La resolución de problemas de Matemáticas

en la formación inicial de profesores de Primaria

Colección manuales uex - 98

Lorenzo J. Blanco Nieto
Janeth A. Cárdenas Lizarazo
Ana Caballero Carrasco

98

ÍNDICE

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS
EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE PRIMARIA

MANUALES UEX

98

ÍNDICE

LORENZO J. BLANCO NIETO
JANETH A. CÁRDENAS LIZARAZO
ANA CABALLERO CARRASCO

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE PRIMARIA

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

2015

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Edita:

Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones
C/ Caldereros, 2 - Planta 2ª. 10071 Cáceres (España)
Tel. 927 257 041 ; Fax 927 257 046
E-mail: publicac@unex.es
http://www.unex.es/publicaciones

ISSN 1135-870-X
ISBN 978-84-606-9760-2

Maquetación: Control P - Cáceres - 927 233 223 - www.control-p.eu

ÍNDICE GENERAL

ÍN
DI
CE

ÍN
DI
CE

PRÓLOGO

El libro "la resolución de problemas de matemáticas en la formación de matemáticas inicial de profesores de primaria" de Lorenzo J. Blanco Nieto, Janeth A. Cárdenas Lizarazo y Ana Caballero Carrasco representa una contribución importante en la educación matemática y en particular en el área de la resolución de problemas como propuesta para estructurar y promover el aprendizaje de los estudiantes. Incluye 14 capítulos cuyos contenidos reflejan el trabajo de investigación y práctica del grupo coordinado por Lorenzo Blanco en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Extremadura. El contenido del libro es variado y aborda los temas fundamentales relacionados con lo que significa centrar la atención en la resolución de problemas como elemento importante en el currículum y en los escenarios de enseñanza.

El material está dirigido a profesores de matemáticas en formación, pero también resulta una fuente importante para profesores en servicio ya que ofrece una ruta clara para comprender las distintas interpretaciones de la resolución de problemas en la práctica de la enseñanza. Por supuesto, un tema destacado en el libro es la relación los aspectos cognitivos y afectivos que permean el comportamiento y la actuación de los estudiantes o individuos en el desarrollo del pensamiento matemático. Así, las creencias, el afecto, las emociones y actitudes son constructos que se abordan de manera recurrente en varios capítulos y no solamente se exhiben los resultados de las investigaciones que los autores han generado; sino también una discusión amplia de estos temas desde una óptica internacional.

El capítulo 3 incluye un cuestionario que permite capturar información relacionada con el papel del dominio afectivo en el desarrollo cognitivo de los estudiantes en la resolución de problemas. Un aspecto crucial, sin duda, ya que muchas de las creencias y actitudes que los estudiantes exhiben en la resolución de problemas reflejan valores culturales y sociales. Por ejemplo, en las culturas occidentales existe la creencia de aceptar que las habilidades o talento matemático son innatos y por lo tanto, se justifica que un estudiante, que no heredó ese gen matemático, experimente serias dificultades al comprender un concepto o resolver un problema. En contraste, la cultura oriental relacionan el trabajo y la disciplina del estudiante con el desarrollo de habilidades matemáticas y por lo tanto el talento matemático es producto del trabajo y esfuerzo del individuo. En esta perspectiva, toda propuesta didáctica debe contemplar caminos para generar en los estudiantes una disposición clara para incorporar las orientaciones, creencias y actitudes hacia la matemática y la resolución de problemas.

En varios capítulos se aborda la importancia de los problemas en la resolución de problemas y se presenta una discusión acerca de los distintos contextos y formatos que ayudan a que los estudiantes se enganchen en los procesos de resolución y reflexión matemática. El lugar de la resolución de problemas en el currículum depende no solo del significado del término problema; sino también de la posición o punto de vista de la matemática misma.

El libro ofrece también ejemplos de tareas, problemas o actividades que son útiles para aquellos interesados en extender las investigaciones relacionadas; además, el lector mismo puede proponer y discutir sus propias maneras de resolverlos. Por ejemplo, un problema propuesto en el capítulo 9 que involucra la figura de un cuadrado y un radio (la mitad de una diagonal) ilustra la aplicación de un modelo de resolución donde se destacan las diferentes relaciones y estrategias que emergen durante el proceso de solución. En el capítulo 10 se presentan diversas maneras de incorporar el uso de tecnologías digitales en la resolución de problemas. El capítulo 14 aborda el problema de la evaluación del proceso de resolución de problemas y se presentan rúbricas, criterios y maneras de evaluar y valorar el trabajo que muestran los estudiantes al resolver los problemas.

Cada capítulo incluye una lista de referencias básicas que el lector puede tomar como guía para continuar y extender la discusión de los temas que se abordan. Sin duda, el libro en su conjunto es un material valioso que será un referente importante en la educación matemática y la resolución de problemas.

Luz Manuel Santos Trigo
Cinvestav-IPN. Diciembre, 2014

CAPÍTULO 1
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS:
ASPECTOS COGNITIVOS Y AFECTIVOS

Lorenzo J. Blanco Nieto

La Resolución de Problemas ha sido considerada desde siempre como el foco en las matemáticas (Arcavi y Friedlander, 2007). A este respecto, Royo (1953) en referencia al papel de la Resolución de Problemas en la escuela, señalaba:

> Tienen los problemas tal importancia, que hay quien se pregunta si la parte principal del estudio matemático no debe ser la solución del problema en lugar del estudio del libro de texto. Hacer de los problemas un suplemento indica un fallo en la verdadera función del trabajo matemático. Si concedemos que el 'poder' y no el 'saber', el 'pensar' y no el 'memorizar' son los aspectos beneficiosos de la matemática, la importancia de los problemas es indudable (Royo, 1953, p. 253)

Sin embargo, es a partir de la década de los 80, cuando se insiste en que la Resolución de Problemas debe ser el eje de la enseñanza de la matemática escolar (NCTM, 1980). Muchas fueron las aportaciones desde esa época, que nos llevaron a asumir que la Resolución de problemas como tarea compleja, ofrece una posibilidad para organizar la diversidad de niveles existentes en el aula, es un marco ideal para la construcción de aprendizajes significativos y fomentar el gusto por las matemáticas (Carrillo, 1995).

En España se aceptó esta perspectiva en la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo Español de 1990, y desde entonces se ha mantenido en los diferentes textos curriculares.

1. ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS, RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y DOMINIO AFECTIVO

La resolución de problemas de matemáticas (RPM) ha sido considerada en los últimos 30 años como una actividad importante en el aprendizaje de las matemáticas, incrementando su presencia en los currículos (Castro, 2008; Puig, 2008; Santos, 2007) sugiriéndose que sea uno de los ejes principales de la actividad matemática y el soporte principal del aprendizaje matemático. De esta manera, debe considerarse como eje vertebrador del contenido matemático, ya que pone de manifiesto la capacidad de análisis, comprensión, razonamiento y aplicación. Además, se propone como un contenido específico (Blanco y Cárdenas, 2013; ver capítulo 2) y aparece como una competencia básica que los alumnos deben adquirir. Son numerosas las referencias para los profesores que podemos encontrar en los documentos curriculares sobre aspectos específicos y generales relacionados con la RPM.

Diferentes informes internacionales sobre educación matemática, como los Informes PISA del 2003, 2006, 2009 y 2012 y el informe TIMSS del 2011, muestran los pobres resultados obtenidos en matemáticas y, específicamente, en la resolución de problemas. Ello, ha sido un motivo para poner de manifiesto la importancia de la resolución de problemas de matemáticas en la enseñanza obligatoria. Estos resultados confirman la idea de Castro, (2008) y Santos, (2008) quienes insisten en que los intentos realizados para enseñar a los alumnos, de primaria y secundaria, estrategias generales de resolución de problemas no han tenido éxito. Simultáneamente, parece importante recordar la falta de atención de los libros de texto en el tratamiento de las heurísticas y estrategias generales para resolver problemas (Pino y Blanco, 2008; Schoenfeld, 2007) y la falta de referencia de los profesores de secundaria para trabajar y evaluar específicamente en el aula los diferentes heurísticos (Cárdenas, 2014) como se sugiere en los diferentes currículos de matemáticas.

Uno de los aspectos que actualmente se enfatiza y asume en relación a la educación matemática en los currículos es la influencia de la afectividad en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Y, en particular, en la resolución de problema. Ya, en la década de los 80 algunos autores como Charles y Lester (1982) señalaban que "el resolutor de problemas tiene que tener suficiente motivación y falta de stress y/o ansiedad para permitirle llegar a la solución" (p. 10). En su trabajo, reconocían que factores cognitivos, de experiencia y los afectivos influencian el proceso de resolución de problema de matemáticas. Entre los factores afectivos señalaban explícitamente el interés, la motivación, la presión, la ansiedad, el stress y la perseverancia.

En esta época, McLeod (1989, 1992) mostró que los procesos cognitivos implicados en la Resolución de Problemas de Matemáticas son susceptibles a la influencia del dominio afectivo en tres áreas: creencias, actitudes y emociones. Estos descriptores han sido revisados en diferentes ocasiones (Blanco, 2012; Gil, Blanco y Guerrero, 2005; Gómez-Chacón, 2000, 2010).

2. FORMACIÓN INICIAL DE LOS PROFESORES DE PRIMARIA, DOMINIO AFECTIVO (CREENCIAS, ACTITUDES Y EMOCIONES) Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La investigación sobre el dominio afectivo se ha trasladado, también, al campo de la formación de profesores y de su desarrollo profesional, al considerar que los profesores en su actuación en el aula no pueden disociar ambos aspectos cuando se enfrenta a una actividad concreta y con alumnos de un nivel específico.

En los últimos años se han incrementado en España los trabajos sobre el dominio afectivo en relación a las matemáticas (Hidalgo, Maroto, Ortega y Palacios, 2013; Pérez-Tyteca, Monje y Castro, 2013) y, específicamente, relacionados con los estudiantes para maestro (Caballero, Guerrero y Blanco 2008; Estrada, 2007; Estrada, Batanero y Fortuny, 2004; Hernández, Palarea y Socas, 2001; Ruiz, 2002; Tyteca y Castro, 2007; Blanco, Guerrero y Caballero, 2013; Caballero, 2013), mostrando que, en general, los futuros profesores de primaria muestran una actitud negativa hacia las matemáticas.

2.1. Influencia de las creencias

Se acepta que cuando los profesores en formación inicial acceden a los centros de formación traen como consecuencia de su estancia en la enseñanza obligatoria concepciones y creencias sobre las matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas derivadas de su propia experiencia escolar (Blanco, 2004). Es decir, en su etapa como alumno en primaria y secundaria, aprenden conocimiento de matemáticas y, además, adquieren una visión particular sobre su enseñanza y aprendizaje y de sí mismo en relación con las matemáticas. A este respecto, la investigación diferencia entre creencias acerca de la matemática como objeto, y otras creencias sobre su enseñanza y aprendizaje y acerca de uno mismo como aprendiz relacionadas con el autoconcepto, la autoconfianza, expectativas de control, ... que estarían relacionadas con el dominio afectivo (ver capítulo 3).

Aún, veinte años después, sigue siendo válida la aportación de Llinares y Sánchez (1996) quienes señalaban que los estudiantes para profesor han adquirido una cultura escolar tecnológica que condiciona su manera de abordar las tareas matemáticas y su aprendizaje como futuros profesores y

> …cuyas características se pueden describir como:
>
> – La enseñanza consiste en exponer y proporcionar una determinada información
>
> – el aprendizaje se consigue mediante la repetición
>
> – el rol del profesor consiste en presentar de manera clara y concisa los procedimientos, etc.
>
> El rol del alumno consiste en atender y repetir los diferentes procedimientos (Llinares y Sánchez, 1996, p. 93).

Más recientemente, Szydlik, Szydlik y Benson, (2003) indican que "los profesores en formación de primaria tienden a ver las matemáticas como una disciplina autoritaria, y creen que hacer matemáticas significa aplicar fórmulas y procesos memorizados de los ejercicios de los libros de texto" (Szydlik, Szydlik y Benson, 2003, p. 254).

Por nuestra parte, asumimos que los estudiantes para maestro de primaria (EMP) tienen una idea muy tradicional de los problemas de matemáticas que no coincide con las sugerencias de las actuales propuestas curriculares (Blanco, 1997, 2004; Blanco, et al., 2013; Caballero, 2013; Johnson, 2008). Igualmente, hemos observado una contradicción entre su experiencia personal, que juzgan negativa y monótona, y su concepción de las matemáticas ligadas al razonamiento y rigor (Blanco, 2004). Al mismo tiempo, los EMP consideran la RPM como un procedimiento mecánico y memorístico, tienen escasos recursos para representar y analizar los problemas, no buscan distintas estrategias o métodos para su resolución y no hacen uso de las distintas indicaciones que se le sugieren para ello (Blanco, 1997, 2004; Córcoles y Valls, 2006).

Además, estas creencias, son muy fuertes y resistentes a los cambios, y constituyen una especie de lente o filtro desde el que interpretan su propio proceso formativo y orientan sus experiencias y conductas docentes (Chapman, 2000), limitando sus posibilidades de acción y comprensión. Las creencias conforman una perspectiva desde la cual cada persona se aproxima al mundo de las matemáticas y pueden determinar cómo se abordarán los problemas, los procedimientos que se utilizarán o se evitarán, y el tiempo y la intensidad que se pondrá en la tarea (Schoenfeld, 1992). Consecuentemente, estas creencias se han de tener en cuenta en la formación y, si fuese necesario, influir en el cambio de las mismas y en la generación de otras nuevas.

A este respecto, convendrá tener en cuenta que las creencias que más influyen en la motivación y el rendimiento de los alumnos son las percepciones de los alumnos sobre sí mismos en relación con las matemáticas (Kloosterman, 2002; Vanayan, White, Yuen y Teper, 1997). La autoconfianza en matemáticas es un importante indicador de la valoración positiva de los aprendices para estudiarlas, así como también de su participación activa y regulación en el proceso de aprendizaje. El alumnado que cree que las matemáticas son sólo para los que tienen talento matemático y que están basadas en procedimientos de solución infalible y mecánicos, tienen menos confianza en sí mismos en las situaciones de aprendizaje que las personas que no piensan así. La confianza en la disposición y la habilidad de querer aprender matemáticas tiene un papel esencial para el alumnado de cara a sus logros matemáticos (McLeod, 1992; Reyes, 1984).

