, la estrategia utilizada para comprender la situación. Luego, el estudiante efectúa la sustracción utilizando el algoritmo convencional y, finalmente, registra su respuesta en el contexto de la situación presentada.

Algunos estudiantes utilizaron una estrategia gráfica para responder la pregunta. Esto significa que el estudiante comprende el significado aritmético de la situación presentada pero no tiene dominio de los métodos de cálculo, así que busca un modelo intuitivo y cercano a su razonamiento para responder la pregunta.


RESPUESTA: 2


RESPUESTA: le quedaron 2 pelotas

Algunos estudiantes solo colocaron la respuesta numérica o contextualizada. Se consideraron correctas respuestas de este tipo, pues han podido hacer el cálculo mentalmente y no necesitaron registrar sus procedimientos en el espacio disponible. Un grupo significativo de estudiantes que responde correctamente no contextualiza su respuesta. Esta tendencia puede deberse a la asociación inconsciente que establece que las respuestas deben ser números.

X Respuesta incorrecta

6+
4

10

RESPUESTA: Tengo-10 pelotas

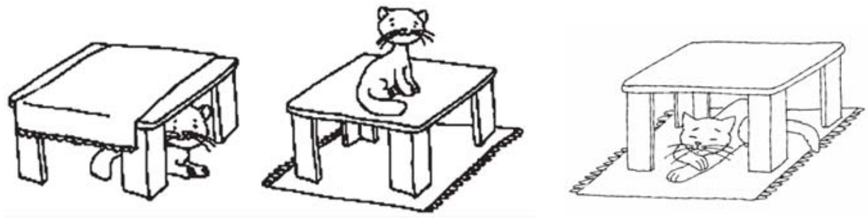
En este caso, la respuesta errada se debe a la elección de una estrategia equivocada que puede deberse, entre otras razones, a la escasa comprensión de este tipo de problema. Una de las estrategias que con frecuencia utilizan los estudiantes de los primeros grados al resolver problemas de texto es sumar todos los números que aparecen en el enunciado de un problema; es así que este estudiante suma la cantidad de pelotas mencionadas en el texto sin tener en cuenta el significado de la situación planteada.

> Se estima que un 53% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M2P20

Marca con **X** el gato que está debajo de la mesa pero encima del tapete.

Básico



FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Espacio y forma

Contexto: Extramatemático

Formato: Selección múltiple

Nivel de desempeño: Básico

Dificultad Rasch: 284

¿Qué evalúa esta pregunta?

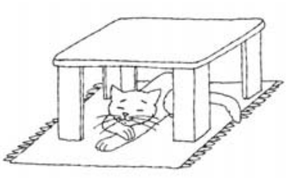
Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para identificar un objeto respecto de dos puntos de referencia utilizando la combinación de dos nociones básicas: «encima de» y «debajo de».

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante tiene que discriminar y seleccionar la escena que presenta al gato en la posición pedida. Las otras dos escenas cumplen las condiciones solo en forma parcial, pues en una el gato se encuentra debajo de la mesa pero no encima del tapete y, en la otra, está encima del tapete pero no debajo de la mesa.

¿Cómo se calificaron las preguntas?

Se consideraron como correctas aquellas respuestas en las que el estudiante identificó al objeto pedido, es decir señaló, con x o con otro símbolo, la escena siguiente:



¿Cómo respondieron los estudiantes?

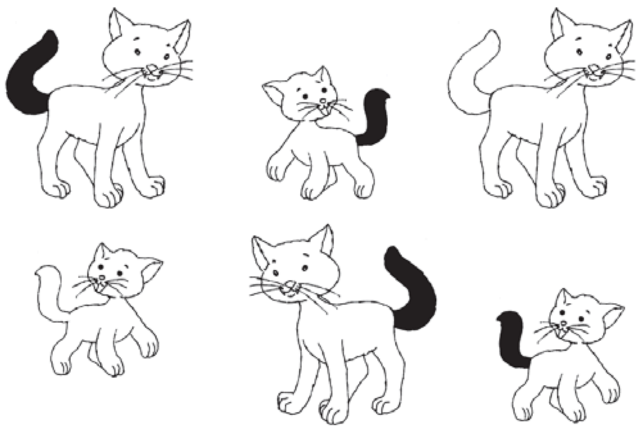
Esta pregunta se ubica en el nivel básico; en ella el estudiante debe combinar el uso de dos nociones para identificar el objeto. Una cantidad considerable de alumnos marcó escenas que solo cumplían parcialmente con la posición relativa del objeto a ubicar, es decir que solo tenían una de las condiciones solicitadas.

Se estima que un 47% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M2P21

Básico

Marca con **X** todos los gatos pequeños que tienen cola negra.



FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Espacio y forma

Contexto: Extramatemático

Formato: Selección múltiple

Nivel de desempeño: Básico

Dificultad Rasch: 289

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para clasificar objetos con respecto de dos atributos perceptuales. El contexto es extramatemático, pues utiliza representaciones de seres que forman parte de vida cotidiana del estudiante. En este caso, los atributos propuestos para realizar la clasificación son tamaño y color.

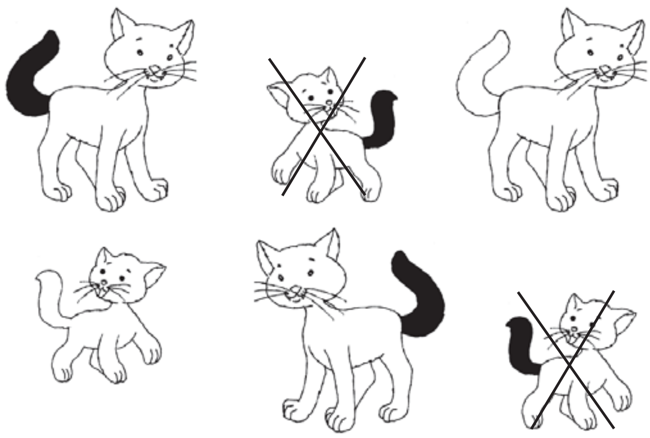
¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe comprender que los seres que aparecen en la pregunta representan un universo en el cual hay que seleccionar a aquellos que cumplan con las dos condiciones requeridas a la vez; puede entonces identificar, primero, a los gatos pequeños y, luego de hacer esta clasificación, identificar en este subconjunto a aquellos que tienen cola negra. La estrategia puede ser también clasificar primero a aquellos gatos que poseen cola negra y, luego, identificar a aquellos que son pequeños.

Desde los primeros grados, es importante desarrollar la habilidad para reconocer atributos perceptuales en grupos de objetos, pues es fundamental para establecer relaciones y construir razonamientos lógico matemáticos.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como respuestas válidas aquellas en las que el estudiante identificó a los dos gatos pequeños que tenían cola negra tal como se muestra en la figura. No se tomó en cuenta la forma de la marca sino que el estudiante realice claramente la clasificación.



[Se estima que un 45% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

M2P01

Escribe en el ☐ el resultado de la operación.

$$\begin{array}{r} 657 \\ +\ 299 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

Suficiente

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Aplicación de algoritmos

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Intramatemático

Formato: Respuesta corta

Nivel de desempeño: Suficiente

Dificultad Rasch: 298

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para calcular sumas de dos números de tres dígitos ordenados en forma vertical, en las que, si se hace uso del algoritmo de cálculo convencional, se tiene que realizar una transformación de unidades en dos momentos del proceso de cálculo.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Esta pregunta requiere que el estudiante sepa cómo aplicar el algoritmo cuando tiene que «llevar», es decir, cuando la suma de dos dígitos en una columna sobrepasa la decena. En este caso, el estudiante debe realizar dos veces esta transformación.

Otra estrategia que se puede utilizar es percibir que el segundo sumando es una unidad menor que 300; entonces, puede sumar 300 y, luego, restar una unidad al resultado.

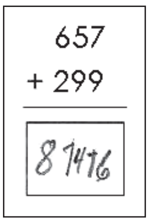
¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como correctas aquellas respuestas en las que el estudiante escribió «956».

Además, se registraron respuestas erradas tales como: «846» (en este caso el estudiante sumó las columnas y solo registró las unidades de cada resultado parcial); o «856» (aquí el estudiante «llevó» las decenas pero olvidó realizar el acarreo en las centenas); o «946» (donde el estudiante no «llevó» a las decenas pero sí lo hizo a las centenas).

¿Cómo respondieron los estudiantes?

No se detectaron patrones de aquellos errores que se supone comunes; es decir, hubo muy pocas respuestas como «846», «856» o «946», en las que el error fuese por «llevar» mal una vez, o realizar sumas separadas sin colocar las decenas. La mayoría de los errores observados se refería al hecho de considerar sumas independientes y colocar las decenas y centenas llevadas como parte del resultado, como se muestra en la figura.



El cálculo que se debe realizar con estos sumandos puede considerarse mecánico pues está utilizando un algoritmo para hallar el resultado. Además, es poco probable que un estudiante de segundo grado se enfrente con números de esta magnitud en su vida cotidiana. A partir del análisis de las respuestas que brindaron los estudiantes se puede concluir que el algoritmo tiene dos niveles de incorporación: o bien es incorporado totalmente o no se incorpora. Esto quiere decir que no se evidencia un nivel de incorporación parcial del algoritmo pues no existe un número significativo de estudiantes que olvide llevar las unidades de mayor orden, o las descarte; los errores encontrados corresponden a otro tipo de razonamientos como, por ejemplo, creer que se está calculando tres sumas independientes (6 + 2, 5 + 9, y 7 + 9).

[Se estima que un 42% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

M2P22

Suficiente

Escribe en el $\square$ el resultado de la operación.

$$\begin{array}{r} 803 \\ +\ \ 59 \\ \hline \square \end{array}$$

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Aplicación de algoritmos

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Intramatemático

Formato: Respuesta corta

Nivel de desempeño: Suficiente

Dificultad Rasch: 308

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para calcular sumas de dos números ya ordenados verticalmente con sumandos de distinta cantidad de cifras y en las que, si se utiliza el algoritmo convencional, hay que «llevar» una vez en algún orden.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante puede hacer uso del algoritmo convencional o, también, hallar el resultado mediante el empleo de estrategias de cálculo mental como, por ejemplo, darse cuenta de que 59 es igual a una unidad menos que 60, entonces sumar 60, en lugar de 59, y luego disminuir el resultado en 1.

$$\begin{array}{r} 803 \\ +\ 59 \\ \hline \square \end{array} \quad \Rightarrow$$

59 es igual a 60 – 1.

Luego el cálculo puede hacerse así:

803	+	60	=	863
863	–	1	=	862

Si el estudiante opta por utilizar el algoritmo convencional de cálculo, debe reconocer que está sumando un número formado por tres cifras con otro con dos, y no sumas independientes en columna; en este caso, tiene que llevar una decena al sumar las unidades de primer orden y, luego, realizar la suma: 1 + 0 + 5.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como correctas solo aquellas respuestas en las que el estudiante escribió «862». Entre las respuestas incorrectas, se registró de manera específica la respuesta «852», que implica que el estudiante no realizó la transformación en las decenas y, simplemente, sumó en columna sin hacer este traslado y escribió, en el caso de la suma del orden de unidades (3 + 9), solo la cifra de las unidades.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

Los errores identificados en este caso no comportan algún patrón esperado, es así que la respuesta errada esperada «852» fue registrada por un número muy pequeño de estudiantes.

Esta pregunta se ubica entre las de nivel suficiente. Su dificultad radica en el hecho de ubicar un cero en el primer sumando, algunos estudiantes eliminaron el cero y consideraron la suma 83 + 59, lo que puede responder a la percepción de que el cero no representa cantidad alguna en el orden de las decenas.

[Se estima que un 35% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

M2P23

Suficiente

Une cada nube con el cartel que le corresponde.

23	3 decenas y 4 unidades
34	2 decenas y 3 unidades
43	5 decenas
50	5 unidades
	4 decenas y 3 unidades

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Comunicación matemática

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Intramatemático

Formato: Para aparear

Nivel de desempeño: Suficiente

Dificultad Rasch: 313

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para recodificar cantidades desde su representación simbólica en el sistema de base decimal a su descomposición en decenas y unidades, y viceversa. Al tratarse de una pregunta para aparear, el estudiante puede relacionar, por ejemplo, el número 34 con su correspondiente representación en decenas y unidades o, en su defecto, partir de esta descomposición y ubicar en la primera columna el número escrito en términos de la notación de posición.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

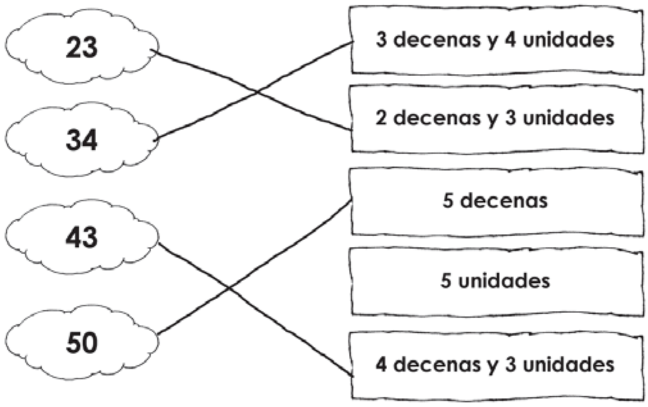
El estudiante debe interpretar los elementos que aparecen en cada columna como diferentes representaciones de números. La forma de la pregunta obliga a que el estudiante seleccione un elemento de la columna y realice su recodificación al formato presentado en la otra para establecer la equivalencia. Este proceso puede esquematizarse así:

RECODIFICACIÓN

Número representado en notación decimal ⇄ Número representado en su descomposición en decenas y unidades

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como respuestas correctas aquellas en las que el estudiante logró aparear correctamente los cuatros números mostrados en las nubes con sus respectivas representaciones, como se presenta a continuación:



¿Cómo respondieron los estudiantes?

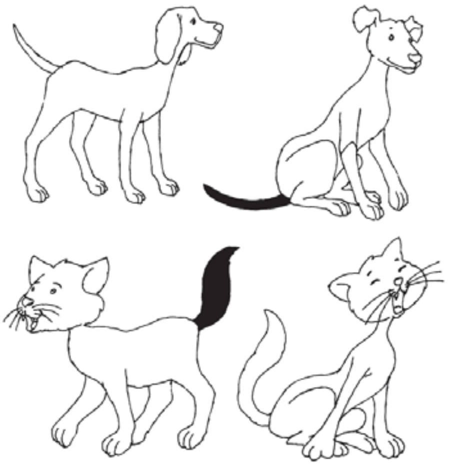
Esta es una pregunta ubicada en el nivel suficiente. A pesar de aparecer con frecuencia en los textos de segundo grado y en las actividades que se suelen proponer en el ciclo, es aún muy bajo el porcentaje de estudiantes que se encuentra cursándolo que pudo resolverla en forma adecuada.

> Se estima que un 33% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M2P24

Suficiente

Toto tiene cola negra y no es perro. Márcalo con **X**.



FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Espacio y forma

Contexto: Extramatemático

Formato: Selección múltiple

Nivel de desempeño: Suficiente

Dificultad Rasch: 318

¿Qué evalúa esta pregunta?

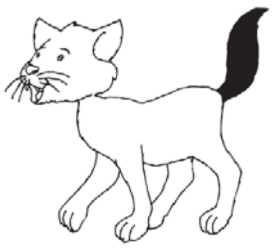
Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante de identificar objetos de acuerdo con dos atributos señalados. Su dificultad estriba en el uso de la proposición negativa para definir una de las características.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para hacerlo, el estudiante debe dividir al grupo de animales en dos subconjuntos, por ejemplo, uno de perros y otro de gatos. Primero, tiene que identificar que se pide un elemento del complemento del conjunto de perros (Toto no es perro) y, luego, en ese subconjunto identificar a aquel que tiene cola negra. Esta pregunta implica, además de la comprensión lectora, la noción de conectores lógicos.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como correctas aquellas respuestas en las que el estudiante identificó a la figura mostrada:



¿Cómo respondieron los estudiantes?

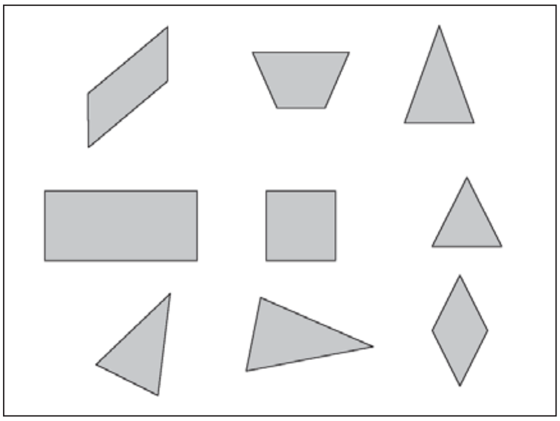
Esta pregunta se ubica entre aquellas que forman el nivel suficiente. En la educación inicial se suelen presentar tareas de este tipo, sin embargo, al hacerlo se utiliza material concreto y el docente ayuda al estudiante en la comprensión de la tarea. La transmisión oral de la consigna puede ayudar a los estudiantes a comprender mejor la situación. En el caso presentado en la prueba, la confusión de los que no respondieron puede deberse a dos motivos: la comprensión lectora y el entendimiento de la partícula negativa.

Se estima que un 31% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M2P25

Suficiente

Marca con **X** todos los triángulos.



FICHA TÉCNICA

Capacidad: Comunicación matemática

Contenido: Espacio y forma

Contexto: Intramatemático

Formato: Selección múltiple

Nivel de desempeño: Suficiente

Dificultad Rasch: 334

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para identificar triángulos de diversos tipos y en distintas posiciones. En ella, se encuentra implícita la evaluación del vocabulario geométrico elemental ya que, si un estudiante no entiende que el término «triángulo» está asociado a un cierto tipo de figura geométrica, no podrá responderla.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Como se observa, la pregunta propone un conjunto de triángulos en diversas posiciones y de diversos tipos: un triángulo equilátero con un lado horizontal, un triángulo isósceles con un lado horizontal, un triángulo isósceles sin lados en posición horizontal, y un triángulo escaleno también sin ningún lado horizontal. Para que el estudiante logre responder esta pregunta, la imagen conceptual de lo que es un triángulo debe estar al menos libre de atributos irrelevantes como, por ejemplo, «tener un lado horizontal» o «tener lados iguales». El estudiante tiene que comparar su concepción mental de triángulo con las figuras presentadas y, si están dentro de lo que considera como forma triangular, seleccionarlas para dar su respuesta.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como correctas aquellas respuestas en las que el estudiante identificó los cuatro triángulos presentes, es decir, solo se consideraron correctas las respuestas en las que marcó las cuatro figuras triangulares y no realizó ninguna marca adicional. No se consideraron como correctas aquellas respuestas en las que el estudiante marcó dos o tres triángulos, pues en la consigna se empleaba el cuantificador «todos», el cual exigía que el estudiante realizase una búsqueda exhaustiva entre las figuras presentadas para seleccionar aquellas con forma triangular. Sin embargo, se establecieron códigos de calificación que permitieron identificar una secuencia jerárquica de reconocimiento del triángulo por parte de los estudiantes.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

Esta pregunta se ubica entre las de nivel suficiente. Como ya se ha mencionado, de acuerdo con las respuestas de los estudiantes, se puede afirmar que el triángulo que más reconocen es el equilátero con un lado en forma horizontal, le sigue el isósceles con un lado horizontal, luego el isósceles con lados no horizontales y, por último, el escaleno.

> Se estima que un 25% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M2P02

Lee y observa con atención:

¿Cuántos huevos usó para preparar la torta?

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Extramatemático

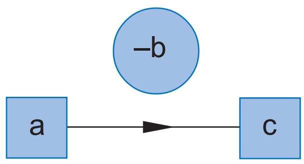
Formato: Respuesta extensa

Nivel de desempeño: Suficiente

Dificultad Rasch: 358

¿Qué evalúa esta pregunta?

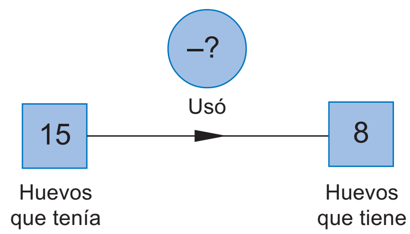
Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para resolver problemas de estructura aditiva presentados en forma de historieta. De acuerdo con la clasificación asumida en esta evaluación, el problema propuesto se considera como de Cambio 4. Esta estructura considera una transformación de estados en la que la incógnita es la cantidad de cambio y se dan como datos las cantidades inicial y final. Además, la cantidad final es menor que la cantidad inicial. El siguiente diagrama ayuda a comprender esta descripción:



Se dan como datos a y c, la incógnita es b.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

De acuerdo con el diagrama, podemos esquematizar el problema planteado del modo siguiente:



Para resolver esta pregunta el estudiante debe comprender la situación propuesta e imaginarla, identificar la cantidad inicial y restarle la cantidad que se entrega; finalmente, el resultado debe interpretarse desde la situación planteada. El contexto es muy cercano a la vida cotidiana del estudiante y los números son pequeños, pues lo que se busca analizar es si comprende este tipo de estructura presentada en forma verbal.

El estudiante debe interpretar la información presentada en forma gráfica, identificar los datos, en este caso la cantidad inicial de huevos y la final, reconocer que se ha usado una cantidad de huevos que no se conoce y que el problema le solicita hallar. Al interpretar la situación, el estudiante puede elegir dos vías de solución: la resta de las cantidades dadas o, en su defecto, la estrategia de completar desde la cantidad menor a la mayor.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como respuestas correctas aquellas en las que el estudiante:

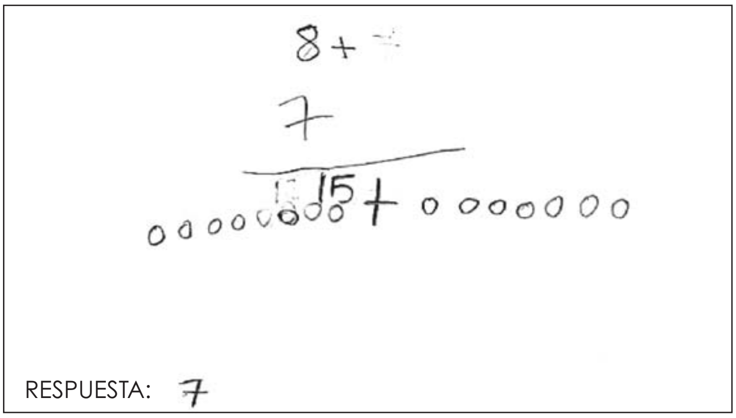
a) Planteó y ejecutó una estrategia adecuada y escribió la respuesta correcta en el contexto de la situación; por ejemplo: «7 huevos», «usó 7», «se usaron 7 huevos», entre otras respuestas similares.
b) Planteó y ejecutó una estrategia adecuada y escribió la respuesta correcta pero no la contextualizó; por ejemplo: «7».
c) Escribió solo la respuesta en el contexto de la situación.
d) Escribió solo una respuesta numérica o la graficó.

Se consideraron incorrectas en aquellos casos en los que el estudiante planteó una estrategia adecuada pero no llegó a responder o presentó una respuesta errada.

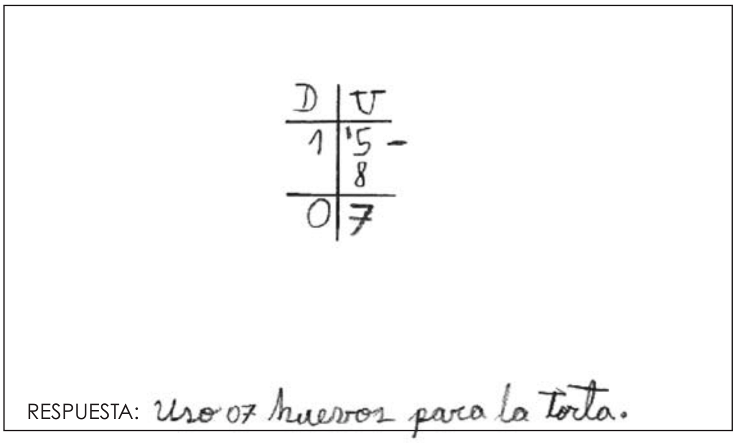
¿Cómo respondieron los estudiantes?

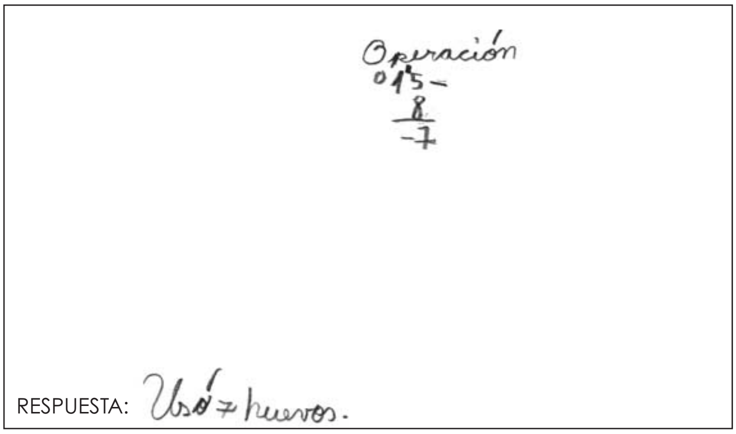
El bajo número de respuestas correctas muestra que la estructura matemática inherente a este tipo de problema no es comprendida por la mayoría de los estudiantes; sin embargo, se trata solo de un tipo más de problema de estructura aditiva que puede incluirse en la enseñanza en este nivel. El mismo problema presentado en forma de texto tuvo una menor dificultad (348), pero ambos son característicos del nivel suficiente, es decir, que los estudiantes que pertenecen a los otros dos niveles de desempeño no son capaces de resolverlos con éxito.

✓ Respuestas correctas



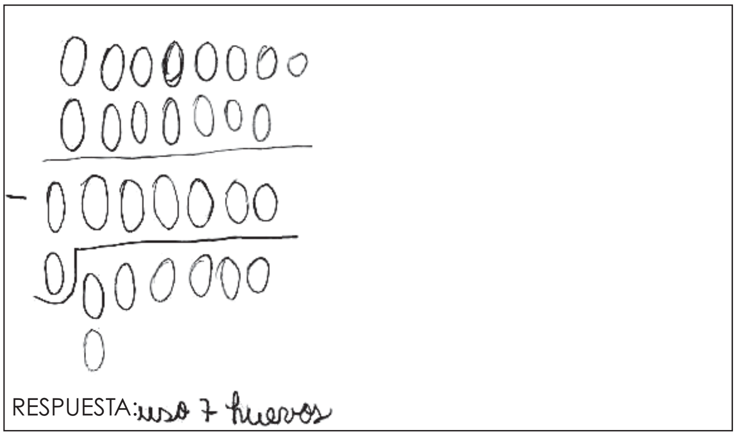
En este caso se presenta una estrategia de complemento. El estudiante toma como número principal el 15 y empieza a realizar un conteo regresivo hasta llegar a 8; entonces, reflexiona sobre cuánto ha tenido que retroceder: esta es la respuesta al problema. Estrategias de este tipo requieren ser analizadas con calma pues, a primera vista, se podrían considerar como erradas, sin embargo, reflejan interesantes modelos de pensamiento que requieren ser valorados.





En ambos ejemplos se emplea una estrategia que utiliza la resta. Es interesante observar el fuerte condicionamiento de los algoritmos convencionales al momento de calcular el resultado de 15 – 8; es así que se observa como el estudiante, al no poder restar 5 – 8, se presta el 1, con lo que obtiene nuevamente 15, y recién resta.

En este caso se observa que el estudiante utiliza una estrategia gráfica para responder. Dibuja 15 bolitas que representan los 15 huevos del enunciado y, al parecer, efectúa una cuenta mental regresiva hasta que le quedan los 8 huevos del enunciado. Con esto deduce que se han utilizado los 7 huevos que contó.



En este caso el estudiante ha hecho uso de una estrategia gráfica basada en la partición de un conjunto en dos subconjuntos, uno de los cuales representa la cantidad de huevos utilizada y el otro, la cantidad que quedaba de acuerdo con la situación planteada. Es interesante notar que este alumno se preocupó en contextualizar su respuesta con el verbo adecuado, lo que puede deberse a que conocía que existen dos grupos: uno que incluye lo utilizado y el otro, aquello que queda.

> Se estima que un 15% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

5 Principales dificultades en el desempeño en matemática

Probables causas y sugerencias pedagógicas

En este capítulo se presentan las dificultades encontradas en la comprensión de conceptos y en su puesta en práctica para resolver situaciones matemáticas en los estudiantes de segundo grado. Estas dificultades se desarrollan organizadas en núcleos de interés para la actividad del docente. Además, se esbozan algunas hipótesis acerca de las razones que explican estas dificultades y se incluye una sección con sugerencias metodológicas y didácticas para mejorar el desempeño matemático de los estudiantes.

5.1. Razonamiento lógico

El razonamiento lógico fue evaluado en la EN 2004 mediante preguntas referidas al reconocimiento de conceptos básicos, a la clasificación de objetos y a la identificación de patrones en secuencias gráficas. Los conceptos básicos evaluados fueron: arriba, abajo, adentro, afuera, encima de, debajo de, izquierda, derecha, adelante, detrás y las combinaciones binarias de estos conceptos.

Se incluyeron conceptos básicos, a pesar de que este es un tema asociado sobre todo con la educación inicial, puesto que se consideran fundamentales para la adquisición del conocimiento matemático, porque su dominio permite al estudiante insertarse en el mundo social de la escuela y constituye una ayuda para comprender instrucciones, seguir consignas, ubicarse y organizarse.

La EN 2004 ha identificado que los estudiantes de segundo grado presentaron dificultades al:

- responder preguntas que combinan dos conceptos básicos referidos a la posición de objetos;
- clasificar objetos a partir de dos atributos;
- clasificar objetos con base en la ausencia de un atributo;
- identificar el criterio de una determinada clasificación; e
- identificar patrones de series gráficas que tienen dos leyes de formación.

Si bien se presentaron dificultades para responder correctamente preguntas que combinan dos conceptos de posición, se registró una mayor dificultad al introducir en las preguntas conceptos de lateralidad como «a la izquierda de» o «a la derecha de».

Las dificultades relacionadas con el uso adecuado de los conceptos básicos mencionados pueden deberse, entre otras razones, a que en la vida cotidiana los adultos no suelen utilizar estos conceptos en el lenguaje coloquial, por ejemplo, para denotar posiciones de objetos o para efectuar comparaciones. Esta falta de precisión en el lenguaje privilegia las señas y los gestos sobre la capacidad de establecer relaciones lógicas con los conceptos básicos, con las consecuentes deficiencias posteriores en el razonamiento lógico matemático de los estudiantes.

Los conceptos básicos que el niño va adquiriendo en los primeros años de su vida son muy diversos. Entre los que se presentan con mayor frecuencia podemos citar los siguientes:

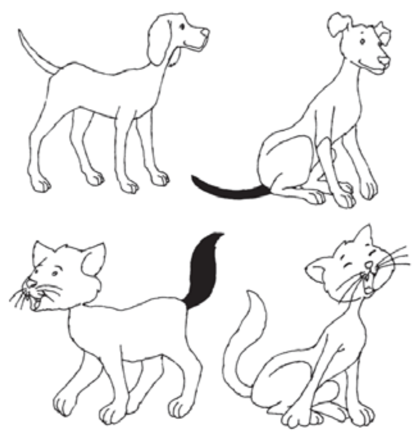
- Los conceptos que se utilizan para señalar la temporalidad (antes, después, al principio, al final, empezar, terminar, primero, segundo, último).
- Los conceptos que describen el movimiento (rápido, lento, hacia adelante, hacia atrás).
- Los conceptos que se usan para describir cantidades (más, menos, parte, entero, mitad, todos, algunos, cada, ninguno).
- Los conceptos que se usan para comparar tamaños (alto, bajo, grande, pequeño).
- Los conceptos que describen una posición (arriba, abajo, antes, después, delante, detrás, encima, debajo, cerca, lejos).

El trabajo sistemático con estas nociones ayudará al estudiante a comprender el mundo que lo rodea y contribuirá a mejorar sus habilidades de comunicación y su relación con los demás.

Algunas actividades orientadas a fortalecer las nociones básicas de orientación espacial pueden ser la construcción de juegos de tablero en los que se describen posiciones, o juegos en el patio tales como la búsqueda del tesoro o proponer pistas a los estudiantes para encontrar determinados objetos. Otra actividad muy interesante que ejercita las habilidades de comunicación es proponer a los estudiantes que escriban las instrucciones para que otros estudiantes encuentren un objeto previamente escondido en algún lugar del salón; luego, se comparte la información y se discute con los estudiantes si las instrucciones elaboradas eran o no pertinentes.

En cuanto a la clasificación de objetos, los estudiantes de segundo grado pueden hacer clasificaciones a partir de un atributo y de dos, solo si los atributos son de tipo perceptivo (tamaño, color, utilidad, entre otros); sin embargo, tienen serias dificultades para hacer clasificaciones en términos de la ausencia de un determinado atributo. Por ejemplo, para responder la pregunta mostrada, el estudiante debía identificar al ser que poseía cola negra en el grupo de seres que no eran perros; sin embargo, la mayoría señaló a aquel que poseía cola negra y era perro.

Toto tiene cola negra y no es perro. Márcalo con **X**.



Este tipo de tarea de identificación a partir de un conjunto de objetos presentado en forma gráfica se debe ejercitar desde los primeros grados, pues ayuda mucho a la concentración, a la visualización, al uso apropiado del lenguaje y permite entender cuándo un objeto posee determinadas características y cuándo no, lo que constituye la base de la definición formal en matemática.

Además, esta pregunta tiene un formato muy útil para el docente, quien puede generar tareas parecidas con diversos grados de complejidad. Nótese que la raíz de esta tarea está en la selección o hallazgo de un determinado objeto con ciertas condiciones. Esta estructura, que algunos educadores matemáticos conocen como actividad de «construcción de objetos» (Gómez y Mesa 1996), se presenta al resolver problemas de geometría o aritmética en toda la educación matemática, sea básica o especializada. Por esta razón, se recomienda al docente incorporar actividades de «construcción de objetos» en su práctica cotidiana.

Asimismo, el conjunto de los bloques lógicos creados por Zoltan Dienes es un material que permite generar problemas de clasificación con distintos niveles de complejidad, por lo que es un error considerar que este material es solo útil en la educación inicial. Hay actividades interesantes que se pueden trabajar con los estudiantes de primer o segundo grados y que les ayudarán a desarrollar el conocimiento relacional y estimularán la capacidad de comparar cualidades de los objetos.

Los estudiantes aprenden los conceptos básicos a partir de la interacción con el mundo que los rodea. Estos no deben ser trabajados únicamente en el medio escolar, de allí la gran responsabilidad que tienen los padres de familia en ayudar a sus hijos a incorporar estos conceptos.

Los trabajos del psicólogo Jean Piaget han demostrado que la comprensión de la matemática elemental depende de la construcción de nociones lógicas que el niño elabora espontáneamente en interacción con su medio ambiente. También constatan que la lógica no proviene del lenguaje sino de más lejos: de las coordinaciones generales de la acción, lo que hace que exista una relación entre los esquemas de asimilación y las leyes de la lógica.

El desarrollo de actividades de iniciación a la lógica se facilita con el empleo de juegos y mediante el trabajo con colecciones o conjuntos, entre los que se establecen relaciones y se realizan operaciones. El juego constituye una estrategia metodológica muy útil para lograr aprendizajes significativos en los estudiantes, pues promueve la interacción social, y la comunicación matemática. Asimismo, ayuda a plantear las diversas perspectivas que un mismo objeto matemático puede tener.

Existen varios juegos que pueden resultar útiles tanto para practicar con los estudiantes y desarrollar las habilidades lógicas de deducción como para ayudar a la clasificación de objetos. Son muy interesantes para este propósito juegos como ¿Quién es quién?, Clue Junior, Sospechosos o Logic. A continuación, se presentan algunas ventajas de utilizar juegos matemáticos en el aula.

- Contribuyen a desarrollar el espíritu constructivo, la imaginación y la facultad de sistematizar, tan necesarios en el aprendizaje de la matemática.
- Están íntimamente relacionados con el pensamiento reflexivo e hipotético, por lo tanto, contribuyen con su desarrollo.
- Promueven el desarrollo de habilidades para comprender conceptos y términos matemáticos, detectar analogías, diferencias y similitudes, identificar elementos críticos y seleccionar datos y procedimientos correctos, y para cambiar perspectivas cuando sea necesario.
- Desarrollan habilidades para descubrir y establecer relaciones matemáticas.
- Colaboran al desarrollo de una actitud positiva hacia la matemática.
- Favorecen la interacción social y, de manera muy efectiva, la motivación.
- Generan un bajo nivel de ansiedad, elevan la autoestima y las buenas relaciones con los pares.

La formación del pensamiento lógico requiere de un ejercicio continuo y debería estar presente en todos los ciclos de la educación desde la educación inicial hasta los grados superiores de educación secundaria.

Para el caso de segundo grado se puede sugerir una secuencia didáctica con los conceptos lógicos que incluye los siguientes aspectos:

- Propiedades de los objetos
- Organización de la información
- Relaciones
- Diagramas, gráficos y esquemas

En el desarrollo de esta secuencia, el docente debe considerar el uso de diversos materiales, principalmente concretos, y brindar espacios de juego para que esos conceptos se incorporen en el microcosmos de su aula. Veamos cada uno de estos aspectos.

Propiedades de los objetos

Dar al estudiante objetos para que identifique sus propiedades, que pueden ser absolutas como color o forma, o relativas como tamaño, espesor o volumen, entre otras. Cuando el estudiante identifica los atributos puede realizar comparaciones generales, generar relaciones entre los objetos y organizarlos.

Organización de la información

Proponer al estudiante actividades para clasificar objetos de acuerdo con diversos criterios, construir trenes de diferencias, relacionar los datos entre sí, adivinar mediante preguntas un determinado bloque lógico, etc.

Relaciones

La noción de relación es una de las nociones matemáticas más generales y primitivas. El estudiante puede establecer relaciones de diversos tipos como, por ejemplo, «A es más grande que B», o «A tiene la misma forma que B».

Diagramas, gráficos y esquemas

En esta fase es conveniente presentar al estudiante diversos diagramas para que organice la información y exprese de manera visual las relaciones que ha construido. En la educación infantil se pueden incluir diagramas de doble entrada, diagramas de Venn, esquemas sagitales o diagramas de árbol.

Entre los materiales más usuales para la iniciación a la lógica, se puede mencionar aquellos más versátiles y que pueden ser construidos fácilmente por el docente. Además, existen sitios en Internet dedicados a la elaboración de actividades didácticas con estos materiales.

Materiales para la iniciación a la lógica

- Bloques lógicos de Dienes: conjunto de figuras geométricas que corresponden a atributos de color, forma y espesor.
- Material Trimat: conjunto de formas geométricas cuyas variables son forma, color y número de perforaciones, que pueden ser confeccionadas en cartulina plastificada o en cartón.
- Regiones poligonales de color: conjuntos de bloques del mismo espesor pero de diferentes formas y tamaños, generalmente se utilizan las formas triangular, cuadrada, romboide, trapezoidal y hexagonal.
- Tarjetas lógicas con dibujos: conjunto de tarjetas que permiten la clasificación de acuerdo con un número de atributos. Se construyen partiendo de un diagrama de árbol.
- Tarjetas Flog: estas tarjetas presentan secuencias de dibujos con uno o varios atributos. Tienen tres partes: un conjunto de figuras al que se le da un nombre arbitrario, otro conjunto de dibujos que no pertenecen a la clase presentada anteriormente y, por fin, un tercer conjunto donde se pide identificar a aquellos que pertenecen a la clase.
- Tarjetas de atributos: tarjetas referidas a los bloques lógicos de Dienes que señalan gráficamente los atributos correspondientes a los bloques (forma, tamaño, color).
- Tarjetas con mensajes lógicos: tarjetas diseñadas para que el estudiante pueda «leer» un mensaje mediante la decodificación e identificación del objeto que le pide la tarjeta.
- Hojas con diagramas de Venn, de Carroll, de árbol, de doble entrada, etc.

5.2. Iniciación a la geometría

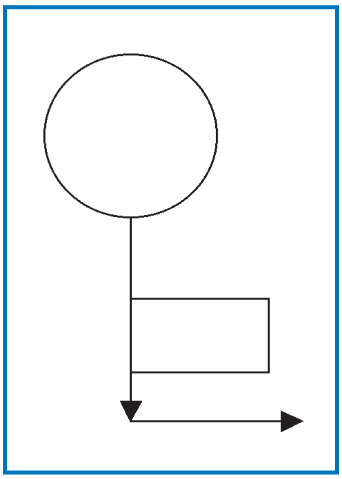
La iniciación a la geometría fue evaluada en la EN 2004 mediante preguntas referidas al reconocimiento de formas bidimensionales y tridimensionales elementales. En la mayoría de los casos, se utilizó el lenguaje geométrico convencional. Aunque las preguntas referidas a este aspecto no fueron las más difíciles de la prueba, se ha detectado que los estudiantes de segundo grado tienen dificultades al:

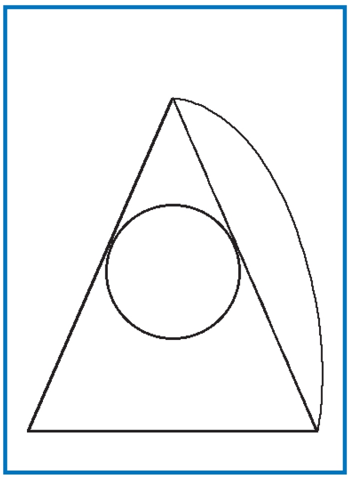
- reconocer el vocabulario geométrico convencional;
- identificar figuras geométricas elementales como triángulos o rectángulos en posiciones y contextos diversos; e
- identificar elementos de figuras geométricas como ángulos, lados o caras.

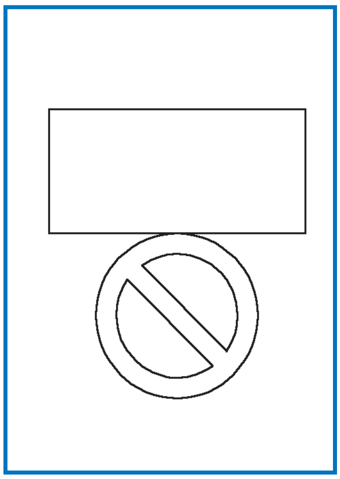
La dificultad en el uso del vocabulario geométrico convencional, al parecer, se produce porque, en la mayoría de los casos, los docentes no suelen utilizar el lenguaje propio de la geometría en sus clases reemplazándolo por vocablos coloquiales, como en el caso del uso la palabra «esquina» para referirse al vértice o ángulo. La supuesta dificultad de aprendizaje de un lenguaje técnico no está justificada plenamente: si logramos motivar al estudiante, este puede aprender nombres supuestamente complejos, como lo demuestran las largas listas de personajes de historietas que memorizan.

Se considera que debe convertirse en un hábito que el docente cuide su lenguaje y trate de utilizar el vocabulario geométrico básico durante sus actividades, sea en clase de matemática o en los cursos de otras áreas. Una gran oportunidad para ejercitar este aspecto se presenta en el momento de hacer trabajos manuales para actividades extracurriculares, ferias o proyectos. Estas situaciones son muy ricas para que el docente incorpore el lenguaje matemático estándar.

Algunas actividades lúdicas pueden ayudar a promover el uso del lenguaje geométrico apropiado. Como ejemplo, se propone la siguiente. Se entrega a un alumno un dibujo de un diseño geométrico y se le pide que transmita en forma verbal sus características a un compañero. La clase puede organizarse en grupos y realizar una competencia: cada grupo designa a un representante que será el receptor de la información y a otro que será el emisor, el docente entrega dibujos a cada uno de los emisores. La tarea consiste en que, usando solo el lenguaje oral, el receptor logre hacer el dibujo de la tarjeta en la pizarra; luego de un determinado tiempo, el profesor calificará los resultados y dará un ganador de la ronda. Los siguientes son ejemplos de dibujos para esta actividad.







Entre otras actividades, puede ser muy útil el uso del origami como elemento motivador. Este antiguo arte no solo contribuirá al desarrollo de la psicomotricidad fina sino que, con un enfoque adecuado, puede ayudar al estudiante en el proceso de identificación de formas básicas y en la incorporación del lenguaje geométrico. Por ejemplo, si un docente está enseñando a hacer un vaso a partir de una hoja de papel cuadrada, debería utilizar términos geométricos apropiados como cuadrado, diagonal, ángulo, lado, simetría, entre otros.

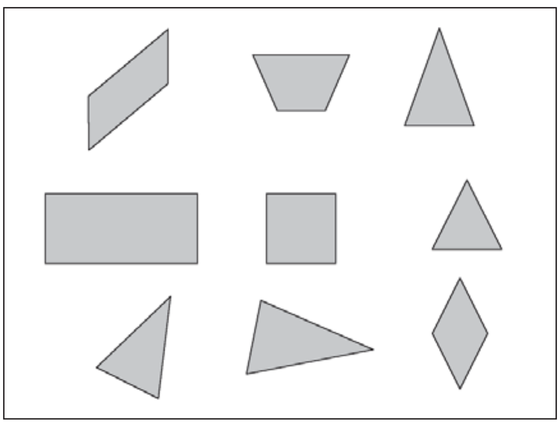
No solo se trata de incorporar un vocabulario específico, lo importante es el desarrollo del concepto geométrico. El vocabulario servirá como etiqueta del arquetipo que el estudiante ha construido del concepto.

Respecto de este tema, Orton (1990) señala que no se puede aprender a partir de definiciones, sino que el niño debe ser expuesto a experiencias para el aprendizaje de un concepto, estas deben ser ricas en la presentación y manipulación de ejemplos y contraejemplos.

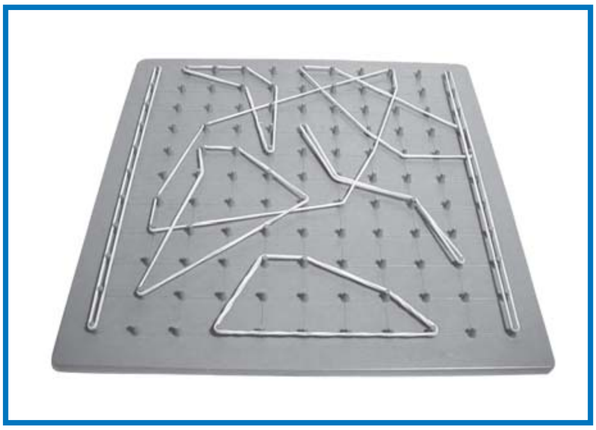
La construcción de un concepto es un proceso largo que implica formar un esquema conceptual o imagen mental que se acerque a la definición formal del concepto. Para lograrlo, el docente debe proveer al estudiante de diversas experiencias que le permitan discriminar entre los atributos relevantes del objeto que estudia y los que no lo son. Definir es establecer las características necesarias y suficientes del objeto de estudio (Hernández y otros 1997) con base en diferentes experiencias con ejemplos y contraejemplos presentados en diversos soportes sean gráficos, verbales, concretos o virtuales, entre otros. A partir de estas experiencias, el estudiante va delimitando su definición personal del concepto y eliminando aquellos atributos irrelevantes. Si estas experiencias están bien orientadas, irá acercándose cada vez con mayor rigor a la definición formal.

Se presenta un ejemplo de este proceso mediante el análisis de las respuestas a una pregunta de la EN 2004.

Marca con **X** todos los triángulos.



Si un estudiante tiene una imagen conceptual del triángulo considerando atributos tales como tener tres lados iguales y que un lado sea horizontal, solo marcará al triángulo equilátero y no reconocerá como triángulos a las otras tres figuras presentadas. Los resultados muestran que un grupo considerable de estudiantes no reconoció a los triángulos inclinados como tales: esto nos indica que consideraban como un atributo del triángulo el tener un lado horizontal. Este razonamiento puede deberse, entre otros factores, a que en la mayoría de los ejemplos de triángulo presentados en los libros de texto, diccionarios y enciclopedias aparece el triángulo en esta posición,[28] y a que los docentes, por lo general, dibujan los triángulos privilegiando esta posición. De allí la importancia del trabajo con material concreto como, por ejemplo, el geoplano.[29] Con este material el estudiante puede encontrar diversas formas de dibujar un triángulo que no están asociadas a la presentación con un lado horizontal, como se ve en el ejemplo siguiente:



Como se ha explicado, el proceso de construcción de un concepto pasa por la interpretación que el estudiante hace de los ejemplos del concepto que le son presentados. Así, al tener muchos ejemplos de triángulos con base horizontal, el estudiante termina por incorporar esta característica en su imagen mental.

Hershkowitz (1990) distingue dos tipos de atributo que participan en una definición: los atributos relevantes y los atributos irrelevantes.

Atributos relevantes: aquellos que caracterizan al concepto, se presentan en la totalidad de los ejemplos del concepto.

Atributos irrelevantes: aquellos que aparecen en algunas representaciones del concepto; por ejemplo, un triángulo puede tener un ángulo recto, pero este no es un atributo que se cumpla en todos los triángulos.

Este autor también hace una distinción entre lo que denomina imagen conceptual (*concept image*) y definición conceptual (*concept definition*). La *imagen conceptual* describe la estructura cognitiva total que está asociada con el concepto, la cual incluye representaciones mentales y propiedades asociadas. La *definición conceptual* es una forma verbal utilizada para caracterizar un concepto que puede ser informal o formal. Además,

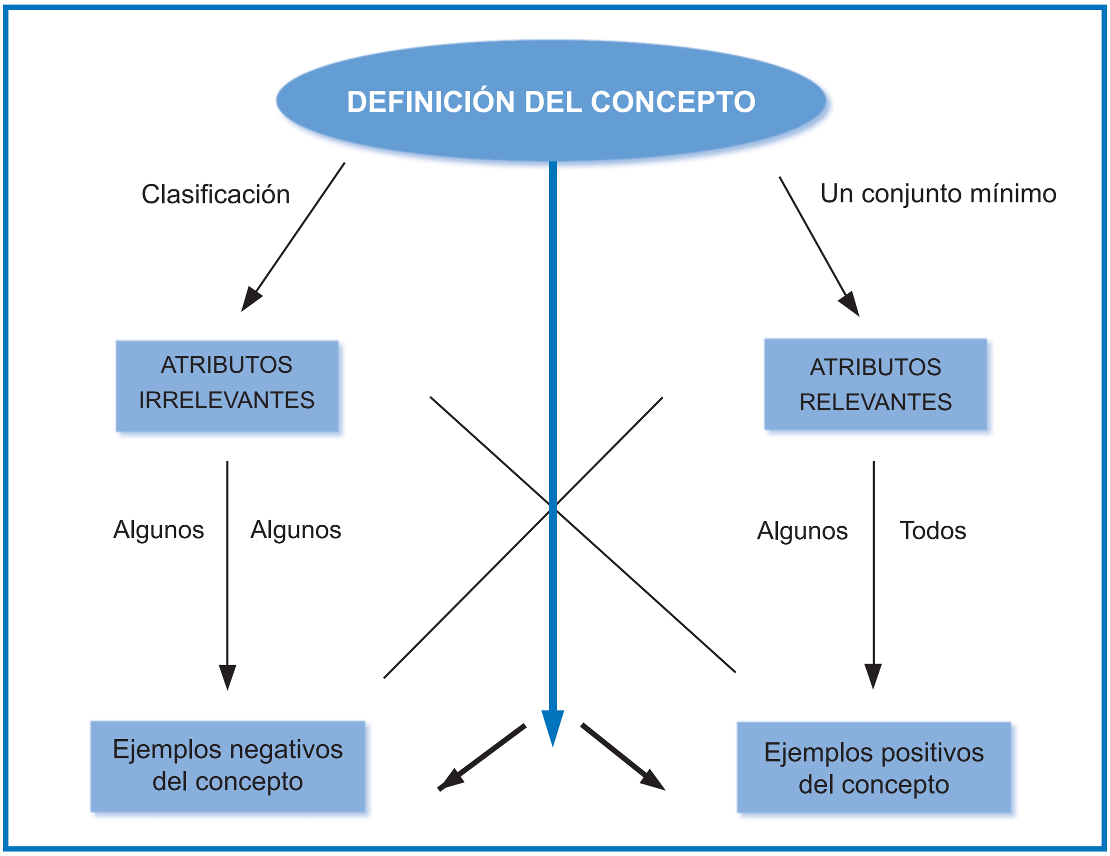
28. En el capítulo 4, dedicado a las formas geométricas, del texto entregado por el MED (Gaita y otros 2004) se observa que, de 34 figuras triangulares, 28 tienen un lado horizontal.
29. El MED ha entregado a las IE módulos de materiales que incluyen tangramas, mosaicos y geoplanos, entre otros.

señala que para manejar los conceptos se necesita una imagen conceptual y no una definición conceptual. Por lo general, las definiciones conceptuales permanecen inactivas o, incluso, son olvidadas. En el razonamiento es siempre la imagen conceptual la que se evoca (Vinner 1981).

Cuando se define un concepto en función de sus atributos, solo se usan aquellos relevantes: se trata de buscar un subconjunto mínimo que caracterice al concepto.

Uno de los objetivos principales de la enseñanza de la geometría en los primeros años es el reconocimiento de las formas. Para que se logre este propósito, el docente debe conocer en qué nivel de razonamiento se encuentran sus estudiantes. En el caso de segundo grado, la EN 2004 ha establecido que los estudiantes se ubican en el Nivel 1 del Modelo de Van Hiele (Crowley 2004). En este nivel, que es el de *reconocimiento*, los estudiantes observan los conceptos globalmente referidos a su forma y todavía las propiedades irrelevantes se encuentran presentes en la definición de los objetos matemáticos. Aquí, los estudiantes no pueden, por ejemplo, reconocer al cuadrado por sus propiedades, como tener cuatro ángulos rectos o poseer todos sus lados iguales.

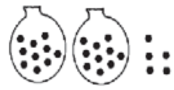
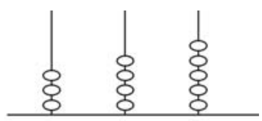
Hasta hace muy poco se consideraba que la geometría solo podía ser enseñada partiendo de una base axiomática, sin embargo, hoy se piensa que es más importante el conocimiento experimental. El siguiente diagrama muestra la interrelación entre ejemplos y contraejemplos en el proceso de formación de un concepto:



De todo lo expuesto se concluye que la didáctica de la geometría debe promover un aprendizaje de conceptos basado en la presentación de ejemplos y contraejemplos que considere el nivel de razonamiento de los estudiantes y que los provea de experiencias de aprendizaje con material concreto y de su propio entorno.

5.3. Sistema de numeración decimal

Para evaluar la comprensión del sistema de numeración de base diez, la EN 2004 incorporó preguntas referidas a la aplicación de las representaciones de los números y recodificaciones de diversas representaciones usuales de números, simbolizaciones y descomposiciones en unidades de orden jerárquico. Se utilizaron preguntas para aparear, para llenar tablas o para escribir una respuesta corta. Las representaciones utilizadas en la evaluación fueron la representación pictórica, la notación decimal y la descomposición decimal. A continuación se presenta un cuadro con los diversos soportes en los que se pueden representar los números.

NOMBRE	DESCRIPCIÓN	REPRESENTACIÓN
Representación pictórica	Representación gráfica de un número utilizando objetos de la realidad inmediata, agrupados o no respecto de la base.	El gráfico es la representación pictórica del número 25. 
Notación decimal	Representación usual de los números mediante numerales indoarábigos, utilizando los principios de la notación de posición.	345 56 1000
Descomposición decimal	Representación simbólica de un número que muestra su descomposición en grupos referidos a la base, en este caso decimal.	El 345 tiene una descomposición decimal: 3c 4d 5u
Representación gráfica en el tablero de posición	Representación de un número usando el tablero posicional.	El 345 se representa en el tablero posicional como: C | D | U ooo | oooo | ooooo
Representación gráfica en el ábaco	Representación utilizando un ábaco de cuentas.	El 345 se representa en el ábaco como:  C D U

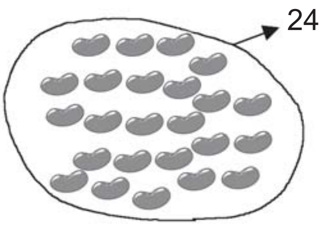
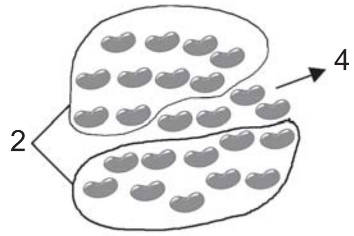
Las principales dificultades de los estudiantes sobre el sistema de numeración decimal registradas en esta evaluación fueron las siguientes:

- Los estudiantes no llegan a consolidar el valor posicional de las cifras en un número.
- Los estudiantes responden mecánicamente a ciertos estímulos tipo que, con frecuencia, se presentan en los libros de texto.

- Los estudiantes tienen gran dificultad para recodificar un número representado pictóricamente a su representación en la notación decimal.

Estas dificultades pueden deberse, entre otras razones, a que existen deficiencias en la tarea de inclusión de clases. Jean Piaget estudió este tipo de actividad en relación con el concepto de número y la inclusión jerárquica, y señaló que los niños logran la *coordinación simultánea* de pensar en un todo y en sus partes constituyentes luego de los cuatro años de edad. Esta actividad es la que permite al niño comprender el sistema de numeración de base diez.

Aclaremos esto con un ejemplo. Cuando a un estudiante se le presentan 24 semillas, puede contarlas y saber que hay 24; pero, para que logre la comprensión de que el 2 en el numeral 24 representa a dos grupos de decenas, la operación mental que debe realizar es separar la cantidad de semillas en dos grupos de diez unidades y en un tercer grupo de cuatro unidades y, al hacerlo, recordar que esta separación se hace a partir del grupo de 24 unidades. Cuando logre pensar, al mismo tiempo, en estas dos formas de representar mentalmente el número 24, habrá construido un sistema de decenas y unidades (d, u) sobre la base del sistema de unidades independientes que maneja (u).

	
La cantidad 24 como un sistema de unidades (u).	La cantidad 24 como un sistema de decenas y unidades (d, u).

Sharon Ross (1986) ha realizado diversas investigaciones con niños pequeños acerca del dominio y comprensión del sistema de numeración decimal. Sus experimentos establecieron la existencia de cuatro estados en los que pueden encontrarse los estudiantes:

Estado 1: El estudiante no tiene aún construido el concepto de número, no puede realizar conteos más allá de la decena.

Estado 2: El estudiante cuenta y utiliza cantidades mayores a la decena, pero dentro de un sistema de unidades. Por ejemplo, para estos estudiantes el número 24 está formado por 24 unidades, no pueden visualizarlo como un número compuesto por dos unidades de decenas y cuatro unidades.

Estado 3: El estudiante maneja con soltura un sistema de decenas construido aparte de un sistema de unidades. En este nivel puede reconocer, a la vez, que el 24 es 24 unidades y, también, 2 unidades de decenas y 4 unidades.

Estado 4: El estudiante ha logrado establecer un sistema jerárquico que le permite trabajar a la vez con tres órdenes: centenas, decenas y unidades.

A partir del análisis de las respuestas dadas por los estudiantes de segundo grado en la EN 2004, podemos afirmar que la mayoría de ellos se encuentra en el Estado 2, es decir, trabajan con un sistema de unidades; por eso les resulta difícil, por ejemplo, recodificar el número 324 cuando es presentado en forma pictórica.

Se podría creer que los estudiantes de segundo grado comprenden la lógica del sistema si solo se les evalúa con actividades como la presentada a continuación, que busca relacionar dos formas de representación:

Une cada nube con el cartel que le corresponde.

23	3 decenas y 4 unidades
34	2 decenas y 3 unidades
43	5 decenas
50	5 unidades
	4 decenas y 3 unidades

Esta pregunta para aparear fue propuesta en la EN 2004 y se ubicó entre las preguntas más fáciles del nivel suficiente. Sin embargo, la pregunta mostrada en la siguiente figura fue una de las más difíciles de la prueba.

Une cada nube con el cartel que le corresponde.

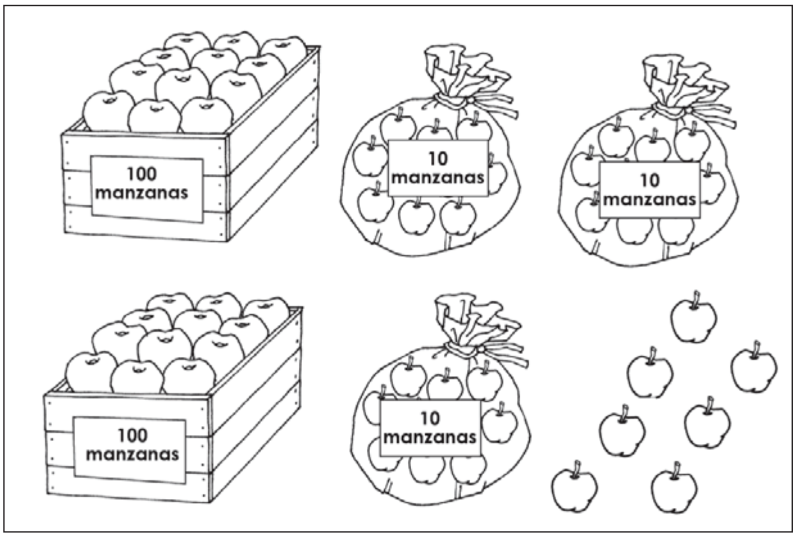
36	5 decenas y 8 unidades
85	3 unidades y 6 decenas
63	3 decenas y 6 unidades
58	8 decenas y 5 unidades
	3 decenas y 8 unidades

En esta pregunta se ha alterado el orden en que se suele dar la descomposición en decenas y unidades colocando primero las unidades y, luego, las decenas, por lo que se puede inferir que la diferencia se debe a que el alumno responde solo por identificación de patrones, pero que no comprende la descomposición de un número en decenas y unidades.

Como se ha señalado, la mayoría de los estudiantes aún no ha logrado pasar al nivel en el que puede construir un sistema de decenas y unidades; solo manejan un sistema de unidades y trabajan mecánicamente la numeración decimal. Por esta razón, los algoritmos de cálculo resultan ser para estos estudiantes únicamente conjuntos de instrucciones que memorizan sin llegar a entender la lógica de su funcionamiento.

Otra dificultad que se logró detectar fue que los estudiantes están muy condicionados por el dibujo que se presenta y, por ejemplo, en el caso de una pregunta en la que se demandaba recodificar un número de su representación pictórica a la notación de base diez, los estudiantes contaron las manzanas que se veían sin tener en cuenta que se les informaba que cada cajón constaba de 100 manzanas y cada bolsa, de 10 manzanas.

En cada cajón hay 100 manzanas y en cada bolsa hay 10 manzanas.
Escribe en el espacio el número de manzanas que hay en total.



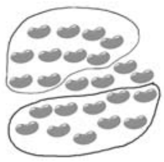
Hay ______ manzanas en total.

La educadora Constance Kamii sostiene que la comprensión del sistema de numeración decimal se ve interferida por la enseñanza algorítmica de las operaciones de adición y sustracción, ya que en estas los dígitos de distintas posiciones son tratados como unidades y no como grupos de diez unidades en el caso de las decenas, o de diez decenas en el caso de las centenas (Ross y Sunflower s. f.).

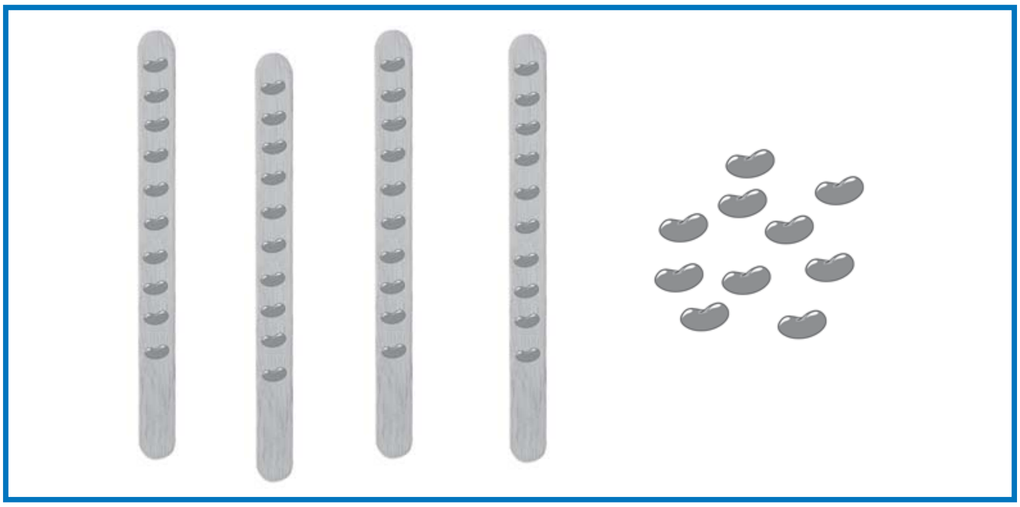
Es muy poco frecuente que los estudiantes manipulen objetos con el fin de construir su propio sistema de decenas y unidades; sin embargo, es conveniente para lograr una mejor comprensión de la estructura de este sistema que el estudiante trabaje con material concreto estructurado mediante actividades de canje y representación de números. También se sugiere el trabajo con llenado de tablas que permite la reversibilidad del pensamiento y ayuda a consolidar el valor posicional.

A continuación se presentan algunas actividades que pueden servir al docente para comprobar si sus estudiantes comprenden el sistema de valor posicional o aún no lo han logrado. La primera actividad desarrolla la reversibilidad del pensamiento, permite observar un mismo número desde diversos soportes y ayuda a establecer relaciones entre las distintas representaciones. En educación matemática, a este tipo de actividad se le denomina «llenado de tablas» y consiste en presentar al estudiante una tabla con algunas celdas vacías para que la complete a partir de la información que proporcionan las celdas llenas. A continuación se presenta un ejercicio de este tipo.

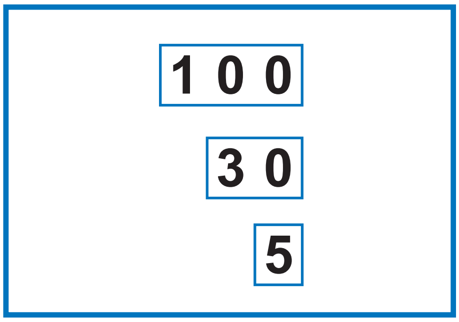
Completa la siguiente tabla:

GRÁFICO	DESCOMPOSICIÓN	NOMBRE	NOTACIÓN DECIMAL
			
	5 decenas y 6 unidades		
			45
		Treinta y cuatro	

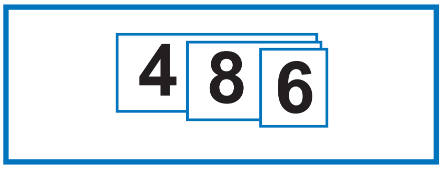
Los materiales concretos más utilizados suelen ser los bloques multibásicos, pero también se puede preparar material utilizando pequeñas bolsas con cierre en las que se colocarán diez frijoles u otros objetos pequeños para representar las decenas. Asimismo, se puede pegar diez frijoles en palitos de helados y emplearlos para realizar ejercicios.



Otros materiales, como las tarjetas de descomposición, pueden ser fabricados fácilmente por el docente. Estas tarjetas se pueden construir con fichas rectangulares de cartulina, todas con el mismo ancho pero con diferente longitud, como en la siguiente figura:



Se aprecia aquí el tamaño relativo de estas tarjetas. Se prepara un conjunto que contenga nueve centenas del 100 al 900, nueve decenas del 10 al 90 y los nueve dígitos del 1 al 9. Por ejemplo, para formar el número 486, tomamos la tarjeta de 400, luego la de 80 y, finalmente, la de 6. Si se colocan una sobre otra, se podrá ver el número pedido.



Los juegos colectivos son muy eficaces para lograr un aprendizaje de la matemática, por ello se propone incluir más juegos de este tipo en los que los estudiantes realicen canjes, agrupamientos, codificaciones y recodificaciones.

5.4. Relación de orden en los números naturales

La EN 2004 evaluó la relación de orden en los números naturales mediante preguntas que requerían que el estudiante ordene conjuntos de números, identifique el máximo o mínimo de un conjunto discreto de números, realice conteos ascendentes y descendentes, complete progresiones aritméticas con razones positivas y negativas, y resuelva problemas cotidianos que involucran el uso de las propiedades de orden de los números naturales.

Esta evaluación ha demostrado que los estudiantes pueden responder preguntas que implican contar y realizar comparaciones con números hasta la centena; sin embargo, esta capacidad de ordenar y comparar números no se basa en la construcción del sistema de notación posicional sino en la memorización de la secuencia numérica. Algunos investigadores denominan a este proceso «construcción de una recta numérica mental»: el estudiante sabe que 56 es mayor que 35 porque «viene después en la lista de conteo» y no por la comparación entre decenas y unidades.

La principal dificultad detectada en la EN 2004 es que la mayoría de estudiantes no logra resolver problemas de contexto real referidos a la relación de orden, por lo que la mayor parte de las preguntas que enfocaban este aspecto resultaron las más difíciles de esta evaluación, fuera del conjunto requerido para el nivel suficiente. A continuación se presentan dos ejemplos de este tipo de preguntas.

La tabla muestra las distancias en pasos de tu salón a distintos lugares de tu colegio.

LUGAR	DISTANCIA
PATIO	52 pasos
QUIOSCO	62 pasos
BAÑO	38 pasos
DIRECCIÓN	65 pasos

Marca con **X** los lugares que se encuentran a menos de 60 pasos del salón.

Para resolver esta pregunta, el estudiante debía extraer la información numérica necesaria de la tabla mostrada, realizar la comparación con la distancia de referencia, en este caso 60, y obtener los números menores a este, que son 52 y 38. Finalmente, debía dar como respuesta los lugares, es decir, el patio y el baño.

La dificultad de esta pregunta puede explicarse, entre otras razones, por la poca costumbre de los estudiantes de extraer información de tablas, pero también porque tiene dos respuestas y en la enseñanza formal se acostumbra presentar situaciones con solo una respuesta.

Juanito ha acomodado revistas en siete pilas. En cada una pone tres más que en la anterior.

Pila 1	Pila 2	Pila 3	Pila 4	Pila 5	Pila 6	Pila 7
11	14	17				

¿Cuántas revistas colocará en la pila 6? ___________

En este caso, una cantidad significativa de los estudiantes que respondieron solo continuó la secuencia numérica, pero no dio una respuesta a la situación planteada; algunos de los que dieron una respuesta colocaron el número correspondiente a las revistas de la pila 7. Este comportamiento muestra que los estudiantes comprendieron solo parcialmente la situación. La dificultad de esta pregunta se debe, entre otras razones, a la poca familiaridad con problemas que implican la estructura de orden y a dificultades de comprensión lectora.

También se observaron dificultades al comparar y ordenar números dentro de un contexto, es decir, números que significan edades, precios, cantidad de juguetes, etc.

Se puede señalar que las situaciones presentadas no son trabajadas con frecuencia por los docentes del grado y, aunque el enfoque propuesto por el MED parte de la resolución de problemas y el currículo así lo demanda, sería necesario considerar un mayor número de estos problemas. Se deben incluir en los materiales bibliográficos, en los cuadernos de trabajo y en la capacitación de los docentes para que los estudiantes puedan comprender mejor la estructura de orden de los números naturales, base de otras estructuras de orden en campos numéricos más amplios.

5.5. Cálculo de sumas y restas

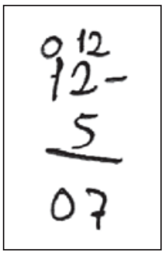
Para evaluar la capacidad de los estudiantes de calcular sumas y restas, la EN 2004 incorporó preguntas referidas a la aplicación de los algoritmos de cálculo en adiciones de diversa complejidad atendiendo a los criterios de rango numérico, uso del proceso de «llevar», número de sumandos, disposición de la operación escrita y presencia del cero. En el caso de las sustracciones, se consideraron también criterios análogos de complejidad.

Luego de realizar un análisis de las respuestas de los estudiantes, se han encontrado las siguientes dificultades:

- Utilizan el algoritmo convencional de forma mecánica y sin comprender la lógica de su funcionamiento.
- Consideran que el formato vertical propone sumas independientes. Por ejemplo, los estudiantes creen que $\begin{array}{r} 24 \\ +\ 56 \end{array}$

  se refiere a dos sumas independientes (2 + 5 y 4 + 6)

  y dan como respuesta a la operación «710».
- Utilizan el algoritmo, innecesariamente, como se demuestra, por ejemplo, al realizar restas como 15 – 8, 13 – 6, o 12 – 7. El ejemplo de respuesta que se presenta a continuación invita a reflexionar acerca de la enseñanza indiscriminada de estos algoritmos:



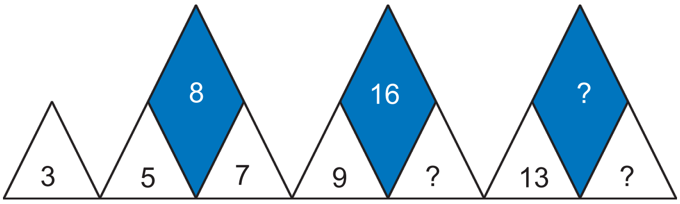
  Aquí, el estudiante no observa la resta de manera global por lo que recurre al método aprendido y, como no puede restar 5 de 2, entonces se presta y vuelve a poner el 12, para recién efectuar la operación.
- Manejan inadecuadamente el formato horizontal con números de dos cifras. Las preguntas en este formato resultaron más difíciles que las que se proponían en formato vertical.
- En la notación decimal interpretan el símbolo «0» como ausencia de cantidad; por ejemplo, consideran 803 igual que 83.

Las últimas investigaciones respecto de la enseñanza – aprendizaje de las estructuras aritméticas en la matemática escolar clasifican el cálculo en dos grandes rubros:

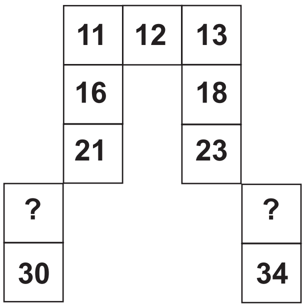
- El *cálculo relacional* constituido por las operaciones de pensamiento necesarias para manejar las relaciones que intervienen en la situación y que se expresan en forma de teoremas o inferencias en acción, no necesariamente explícitos.
- El *cálculo numérico* que incluye las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división.

Pueden verse ejemplos de actividades que promueven el cálculo relacional en libros de texto cubanos. Del libro *Didáctica de la Matemática* (2003) del educador cubano Joaquín Palacio Peña extraemos dos de ellos.

Determina los números que faltan:



¿Cuáles son los números que faltan en los espacios en blanco?



Este autor señala que, en Cuba,[30] los docentes de primaria se preocupan por enseñar el cálculo relacional y proponen muchas de estas actividades en sus clases. Las ventajas son claras, pues en este tipo de actividad lo primordial no es el cálculo aritmético sino que los estudiantes descubran las relaciones existentes entre los números que se presentan, los patrones de determinadas configuraciones o secuencias numéricas. Este tipo de problemas promueve habilidades como la estimación, el razonamiento lógico, la formulación de conjeturas y la elaboración de inferencias.

La educadora Constance Kamii, en su libro *El niño reinventa la Aritmética* (1994a, vol. 3), sostiene que, en los primeros cursos, las operaciones deben ser aprendidas por los estudiantes mediante situaciones conflictivas reales, situaciones en las que deben poner en práctica su intuición y sus experiencias previas. Lo importante es desarrollar la estructura aditiva o multiplicativa, es decir, el significado de las operaciones, pues los números no suelen presentarse en la vida cotidiana en forma aislada, siempre tienen un significado. El docente debería aprovechar estas situaciones para lograr la comprensión de la relación entre las operaciones matemáticas y las acciones reales y mentales que conlleva hacer una adición o una sustracción.

30. Cuba fue el país con mejores resultados en la prueba de matemática en el Primer Estudio Internacional Comparativo realizado por el LLECE (Laboratorio Latinoamericano de la Evaluación de la Calidad Educativa) en el año 1998.

En la EN 2004 se han detectado los siguientes errores al realizar cálculos de sumas y restas:

ERRORES MÁS FRECUENTES

SUMA

- Añadir el número que se «lleva» al resultado.
- Sumar columnas independientemente.
- Olvidar añadir el número que se «lleva».
- Agregar irregularmente el número que se «lleva».
- Equivocar el número que se «lleva».
- Sumar todo en sumas presentadas en formato horizontal.

RESTA

- No disminuir la cifra que realiza el «préstamo» a la de la izquierda.
- Aplicar sin reflexión el algoritmo (caso 12 – 8, 14 – 7, etc.).
- Errores ante la presencia del cero en el minuendo.
- Restar siempre del número mayor el menor.
- Poner cero cuando la cifra del sustraendo es superior a su correspondiente en el minuendo.
- Sumar en vez de restar.