Hernández, et al. (2001), y Caballero (2013) señalan que los EMP no se consideran capaces y hábiles como resolutores de problemas, experimentando la gran mayoría inseguridad, desesperación y nerviosismo, lo que les llevan al atasco o bloqueo ante la tarea y a considerarse incompetentes en la resolución de problemas. Una diferencia importante entre los que tienen éxito al resolver problemas y los que no lo tienen estriba en sus creencias sobre la resolución de problemas de matemáticas, sobre sí mismo como resolutores y sobre la forma de enfocar la resolución (NCTM, 2000).

2.2. Influencia de las actitudes

Lo que el alumno cree sobre las matemáticas influye en los sentimientos que afloran hacia la materia y le predispone a actuar de modo consecuente. Esto es, si un alumno posee una creencia negativa sobre las matemáticas o sobre su enseñanza, tenderá a mostrar sentimientos adversos hacia las tareas relacionadas con dicha materia, lo que le llevará a conductas de evitación o de rechazo de las mismas. Esta predisposición que determina las intenciones personales y que influye en su comportamiento es lo que llamamos actitudes.

Podemos distinguir entre actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas. Las actitudes matemáticas, tienen un marcado componente cognitivo y se refieren a las capacidades cognitivas generales que son importantes en tareas matemáticas. Estudios en España muestran las pocas actitudes matemáticas de los EMP sobre aspectos relacionados con la resolución de problemas (Blanco, 1997, 2004; Córcoles y Valls, 2006; Puig, 1996; Valverde y Castro, 2009).

En las *actitudes hacia las matemáticas* predomina el componente afectivo y se manifiestan en el interés, la satisfacción o la curiosidad o bien en el rechazo, la negación, la frustración o la evitación de la tarea matemática. El interés y las actitudes positivas hacia la ciencia y las matemáticas disminuyen con la edad, especialmente durante la educación secundaria (Hidalgo, Maroto, Ortega y Palacios, 2008).

2.3. Influencia de las emociones

McLeod (1992) entiende las emociones como las respuestas afectivas caracterizadas por una alta intensidad y activación fisiológica que experimentan los alumnos ante las matemáticas. Los estudios sobre la emoción han versado sobre el papel de la ansiedad, la frustración y sus consecuencias en los logros matemáticos señalando que una de las dificultades de la educación matemática es ver su enseñanza como algo esencialmente cognitivo desligado del campo de las emociones (De Bellis y Goldin, 2006).

Las emociones aparecen como respuesta a un suceso, interno o externo, que tiene una carga de significado positiva o negativa para la persona. Así, al afrontar una tarea matemática surgen dificultades que, en ocasiones, llevan a la frustración de las expectativas personales, provocando la aparición de valoraciones de los alumnos que, en el caso de las matemáticas, son mayoritariamente negativas. A este respecto, diferentes autores coinciden en señalar que la ansiedad interacciona de forma negativa con los procesos cognitivos y motivacionales y por tanto en el rendimiento general del estudiante (De Bellis y Golding, 2006; Salcedo et al, 2003; Zakaria y Nordim, 2008). Hidalgo et al (2008) indican que la relación entre niveles de ansiedad hacia las matemáticas y las notas obtenidas por los alumnos al final de curso es alta e inversa. Esta correlación se mantiene al comparar los niveles de ansiedad y actitudes positivas hacia las matemáticas. La relación entre ansiedad y educación matemática se ha trasladado, asimismo, al nivel de los estudiantes para maestro, donde ya hay una importante literatura (Peker, 2009).

Otros trabajos establecen relaciones entre ansiedad y autoconfianza. Así, los alumnos con más ansiedad matemática presentan menor confianza en sus habilidades matemáticas y como aprendices de matemáticas, lo que correlaciona ambos constructos de forma negativa (Gil, Blanco y Guerrero, 2006; Isiksal, Curran, Koc y Askun, 2009). Otros autores señalan que las emociones pueden llevar al abandono, a la evitación de la tarea y a protegerse de alguna medida ante ellas (Salcedo et al., 2003). Además, Socas (1997) afirma que:

> muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las matemáticas están asociadas a la ansiedad y el miedo. La ansiedad por acabar una tarea, el miedo al fracaso, a la equivocación, etc. generan bloqueos de origen afectivo que repercuten en la actividad matemática de los alumnos (p.135).

De estas consideraciones se infiere que los estudiantes deben asumir la actividad matemática como un desafío. En particular, si controlan los niveles de ansiedad, su acción tendrá un efecto positivo sobre el aprendizaje (Guerrero y Blanco, 2004).

En relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se pueden indicar diferentes momentos en los que la relación entre emociones y procesos cognitivos se hace visible: los momentos de comprensión de la estructura de la actividad o de recuperación de la información cuando se propone una tarea matemática; los períodos para diseñar estrategias de solución de problemas, incluidos el recuerdo de fórmulas o procedimientos mecánicos; o los proceso de control y regulación del propio aprendizaje unido a una metodología sobre la enseñanza de las matemáticas que rechazan.

Por lo tanto, estudiar las creencias, actitudes y emociones de los estudiantes para profesores, cuando abordan la resolución de problemas, parece pertinente. Para Foss y Kleinsasser (1996) la falta de reflexión sobre estos aspectos es una de las causas por la que persisten en los estudiantes para profesores de primaria concepciones y actitudes inadecuadas. Y ello, a pesar de su paso por los centros de formación inicial, donde no reconceptualizan su papel como profesores de primaria. Autores como Chapman (2000), Malinsky, Ross, Pannells y McJunkin (2006) y Uusimaki y Nason (2004) apuntan que el origen de las creencias negativas de los profesores en formación inicial podría atribuirse a sus previas experiencias escolares, como las experiencias como estudiantes de matemáticas y, al efecto, de sus profesores y de los programas de formación de profesores, desarrollados con metodologías muy tradicionales.

3. INTEGRACIÓN ENTRE LO AFECTIVO Y LO COGNITIVO EN LOS PROGRAMAS DE FORMACIÓN INICIAL

Si a partir de las referencias anteriores, asumimos que las creencias, actitudes y emociones influyen en el conocimiento, y que el conocimiento influye en los tres aspectos señalados, es evidente que tendremos que considerar en nuestro trabajo docente e investigador la relación entre lo cognitivo y lo afectivo, y buscar elementos de integración de ambos aspectos.

Esta relación entre lo afectivo y lo cognitivo se ha trasladado, también, al estudio con profesores y, así, podemos encontrar investigaciones que analizan cómo la conducta de los profesores, sus creencias y actitudes acerca de sí mismos y hacia las matemáticas influyen en el comportamiento y en el rendimiento de sus alumnos y en las imágenes mentales que éstos van elaborando sobre sí mismos.

Las concepciones y valores de los profesores determinan la imagen de las matemáticas en clase, y condicionará el tipo de relación profesor-alumno (Ernest, 2000). Así, las concepciones influencian las actitudes y ambas influencian la conducta del profesor (Ernest, 2000) y el aprendizaje de los alumnos (Georgiadou y Potari, 1999). Parece obvio que, consecuentemente, los factores afectivos se consideren en los programas de formación inicial de profesores dentro de un proceso de discusión y reflexión (Johnson, 2008; Stacey, Brownlee, Reeves y Thorpe, 2005). Y, parece evidente la necesidad y el interés por estudiar los factores afectivos y emocionales en la formación matemática de los EMP, ya que, como futuros docentes, sus creencias y emociones hacia las matemáticas influirán en el logro de sus alumnos así como en las creencias y actitudes de éstos hacia la misma.

De Bellis y Goldin (2006) y Furinghetti y Morselli (2009) recuerdan que tradicionalmente las investigaciones en resolución de problemas se han centrado, primeramente, en aspectos cognitivos, segundo en aspectos afectivos, pero pocas veces en la interacción de los aspectos cognitivos y afectivos. Sin embargo, cada vez son más los trabajos que reconocen la importancia de considerar las dimensiones afectiva y cognitiva de manera integrada en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Amato, 2004; Blanco, Caballero, Piedehierro, Guerrero, y Gómez, 2010; Caballero, 2013; Caballero, Blanco y Guerrero, 2011; Furinghetti y Morselli, 2009; Koballa y Glynn, 2007; Pino, 2013; Zan, Brown, Evans y Hannula, 2006)

Algunos autores como Furinghetti y Morselli (2009) inciden en la necesidad de desarrollar simultáneamente los factores afectivos y cognitivos en los programas de formación de profesores. A este respecto, "el papel de la educación de profesores es desarrollar en los profesores noveles confianza y competencia como usuarios de las matemáticas en orden a mejorar su enseñanza de las matemáticas" (Zevenbergen, 2004, p. 4).

Asumiendo estas recomendaciones en el departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las matemáticas de la Universidad de Extremadura hemos desarrollado dos programas de intervención sobre resolución de problemas de matemáticas con estudiantes para maestro (Blanco, et al., 2013; Caballero, 2013) y con profesores de secundaria (Pino, 2013) que integra aspectos cognitivos y afectivos.

BIBLIOGRAFÍA

— AMATO, SA. Improving student teachers' attitudes to mathematics. En Proceedings of the 28th Conference of the International, Group for the Psychology of Mathematics Education. 2004, Vol. 2, pp. 25-32.

— ARCAVI, A; FRIEDLANDER, A. Curriculum developers and problem solving: the case of Israeli elementary school projects. En *ZDM Mathematics Education*, 2007, n. 39, pp. 355-364.

— BLANCO, LJ. Concepciones y creencias sobre la resolución de problemas de estudiantes para profesores y nuevas propuestas curriculares. En revista Quadrante, 1997 Vol. 6, n. 2, pp. 45-65.

— BLANCO, LJ. Problem solving and the initial practical and theoretical education of teachers in Spain. En Mathematics Teacher Education y Development, 2004, Vol. 6, pp. 37 - 48.

— BLANCO, LJ. Influencias del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En PLANAS, N. (Coord.): Teoría, crítica y práctica de la educación matemática. Barcelona, España: Editorial Graó, 2012, pp. 171 – 185.

— BLANCO, LJ; CABALLERO, A; PIEDEHIERRO, A; GUERRERO, E; GÓMEZ, R. El dominio afectivo en la enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de investigaciones locales. En revista Campo Abierto, 2010, Vol. 29, n. 1, pp. 15-33. Recuperado de: http://revistas.ojs.es/index.php/campoabierto/article/view/251/272

— BLANCO, LJ; CÁRDENAS, JA. La Resolución de Problemas como contenido en el Currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. En revista Campo Abierto, 2013, Vol. 32, n. 1, pp. 137-156. Recuperado de: http://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1393

— BLANCO, LJ; GUERRERO, E; CABALLERO, A. Cognition and Affect in Mathematics Problem Solving with Prospective Teachers. En The Mathematics Enthusiast, 2013 - Special Issue, Vol. 10, n. 1 y 2, pp. 335 – 364. Recuperado de http://www.math.umt.edu/tmme/vol10no1and2/13-Blanco-et%20al_pp335_364.pdf

— CABALLERO, A. Diseño, Aplicación y Evaluación de un Programa de Intervención en Control Emocional y Resolución de Problemas Matemáticos para Maestros en Formación Inicial. Tesis doctoral Inédita - Universidad de Extremadura, Badajoz, España: 2013. Recuperado de: http://dehesa.unex.es:8080/xmlui/handle/10662/590.

— CABALLERO, A; BLANCO, LJ; GUERRERO, E. Problem Solving And Emotional Education In Initial Primary Teacher Education. En The Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2011, Vol. 7, n. 4, pp. 281-292. Recuperado de: http://www.ejmste.com/v7n4/EURASIA_v7n4_Caballero.pdf.

— CABALLERO, A; GUERRERO, E; BLANCO, LJ. Descripción del dominio afectivo en las Matemáticas de los estudiantes para Profesores de la Universidad de Extremadura. En revista Paradigma, 2008, Vol. XXIX, n. 2, pp. 157–171. Recuperado de: http://www.scielo.org.ve/pdf/pdg/v29n2/art09.pdf.

— CÁRDENAS, JA. La evaluación de la Resolución de Problemas en Matemáticas: concepciones y prácticas de los profesores de secundaria. Tesis Doctoral Inédita - Universidad de Extremadura. Badajoz, España: 2014. Recuperado de: http://dehesa.unex.es:8080/xmlui/handle/10662/2050.

— CARRILLO, J. La resolución de problemas en matemáticas. En revista Investigación en la Escuela, 1995, n. 25, pp. 79-86.

— CASTRO, E. Resolución de Problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En CAMACHO, M; BLANCO, LJ (Eds.): Investigación en Educación Matemática XII. España: lugar; SEIEM, 2008, pp. 113-140.

— CHAPMAN, O. Mathematics teachers' beliefs about problem solving and teaching problem solving. En CONTRERAS, LC; CARRILLO, J (Eds.): Problem Solving the begining of the 21st century: an international overview from multiple perspectives and educational levels. Huelva, España; HERGUÉ. 2000. pp. 181-206.

— CHARLES, R; LESTER, F. Teaching problem solving. What, Why, How. Palo alto, CA: Dale seymour Pu, 1982.

— CÓRCOLES, AC; VALLS, J. Debates virtuales y concepciones de estudiantes para profesores sobre resolución de problemas. En revista ZETETIKÉ, 2006, Vol. 14, n. 25, pp. 7-28.

— DEBELLIS, VA; GOLDIN, GA. Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. En Educational Studies in Mathematics, 2006, Vol. 6, n. 2, pp. 131-147.

— ERNEST, P. Los valores y la imagen de las Matemáticas: una perspectiva filosófica. En Revista UNO, 2000, n. 2, pp. 9-27.

— ESTRADA, MA. Actitudes hacia la estadística: un estudio con profesores de Educación Primaria en formación y en ejercicio. En CAMACHO, M; FLORES, P; BOLEA, P (Eds.): Investigación en Educación Matemática XI. Tenerife, España: SEIEM, 2007, pp. 121-140.