Los algoritmos que se enseñan en las aulas no son los únicos que existen: las adiciones y sustracciones pueden ser realizadas por otros métodos algorítmicos distintos de los que tradicionalmente se enseñan en las IE de nuestro país. Hoy en día, con la presencia de las calculadoras en la vida cotidiana, no puede tenerse como una meta de la educación primaria la enseñanza de los algoritmos. Lo esencial es la capacidad de calcular haciendo uso de diversos métodos y el desarrollo en los estudiantes de las estructuras aditivas y multiplicativas que les permitirán resolver con éxito problemas de su entorno. Sin embargo, es una aspiración que los estudiantes logren un manejo eficiente de métodos que simplifiquen los cálculos cuando no se tiene a mano una calculadora.

El Informe Cockcroft (1985), uno de los estudios más importantes sobre el aprendizaje de la matemática que se ha publicado hasta ahora, señala que los estudiantes en la primaria deberían:

- Realizar cálculos con material concreto.
- Realizar cálculos mentalmente.
- Realizar cálculos con lápiz y papel.
- Realizar estimaciones de cálculo.
- Utilizar calculadoras en forma pertinente.

Maza (1989) propone una secuencia para la enseñanza de las operaciones a la luz de los errores que se presentan con mayor frecuencia. Según este investigador, el docente debe utilizar una variedad de sinónimos para referirse a la misma acción con significado matemático:

- Sumar: añadir, poner, juntar, agregar, reunir...
- Restar: quitar, perder, retirar, separar…

Los estudiantes deben, primero, realizar estas acciones mediante la manipulación de fichas, semillas u otros objetos pequeños que sirvan de contadores. En seguida, deben describir la acción con el lenguaje usual, nombrando lo que realizan; para ello conviene que el docente lleve adelante un diálogo que retroalimente al estudiante en su accionar y en la verbalización de la acción. Aquí también es posible introducir los signos que traducen las acciones que realiza. Solo cuando las acciones estén asimiladas se deben utilizar dibujos o esquemas.

Posteriormente, se puede asociar números y símbolos a estas representaciones. Por ejemplo: se dibujan dos conjuntos de naranjas, con el número a su lado, separados por el signo «–» y se pide que dibujen y escriban el número del conjunto resultante. El último paso sería la notación simbólica de las operaciones y su resolución por escrito. Todas estas ideas se pueden integrar en la siguiente secuencia didáctica del proceso de enseñanza–aprendizaje de las operaciones matemáticas (Maza 1989):

Proceso de enseñanza–aprendizaje de las operaciones matemáticas

ACCIÓN

VÍNCULOS ENTRE ACCIÓN Y LENGUAJE

NARRACIÓN DE LA ACCIÓN

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

EXPRESIÓN SIMBÓLICA

DESARROLLO DE ESTRATEGIAS

APLICACIÓN DE ALGORITMOS

- *Acción*: en un primer momento, el estudiante resuelve las situaciones mediante la exploración y actuación informal sobre los objetos, para lo cual el docente debe propiciar dichas actividades.
- *Vínculo entre acción y lenguaje*: el docente debe ayudar a los estudiantes a establecer relaciones pertinentes entre las acciones que realizan y la diversidad de verbos que utilizan (sumar, agregar, juntar, reunir, etc.).
- *Narración de la acción*: se solicita de los estudiantes un relato de las acciones emprendidas y de la forma de resolver la situación presentada.

- *Representación gráfica*: las acciones pueden presentarse fácilmente de forma gráfica (diagramas, esquemas, dibujos).
- *Expresión simbólica*: se introduce la notación matemática que corresponde a las acciones realizadas.
- *Desarrollo de estrategias*: más que memorizar los hechos básicos, el docente debe promover en los estudiantes la construcción de estrategias propias cuando, por ejemplo, no puedan recordar un hecho simple. Así, si se quiere calcular 6 + 7 y no se recuerdan las sumas básicas, se puede descomponer el número 7 en 5 + 2 y, luego, sumar; o en el caso de sumas como 7 + 9, sumar 10 y, luego, restar una unidad.
- *Aplicación de algoritmos*: el último paso en el aprendizaje de una operación es la extensión de estas estrategias y de otras destrezas (manejo del sistema decimal de numeración) para realizar cálculos entre dos o más números cualesquiera.

Dos últimos aspectos que no debemos dejar de lado en la enseñanza de las operaciones matemáticas son la estimación y el cálculo mental. Se deben propiciar actividades de cálculo mental de variadas formas durante el aprendizaje de las operaciones ya que educan la flexibilidad de pensamiento, pues cada estudiante puede diseñar una estrategia y afianzar las propiedades de las operaciones de una manera concreta. En cuanto a la estimación, el docente debería pedir a los estudiantes que, antes de realizar una operación, estimen su resultado para, luego, mediante la aplicación del algoritmo, comprobar si el resultado final cae dentro del rango que se estimó.

En el mercado, existen muchos juegos que se comercializan para desarrollar el cálculo mental. En el aprendizaje de la matemática se considera muy importante el uso de juegos colectivos, puesto que, además de ayudar a desarrollar la comunicación matemática, logran la interacción social y el empleo de conceptos en diversos contextos.

Por otro lado, es conveniente trabajar con la descomposición polinómica para que los estudiantes se den cuenta de la magnitud de los números involucrados. Una estrategia para hacerlo se ejemplifica a continuación.

Calculemos:

$$\begin{array}{r} 368 \\ +\,257 \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

Para efectuar esta suma, el docente puede escribir en la pizarra los números en columna y, luego, realizar la descomposición polinómica de ambos:

$$368 = 300 + 60 + 8$$
$$257 = 200 + 50 + 7$$

Entonces, se debe comenzar a realizar la suma en cada orden, y explicar que se debe encontrar cuántas centenas, decenas y unidades se forman. Para hacerlo, se debe sumar cada orden y reagrupar los números así:

$$= 500 + 110 + 15$$
$$= \underbrace{500 + 100}_{c} + \underbrace{10 + 10}_{d} + \underbrace{5}_{u}$$
$$= 600 + 20 + 5$$
$$= 625$$

Solo después de realizar varios ejercicios de este tipo podemos introducir el algoritmo como una manera de simplificar los cálculos, pero no como una meta de aprendizaje. Lo importante es que el estudiante comprenda cada vez mejor la estructura de los números naturales, el sistema posicional de notación y las propiedades de la adición y de la sustracción.

Por ejemplo, para sumar los números 34 y 58, puede realizar primero la descomposición en decenas y unidades de ambos en columna:

$$34 = 30 + 4$$
$$58 = 50 + 8$$

Se suma 4 y 8, lo cual da 12; se descompone en 10 + 12:

$$= 30 + 50 + 12$$
$$= \underbrace{30 + 50 + 10}_{d} + \underbrace{2}_{u}$$

Se suma las decenas completas:

$$= 90 + 2$$

Y se tiene el resultado:

$$= 92$$

Este mismo proceso se puede utilizar para calcular restas de números.

5.6. Resolución de problemas aditivos

Para evaluar las capacidades de los estudiantes en la resolución de problemas aditivos, la EN 2004 incorporó problemas de enunciado verbal y en forma de historieta de diversos tipos. La clasificación de estos problemas fue hecha sobre la base de la propuesta que plantea el análisis global del texto partiendo de su significado, lo que permite una mejor aproximación a los esquemas mentales, a las estrategias de trabajo y a los bloqueos cognitivos en el proceso de solución de estos problemas. Desde la perspectiva del análisis global, los problemas aditivos elementales verbales de una etapa se pueden clasificar en las siguientes categorías:

- Problemas de cambio
- Problemas de combinación
- Problemas de igualación
- Problemas de comparación

Para realizar la selección de las categorías y luego graduarlas en niveles de complejidad, se han tenido en cuenta los resultados de investigaciones experimentales[31] con niños de edades similares y/o menores. La prueba de Lógico Matemática de la EN 2004 incluyó preguntas de combinación, cambio, igualación y comparación que correspondían al nivel evolutivo de los estudiantes de segundo grado.

El análisis de las respuestas de los estudiantes evaluados ha llevado a encontrar las siguientes dificultades generales:

- Lectura e interpretación parcial del enunciado del problema.
- Influencia negativa de palabras clave relacionadas con algún tipo de operación; por ejemplo, al relacionar «más» siempre con suma, algunos problemas comparativos se resuelven de manera errada (dificultad de inconsistencia de la operación).
- Descontextualización de la respuesta que presentan o contextualización errada de esta.
- Introducción y uso de datos irrelevantes al problema planteado.
- Tendencia a realizar sumas de los datos del problema.
- Los problemas en forma de historieta son más difíciles para los estudiantes que los problemas de enunciado verbal.
- Predominio de la información visual concreta de ayuda a la descripción de la situación lo cual, en muchos casos, llevó a respuestas erradas.

Se ha observado que los estudiantes tienden a identificar ciertas palabras clave y no logran una comprensión global de lo que el enunciado quiere significar. Por ejemplo, al observar las palabras «total» o «más» identifican el problema como uno de suma, o en problemas de comparación de cantidades como, por ejemplo, al responder a la pregunta:

> Juan tiene 28 bolitas y Luisa 14 bolitas. ¿Cuántas bolitas más que Luisa tiene Juan?

31. Véanse Puig (1996), Vergnaud (1991), Nesher (1982) y Riley (1983).

Al ver la palabra «más», los estudiantes tienden a utilizar la adición para resolver el problema y suman las dos cantidades, aunque en este caso lo que se debía hacer era restarlas.

Esta lectura parcial del problema también puede observarse, por ejemplo, al intentar sumar todos los números que se presentan en un enunciado, aunque sean irrelevantes para la solución, o al contextualizar erradamente las respuestas utilizando las palabras «total» y «quedan» cuando se realiza una suma o una resta, respectivamente.

Se ha podido constatar que, en casi todos los casos, los problemas presentados mediante un enunciado verbal fueron más sencillos para los estudiantes que los que se presentaban en forma de historieta. Al analizar el proceso de solución seguido por los estudiantes para resolver estos últimos, se ha identificado un patrón de comportamiento referido a la producción de un esquema verbal a partir de estos problemas. Incluso, algunos estudiantes traducían la historieta a un enunciado verbal y, solo a partir de allí, comenzaban a solucionar el problema.

También se observó en el caso de los problemas en forma de historieta que, a veces, las viñetas influían en la interpretación del problema.

El estudiante va adquiriendo dominio y conocimiento de la estructura aditiva a lo largo de toda la primaria. Si bien en la educación inicial puede enfrentar este tipo de situación, existen otras situaciones que requieren de la maduración del concepto y, por eso, se trabajarán en otras etapas de su educación. Asimismo, el estudiante construirá su sentido de la adición si se enfrenta a situaciones de estructura aditiva diversa y se involucra en su resolución.

Es evidente que estas situaciones no se pueden catalogar exclusivamente como de adición o sustracción pues la estructura implícita en su resolución puede abordarse mediante el uso de cualquiera de las dos operaciones; por ello, en este informe las clasificamos, de manera general, como problemas de estructura aditiva. Por ejemplo el problema:

> Juan tiene 5 soles, ¿cuántos soles más necesita para comprar una pelota de 8 soles?

Para resolver este problema, el estudiante puede utilizar la estrategia de conteo empezando por el número menor y llegando al número mayor, o buscar qué número sumado con 5 le da 8. En ninguno de estos casos se está utilizando la sustracción como operación. Resulta claro que también se podría resolver el problema planteando una sustracción e interpretando la respuesta.

Por estos motivos, el docente debe estimular el razonamiento de los estudiantes proponiéndoles diversos problemas que incorporen esta clasificación y sus combinaciones. Como ya se señaló, la estructura aditiva se conseguirá en la medida en que el estudiante enfrente las más diversas situaciones. La ampliación del campo numérico ayuda muy poco, o nada, a la comprensión, a las operaciones mentales y a la elaboración de modelos que el estudiante debe realizar para resolver problemas aritméticos.

Obsérvese los siguientes problemas:

Juan tiene 365 chapitas y María 435. ¿Cuántas chapitas tienen juntos?

Juan tiene 6 chapitas y María 3. ¿Cuántas chapitas tienen juntos?

Desde el punto de vista de las habilidades involucradas, ambos problemas tienen la misma complejidad pues poseen igual estructura (Combinación 1). La aparente mayor dificultad del primero se sustenta solo en el cálculo aritmético, mas no en la comprensión de la estructura aditiva implicada. Dicho de otro modo, si un estudiante tiene clara la estructura aditiva de combinación sabe que en ambos casos puede sumar para hallar el resultado, y esto es lo realmente importante. La forma de hacer el cálculo es irrelevante: puede hacerlo mentalmente, con lápiz y papel o usando una calculadora.

Como una forma de mejorar las habilidades de los estudiantes para resolver problemas aditivos se recomienda que el docente incorpore diversos problemas y situaciones combinadas de estos en su trabajo pedagógico.

El docente debe considerar un modelo de resolución de problemas que implique las fases que el estudiante debe seguir al momento de resolver estas situaciones. Un modelo útil, adaptado del propuesto por Polya en 1945, puede ser:

FASES DE LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

- Familiarización y comprensión del problema
- Búsqueda y diseño de estrategias
- Ejecución controlada de la estrategia
- Visión retrospectiva y prospectiva

En cada una de estas fases de solución, el docente puede ayudar formulando preguntas pertinentes con el fin de organizar y guiar el proceso de solución del problema por parte de los estudiantes.

Es conveniente que, en la fase de búsqueda de estrategias y elección de la operación, el docente promueva en los estudiantes la estimación de las soluciones (Burroni 2002); es decir, que el estudiante observe en qué rango numérico debe encontrarse la solución a un problema. Por ejemplo:

Juan tiene 15 bolitas y Pedro tiene 18 bolitas. ¿Cuántas bolitas tienen juntos?

Para resolver el problema anterior, el estudiante debe estimar que el número de bolitas no puede superar las dos cifras, o mejor aún, no puede ser mayor a 50. Es común observar que, al no realizar la estimación, muchos estudiantes desarrollan el algoritmo de la suma tomando los dígitos como números independientes, por lo que obtienen resultados como 213, lo cual, naturalmente, cae fuera del rango de respuestas posibles.

Cada una de las cuatro fases mencionadas ayuda a los estudiantes en el proceso de resolución de problemas, pues permiten ordenar su pensamiento y, si son trabajadas en forma adecuada en el aula, enriquecen este proceso.

En la fase de familiarización y comprensión del problema, se debe identificar la incógnita, reconocer los datos, identificar las condiciones y establecer si son suficientes, si son necesarias o si son complementarias.

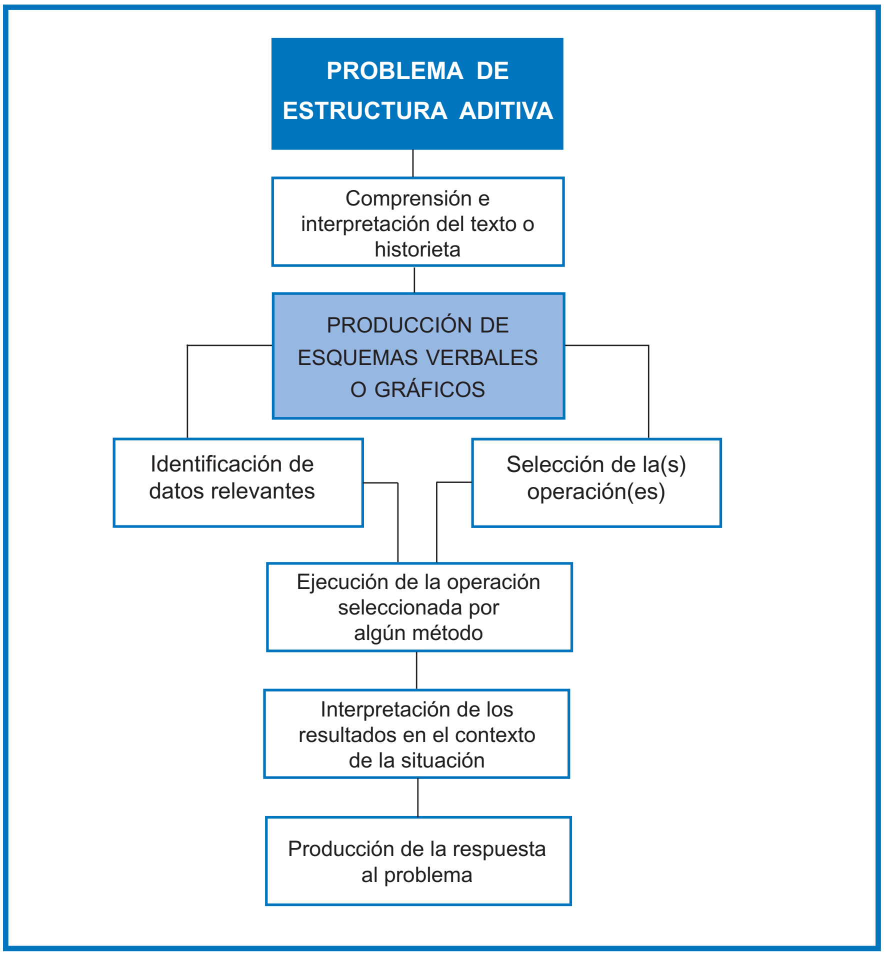
En la fase de búsqueda y diseño de estrategias, se debe primero experimentar, particularizar. Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil.

Cuando se ha decidido qué estrategias utilizar, sigue la fase de realización del plan, la que debe llevarse a cabo siempre en forma controlada, evaluando cada paso de la ejecución para saber si este plan nos está acercando a la respuesta o nos está conduciendo a una situación compleja. Si nos lleva a la solución, pasaremos a la siguiente fase, de lo contrario, deberemos repetir la fase dos.

La actitud tiene aquí un papel protagónico, conviene no desanimarse, es importante no abandonar una estrategia antes de revisar los diversos aspectos de esta, sin perder de vista que existen otras estrategias que, eventualmente, se podrían utilizar.

Cuando se ha obtenido una solución (no una respuesta, pues podría haber varias o ninguna), se ingresa a la cuarta fase en la cual se reflexiona acerca del proceso de solución y se hace una verificación de la solución. En esta etapa se puede modificar el problema o generalizar los resultados. Esta última fase es considerada en la actualidad como la más importante en el proceso heurístico, pues es mediante la mejora en el aspecto metacognitivo que es posible enriquecer las habilidades necesarias para resolver problemas. La herramienta más poderosa para cumplir con este propósito es la metarreflexión consciente que permite reflexionar sobre nuestros bloqueos, emociones, etc. al resolver un problema.

El siguiente diagrama ha sido construido a partir de las respuestas de los estudiantes evaluados en la EN 2004. Se puede notar la concordancia con las fases propuestas por Polya. Este esquema señala las fases utilizadas por los estudiantes de segundo grado evaluados para resolver los problemas aditivos presentados en forma de texto y de historieta de la EN 2004. La secuencia se puede inscribir en el esquema de resolución de problemas propuesto por George Polya (1965). La importancia de esta evidencia empírica reside en que rescata el razonamiento de los estudiantes, razón por la cual se debe tener en cuenta para el diseño de las actividades pedagógicas. El uso de un esquema teórico que ordene el pensamiento de los estudiantes al enfrentarse a una situación novedosa debe ser uno de los fines del trabajo pedagógico, sobre todo si los estudiantes se orientan a seguir en su práctica secuencias similares. Por este motivo, el docente debe incorporar un esquema teórico en su formación continua y aplicarlo en la resolución de problemas para profundizar en el funcionamiento de este esquema y comprender su aporte al trabajo de resolución de problemas. Después de conseguido este objetivo, puede aplicar este esquema en forma sistemática en sus clases.



Conviene que el docente explore cada una de las fases del esquema teórico aceptado, mediante la elaboración de posibles preguntas y sugerencias útiles para cada una de las fases. Además, estos esquemas deben ser utilizados no solo en los primeros grados sino en toda la educación básica, pues brindan al estudiante un método de aproximación y resolución de problemas y alientan el desarrollo de habilidades personales para enfrentarse mejor a nuevas situaciones problemáticas.

Las investigaciones actuales sobre didáctica de la matemática coinciden en afirmar que las clases de matemática deberían convertirse en un microcosmos de actividad matemática, es decir, en una réplica del trabajo que realiza un matemático en el momento de la búsqueda y creación de conocimiento, un ambiente donde se generen ideas, se propongan métodos, se investiguen caminos. Este proceso proporciona esquemas generales de razonamiento que pueden ser transferibles a otras actividades de la vida cotidiana.

Para lograr convertir el aula en ese ambiente creativo y participativo, es condición necesaria que el docente conozca y haga matemática, pues es difícil, sino imposible, enseñar aquello que no se comprende, aquello que no se maneja con soltura y fluidez. Por ejemplo, si se desea enseñar a escribir cuentos y nunca se ha pasado por las distintas fases de la creación de un cuento sino que solo se han transcrito los relatos y cuentos de otros escritores, únicamente se logrará un pobre desarrollo de las capacidades creativas del grupo. Por esta razón resulta muy importante que el docente se involucre en la propia actividad matemática, convirtiendo en un hábito intelectual la resolución de problemas diversos y su transformación en nuevos problemas que deberán ser investigados con perseverancia e interés.

6 ¿Cómo usar las preguntas mostradas en este informe?

En esta sección se presentan algunas de las posibilidades de uso de las preguntas mostradas en el informe. No se pretende detallar todas estas posibilidades, sino señalar algunas que se consideran importantes y que podrían ser útiles para el trabajo en el aula.

La EN 2004 evalúa la eficacia del sistema educativo peruano. Para hacerlo, se desarrolló un marco de evaluación del área de Lógico Matemática que refleja el espíritu de las actuales propuestas curriculares del MED. Algunas de las preguntas utilizadas en estos instrumentos se presentan para ilustrar cómo dicho marco de evaluación se traduce en términos de preguntas y, también, para dar una visión panorámica de las dificultades en el aprendizaje de la matemática que presentan ciertos grupos de estudiantes.

Estas preguntas no deben utilizarse para elaborar pruebas que intenten reproducir el trabajo realizado por la UMC, pues esta evaluación tiene características particulares que la hacen diferente a la evaluación que el docente puede realizar en el aula. Por esta razón, se propone que los ejemplos de preguntas presentados y comentados en secciones anteriores de este informe sean utilizados por usted, de manera amplia, como ayuda en la práctica pedagógica en el aula. Entre otros usos, pueden emplearse para diagnosticar el desempeño de sus estudiantes en una capacidad determinada o para explorar el nivel de desarrollo de una noción matemática. También podría crear preguntas similares inscritas en el modelo de evaluación planteado o diseñar actividades de aprendizaje que integren estas preguntas a su quehacer cotidiano en el aula.

Las preguntas comentadas en el capítulo 4 pueden dar luces acerca de lo que los estudiantes conocen, sus esquemas de razonamiento, sus patrones de error o sus creencias acerca de la matemática. En este apartado se presentan también algunas sugerencias para la adecuada utilización de estas preguntas en la práctica pedagógica.

Para realizar este trabajo es importante que siga usted, en forma previa, tres pasos:

1) Estudiar el marco de la evaluación del área.
2) Interpretar el significado de la escala de dificultad de las preguntas.
3) Comprender los niveles de desempeño.

1. Estudio del marco de la evaluación del área

Se sugiere leer e identificar las ideas principales del marco de evaluación del área que orientaron la elaboración de las pruebas. Usted debería poder contestar algunas preguntas tales como: ¿En qué consiste el enfoque heurístico? ¿Por qué se sostiene que la resolución de problemas es el centro de la actividad matemática? ¿Qué se evaluó en la EN 2004? ¿Qué capacidades matemáticas se privilegian para esta evaluación? ¿Cuál es la relación entre las capacidades curriculares y lo evaluado? ¿Qué diferencias existen entre los contenidos curriculares y lo propuesto en la EN 2004? ¿Cuál es el papel que desempeñan los contextos en el modelo de evaluación?

Es importante establecer relaciones entre el marco de evaluación del área y la forma de construcción de las preguntas. Para ello debería ser usted capaz de justificar por qué cada pregunta mostrada en este informe evalúa una determinada capacidad matemática, contenido y contexto. Asimismo, ¿qué estrategias podrían ser utilizadas por los estudiantes para resolver cada una de dichas preguntas?, ¿qué habilidades se encuentran involucradas al responderlas?, etc.

2. Interpretación del significado de la escala de dificultad de las preguntas

Como ya se mencionó, luego de la aplicación de las pruebas, las preguntas se ordenaron respecto de su dificultad y se estableció, de esta manera, una escala con puntajes referenciales. Esta escala permite identificar qué preguntas son más difíciles o más fáciles que otras. Cada pregunta tiene una dificultad que determina su posición en la escala, como muestra el diagrama de ubicación de las preguntas que se presenta en la página siguiente. Así, en la parte inferior de la escala se ubican las preguntas con menor dificultad y en la parte superior, aquellas con mayor dificultad. Es importante que, al analizar estas preguntas, logre usted establecer por qué existen estas diferencias y cuáles son los criterios que les otorgan dificultad a las diversas nociones matemáticas.

3. Comprensión de los niveles de desempeño

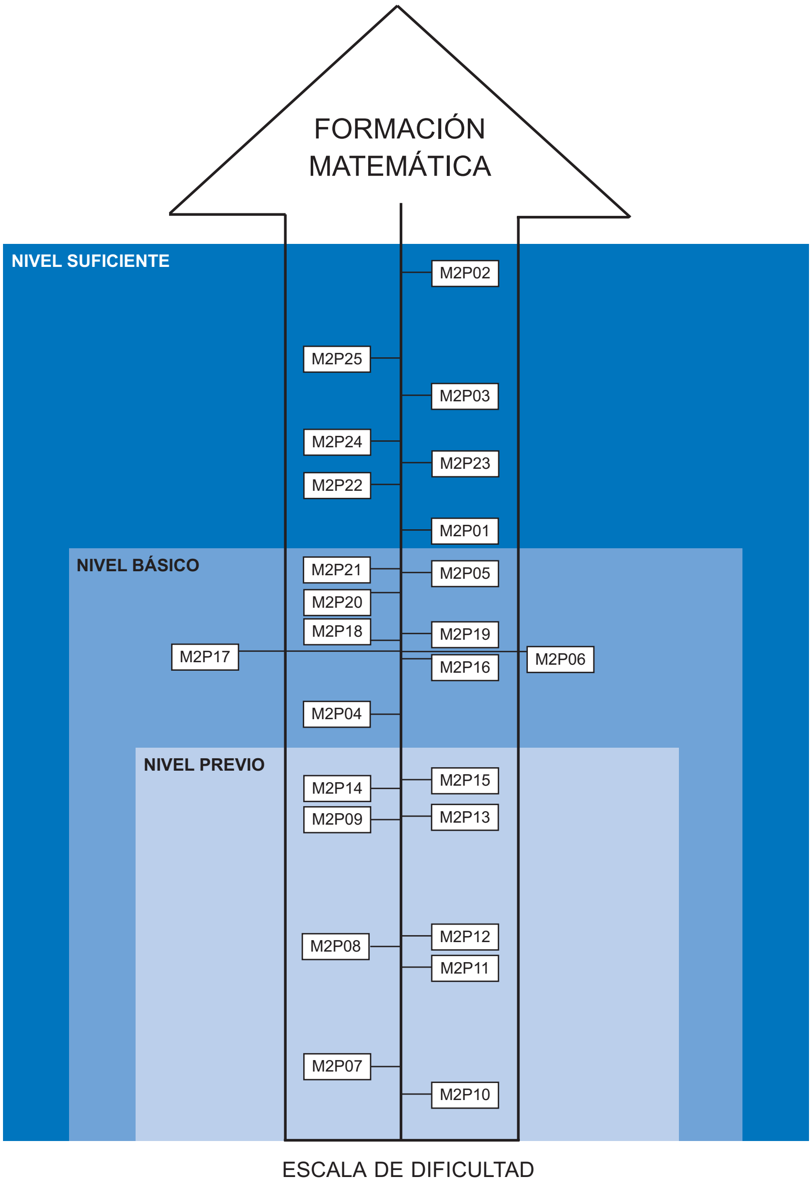
Como se puede apreciar en el diagrama, las preguntas están distribuidas de acuerdo con el nivel de desempeño al que pertenecen: suficiente, básico o previo.

No se debe olvidar que los estudiantes que se encuentran en determinado nivel son capaces de responder también las preguntas asociadas a los niveles inferiores.

Usted debería leer, en el capítulo 2 de la Parte I, la definición general de estos niveles y, luego, en el capítulo 2 de la Parte II, la descripción de esos niveles para segundo grado de primaria. A partir de esta descripción debería identificar, en el capítulo 4 de la Parte II, aquellas preguntas correspondientes a cada nivel de desempeño y hacer un análisis crítico referido a si la pregunta comentada refleja realmente las habilidades descritas.

Tal como se ha señalado, para responder correctamente las preguntas ubicadas en la parte inferior de la escala se demanda un menor desarrollo de las habilidades que el necesario para responder las preguntas ubicadas en la parte superior de esta. En ese sentido, lo que la escala muestra es cómo las distintas preguntas demandan de los estudiantes habilidades o estrategias implicadas en la resolución de las preguntas que evalúan la formación matemática y permiten la progresiva construcción de un conocimiento que se va haciendo más complejo.

Ubicación de las preguntas de segundo grado de primaria mostradas en este informe



Si se revisa el diagrama de ubicación de las preguntas, se puede apreciar claramente estas relaciones comparativas de dificultad. Aclarémoslo con un ejemplo: la pregunta M2P11 pertenece al nivel previo y es de menor dificultad que la pregunta M2P14 que se ubica también en el nivel previo. Así, si un estudiante resuelve correctamente la pregunta M2P14, tiene una gran probabilidad de responder en forma correcta la pregunta M2P11.

Luego de este análisis introductorio al modelo de evaluación del área y a los niveles de desempeño, puede usted utilizar las preguntas mostradas de diversas formas, entre las que se puede mencionar el diagnóstico de los conocimientos de sus estudiantes y la organización de las actividades en el aula.

Diagnóstico de sus estudiantes

Las preguntas pueden utilizarse en forma individual para explorar el estado de las nociones matemáticas de sus estudiantes.

En primer lugar, seleccione una pregunta referida a un concepto matemático. En el capítulo 4 de la Parte II se muestran ejemplos que incluyen una descripción sobre algunos aspectos de la pregunta. Lea y responda: ¿A qué capacidad matemática se refiere? ¿Qué contenidos relacionados se ponen en práctica? ¿Qué caminos o vías de solución puede utilizar el estudiante para responderla?

En segundo lugar, proponga la pregunta a sus estudiantes y analice sus respuestas: podrá obtener así una idea del grado de desarrollo de dicho concepto en ellos. Deberá tener en cuenta que, si la mayoría de los estudiantes ha respondido adecuadamente la pregunta, entonces estará en capacidad de responder las preguntas asociadas con este concepto que se presenten en niveles relativos inferiores de la escala de dificultad. Esto será un indicador del tipo de actividades que puede utilizar para seguir avanzando en este concepto. Si, en cambio, la pregunta es respondida por pocos estudiantes, deberá utilizar una pregunta de menor dificultad y, si esta última es respondida por la mayoría, tendrá información acerca del nivel de desarrollo del concepto y una idea de qué actividades pueden ser las adecuadas para desarrollar las capacidades en el nivel que muestran sus estudiantes.

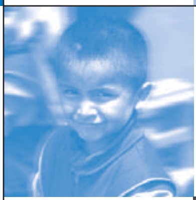
Actividades de aula

Las preguntas pueden emplearse como elementos motivadores al inicio de una clase. Para hacerlo, seleccione una pregunta de la escala y aplíquela a sus estudiantes. Recoja las respuestas y agrúpelas en términos de sus resultados, trabaje con ellos su solución, explorando los métodos utilizados y los razonamientos novedosos, y analizando los errores que se han producido al resolverla. Motive a sus estudiantes para que expliquen sus procesos de solución y defiendan sus puntos de vista.

Las preguntas también pueden utilizarse para construir actividades de aprendizaje. Es posible emplear las preguntas de un determinado nivel, o un grupo de ellas referidas a un concepto o capacidad, para desarrollar clases de matemática o plantear actividades de aprendizaje cooperativo. Para ello, deberá convertir la pregunta en una actividad didáctica, formulando preguntas introductorias que sirvan para explorar los conocimientos previos de sus estudiantes y preguntas que profundicen en lo que se va a trabajar. Asimismo, podrá diseñar instrumentos de evaluación referidos al concepto o capacidad que se trabajó en la pregunta seleccionada.

Las preguntas también pueden servir para generar nuevos cuestionamientos. Se puede presentar a los estudiantes una pregunta de la escala y trabajar en plenaria su solución, con el docente actuando solo como un facilitador que plantea preguntas orientadoras o desencadenantes (pero que no ofrece respuestas). Como esquema que organice la secuencia de trabajo se pueden utilizar las fases de resolución de problemas propuestas por George Polya que se comentan en el capítulo 5 (a partir de la página 120) de este documento.

En este esquema, la visión retrospectiva es una de las fases en las que el docente debe poner mayor énfasis. En su desarrollo, debe promover en los estudiantes el deseo de explorar más allá de la respuesta hallada y el hábito de reflexionar sobre lo realizado, identificar los bloqueos mentales que ocurrieron, las estrategias que permitieron salir de ellos, el método utilizado, las heurísticas que afloraron en la fase inicial, etc. Además, se debe promover que los estudiantes modifiquen las preguntas, cambien los datos y su estructura, y planteen nuevos problemas relacionados. El docente debe estimular en los estudiantes la necesidad de llegar a generalizaciones y de reflexionar sobre los métodos utilizados, entre otros objetivos.



PARTE III

SEXTO GRADO DE PRIMARIA

1 Importancia y alcances de la evaluación

De igual forma que las evaluaciones aplicadas en los años anteriores,[32] la EN 2004 recoge información acerca del desarrollo de capacidades por parte de los estudiantes al término del sexto grado de primaria, que es el grado que marca el final de este nivel. Se decidió evaluar este grado porque su culminación significa la finalización de un proceso que busca el desarrollo «...de habilidades necesarias para el despliegue de potencialidades del estudiante, así como la comprensión de hechos cercanos a su ambiente natural y social» (MED 2005a: 7). Además, constituye un referente que permite realizar comparaciones con anteriores evaluaciones nacionales.

Los procesos y conocimientos propios del área tales como la noción de número, el valor posicional, el cálculo y la estimación, y la orientación espacial deben ser desarrollados sistemáticamente durante toda la educación primaria, por lo que la importancia de su consolidación al final de esta etapa es fundamental.

Otro aspecto relevante es que sexto grado articula la primaria y la secundaria. Medir el logro de los estudiantes en este grado es importante pues las habilidades matemáticas que se desarrollarán en secundaria requieren de la consolidación de las competencias básicas trabajadas en el nivel primario y son el punto de partida para su profundización y perfeccionamiento.

Asimismo, a partir de los resultados de la prueba de sexto grado de primaria se pretende identificar las principales dificultades de los estudiantes y proponer estrategias que permitan a los docentes mejorar su propia práctica pedagógica.

Dado el tipo de evaluación que realiza la UMC, no se han podido incluir la totalidad de las competencias y capacidades planteadas en la ECB (por ejemplo, aquellas capacidades relacionadas con el uso de material concreto). La evaluación se ha centrado en aquellas competencias fundamentales factibles de ser evaluadas en una prueba de lápiz y papel.

La EN 2004 incluyó preguntas en diferentes formatos. El más utilizado en la prueba de sexto grado es el formato de respuesta extensa —más de la mitad de las preguntas de la prueba de sexto grado es de este tipo—, pues permite identificar tendencias, estrategias de resolución y errores comunes de los estudiantes. El resto son preguntas para relacionar, para completar y preguntas de opción múltiple. Es importante destacar que los enunciados de las preguntas han sido elaborados tomando en consideración el nivel de lectura de los estudiantes de sexto grado.

32. Sexto grado de primaria se ha evaluado desde el año 1998. (Véanse pruebas CRECER 98 y EN 2001.)

Capacidades curriculares evaluadas en la EN 2004
en sexto grado de primaria

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	• Resuelve situaciones problemáticas referidas a la noción de números naturales hasta diez mil y a las fracciones más usuales. • Resuelve situaciones problemáticas que demandan el uso de operaciones básicas en el conjunto de los números naturales menores de diez mil, decimales hasta las centésimas y fracciones más usuales. • Resuelve situaciones problemáticas referidas a la proporcionalidad directa y al porcentaje en el conjunto de los números naturales menores de diez mil, decimales hasta las centésimas y fracciones más usuales. • Resuelve situaciones problemáticas referidas a la noción de medida, al uso y a la conversión de unidades de las magnitudes fundamentales (masa, longitud y tiempo) en el conjunto de los números naturales menores de diez mil, decimales hasta las centésimas y fracciones más usuales. • Resuelve situaciones problemáticas referidas al cálculo del perímetro y área de polígonos. • Resuelve situaciones problemáticas referidas a la elaboración e interpretación de diversos diagramas estadísticos y a la media aritmética de un conjunto de datos.
COMUNICACIÓN MATEMÁTICA	• Representa números naturales hasta la unidad de millón, números decimales hasta las centésimas y fracciones de uso cotidiano. • Interpreta, identifica y justifica proposiciones verbales o simbólicas referidas al manejo de los números y a las operaciones en el conjunto de los números racionales positivos. • Identifica, interpreta y compara cantidades expresadas en distintas unidades de medida para cada una de las magnitudes fundamentales. • Identifica, grafica y compara figuras y cuerpos geométricos. • Identifica, interpreta, grafica, compara y justifica información estadística.
APLICACIÓN DE ALGORITMOS	• Calcula el resultado de operaciones aritméticas básicas y de porcentajes en el conjunto de los números racionales positivos. • Calcula el resultado de operaciones combinadas en el conjunto de los números racionales positivos. • Calcula el resultado de operaciones básicas de cantidades referidas a alguna de las magnitudes fundamentales, expresadas en distintas unidades.

Es importante señalar que todo lo que se reporta en este informe acerca de resultados y dificultades de los estudiantes corresponde únicamente a los aspectos evaluados y no pretende ir más allá de lo considerado en esta evaluación.

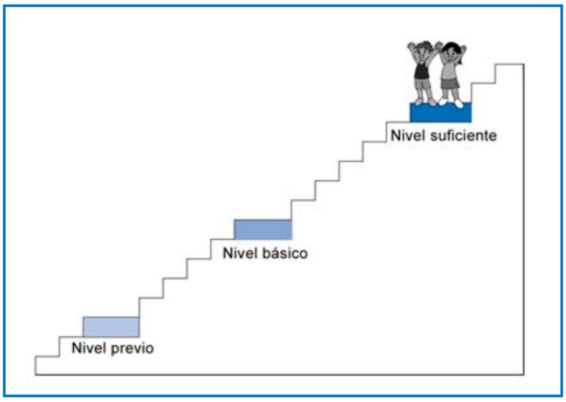
2 ¿Qué pueden hacer los estudiantes en cada nivel de desempeño?