— ESTRADA, MA; BATANERO, C; FORTUNY, JM. Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. En Revista Enseñanza de las Ciencias, 2004, Vol. 22, n. 2, pp. 263 - 274.

— FOSS, DH; KLEINSASSER, RC. Preservice elementary teachers' views of pedagogical and mathematical content knowledge. En Teacher and Teaching Education, 1996, Vol. 12, n. 4, pp. 429-442.

— FURINGHETTI, F; MORSELLI, F. Every unsuccessful problem solver in unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving. En Educational Studies in Mathematics, 2009, Vol. 70, n.2, pp. 71-90.

— GEORGIADOU, B; POTARI, D. The development of prospective primary teachers' conceptions about teaching and learning mathematics in different contexts. En PHILIPPOU, G. (Ed.): Research on mathematical beliefs. MA VI-8. Proceedings Eight European Workshop, 1999, pp. 48-56.

— GIL, N; BLANCO, LJ; GUERRERO, E. El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. En Revista Unión Número, 2005, n. 2, pp. 15-32. http://www.fisem.org/descargas/2/Union_002_003.pdf. Junio de 2005.

— GIL, N; BLANCO, LJ; GUERRERO, E. El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. En Electronic Journal of Research in Educational Pychology, 2006, Vol. 4(1), n. 8, pp. 47-72. http://www.investigacion-psicopedagogica.org/revista/new/index.php?n=8.

— GÓMEZ-CHACÓN, IM. Matemática Emocional. Los Afectos en el Aprendizaje Matemático. Madrid, España: Narcea, 2000.

— GÓMEZ-CHACÓN, IM. Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En MORENO, MM; ESTRADA, A; CARRILLO, J; SIERRA, TA (Eds.): Investigación en Educación Matemática XIV. Lleida, España: SEIEM, 2010, pp. 121-140.

— GUERRERO, E; BLANCO, LJ. Diseño de un programa psicopedagógico para la intervención en los trastornos emocionales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En Revista Iberoamericana de Educación. 2004, n. 33/5. http://www.campus-oei.org/revista/psi_edu13.htm.

— HERNÁNDEZ, J; PALAREA, MM; SOCAS, MM. Análisis de las concepciones, creencias y actitudes hacia las Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de Profesores. El papel de los materiales didácticos. En SOCAS, M; CAMACHO, M; MORALES, A: Formación del profesorado e investigación en educación matemática III. Tenerife, España: Universidad de la Laguna; 2001, pp. 115-125.

— HIDALGO, S; MAROTO, A; ORTEGA, T; PALACIOS, A. Estatus afectivo-emocional y rendimiento escolar en matemáticas. En revista UNO. 2008, n. 49, pp. 9-28.

— HIDALGO, S; MAROTO, A; ORTEGA, T; PALACIOS, A. Influencia del dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. En MELLADO, V; BLANCO, LJ; BORRACHERO, AB; CÁRDENAS, JA (Eds.): Las Emociones en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas. Badajoz, España: DEPROFE, 2013, Vol.1, pp. 217-242.

— ISIKSAL, M; CURRAN, JM; KOC, Y; ASKUN, CS. Mathematics Anxiety and Mathematical Self-Concept: Considerations in Preparing Elementary-School Teachers. En Social Behavior and Personality: an international journal, 2009, Vol. 37, n. 5, pp. 631-643.

— JOHNSON, GJ. Preservice Elementary-School Teachers' Beliefs Related to Technology Use in Mathematics Classes. En Paper presented at the 2008 International Conference of the Society for Information Technology and Teacher Education, 2008.

— KLOOSTERMAN, P. Beliefs about mathematics and mathematics learning in the secondary school: Measurement and implications for motivation. En LEDER, GC; PEHKONEN, E; TÖRNER, G (Eds.): Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer, 2002, pp. 247-269.

— KOBALLA, TR; GLYNN, SM. Attitudinal and Motivational constructs in science learning. En ABELL, SK; LEDERMAN, NG (Eds.): Handbook of Research on Science Education. Mahwah, NJ, USA: Erlbaum, 2007, pp. 75-102.

— LLINARES, S. y SÁNCHEZ, V. (1996). Comprensión de las nociones Matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de Primaria. Gimenez, J; Llinares, S. y Sánchez, V. (eds.): *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática*. Ed. Comares. Granada. 95-118.

— MALINSKY, M; ROSS, A; PANNELLS, T; MCJUNKIN, M. Math Anxiety in pre-service elementary school teachers. En Education, 2006, Vol. 127, n. 2, pp. 274-279.

— MCLEOD, DB. The role of affect in mathematical problem solving. En MCLEOD, DB; ADAMS, VM (Eds.): Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective. New York: Springer-Verlang, 1989, pp. 20-36.

— MCLEOD, DB. Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En GROUWS, DA (Ed.): Handbook of Research on mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan, 1992, pp. 575-598.

— NCTM. Agenda for action. Recommendations for school Mathematics of the 1980s. Reston, Virginia: NCTM, 1980.

— NCTM. Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM, 2000. (Traducción al castellano, Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: SAEM Thales, 2003).

— PEKER, M. Pre-service teachers´ teaching anxisety about mathematics and their Learning Styles. En Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 2009, Vol. 5, n. 4, pp. 335-345.

— PEREZ-TYTECA, P; CASTRO, E. Actitudes hacia las matemáticas de los alumnos que ingresan en la Universidad de Granada. En Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, 2007, Monografía IX, pp. 103-113.

— PÉREZ-TYTECA, P; MONJE, J; CASTRO, E. Afecto y matemáticas. Diseño de unaentrevista para acceder a los sentimientos de alumnos adolescentes. En revista Avances de Investigación en Educación Matemática, 2013, n. 4, pp. 65-82.

— PINO, JA. Concepciones y prácticas de los estudiantes de Pedagogía Media en Matemáticas con respecto a la Resolución de Problemas y, diseño e implementación de un curso para aprender a enseñar a resolver problemas. Tesis doctoral Inédita - Universidad de Extremadura, Badajoz, España: 2013. Recuperado de: http://dehesa.unex.es:8080/xmlui/bitstream/handle/10662/568/TDUEX_2013_Pino_Ceballos.pdf?sequence=1.

— PINO, J; BLANCO, LJ. Análisis de los problemas de los libros de texto de Matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. En Revista Publicaciones, 2008, No.38, pp. 63-88.

— PUIG, L. Elementos de resolución de problemas. España, Granada: Comares, 1996.

— PUIG, L. Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. En LUENGO, R; GÓMEZ, B; CAMACHO, M; BLANCO, LJ (Eds.): Investigación en Educación Matemática XII. Badajoz, España: SEIEM; 2008, pp. 93-111.

— REYES, LH. Affective variables and mathematics education. En The Elementary School Journal, 1984, Vol. 84, n. 5, pp. 558-581.

— ROYO, J. Los problemas de matemáticas en la escuela. En revista Bordón, 1953, Vol. 35, n.V, pp. 247-255.

— RUIZ, N. Análisis de un cuestionario para evaluar las creencias y actitudes de los futuros profesores sobre las matemáticas. PENALVA, MC; TORREGROSA, G; VALLS, J (Coords.): Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales, 2002, pp. 513-526. Universidad de Alicante.

— SALCEDO, B; MEDINA, B; PERALTA, D; FLORES, D; CISNEROS, D. Emociones ¿Obstáculo en el aprendizaje de las matemáticas? Xictli, 2003, n. 50. Recuperado de: http://www.unidad094.upn.mx/revista/50/prixi.htm.

— SANTOS, LM. La Resolución de Problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos. México: Trillas, 2007.

— SANTOS, LM. La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una agenda de investigación y práctica. En LUENGO, R; GÓMEZ, B; CAMACHO, M; BLANCO, LJ (Eds.): Investigación en Educación Matemática XII. Badajoz, España: SEIEM, 2008, pp. 157-187. Recuperado de: http://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=345401.

— SCHOENFELD, AH. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making en mathematics. EN GROUWS, D.A. (Ed): Handbook of research on Mathematics teaching and learning. Macmillan Publishing Company. New York. 1992, pp. 334-370.

— SCHOENFELD, AH. Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics. En ZDM The International Journal on Mathematics Education, 2007, Vol. 39, n. 5-6, pp. 537-551.

— SOCAS, M. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En RICO, L. CASTRO, E; CASTRO, E; CORIAT, M; MARÍN, A; PUIG, L; SIERRA, M; SOCAS, M (Eds.): La educación matemática en la enseñanza secundaria. Barcelona, España: ICE/Horsori 1997, pp. 125-154.

— STACEY, P; BROWNLEE, JM; THORPE, KJ; REEVES, D. Measuring and Manipulating Epistemological Beliefs in Early Childhood Education Students. En International Journal of Pedagogies and Learning, 2005, Vol. 1, n. 1, pp. 6-17.

— SZYDLIK, J; SZYDLIK, S; BENSON, S. Exploring Changes in Pre-service Elementary Teachers' Mathematical Beliefs. En Journal of Mathematics Teacher Education. 2003, Vol. 6, n. 3, pp. 253-279.

— UUSIMAKI, L; NASON, R. Causes underlying pre-service teachers´ negative beliefs and ansieties about mathematics. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 4, 2004, pp. 369-376.

— VALVERDE, AG; CASTRO, E. Razonamiento proporcional: un análisis de las actuaciones de profesores s en formación. Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación. 2009, Monografía XII, pp. 121- 137.

— VANAYAN, M; WHITE, N; YUEN, P; TEPER, M. Beliefs and attitudes toward mathematics among third- and fifth-grade students: A descriptive study. En School Science and Mathematics. 1997, Vol. 97, n. 7, pp. 345-351.

— ZAKARIA, E; NORDIN, NM. The effects of mathematics anxiety on matriculation students as related to motivation and achievement. En Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 2008, vol. 4, no 1, pp. 27-30.

— ZAN, R; BROWN, L; EVANS, J; HANNULA, M.S. Affect in Mathematics education: an introduction. En Educational Studies in Mathematics, 2006, Vol. 60, n. 2, pp. 113-121.

— ZEVENBERGEN, R. Study groups as tool for enhancing preservice students' content knowledge. En Mathematics Teacher Education and Development, 2004, Vol. 6, pp. 4-22.

CAPÍTULO 2
LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS COMO CONTENIDO EN EL CURRÍCULO DE PRIMARIA[1]

Janeth A. Cárdenas Lizarazo y Lorenzo J. Blanco Nieto

1. PERSPECTIVAS SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

En los trabajos sobre educación matemática podemos encontrar aportaciones que tratan de clarificar el significado del vocablo 'problema' y de la expresión 'Resolución de Problemas', entre ellos Schoenfeld (1985), Gaulin (1986), Schroeder y Lester (1989), Blanco (1993), Puig (2008) y Pino (2013). En términos generales, podríamos señalar un acuerdo en tres acepciones diferentes sobre el papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas: i. Enseñanza para la resolución de problemas; ii. Enseñanza sobre la resolución de problemas y iii. Enseñanza vía resolución de problemas, esto es:

Las actividades propuestas a los estudiantes les permiten aplicar sus conocimientos matemáticos en la resolución de problemas tomados de diferentes fuentes, intra o extra matemáticos. La enseñanza para la resolución de problemas es una consideración tradicional respecto del papel de la Resolución de Problemas (RP) como aplicación de la teoría, previamente estudiada. Esta acepción se refleja en los libros de texto al situar los problemas al final de los capítulos o después de la introducción de algún concepto o algoritmo. De estya manera, los problemas se resolverían de acuerdo a los procedimientos señalados en el capítulo. La referencia a la aplicación de conocimientos matemáticos a través de la RP es continua.

La enseñanza sobre la RPM se centraría en trabajar para que los alumnos experimenten y asuman diferentes formas de abordar los problemas, tanto desde lo cognitivo como lo afectivo. En esta línea, se centran los esfuerzos en trabajar diferentes fases sobre resolución de problemas, y en favorecer la reflexión y discusión sobre el propio proceso. Desde esta perspectiva, la resolución de problemas se constituye en un contenido específico y una actividad compleja que los alumnos deben aprender a desarrollar.

Finalmente, podríamos considerar las situaciones problemáticas como punto de partida que permiten generar y consolidar conocimientos matemáticos. Ello ayuda a crear una atmósfera de investigación orientada y de resolución de problemas necesaria para la construcción del conocimiento matemático. La resolución de problemas como metodología o como contexto para el aprendizaje aparece reiteradamente en numerosos currículos, si bien

1 Una versión ampliada, del contenido de este artículo, puede encontrarse en Blanco, LJ; Cárdenas, JA. La Resolución de Problemas como contenido en el Currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. En revista Campo Abierto, 2013, Vol.32, n. 1, pp. 137 - 153.

es cierto que su plasmación en el aula sigue siendo muy escasa. La consideración de la RP como metodología, reflejada de manera expresa en las propuestas curriculares de los últimos 20 años, no acaba de reflejarse de manera clara en la práctica docente (García, 2009).

2. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO CONTENIDO EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

En Blanco y Cárdenas (2013) y Cárdenas (2014) se analiza ampliamente el significado de la resolución de problemas como contenido justificando esta perspectiva desde las publicaciones específicas de resolución de problemas de matemáticas y desde los currículos de primaria y secundaria.

Específicamente, en el currículo de la Comunidad Autónoma de Extremadura (Decreto, 2007), cuando se hace referencia a la enseñanza en el nivel de primaria, podemos encontrar la siguiente referencia:

> "Los contenidos asociados a la resolución de problemas constituyen la principal aportación que desde el área se puede hacer a la autonomía e iniciativa personal" (Decreto, 2007, p. 7911).

El currículo incide, en diferentes ocasiones, en la importancia de la RPM como una actividad que debe considerarse específicamente en la enseñanza de las matemáticas para su aprendizaje señalando diferentes sugerencias para que los alumnos aprendan a resolver problemas. No obstante estas recomendaciones, autores como Schoenfeld (2007) o Pino y Blanco (2008) indican el escaso reflejo que se tiene de esta perspectiva (Enseñanza sobre la resolución de problemas) en los libros de texto. En España hubo un intento de introducir 'estrategias para la resolución de problemas' en el libro de texto de Guzmán, Cólera y Salvador (1991), que desgraciadamente se abandonó a los pocos años.