En este capítulo se describen los niveles de desempeño en sexto grado de primaria para el área de Lógico Matemática y las tareas que pueden realizar los estudiantes que se encuentran en cada uno de ellos. Además, se incluyen ejemplos de preguntas de los tres niveles de desempeño. Asimismo, se comentan algunos aspectos de estas preguntas (qué evalúan, qué pueden hacer los estudiantes para resolverlas) y se ofrecen algunos ejemplos de respuestas de los estudiantes. Se presenta también una ficha técnica en la cual se indica la capacidad matemática que evalúa la pregunta, su contenido matemático, el contexto en el que se sitúa, el formato (opción múltiple, respuesta corta, respuesta extensa, etc.), el nivel de desempeño y la dificultad Rasch.[33]

2.1. Lo que hacen los estudiantes que alcanzaron el nivel suficiente

Nivel suficiente

Que un estudiante se ubique en este nivel significa que ha desarrollado adecuadamente las capacidades correspondientes al grado evaluado.



Los estudiantes en este nivel demuestran un manejo suficiente y necesario de las capacidades evaluadas: muestran las habilidades que se esperan de un estudiante que está por terminar sexto grado de primaria. No son estudiantes avanzados ni destacados, sino adecuados para el grado. Por ello, al finalizar sexto grado, todos o la gran mayoría de los estudiantes deberían encontrarse en este nivel.

Los estudiantes ubicados en el nivel suficiente pueden resolver situaciones problemáticas, rutinarias y no rutinarias, que cuentan con algunos datos implícitos y que, por ello, deben ser deducidos. La resolución de dichas situaciones implica la adaptación o elaboración de una estrategia de solución. Estas estrategias involucran el planteamiento de secuencias de hasta tres operaciones aritméticas básicas y, en algunas ocasiones, la conexión de los diferentes contenidos matemáticos. Además, estos estudiantes poseen un conocimiento y manejo adecuado

33. Es el puntaje que determina la ubicación de la pregunta en la escala de dificultad. En esta escala, en la medida en que aumenta el puntaje, aumenta también la dificultad de la pregunta.

de la estructura del sistema de numeración decimal, de las expresiones fraccionarias y decimales más usuales, en situaciones cotidianas.

Entre los principales contenidos y habilidades implicados en la resolución de problemas están la aplicación de operaciones combinadas con y sin signos de agrupación en el ámbito numérico de los números naturales y fraccionarios, el cálculo de los resultados de adiciones o sustracciones con números decimales hasta las centésimas, el cálculo de porcentajes simples y la aplicación de la noción de proporcionalidad (regla de tres simple y directa).

Además, establecen en forma adecuada las relaciones de equivalencia entre las principales unidades de longitud y tiempo expresadas con números decimales y fracciones; interpretan e identifican información estadística en diversas representaciones (gráfica, icónica y tabular); y calculan el perímetro y área de figuras planas que implican la composición y descomposición de figuras geométricas.[34] Asimismo, identifican y diferencian, a partir de sus propiedades, figuras geométricas planas y del espacio.

Tareas que realiza el estudiante en el nivel suficiente

- Establece la relación de orden, identifica el número anterior y posterior, reconoce las decenas y centenas en tareas no rutinarias y en formato diferente al tablero posicional en el conjunto de los números naturales.
- Establece relaciones de orden y equivalencia entre las diferentes denominaciones de nuestro sistema monetario, utilizando representaciones decimales; por ejemplo: S/. 18,30.
- Calcula el resultado de operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación y división, con y sin signos de agrupación, que demandan jerarquización de operaciones en el conjunto de los números naturales.
- Resuelve problemas rutinarios y no rutinarios, con datos explícitos e implícitos. La solución de estos problemas demanda elaborar una estrategia consistente en una secuencia de tres operaciones aritméticas básicas en el conjunto de los números naturales.
- Calcula la suma y resta de números decimales hasta el orden de las centésimas.
- Resuelve problemas de dos etapas aplicando la adición y sustracción de números decimales hasta el orden de las centésimas.
- Calcula el resultado de operaciones combinadas de adición y sustracción de fracciones heterogéneas.
- Resuelve problemas por medio de estrategias de solución que requieren de una secuencia de hasta tres operaciones con fracciones.
- Resuelve problemas de aplicación de secuencias de procedimientos que implican el empleo de porcentajes sucesivos de hasta dos cantidades (por ejemplo: 50% del 20% de 500).

34. De acuerdo con la teoría de Van Hiele (Crowley 2004), los estudiantes ubicados en este nivel se encuentran todavía en un nivel descriptivo analítico.

- Resuelve problemas de dos o más etapas que demandan la aplicación de las nociones de proporcionalidad (regla de tres directa), en los que la relación entre magnitudes (función) es implícita y se expresa utilizando números decimales.
- Resuelve problemas de dos etapas cuya estrategia de solución demanda aplicar la equivalencia entre unidades de medida para calcular la suma de magnitudes de masa, longitud y tiempo expresadas en números decimales y fracciones.
- Identifica, a partir de sus propiedades, polígonos de hasta seis lados y cuerpos geométricos (pirámide, cubo, prisma, cono).
- Calcula el perímetro de cuadriláteros y el área de figuras compuestas por cuadriláteros.
- Selecciona las herramientas estadísticas adecuadas para conjuntos de datos, dependiendo de su naturaleza y del propósito de la gráfica.
- Resuelve problemas de dos etapas que demandan la interpretación, elaboración, selección y organización de cuadros y diagramas de barras dobles con frecuencia a escala.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de preguntas que pueden resolver los estudiantes ubicados en el nivel suficiente.

M6P01

Suficiente

Felipe fue a comprar con S/. 5. Lo que compró fue:

1 chupete a S/. 0,50
1 chocolate a S/. 1,20
1 chicle a S/. 0,30
1 gaseosa a S/. 1,30

¿Cuánto le dieron de vuelto?

a) S/. 0,33
✓ **b)** S/. 1,70
c) S/. 3,30
d) S/. 4,67

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*
Contenido: *Número y cantidad*
Contexto: *Extramatemático*
Formato: *Opción múltiple*
Nivel de desempeño: *Suficiente*
Dificultad Rasch: *308*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para resolver problemas de número y cantidad en una situación de compra y venta que demanda el manejo solvente de algoritmos de adición y sustracción de números decimales.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver esta pregunta, el estudiante debe comprender la situación planteada y lo que se le pide hallar; luego, debe diseñar un plan de solución que considere la cantidad con la que Felipe fue a comprar (S/. 5) y lo que gastó en total (0,50 + 1,20 + 0,30 + 1,30). Una vez identificados estos datos, debe hallar la diferencia (5 – 3,30) para encontrar cuánto fue el vuelto que recibió Felipe. El paso final es comprobar que su respuesta corresponde a lo solicitado.

M6P02

Suficiente

A Roberto le pidieron anotar en un cuadro los datos de la Campaña de Vacunación contra la hepatitis y el sarampión con la siguiente información:

- 15 varones han sido vacunados contra la hepatitis.
- 9 mujeres han sido vacunadas contra el sarampión.
- 14 varones contra el sarampión.
- 12 mujeres contra la hepatitis.

¿Cuál de los siguientes cuadros corresponde a la información anterior?

a) Campaña de vacunación

	Varones	Mujeres
Vacunados de hepatitis	15	12
Vacunados de sarampión	14	9

b) Campaña de vacunación

	Varones	Mujeres
Vacunados de hepatitis	15	9
Vacunados de sarampión	14	12

c) Campaña de vacunación

	Vacunados
Varones	29
Mujeres	21

d) Campaña de vacunación

Varones	Mujeres
29	21

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Estadística y probabilidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Suficiente*

Dificultad Rasch: *294*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante de interpretar, recodificar y optimizar la información estadística presentada en cuadros de doble entrada, contextualizada en una situación de la vida cotidiana que responde a un fenómeno social del medio local.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver esta pregunta, el estudiante debe comprender la situación planteada y lo que se le pide, para lo cual debe categorizar la información en dos categorías: tipo de vacuna (vacunados de hepatitis, vacunados de sarampión) y género (varones y mujeres) e interpretar los datos de los cuadros, clasificarlos de acuerdo con las categorías presentadas y, luego, identificar entre las distintas alternativas cuál es la que representa toda la información.

M6P03

Suficiente

Resuelve:

$$8 + 2 \times 3$$

✓**a)** 14
b) 30
c) 13
d) 33

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Aplicación de algoritmos*
Contenido: *Número y cantidad*
Contexto: *Intramatemático*
Formato: *Opción múltiple*
Nivel de desempeño: *Suficiente*
Dificultad Rasch: *366*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para calcular operaciones combinadas con números naturales, sin signos de agrupación, que demandan seguir una secuencia ordenada de pasos, respetando la jerarquía de las operaciones. Se han utilizado números de una cifra para que la dificultad de la pregunta se centre en el procedimiento de resolución.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

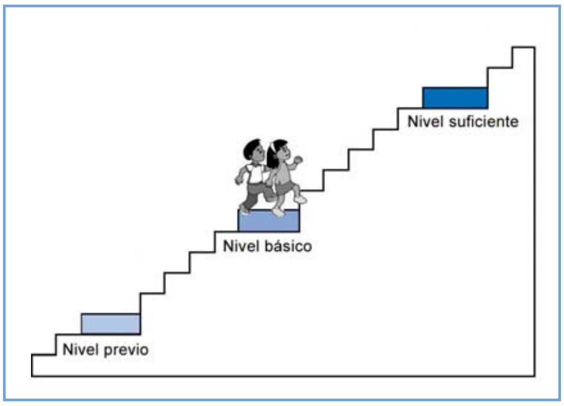
El estudiante debe seguir una secuencia ordenada de pasos determinada por la jerarquía de las operaciones. Primero, debe hallar el producto de multiplicar 2 x 3 para, luego, sumarlo a 8 y obtener el resultado: «14».

2.2. Lo que hacen los estudiantes que no alcanzaron el nivel suficiente

A continuación se describen las habilidades de los estudiantes que no alcanzaron el nivel suficiente, es decir, aquellos que se ubican en el nivel básico y en el nivel previo.

Nivel básico

Que un estudiante se encuentre en el nivel básico significa que demuestra un desarrollo incipiente o inicial de las capacidades propias del grado.



Los estudiantes agrupados en el nivel básico demuestran un dominio incipiente, o un manejo elemental, de las capacidades evaluadas en este grado. No han logrado todavía un desarrollo adecuado de las habilidades esperadas para un estudiante que ya va a concluir el grado, sino que están en proceso de desarrollo: las tienen desarrolladas en forma parcial a pesar de estar por terminar sexto grado de primaria.

A partir del conjunto de preguntas que estos estudiantes responden correctamente, se puede afirmar que resuelven situaciones problemáticas sencillas, rutinarias y no rutinarias, en las que el enunciado contiene, de manera explícita, la información necesaria y suficiente. La estrategia de solución consiste en la aplicación de una secuencia de dos operaciones aritméticas básicas o de algoritmos empleados en otros contenidos matemáticos (como la noción de proporcionalidad entre magnitudes, o la equivalencia de medidas de longitud y tiempo expresadas solo en números naturales).

Los estudiantes en este nivel se están iniciando en la comprensión de los números racionales; manejan la noción de fracción como parte de un todo. Además, establecen la equivalencia entre denominaciones de nuestro sistema monetario que requieren el empleo de algunos números decimales. Asimismo, resuelven operaciones combinadas, con un nivel de signos de agrupación, con números naturales que implican respetar la jerarquía de las operaciones. También calculan el resultado de operaciones combinadas de adición y sustracción con fracciones homogéneas y con un nivel de signos de agrupación.

Respecto del manejo de la geometría, identifican formas geométricas elementales a partir de sus propiedades[35] (número de lados, congruencia de lados, medidas de sus ángulos).

En cuanto a la estadística, interpretan y representan información en diagramas de barras a escala y en cuadros de doble entrada y hallan la frecuencia absoluta, determinando el total de un conjunto de datos.

35. De acuerdo con la teoría de Van Hiele (Crowley 2004), los estudiantes ubicados en este nivel se encuentran en el inicio de la fase descriptiva en la cual reconocen las figuras a partir de sus propiedades.

TAREAS QUE REALIZA EL ESTUDIANTE EN EL NIVEL BÁSICO

- Recodifica de su expresión verbal a la simbólica, y viceversa, números naturales hasta la decena de millar, con la presencia de ceros (por ejemplo: 80 720).
- Representa gráficamente las fracciones más usuales: $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}$.
- Calcula el resultado de operaciones combinadas, con un nivel de signos de agrupación en el ámbito de los números naturales y fracciones homogéneas.
- Resuelve problemas de dos etapas cuya solución requiere una secuencia de dos operaciones con números naturales.
- Resuelve problemas sencillos de hasta dos etapas que demandan cierto tipo de proporcionalidad simple entre dos magnitudes cuya relación puede no ser explícita.
- Resuelve problemas sencillos de una etapa cuya solución demanda el cálculo de la adición de medidas de longitud expresadas en números decimales.
- Identifica algunas figuras geométricas (cuadrado, rectángulo y rombo) a partir de algunas de sus propiedades (número de lados, congruencia de lados, medidas de sus ángulos).
- Resuelve problemas de dos etapas que demandan la interpretación y elaboración de cuadros y diagramas de barras simples con representación de la frecuencia a escala: 1:2; 1:5; y 1:10.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de preguntas que pueden resolver los estudiantes ubicados en el nivel básico.

M6P04

Por 5 bolsas de arroz se paga S/. 10. ¿Cuánto pagaría por 2 bolsas?

Básico

a) S/. 17

✓ **b)** S/. 4

c) S/. 5

d) S/. 8

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Básico*

Dificultad Rasch: *265*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante de resolver problemas de proporcionalidad simple de dos magnitudes con una relación definida entre ellas, en una situación de compra y venta. El enunciado no hace referencia explícita a la unidad, es decir, al precio de una bolsa de arroz, pero sí da el valor de cinco bolsas de arroz.

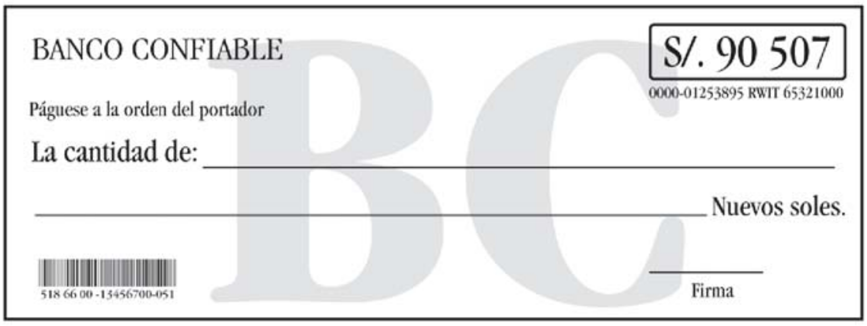
¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe identificar las dos magnitudes (número de bolsas de arroz y costo en soles por bolsa), interpretar las relaciones entre estas magnitudes de diferente naturaleza y comprender que lo solicitado es el pago por dos bolsas. Por el ámbito numérico, la estrategia seleccionada podría ser gráfica o aritmética. Para ello, debe seleccionar la división como operación adecuada para hallar el pago unitario por una bolsa (10 ÷ 5), luego multiplicar el pago unitario por la cantidad pedida (2 x 2) y, finalmente, hallar la respuesta: «4».

M6P05

Básico

Completa este cheque escribiendo en palabras la cantidad indicada:



FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Respuesta corta*

Nivel de desempeño: *Básico*

Dificultad Rasch: *267*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la aplicación del conocimiento matemático en situaciones del entorno social en las que interviene la recodificación de números naturales (que incluyen ceros en su composición) hasta la decena de millar, que deben ser expresados simbólicamente mediante palabras.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver esta pregunta el estudiante debe recodificar un número natural de su expresión simbólica a su representación verbal. La interpretación de los ceros en el número 90 507 demanda el uso de los principios del valor posicional en la lectura y escritura de números naturales. Específicamente, debe interpretar que el 9 representa 90 000 (se encuentra en la posición de decenas de millar), el 5 representa 500 y el 7 representa 7 unidades. Su respuesta debe ser «noventa mil quinientos siete».

Se consideraron correctas las respuestas de los estudiantes que dieron cuenta del manejo de la capacidad evaluada, independientemente de su dominio ortográfico.

M6P06

Resuelve:

$$\frac{4}{7} + \frac{1}{7} =$$

Básico

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Aplicación de algoritmos

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Intramatemático

Formato: Respuesta extensa

Nivel de desempeño: Básico

Dificultad Rasch: 269

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la aplicación directa del algoritmo de la adición de fracciones homogéneas de dos sumandos en un contexto intramatemático.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver esta pregunta, el estudiante debe aplicar el algoritmo de la adición de fracciones homogéneas, el cual supone el manejo de la noción de fracción. La estrategia utilizada puede ser aritmética o gráfica. El resultado al que deben llegar los estudiantes es « $\frac{5}{7}$ ».

¿Cómo respondieron los estudiantes?

Los estudiantes mostraron diferentes estrategias para llegar a la respuesta pedida. Por ejemplo, un estudiante halló primero el denominador común, aun cuando en este caso no era necesario, pues se trata de dos fracciones homogéneas:

Resuelve:

$$\frac{4}{7}+\frac{1}{7}=\frac{4+1}{7}=\frac{5}{7}$$

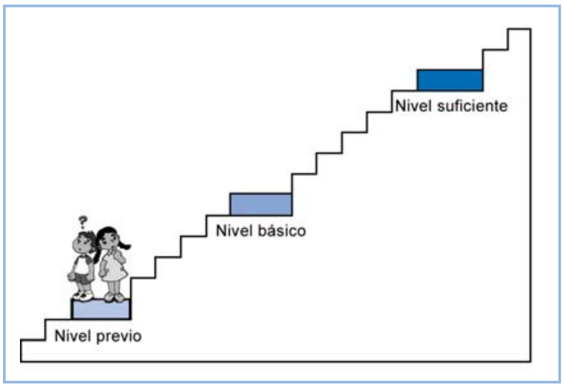
La mayoría de estudiantes que resolvió la pregunta lo hizo colocando directamente la suma:

Resuelve:

$$\frac{4}{7}+\frac{1}{7}=\frac{5}{7}$$

Nivel previo

Que un estudiante se ubique en este nivel significa que demuestra solo un desarrollo de capacidades que son propias de grados anteriores.



Los estudiantes en este nivel demuestran un manejo solo de las capacidades desarrolladas en grados anteriores. Pese a estar por concluir sexto grado, no han logrado evidenciar el dominio de las habilidades que se esperan de un estudiante que está empezándolo, sino que solo tienen desarrolladas aquellas propias de grados anteriores.

Los estudiantes ubicados en el nivel previo resuelven problemas rutinarios que representan situaciones cotidianas con enunciados en los que la información necesaria para su resolución es explícita. La estrategia de solución para resolver estos problemas demanda aplicar una operación aritmética básica (adición, sustracción, multiplicación o división) o un procedimiento relacionado con la lectura, escritura y comparación de números naturales, con el establecimiento de relaciones de equivalencia entre las principales unidades de medida de tiempo, o con la interpretación y elaboración de cuadros y diagramas de barras con representación icónica.

Asimismo, tienen un manejo solvente de los algoritmos convencionales de las cuatro operaciones básicas en el conjunto de los números naturales. Representan de diferentes maneras fracciones elementales y porcentajes de uso más frecuente (0%, 50% y 100%) y establecen equivalencias entre las diferentes unidades de longitud y tiempo.

En cuanto al manejo de la geometría, identifican la forma de las figuras geométricas como un todo, pues solo identifican objetos a partir de su apariencia física (triángulo, cuadrado, rectángulo, rombo, cubo, cilindro, pirámide) y de su semejanza con objetos concretos.[36]

Respecto de la gestión de la información, leen y extraen datos en los casos más elementales (identificación de frecuencia absoluta en diagramas de barras y cuadros de doble entrada a escala de 1:1 con un número reducido de datos) dentro de un contexto personal y familiar, en el que el enunciado presenta en forma explícita la información necesaria y suficiente para su solución.

Tareas que realiza el estudiante en el nivel previo

- Recodifica de su expresión verbal a la simbólica, y viceversa, números naturales hasta la decena de millar, sin la presencia de ceros (por ejemplo: 82 156).
- Establece relaciones de orden en los números naturales hasta la unidad de millón.

36. De acuerdo con la teoría de Van Hiele (Crowley 2004), los estudiantes ubicados en el nivel previo se encuentran en el nivel de visualización.

- Resuelve problemas de una etapa relacionados con situaciones cotidianas que involucran reproducción de estrategias y aplicación de una de las cuatro operaciones básicas en el ámbito de los números naturales.
- Calcula el resultado de cada una de las cuatro operaciones básicas en los números naturales por separado.
- Identifica las diferentes denominaciones de nuestro sistema monetario.
- Representa gráficamente los porcentajes de uso más frecuente (0%, 50% y 100%).
- Identifica equivalencias entre las principales unidades de longitud (m, cm) y tiempo (día, semana, mes, año).
- Resuelve problemas sencillos de una etapa cuya solución demanda identificar y aplicar equivalencias entre las unidades de tiempo (día, semana, mes, año).
- Identifica algunas figuras geométricas planas y sólidos geométricos a partir de la representación de objetos concretos.
- Identifica la frecuencia absoluta de un número limitado de datos y de hasta dos categorías, en cuadros de doble entrada y diagramas de barras a una escala de 1:1.
- Resuelve problemas sencillos de una etapa cuya estrategia de solución requiere identificar la frecuencia absoluta de un número limitado de datos de hasta dos categorías, en cuadros de doble entrada y diagramas de barras a una escala de 1:1.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de preguntas que pueden resolver los estudiantes ubicados en el nivel previo.

M6P07

Previo

Lee con atención y responde:

Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta:

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Respuesta extensa*

Nivel de desempeño: *Previo*

Dificultad Rasch: 171

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante de resolver problemas tipo en una situación cotidiana de compra y venta presentada en forma de historieta, cuya solución demanda la aplicación de una operación aritmética en los números naturales. Los números utilizados son pequeños, por lo que la solución del problema no va a ser afectada por el ámbito numérico sino por la estrategia de solución seleccionada.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe comprender la situación planteada: debe interpretar que lo solicitado se refiere al cálculo de la cantidad que le falta para completar el costo total del oso. En seguida, debe seleccionar una estrategia de solución. Una estrategia posible sería optar por la sustracción como operación adecuada para llegar a la respuesta (14 – 9), hallar la diferencia de estos números (5) y, finalmente, comunicar el resultado dentro del contexto de la situación planteada. Por el ámbito numérico, la pregunta puede resolverse mediante una estrategia gráfica.

Tiene 9
Necesita ?
14 Cuesta

☑ Respuestas correctas

Respuesta A

Escribe aquí tu procedimiento

$$\begin{array}{r} 14- \\ 9 \\ \hline 5 \end{array}$$

Respuesta: Me faltan 5 soles

La mayoría de estudiantes resolvió esta pregunta mediante un procedimiento similar al de la respuesta A, en la cual el estudiante selecciona la sustracción como operación apropiada para hallar la solución.

Respuesta B

Escribe aquí tu procedimiento

$9+5=14$ | $\begin{array}{r} 9+ \\ 5 \\ \hline 14 \end{array}$

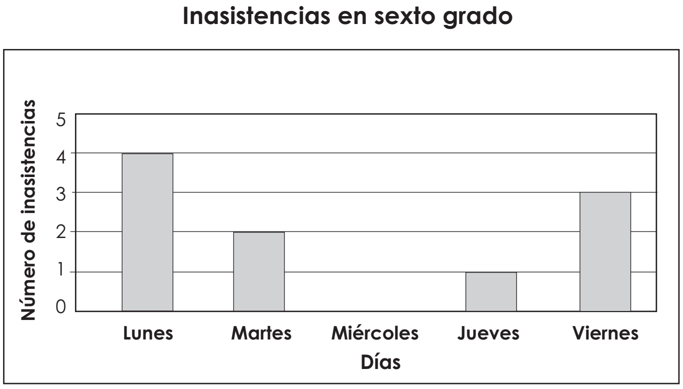
Respuesta: Me faltan para comprar un oso S/ 5

Una parte de la población evaluada halló la respuesta por completamiento, como se muestra en la respuesta B. Esta estrategia implica un mecanismo que sigue la lógica de la sustracción y ha sido fácil de aplicar dado el ámbito numérico.

M6P08

Previo

Observa el gráfico:



Según la información del gráfico, **responde:**

¿Qué día se observa la mayor cantidad de inasistencias?

____

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Estadística y probabilidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Respuesta corta*

Nivel de desempeño: *Previo*

Dificultad Rasch: *235*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para interpretar un diagrama de barras de frecuencia con información estadística proveniente de un contexto escolar. Su resolución demanda la capacidad de identificar y decodificar información estadística representada gráficamente.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver esta pregunta, el estudiante debe identificar las categorías consideradas (días de la semana y frecuencia de inasistencias), comprender la pregunta, interpretar las barras del diagrama, seleccionar aquella que muestra la información necesaria para responderla y, finalmente, comunicar el resultado dentro del contexto de la situación planteada: la mayor cantidad de inasistencias ocurrió el día lunes.

M6P09

Previo

Resuelve:

$$(12 - 5) \times (3 + 7) =$$

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Aplicación de algoritmos*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Intramatemático*

Formato: *Respuesta extensa*

Nivel de desempeño: *Previo*

Dificultad Rasch: *186*

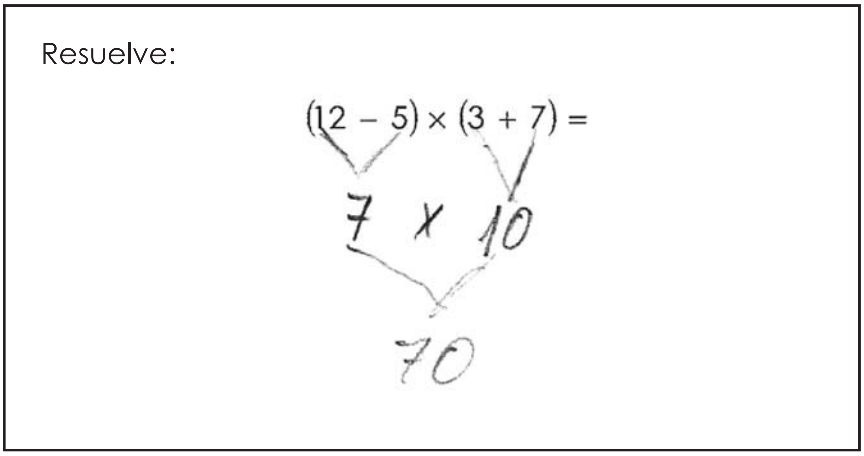
¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la aplicación simultánea de varios algoritmos al momento de resolver operaciones combinadas con un nivel de signos de agrupación, utilizando cantidades menores que 20, en el conjunto de los números naturales. La dificultad de la pregunta está centrada en la capacidad de manejar en forma adecuada los signos de agrupación, por eso las cifras utilizadas son pequeñas.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver esta pregunta, el estudiante debe considerar el procedimiento de resolución de operaciones combinadas con signos de agrupación. En este caso, primero debe calcular el resultado de cada operación entre paréntesis (12 – 5) y (3 + 7). Luego, debe multiplicar estos resultados (7 x 10) para hallar el producto final (70).

Respuesta correcta


Resuelve:

$(12 - 5) \times (3 + 7) =$

7 x 10

70

La mayoría de estudiantes evaluados ha resuelto esta pregunta con el procedimiento que aparece en la respuesta anterior.

Resumen de los niveles de desempeño en sexto grado de primaria

NIVEL SUFICIENTE

Los estudiantes ubicados en el nivel suficiente pueden resolver situaciones problemáticas, rutinarias y no rutinarias, que cuentan con algunos datos implícitos y que, por ello, deben ser deducidos. La resolución de dichas situaciones implica la adaptación o elaboración de una estrategia de solución. Estas estrategias involucran el planteamiento de secuencias de hasta tres operaciones aritméticas básicas y, en algunas ocasiones, la conexión de los diferentes contenidos matemáticos. Además, poseen un conocimiento y manejo adecuado de la estructura del sistema de numeración decimal, de las expresiones fraccionarias y decimales más usuales, en situaciones cotidianas.

Entre los principales contenidos y habilidades implicados en la resolución de problemas están la aplicación de operaciones combinadas con y sin signos de agrupación en el ámbito numérico de los números naturales y fraccionarios, el cálculo de los resultados de adiciones o sustracciones con números decimales hasta las centésimas, el cálculo de porcentajes simples y la aplicación de la noción de proporcionalidad (regla de tres simple y directa).

Además, establecen en forma adecuada las relaciones de equivalencia entre las principales unidades de longitud y tiempo expresadas con números decimales y fracciones; interpretan e identifican información estadística en diversas representaciones (gráfica, icónica y tabular); y calculan el perímetro y área de figuras planas que implican la composición y descomposición de figuras geométricas. Asimismo, identifican y diferencian, a partir de sus propiedades, figuras geométricas planas y del espacio.

NIVEL BÁSICO

Los estudiantes ubicados en el nivel básico resuelven situaciones problemáticas sencillas, rutinarias y no rutinarias, en las que el enunciado contiene, de manera explícita, la información necesaria y suficiente. La estrategia de solución consiste en la aplicación de una secuencia de dos operaciones aritméticas básicas o de algoritmos empleados en otros contenidos matemáticos (como la noción de proporcionalidad entre magnitudes, o la equivalencia de medidas de longitud y tiempo expresadas solo en números naturales).

Los estudiantes en este nivel se están iniciando en la comprensión de los números racionales; manejan la noción de fracción como parte de un todo. Además, establecen la equivalencia entre denominaciones de nuestro sistema monetario que requieren el empleo de algunos números decimales. Asimismo, resuelven operaciones combinadas, con un nivel de signos de agrupación, con números naturales que implican respetar la jerarquía de las operaciones. También calculan el resultado de operaciones combinadas de adición y sustracción con fracciones homogéneas y con un nivel de signos de agrupación.

Respecto del manejo de la geometría, identifican formas geométricas elementales a partir de sus propiedades (número de lados, congruencia de lados, medidas de sus ángulos).

En cuanto a la estadística, interpretan y representan información en diagramas de barras a escala y en cuadros de doble entrada y hallan la frecuencia absoluta, determinando el total de un conjunto de datos.

NIVEL PREVIO

Los estudiantes ubicados en el nivel previo resuelven problemas rutinarios que representan situaciones cotidianas con enunciados en los que la información necesaria para su resolución es explícita. La estrategia de solución para resolver estos problemas demanda aplicar una operación aritmética básica (adición, sustracción, multiplicación o división) o un procedimiento relacionado con la lectura, escritura y comparación de números naturales, con el establecimiento de relaciones de equivalencia entre las principales unidades de medida de tiempo, o con la interpretación y elaboración de cuadros y diagramas de barras con representación icónica.

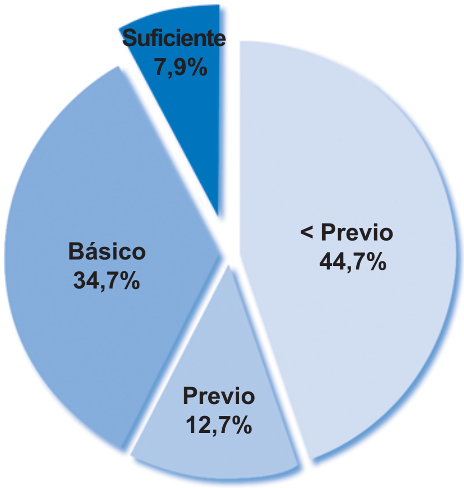
Asimismo, tienen un manejo solvente de los algoritmos convencionales de las cuatro operaciones básicas en el conjunto de los números naturales. Representan de diferentes maneras fracciones elementales y porcentajes de uso más frecuente (0%, 50% y 100%) y establecen equivalencias entre las diferentes unidades de longitud y tiempo.

En cuanto al manejo de la geometría, identifican la forma de las figuras geométricas como un todo, pues solo identifican objetos a partir de su apariencia física (triángulo, cuadrado, rectángulo, rombo, cubo, cilindro, pirámide) y de su semejanza con objetos concretos.

Respecto de la gestión de la información, leen y extraen datos en los casos más elementales (identificación de frecuencia absoluta en diagramas de barras y cuadros de doble entrada a escala de 1:1 con un número reducido de datos) dentro de un contexto personal y familiar, en el que el enunciado presenta en forma explícita la información necesaria y suficiente para su solución.

3 Resultados según niveles de desempeño

En el siguiente gráfico se presentan los resultados obtenidos a nivel nacional en la prueba de Lógico Matemática en sexto grado de primaria.



Solo el 7,9% de los estudiantes de sexto grado de primaria se ubica en el nivel suficiente, lo que significa que únicamente esta escasa población demuestra un manejo suficiente, necesario y aceptable de las capacidades evaluadas en la EN 2004.[37] No se trata de estudiantes avanzados sino de estudiantes con un nivel de desempeño adecuado para el grado.

El nivel suficiente es aquel que se espera que los estudiantes alcancen al terminar el grado. El 92,1% de los estudiantes de la población nacional de sexto grado de primaria **no** alcanza este nivel.

Que la gran mayoría de estudiantes de sexto grado de primaria no pueda alcanzar el nivel suficiente significa que tendrán serias dificultades para emplear la matemática como herramienta eficiente y significativa en el proceso de ampliar sus conocimientos y desarrollar sus capacidades en esta y en otras áreas.

El 34,7% de los estudiantes de sexto de primaria se ubica en el nivel básico. Estos estudiantes tienen un manejo incipiente y elemental de las capacidades correspondientes a

37. Las capacidades evaluadas en el EN 2004 consideran la ECB vigente al momento de la elaboración de las pruebas.

sexto grado de primaria. Casi la mitad de los estudiantes de sexto grado termina la primaria cuando aún está en proceso de afianzamiento de habilidades y de incorporación de los contenidos requeridos para el nivel.

El 12,7% de los estudiantes de sexto de primaria se ubica en el nivel previo. Estos estudiantes únicamente tienen un dominio de las capacidades que corresponden a los grados anteriores.

Finalmente, el 44,7% de los estudiantes se encuentra por debajo del nivel previo. Se trata de un gran grupo de estudiantes que no muestra tener las habilidades necesarias para realizar, de manera consistente, todas las tareas que son propias del nivel previo; es decir, ni siquiera se puede afirmar que manejan las capacidades que han debido consolidarse en grados anteriores.

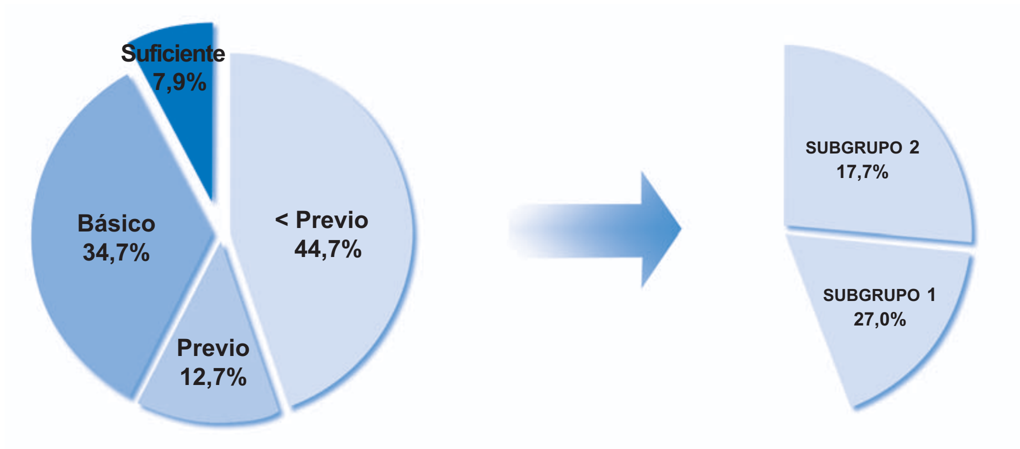
Si la población nacional de sexto de primaria fuera una clase de treinta estudiantes, esta sería su probable distribución:

- Dos estudiantes estarían en el nivel suficiente: tendrían un manejo aceptable de las capacidades evaluadas en el grado.
- Diez estudiantes estarían en el nivel básico: presentarían un desarrollo incipiente y elemental de las capacidades evaluadas en el grado.
- Cuatro estudiantes estarían en el nivel previo: tendrían solo la habilidad correspondiente a grados anteriores.
- Catorce estudiantes no realizarían ni siquiera todas las tareas del nivel previo.

Lo que hacen los estudiantes que se encuentran debajo del nivel previo

Los estudiantes que se ubican por debajo del nivel previo no forman propiamente un grupo con características homogéneas; sin embargo, debido a que se ha encontrado gran cantidad de estudiantes que no llegaban a resolver todas las preguntas exigidas para estar en el nivel previo, es necesario describir a este grupo de estudiantes.

Como se aprecia en el siguiente gráfico, el grupo de los estudiantes que no llega a alcanzar ni siquiera el nivel previo (44,7% de la población nacional en sexto grado de primaria) ha sido dividido en dos subgrupos, de acuerdo con las tareas que logran realizar.



Por debajo del previo	44,7%	Subgrupo 1	27,0%
		Subgrupo 2	17,7%

A continuación, se presenta una descripción de las tareas que pueden realizar los estudiantes de cada subgrupo ubicado por debajo del nivel previo

Subgrupo 1

Integrado por 27,0% de los estudiantes de sexto grado. Estos estudiantes solo realizan algunas de las tareas propuestas del nivel previo, las cuales están relacionadas con la resolución de problemas aditivos y multiplicativos de estructura matemática sencilla con números naturales pequeños; la comprensión de la noción de número natural en su función de ordinal y cardinal; la aplicación de algoritmos de adición, sustracción y multiplicación de números naturales; y la lectura, escritura y comparación de números naturales.

Subgrupo 2

Este es el grupo con más bajo rendimiento. Está integrado por 17,8% de los estudiantes de sexto grado. Estos estudiantes solo realizan tareas muy elementales, propias del ciclo IV (tercer y cuarto grados), las cuales están relacionadas con la noción de número natural en su función ordinal y cardinal, y la aplicación de los algoritmos de adición y sustracción, sin cambios de orden, en los números naturales.

4 Análisis de las preguntas de la prueba y de las respuestas de los estudiantes

En esta sección se presentan algunas de las preguntas que integraron la prueba de sexto grado de primaria. Estas preguntas se dan a conocer para su uso por parte de personas interesadas en el tema.