En el artículo citado de Blanco y Cárdenas (2013) se establecen siete categorías, diferentes, a modo de contenidos específicos que los profesores deberían considerar en su enseñanza sobre la resolución de problemas y que se encuentran en el currículo de matemáticas (Figura 1).

1. Formular o plantear problemas
2. Modelo General de Resolución de Problemas
    - 2.1. Analizar y comprender el problema
    - 2.2. Diseño de estrategias
    - 2.3. Ejecución de las estrategias
    - 2.4. Revisión del problema, del resultado y toma de decisiones
3. Dominio afectivo
4. Tecnología de la información y de la comunicación
5. Fuentes de situaciones y datos para plantear problemas
6. Matemáticas, lenguaje y comunicación
7. Evaluación

Figura 1. Contenidos específicos de la Resolución de Problemas

3. CONTENIDOS ESPECÍFICOS SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS EN PRIMARIA

El contenido de cada una de las categorías lo vamos a desarrollar a partir de referencias específicas del currículo de primaria que tiene relación con el enunciado de cada una de ellas. Las ideas aportadas en este capítulo se complementarán con las orientaciones del capítulo siete y las actividades señaladas en el capítulo once, que permitirán desarrollar estos contenidos.

3.1. Formular o plantear problemas

El currículo[2] nos indica, en diferentes momentos, la importancia de captar la información significativa de situaciones cotidianas y de ser capaces de formularla en términos matemáticos. Es decir, nos anima a utilizar las matemáticas para describir, analizar, interpretar y comprender la realidad. Y, específicamente en relación a la RPM, señala la conveniencia de proponer a los alumnos que inventen y formulen problemas a partir de diferentes situaciones que nos sugiere el entorno o su imaginación.

Así, por ejemplo en un párrafo nos recomienda la:

> "Invención y formulación de problemas de la vida cotidiana a partir de situaciones dadas en los que se precise realizar varias operaciones matemáticas para su resolución" (p. 7921).

De modo que podríamos proponer a los alumnos que enuncien un problema que se resuelva con una operación de multiplicar. Ello permite reflexionar sobre el significado de la multiplicación como operación matemática y precisar su utilización.

En el caso de primaria se utilizan, de manera reiterada, los términos 'formular' o 'formulación' para sugerir que los alumnos planteen problemas a partir de diferentes contextos y en referencia a contenidos específicos de matemáticas:

> "Formular problemas sencillos en los que se precise contar, leer y escribir números" (Decreto, 2007, p. 7915).
>
> ". . . Formular y resolver sencillos problemas en los que intervenga la lectura de gráficos" (Decreto, 2007, p. 7916).

La referencia a la 'invención y/o formulación de problemas' aparece, al menos, en diecisiete ocasiones diferentes en el currículo de Primaria en el contenido de matemáticas. Esto es una prueba de la importancia que se le da a esta actividad en el currículo.

2 Las citas que se describen a lo largo de este capítulo y que hacen referencia al currículo son extraídas del currículo de la Comunidad Autónoma de Extremadura (Decreto, 2007).

Incluso en los criterios de evaluación, el currículo habla sobre la importancia de formular problemas:

> "...es básico e imprescindible saber si el alumnado ha adquirido... autonomía e iniciativa personales para la formulación de problemas sencillos en situaciones inventadas" (Decreto, 2007, p. 7915).

La actividad de plantear/inventar/formular problemas parece oportuna por cuanto obliga a trabajar a los alumnos sobre el significado de los conceptos y/o procedimientos matemáticos o sobre la utilidad de los mismos. Así, si un alumno debe plantear un problema que se resuelva con una multiplicación tendrá que imaginar diferentes situaciones que permitan aplicar esta operación, por lo que le estará dando significado a este concepto y al proceso matemático a emplear. Probablemente, este alumno se responda a la pregunta reiterada por los escolares de: **¿para qué sirve esto?** O por ejemplo, si proponemos que redacten problemas cuya pregunta sea *calcular el volumen del cilindro* deberán analizar la fórmula correspondiente para ver diferentes posibilidades para llegar a su solución a partir de la medida de la base y altura o de la medida de radio o diámetro de la base y de la altura del cilindro.

La invención o formulación de problemas a los alumnos puede proponerse en diferentes momentos de enseñanza, tanto dentro del aula como fuera de ella. Así, los alumnos podrán inventar o formular problemas en relación a procesos o conceptos matemáticos que estemos trabajando para observar y comprender la relación de los mismos en diferentes contextos. También, cuando queremos hacer problemas sobre algún contenido. O en la fase final de la resolución de problemas para permitir la transferencia del conocimiento aprendido en el problema resuelto a otras situaciones posibles.

Analizar e interpretar diferentes "situaciones problemáticas relacionadas con temas de salud, consumo, medio ambiente, educación vial" (Decreto, 2007, p. 7923) es algo reiterado en el currículo tanto de manera general o en referencia a contenidos específicos. Nos indica que la matemática puede ayudar a producir, interpretar, representar y expresar la información que nos rodea sirviendo para "ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad" (Decreto, 2007, p. 7834), y para comprender lo que nos rodea y, a partir de ello, plantear problemas que nos ayuden a encontrar mejores alternativas.

3.2. Modelo General de Resolución de Problemas

El texto del currículo nos propone explícitamente un modelo para abordar los problemas, similar al propuesto inicialmente por Polya (1945), que desarrollamos en dos referencias generales y complementarias:

> La RPM ...requiere...: leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo que se va revisando durante la resolución, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución si se ha encontrado, hasta la comunicación de los resultados (Decreto, 2007, p. 7912).

> "La resolución de problemas tiene, al menos, tres vertientes complementarias asociadas al desarrollo de esta competencia: la planificación, la gestión de los recursos y la valoración de los resultados" (Decreto, 2007, p. 7911).

Pero, al mismo tiempo, el currículo incide en la importancia de considerar, específicamente, las diferentes fases del modelo general.

Esta referencia al trabajo sobre la resolución de problemas no es nueva en el currículo español ya que en la propuesta curricular hecha sobre la LOGSE (Ministerio de Educación y Cultura (MEC, 1992) podemos encontrar una cita más amplia:

> […] el alumno debe desarrollar y perfeccionar sus propias estrategias, a la vez que adquiere otras generales y específicas que le permiten enfrentarse a las nuevas situaciones con probabilidad de éxito. En este sentido, se brindará a los niños la oportunidad de familiarizarse con procesos que facilitan la exploración y resolución de problemas como: comprensión y expresión de la situación matemática (verbalización, dramatización, discusión en equipo), extracción de datos y análisis de los mismos, representación en forma gráfica del problema o situación, formulación de conjeturas y verificación de su validez o no, exploración mediante ensayo y error, formulaciones nuevas del problema, comprobación de resultados y comunicación de los mismos. Se hace necesario, asimismo, desarrollar la capacidad de persistir en la exploración de un problema (MEC, 1992, p. 92).

Lo anterior nos muestra que en el currículo está presente, desde hace algunas décadas, un modelo general de resolución de problemas que los estudiantes deben experimentar y aprender. Un modelo sugerido en las aportaciones de Schoelfend (1985), Bransford y Stein (1987), Mason, Burton y Stacey (1988), Guzmán (1991), Blanco (1993), Santos (2007) y Pino (2013) que desarrolla de manera diferenciada, al menos, cuatro fases: i. Analizar y comprender la situación planteada; ii. Diseño de estrategias, desarrollo de las estrategias; iii. Ejecución de las estrategias hasta alcanzar la solución y iv. revisión de los resultados y del proceso a nivel cognitivo y afectivo.

Actualmente, encontramos una nueva propuesta de intervención en el aula (Blanco, Guerrero y Caballero, 2013; Caballero, 2013; Pino, 2013) en la que partiendo del modelo anterior se integran aspectos cognitivos y afectivos sobre la resolución de problemas, pasando de cuatro a cinco pasos. En esta nueva fase se indica la necesidad de aprovechar la revisión del proceso para que los alumnos evalúen su implicación personal en la resolución del problema y ganen en confianza y autoestima como resolutores. Ampliamos la propuesta de este modelo en el capítulo siete.

Analizar y comprender el problema

La manera de enfrentarnos a los problemas, tanto desde el punto de vista cognitivo como afectivo, y los objetivos de esta primera fase del Modelo General es considerada esencial para poder abordar la resolución del problemas con cierto éxito. El currículo se refiere a ella en varios momentos:

> "La planificación (en la Resolución de problemas) está asociada a la comprensión en detalle de la situación planteada para trazar un plan" (Decreto, 2007, p. 7911).

La necesidad de una lectura comprensiva es evidente y por ello es reiteradamente referenciada:

> "La resolución de problemas requiere… leer comprensivamente" (Decreto, 2007, p. 7912).

La importancia de comprender la situación planteada ha sido considerada por diferentes autores que señalan, además, algunas actividades específicas que ayudarían a los alumnos en esa fase de la resolución de los problemas (Blanco y Blanco, 2009; Castro et al, 1995; Figueras, 1994; García, 1992, 2005; Luceño, 1996).

Por otra parte, y ligado a la importancia de la comprensión de la situación planteada, Lochead y Mestre (1988), realizan una importante contribución en relación a la dificultad de la traducción de los enunciados a expresiones matemáticas. Los autores se refieren específicamente a problemas algebraicos señalando tres niveles de comprensión de los enunciados: comprensión cualitativa, comprensión cuantitativa y comprensión conceptual. Estos niveles son clara y fácilmente adaptables a los problemas básicos de Primaria.

Diseño de estrategias

Como hemos indicado anteriormente la comprensión y análisis de la situación planteada está asociada a la elaboración de una estrategia para resolver el problema. Este es uno de los aspectos más repetidos acerca de la resolución de problemas en los currículos que señalan la necesidad de elaborar y aplicar estrategias personales para resolver los problemas que se planteen.

La referencia a la

> "utilización de estrategias personales de resolución" (Decreto, 2007, p. 7920)

se repite numerosas veces en los textos lo que indica la importancia que se le da, señalando además algunas otras referencias:

> "...observar la facultad de emplear más de un procedimiento y la perseverancia en la búsqueda de soluciones, y la expresión, oral y escrita en el proceso seguido" (Decreto, 2007, p. 7920).
>
> "...la toma de conciencia de los procedimientos mentales y las estrategias que utiliza para resolver problemas, constituye un fuerte motor del desarrollo cognitivo" (Decreto, 2007, p. 7840).
>
> "...Valorar las diferentes estrategias…" (Decreto, 2007, p. 7924).

De las unidades anteriores podríamos resumirlas al señalar que los aprendices deben elaborar, utilizar y explicar oralmente y por escrito diversas estrategias, personales o con los procedimientos propios de primaria, para resolver los problemas.

Resolver el problema

Cuando observamos los cuadernos de los alumnos de primaria con la tarea de resolver problemas encontramos una cierta desorganización y falta de rigor en los modos en los que los alumnos los resuelven.

Así, podemos encontrar expresiones como *dos por tres, son seis, más cuatro son 10* que encuentran su reflejo numérico en: *'2 x 3 = 6 + 4 = 10'*

Son expresiones que al ser oídas parecen correctas, y que se corresponderían con una forma de hablar, pero que escritas así, en la pizarra o en el papel, expresan operaciones e igualdades erróneas.

A este respecto, el currículo sugiere algunas recomendaciones que los profesores debieran considerar sobre el proceso de solución del problema:

> "Interés por la presentación limpia, ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados" (Decreto, 2007, p. 7917).

Pero, también se hace referencia al control del proceso por parte del resolutor, al señalar que

> "… la gestión de los recursos (en la resolución de problemas) incluye la optimización de los procesos de resolución" (Decreto, 2007, p. 7911).

Este tercer paso requiere de algunas actitudes personales que facilitarán la correcta resolución del problema. De esta manera, sería importante considerar la elección y uso de las diferentes estrategias para resolver las situaciones planteadas, señalando sus pensamientos y dudas. Es decir, que verbalicen lo que ha pasado por su mente y lo que han ido haciendo. El alumnado debe tratar de resolver el problema de forma lógica y reflexiva, incluyendo la estimación, el cálculo mental o la anticipación de la solución, procurando desarrollar y explicar el proceso e ir controlando las diferentes partes del mismo. Lo que implica actuar con orden y precisión, resaltando los posibles logros intermedios.

Revisión del problema, del resultado y toma de decisiones

Usualmente los alumnos rodean con colores la solución obtenida en el tercer paso y dan por concluida la actividad. No obstante, consideramos necesario reflexionar, cognitiva y afectivamente, sobre el trabajo realizado y sobre los resultados obtenidos para facilitar la transferencia de conocimiento a situaciones posteriores. Y esto es recogido en el currículo cuando, por ejemplo, se refiere a "la importancia de comprobar, valorar su coherencia" (Decreto, 2007, p. 7912) y comunicar, el resultado obtenido, ya que ello es lo que

> "permite hacer frente a otros problemas o situaciones con mayores posibilidades de éxito" (Decreto, 2007, p. 7911).

En esta revisión debe considerarse la

> "Capacidad… para argumentar sobre la validez de una solución identificando, en su caso, los errores" (Decreto, 2007, p. 7921).

Y, siendo

"Crítico con la solución obtenida, integrándola en el contexto" (Decreto, 2007, p. 8108), ya que cuando se plantean (problemas) de la vida cotidiana deberemos tener en cuenta

> "la flexibilidad para modificar el punto de vista" (Decreto, 2007, p. 8099).

3.3. Dominio afectivo

En esta categoría consideramos aspectos diferenciados de lo cognitivo y relacionados con las creencias, actitudes y emociones (Blanco, 2012; Gómez-Chacón, 2002, 2010; McLeod y Adams, 1989; Mellado, Blanco, Borrachero y Cárdenas, 2013) como la motivación, interés, perseverancia, etc., aspectos que son nombrados en el currículo de manera reiterada.

Son diversas las referencias que se establecen en relación a diferentes descriptores del dominio afectivo en relación a la resolución de problemas:

> "confianza en las propias posibilidades y curiosidad, interés y constancia en la búsqueda de soluciones" (Decreto, 2007, p, 7913)
>
> "Valoración del propio esfuerzo (en la resolución de problemas)" (Decreto, 2007, p, 7913)
>
> "Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas" (Decreto, 2007, p. 8099- S)
>
> "Actitud positiva y capacidad para valorar y comprender la utilidad de los conocimientos matemáticos y experimentar satisfacción por su uso, por el modo en que permite ordenar la información, comprender la realidad y resolver determinados problemas" (Decreto, 2007, p. 7912).

Todo ello debiera "fomentar la autonomía personal y la capacidad de autoaprendizaje" (Decreto, 2007, p. 8098).

Los estudios sobre la influencia del dominio afectivo en la resolución de problemas con estudiantes de diferentes niveles son abundantes y sus resultados deberían considerarse para procurar una mayor eficacia en el aprendizaje sobre la resolución de problemas.

3.4. Tecnología de la información y de la comunicación

A pesar del tiempo transcurrido y del mayor acceso de los centros y alumnos de enseñanza obligatoria a los medios tecnológicos, el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación y Tecnologías del Aprendizaje (TIC/TAC), sigue existiendo resistencia a su uso por parte de muchos profesores de matemáticas en los niveles de enseñanza obligatoria.

Este resultado parece, en cierto sentido sorprendente, por cuanto el uso de las TIC/TAC en la enseñanza en primaria es una recomendación específica y reiterada, más allá del mero recurso motivador, del currículo en la enseñanza obligatoria:

> "Es necesario revisar los planteamientos metodológicos de cada área del currículo, de manera que las nuevas formas de aprender, que se generan desde la utilización de las TIC en el aula, permitan a los alumnos buscar, indagar, probar, comprobar, experimentar, observar, resumir, concluir, sin necesidad de contar previamente con nuestras explicaciones e instrucciones" (Decreto, 2007, p. 7841).

El uso de las TIC (incluida la calculadora) en las diferentes fases de la resolución de problemas es reiterado en los documentos revisados. Consideramos que la resolución de problemas no debe reducirse a la utilización exclusiva de procedimientos mecánicos y debe combinarse con el uso adecuado de tecnologías.

La funcionalidad de las TIC en clase de matemáticas debiera llevar a los resolutores a tomar decisiones sobre su uso:

> "Utilización de la calculadora o el ordenador en la resolución de problemas de la vida cotidiana, decidiendo sobre la conveniencia de su uso en función de la complejidad de los cálculos" (Decreto, 2007, p. 7917; p. 7921).

Y, se insiste en el uso de las TIC como recurso 'necesario' e 'ineludible' en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas en general y, específicamente, en la resolución de problemas:

> "Las tecnologías de la información y la comunicación deben constituir un recurso didáctico ineludible en todas las áreas que conforman la etapa" (Decreto, 2007, p. 7828- P).

Es decir, el currículo apuesta por el uso de la TIC porque las considera como una herramienta útil para el aprendizaje matemático. Son numerosos los trabajos realizados al respecto, por lo que parece un contrasentido dudar de su utilidad como recursos para la enseñanza de las matemáticas en el siglo XXI. Algunos ejemplos de sus aplicaciones se describen en el Capítulo 10, La resolución de problemas en Primaria y las TICs.

3.5. Fuentes de situaciones y datos para plantear problemas

Blanco, Guerrero y Caballero (2013) señalan que los contextos que se describen en los problemas que se plantean en los libros de texto y en las aulas de matemáticas son los mismos que los que se reflejaban en los problemas de los libros de matemáticas a inicio del siglo XX.

Y ello es así a pesar de que, evidentemente, los intereses, preocupaciones y pensamientos de los alumnos del siglo XXI han cambiado enormemente respecto de los alumnos de hace más de 100 años.

No obstante, al analizar el currículo encontramos diferentes referencias en los que se indican los contextos, generales y específicos, donde se pueden plantear y resolver problemas de matemáticas. Alsina (1994) cita 50 motivos concretos de la vida que pueden ser referencias para trabajar las matemáticas, donde aparecen temas relacionados con el Cuerpo humano y salud; Naturaleza y ecología; Economía; Vivienda; Consumo comercial; Medios de transporte y servicios; Tecnología normal; Educación para la Paz y la Democracia.

La referencia a 'contextos cotidianos' es frecuente:

> "Resolver problemas sencillos relacionados con objetos, hechos y situaciones de la vida cotidiana" (Decreto, 2007, p. 7916).

Y como referente para la construcción del conocimiento:

> "Los alumnos y las alumnas deben aprender matemáticas utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria, para adquirir progresivamente conocimientos más complejos a partir de las experiencias y los conocimientos previos" (Decreto, 2007, p. 7909).

La necesidad de comprender la realidad utilizando las herramientas matemáticas es frecuente en relación a los contenidos específicos de matemáticas:

> "Interpretación de gráficos que permitan detectar situaciones problemáticas relacionadas con temas de salud, consumo, medio ambiente, educación vial" (Decreto, 2007, p. 7923).

Las revistas especializadas y los libros nos señalan numerosas fuentes cotidianas para las actividades matemáticas que facilitarían llevar estas recomendaciones al aula. Ejemplo de ello, lo encontramos en propuestas com las de Corbalán, (1991 y 1995) o Fernández y Rico, (1992)

3.6. Matemáticas, lenguaje y comunicación

La relación entre la competencia lingüística y la competencia matemática es expresa en el texto curricular;

> "Para fomentar el desarrollo de la competencia en comunicación lingüística desde el área de Matemáticas... es necesario incidir en los contenidos asociados a la descripción verbal de los razonamientos y de los procesos. (Decreto, 2007, p. 7911).

Y se indica los beneficios de esta relación:

> " . . . la verbalización del proceso seguido en el aprendizaje, . . . ayuda a la reflexión sobre qué se ha aprendido, qué falta por aprender, cómo y para qué, lo que potencia el desarrollo de estrategias que facilitan el aprender a aprender" (Decreto, 2007, p. 7911).

La relación entre lenguaje y resolución de problemas se concreta en diferentes momentos relacionados globalmente o con las diferentes fases del modelo general de resolución de problemas que hemos señalado en el apartado 3:

> ". . . explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas" (Decreto, 2007, p. 7920).

> "Explicar oralmente el proceso seguido para resolver un problema" (Decreto, 2007, p. 7916).

Es importante resaltar que la comunicación es un medio necesario para que se produzca aprendizaje. La expresión oral o escrita del trabajo realizado obliga a un esfuerzo de síntesis y precisión para que el interlocutor nos entienda, lo que nos ayuda a profundizar en la compresión de lo realizado. En nuestra actividad docente hemos comprobado, por ejemplo, las dificultades que los alumnos tienen para explicar de una manera clara y concisa las estrategias seguidas en la resolución de los problemas. Mayor dificultad aún si se les pide que las escriban.

3.7. Evaluación

La evaluación es el recurso que tenemos los profesores para conocer lo que los estudiantes aprenden sobre un tópico y, consecuentemente, tomar decisiones significativas para la práctica docente. En este sentido es un organizador fundamental del currículo. Sin embargo, a pesar de los cambios desarrollados en las diferentes propuestas curriculares y en las leyes sobre educación, existe una opinión generalizada entre los profesores de que los criterios e instrumentos utilizados en el aula de matemáticas han evolucionado muy poco (Álvarez y Blanco, 2014; Cárdenas, Blanco, Gómez y Guerrero, 2013).

Por nuestra parte, asumimos que la evaluación es parte indisoluble del proceso de enseñanza/aprendizaje lo que nos lleva a considerar que los aspectos que hemos destacado para la resolución de problemas en los apartados anteriores deben formar parte del trabajo de los alumnos, también debieran tener reflejo en la evaluación. Lo que implica, necesariamente, una nueva reconceptualización sobre la evaluación en la RPM (Cárdenas, 2014).

Y, ello debe ser así, porque los estudiantes centran sus esfuerzos en torno al contenido del que consideran que van a ser evaluados, en busca de aprobar la asignatura. De tal forma que los contenidos y objetivos que no se evalúan difícilmente formen parte de la preocupación de los alumnos y estos centrarán su atención y esfuerzo hacia aquellos sobre los que si van a ser evaluados. Así, "los estudiantes consideran importantes los aspectos de la instrucción que los profesores enfatizan y evalúan regularmente" (Lester y Kroll, 1991, p. 277).

El NCTM (1991) señala que

> La evaluación debe determinar la capacidad que tenga el alumno para realizar todos los aspectos de la resolución de problemas. Para determinar si son capaces de formular problemas es esencial contar con los datos sobre su capacidad de hacer preguntas, utilizar una información sobre el uso que hacen los estudiantes de estrategias y técnicas de resolución de problemas y de la capacidad que tengan para comprobar e interpretar resultados. Finalmente, ya que la potencia de las matemáticas se deriva en parte de la posibilidad de generalizar, también debe evaluarse este aspecto de la resolución de problemas (NCTM, 1991, p. 216).

Santos (2007) profundiza en esta idea y nos recuerda que "es importante diseñar actividades adecuadas que capturen información de los momentos identificados en el modelo [de resolución de problemas]" (Santos, 2007, p. 171).

Entendemos que sería necesario comprobar que el alumno sea capaz de recoger/interpretar/analizar una información dada. Inventar/formular problemas a partir de una situación general y utilizar algunos recursos sencillos para representarla (tablas, diagramas, ecuaciones, etc.). Igualmente, habría que observar si comprueban o no los datos, si comparan los resultados obtenidos con la situación original, para ver lo razonable de los mismos, o si realizan o no algún tipo de generalización.

Ligado al procedimiento seguido en la resolución de problemas, la evaluación debe tener en cuenta las creencias y la actitud personal del resolutor ante este tipo de tareas. El interés por la actividad, la autoconfianza, autovaloración que hacen de ellos mismos, como resolutores de problemas, la ansiedad o la perseverancia cuando fallan los primeros intentos, etc. son algunos factores que también hay que considerar en la evaluación.

Probablemente, la falta de atención a estos factores pueda ser una de las causas del resultados sorprendente en la investigación de Hidalgo, Maroto, Ortega y Palacios (2013) al señalar que "los alumnos independientemente de la edad tienden a aprenderse de memoria los problemas de matemáticas hechos en clase como estrategia metacognitiva" (p. 230).

BIBLIOGRAFÍA

— ALISINA, C. ¿Para qué aspectos concretos de la vida deben preparar las matemáticas? En Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 1994, vol. 1, no 1, p. 37-43.

— BLANCO, LJ. Consideraciones elementales sobre resolución de problemas. Badajoz, España: Univérsitas, 1993.

— BLANCO, B; BLANCO, LJ. Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. En revista Números, 2009, n. 71, pp. 75 – 85. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos_03.pdf.

- BLANCO, LJ; GUERRERO, E; CABALLERO, A. Cognition and Affect in Mathematics Problem Solving with Prospective Teachers. En The Mathematics Enthusiast, 2013 - Special Issue, Vol. 10, n. 1 y 2, pp. 335-364. Recuperado de: http://www.math.umt.edu/tmme/vol10no1and2/13-Blanco-et%20al_pp335_364.pdf.
- BRANSFORD, J; STEIN, B. Solución IDEAL de Problemas. Barcelona, España: Labor, 1987.
- CABALLERO, A; BLANCO, LJ; GUERRERO, E. Problem Solving And Emotional Education In Initial Primary Teacher Education. En The Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2011, Vol. 7, n. 4, pp. 281-292. Recuperado de: http://www.ejmste.com/v7n4/EURASIA_v7n4_Caballero.pdf.
- CÁRDENAS, JA. La evaluación de la Resolución de Problemas en Matemáticas: concepciones y prácticas de los profesores de secundaria. Tesis Doctoral Inédita - Universidad de Extremadura. Badajoz, España: 2014. Recuperado de: http://dehesa.unex.es:8080/xmlui/handle/10662/2050.
- CÁRDENAS, JA; BLANCO, LJ; GÓMEZ. R; GUERRERO, E. Resolución de problemas de matemáticas y evaluación: aspectos afectivos y cognitivos. En MELLADO, V; BLANCO, LJ; BORRACHERO, A; CÁRDENAS, JA (Eds.): Las Emociones en la Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias y las Matemáticas. Badajoz, España: Grupo DEPROFE, 2013, pp. 67-88. Recuperado de: http://www.eweb.unex.es/eweb/dcem/Capitulo04.pdf.
- CASTRO, E. Resolución de Problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En CAMACHO, M; BLANCO, LJ (Eds.): Investigación en Educación Matemática XII. España: lugar; SEIEM, 2008, pp. 113-140. Recuperado de: http://redined.mecd.gob.es/xmlui/handle/11162/48080.
- CASTRO, E. et al. Resolución de problemas en el Tercer Ciclo de E.G.B. Granada, España: Universidad de Granada, 1995.
- CORBALÁN, F. Prensa, Matemáticas y enseñanza. Zaragoza, España: Mira, 1991.
- CORBALÁN, F. La matemática aplicada a la vida cotidiana. Barcelona, España: Graó, 1995.
- DECRETO 82/2007, de 24 de abril, de la Consejería de Educación de la Junta de Extremadura, por el que se establece el Currículo de Educación Primaria Obligatoria para la Comunidad Autónoma de Extremadura, 2007, pp. 7825-7929.
- DECRETO 83/2007, de 24 de abril, de la Consejería de Educación de la Junta de Extremadura, por el que se establece el Currículo de Educación Secundaria Obligatoria para la Comunidad Autónoma de Extremadura, 2007, pp. 7980-8151.
- FERNÁNDEZ, A; RICO, L. Prensa y educación Matemática. Madrid, España: Síntesis, 1992.
- FIGUERAS, E. Leer, escribir, comprender matemáticas. Los problemas. En revista Suma, 1994, n. 19, pp. 20-34.
- GARCÍA, E. Ideas, pautas y estrategias heurísticas para la resolución de problemas. En revista Aula, 1992, n. 6, pp. 14-21.
- GARCÍA, L. Un estudio sobre CDC de profesores de Matemáticas que enseñan calculo diferencial a estudiantes de carreras de ciencias económicas. La enseñanza basada en problemas como estrategia metodológica y didáctica. Tesis Doctoral Inédita. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España: 2009.

— GAULIN, C. Tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas I. En revista Números, 1986, n. 14, pp. 11-18.