Todas estas preguntas han sido diseñadas de acuerdo con las definiciones formuladas en el marco de trabajo de la EN 2004[38] y miden la formación matemática de los estudiantes. Cada una de ellas evalúa una capacidad, un contenido y un contexto específico que son señalados en una ficha técnica. Además, en esta ficha se indica el formato de presentación de la pregunta y su dificultad Rasch. Las preguntas se encuentran ordenadas de acuerdo con su dificultad, desde la más fácil a la más difícil. Asimismo, se describen los procedimientos matemáticos, estrategias y conceptos que los estudiantes pueden utilizar para responder con éxito las preguntas propuestas y se presentan los criterios empleados para la calificación de cada pregunta.

En algunos casos, especialmente en las preguntas que requieren de una respuesta extensa, se han reproducido algunas de las respuestas de los estudiantes. Estas preguntas, en particular, son fuente de mucha información, pues, al registrar su procedimiento, el estudiante evidencia sus estrategias, sus patrones de pensamiento y el grado de estructuración del conocimiento matemático que posee para aplicarlo en situaciones diversas. Por esta razón, al momento de codificar las respuestas se han considerado códigos específicos que permiten clasificarlas de acuerdo con las diversas aproximaciones a la respuesta correcta y con los posibles patrones de error, que muestran el tipo de razonamiento y el sistema de creencias que utilizan los estudiantes al momento de contestar determinadas preguntas matemáticas.

Luego de cada respuesta, se hace un breve comentario con el fin de ilustrar, mediante casos específicos, algunos de los patrones y esquemas de pensamiento de los estudiantes. Además, se proporciona el porcentaje estimado de la población nacional que está en la capacidad de responder con éxito cada pregunta.[39]

Cada pregunta tiene un código de clasificación que permite ubicarla en la escala de dificultad presentada en la página 211.

38. *Marco de trabajo de las pruebas de rendimiento.* En <http://www.minedu.gob.pe/umc/2004/marctrab/MarcTranPruebEN2004.pdf.pp 71-121>.
39. Este indicador señala que ese porcentaje de estudiantes de sexto grado tiene un 62% de probabilidad de responder correctamente la pregunta.

M6P07

Previo

Lee con atención y responde:

Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta:

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Respuesta extensa*

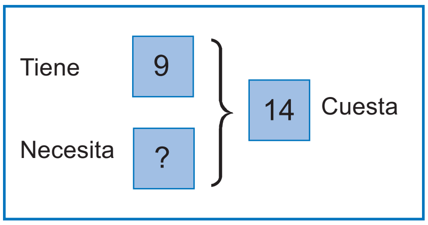
Nivel de desempeño: *Previo*

Dificultad Rasch: *171*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante de resolver problemas rutinarios, en una situación de compra y venta presentada en forma de historieta, cuya solución demanda la elaboración de una estrategia para comparar dos cantidades y encontrar su diferencia en los números naturales. Los números utilizados son pequeños, por lo que la dificultad de su solución no está centrada en el tamaño de las cantidades involucradas, sino en la búsqueda de la estrategia de solución.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?



El estudiante debe comprender la situación planteada: debe interpretar que lo solicitado se refiere al cálculo de la cantidad que le falta para completar el costo total del oso. En seguida, debe seleccionar una estrategia de solución. Una estrategia posible sería optar por la sustracción como operación adecuada para llegar a la respuesta (14 – 9), hallar la diferencia de estos números (5) y, finalmente, comunicar el resultado dentro del contexto de la situación planteada. Por el ámbito numérico, la pregunta puede resolverse mediante una estrategia gráfica.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Las respuestas que se consideraron correctas fueron aquellas que llegaban a la respuesta pedida (5), independientemente del tipo de procedimiento utilizado, aunque no se explicitase la unidad. Se consideraron también respuestas correctas aquellas en las que los estudiantes presentaron un planteamiento adecuado a pesar de no escribir o especificar una respuesta. En todas las respuestas consideradas como correctas se verificó la coherencia entre el procedimiento seguido y la respuesta dada por el estudiante.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

Los estudiantes, en su mayoría, utilizaron la sustracción como operación para hallar la solución.

✓ Respuestas correctas

Respuesta A

Escribe aquí tu procedimiento

$$\begin{array}{r} 14 - \\ 9 \\ \hline 5 \end{array}$$

Respuesta: Me faltan 5 soles

En la respuesta A, el estudiante emplea la sustracción. Se observa que el estudiante se identifica con la situación planteada, pues la respuesta está enfocada en él: «Me faltan...».

Respuesta B

Escribe aquí tu procedimiento

$9+5=14$ | $\begin{array}{r} 9 \; + \\ 5 \\ \hline 14 \end{array}$

Respuesta: Me faltan para compran un oso S/ 5

Otra tendencia que aparece en las respuestas es resolver el problema mediante el completamiento de datos considerando la cantidad desconocida como un sumando, como se observa en la respuesta B.

> Se estima que un 94% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M6P10

Previo

María tiene 11 soles y Liz 18 soles. ¿Cuánto le falta a María para tener igual que Liz?

Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta:

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Respuesta extensa*

Nivel de desempeño: *Previo*

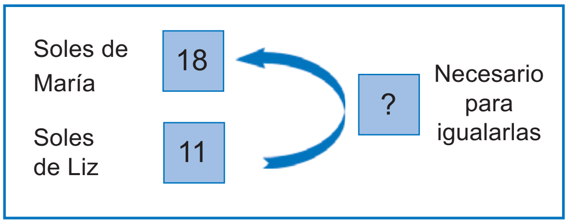
Dificultad Rasch: *188*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante de resolver problemas tipo en una situación cotidiana. El problema es presentado mediante un enunciado verbal. Su solución demanda la elaboración de una estrategia de comparación entre números y el cálculo de la diferencia entre dos números naturales.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe comprender la situación planteada en el problema e identificar la cantidad que le falta a Liz para tener la misma cantidad de dinero que María: debe interpretar que lo solicitado se refiere a la igualación de dos cantidades. En seguida, debe seleccionar una estrategia de solución. Una opción es optar por la sustracción como operación adecuada para llegar a la respuesta (18 – 11), hallar la diferencia de estos números (7) y, finalmente, comunicar el resultado dentro del contexto de la situación planteada. Por el ámbito numérico utilizado, esta pregunta puede ser resuelta también mediante estrategias gráficas y de conteo.



¿Cómo se calificaron las respuestas?

Las respuestas que se consideraron correctas fueron aquellas que señalaron la respuesta pedida (7), independientemente del tipo de procedimiento y de la unidad utilizada. Se consideraron también como correctos los casos en los que el planteamiento era adecuado, a pesar de no escribir o especificar una respuesta. En todas las respuestas consideradas como correctas se verificó la coherencia entre el procedimiento seguido y la respuesta del estudiante.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

Los estudiantes, en su mayoría, utilizaron la sustracción como operación para hallar la solución.

✓ Respuesta correcta

Escribe aquí tu procedimiento

M = 11 soles

L = 18 soles

$$\begin{array}{r} 18 - \\ 11 \\ \hline 7 \end{array}$$

Respuesta: Le falta a María 7 soles

En esta respuesta, se aprecia que el estudiante comprende la situación planteada, busca una estrategia adecuada, la aplica y le da significado a la respuesta. Este estudiante ha seguido una secuencia en la resolución de problemas similares a la propuesta por Polya en 1945, en su obra sobre resolución de problemas.

> Se estima que un 92% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M6P11

Resuelve:

$$2{,}01 + 0{,}75 =$$

Previo

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Aplicación de algoritmos

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Intramatemático

Formato: Respuesta extensa

Nivel de desempeño: Previo

Dificultad Rasch: 217

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para calcular la suma de dos números decimales en los que los sumandos tienen igual cantidad de cifras decimales. Los sumandos se presentan en forma horizontal.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe aplicar el algoritmo de la adición y sumar los números correspondientes, sea mentalmente o con cálculos escritos. En este caso, los números tienen la misma cantidad de cifras decimales por lo que la pregunta demanda un procedimiento de resolución mecánico y bastante elemental. Para resolverla, son suficientes los conocimientos requeridos para la aplicación de los algoritmos del ámbito de los números naturales.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Las respuestas que se consideraron correctas fueron aquellas que llegaban a la cantidad requerida: «2,76». También se consideraron correctas las respuestas en las que se utilizó punto decimal en lugar de coma decimal, dado que el punto decimal aún es de uso cotidiano para algunos profesores y está presente en textos escolares que siguen en circulación.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

La mayoría de los estudiantes evaluados ordenó verticalmente los sumandos y utilizó la coma decimal.

✓ Respuesta correcta

Resuelve:

2,01 + 0,75 = 2,76

2,01 +
0,75
2,76

En esta respuesta, el estudiante ordena los sumandos en posición vertical, considera la coma decimal y suma correctamente. La respuesta final es otro número decimal.

X Respuesta incorrecta

Los errores más frecuentes se debieron a no utilizar ni el punto ni la coma decimal, sino considerar los sumandos como números naturales. Este tipo de error da cuenta de la falta de comprensión acerca del valor posicional de los números decimales.

Resuelve:

2,01 + 0,75 =

276

En esta respuesta, se evidencia la omisión del punto o de la coma decimal: el estudiante suma dos números decimales como si se tratara de números naturales, por lo que el resultado también es un número natural.

[Se estima que un 82% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

M6P12

Básico

Observa y lee con atención:

Voluntarios de nuestra comunidad

Instituciones	Representantes	Número de voluntarios
Cruz Roja		30
Defensa Civil		
Bomberos		

Ahora responde:

¿Cuántos bomberos hay en nuestra comunidad?

a) 4
b) 50
c) 13
✓**d)** 40

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas
Contenido: Estadística y probabilidad
Contexto: Extramatemático
Formato: Opción múltiple
Nivel de desempeño: Básico
Dificultad Rasch: 259

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para resolver problemas que demandan interpretar y recodificar la información presentada en cuadros de doble entrada, en los que los datos se encuentran a escala y están representados gráficamente. La respuesta debe expresar la información presentada simbólicamente mediante números.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver esta pregunta, el estudiante debe comprender la situación planteada, elaborar una estrategia de solución y aplicarla. Para hacerlo, debe identificar e interpretar las categorías consideradas en el cuadro (voluntarios, número de voluntarios) deducir la escala utilizada (cada figura equivale a diez voluntarios) y realizar la equivalencia de acuerdo con la información solicitada (4 x 10).

¿Cómo respondieron los estudiantes?

Muchos estudiantes evidenciaron la comprensión del cuadro estadístico en cuanto identificaron las categorías propuestas (asocian correctamente la institución con los voluntarios). Sin embargo, hay dificultades al momento de interpretar la representación gráfica de los voluntarios con la cantidad exacta de estos. La representación gráfica de los voluntarios está en una escala de 1 a 10 (1:10), es decir, cada dibujo equivale a 10 personas, lo cual puede deducir al analizar la primera fila (Cruz Roja).

La tendencia de error se presenta, precisamente, ante esta falta de interpretación de la escala, lo que ha llevado a muchos estudiantes a marcar la alternativa «a)», que indica la cantidad de dibujos en la categoría pedida, mas no la cantidad de voluntarios en esa categoría.

Se estima que un 59% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M6P13

Resuelve:

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=$$

Básico

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Aplicación de algoritmos

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Intramatemático

Formato: Respuesta extensa

Nivel de desempeño: Básico

Dificultad Rasch: 265

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la aplicación directa del algoritmo de la adición en fracciones homogéneas. En este caso, los sumandos son fracciones propias y su suma es una fracción impropia.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe identificar que se trata de la adición de fracciones homogéneas y elegir una estrategia de solución. Una forma de resolverla es de manera gráfica, pues se suman fracciones homogéneas. Otra estrategia puede ser una técnica operativa simbólica: al tratarse de tres fracciones con el mismo denominador, se pueden juntar los numeradores para obtener como resultado: $\frac{8}{5}$. Un paso posterior, no exigido, es la conversión de esta fracción impropia al número mixto correspondiente: $1\frac{3}{5}$.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Las respuestas que se consideraron correctas fueron aquellas que llegaban a la respuesta pedida: «$\frac{8}{5}$» o «$1\frac{3}{5}$», independientemente de la estrategia utilizada.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

A continuación, se presenta ejemplos de respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes.

✓ Respuesta correcta

Resuelve:

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3+4+1}{5}=\frac{8}{5}$$

En esta respuesta se observa que el estudiante realiza un paso que podría ser entendido como de reconocimiento (vuelve a copiar las fracciones sobre un solo denominador) o que conoce el algoritmo de la adición en fracciones heterogéneas y lo ha aplicado.

X Respuesta incorrecta

Resuelve:

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$$

Esta respuesta muestra el error más frecuente: sumar los numeradores y también los denominadores. El estudiante considera la fracción como dos números aislados, sin ningún tipo de relación entre sí.

> Se estima que un 55% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M6P14

Resuelve:

$$0{,}95 + 2{,}7 =$$

Suficiente

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Aplicación de algoritmos*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Intramatemático*

Formato: *Respuesta extensa*

Nivel de desempeño: *Suficiente*

Dificultad Rasch: *280*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la aplicación del algoritmo de la adición en números con diferente cantidad de cifras decimales, presentados en forma horizontal. Demanda la comprensión del significado del número decimal y del valor posicional de los números decimales, sean enteros o decimales (en particular, décimas y centésimas), para poder sumar correctamente teniendo en cuenta este valor posicional. Nótese que los números son pequeños y no presentan ceros después de la coma decimal, lo que implica que la dificultad al resolver esta pregunta está centrada básicamente en el manejo del valor posicional de las cifras en números decimales.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver esta pregunta, el estudiante puede aplicar el algoritmo escrito convencional para lo que debe ordenar verticalmente los sumandos considerando el valor posicional de cada cifra, de manera tal que, en cada columna, se ubiquen las cifras que representan un mismo orden (columna de las centésimas, columna de las décimas, columna de las unidades, etc.). Luego, debe calcular la suma de estos números y presentar su respuesta final, en este caso: «3,65».

Para contestar esta pregunta, se debe tener mayor habilidad que la necesaria para contestar la pregunta M6P11 (2,01 + 0,75) que pertenece al nivel previo, para la cual basta con el manejo algorítmico en los números naturales. Para resolver correctamente esta pregunta (0,95 + 2,7) es imprescindible considerar el valor posicional de las cifras en los números decimales.

En general, para la aplicación de algoritmos, la dificultad en las operaciones depende de algunas variables. Si el ejercicio demanda la aplicación directa de un algoritmo es más sencillo que si el ejercicio demanda el manejo del valor posicional de las cifras. En este caso, se trata del segundo tipo de ejercicio.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron correctas las respuestas en las que el estudiante resolvió la operación respetando el valor de cada cifra, mostrase o no su procedimiento, y obtuvo como respuesta: «3,65».

¿Cómo respondieron los estudiantes?

Alrededor de la mitad de los estudiantes evaluados ordenó correctamente cada uno de los sumandos y los colocó en posición vertical. En muchos casos, se colocó el cero para igualar la cantidad de cifras decimales, lo que no es necesario pero sí usual tanto al aplicar el algoritmo como al emplear equivalencias. En otros casos, los estudiantes no completaron los sumandos con ceros, solo dejaron el espacio necesario.

✓ Respuesta correcta

Resuelve:

0,95 + 2,7 = 3,65

$$\begin{array}{r} 0{,}95\ + \\ 2{,}7\ \\ \hline 3{,}65\ \end{array}$$

En esta respuesta se observa una solución típica en la que el estudiante necesita ordenar los sumandos en forma vertical para poder aplicar la suma. En esta respuesta se evidencia un manejo adecuado del valor posicional de las cifras decimales.

X Respuesta incorrecta

Resuelve:

0,95 + 2,7 =

$$\begin{array}{r} {}^{1}\ \ {}^{1} \\ 0{,}95\ + \\ 2{,}7\ \\ \hline 122\ \end{array}$$

Más de la mitad de los estudiantes contestó en forma inadecuada. Uno de los errores más frecuentes fue considerar a los números decimales como números naturales, obviando el significado de la coma decimal de manera automática, sin considerar el valor posicional de cada una de las cifras, como muestra esta respuesta.

Este error evidencia que:

- el estudiante sabe sumar «llevando» (véase que la suma corresponde al resultado de los números que ha sumado); y
- el estudiante no conoce el significado de los números decimales y de los órdenes (y qué representa cada uno) pues obvia el significado de la coma decimal (nótese que no la ha considerado en su respuesta).

Los estudiantes no necesitan ser entrenados para resolver este tipo de operaciones sino que deben aprender, a partir de experiencias con materiales concretos y situaciones significativas, la noción de número decimal.

[Se estima que un 47% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

M6P15

Suficiente

Resuelve:

$$\frac{7}{8} - \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\right) =$$

a) $\frac{11}{24}$

b) $\frac{9}{8}$

✓c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{5}{8}$

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Aplicación de algoritmos*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Intramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Suficiente*

Dificultad Rasch: *293*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa el cálculo de operaciones combinadas de adición y sustracción de fracciones homogéneas, con signos de agrupación. La dificultad de la pregunta está relacionada tanto al ámbito numérico (fracciones) como al orden de resolución de cada operación con el uso de signos de agrupación.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver esta pregunta, el estudiante debe establecer una secuencia ordenada de pasos a partir de la jerarquía determinada por los signos de agrupación empleados. Primero, debe hallar la suma de $\frac{1}{8}+\frac{3}{8} = \frac{4}{8}$ para, luego, restarla a $\frac{7}{8}$, obteniendo como resultado $\frac{3}{8}$.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

El error más frecuente fue la omisión de los paréntesis para ordenar la secuencia de operaciones, es decir, los estudiantes posiblemente han restado $\frac{7}{8} - \frac{1}{8}$ y, luego, a este resultado ($\frac{6}{8}$) le han sumado $\frac{3}{8}$, con lo que se obtiene $\frac{9}{8}$ (alternativa b).

Este error común evidencia que los estudiantes continúan operando de izquierda a derecha desconociendo la función de los signos de agrupación y que no han trabajado, o no han logrado consolidar, un procedimiento que incluya seguir la secuencia de resolución considerando los signos de agrupación.

[Se estima que un 38% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

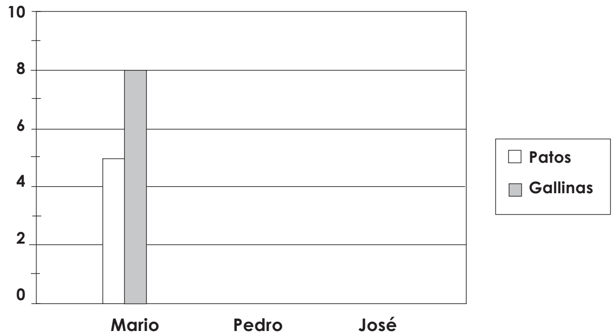
M6P16

Suficiente

Mario, Pedro y José crían animales en su granja. En la tabla se muestra el número de patos y gallinas que tiene cada uno.

Granjeros \ Animales	Patos	Gallinas
Mario	5	8
Pedro	3	10
José	7	2

Utiliza los datos de la tabla para completar el siguiente gráfico:



FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Estadística y probabilidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Respuesta corta*

Nivel de desempeño: *Suficiente*

Dificultad Rasch: *318*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la recodificación de información estadística, específicamente la elaboración de un diagrama de barras a partir de un cuadro de doble entrada de datos agrupados, con información que puede ser encontrada en contextos cotidianos para el estudiante.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver esta pregunta, el estudiante debe comprender la situación planteada, interpretar el cuadro, identificar y ordenar la información para trasladarla al gráfico mediante la recodificación de la frecuencia absoluta y expresarla en la altura de cada una de las barras, tal como muestra el ejemplo para el caso de Mario. Debe considerar que se trata de dos subcategorías dentro de la categoría «animales» y que cada una de ellas es representada por un color (blanco o gris), de acuerdo con la leyenda. Probablemente este tipo de tareas sea poco trabajado por los docentes o en los libros de matemática, pues los estudiantes presentan muchas dificultades al intentar resolver esta tarea. Por lo general, tienen mayor facilidad para resolver tareas asociadas a diagramas de barras simples en las que basta aplicar un solo procedimiento.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Esta tarea implica una serie de etapas en su resolución, las cuales fueron consideradas en la codificación de las respuestas.

La respuesta se consideró correcta cuando:

- El estudiante decodificó la cantidad de patos y de gallinas de Pedro y José, y graficó correctamente las barras representando cada categoría con el color indicado en la leyenda.

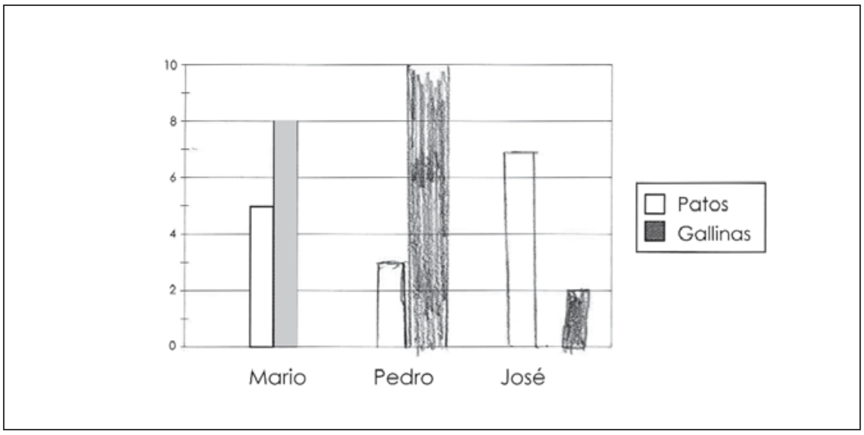
La respuesta se consideró parcialmente correcta cuando:

- El estudiante decodificó la cantidad de patos y gallinas pero no consideró el color de cada categoría en el diagrama de barras.
- El estudiante representó correctamente la información correspondiente a Pedro o a José.

Otro tipo de respuestas fueron consideradas incorrectas.

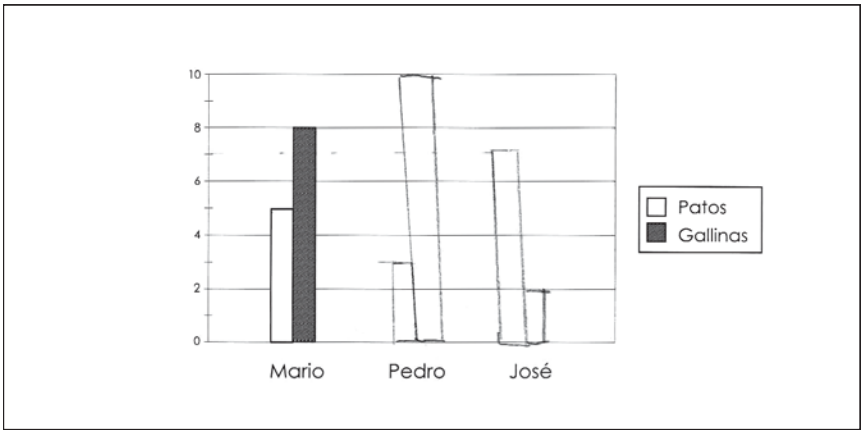
¿Cómo respondieron los estudiantes?

✓ Respuesta correcta



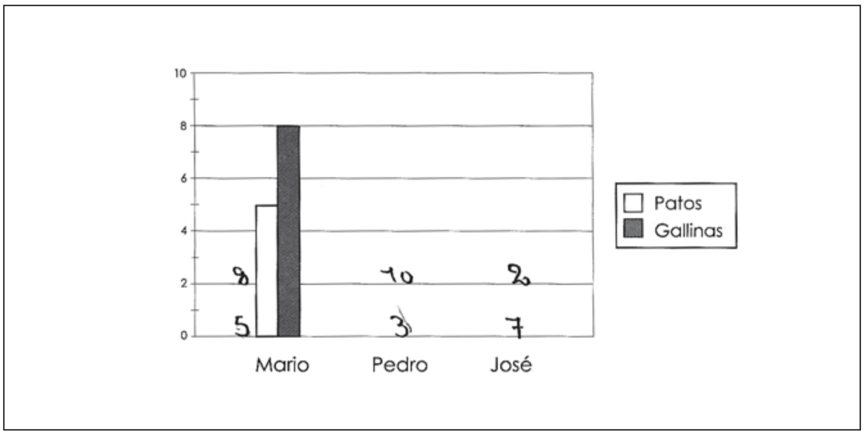
En esta respuesta, el estudiante grafica las barras de acuerdo con los datos de la pregunta y, además, utiliza la leyenda en forma apropiada.

Respuesta parcialmente correcta



Algunos estudiantes lograron representar la información del cuadro en el gráfico de barras, pero obviaron la información de la leyenda que indica la diferencia en el color de las barras, como muestra esta respuesta.

Respuesta incorrecta



En esta respuesta, el estudiante muestra no comprender la forma de representación mediante un diagrama de barras y opta por colocar la frecuencia absoluta. Este hecho pone en evidencia que algunos estudiantes no están habituados a realizar este tipo de representaciones, pues el estudiante ha comprendido el significado del par de barras del ejemplo (escribe sus frecuencias) y aplica el mismo criterio para el resto de barras, pero no utiliza la forma de representación requerida.

Se estima que un 25% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M6P17

Suficiente

Resuelve:

$$14 + 12 \div 2 + 14 - 3 \times 2$$

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Aplicación de algoritmos

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Intramatemático

Formato: Respuesta extensa

Nivel de desempeño: Suficiente

Dificultad Rasch: 322

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa el cálculo de operaciones combinadas sin signos de agrupación que implica necesariamente la jerarquizarción de las operaciones. Los números naturales utilizados son pequeños para que la dificultad de la pregunta esté centrada en el proceso de solución y no en los cálculos.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe resolver esta pregunta de acuerdo con la jerarquía de las operaciones. Esto implica la habilidad del estudiante de aplicar las cuatro operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) con seis datos simultáneamente. Primero, debe calcular los cocientes y productos, es decir, debe calcular $12 \div 2$ y 3×2; luego, debe efectuar las sumas y restas de acuerdo con el orden en que aparecen de izquierda a derecha (como es usual), con lo que obtiene el resultado: «28».

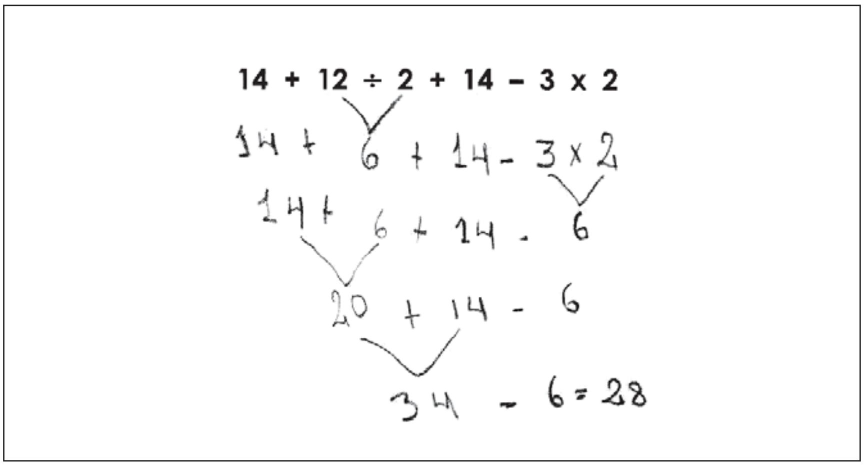
¿Cómo se calificaron las respuestas?

La respuesta fue considerada correcta cuando el estudiante resolvió la operación respetando la jerarquía de las operaciones, mostrando o no su procedimiento, y obtuvo como respuesta: «28».

¿Cómo respondieron los estudiantes?

A continuación, se presentan algunos ejemplos de respuestas correctas e incorrectas.

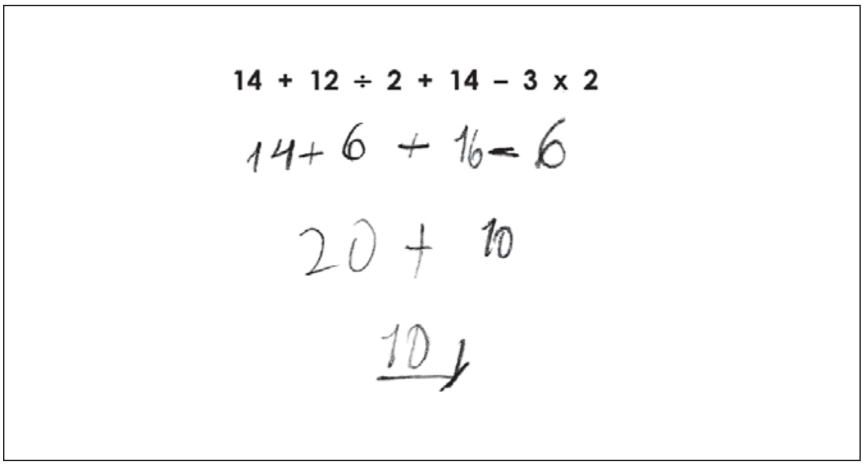
Respuesta correcta



En esta respuesta se puede apreciar que el estudiante considera la jerarquía de las operaciones. Además, resuelve correctamente todas las operaciones involucradas y encuentra la respuesta correcta.

Respuestas incorrectas

Respuesta A



En la respuesta A se evidencia confusión en las operaciones, pero no errores de jerarquización. El estudiante transcribe el 14 y opera respetando la jerarquía de la división; sin embargo, luego se confunde y suma el 2, ya considerado con el 14, y realiza la multiplicación. En seguida, resuelve la adición y la sustracción, pero finalmente se vuelve a confundir y efectúa una sustracción.

Respuesta B

$$14 + 12 \div 2 + 14 - 3 \times 2$$

$$26 \div 16 - 5$$

$$10 \quad - 5$$

$$10$$

La respuesta B muestra la tendencia que tienen muchos estudiantes a agrupar las operaciones de dos en dos cuando se presentan en operaciones combinadas. El estudiante realiza las operaciones en forma incorrecta, pues considera la adición igual a la multiplicación y la sustracción equivalente a la división. Al considerar equivalentes estas operaciones, no respeta su jerarquía, pues se limita a resolver de izquierda a derecha. El estudiante suma 14 + 2, considera el signo de la división como si se tratase de la sustracción, simultáneamente suma 2 + 14, y vuelve a cometer un error al considerar el signo de la multiplicación como si fuese el de la adición, calculando 3 + 2. A partir de estos resultados, opera correctamente de izquierda a derecha.

Se estima que un 24% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

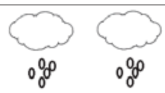
M6P18

Suficiente

En la tabla se registraron las horas de lluvia en Madre de Dios. Si se sabe que el sábado llovió 6 horas y el domingo llovió 2 horas, **completa** la tabla con esta información.

Horas de lluvia en Madre de Dios

 = 2 horas

Día	**Número de horas**
Lunes	
Martes	
Miércoles	
Jueves	
Viernes	
Sábado	
Domingo	

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Estadística y probabilidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Respuesta corta*

Nivel de desempeño: *Suficiente*

Dificultad Rasch: *347*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa el proceso de interpretación, recodificación y expresión gráfica de información presentada mediante un texto y cuadros de doble entrada, con representación icónica de datos a escala, a partir de una situación cotidiana para el estudiante.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe comprender la situación e identificar lo que se le solicita hallar, esto es, debe interpretar el cuadro de doble entrada en el cual se presentan dos categorías que ordenan la información: día y número de horas. El número de horas está representado por nubes: cada nube representa dos horas de lluvia de acuerdo con la leyenda. El estudiante debe interpretar esta representación para poder completar el cuadro con la información proporcionada en formato de texto: si el sábado llovió 6 horas, debe completar el cuadro con el dibujo de tres nubes; si el domingo llovió 2 horas, debe completar el cuadro con una nube.

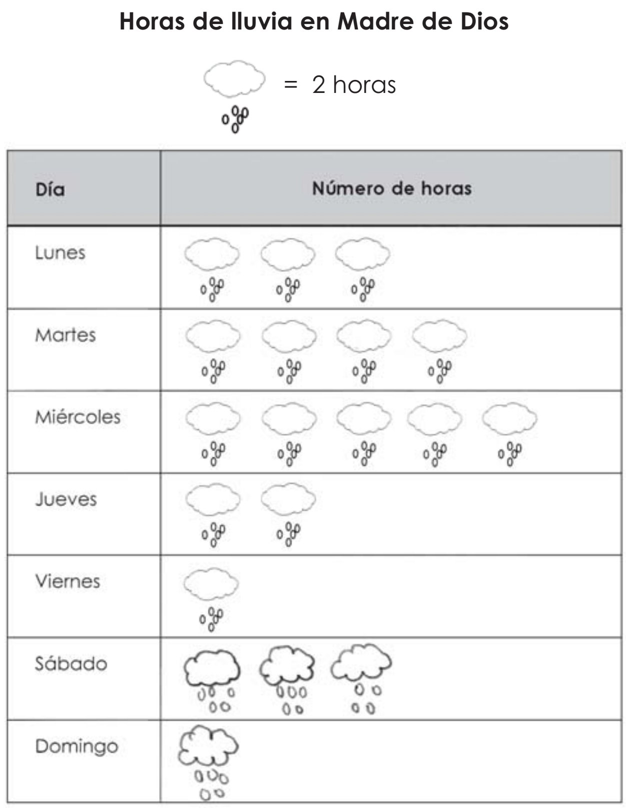
¿Cómo se calificaron las respuestas?

La respuesta fue considerada correcta cuando el estudiante mostró una adecuada interpretación del cuadro y su respectiva escala, de manera gráfica o utilizando números, y lo completó correctamente.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

A continuación, se presentan algunas respuestas de los estudiantes.

✓ Respuesta correcta

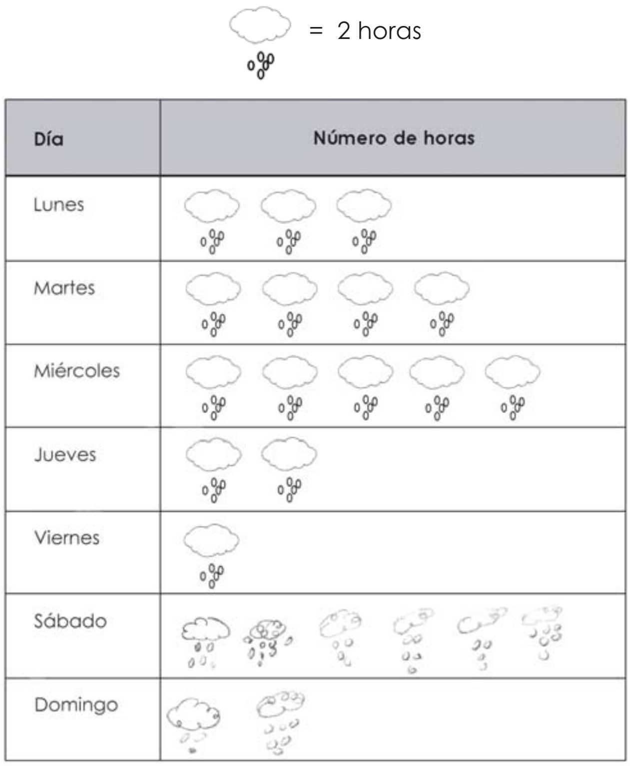


En esta respuesta, el estudiante ha completado la información en el cuadro de forma correcta a partir de la información proporcionada.

X Respuesta incorrecta

La mayoría de estudiantes resuelve esta pregunta sin considerar la representación gráfica de las horas de lluvia, indicada en la leyenda ( = 2 horas).

Horas de lluvia en Madre de Dios



Esta respuesta muestra un ejemplo de cómo los estudiantes no consideraron que, de acuerdo con la escala mostrada, cada nube representaba dos horas de lluvia, y completaron el cuadro con seis nubes para el día sábado y dos para el día domingo.

> Se estima que un 15% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

5 Principales dificultades en el desempeño en matemática

Probables causas y sugerencias pedagógicas

En este capítulo se presentan las dificultades para la comprensión de conceptos y para su puesta en práctica en la resolución de situaciones matemáticas encontradas en los estudiantes de sexto grado. Estas dificultades se desarrollan organizadas en núcleos de interés para la actividad docente. Además, se esbozan algunas hipótesis acerca de las razones que explican estas dificultades y se incluye una sección con sugerencias metodológicas y didácticas para mejorar el desempeño matemático de los estudiantes.

Los resultados de la EN 2004 muestran que el 92,1% de la población estudiantil de sexto grado de primaria no alcanza el nivel suficiente para el grado. Se ha encontrado que las dificultades que presentan los estudiantes están relacionadas con todas las capacidades y contenidos evaluados. Este complicado panorama exige una respuesta efectiva y rápida que considere los aportes de los diferentes actores que intervienen en el proceso educativo en la escuela: docentes, estudiantes, padres de familia y autoridades educativas.

Desde la labor del docente se sugiere, en primer lugar, centrar el trabajo pedagógico priorizando el desarrollo de capacidades sobre la transmisión de contenidos, es decir, realizar con los estudiantes actividades que les demanden opinar, reflexionar, evaluar, argumentar, proponer y elaborar, mediante una metodología centrada en la permanente actividad intelectual del estudiante. En particular, se recomienda presentar a los estudiantes problemas que reflejen situaciones cercanas a ellos que les permitan ir familiarizándose con las nuevas nociones matemáticas y su sentido, y con la relación y aplicabilidad que tienen estas nociones en el medio en el que viven. Se sugiere hacerlo alternando actividades individuales y grupales, alentando y complementando la construcción del conocimiento de los estudiantes con síntesis, exposiciones puntuales y secuencias ordenadas por el docente.

En general, se recomienda trabajar problemas que permitan a los estudiantes establecer conexiones entre las diferentes nociones y contenidos matemáticos trabajados. Además, posibilitan que los estudiantes revisen e integren sus aprendizajes estableciendo diferentes conexiones, lo que evita un aprendizaje compartimentalizado que limita la transferencia de lo aprendido a otras situaciones y, sobre todo, la incorporación funcional de lo aprendido.

Las habilidades y los conocimientos matemáticos están muy relacionados, lo que hace que el área de Lógico Matemática sea especialmente demandante para el docente en su formación inicial, pues no es suficiente manejar una didáctica general, ni siquiera tener conocimiento de la didáctica. Esta área, según las investigaciones realizadas en las últimas décadas —en las que se ha desarrollado la didáctica de la matemática como una ciencia específica—, demanda del docente un manejo de didácticas específicas para cada contenido.

En el caso de los estudiantes de sexto grado, se puede precisar que las dificultades ocasionadas por la falta de consolidación en la estructuración de las nociones matemáticas esenciales produce una «reacción en cadena». Por ejemplo, la falta de consolidación del sistema de numeración en los números decimales va a originar dificultades en la lógica de la aplicación de algoritmos en ese ámbito numérico. Asimismo, las técnicas operativas enseñadas van a carecer de sentido para el estudiante, originando confusiones e inclusive llevando al estudiante a generalizar ciertas técnicas operativas sin considerar el ámbito numérico en el que se trabaja.

A continuación, se presentan las dificultades mostradas por los estudiantes, organizadas en núcleos de interés, y algunas recomendaciones para el trabajo en el aula.

5.1. Resolución de problemas aritméticos

La resolución de problemas es el centro de la actividad matemática. El enfoque desde el cual han sido elaboradas las pruebas de rendimiento de la EN 2004 es el enfoque de resolución de problemas. Se considera que los problemas son los generadores más adecuados de los aprendizajes, ya que, a partir de ellos, si han sido adecuadamente seleccionados, el estudiante podrá encontrar la motivación, el significado y la justificación de las nuevas nociones por aprender. En los problemas se ponen de manifiesto claramente la potencia y la versatilidad del conocimiento matemático.

Para evaluar las capacidades de los estudiantes en la resolución de problemas aritméticos, la EN 2004 incorporó problemas de enunciado verbal y problemas en forma de historieta de diversos tipos. A partir de los resultados obtenidos, se ha detectado que los estudiantes presentan dificultades al resolver los problemas aditivos (de adición o sustracción) y multiplicativos (de multiplicación o división). Esta clasificación se realiza en función de los razonamientos que genera la situación descrita en cada problema y no únicamente por su contenido matemático. La mayor dificultad que plantea la resolución de los problemas propuestos está dada por la construcción de la estructura matemática del problema, es decir, por la naturaleza de los datos y por las relaciones que existen entre ellos, más que por la complejidad o particularidad de la técnica operativa que interviene en su resolución a partir de la estrategia elegida por el estudiante. Sin duda, la estrategia para resolver el problema es un parámetro, mas no el más importante.

En cuanto a los problemas aditivos, la sección que corresponde a segundo grado de este reporte (pág. 118) desarrolla de manera amplia la explicación de cada una de las clases de problemas aritméticos evaluados y brinda sugerencias para su adecuado trabajo en clase. Debe resaltarse que el desarrollo de las nociones y capacidades matemáticas de los estudiantes no está determinado por el grado que cursan. Aun en sexto grado deben trabajarse problemas de estructura aditiva de mayor dificultad que la trabajada en grados anteriores (ver Riley y otros 1983).

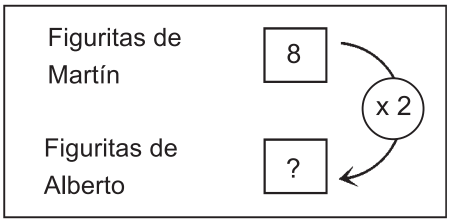
En este apartado veremos el caso de los problemas multiplicativos. Este tipo de problemas requiere una multiplicación, una división o la combinación de ambas para su resolución, por lo que se dice que están relacionados con una estructura multiplicativa (Pena 2003). A diferencia de los problemas aditivos, no existe una clasificación única o dominante para los problemas multiplicativos. Se seguirán en este informe las propuestas de Vergnaud y Nesher presentadas en las obras de Pena (2003) y Puig y Cerdán (1988). Considerando esta clasificación, se puede afirmar que la EN 2004 ha evaluado:

- *Problemas de comparación multiplicativa*: aquellos que expresan una relación de comparación numérica entre dos cantidades de una misma magnitud. También se les llama relación de escala. Por ejemplo:

> Martín tiene 8 figuritas. Alberto tiene el doble. ¿Cuántas figuritas tiene Alberto?

En este problema, la relación comparativa se expresa mediante «el doble» (*Alberto tiene el doble de figuritas que Martín*); la relación de comparación se traduce pero por dos veces más (multiplicación por 2).

El esquema muestra la estructura de este problema de comparación multiplicativa. Las cantidades se encuentran representadas en los recuadros y la relación comparativa se consigna dentro del círculo. La flecha indica el sentido de la relación.



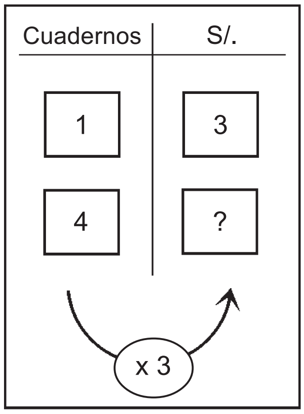
Comparación de magnitudes

- *Problemas de proporcionalidad simple*: aquellos en los que existe una proporción simple directa entre dos magnitudes. Por ejemplo:

> Si un cuaderno cuesta 3 soles, ¿cuánto cuestan cuatro cuadernos?

En este problema, la relación funcional está definida entre los cuadernos y su precio: un cuaderno cuesta S/. 3. A diferencia de la relación de comparación, una relación funcional posee una unidad compuesta. En el ejemplo mostrado esta unidad es «S/. 3 por cuaderno». La relación se traduce por multiplicar 3 soles por cada cuaderno.

El esquema muestra la estructura de este problema de comparación multiplicativa. Las cantidades se encuentran representadas en los recuadros y la relación comparativa se consigna dentro del círculo.

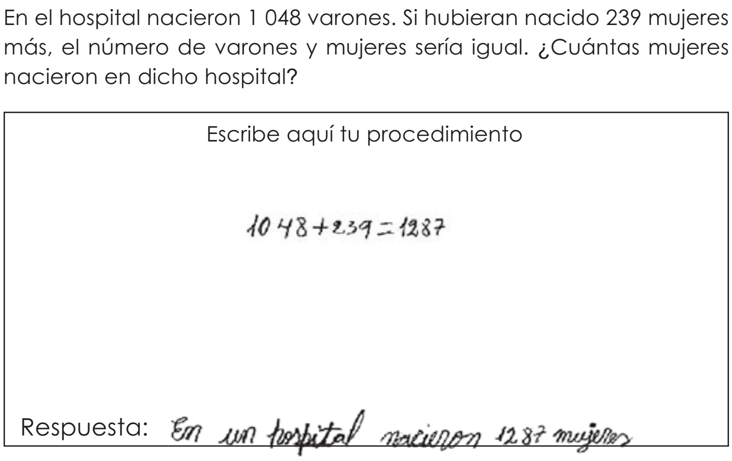


Relación funcional

Los estudiantes evaluados presentaron dificultades en los dos tipos de problema multiplicativo, sobre todo cuando se trataba de relaciones sucesivas entre las diferentes magnitudes. A partir del análisis de las respuestas se han encontrado las siguientes dificultades generales:

- Los estudiantes leen e interpretan parcialmente el enunciado de los problemas.
- Los estudiantes no reconocen las condiciones dadas en los problemas ni las relaciones entre los datos del enunciado.

- Los estudiantes tienen dificultades para seleccionar los datos pertinentes en los problemas propuestos, es decir, no discriminan la información presentada.
- Los estudiantes tienden a sumar los datos presentados en el enunciado de los problemas.
- Los estudiantes no contextualizan la respuesta que presentan o lo hacen de manera inadecuada.[40]


En el hospital nacieron 1 048 varones. Si hubieran nacido 239 mujeres más, el número de varones y mujeres sería igual. ¿Cuántas mujeres nacieron en dicho hospital?

Escribe aquí tu procedimiento

1048+239=1287

Respuesta: En un hospital nacieron 1287 mujeres

Algunos estudiantes asocian palabras clave a operaciones para resolver los problemas.

Como hipótesis de las razones que dan origen a estas dificultades se puede plantear la tendencia a trabajar en las sesiones de aprendizaje asociando las operaciones aritméticas elementales con «palabras clave» y a proponer a los estudiantes «problemas tipo» para entrenarlos en su resolución, como si lo importante del trabajo matemático fuera que los estudiantes «coleccionen» recetas que solo son útiles para enfrentarse a exámenes escolares. Este entrenamiento ocupa el tiempo de las sesiones de aprendizaje con actividades de baja demanda cognitiva que no aportan al desarrollo de las capacidades matemáticas de los estudiantes. Además, no les son útiles a los estudiantes cuando empiezan a trabajar otro tipo de problemas o situaciones no rutinarias. Las consecuencias de estos métodos se aprecian cuando los estudiantes se enfrentan a una situación problemática nueva y transfieren mecánicamente las estrategias aprendidas, obviando buscar el sentido completo de la situación planteada.

Asimismo, si la mayor parte de los problemas que se trabajan en el aula se plantean considerando únicamente el contenido que involucran (y específicamente la dificultad operativa) y no la complejidad de los procesos y la importancia del desarrollo de las actitudes matemáticas necesarias para resolver un problema, el estudiante se encontrará en un callejón sin salida cuando tenga que enfrentarse a problemas no rutinarios. Esto se agrava cuando la tendencia del docente es dejar la resolución de problemas para el final de cada unidad didáctica (cuando el calendario lo permite).

Como se ha señalado, muchos estudiantes resuelven los problemas sumando los datos del enunciado sin haber identificado qué es lo que se les solicita en el problema. Esta evidencia es suficiente para afirmar que los estudiantes no han logrado desarrollar sus habilidades matemáticas en un nivel que les permita interpretar las situaciones problemáticas. Complementariamente, se puede decir que, a partir del análisis de algunos textos de matemática de uso común, se ha detectado que muchos de los problemas planteados solo están ordenados y enfocados para ser resueltos en el aula como práctica

40. El hecho de que los estudiantes no hayan contextualizado sus respuestas no influyó en la calificación.

de automatismos. Este tipo de problemas no representa desafíos novedosos que desarrollen habilidades que trasciendan las aulas y ayuden a los estudiantes a buscar estrategias, a adaptar los procesos que manejan, a reflexionar, a conjeturar y a transferir sus aprendizajes a otras situaciones y contextos.

Pepe tiene 9 dulces, invita 3 a su mamá, 2 a su papá y se come el resto. ¿Cuántos dulces se comió Pepe?

Escribe aquí tu procedimiento
9 - 3 - 2 - 4 = 0
Respuesta: No le quedo nada

El estudiante no identifica lo solicitado en este problema.

Para el trabajo de resolución de problemas, el docente debe analizar con los estudiantes distintos procesos. El docente puede pedir a sus estudiantes que salgan a la pizarra y que trabajen la resolución de un problema sobre la base de los aportes de los estudiantes y planteándoles preguntas que demanden de ellos reflexión y justificación. También es importante proponer situaciones problemáticas abiertas que tengan diversas respuestas, que requieran respuestas a evaluar o que no tengan solución, que promuevan en los estudiantes la búsqueda de diferentes estrategias de solución y la construcción de sus estrategias personales.

Además, el docente debe considerar un modelo de resolución de situaciones problemáticas que implique una secuencia estructurada de etapas que el estudiante debe seguir al momento de resolverlas. El modelo bajo el cual trabajar puede ser el propuesto por Polya en 1945:

Etapas de resolución de un problema

a) Familiarización y comprensión del problema: En esta etapa se ubican las estrategias que ayudan a representar y entender las condiciones del problema; por ejemplo, se tiene claridad respecto de los datos explícitos del problema y de la identificación del dato solicitado.

b) Búsqueda y diseño de estrategias: Se elabora el plan de solución, tomando como referencia situaciones familiares que tengan una estructura análoga a la estructura del problema que se quiere resolver.

c) Ejecución controlada de la estrategia: Se lleva a cabo la estrategia planteada, tal vez buscando diferentes maneras de resolución y analizando la solución obtenida. Si la solución obtenida no lleva a la respuesta, se debe volver a buscar y diseñar una nueva estrategia de solución.

d) Visión retrospectiva y prospectiva: Se revisa la solución del problema y las estrategias empleadas para identificar herramientas que puedan ser útiles en otras situaciones.

Cada una de las cuatro etapas mencionadas ayuda al estudiante en el proceso de resolución de problemas, pues permiten ordenar su pensamiento y enriquecerlo.

Aparte de las etapas propuestas, para resolver problemas se sugiere:

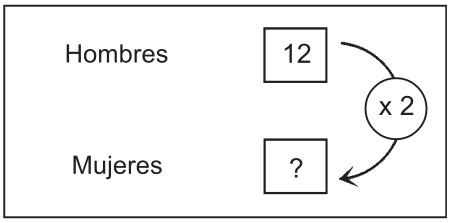
- Empezar el trabajo con problemas de una etapa, es decir, aquellos que demanden una operación para llegar a la solución. Además, los datos deben estar explícitos en el enunciado. Una vez afianzada la habilidad del estudiante para resolver problemas de una etapa, se puede empezar a trabajar problemas de dos etapas.
- Trabajar y desarrollar los algoritmos a partir de la sistematización de las estrategias empleadas para solucionar las situaciones problemáticas, y no al revés.

El docente debe estimular el razonamiento de los estudiantes proporcionándoles diversos problemas de diferente demanda cognitiva. La ampliación del conjunto numérico no está asociada directamente con la comprensión de las situaciones problemáticas.

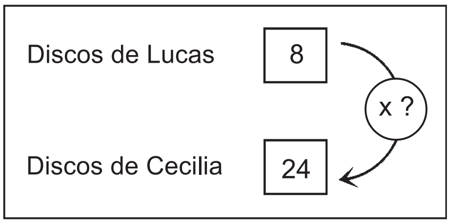
A continuación, se presentan algunos problemas multiplicativos que pueden ser trabajados en clase.

Problemas de comparación multiplicativa

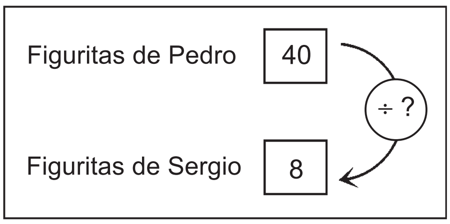
En una fiesta hay 12 hombres y el doble de mujeres. ¿Cuántas personas hay en total?



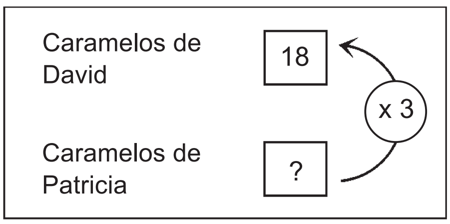
Lucas colecciona discos. Tiene ocho discos. Su hermana Cecilia tiene 24 discos. ¿Cuántas veces más discos tiene Cecilia que Lucas?



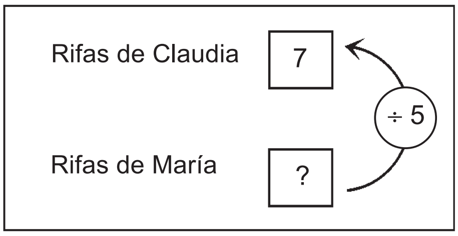
Pedro tiene 40 figuritas y Sergio tiene ocho figuritas. ¿Cuántas veces menos tiene Sergio que Pedro?



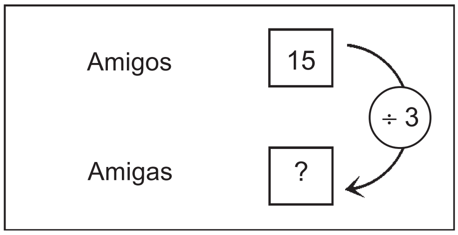
David recibió 18 caramelos, tres veces más de lo que recibió Patricia. ¿Cuántos caramelos recibió Patricia?



Claudia vendió siete rifas, un quinto de lo que vendió María. ¿Cuántas rifas vendió María?

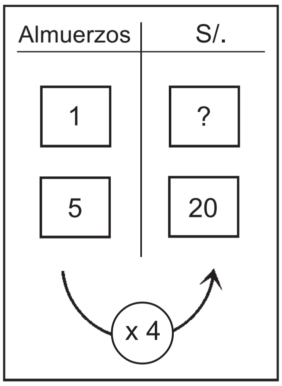


A un almuerzo asistieron 15 amigos y un tercio de esa cantidad de amigas. ¿Cuántas amigas asistieron al almuerzo?

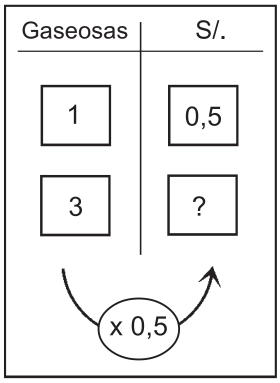


Problemas de proporcionalidad simple

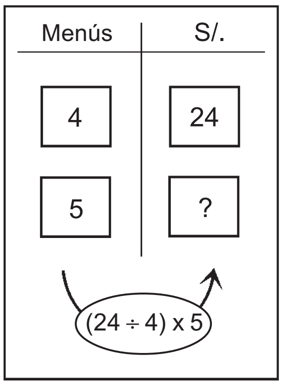
Charito pagó S/. 20 por cinco almuerzos. ¿Cuál es el precio de un almuerzo?



Gustavo compra tres gaseosas. Cada gaseosa cuesta S/. 0,50. ¿Cuánto debe pagar?



Max ha pagado S/. 24 por cuatro menús. ¿Cuánto deberá pagar si quiere comprar un menú más?



5.2. Sistema de numeración y operaciones con números naturales

Al igual que en segundo grado de primaria, la comprensión del sistema de numeración decimal fue evaluada mediante preguntas referidas a la aplicación de las diversas representaciones de los números. Estas representaciones demandaron recodificar las representaciones usuales, simbolizaciones y descomposiciones en unidades de orden jerárquico. Los contextos fueron intra y extramatemáticos, y presentaron una variedad de situaciones cercanas a la vida cotidiana de los estudiantes. Se utilizó preguntas para aparear, preguntas de opción múltiple, cuadros para completar y preguntas de respuesta corta.

Las principales dificultades de los estudiantes sobre el sistema de numeración decimal y las operaciones con números naturales registradas en esta evaluación fueron:

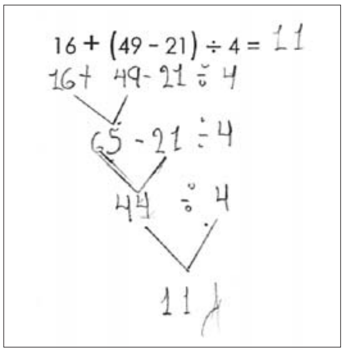
- Los estudiantes solo resuelven de manera adecuada estímulos similares a los de los cuadernos de trabajo del MED por lo que se puede deducir un aprendizaje mecánico de rutinas en las que están sobreentrenados, pues no se encuentra esta frecuencia de respuestas en las situaciones no rutinarias.
- Los estudiantes cometen los siguientes errores al multiplicar:

  —Olvidan añadir el número que se «lleva».
  —Escriben una fila de ceros cuando una de las cifras del multiplicador es 1.
  —Multiplican el cero como si fuera 1.
  —Olvidan alguna cifra del multiplicador o del multiplicando.
  —Suman mal los productos parciales.
  —Omiten el cero cuando está en el multiplicando o en el multiplicador.
  —Ubican los productos parciales incorrectamente.
  —Desconocen el algoritmo de la multiplicación e intentan hallar el producto por sumas sucesivas en las que cometen errores.

- Los estudiantes cometen los siguientes errores al dividir:

  —Estiman erróneamente el cociente.
  —Hallan un resto mayor al divisor.
  —Al restar, restan la cifra mayor de la cifra menor.
  —No pueden hallar los cocientes parciales debido al escaso manejo del algoritmo de la multiplicación.
  —Omiten el cero cuando está en el dividendo, en el divisor o cuando forma parte del cociente.
  —Hallan el cociente por multiplicaciones sucesivas.
  —Omiten la estimación como herramienta que optimiza el cálculo operativo.

- Los estudiantes tienen gran dificultad para jerarquizar las operaciones (en operaciones combinadas con y sin signos de agrupación). Tienden a operar de izquierda a derecha.



Los estudiantes tienen dificultades para jerarquizar las operaciones.

Las dificultades halladas en este eje temático parten de deficiencias de base en el manejo del orden e inclusión de clases, las cuales son propiedades básicas que deben dominar los estudiantes para trabajar el sistema de numeración decimal, pues permiten comprender las propiedades y relaciones entre los números.

Un desarrollo más detallado de las dificultades relacionadas con este núcleo temático se encuentra en la sección respectiva de segundo grado de primaria (pág. 104); en ese ciclo se comienza a trabajar el sistema de numeración decimal. En esa sección se podrán encontrar sugerencias para asegurar el desarrollo y aprendizaje de las habilidades relacionadas con el valor posicional de los números naturales.

En cuanto a la aplicación de los algoritmos de adición, sustracción, multiplicación y división, es preocupante que se presenten tales dificultades pues, de acuerdo con el cuestionario *Oportunidades de aprendizaje de sexto grado* (ODA6PM),[41] el 90% de los estudiantes tienen docentes que priorizan el desarrollo de este contenido a lo largo del año: le dedican más tiempo y lo desarrollan en los primeros bimestres del año. El trabajo de las dificultades y las recomendaciones acerca de los algoritmos de adición y sustracción está detallado en la sección correspondiente de segundo grado (pág. 112), pues estos algoritmos se empiezan a trabajar y se desarrollan con más profundidad durante los primeros grados de la educación primaria mientras que la multiplicación y la división se trabajan con mayor profundidad a partir del cuarto grado.

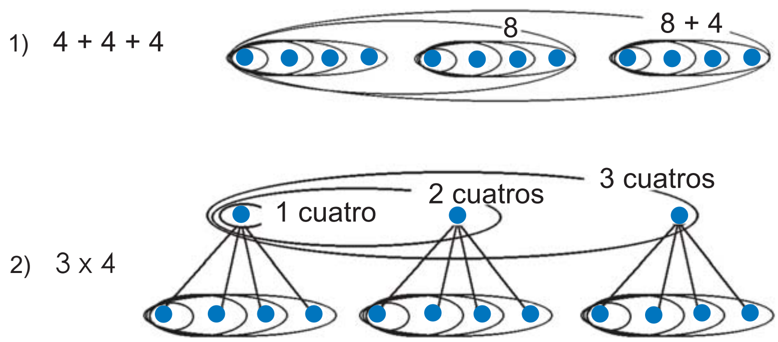
Tanto la multiplicación como la división son operaciones que requieren de un adecuado dominio de la noción de número y de las operaciones de adición y sustracción. Los resultados muestran que los estudiantes empiezan su acercamiento a la multiplicación y a la división con deficiencias en la comprensión de las operaciones que son prerrequisito (adición y sustracción), sus diferentes significados y los algoritmos respectivos. El docente debe asegurarse del afianzamiento de la adición y de la sustracción antes de trabajar con sus estudiantes la multiplicación y la división.

De acuerdo con Jean Piaget, las diferencias entre la adición y la multiplicación se dan en función del número de niveles de abstracción implicados y del número de relaciones de inclusión que el estudiante debe establecer simultáneamente. Por ejemplo:

1) $4 + 4 + 4 = 12$

2) $4 \times 3 = 12$

El caso 1 implica un solo nivel de abstracción (aparte del cálculo del total). Cada grupo se encuentra en un mismo nivel y el estudiante resuelve primero 4 + 4 y, luego, 8 + 4. En cambio, en el caso 2 la multiplicación implica elaborar unidades de orden superior (en el ejemplo, unidades de cuatro) y establecer dos tipos de relaciones que no hacen falta en la adición: correspondencia de cuatro a uno entre cuatro unidades de 1 y una unidad de 4, la inclusión de una unidad de 4 en dos unidades de 4, y de dos unidades de 4 en tres unidades de 4, como podemos observar a continuación:



41. Cuestionario aplicado a los docentes del área de Lógico Matemática de los estudiantes evaluados.

El gráfico facilita la comprensión de lo afirmado: la multiplicación requiere la construcción de unidades de orden superior que tienen que funcionar simultáneamente con las unidades de orden inferior, mediante una correspondencia de 1 a 1 a 4, lo que no deja de lado la inclusión jerárquica en las unidades de orden inferior.

Los estudiantes que no han construido las unidades de orden superior suelen obtener 7 como respuesta a 3 x 4 porque suman 3 a 4 pensando en todos los números como unidades de 1, en el mismo nivel de abstracción. Los dos números representan el mismo tipo de unidades en 3 + 4, pero no en 3 x 4.

Este tipo de pensamiento numérico no surge de manera espontánea: es labor del docente guiar a sus estudiantes para que lo comprendan y asegurarse de su afianzamiento.

Por otro lado, también se presentan dificultades porque en una multiplicación el multiplicando indica la medida de una magnitud, mientras que el multiplicador es una razón o una comparación que nos señala la cantidad de veces que se repite la cantidad inicial. Esto es algo nuevo para los estudiantes, pues al trabajar la adición y la sustracción las cantidades involucradas tienen el mismo significado en el planteamiento que en el resultado. En algunos problemas se trata de combinar diferentes objetos de una misma clase; por ejemplo, animales: «En una granja hay 5 vacas y 3 ovejas, ¿cuántos animales hay en la granja?». En la multiplicación no se presenta este tipo de relaciones, pues incluso se pueden multiplicar dos magnitudes diferentes y tener como producto una tercera, como en el caso de longitud y área, dimensiones cuya multiplicación da origen al volumen. Esto supone una abstracción superior, lo que naturalmente lleva a dificultades en su aprendizaje.

Otro de los aspectos relacionados con las dificultades de los estudiantes al resolver multiplicaciones está en las operaciones necesarias para su resolución. Una primera dificultad se asocia con la mecanización operativa de varias multiplicaciones que se escalonan y se combinan a partir de un algoritmo específico. Las dificultades que tienen los estudiantes en este proceso se ven agravadas cuando omiten pasos intermedios, lo cual origina errores operativos como la omisión de factores o la omisión de la suma de los productos parciales en la multiplicación. Esta dificultad es mayor en el caso de las divisiones pues tienen más pasos intermedios, como el tanteo previo y la aplicación coordinada de multiplicaciones, adiciones y sustracciones.

> Es importante establecer el significado de las operaciones asociándolas con situaciones reales que se le presenten al estudiante. Para conseguir este propósito, debe comenzarse con una secuencia de situaciones multiplicativas concretas para, luego, proceder a trabajar con situaciones multiplicativas formales, las cuales son necesarias para consolidar las técnicas operativas orales y escritas.

La meta principal debe ser conseguir que los estudiantes comprendan las «ideas» que representan una multiplicación mediante su exposición a diversas situaciones en las que puedan descubrir y emplear la multiplicación como una estrategia de solución. Por ejemplo, juntar grupos del mismo número de elementos, repetir varias veces un sumando en una adición o repetir varias veces un precio, una longitud o alguna otra característica medible y constante de un objeto o situación.

Algunas sugerencias para el logro del aprendizaje de estas operaciones son:

- Empezar a trabajar las operaciones aritméticas a partir de la resolución de problemas. En un principio, el docente debe asegurarse de que el estudiante comprenda el enunciado del problema. Una manera efectiva es pidiendo al estudiante que lo explique «con sus propias palabras». Luego, debe animarlo a encontrar estrategias de solución. La secuencia didáctica debe empezar con números pequeños, de 0 a 50, luego de 50 a 100, después de 100 a 1 000, y así sucesivamente. Otras variables que se deben tener en cuenta son la estructura lógica de la situación problemática, la posición de la incógnita, el sentido de la relación, el grado de contextualización, el tipo de material utilizado y el número de datos.
- Resolver las operaciones utilizando estrategias diversas. El estudiante debe estar en la capacidad de realizar cálculos con material concreto, mentalmente, con lápiz y papel, estimar cálculos y utilizar la calculadora.
- Asegurar la comprensión del concepto de las operaciones de adición, sustracción,[42] multiplicación y división. De acuerdo con los resultados de distintas investigaciones, se debe comprender el significado de la operación en situaciones concretas, reconocer los modelos más usuales y prácticos de las operaciones, entender sus propiedades matemáticas y el efecto de cada operación y las relaciones entre estas.
- Analizar las relaciones que se establecen entre diferentes operaciones. Por ejemplo, que la multiplicación sea una operación inversa a la división puede ayudar al estudiante a un mayor desarrollo de su pensamiento numérico y a analizar problemas desde diferentes perspectivas.
- Iniciar los algoritmos con números pequeños para que se interiorice el sentido de la operación. Si se aumenta la cantidad de cifras, el estudiante se puede confundir lo cual puede dar la falsa impresión de que no ha comprendido el algoritmo.
- Considerar el nivel de dificultad de las actividades propuestas. El orden adecuado garantiza el progreso efectivo en el aprendizaje, es decir, la asimilación consciente de los procedimientos, teniendo en cuenta las particularidades de los estudiantes y el desarrollo de las capacidades. En la EN 2004 se formularon preguntas cuya dificultad está en función de la secuencia ordenada de pasos necesarios para su solución (la cual involucra números pequeños en la mayoría de los casos). Su propósito es evaluar el aprendizaje de los procedimientos por lo que aumentar el tamaño de los números puede complicar innecesariamente ciertas preguntas.
- En cuanto a las técnicas operativas, la multiplicación debe iniciarse como el producto de un dígito por un dígito, a partir de actividades manipulativas, gráficas, figurativas y simbólicas. Paulatinamente se puede incrementar el valor de los factores, sobre todo la inclusión del cero.
- En un principio, el estudiante debe hallar sus propias estrategias de solución para que pueda dar sentido a las operaciones. Inmediatamente después se utilizarán materiales concretos como el ábaco, las regletas de Cuissenaire y los bloques lógicos para facilitar la comprensión y adquisición de técnicas orales.
- En cuanto a la división, existen algunos requisitos para emplear las técnicas operativas escritas,[43] ante todo, una adecuada orientación espacial (direccionalidad,

---

42. Véase la sección correspondiente de segundo grado ya mencionada (pág. 112).
43. El cálculo mental no se ha podido evaluar en la EN 2004; sin embargo, es importante que los docentes trabajen esta habilidad con los estudiantes.

lateralidad). También son requisitos el dominio de la adición, la sustracción y la multiplicación y el manejo de la descomposición de números en los diferentes órdenes (unidades, decenas, centenas, etc.). Al igual que en la multiplicación, deben considerarse las fases manipulativa, gráfica, figurativa y simbólica y, sobre todo, la siguiente secuencia en su enseñanza:

—Divisiones que presenten una cifra en el dividendo y una en el divisor ($a \div b$). Por ejemplo: $9 \div 2$.

—Divisiones con dos cifras en el dividendo y una en el divisor ($\overline{ab} \div c$), diferenciando: si $a > c$ o si $a < c$. Por ejemplo: $76 \div 3$; $28 \div 5$.

—La presencia del cero en el cociente también debe considerarse para un mayor grado de dificultad. Por ejemplo: $62 \div 3$.

—Divisiones con tres o más cifras en el dividendo y dos cifras en el divisor ($\overline{abc} \div \overline{de}$). Las dificultades pueden surgir al trabajar con ceros en el cociente y cuando hay que tomar más de dos cifras del dividendo para realizar las divisiones. Por ejemplo: $526 \div 14$; $680 \div 23$.

Godino (2004) considera las siguientes variables didácticas que hay que tener en cuenta al momento de enseñar tanto la multiplicación como la división:

- Tipo de operación: multiplicación, división exacta, división inexacta.
- Dirección de la operación:
  - — Directa, por ejemplo 3×5, o $375 \div 18$.
  - — Inversa, por ejemplo $\square \times 5 = 60$, o $180 \div \square = 6$.
  - — Descomposición, por ejemplo, $36 = 9 \times \square$.
- Tamaño de los términos y del resultado de la operación:
  - — Dobles o mitades de una cifra.
  - — Operaciones de la tabla de multiplicar o dividir.
  - — Operaciones con multiplicandos o dividendos de una cifra significativa y multiplicadores o divisores de una cifra.
  - — Dobles o mitades de números de varias cifras significativas.
  - — Operaciones con multiplicandos o dividendos de dos o más cifras significativas y multiplicadores o divisores de una cifra.
  - — Operaciones con multiplicandos o dividendos de dos o más cifras significativas y multiplicadores o divisores de dos cifras significativas.
  - — Operaciones con multiplicandos o dividendos de tres o más cifras significativas y multiplicadores o divisores de tres o más cifras significativas.
- Existencia de la necesidad de «llevar», si la operación implica, o de «no llevar».
- Técnica de cálculo: uso de material estructurado, técnica oral, técnica escrita, calculadora.
- Tipo de material: regletas de Cuissenaire, ábaco, bloques multibase, representaciones gráficas.

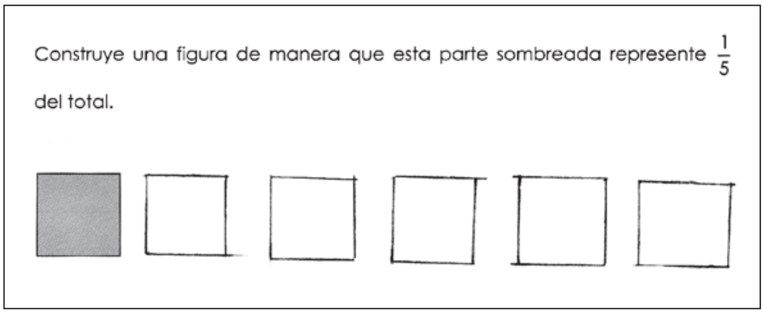
5.3. Sistema de numeración y operaciones con números fraccionarios

El aprendizaje de los números racionales empieza con el tratamiento de las fracciones. La comprensión de este sistema de numeración abarca diversas nociones relacionadas como fracciones, razones y decimales. Por esta razón, el estudiante se va a enfrentar con una variedad de formas de representación y una gran diversidad de ámbitos en los que se pueden aplicar las fracciones.

Este conjunto numérico fue evaluado en la EN 2004 mediante preguntas referidas a la aplicación de las representaciones de las fracciones y recodificaciones de diversas representaciones usuales, la relación de orden y las operaciones de adición y sustracción de fracciones homogéneas y heterogéneas. Se utilizaron preguntas de respuesta corta, de respuesta extensa y de opción múltiple. Las representaciones utilizadas en la evaluación están referidas a la relación parte – todo de la fracción, tanto en unidades como en un conjunto de números u objetos, sea de manera gráfica, simbólica o verbal.

Las principales dificultades de los estudiantes sobre el sistema de numeración y las operaciones con fracciones registradas en la evaluación fueron:

- Los estudiantes no llegan a consolidar la noción de fracción como parte de un todo.
- Los estudiantes consideran al numerador y al denominador como dos números naturales separados e independientes, que no guardan ninguna relación entre sí.
- Los estudiantes tienen gran dificultad para representar fracciones de manera gráfica, simbólica o verbal, al comparar fracciones y al hallar fracciones equivalentes.
- Los estudiantes transfieren las reglas operativas de las operaciones con números naturales a las operaciones con fracciones.

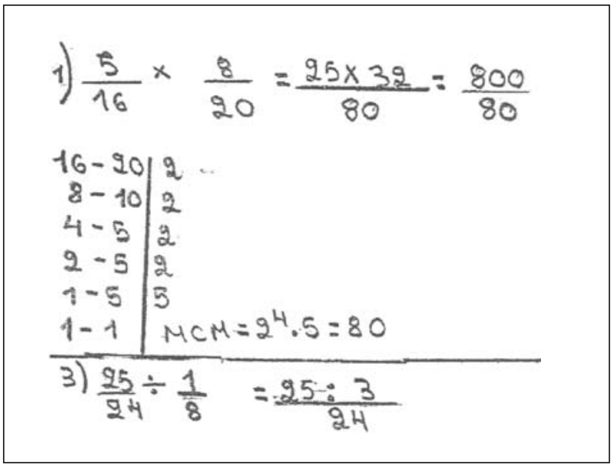


El estudiante no maneja la noción de fracción, por lo que considera los números que la integran como números naturales.

La noción de fracción es el punto de partida de este núcleo de interés. Las dificultades se originan en que la noción de fracción demanda mayor desarrollo cognitivo del estudiante que los otros conjuntos numéricos, pues las fracciones trascienden lo concreto. Este paso de lo concreto a lo abstracto puede traer dificultades, sobre todo si las actividades con las que se introduce este tema no consideran un acercamiento inicial concreto para, luego, una vez asegurado el primer paso, llegar a la formalización y a la simbolización. Además, existe la tendencia a trabajar las fracciones únicamente como parte de una unidad, restándole importancia a la fracción como parte de un conjunto discreto de objetos (por ejemplo, $\frac{1}{2}$ de la cantidad de estudiantes del salón).

Respecto de las operaciones aritméticas con fracciones, se debe precisar, de manera general, que la primera parte del trabajo debe estar orientada a la comprensión del significado de cada una de ellas. Por ejemplo, la idea de multiplicación en el conjunto de los números naturales siempre ha estado asociada al aumento; sin embargo, la noción de multiplicación va a tener una generalización en el conjunto de los números racionales positivos, pues existen operaciones en las que al multiplicar el resultado va a «aumentar» respecto de los factores que lo originan, pero puede haber otros casos en los que el producto va a «disminuir» respecto de sus factores. Esta situación va a exigir un reacomodo de la noción de multiplicación elaborada hasta ese momento por el estudiante e, incluso, va a repercutir en su comprensión de la multiplicación con números naturales. Un caso similar ocurre con la noción de división. Todas estas variantes demandan del docente un trabajo cuidadoso de las nociones de cada operación, anterior a la enseñanza de los procedimientos algorítmicos.

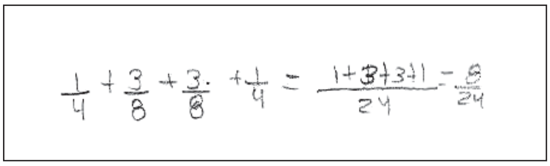
En cuanto a los algoritmos, este conjunto numérico no está basado en algoritmos de recuento, a diferencia del ámbito de los números naturales. Los estudiantes pueden aprender las reglas de cálculo para operar con fracciones de manera mecánica, pero este enfoque algorítmico y memorístico tiene dos peligros: el primero es que ninguna de las reglas operativas ayuda a pensar en el significado de las operaciones o por qué funcionan de determinada manera; el segundo peligro es que el dominio conseguido en el corto plazo se pierde rápidamente por su falta de significado. Esta situación ha sido confirmada por diferentes investigaciones, por ejemplo, al momento de evaluar a estudiantes de secundaria o a adultos que no trabajan constantemente con fracciones. Las reglas mecánicas empleadas para las diferentes operaciones llegan a parecer similares, por lo que los estudiantes las confunden después de un corto periodo de tiempo. Así, en la EN 2004 se ha comprobado que muchos estudiantes buscan encontrar el producto de dos fracciones hallando su MCM previamente, como si se tratara de la adición de fracciones heterogéneas. Tal es el caso del ejemplo mostrado a continuación.



El estudiante confunde las reglas mecánicas para resolver una multiplicación de fracciones.

En este ejemplo, el estudiante homogeneiza las fracciones mediante el cálculo del mínimo común múltiplo (MCM), halla el denominador común y sigue un procedimiento estándar (que sería adecuado si se tratara de una adición) para, en seguida, encontrar los «nuevos numeradores». En este caso, el estudiante ha confundido las técnicas operativas de la adición y la multiplicación. Lo mismo se observa en la parte inferior del ejemplo, pues el estudiante homogeneiza primero las fracciones para, luego, dividirlas. El estudiante llega así a resultados no solo incorrectos, sino imposibles si se aplica la noción de multiplicación de fracciones para estimar el resultado, el cual nos conduciría a anticipar que el resultado debería ser menor que la unidad.