— GIL, N; BLANCO, LJ; GUERRERO, E. El papel de la afectividad en la resolución de problemas. En Revista de Educación, 2006, n. 340, pp. 551-569. Recuperado de: http://www.revistaeducacion.mec.es/re340/re340_20.pdf.

— GÓMEZ-CHACÓN, IM. Cuestiones afectivas en la enseñanza de las matemáticas: una perspectiva para el profesor. En Contreras, LC; Blanco, LJ (Eds.): Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente. Badajoz, España: Servicio de Publicaciones Universidad de Extremadura, 2002, pp. 23-58. Recuperado de: http://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=10764.

— GÓMEZ-CHACÓN, IM. Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En MORENO, MM; ESTRADA, A; CARRILLO, J; SIERRA, TA (Eds.): Investigación en Educación Matemática XIV. Lleida, España: SEIEM, 2010, pp. 121-140. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1685/1/334_2010Tendencias_SEIEM13.pdf.

— GUZMÁN, M. Para pensar mejor. Barcelona, España: Labor, 1991.

— GUZMAN, M; CÓLERA, J; SALVADOR, A. Matemáticas. Bachilletaro 1. Madrid, España: Anaya, 1991.

— HIDALGO, S; MAROTO, A; ORTEGA, T; PALACIOS, A. Influencia del dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. En MELLADO, V; BLANCO, LJ; BORRACHERO, AB; CÁRDENAS, JA (Eds.): Las Emociones en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas. Badajoz, España: DEPROFE, 2013, Vol.1, pp. 217-242. Recuperado de: http://www.eweb.unex.es/eweb/dcem/VOLUMEN%20Iok.pdf.

— LESTER, KL; KROLL, DL. Evaluation: a new vision. En Mathematics Teacher, 1991, Vol. 84, n. 4, pp. 276-284.

— LOCHHEAD, J; MESTRE, JP. From words to algebra: mending misconcepcions. En COXFORD, AF; SHULTE, AP (Eds.): The ideas of Algegra, K-12 (1988 y Yearbook). Reston, VA: NCTM, 1988 pp. 127-135.

— MASON, J; BURTON, L; STACEY, K. Pensar matemáticamente. Barcelona, España: MEC-Labor, 1988.

— MCLEOD, DB; ADAMS, VM. Affect and mathematical problem solving: A new perspective. Springer-Verlag Publishing, 1989.

— MELLADO, V; BLANCO, LJ; BORRACHERO, AB; CÁRDENAS, JA. Las Emociones en la Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias y las Matemáticas. Badajoz, España: Grupo DEPROFE, 2013, Vol. I. Recuperado de: http://www.eweb.unex.es/eweb/dcem/VOLUMEN%20Iok.pdf.

— MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CULTURA –MEC–. Educación Primaria. Matemáticas. Madrid, 1992.

— NCTM. Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. Sevilla, España: SAEM, 1991.

— PUIG, L. Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. En LUENGO, R; GÓMEZ, B; CAMACHO, M; BLANCO, LJ (Eds.): Investigación en Educación Matemática XII. Badajoz, España: SEIEM; 2008, pp. 93-111. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1190/.

— SANTOS, LM. La Resolución de Problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos. México: Trillas, 2007.

— SANTOS, LM. La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una agenda de investigación y práctica. En LUENGO, R; GÓMEZ, B; CAMACHO, M; BLANCO, LJ (Eds.): Investigación en Educación Matemática XII. Badajoz, España: SEIEM, 2008, pp. 157-187. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1193/.

— SCHOENFELD, A. Mathematical Problem Solving, Orlando: Academic Press Inc., 1985.

— SCHROEDER, TL; LESTER, FK. Developing understanding in mathematics via problem solving. En NCTM: New directions for elementary school mathematics. Reston, Virginia: NCTM-Yearbook, 1989, pp. 31-42.

CAPÍTULO 3
UN CUESTIONARIO SOBRE DOMINIO AFECTIVO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Ana Caballero Carrasco y Eloísa Guerrero Barona

En el Capítulo 1 se analiza la influencia que tienen los afectos en las matemáticas y, de forma más específica, en la resolución de problemas matemáticos en los estudiantes para maestro de primaria (EMP). Igualmente, se pone de manifiesto la influencia que los propios afectos de los docentes ejercen sobre los de sus alumnos así como en el rendimiento de estos. Derivado de ello, se resalta la necesidad e importancia de analizar estos factores afectivos.

Con este fin, son dispares los instrumentos de medida elaborados para el estudio de las concepciones, creencias, actitudes y emociones de los estudiantes que se suceden en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y de la RPM. Entre los mismos destacan los cuestionarios de respuesta cerrada, existiendo también entrevistas y cuestionarios abiertos.

La preponderancia de los cuestionarios sobre otros tipos de instrumentos se basa en que éstos permiten recoger información acerca de creencias y actitudes, tal como indica Callejo (1994). Además, con el cuestionario se pretende conocer lo que hacen, piensan u opinan los encuestados mediante preguntas realizadas por escrito (Buendía, 1999).

Hay que tener en cuenta igualmente que el cuestionario como instrumento de recogida de datos permite su administración a varias personas de forma simultánea, la salvaguardia del anonimato, la uniformidad en las respuestas dada las opciones estandarizadas en las mismas, la preservación de la fiabilidad de los resultados al ser administrado por terceras personas, la posibilidad de que el encuestado piense acerca de las respuesta al proporcionar mayor tiempo de respuesta y, por último, la facilidad de análisis e interpretación de los datos frente a otros extraídos de respuestas orales, abiertas y/u otros (Gairín, 1990). Además, de acuerdo con Hopkins (1989), el cuestionario concede al estudiante un papel en el proceso de evaluación y exige poco tiempo al profesor para recoger los datos.

No obstante, a pesar de las innumerables preeminencias del cuestionario como instrumento para el estudio de los afectos, es justo indicar que el mismo no está exento de determinadas restricciones como son las limitaciones en cuanto al control y manipulación de determinadas variables y el establecimiento de relaciones de causalidad y en la obtención de información detallada y fiable sobre situaciones naturales en muchas ocasiones (Navas, 2001). Hopkins (1989) indica, en adición, la dificultad de encontrar preguntas que exploren en profundidad, la influencia que ejerce la capacidad de lectura comprensiva de los alumnos y la sinceridad de los mismos en la respuesta puesto que en ocasiones son reacios a responder en consonancia con la realidad respondiendo conforme lo que consideran la deseabilidad del investigador.

Así, son múltiples los autores que han hecho uso del cuestionario para describir y analizar las creencias, actitudes, y emociones de los estudiantes así como también de los futuros docentes hacia las matemáticas y hacia la enseñanza-aprendizaje de esta disciplina.

Al respecto, destacar los cuestionarios de evaluación de las actitudes hacia las matemáticas de Aiken y Dreger (1961), de Fennema y Sherman (1976), de Sandman (1980), de Auzmendi (1991) y de Tapia y Marsh (2004); de evaluación de las actitudes hacia las matemáticas para alumnos de ESO como el Repromase de Carbonero, Martín, y Arranz (1998), el de Muñoz y Mato (2006) y el de Alemany Arrebola y Lara (2010), y de actitudes sobre la RPM de Arlandis y Miranda (1992).

Respecto a las emociones, son escasos los estudios centrados en analizar esta variable en su conjunto hacia las matemáticas, girando los trabajos sobre emociones en la RPM en torno a la ansiedad. Al respecto, destacamos cuestionarios: Escala de Ansiedad Matemática de la Escala de actitud matemática de Fennema y Sherman (1976) y la Mathematics Anxiety Rating Scale (MARS), desarrollada por Richardson y Suinn (1972), y sus muchas derivaciones reducidas de la misma como la propuesta por Plake y Parker (1982) para medir ansiedad hacia las matemáticas y la estadística. Otros instrumentos para la evaluación de la ansiedad matemáticas son la Mathematics Anxiety Scale (MAS), de Betz (1978), el Mathematics Anxiety Questionnaire (MAQ), de Wigfield y Meece (1988) y la Mathematics Anxiety Scale (MANX) diseñado por Erol (1989) para estudiantes turcos (citado por Bekdemir, 2010). Por último, indicar que Caballero (2013) realiza una adaptación a la RPM de la escala de ansiedad-estado del Cuestionario de Ansiedad Estado-Rasgo (STAI), de Spielberger, Gorsuch, y Lushene (1982) para evaluar la ansiedad hacia la RPM. Otros autores se decantan por una entrevista semiestructurada en lugar del cuestionario, tal como hacen Pérez-Tyteca, Monje y Castro (2013) para determinar la ansiedad matemática y la autoconfianza en matemáticas de alumnos que realizan el paso de la educación secundaria a la educación universitaria.

Para el estudio de las expectativas de control, el instrumento más utilizado en España es la Batería de Escalas de Expectativas Generalizadas de Control (BEEGC-20) de Palenzuela, Prieto, Almeida y Barros (1997), del cual Caballero (2013) realiza una adaptación a la RPM.

Sin embargo, ninguno de los cuestionarios revisados valoran creencias, actitudes y emociones de forma conjunta, por lo que el análisis de los tres afectos en una misma población conllevaría la aplicación de un instrumento para cada uno de ellos (actitudes, creencias y emociones) y, por tanto, implicaría un coste considerable de tiempo, de trabajo y de cansancio en el alumnado por la multitud de ítems a los que debería responder. Por otra parte, indicar que la mayoría de los ítems que componen estos instrumentos se refieren a las matemáticas en general y no a la RPM de forma específica. Al respecto cabe señalar que Ma y Kishor (1997, citado por Anderson, 2007) sostienen que, en el caso de las actitudes, las respuestas hacia las matemáticas en general podrían ser demasiado amplias y sugieren la conveniencia de medir las actitudes específicas hacia ciertas áreas o actividades de las matemáticas (por ejemplo, la aritmética, resolución de problemas…) en lugar de la actitud generalizada hacia las matemáticas como un todo. Consideramos que este argumento se hace extensible a todos los afectos hacia las matemáticas.

Dadas las ventajas del cuestionario como instrumento de recogida de datos que recomendamos hacer uso del Cuestionario de Dominio Afectivo en la RPM elaborado por Caballero (2013) que integra tanto actitudes como creencias y emociones hacia la RPM.

1. EL CUESTIONARIO SOBRE DOMINIO AFECTIVO EN LA RPM

El Cuestionario sobre Dominio Afectivo en la RPM que presentamos, es realizado a partir del Cuestionario de Dominio Afectivo en las Matemáticas y la Formación Inicial de los Maestros (Caballero, 2007, 2008), cuya construcción, características y algunos resultados derivados de este último instrumento están a disposición en la publicación de Caballero, Guerrero y Blanco (2014). Dicho cuestionario, fue confeccionado a partir de la revisión realizada de los cuestionarios de Amorim (2004), Callejo (1994), Gil, Blanco y Guerrero (2003) y Gómez-Chacón (2000) y se centra en el dominio afectivo en las matemáticas en general. Es por ello que, inmersos en el diseño y aplicación de un programa de intervención en control emocional en la RPM (Caballero, 2013), consideramos necesario elaborar un cuestionario que se refiriera a esta tarea matemática de forma concreta ya que las respuestas a afectos hacia las matemáticas en general podrían ser demasiado amplias para mostrar las fuertes relaciones que sean significativas y aplicables al desarrollo de la pedagogía.

Para ello, se seleccionaron aquellos ítems referidos explícitamente a la RPM y se adaptaron y modificaron otros para que, haciendo referencia implícita a esta tarea, lo hicieran de forma explícita. Resultado de este proceso es el Cuestionario sobre Dominio Afectivo en la RPM (Anexo).

El cuestionario sobre dominio afectivo en la RPM que proponemos para su administración por parte del lector, presenta un total de 21 ítems ante los cuales el sujeto ha de posicionarse a través de una escala Likert de cuatro alternativas de respuesta en función del grado de conformidad que presente con cada uno de los aspectos. Estas alternativas de respuesta son: 1 = Muy en desacuerdo; 2 = En desacuerdo; 3 = De acuerdo; y 4 = Muy de acuerdo.

Estos 21 ítems pertenecen a 4 dimensiones o categorías diferentes, las cuales, así como sus correspondientes objetivos y descriptores se indican a continuación:

a) Creencias acerca de la naturaleza de los problemas matemáticos y de su enseñanza y aprendizaje (ítems 1 a 5).

- Objetivo: analizar y buscar una mayor comprensión del papel y valor que los EMP atribuyen a la RPM y a su aprendizaje.
- Descriptores:
  - · Visión de utilidad, aplicabilidad e importancia de la RPM en todas las esferas de la vida: ítem 4.
  - · Percepción de la RPM como conocimiento abstracto, memorístico, mecánico: ítems 2, 3.
  - · Visión del maestro en formación inicial sobre cómo se deben aprender a resolver problemas matemáticos: ítems 1, 5.

b) *Creencias acerca de uno mismo como resolutor de problemas matemáticos (ítems 6 a 11).*

– Objetivo: explorar la autoimagen del maestro en formación inicial con respecto a sus habilidades y capacidades como resolutor de problemas matemáticos.

– Descriptores:

· Nivel de confianza y seguridad en sus habilidades, en sus capacidades y posibilidades para desenvolverse con éxito en la RPM: ítems 7, 8, 9

· Atribución causal de éxito o fracaso en la RPM (qué motivos atribuyen al éxito o fracaso – dedicación, esfuerzo, suerte-): ítems 6, 10, 11.

c) A*ctitudes y reacciones emocionales hacia la RPM (ítems 12 a 20)*

– Objetivo: conocer y analizar las actitudes y reacciones emocionales que los EMP manifiestan hacia RPM.

– Descriptores:

· Grado de perseverancia en la RPM: ítems 12, 19, 20.

· Nivel de satisfacción, curiosidad y seguridad en la RPM: ítems 13, 15, 18.

· Nivel de ansiedad (angustia, miedo), sensación de fracaso y frustración, bloqueo: ítems 14, 16, 17.

d) *Valoración de la formación recibida en los estudios de magisterio en relación a la RPM (ítem 21).*

– Objetivo: analizar la valoración del alumno acerca de los cambios que magisterio ha producido en su afrontamiento de la RPM.

– Descriptor:

· Visión del maestro en formación acerca del cambio producido en el abordaje de la RPM debido a los estudios de magisterio: ítem 21.

2. RESULTADOS DERIVADOS DE LA ADMINISTRACIÓN DEL CUESTIONARIO SOBRE DOMINIO AFECTIVO EN LA RPM

Se pretende en este apartado aportar resultados derivados de la administración del Cuestionario sobre Dominio Afectivo en la RPM a una muestra de EMP para que el lector adquiera una visión general de la realidad de las aulas en lo que al dominio afectivo en la RPM respecta y posibilitarle la realización de una comparativa con los que obtenga de la propia aplicación del cuestionario descrito.

La muestra sobre la que se administró el cuestionario está conformada por un total de 60 EMP del tercer curso de Magisterio, Educación Primaria, de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura.

De estos 60 sujetos, la mayoría, un 76.67%, son mujeres (debido a la feminización de los estudios de magisterio) y un 23.33% son hombres.

Se ofrecen a continuación los resultados correspondientes a cada uno de los 21 ítems del Cuestionario a nivel descriptivo, presentándolos por las categorías a las que pertenecen.

2.1. Creencias acerca de la naturaleza de los problemas matemáticos y de su enseñanza – aprendizaje (ítems 1 a 5)

Poco más de la mitad de los EMP está de acuerdo y muy de acuerdo en considerar mecánica la RPM, tal como explicita el 50% y el 5%. No obstante, un 45% está en desacuerdo total o parcialmente ante esta afirmación. La media indica que la opinión de los EMP acerca de la RPM como tarea mecánica se sitúa entre "en desacuerdo" y "de acuerdo" (*M* = 2.45) (Figura 1 y Tabla 1).– aprendizaje (ítems 1 a 5)

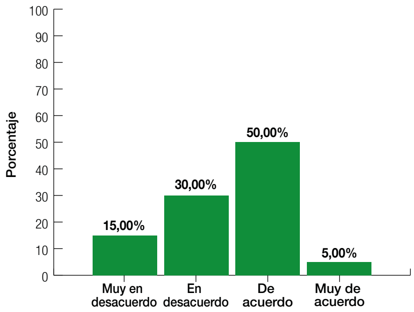


Figura 1. Ítem 1: Casi todos los problemas de matemáticas se resuelven normalmente en pocos minutos, si se conoce la fórmula, regla o procedimiento que ha explicado el profesor o que figura en el libro de texto.

Tabla 1. Estadísticos descriptivos del ítem 1.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	2.45	.811	1	4

Como se puede observar tanto en la media mostrada en la Tabla 2 (M = 1.65) como en la Figura 2, la generalidad de los EMP niega que en la RPM sea más importante el resultado que el proceso, siendo una minoría la que otorga primacía al resultado (8.33%).

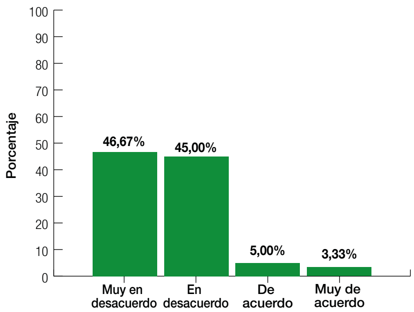


Figura 2. Ítem 2: Al intentar resolver un problema es más importante el resultado que el proceso seguido.

Tabla 2. Estadísticos descriptivos del ítem 2.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	1.65	.732	1	4

Tal como indica la media (M = 3.30) (Tabla 3) y la Figura 3, los EMP consideran la RPM como un conocimiento mecánico y memorístico, tal como manifiesta el 93% de los mismos al estar de acuerdo o muy de acuerdo con esta afirmación. Sendos porcentajes del 3.33% son únicamente los que están muy en desacuerdo y en desacuerdo con el enunciado.

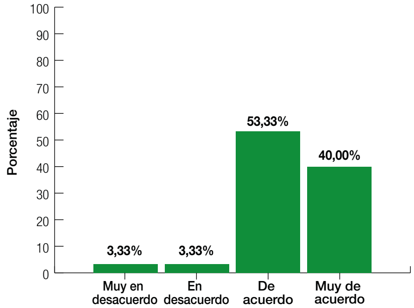


Figura 3. Ítem 3: Sabiendo resolver los problemas que propone el profesor en clase, es posible solucionar otros del mismo tipo si sólo les han cambiado los datos.

TABLA 3. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 3.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	3.30	.696	1	4

Los EMP consideran útiles los aprendizajes de la RPM para la resolución de problemas cotidianos, tal como indica la media mostrada en la Tabla 4 (M = 1.97) y los resultados expuestos en la Figura 4. En los mismos se observa que un 21.67% y un 63.33% están muy en desacuerdo y en desacuerdo, respectivamente, con la afirmación. Sólo un 15% no considera la utilidad diaria de estas habilidades.

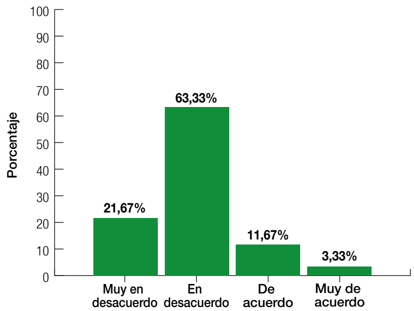


Figura 4. Ítem 4: Las destrezas o habilidades utilizadas en las clases de matemáticas para resolver problemas no tienen nada que ver con las utilizadas para resolver problemas en la vida cotidiana.

TABLA 4. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 4.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	1.97	.688	1	4

A través de la media (M = 2.95) (Tabla 5) y la Figura 5, se extrae que los EMP dicen buscar distintas formas de resolver problemas matemáticos, tal como señala la gran mayoría (76%) al aceptar esta afirmación. Así, exclusivamente sendos porcentajes del 16.67% y 6.67% dicen estar en desacuerdo y muy en desacuerdo, correspondientemente, con la búsqueda de diferentes vías de RPM.

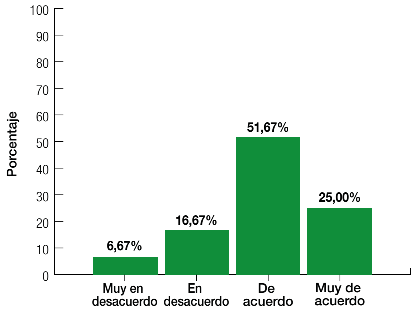


Figura 5. Ítem 5: Busco distintas maneras y métodos para resolver un problema.

TABLA 5. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 5.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	2.95	.832	1	4

2.2. Creencias acerca de uno mismo como resolutor de problemas matemáticos (ítems 6 a 11)

Más de la mitad de los EMP, el 65%, relaciona la dedicación con el rendimiento en la RPM. No obstante, considerables porcentajes del 26.67% y del 8.33% manifiestan estar en desacuerdo y muy en desacuerdo con esta atribución (Figura 6). La media indica igualmente la aceptación de la relación dedicación-rendimiento (M = 2.85) (Tabla 6).

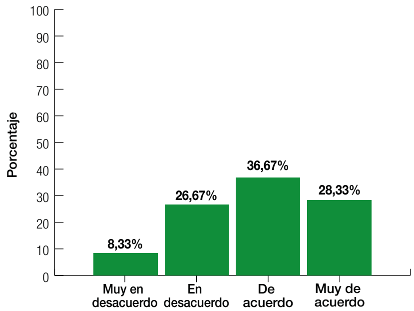


Figura 6. Ítem 6: Cuando se dedica más tiempo de estudio a las matemáticas se obtienen mejores resultados en la RPM.

TABLA 6. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 6.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	1.97	.688	1	4

La mayor parte de los EMP dicen sentir inseguridad en la RPM (M = 3.15), así lo manifiestan un 51.67% y un 31.67% al expresar su conformidad con el enunciado. Sólo un 16.67% expresa no estar de acuerdo con la afirmación de este ítem, siendo nulo el porcentaje que muestra su total desacuerdo con la misma (Figura 7 y la Tabla 7).

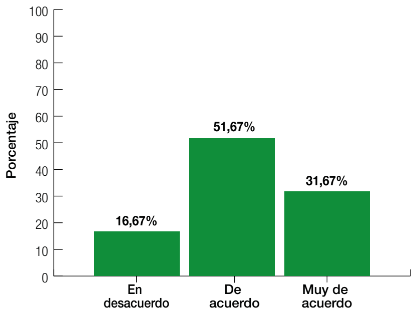


Figura 7. Ítem 7: Cuando resuelvo un problema suelo dudar de si el resultado es correcto.

TABLA 7. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 7.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	3.15	.685	2	4

En función de la media (M = 2.08) y los porcentajes, se extrae que los EMP no tienen autoconfianza en la RPM. Así, mientras que un 23.33% y un 45% señalan estar muy en desacuerdo y en desacuerdo con el enunciado, respectivamente, sólo un 31.67% manifiesta su conformidad con el mismo, no existiendo casos que señalen la total conformidad (Tabla 8 y la Figura 8).

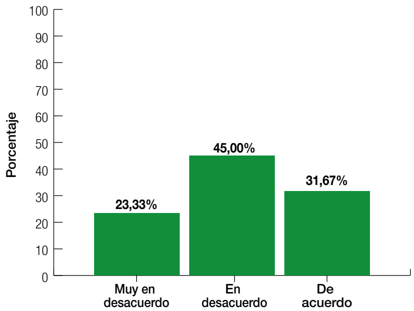


Figura 8. Ítem 8: Tengo confianza en mí mismo cuando me enfrento a los problemas de matemáticas.

TABLA 8. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 8.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	2.08	.743	1	3

De los resultados expuestos en la Figura 9 y la Tabla 9, se extrae que poco más de la mitad de los EMP (55%) dicen no estar calmados y tranquilos en la RPM (M = 2.30). Sin embargo, sustancial es el porcentaje que está de acuerdo en experimentar tranquilidad ante la RPM, concretamente un 41.67% siendo exiguo el de aquellos que están muy de acuerdo con el enunciado (3.33%).

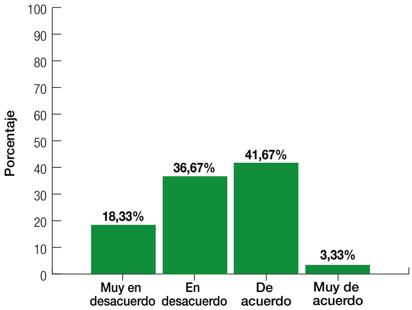


Figura 9. Ítem 9: Estoy calmado y tranquilo cuando resuelvo problemas de matemáticas.

Tabla 9. Estadísticos descriptivos del ítem 9.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	2.30	.809	1	4

Aunque más de la mitad de los EMP señalan que el esfuerzo influye en la superación de los problemas matemáticos (un 56.67% está de acuerdo y un 5% muy de acuerdo), no pasa desapercibido el porcentaje que no está de acuerdo en atribuir sus resultados en la RPM al esfuerzo (36.67%) siendo exiguo el de aquellos que muestran su total disconformidad (Figura 10). De ahí la media (M = 2.65) (Tabla 10).

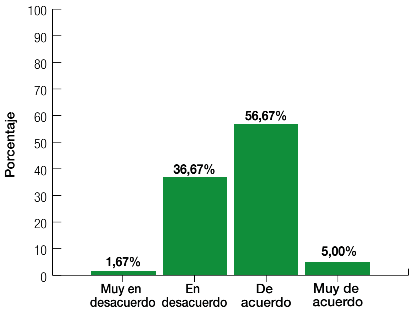


Figura 10. Ítem 10: Cuando me esfuerzo en la resolución de un problema suelo dar con el resultado correcto.

Tabla 10. Estadísticos descriptivos del ítem 10.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	2.65	.606	1	4

Mediante la Figura 11 y la Tabla 11, se desprende que la gran mayoría de los EMP (86.67%) no creen en la suerte en la RPM (M = 1.82). Sólo sendos porcentajes del 8.33% y el 5% están de acuerdo y muy de acuerdo en señalar la suerte como factor influyente en la RPM.

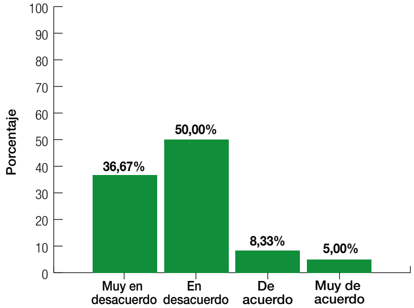


Figura 11. Ítem 11: La suerte influye a la hora de resolver con éxito un problema de matemáticas.

TABLA 11. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 11.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	1.82	.792	1	4

Más de la mitad de los EMP niega desistir ante la RPM (M = 2.22), tal como lo expresan un 41.67% y un 21.67% parcial y totalmente, respectivamente. Junto a estos, un 30% y un 6.67% manifiestan su conformidad y total conformidad en reconocer el abandono de la RPM (Figura 12 y Tabla 12).

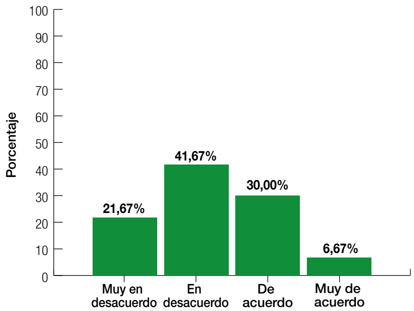


Figura 12. Ítem 12: Ante un problema complicado suelo darme por vencido fácilmente.

TABLA 12. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 12.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	2.22	.865	1	4

En cuanto a la curiosidad por conocer la solución en la RPM, la media (M = 2.79) (Tabla 13) indica la conformidad de los EMP con el enunciado. Así, como muestra la Figura 13, la generalidad de los EMP indican sentir inquietud y mucha inquietud por la solución de los problemas (58.33% y 23.33%, respectivamente), siendo sólo un 18,33% los que dicen no estar de acuerdo en anhelar las soluciones.