Otra dificultad ocurre cuando los estudiantes trasladan lo que ya aprendieron en determinado conjunto numérico a nuevos ámbitos sin considerar las características particulares de cada uno, máxime si no manejan la noción de fracción. Por ejemplo, en la adición de fracciones tienden a sumar los numeradores y los denominadores como si se tratara de números naturales separados por una línea horizontal, como puede observarse en el siguiente ejemplo.



El estudiante suma las fracciones aplicando las reglas mecánicas de los números naturales.

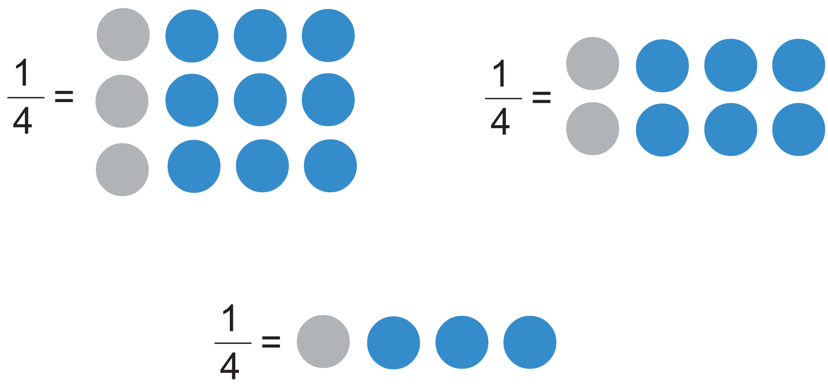
Este ejemplo refleja la complejidad del pensamiento numérico que demandan las fracciones, aunque también podría ser producto de la mecanización en los algoritmos sin una comprensión de los conceptos que los fundamentan. En ambos casos, puede deberse a que el trabajo en el aula pone mayor énfasis en el aprendizaje de los algoritmos por parte de los estudiantes, lo cual obstaculiza y hasta bloquea la noción de fracción.

Los estudiantes comprenden en forma progresiva la noción de fracción a partir de sus diversos significados, derivados de los diferentes tipos de situaciones en las que se usan tanto en el aula como en la vida cotidiana. Estos significados no son igualmente sencillos de comprender, por lo que la noción de fracción debe trabajarse sistemáticamente y a lo largo de los distintos grados.

Estas son algunas sugerencias para el trabajo de este ámbito numérico:

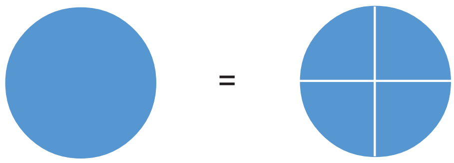
- El enfoque de la enseñanza de las fracciones debe estar orientado al logro del sentido numérico y a la resolución de problemas.
- Se sugiere comenzar con material concreto apuntando a la noción de fracción como parte de la unidad (con tiras de papel o de cualquier otro material que se pueda dividir), centrándose en fracciones de uso cotidiano como medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, octavos y décimos. Una vez interiorizada esta noción, debe procederse a trabajar la fracción como parte de un grupo (formando conjuntos con objetos iguales como frijoles o fichas de plástico o de madera). Todas estas sugerencias son útiles para ir construyendo la noción de fracción hasta llegar a la simbolización estándar.

  Las fracciones deben ser trabajadas en diversas representaciones y con diferentes objetos, sin limitarse a una sola forma para evitar la aparición de un trabajo mecánico. Por ejemplo, la representación de $\frac{1}{4}$ debe hacerse como fracción parte de la unidad, gráficamente se pueden utilizar círculos, cuadrados o rectángulos y partes de distinta forma. Cuando se haga la representación como parte de un conjunto, se deben aprovechar las representaciones equivalentes como 3 fichas grises y 9 azules, 2 fichas grises y 6 azules, 1 ficha gris y 3 azules, etc.

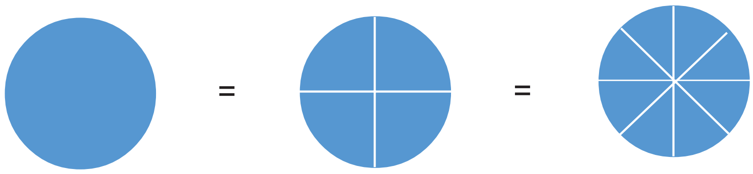


- Se deben considerar siete criterios para comprender la relación entre la parte y el todo:

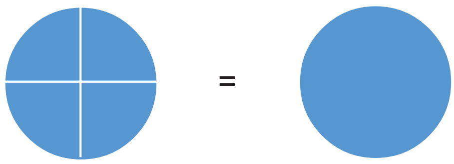
  1) Una región entera se puede dividir en partes.



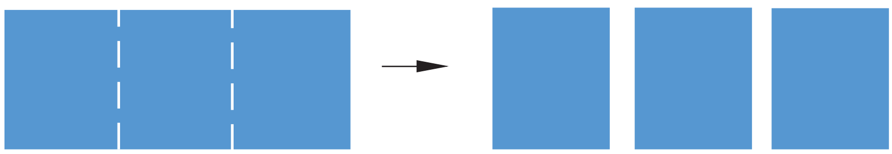
  2) El mismo todo puede dividirse en diferente número de partes iguales y se puede elegir el número de partes.



  3) Las partes de la partición forman el todo.

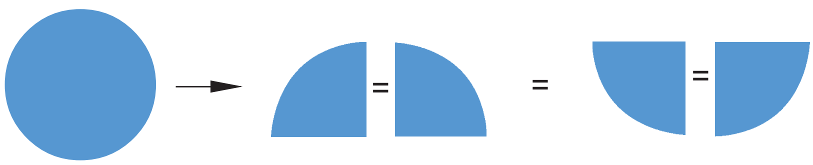


  4) El número de partes no coincide con el número de cortes.

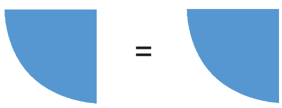


2 cortes 3 partes

  5) En una partición todas las partes son iguales.

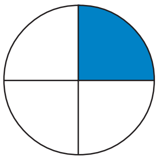
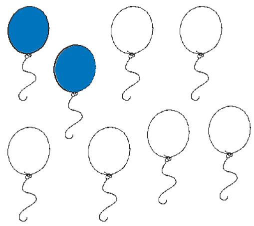


  6) Cada parte en sí misma se puede considerar como un todo.



  7) El todo se conserva, aun cuando se haya dividido en partes.

Para comprobar si los estudiantes comprenden estas ideas, se les puede plantear actividades como indicar qué fracción se representa en determinadas regiones sombreadas, incluyendo variedad de formas y partes que tengan la misma forma o solo áreas equivalentes, comprobables a simple vista. Tal como en la siguiente tabla:

Representación simbólica de la fracción	Representación gráfica de la fracción como parte de una unidad	Representación gráfica de la fracción como parte de un conjunto
$\frac{1}{4}$		

Otro tipo de trabajo que se sugiere es la representación de las fracciones en una recta numérica como desplazamientos y no como puntos, pues la primera forma permite su utilización en las operaciones mientras que la representación como puntos, no. Es recomendable desarrollar estrategias para comparar fracciones utilizando la unidad como referencia. Este modelo resulta más difícil que el anterior, pues no todos los estudiantes están en la capacidad de transferir la representación de área, que es algo más concreto, a la representación en una recta que es más abstracta por ser más cercana a un contenido trabajado estrictamente en el ámbito de la matemática. En la representación lineal, las fracciones son representadas como un número más comprendido entre dos números naturales. En este tipo de representación no se visualiza en todos los casos de manera directa la idea de relación entre la parte y el todo.

Una ventaja de esta forma de representación es que en ella las fracciones impropias son más parecidas al resto de las fracciones en cuanto a su condición de número susceptible de ser representado del mismo modo que el resto. Además, este tipo de representación muestra con mayor claridad que las fracciones amplían el conjunto de los números naturales y que los completan.[44]

Otra manera de trabajar las fracciones es considerándolas como la división indicada de dos números naturales: cuando se calculan porcentajes o se transforma una fracción en números decimales se deben dividir dos números naturales. La mayoría de estudiantes evidencia no comprender el supuesto que mencionamos párrafos atrás que hace referencia a que cualquier número natural puede ser dividido entre cualquier número de partes iguales.

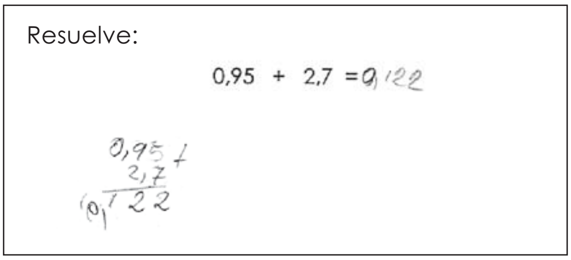
44. La densidad en el conjunto de los números racionales se trabaja más adelante, en secundaria.

5.4. Sistema de numeración y operaciones con números decimales

Este conjunto numérico fue evaluado en la EN 2004 mediante preguntas referidas a la aplicación de las representaciones de los números decimales y recodificaciones de diversas representaciones usuales, relación de orden, de comparación y operaciones de adición y sustracción con números decimales hasta las milésimas. Se utilizaron preguntas de respuesta corta, de respuesta extensa y de opción múltiple.

Las principales dificultades de los estudiantes sobre el sistema de numeración y operaciones con números decimales registradas en esta evaluación fueron:

- Los estudiantes no llegan a comprender la noción de número decimal.
- Los estudiantes tienen gran dificultad para representar números decimales de manera simbólica y verbal y para establecer equivalencias entre números decimales.
- Los estudiantes conciben los números decimales y las fracciones como conjuntos numéricos completamente diferentes.
- Los estudiantes obvian el cero cuando está presente en algún número decimal.
- Los estudiantes transfieren las reglas operativas de las operaciones con números naturales a las operaciones con números decimales, obviando el valor posicional de cada cifra.



Los estudiantes obvian el valor posicional de las cifras de un número decimal.

Los números decimales se encuentran presentes en numerosas situaciones, como la compraventa de bienes y la medición de longitud, área, volumen o masa, entre otras. Una característica de los números decimales es que nos ayudan a representar cantidades en una sola magnitud (por ejemplo, 1 m 80 cm es equivalente a 1,8 m) lo que simplifica la tarea de realizar conversiones. Sin embargo, a pesar de la cantidad de usos que puede darle el estudiante a los decimales en su vida, el trabajo con números racionales expresados como decimales representa una gran dificultad para los estudiantes de sexto grado, desde la noción de número decimal y su representación hasta las operaciones en este conjunto numérico. Los estudiantes tienen limitaciones para utilizar la representación decimal en la expresión de cantidades —por ejemplo, de dinero— y para identificar relaciones de equivalencia entre monedas de distinta denominación.

Una de las posibles causas de estas limitaciones es que las representaciones decimales equivalentes a fracciones «se ven muy diferentes», por lo que al estudiante le resulta difícil creer que, por ejemplo, $5\frac{3}{4}$ y 5,75 representan la misma cantidad. La diferencia en la apariencia origina que el estudiante perciba estos dos conjuntos numéricos como completamente diferentes. Esta situación se ve reforzada porque, tradicionalmente, en la escuela se trabajan como contenidos distintos y no como diversas representaciones del mismo número.

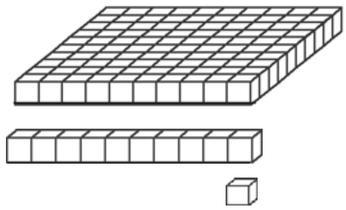
Otra dificultad que se ha encontrado es la relacionada con el cero. Muchos estudiantes no han logrado comprender su significado en un número decimal. Por ejemplo, consideran que 0,5 es exactamente igual que 0,005, o que 0,5 es diferente que 0,50. Otra tendencia es considerar que 0,45 > 0,6, pues los comparan como si se tratara de números naturales, sin considerar el valor posicional de la coma decimal.

Algunas sugerencias para trabajar este eje temático son las siguientes:

- El trabajo con el valor posicional de los números decimales puede iniciarse mediante actividades de experimentación con diferentes denominaciones de nuestro sistema monetario, que sería el punto de partida para el análisis del valor posicional. Se busca que los estudiantes encuentren la relación entre la escritura y el valor de cada moneda. Los conocimientos que los estudiantes tienen sobre el dinero les van a permitir anticipar y controlar procesos de resolución y resultados de problemas planteados por el docente que se pueden extender a aquellos de medición de longitudes. Al principio, deben mostrar notaciones espontáneas a partir de su experiencia previa.

- Luego de esta etapa de experimentación, hay que generalizar y «sacar de contexto», progresivamente, las primeras relaciones construidas.

- El siguiente trabajo debería hacerse con material concreto (multibase) en el que una «plancha» de 100 cuadraditos representa una unidad, entonces, una «barrita» de 10 representaría una décima y cada «cubito», una centésima.



- Respecto del trabajo con rectas numéricas, se pueden utilizar las reglas que tienen centímetros (que serían las unidades) y milímetros (que serían las décimas) *que presentan puntos de referencia* (0; 1; 2). Después se puede pasar a la formalización de la escritura y lectura de los números decimales, la cual va a evidenciar mejor el manejo por los estudiantes de la noción de estos números cuando sean capaces de resolver ejercicios estrictamente numéricos. Es recomendable utilizar diferentes estrategias para representar los números decimales, por ejemplo, contar verbalmente las décimas. Las fracciones decimales (con sus amplificaciones y simplificaciones incluidas) son un buen acercamiento a la relación entre las fracciones y los decimales.

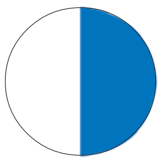
- Se debe trabajar en forma simultánea equivalencias de fracciones y decimales, siempre a partir de situaciones concretas y significativas para los estudiantes empezando por las más usuales como $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0{,}5$; $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75$; etc.

  Se puede aprovechar estos ejercicios para analizar las fracciones equivalentes a decimales finitos e infinitos. Una vez conseguida esta destreza, se pueden incluir las equivalencias en porcentajes, comenzando siempre por los más usuales (25%, 50%, 75%, etc.).

- Se sugiere que los estudiantes desarrollen la aptitud y la habilidad de hacer estimaciones anticipando el resultado de los cálculos con números decimales antes de realizarlos, lo que debe ser practicado siempre antes de aplicar las técnicas operativas de lápiz y papel. Se pueden realizar estimaciones redondeando los números hasta los enteros más próximos o a fracciones decimales sencillas. Por ejemplo, un estudiante debería saber que la suma de 14,25 + 6,945 es aproximadamente 21; o que el producto de 3,1 x 2,8 es un número cercano a 9, pues ambos números son próximos a 3.

- Los números propuestos deben ser adecuados al paulatino desarrollo de la habilidad de los estudiantes, partiendo de lo más simple para hacerse progresivamente más complejos. Solo después se deben trabajar las técnicas operativas. El estudiante debe tener la posibilidad de experimentar diversas vías y decidir qué método es mejor para cada situación y por qué. Debe dominar el valor posicional en los números decimales antes de trabajar la adición y la sustracción de estos, pues de lo contrario no entenderá el sentido del mecanismo de la operación ni el ordenamiento de los sumandos en forma vertical ni tendrá el control necesario para verificar si sus cálculos son correctos.
- En el caso de la multiplicación, igual que con las fracciones, se debe trabajar primero la generalización de la noción dándoles a los estudiantes la oportunidad de experimentar y verificar su ampliación para, después, trabajar la parte algorítmica cuya importancia, como ya se ha señalado en varios pasajes de este documento, es mucho menor que la del manejo de las nociones. Esto es así porque los estudiantes pueden tener acceso a herramientas de cálculo en situaciones cotidianas fuera de la escuela, pero no necesariamente tendrán la oportunidad de revisar y fundamentar las bases de cada una de estas nociones.

Esta es una tabla para el trabajo de las diferentes representaciones de números: expresados como fracción, como decimal, gráficamente y en porcentaje.

Fracción	Decimal	Gráfico	Porcentaje
$\frac{1}{2}$			
	0,05		
			80%
	0,75		

5.5. Medición de magnitudes

A partir de los resultados de la EN 2004 se puede afirmar que los estudiantes presentan dificultades para establecer equivalencias, para comparar y para calcular operaciones elementales (adición y sustracción) con cantidades incomplejas (expresadas mediante un número y una sola unidad) con las unidades usuales de las magnitudes fundamentales: longitud, masa y tiempo.

La medición, como puede deducirse, está relacionada con el número y la cantidad y con la geometría. Su proceso es una secuencia que va de la percepción de lo que debe ser medido a la comparación y de ahí a la aplicación de un referente de medida.[45]

Las actividades pedagógicas orientadas a la medición deben partir de la percepción de lo que debe ser medido. Se debe tener en cuenta que hay cuestiones que tienen mayor significado que otras para el estudiante. Por ejemplo, la altura de los compañeros de clase le va a dar significado a la longitud, así como los minutos que dura el recreo pueden darle significado al tiempo. El docente debe identificar acciones u objetos que le permitan exponer a sus estudiantes a los diferentes estímulos y propiedades de los objetos que eventualmente deberán medir.

Una vez conseguida la percepción de la magnitud, se debe comenzar el trabajo de comparación. Esta comparación de percepciones a las que se enfrenta al estudiante puede hacerse de manera natural. De acuerdo con el ejemplo de la altura de los compañeros, se pueden dibujar las siluetas de los estudiantes en un papelote y utilizarlas para comparar las alturas con ellas mismas como referente, sin necesidad de valores numéricos. En general, la comparación de atributos de objetos conduce lógicamente a la necesidad de patrones estándar que puedan ser aplicables a diversas comparaciones y situaciones. Para la comunidad internacional, el Sistema Internacional de Unidades (SI) es el referente más aceptado, pero hay países como el nuestro que han realizado una adaptación; por ello la EN 2004 evalúa la medición a partir de estándares aprobados por el Sistema Legal de Unidades y Medidas del Perú (SLUMP).

La necesidad de patrones estándar de medida, o de referentes fijos, está plenamente justificada por su permanente uso. Además, permiten comparar medidas de forma abreviada y directa y que estas medidas sean precisas y consistentes, con independencia de otras variables. Los referentes no estandarizados sirven en un primer momento para la comparación, pero lo ideal es que el aprendizaje de los estudiantes trascienda esta etapa y los lleve a manejar las unidades convencionales. Lo más indicado para el trabajo en esta fase es utilizar como unidades las medidas corporales de los estudiantes (pasos, palmos, cuartas, brazos, pies, dedos, etc.).

Además, la enseñanza de la medición no constituye una unidad de contenido aislada sino que se relaciona estrecha e indesligablemente con diferentes contenidos aritméticos y geométricos. Se debe tener en cuenta que la introducción de las distintas unidades para cada una de las magnitudes, la comprensión de las relaciones entre ellas y el cálculo con magnitudes requieren un trabajo previo de determinados conocimientos y capacidades en las áreas de aritmética y de geometría.

---

45. Sobre este tema, se sugiere revisar Palomino 2004.

Por otro lado, el estudio de las magnitudes ofrece una oportunidad para que los estudiantes desarrollen nuevos conocimientos y puntos de vista en aritmética o geometría sobre una base concreta que siempre les permite presentar sus intuiciones y saberes previos. Así, el trabajo con magnitudes puede ser un campo muy fértil para la profundización y perfeccionamiento de los conocimientos y capacidades aritméticas.

Algunas sugerencias para trabajar este núcleo temático son las siguientes:

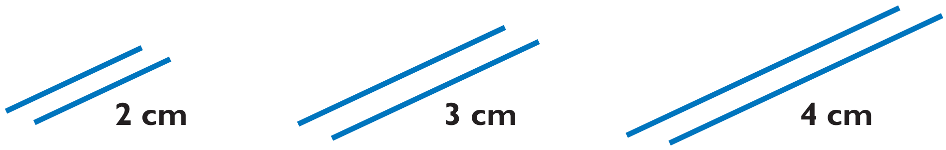
- No limitar la medición a una mera enseñanza de equivalencias y conversiones de unidades de medida, lo que no significa que se deban descartar sino que no debe ser este el aspecto fundamental del trabajo en este eje. La conversión de datos de magnitudes se debe utilizar para fijar conocimientos acerca del sistema de posición decimal de los números naturales, para desarrollar habilidades en el cálculo con los números naturales y, permanentemente, para el cálculo con magnitudes.
- Para cada una de las magnitudes, el esquema de trabajo debe comenzar por la comparación y el desarrollo de las habilidades que permitan a los estudiantes establecer la relación de orden, estimar la cantidad previa a la medición, elegir el instrumento idóneo, considerar la unidad más adecuada a la magnitud, medir y, finalmente, comparar la medición con la estimación inicial. Solo se puede aprender a medir midiendo, empezando de manera concreta para, luego, llegar a la resolución de problemas que impliquen el uso de equivalencias y de cálculos con lápiz y papel.
- Para la medición de masa, en particular, la mayoría de los estudiantes ya se ha enfrentado en la vida cotidiana con denominaciones de esta magnitud. Han experimentado que al realizar una compra deben considerar la cantidad de determinado producto, lo que en muchos casos puede leerse en la envoltura. Estos conocimientos deben ser aprovechados para el desarrollo de las sesiones de aprendizaje. Por ejemplo, los estudiantes pueden estimar entre dos objetos cuál es más pesado o menos pesado, o si ambos pesan lo mismo y, a partir de allí, reconocer que este tipo de estimación puede ser inexacta por lo que se comprende la utilidad de la balanza. Si se agrupan los objetos de acuerdo con su masa, los estudiantes pueden observar que no todos los objetos con el mismo peso tienen el mismo tamaño y que dos series hechas con los mismos objetos mediante diferentes criterios como peso y «tamaño» (volumen) no son idénticas.
- Empezar a trabajar la precisión en la medida y emplear una mayor variedad de instrumentos de medida. En el caso de la longitud, la regla es el instrumento de medición más común y usual por lo que se convierte también en el más importante. Para su adecuado manejo hay que establecer un programa de desarrollo de estas habilidades que debe ser simultáneo con la estimación (anticipar la medición) y con la aproximación de medidas (redondear a la unidad más cercana). Esto demanda que los estudiantes conozcan cómo se coloca la regla para medir un segmento determinado, cómo se lee el resultado y cómo debe trazarse un segmento de una longitud dada; después el estudiante podrá usar el compás, el cual demanda mayor habilidad. Los otros instrumentos de medida de longitud suelen utilizarse en otras áreas como, por ejemplo, Educación Física, Ciencia y Ambiente, etcétera. En cuanto a las medidas de masa, si bien los estudiantes están familiarizados con varios tipos de balanza, es importante que aprendan a utilizarla y a leer lo que esta indica. Se sugiere realizar actividades de compra y venta ficticia de

productos a partir de su peso. Respecto de la medida del tiempo, el dominio del reloj es fundamental, tanto el de manecillas como el digital.

- Medir atributos de diferentes objetos del aula, de la escuela, de la casa, etc. Los estudiantes deben poder determinar primero la longitud de un segmento, luego, la distancia entre dos puntos diferentes y, finalmente, la distancia entre rectas paralelas y trazar rectas paralelas a partir de una distancia dada. Paulatinamente, se van agregando las medidas con milímetros expresados como números naturales pero como cantidades complejas (por ejemplo: 5 cm y 8 mm) y como decimales con cantidades incomplejas (por ejemplo: 5,8 cm).
- También a partir de la medición los estudiantes podrán deducir y utilizar fórmulas para determinar la medida de algunos atributos de los objetos como perímetro, área y volumen (capacidad).

Este es un ejercicio de medición que puede ser de utilidad para el trabajo en el aula:

Usando los seis siguientes palitos forma el contorno de un rectángulo:



1. Ahora halla su área y su perímetro, y grafícalo.
2. Escribe tus resultados en la siguiente tabla. Haz otros rectángulos usando siempre los seis palitos y completa los datos de la tabla:

	Largo	Ancho	Área	Perímetro
1.				
2.				
3.				
4.				

3. ¿Cuál será el rectángulo de mayor área posible?

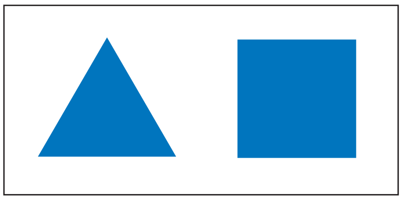
5.6. Iniciación a la geometría

La iniciación a la geometría fue evaluada en la EN 2004 mediante preguntas referidas al reconocimiento de figuras elementales planas y del espacio. Por lo general, se empleó el lenguaje geométrico convencional y se utilizaron preguntas de respuesta corta, de respuesta extensa y de opción múltiple.

Las principales dificultades de los estudiantes en la iniciación a la geometría registradas en esta evaluación fueron:

- Los estudiantes no manejan el vocabulario geométrico convencional.
- Los estudiantes no identifican figuras geométricas elementales (cuadrado, rectángulo, triángulo, pirámide, cubo, etc.), ni a partir de la forma ni a partir de las propiedades.
- Los estudiantes confunden los elementos de las figuras geométricas: ángulos, lados, caras, diagonales.
- Los estudiantes no han interiorizado las propiedades de las figuras planas elementales, como área y perímetro.

Muchas veces se trabaja la geometría de manera descontextualizada y sin considerar el nivel de desarrollo del estudiante; por ejemplo, se presentan dibujos de las figuras geométricas fuera de contexto, representados de manera «ideal». Estas representaciones «ideales» casi siempre muestran polígonos regulares y en posiciones «estándar» (por ejemplo: triángulos equiláteros con la base horizontal, cuadrados con los lados perpendiculares a la horizontal). Muchos docentes ofrecen a los estudiantes el mismo ejemplo repetidas veces, omitiendo los contraejemplos (por considerarlos incorrectos).



La identificación de las figuras suele ser trabajada como sinónimo de memorización y no como una habilidad ligada a la clasificación, a la puesta en práctica de un criterio que el estudiante deberá desarrollar para aplicarlo a diversas situaciones.

Por otro lado, el nivel evolutivo del pensamiento geométrico del estudiante es incipiente y, justamente, está muy ligado a los estímulos y actividades que realiza en la escuela. Los métodos empleados por los docentes, sumados al desarrollo evolutivo de los estudiantes, dan como resultado que «se aprendan» (memoricen) las figuras geométricas como si fuesen imágenes, sin poder asociarlas a propiedades ni a características perceptuales. Por ejemplo, la noción de figuras geométricas elementales suele enseñarse como simple asociación entre el dibujo y el nombre convencional y no se le da significado a esta relación.

A partir de la revisión de algunos textos escolares, se ha observado que muchas veces se pretende describir las figuras geométricas y se incurre en diversos errores didácticos. Entre estos está el hecho de que tratan de definir las figuras geométricas cuando, por el nivel de evolución de su pensamiento geométrico, los estudiantes de sexto grado no están aún en condiciones de comprender definiciones de este tipo. Además, consideran en estas definiciones algunas características aplicables a otras figuras, es decir, no presentan las características necesarias y suficientes. Por ejemplo, en la definición de triángulo: «tiene tres ángulos y tiene tres vértices», pero no se indica que es una figura cerrada.

Siguiendo este ejemplo, lo usual es presentar los triángulos con la base horizontal, lo cual trae como consecuencia que los estudiantes identifiquen solo a los triángulos que se encuentran en esa posición. Esta dificultad va de la mano con el escaso vocabulario geométrico que manejan los estudiantes; probablemente muchos de ellos tienen una noción de lo que es el perímetro de una figura pero no llegan a verbalizar esa noción. En este caso sí es importante el manejo preciso del término pues es requerido para realizar una tarea específica.

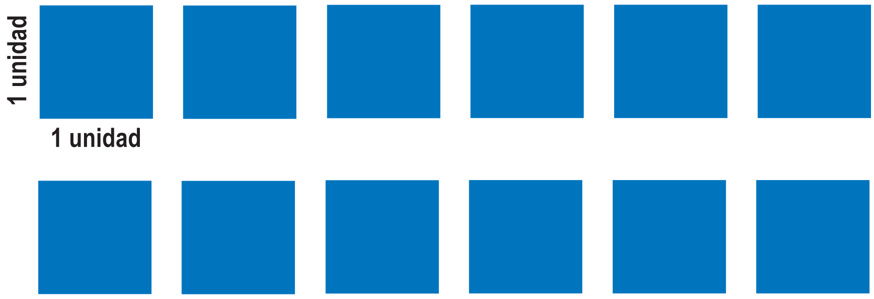
De acuerdo con los resultados del cuestionario *Oportunidades de aprendizaje de sexto grado* (ODA6PM), más del 60% de los estudiantes tiene docentes que han dedicado poco tiempo o que no han trabajado la iniciación a la geometría durante el año. La razón principal por la que no se ha hecho es la falta de tiempo y la postergación para el final del año escolar, según manifestaron los docentes encuestados; sin embargo, dado que el cuestionario ODA6PM se aplicó en la segunda semana de noviembre, es muy probable que el tiempo disponible a partir de esa fecha y en lo que quedaba del año, no haya sido suficiente para el desarrollo de estas capacidades.

Algunas sugerencias para el trabajo de este núcleo de interés son:

- Realizar actividades que permitan recoger información acerca del nivel de pensamiento geométrico en el que se encuentran los estudiantes para así elaborar en forma apropiada las secuencias de las sesiones (de acuerdo con el Modelo de Van Hiele —Crowley 2004). Los niveles que se deben desarrollar en primaria son los relacionados con la visualización o reconocimiento (los objetos geométricos son percibidos como totalidades aisladas) y descriptivo o analítico (se logra la familiarización con los elementos que forman los objetos geométricos y con algunas de sus propiedades).
- Iniciar el trabajo geométrico con una exploración activa de los objetos de su espacio, lo que ayuda a despertar el interés y la motivación para, luego, establecer relaciones entre ellos. Estas tareas de percepción deben considerar distintos objetos geométricos y la descripción de sus elementos y propiedades (con un lenguaje apropiado para la edad de los estudiantes). En el entorno del estudiante (casa, escuela) hay muchos objetos con formas geométricas (puertas, ventanas, paredes, mesas, libros, lápices, pizarras, etc.) En las actividades recreativas el estudiante también está en contacto con objetos de formas geométricas: la pelota, el mapamundi, el tablero de ajedrez, la cometa, etc. Además, se mueve de manera permanente en el plano y en el espacio, por ejemplo, en la cancha de fútbol, en el patio, etc. El entorno es una fuente casi inagotable de objetos susceptibles de ser observados y manipulados. A partir de estas acciones, los estudiantes construyen las imágenes mentales que, luego, les permitirán razonar sobre objetos, relaciones y transformaciones sin necesidad de recurrir a representaciones de figuras idealizadas.
- Diseñar actividades con material concreto (plegado y corte de papel, modelos, utilización de palitos y bolitas de masilla) que propicien el desarrollo de diferentes tipos de habilidades cognitivas, perceptivas, comunicativas, de dibujo y construcción y de apreciación estética. Realizar tareas que requieran un mayor desarrollo de las capacidades matemáticas utilizando materiales variados que mantengan el interés de los estudiantes y se conviertan en un reto constante para conjeturar, experimentar y justificar y no centrarse en trabajos de motricidad fina, que por sí solos no aportan al desarrollo de las habilidades matemáticas.

Este es un ejercicio de construcción de figuras geométricas:

Con doce cuadraditos como los siguientes, forma un rectángulo (que no tenga espacios huecos dentro).



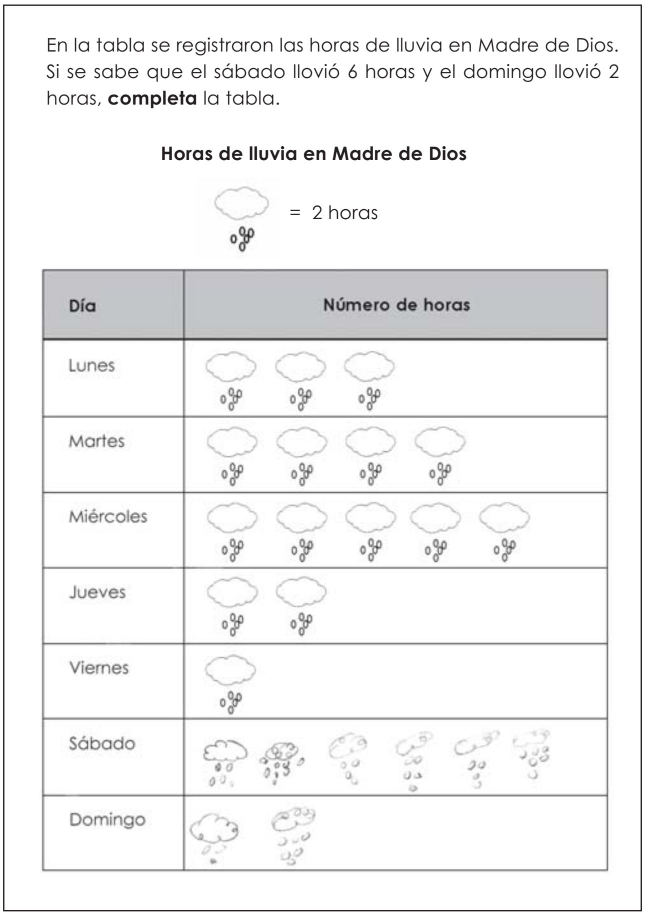
Completa los datos que te pide la tabla y haz otros rectángulos, usando en cada intento siempre los doce cuadraditos.

	Largo	**Ancho**	**Área**	**Perímetro**
1.				
2.				
3.				
4.				

¿Cuál es el rectángulo de mayor perímetro que puede formarse?

5.7. Gestión y administración de la información

Los estudiantes muestran dificultades para resolver problemas que demandan interpretar, organizar y representar información estadística asociada con cuadros de doble entrada y diagramas de barras agrupadas cuya frecuencia esté a una escala diferente a 1:1, lo que puede deberse a distintos factores. A continuación se expone los dos más importantes.



Los estudiantes muestran dificultades al interpretar información estadística presentada a escala.

Por una parte, la inadecuada cobertura curricular, ya que un porcentaje elevado de los docentes encuestados refirió que no trabajan el aspecto de estadística en sexto grado. Del grupo de docentes que sí lo hacen, la mayoría señala que es el tema al que menos tiempo dedica. Ambos hechos influyen negativamente en el rendimiento de los estudiantes y explican, en parte, las dificultades exhibidas al resolver problemas relacionados con estos contenidos.

Por otro lado, el trabajo en el aula del eje de pensamiento estadístico puede estar dirigido al aprendizaje de los procedimientos rutinarios y no al desarrollo de las capacidades matemáticas. En particular, se puede centrar el trabajo en forma inadecuada en tareas como copiar o construir diagramas y cuadros sin demandar a los estudiantes que interpreten, comparen o argumenten; o calcular promedios sin pedirles justificar su pertinencia o representatividad para la situación planteada; o trabajar situaciones no significativas para los estudiantes en las cuales los mecanismos de control y la motivación son escasos o están ausentes.

Las principales dificultades encontradas son las siguientes:

- Los estudiantes no identifican adecuadamente las categorías presentadas en cuadros de doble entrada y en diagramas de barras.
- Los estudiantes no interpretan en forma apropiada la información presentada en las leyendas.
- Los estudiantes incurren en errores al determinar la altura de las barras y la escala al elaborar diagramas de barras.

Como ya se mencionó, el escaso trabajo en el aula y la poca relación con el mundo del estudiante podrían hacer que los aprendizajes relacionados con este eje no sean significativos.

Algunas sugerencias para el trabajo en el aula son:

- Iniciar el trabajo con situaciones realmente significativas y motivadoras para los estudiantes como encuestas sobre preferencias musicales, actividades recreativas, deportes, lecturas, características de los mismos estudiantes (talla, peso, edad, lugar de nacimiento, etc.). Considerar la recolección de datos acerca de hechos específicos cercanos como número de estudiantes en el aula, número de profesores, datos familiares de cada uno, etc. Las situaciones planteadas en clase y su tratamiento deben ser consideradas útiles por los estudiantes para que sean capaces de transferir esta herramienta organizativa a los contextos en los que interactúan.
- Procurar que los estudiantes construyan sus propias formas de organizar y representar la información, lo que va a generar la necesidad de construir nuevas formas y conocer aquellas utilizadas regularmente: cuadros de doble entrada, diagramas de barras, pictogramas, etc. Este trabajo debe iniciarse a partir de información del aula para, luego, utilizar aquella presentada en los medios de comunicación.
- Diseñar actividades en las que el estudiante requiera organizar datos, clasificar información y representarla de distintas formas para comunicar algo, es decir, utilizar la estadística para proyectos integradores, para trabajar el aspecto cuantitativo de las tareas en otras áreas.
- Diseñar actividades que relacionen diferentes maneras de representar y organizar la información: de cuadros a diagramas de barras y viceversa.
- El trabajo de interpretación de pictogramas debe buscar que el estudiante logre reconocer el uso que se da a ciertos iconos como medio para representar cantidades determinadas de objetos (con equivalencias o relaciones proporcionales). Sería interesante combinar varios iconos pues favorecería el desarrollo de un pensamiento no unidireccional.
- Integrar actividades en las cuales se reconozca el carácter de la estadística de herramienta útil para el análisis y la clasificación de información relacionada con economía, geografía, etc. Los estudiantes pueden generar nuevos diagramas estadísticos con información más elaborada a partir de esta clasificación de información. Este tipo de actividades debe trabajarse de manera grupal, formando equipos de estudiantes para poder llegar a un mejor análisis.

5.8. Sugerencias generales

Como complemento de las sugerencias específicas para cada eje temático es necesario resaltar la importancia del juego en el aprendizaje de la matemática. Su carácter motivador y su gran riqueza didáctica hacen de esta estrategia un elemento fundamental en las actividades en el aula. Existe una gran variedad de juegos matemáticos; se sugieren:

- Juegos con números, trucos numéricos, adivinación de números, etc. los cuales van a ayudar en el cálculo mental y en la adquisición de nuevos conocimientos.
- Juegos de lápiz y papel que ayudan al desarrollo de capacidades de comprensión y representación del espacio.
- Juegos de competencia inteligente en los cuales los estudiantes deben intuir, adivinar, prever la jugada del otro; por ejemplo, el cuatro en raya.
- Juegos solitarios en los que se priorizan unas acciones sobre otras y se necesita de una determinada estrategia para su resolución; por ejemplo, juegos de memoria.

Alsina y otros (1995) sugieren otras estrategias generales para el trabajo docente en primaria:

a) *La observación*: atención prestada a un objeto o situación para obtener información. Se debe apoyar en la realidad más próxima a los estudiantes y sobre materiales manipulables, en la medida de lo posible, para despertar interés en ellos. Una vez captada, su atención debe mantenerse. De entre los distintos procedimientos de observación el más adecuado para el trabajo de matemática es la observación como acción dirigida por el docente que orienta el recojo de la información que tenga más relación con el concepto que se pretende introducir.

b) *La manipulación libre*: proporciona experiencias valiosas para el aprendizaje de las relaciones cuantitativas, métricas y espaciales. Esta estrategia debe tener la guía del docente para que la elaboración del estudiante no permanezca en un nivel concreto. Puesto que el proceso de aprendizaje de cada individuo se da de manera diferenciada, no existe ningún material totalmente idóneo para trabajar un determinado concepto; por ello es necesario ofrecer diversos objetos o situaciones para captar los elementos fundamentales. Este procedimiento debe llegar a la simbolización más o menos compleja, la cual se debe complementar, al menos, con la expresión oral, gráfica o escrita de lo trabajado mediante la manipulación.

c) *La experimentación*: completa la observación y añade cambios en la situación o el objeto a analizar observando los aspectos que permanecen sin variaciones y los que se modifican e intenta relacionar las modificaciones producidas con los cambios introducidos. La experimentación requiere una estimación previa o una predicción.

d) *Las relaciones*: los estudiantes deben aprender a establecer relaciones entre las partes o elementos que integran una situación o entre los resultados de un fenómeno o experiencia, lo que no se puede esperar que ocurra a partir de definiciones o representaciones. Se debe dar a los estudiantes suficiente tiempo y oportunidades para madurar los conceptos. Existen tres tipos fundamentales de relaciones que se deben trabajar en primaria: las clasificaciones (relaciones de equivalencia), las ordenaciones y las relaciones cuantitativas (adición, multiplicación).

e) *La estimación*: es el valor aproximado de una operación o medida dada por el estudiante, quien debe tener información acerca de la situación. En la estimación, el cálculo se realiza mentalmente y no es preciso que el resultado sea exacto. Se puede aplicar al cálculo, a la medición y a la solución de problemas.

f) *El tanteo*: resulta altamente eficaz en la resolución de problemas. Se tantea cuando, ante una situación problemática, no somos capaces de determinar a priori el método más apropiado para resolverla.

g) *La resolución de problemas*: constituye no solo un área de estudio en sí misma sino también un procedimiento de enseñanza–aprendizaje aplicable a todas las demás áreas. Su objetivo es aprender a resolver y reconocer si la solución o soluciones obtenidas son correctas sin la ayuda del profesor. Los problemas han de provenir de la realidad cotidiana del estudiante, sobre todo en los primeros grados, pero hay que recordar que el que se trate de problemas cotidianos no los hace reales. Los problemas han de ser variados en su forma, en el número y método de sus posibles soluciones y en el tipo de conceptos matemáticos que intervienen. Al final de esta etapa los estudiantes deben conocer los pasos necesarios para resolver cualquier tipo de problema.

   Si el enunciado se presenta en forma escrita es necesario leerlo aclarando el significado de cada término y explicar, en lenguaje coloquial, la situación que se describe. También es importante organizar la información del problema distinguiendo entre la información conocida y la desconocida. Asimismo, habrá que determinar cuál es la información que se precisa y dónde se ha de buscar. Después, hay que explorar las relaciones o las condiciones entre los valores conocidos y los desconocidos, lo que se facilita prediciendo y tanteando el resultado. A continuación se ha de elaborar un plan, resolver y comprobar si los resultados son soluciones apropiadas a la situación planteada y, si la comprobación es negativa, revisar el proceso.

6 ¿Cómo usar las preguntas mostradas en este informe?

En esta sección se presentan algunas de las posibilidades de uso de las preguntas mostradas en este informe. No se pretende detallar todas estas posibilidades, sino señalar algunas que se consideran importantes y que podrían ser útiles para el trabajo en el aula.

La EN 2004 evalúa la eficacia del sistema educativo peruano. Para hacerlo, se desarrolló un marco de evaluación del área de Lógico Matemática que refleja el espíritu de las actuales propuestas curriculares del Ministerio de Educación. Algunas de las preguntas utilizadas en estos instrumentos se presentan para ilustrar cómo dicho marco de evaluación se traduce en términos de preguntas y, también, para dar una visión panorámica de las dificultades en el aprendizaje de la matemática que presentan ciertos grupos de estudiantes.

Estas preguntas no deben utilizarse para elaborar pruebas que intenten reproducir el trabajo realizado por la UMC, pues esta evaluación tiene características particulares que la hacen diferente a la evaluación que el docente puede realizar en el aula. Por esta razón, se propone que los ejemplos de preguntas presentados y comentados en secciones anteriores de este informe sean utilizados por usted, de manera amplia, como ayuda en la práctica pedagógica en el aula. Entre otros usos, pueden emplearse para diagnosticar el desempeño de sus estudiantes en una capacidad determinada o para explorar el nivel de desarrollo de una noción matemática. También podría crear preguntas similares inscritas en el modelo de evaluación planteado o diseñar actividades de aprendizaje que integren estas preguntas a su quehacer cotidiano en el aula.

Las preguntas comentadas en el capítulo 4 pueden dar luces acerca de lo que los estudiantes conocen, sus esquemas de razonamiento, sus patrones de error o sus creencias acerca de la matemática. En este apartado se presentan también algunas sugerencias para la adecuada utilización de estas preguntas en la práctica pedagógica.

Para realizar este trabajo es importante que siga usted, en forma previa, tres pasos:

1) Estudiar el marco de la evaluación del área.
2) Interpretar el significado de la escala de dificultad de las preguntas.
3) Comprender los niveles de desempeño.

1. Estudio del marco de la evaluación del área

Se sugiere leer e identificar las ideas principales del marco de evaluación del área que orientaron la elaboración de las pruebas. Usted debería poder contestar algunas preguntas tales como: ¿En qué consiste el enfoque heurístico? ¿Por qué se sostiene que la resolución de problemas es el centro de la actividad matemática? ¿Qué se evaluó en la EN 2004? ¿Qué capacidades matemáticas se privilegian para esta evaluación? ¿Cuál es la relación entre las capacidades curriculares y lo evaluado? ¿Qué diferencias existen entre los contenidos curriculares y lo propuesto en la EN 2004? ¿Cuál es el papel que desempeñan los contextos en el modelo de evaluación?

Es importante establecer relaciones entre el marco de evaluación del área y la forma de construcción de las preguntas. Para ello debería ser usted capaz de justificar por qué cada pregunta mostrada en este informe evalúa una determinada capacidad matemática, contenido y contexto. Asimismo, ¿qué estrategias podrían ser utilizadas por los estudiantes para resolver cada una de dichas preguntas?, ¿qué habilidades se encuentran involucradas al responderlas?, etc.

2. Interpretación del significado de la escala de dificultad de las preguntas

Como ya se mencionó, luego de la aplicación de las pruebas, las preguntas se ordenaron respecto de su dificultad y se estableció, de esta manera, una escala con puntajes referenciales. Esta escala permite identificar qué preguntas son más difíciles o más fáciles que otras. Cada pregunta tiene una dificultad que determina su posición en la escala, como muestra el diagrama de ubicación de las preguntas que se presenta en la página siguiente. Así, en la parte inferior de la escala se ubican las preguntas con menor dificultad y en la parte superior, aquellas con mayor dificultad. Es importante que, al analizar estas preguntas, logre usted establecer por qué existen estas diferencias y cuáles son los criterios que les otorgan dificultad a las diversas nociones matemáticas.

3. Comprensión de los niveles de desempeño

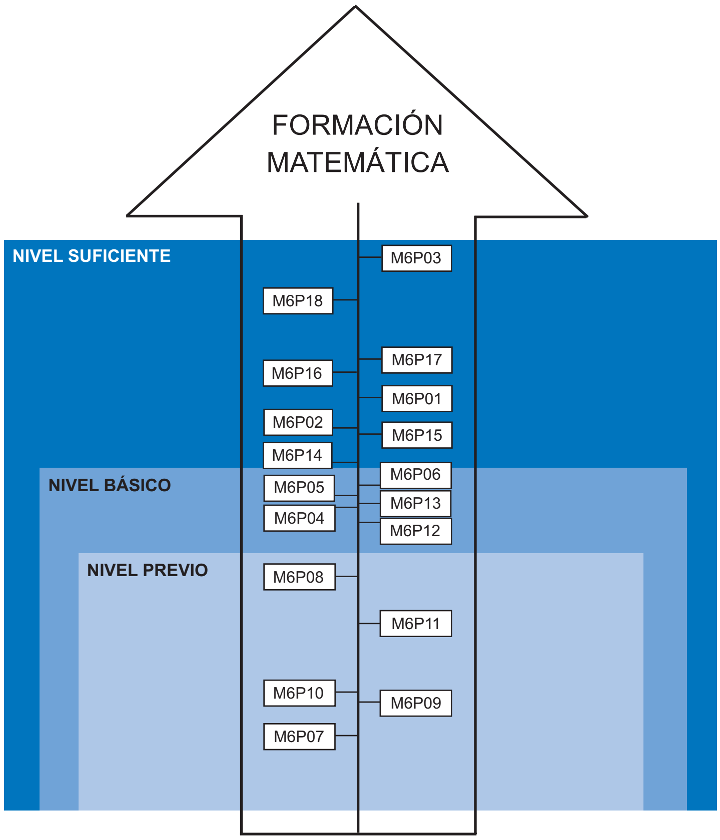
Como se puede apreciar en el diagrama, las preguntas están distribuidas de acuerdo con el nivel de desempeño al que pertenecen: suficiente, básico o previo.

No se debe olvidar que los estudiantes que se encuentran en determinado nivel son capaces de responder también las preguntas asociadas a los niveles inferiores.

Usted debería leer, en el capítulo 2 de la Parte I, la definición general de estos niveles y, luego, en el capítulo 2 de la Parte III, la descripción de esos niveles para sexto grado de primaria. A partir de esta descripción debería identificar, en el capítulo 4 de la Parte III, aquellas preguntas correspondientes a cada nivel de desempeño, y hacer un análisis crítico referido a si la pregunta comentada refleja realmente las habilidades descritas.

Tal como se ha señalado, para responder correctamente las preguntas ubicadas en la parte inferior de la escala se demanda un menor desarrollo de las habilidades que el necesario para responder las preguntas ubicadas en la parte superior de esta. En ese sentido, lo que la escala muestra es cómo las distintas preguntas demandan de los estudiantes habilidades o estrategias implicadas en la resolución de las preguntas que evalúan la formación matemática y permiten la progresiva construcción de un conocimiento que se va haciendo más complejo.

Ubicación de las preguntas de
sexto grado de primaria mostradas en este informe



Si se revisa el diagrama de ubicación de las preguntas, se puede apreciar claramente estas relaciones comparativas de dificultad. Aclarémoslo con un ejemplo: la pregunta M6P11 pertenece al nivel previo y es de menor dificultad que la pregunta M6P14 que pertenece al nivel suficiente. Así, si un estudiante resuelve la pregunta M6P14 tendrá entonces una gran probabilidad de responder en forma correcta la pregunta M6P11.

Luego de este análisis introductorio al modelo de evaluación del área y a los niveles de desempeño, puede usted utilizar las preguntas mostradas de diversas formas, entre las que se pueden mencionar el diagnóstico de los conocimientos de sus estudiantes y la organización de las actividades en el aula.

DIAGNÓSTICO DE SUS ESTUDIANTES

Las preguntas pueden utilizarse en forma individual para explorar el estado de las nociones matemáticas de sus estudiantes.

En primer lugar, seleccione una pregunta referida a un concepto matemático. En el capítulo 4 de la Parte III se muestran ejemplos que incluyen una descripción sobre algunos aspectos de la pregunta. Lea y responda: ¿A qué capacidad matemática se refiere? ¿Qué contenidos relacionados se ponen en práctica? ¿Qué caminos o vías de solución puede utilizar el estudiante para responderla?

En segundo lugar, proponga la pregunta a sus estudiantes y analice sus respuestas: podrá obtener así una idea del grado de desarrollo de dicho concepto en ellos. Deberá tener en cuenta que, si la mayoría de los estudiantes ha respondido adecuadamente la pregunta, entonces estará en capacidad de responder las preguntas asociadas con este concepto que se presenten en niveles relativos inferiores de la escala de dificultad. Esto será un indicador del tipo de actividades que puede utilizar para seguir avanzando en este concepto. Si, en cambio, la pregunta es respondida por pocos estudiantes, deberá utilizar una pregunta de menor dificultad y, si esta última es respondida por la mayoría, tendrá información acerca del nivel de desarrollo del concepto y una idea de qué actividades pueden ser las adecuadas para desarrollar las capacidades en el nivel que muestran sus estudiantes.

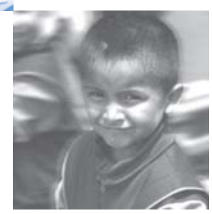
Actividades de aula

Las preguntas pueden emplearse como elementos motivadores al inicio de una clase. Para hacerlo, seleccione una pregunta de la escala y aplíquela a sus estudiantes. Recoja las respuestas y agrúpelas en términos de sus resultados, trabaje con ellos su solución, explorando los métodos utilizados y los razonamientos novedosos, y analizando los errores que se han producido al resolverla. Motive a sus estudiantes para que expliquen sus procesos de solución y defiendan sus puntos de vista.

Las preguntas también pueden utilizarse para construir actividades de aprendizaje. Es posible emplear las preguntas de un determinado nivel, o un grupo de ellas referidas a un concepto o capacidad, para desarrollar clases de matemática o plantear actividades de aprendizaje cooperativo. Para ello, deberá convertir la pregunta en una actividad didáctica, formulando preguntas introductorias que sirvan para explorar los conocimientos previos de sus estudiantes y preguntas que profundicen en lo que se va a trabajar. Asimismo, podrá diseñar instrumentos de evaluación referidos al concepto o capacidad que se trabajó en la pregunta seleccionada.

Las preguntas también pueden servir para generar nuevos cuestionamientos. Se puede presentar a los estudiantes una pregunta de la escala y trabajar en plenaria su solución, con el docente actuando solo como un facilitador que plantea preguntas orientadoras o desencadenantes (pero que no ofrece respuestas). Como esquema que organice la secuencia de trabajo se pueden utilizar las fases de resolución de problemas propuestas por George Polya que se comentan en la Parte II, capítulo 5 (a partir de la página 120) de este documento.

En este esquema, la visión retrospectiva es una de las fases en las que el docente debe poner mayor énfasis. En su desarrollo, debe promover en los estudiantes el deseo de explorar más allá de la respuesta hallada y el hábito de reflexionar sobre lo realizado, identificar los bloqueos mentales que ocurrieron, las estrategias que permitieron salir de ellos, el método utilizado, las heurísticas que afloraron en la fase inicial, etc. Además, se debe promover que los estudiantes modifiquen las preguntas, cambien los datos y su estructura, y planteen nuevos problemas relacionados. El docente debe estimular en los estudiantes la necesidad de llegar a generalizaciones y de reflexionar sobre los métodos utilizados, entre otros objetivos.



PARTE IV

Conclusiones

A partir del análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes de segundo y sexto grados de primaria en las capacidades evaluadas, se puede llegar a las siguientes conclusiones.

Segundo grado

- El 9,6% de los estudiantes se encuentra en el nivel suficiente, es decir, solo este porcentaje muestra un rendimiento aceptable para segundo grado. Esto quiere decir que el 90,4% de los estudiantes no ha logrado desarrollar adecuadamente las capacidades requeridas para la culminación del ciclo III de la educación básica. Estos resultados son preocupantes, pues evidencian que la gran mayoría de los estudiantes de segundo grado no ha logrado un desarrollo óptimo de capacidades matemáticas elementales que son la base para construir nuevos aprendizajes.
- El 63%[46] de la población de estudiantes de segundo grado no ha logrado ni siquiera los aprendizajes requeridos para acceder al grado que están culminando. Este hecho es muy alarmante pues el aprendizaje de algunos tópicos, como la numeración y el cálculo aritmético básico, debe producirse en un determinado momento del desarrollo evolutivo del niño: si dicho aprendizaje no se consigue a tiempo será difícil que el estudiante pueda incorporarlo de manera tal que pueda utilizarlo con fluidez.

Sexto grado

- El 7,9% de los estudiantes se encuentra en el nivel suficiente, es decir, solo este porcentaje muestra un rendimiento aceptable de las capacidades evaluadas para sexto grado de primaria. Estos resultados son preocupantes pues indican que el 92,1% de la población culmina la educación primaria sin haber alcanzado el dominio de conocimientos matemáticos elementales y básicos. Esta situación tiene implicancias en el posterior rendimiento escolar y en otros contextos, ya que un estudiante que no tiene desarrolladas las capacidades requeridas para culminar primaria se verá privado de oportunidades de lograr aprendizajes posteriores que son necesarios para su inserción en el mundo.

46. Este porcentaje es la suma de los porcentajes de estudiantes ubicados en el nivel previo y debajo del nivel previo en segundo grado de primaria.

- El 57,5%[47] de la población de estudiantes de sexto grado no ha logrado ni siquiera los aprendizajes requeridos para acceder al grado que están culminando. Esto pone en evidencia que un porcentaje mayoritario de estudiantes que cursa sexto grado de primaria no debería haber sido promovido a este grado por no haber incorporado los aprendizajes de los grados anteriores y no evidenciar las habilidades necesarias para enfrentar exitosamente situaciones propias del grado en el que se encuentran.

Educación primaria

- La diversidad en el rendimiento que se presenta entre los estudiantes de la población nacional también puede observarse en el aula, como lo demuestran los resultados de las pruebas de los estudiantes en las escuelas de la muestra.[48] Esta gran diversidad en el rendimiento entre los estudiantes que conviven en el aula tiene consecuencias para el quehacer pedagógico cotidiano del docente. En general, las aulas suelen estar formadas por grupos muy diversos y esto requiere que el docente emplee estrategias especiales y materiales diferenciados por niveles para poder atender a todos sus estudiantes sin generar exclusión. Esto implica capacidades complejas que requieren de un proceso de construcción personal que parta de un diagnóstico de su propio desempeño como docente de aula.

- El porcentaje de estudiantes que alcanza el nivel suficiente en cada uno de los grados evaluados muestra que ya en segundo grado de primaria existe una brecha entre los aprendizajes esperados y lo que realmente se logra. Esta brecha crece con el número de años de escolaridad. Esto se debe, entre otras razones, a que la construcción del conocimiento matemático es jerárquica y muchas veces se sostiene en conceptos previamente aprendidos que, si son mal construidos, producen dificultades de aprendizaje, bloqueos y errores conceptuales al tratar de profundizar en nuevos temas.

- El enfoque del área de Lógico Matemática propuesto en el Diseño Curricular Nacional se inscribe en una óptica contemporánea de resolución de problemas, y señala que aprender a resolver y formular problemas es aspiración de una buena educación matemática. Sin embargo, los resultados de la EN 2004 permiten inferir que la didáctica de la matemática de nuestro país responde a un enfoque centrado en la enseñanza de reglas y algoritmos.[49] Esta afirmación se basa en la constatación de que las preguntas en las que los estudiantes tuvieron mayor éxito fueron, precisamente, aquellas que solo demandaban un aprendizaje reproductivo relacionado con la aplicación de algoritmos convencionales o con ejercicios típicos. Son claras las consecuencias que este enfoque podría tener en

---

47. Este porcentaje es la suma de los porcentajes de estudiantes en el nivel previo y debajo del nivel previo en sexto grado de primaria.
48. Cada escuela incluida en la muestra de la EN 2004 ha recibido un reporte que recoge la distribución de los estudiantes evaluados de cada aula en los distintos niveles de desempeño.
49. Muy similar al movimiento Regreso a lo Básico, que se desarrolló en el mundo a comienzos de la década de 1980. Después de este movimiento, se desarrollaron otros enfoques de la enseñanza de la matemática más acordes con las necesidades socioeconómicas del mundo actual.

nuestra educación: estudiantes poco reflexivos y que presentan dificultades para establecer conexiones entre conceptos, resolver problemas novedosos o «matematizar» situaciones reales, entre otras capacidades de mediana y alta demanda cognitiva que son necesarias para la inserción de los ciudadanos en nuestra sociedad, que cada vez está más influenciada por el desarrollo científico y tecnológico.

Bibliografía

ALSINA, C. , C. BURGUÉS, J. M. FORTUNY, J. GIMÉNEZ Y M. TORRA

1995 *Enseñar matemática.* Barcelona: Grao.

ASSOCIATION OF MATHEMATICS EDUCATORS

Math Buzz. En <http://math.nie.edu.s/ame/>.

BISHOP, A.

1980 «¿Cuáles son algunos obstáculos para el aprendizaje de la geometría?». *Revista Estudios en Educación Matemática: Enseñanza de la Geometría*, vol. 5, pp. 183-208. UNESCO: Robert Morris.

BROITMAN, Claudia, Horacio ITZCOVICH y María Emilia QUARANTA

2003 «La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad». *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 6, n.º 1, pp. 5-6. Buenos Aires: marzo.

BURRONI, Esther

2002 *Resolución de problemas*. Artículo entregado en la VI Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur, realizada en Buenos Aires, julio.

CASAS, A.

2005 *Álgebra recreativa*. Bogotá: Editorial Magisterio.

CENTENO, J.

1988 *Números decimales: ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.

COCKCROFT, W. H.

1985 *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid: MEC.

CROWLEY, Mary L.

2004 «El Modelo Van Hiele de desarrollo de pensamiento geométrico». En: <http://www.hemerodigital.unam.mx/ANUIES/upn/vol13/sec_84.html>.

CUETO, Santiago, Cecilia RAMÍREZ, Juan LEÓN y Óscar PAIN

2003 *Oportunidades de aprendizaje y rendimiento en matemática en una muestra de estudiantes de sexto grado de primaria de Lima*. Documento de Trabajo 43. Lima: Grupo de Análisis para el Desarrollo (GRADE).

DIENES, Zoltan y E. W. GOLDING

1970 *Los primeros pasos en matemática. Nº 1: Lógica y juegos lógicos*. Barcelona: Teide.

ESPINOSA, Giuliana y Alberto TORREBLANCA

2003 *Cómo rinden los estudiantes peruanos en Comunicación y Matemática: resultados de la Evaluación Nacional 2001. Informe descriptivo*. Documento de Trabajo 1. Lima: Ministerio de Educación (MED) / Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC). Lima: MED.

GAITA, Cecilia, Norma RUBIO, Olimpia CASTRO y Miguel CANDELA
2004 *Lógico matemática 2*. Lima: MED.

GARCÍA CRUZ, Juan
s. f. «La didáctica de las matemáticas: una visión general». En Red Telemática Educativa Europea: <http://nti.educa.rcanaria.es/rtee/rtee.htm>.

GEISSLER, E., J. SIEBER, H. STARKE y A. WOLF
1981 *Metodología de la enseñanza matemática*. La Habana: Pueblo y Educación.

GIL, P. y M. DE GUZMÁN
1993 *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*. Madrid: Popular.

GODINO, Juan
2004 «Didáctica de la matemática para maestros». En: <http://ugr.es/local/godino/edumat-maestros/>.

GÓMEZ, P. y V. M. MESA
1996 *Situaciones problemáticas de precálculo*. México, D. F.: Una Empresa Docente / Iberoamérica.

HAMBLETON, Ronald K.
2001 «Setting performance standards on educational assessments and criteria for evaluating the process» (cap. IV). En Gregory J. Cizek (ed.), *Setting Performance Standards: Concepts, Methods, and Perspectives*. Mahway, N. J.: Lawrence Erlbaum.

HERNÁNDEZ, H., R. DELGADO y B. FERNÁNDEZ
1997 *Cuestiones de didáctica de la matemática. Conceptos y procedimientos en la educación polimodal y superior*. Rosario: Homo Sapiens.

HERSHKOWITZ, R.
1990 «Psychological aspects of learning Geometry». En O. Nescher y J. Kirkpatrick (eds.), *Mathematics and Cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.

JAIME, A., F. CHAPA y A. GUTIÉRREZ
1992 «Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de E. G. B.». *Epsilón*, nº 23, pp. 49-62.

KAMII, Constance
1956 *Reinventando la Aritmética II*. Madrid: Visor.
1994a *El niño reinventa la Aritmética*. Madrid: Aprendizaje Visor.
1994b *Reinventando la Aritmética III: Implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Aprendizaje Visor.

KLINE, Morris
1984 *El fracaso de la Matemática Moderna*. Madrid: Siglo XXI. [Versión en español de *Why Johnny can't add?* Princeton: Princeton University Press, 1945.]
2000 *Matemática: La pérdida de la certidumbre*. México, D. F.: Siglo XXI.

KOELLNER-CLARK, Karen
2003 «Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem». *School Science and Mathematics Association*, vol. 103, cap. 2, p. 92.

LERNER, D.
1992 *La matemática en la escuela aquí y ahora*. Buenos Aires: Aique.

LLINARES, S. y M. V. SÁNCHEZ
1998 *Fracciones*. Madrid: Síntesis.
1990 *Teoría y práctica en educación matemática*. Sevilla: Alfar.

LLINARES, S., L. SANTALÓ, M. V. SÁNCHEZ, A. TAIBO y A. GARCÍA-HOZ
1994 *La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia. Tratado de educación personalizada*. Madrid: RIALP.

MASON, J., L. BURTON y K. STACEY
1989 *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor / MEC.

MAZA, C.
1989 *Sumar y Restar. El proceso de enseñanza / aprendizaje de la suma y de la resta*. Madrid: Aprendizaje Visor.
1991 *Multiplicación y división a través de la resolución de problemas*. Madrid: Visor.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN (MED)
2000a *Estructura Curricular Básica de Educación Primaria de Menores Primer Ciclo*. Lima: MED.
2000b *Estructura Curricular Básica de Educación Primaria de Menores Tercer Ciclo*. Lima: MED.
2003 *Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria de Menores*. Lima: MED.
2005a *Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular. Proceso de articulación*. (Documento preliminar.) Lima: MED / Dirección Nacional de Educación Inicial y Primaria (DINEIP) / Dirección Nacional de Educación Secundaria y Superior Tecnológica (DINESST).
2005b *Marco de trabajo de las pruebas de rendimiento.* En <http://www.minedu.gob.pe/umc/2004/marctrab/MarcTranPruebEN2004.pdf.pp 71-121>.

MIRANDA, A., C. FORTES y M. GIL
2000 *Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Un enfoque evolutivo*. Málaga: Aljibe.

MONTANÉ, A.
2003 *Cómo rinden los estudiantes peruanos en Comunicación y Matemática: resultados de la Evaluación Nacional 2001. Sexto grado de primaria. Informe Pedagógico*. Documento de Trabajo 3. Lima: MED / UMC.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM)
1989 *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM. [Existe versión en español: *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales, 1991.]
2000 *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Nueva York: NCTM.

NESHER, P.
1982 «Levels of description in the analysis of addition and substraction word problems». En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (eds.), *Addition and Substraction: A Cognitive Perspective*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum.

ORTON, A.
1990 *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Morata / MEC.

PALACIO PEÑA, Joaquín
2003 *Didáctica de la Matemática: Búsqueda de relaciones y contextualización de problemas*. Lima: Fondo Editorial del Pedagógico San Marcos.

PALOMINO, David
2004 *El aprendizaje de la medición. Análisis de las pruebas de material concreto aplicadas en la Evaluación Nacional 2001 a alumnos peruanos de cuarto y sexto grados de primaria.* Documento de Trabajo 7. Lima: MED / UMC.

PENA, M.
2003 *El problema: Sumar, restar, multiplicar y dividir. Las estructuras aditiva y multiplicativa. 300 problemas para niños de 6 a 12 años*. Rosario: Homo Sapiens.

POLYA, G.
1965 *Cómo plantear y resolver problemas*. México, D. F.: Trillas. [Versión en español de *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press, 1945.]

PUIG, L.
1996 *Elementos de resolución de problemas*. Colección Mathema. Granada: Comares.

PUIG, L. y F. CERDÁN
1988 *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

RILEY, M., J. GREEN y J. HELLER
1983 «Development of children's problem solving ability in arithmetic». En H. Ginsburg (ed.), *The Development of Mathematical Thinking*. Nueva York: Academic Press.

RIVAS, Francisco y Francisco ALCANTUD
1989 *La evaluación criterial en la educación primaria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia / Centro de Investigación y Documentación Educativa (CIDE).

ROSS, Sharon
1986 *The development of childrens place-value numeration concepts in grade two through five*. Ponencia presentada a la asamblea anual de la American Educational Research Association realizada en San Francisco, EE. UU, abril. (ERIC Document Reproduction Service Nº ED 273 482.)

ROSS, Sharon y Elisa SUNFLOWER
s. f. *Place-Value: Problem-Solving and Written Assesment. Using Digit-Correspondence Tasks*. Documento presentado a la Reunión de la NCTM de San Diego.

SAMPER DE CAICEDO, Carmen, Leonor CAMARGO y Cecilia LEGUIZAMÓN
2002 «Una experiencia en el aula en la básica secundaria: conceptualización del KUID», pp. 391-427. En *Memorias del XIII Encuentro de Geometría y I de Aritmética*. Bogotá (Colombia).

SANTOS TRIGO, Luz M.
1992 «Resolución de problemas: el trabajo de Alan Schoenfeld. Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas». *Educación Matemática*, vol. 4, n.º 2, pp. 16-24. México, D.F.: Iberoamérica.

1996 «Análisis de algunos métodos que emplean los estudiantes al resolver problemas matemáticos con varias formas de solución». *Educación Matemática*, vol. 8, n.º 2, pp. 57-69. México, D.F.: Iberoamérica.

SANTOS TRIGO, Luz M. y Ernesto SÁNCHEZ S.
1996 *Perspectivas en educación matemática*. México, D. F.: GEI.

SANTOS TRIGO, Luz M. y A. SEPÚLVEDA
2003 «Hacia la construcción de un ambiente de instrucción basado en la resolución de problemas». En *Formación del profesorado e investigación en educación matemática*, pp. 323–341. México, D. F.: Universidad de La Laguna.

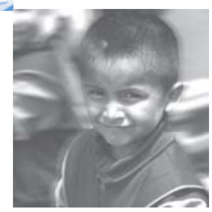
SHELL CENTRE FOR MATHEMATICAL EDUCATION
1990 *El lenguaje de funciones y gráficas.* (Traducción de Félix Alayo.) Ministerio de Educación y Ciencia / Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

STEEN, Lynn Arthur (ed.)
1998 *La enseñanza agradable de la Matemática*. México, D. F.: MSEB / Limusa.

VERGNAUD, Gérard
1987 «Multiplicative Structures». En James Hiebert y Merlyn Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, pp. 141-161. Kegworth, Reino Unido: Shell Centre for Mathematical Education.

VINNER, S.
1981 «The role of definitions in teaching and learning of Mathematics». En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

WU, Hung-Hsi
1999 «Basic skills versus conceptual understanding. A Bogus dichotomy in Mathematics education». *American Educator*. American Federation of Teachers. En: <http://www.aft.org/pubs-reports/american_educator/fall99/wu.pdf>.



ANEXOS

Anexo 1

Clasificacion de los problemas aritméticos aditivos (Vergnaud, 1987)

Problemas de combinación

Los problemas de combinación son problemas verbales en los se describe una relación entre conjuntos que responde al esquema parte – parte – todo. La pregunta del problema puede versar acerca del todo o acerca de la parte.

	Parte	Parte	Todo
COMBINACIÓN 1	d	d	i
COMBINACIÓN 2	d	i	d

d: dato, i: incógnita.

Problemas de cambio

Los problemas clasificados como de cambio son problemas verbales en los que las relaciones lógicas aditivas están dentro de una secuencia temporal de sucesos; aquí se distinguen claramente tres momentos en los que una cantidad es sometida a una acción directa o implícita que la modifica.

En el problema se presentan tres cantidades: la inicial, la final y la de cambio; la variación puede darse aumentando la cantidad o disminuyéndola. Considerando estas variables tendremos seis tipos de problemas de cambio.

	Inicial	Cambio	Final	Crecer	Decrecer
CAMBIO 1	d	d	i	*	
CAMBIO 2	d	d	i		*
CAMBIO 3	d	i	d	*	
CAMBIO 4	d	i	d		*
CAMBIO 5	i	d	d	*	
CAMBIO 6	i	d	d		*

d: dato, i: incógnita.

Problemas de comparación

Los problemas de comparación son problemas verbales que presentan una relación estática de comparación entre dos cantidades.

Las cantidades presentes en el problema se denominan cantidades de referencia comparada y diferencia, la cantidad comparada aparece a la izquierda de las expresiones «más que» o «menos que» y la cantidad de referencia, a su derecha.

	Referencia	Comparada	Diferencia	Más	Menos
COMPARACIÓN	1	d	d	i	*
COMPARACIÓN	2	d	d	i	*
COMPARACIÓN	3	d	i	d	*
COMPARACIÓN	4	d	i	d	*
COMPARACIÓN	5	i	d	d	*
COMPARACIÓN	6	i	d	d	*

d: dato, i: incógnita.

Problemas de igualación

Los problemas de igualación son problemas verbales en los que la relación de comparación entre dos cantidades que aparecen se establece por medio del comparativo de igualdad «tantos como».

	Referencia	Comparada	Diferencia	Más	Menos
IGUALACIÓN 1	d	d	i	*	
IGUALACIÓN 2	d	d	i		*
IGUALACIÓN 3	d	i	d	*	
IGUALACIÓN 4	d	i	d		*
IGUALACIÓN 5	i	d	d	*	
IGUALACIÓN 6	i	d	d		*

d: dato, i: incógnita.

Anexo 2

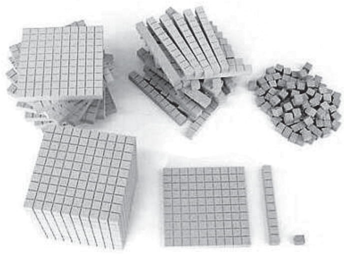
Glosario

ALGORITMO

Conjunto ordenado y finito de pasos para ejecutar determinadas actividades con un objeto conocido; por ejemplo, calcular una suma, resolver una ecuación, trazar la bisectriz de un ángulo, etc.

BLOQUES BASE 10 (BLOQUES MULTIBASE)

Material concreto que consta de cubos pequeños, barras y cubos que representan unidades, decenas, centenas y millares. Se utilizan generalmente en el trabajo con el sistema de numeración decimal.



CONJETURA MATEMÁTICA

Afirmación de tipo matemático que propone un principio, patrones o resultado a partir de indicios y observaciones. Una conjetura matemática puede ser verdadera, falsa o indeterminada, para establecer su valor de verdad se deben construir cadenas lógicas deductivas sobre la base de axiomas.

DEFINICIÓN CONCEPTUAL

Es una forma verbal utilizada para caracterizar un concepto que puede ser informal o formal.

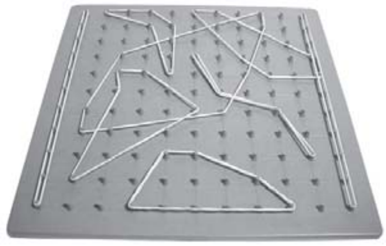
DEMANDA COGNITIVA

Nivel de complejidad que demanda una tarea a partir del tipo de habilidad cognitiva que se exige al estudiante. Puede ubicarse en el nivel inferior en el caso de tareas de baja demanda cognitiva asociadas a las actividades reproductivas (copiar, repetir, evocar una definición, aplicar un algoritmo, etc.); o en un nivel de demanda cognitiva media con actividades que requieren realizar conexiones (establecer la relación entre dos nociones, aplicar procedimientos o estrategias adaptándolas a problemas rutinarios de acuerdo con la situación planteada); o tratarse de actividades de alta demanda cognitiva (de reflexión) tales como resolver un problema no rutinario, diseñar o elaborar una propuesta, argumentar para sustentar una afirmación a partir de premisas lógicas, etc.

ESTIMAR

Es la acción de dar valor a una característica cuantificable de un objeto matemático sobre la base de experiencias anteriores. Es el valor propuesto a «simple vista» de una determinada cualidad cuantificable de un objeto matemático. Para el caso de la medición, estimar es el proceso de obtener la medida de alguno de los atributos de un objeto, sin la ayuda de instrumentos, a través de juicios subjetivos.

Geoplano



Material didáctico formado por una superficie que dispone de un conjunto de clavos (que representan puntos) organizados y espaciados de modo que, uniéndolos mediante ligas, es posible formar figuras geométricas como polígonos o dibujos de sólidos.

Heurística

Es *el arte y la ciencia del descubrimiento y de la invención*. Según Polya, es resolver problemas mediante la creatividad y el pensamiento lateral o pensamiento divergente. La heurística matemática se encarga de estudiar los procesos típicamente útiles en la resolución de problemas; usualmente, propone estrategias heurísticas que son vías que guían el descubrimiento.

Imagen conceptual

Es la estructura cognitiva total que está asociada con el concepto, la cual incluye representaciones mentales y propiedades asociadas.

Metacognición

Es la reflexión acerca de nuestros propios procesos de pensamiento. Designa la serie de operaciones, actividades y funciones cognoscitivas llevadas a cabo por una persona mediante un conjunto interiorizado de mecanismos intelectuales que le permiten recabar, producir y evaluar información.

Modelar

Es asociar un objeto no matemático con un objeto matemático que represente determinados comportamientos, relaciones o características suyos.

Pensamiento variacional

Tipo de pensamiento matemático referido a los cambios que se producen entre variables dependientes, está asociado al estudio de las funciones matemáticas.

Problemas de estructura aditiva

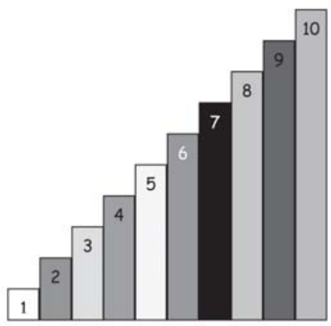
Problemas matemáticos cuya solución requiere hacer uso de operaciones de adición o sustracción.

Recodificar

Es transferir la denominación de un mismo objeto de un lenguaje matemático a otro. Es expresar el mismo tipo de objeto de diferente forma.

Regletas de Cuissenaire

Las regletas de Cuissenaire son un material didáctico destinado básicamente a que los estudiantes aprendan la composición y descomposición de los números y la relación de orden, y se inicien en las actividades de cálculo aritmético, todo ello sobre una base manipulativa. El material consta de un conjunto de regletas de diez tamaños y colores diferentes cuya longitud va de 1 a 10 cm. Cada regleta equivale a un número determinado.



Representación icónica (Sistema)

Representación gráfica de un número mediante dibujos de objetos agrupados en unidades, decenas o centenas, según sea el caso.

Representación simbólica (Sistema)

Representación en el sistema de notación decimal.

Representación tabular

Información presentada en cuadros o tablas.