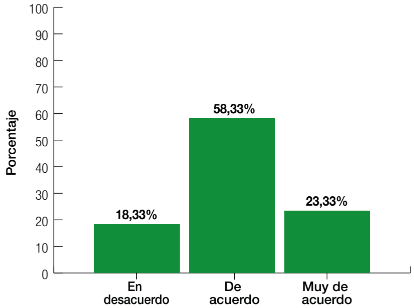


Figura 13. Ítem 13: Cuando me enfrento a un problema experimento mucha curiosidad por conocer la solución.

TABLA 13. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 13.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	3.05	.649	2	4

2.3. Actitudes y reacciones emocionales hacia la RPM (ítems 12 a 20)

La media obtenida (M = 2.95) (Tabla 14) indica que los EMP sienten angustia y miedo ante la RPM. Sendos porcentajes del 33.90% señalan estar de acuerdo y muy de acuerdo con ello. Contrariamente se sitúan el 25.42% y el 6.78% que manifiestan su disconformidad parcial y total, respectivamente, con experimentar dichas emociones (Figura 14).

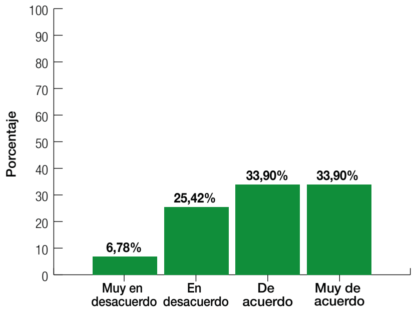


Figura 14. Ítem 14: Me angustio y siento miedo cuando el profesor me propone "por sorpresa" que resuelva un problema.

TABLA 14. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 14.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
59	2.95	.936	1	4

Tanto la media (M = 3.10) (Tabla 15) como la Figura 15, indican que la generalidad de los EMP manifiestan experimentar mayor seguridad cuando trabajan la RPM en grupo (un 55% está de acuerdo y un 30% muy de acuerdo). Únicamente un 15% indica no sentirse más seguros ante la RPM por el hecho de trabajar en grupo.

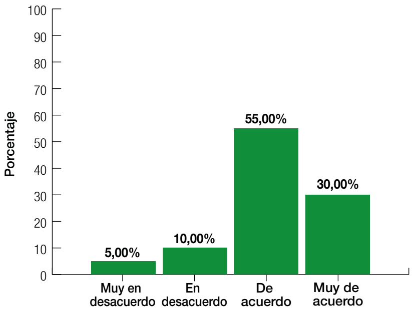


Figura 15. Ítem 15: Cuando resuelvo problemas en grupo tengo más seguridad en mí mismo.

Tabla 15. Estadísticos descriptivos del ítem 15.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
59	3.10	.775	1	4

La media (M = 3.20) y los porcentajes (Tabla 16 y Figura 16), indican que los EMP reaccionan con desesperación, inseguridad y nerviosismo ante los bloqueos en la RPM. Así lo confirma un 86.66%. Sólo sendos porcentajes del 8.33% y 5% están en desacuerdo o muy en desacuerdo en experimentar estas emociones ante los bloqueos en la RPM.

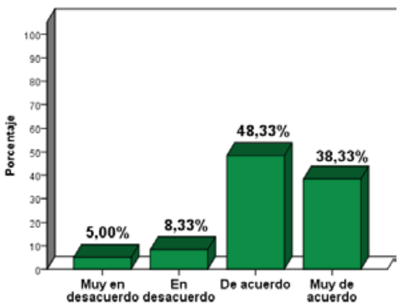


Figura 16. Ítem 16: Cuando me atasco o bloqueo en la resolución de un problema empiezo a sentirme inseguro, desesperado, nervioso...

Tabla 16. Estadísticos descriptivos del ítem 16.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	3.20	.798	1	4

Hay divergencias en los EMP ante la sensación de fracaso en la RPM al no hallar la solución (M = 2.67). Así, un 50% dice estar de acuerdo o muy de acuerdo en experimentar dicha sensación frente al 46.67% que lo niega, siendo exiguo el porcentaje de sujetos que muestran su total disconformidad con el enunciado (Figura 17 y Tabla 17).

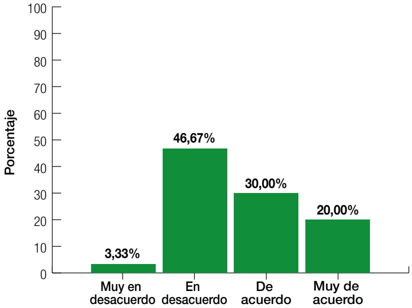


Figura 17. Ítem 17: Si no encuentro la solución de un problema tengo la sensación de haber fracasado y de haber perdido el tiempo.

TABLA 17. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 17.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	2.67	.837	1	4

Prácticamente la totalidad de los EMP sienten satisfacción ante el éxito en la RPM. Así se desprende de la media (M = 3.65) (Tabla 18) y de los porcentajes (Figura 18), donde se observa que el 31.67% y el 66.67%, dicen estar de acuerdo y muy de acuerdo con ello. Son exiguos y nulos los porcentajes de los EMP que dicen estar en desacuerdo y total desacuerdo, correspondientemente, con el enunciado.

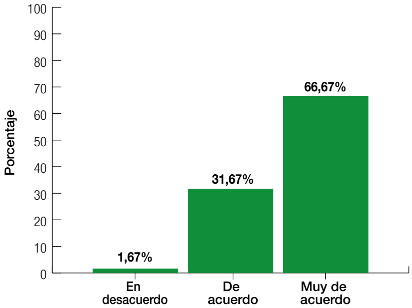


Figura 18. Ítem 18: Me provoca gran satisfacción llegar a resolver con éxito un problema matemático.

TABLA 18. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 18.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	3.65	.515	2	4

Los EMP dicen perseverar en la RPM, tal como lo indica la media (M = 3.30). Concretamente un 56.67% manifiesta estar de acuerdo en tomar esa actitud y un 25% muy de acuerdo. Sólo un 15% está en desacuerdo con el enunciado, siendo exiguo el porcentaje que está muy en desacuerdo en reconocer su perseverancia en la RPM (Figura 19 y Tabla 19).

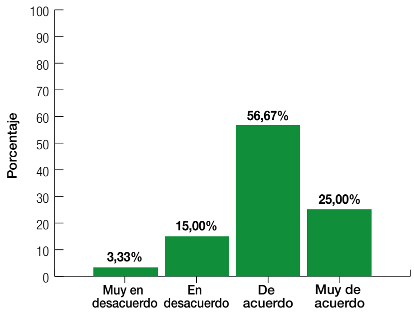


Figura 19. Ítem 19: Cuando fracasan mis intentos por resolver un problema lo intento de nuevo.

TABLA 19. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 19.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	3.03	.736	1	4

En concordancia con la pregunta anterior, la práctica globalidad de los EMP declaran que la RPM exige esfuerzo, perseverancia y paciencia (M = 3.65). De esta forma, un 31.69% está de acuerdo con dicha afirmación y un 66.67% muy de acuerdo. Sólo un exiguo porcentaje del 1.67% indica no estar de acuerdo y ninguno su total disconformidad (Figura 20 y Tabla 20).

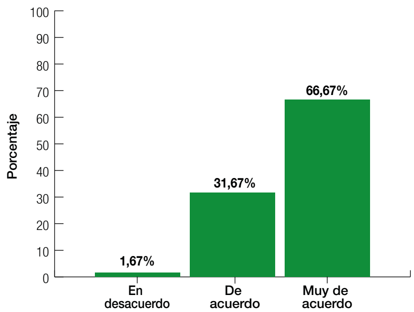


Figura 20. Ítem 20: La resolución de un problema exige esfuerzo, perseverancia y paciencia.

TABLA 20. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 20.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
60	3.65	.515	2	4

ÍNDICE

2.4. Valoración de la formación recibida en los estudios de magisterio en relación a la RPM (ítem 21)

La Figura 21 y Tabla 21 evidencian discrepancias entre los EMP a la hora de mostrar su conformidad con el enunciado (M = 2.53). Así, mientras que un 47.45% niega haber descubierto otras formas de abordar la RPM en los estudios de magisterio, un porcentaje ligeramente mayor del 52.55% está de acuerdo y muy de acuerdo con esta afirmación.

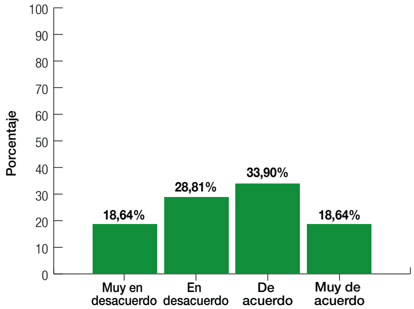


Figura 21. Ítem 21. En magisterio, he descubierto otras formas de abordar los problemas matemáticos.

Tabla 21. Estadísticos descriptivos del ítem 1.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
59	2.53	1.006	1	4

De la aplicación del cuestionario especificado, se deduce, en síntesis y en relación con las creencias acerca de la naturaleza de los problemas matemáticos y de su enseñanza y aprendizaje, que persiste en los sujetos la consideración de la RPM como una tarea matemática mecánica. Así, prevalece la idea de que la RPM consiste en la aplicación de algoritmos y fórmulas matemáticos, de forma que, sabiendo resolver un problema, es posible resolver otros similares sólo cambiando los datos. Estos resultados reflejan de forma implícita la primacía de los ejercicios sobre los problemas matemáticos en la realidad de las aulas. No obstante, consideran que en la RPM es más importante el proceso que el resultado, manifestando que buscan diferentes estrategias de resolución al resolver problemas matemáticos, aspecto que se refleja en el currículo del área matemática. Además, señalan la aplicabilidad de las competencias matemáticas trabajadas en la RPM en tareas de la vida cotidiana.

En lo que a las creencias acerca de sí mismos como resolutores de problemas matemáticos respecta, indicar que los estudiantes dudan sobre la corrección del resultado en la RPM y se muestran nerviosos ante esta tarea, evidenciando la persistencia de bajas expectativas de autoeficacia y de éxito en la RPM del estudiantado.

Inmersos en las creencias acerca de sí mismos como resolutores de problemas matemáticos y más específicamente en las expectativas de locus de control, se concluye que los estudiantes atribuyen principalmente los resultados en la RPM a la dedicación, la perseverancia y el esfuerzo, descartando la influencia de la suerte en los mismos. De esta forma, relacionan los resultados en la RPM con factores internos (dependientes de ellos mismos) y controlables, atribución favorecedora de cara al aprendizaje.

En relación a las actitudes hacia la RPM manifestadas, indicar que los estudiantes sienten curiosidad por la solución de los problemas y una enorme satisfacción ante el éxito en esta actividad matemática, lo que hace que perseveren y se esfuercen en la resolución de problemas, reconociendo estos aspectos, junto con la paciencia, como fundamentales para la mencionada tarea. Sin embargo, la mitad de los sujetos encuestados indican experimentar una sensación de fracaso y de pérdida de tiempo en el caso de no encontrar la solución de un problema, no concediendo por tanto tanta importancia al proceso de resolución como indican en el ítem correspondiente.

Respecto a las emociones suscitadas, se aprecia que los estudiantes sufren ansiedad ante la RPM, de forma que manifiestan sentir inseguridad, desesperación, nerviosismo, angustia y miedo ante esta tarea matemática. No obstante, advierten de que la inseguridad que experimentan ante la RPM desciende al trabajar en grupo.

En cuanto a la valoración de la formación recibida en los estudios de magisterio en relación a la RPM, poco más de la mitad de los encuestados manifiesta haber descubierto en dichos estudios el abordaje de los problemas matemáticos desde perspectivas diferentes a las abordadas en su experiencia como discentes.

En vista de todo lo anterior se concluye que los estudiantes presentan una concepción tradicional de la RPM ligándola a un proceso de enseñanza-aprendizaje mecánico y memorístico. Además, se aprecian emociones disfuncionales a la hora de enfrentarse a la RPM. En consecuencia, consideramos fundamental presentar a los estudiantes verdaderos problemas matemáticos, discerniendo entre éstos y los ejercicios matemáticos, problemas que sigan las proposiciones de Santos (1996), esto es que sean accesibles en base a los conocimientos previos de los alumnos, que ilustren ideas matemáticas importantes sin involucrar trucos o soluciones sin explicación, que pueden extenderse o generalizarse a otros contextos y, lo más importante, que posibiliten su resolución mediante varios métodos o formas. Ello posibilitará que el docente exija a los discentes la búsqueda de más de una estrategia de resolución en los problemas, lo que obligará a los estudiantes a trabajar los problemas desde perspectivas diferentes a la aplicación de fórmulas o algoritmos matemáticos. Además, proponemos que dichos problemas se presenten aumentando gradualmente su dificultad para posibilitar la consecución de los mismos y así repercutir en el refuerzo de la seguridad y las expectativas de éxito del estudiante. Consecuentemente, planteamos la necesidad, tal como indican Blanco, Guerrero y Caballero (2013) y Caballero, Guerrero y Blanco (2011), de trabajar la RPM en las aulas desde un enfoque integrador de los factores cognitivos y afectivos. En esta línea, Caballero (2013) propone un programa psicopedagógico de intervención sobre control emocional y RPM, cuyos objetivos se centran en el desarrollo y aplicación de estrategias para la resolución de problemas, la reestructuración cognitiva, la disminución del estado de activación y tensión psicofisiológica y la mejora del autocontrol emocional.

BIBLIOGRAFÍA

— AIKEN, LR; DREGER, RM. The Effect of Attitudes on Performance in Mathematics. En Journal of Educational Psychology, 1961, n. 52, pp. 19-24.

— ANDERSON, V. An online survey to assess student anxiety and attitude response to six different mathematical problems. En WATSON, J; BESWICK, K (Eds.): Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Adelaide: MERGA Inc., 2007, pp. 93-102.

— AMATO, Solange Amorim. Improving student teachers' attitudes to mathematics. En Proceedings of the 28th Conference of the International, 2004, p. 25-32.

— ARLANDIS, P; MIRANDA, A. Estudiantes con dificultades en la resolución de problemas de matemáticas. Efectos de la instrucción en estrategias sobre el aprendizaje y la conducta. Tesis Doctoral Inédita-Universidad de Valencia. Valencia, España: 1992.

— ALEMANY ARREBOLA, I; LARA, AI. Las actitudes hacia las matemáticas en el alumnado de ESO: un instrumento para su medición. En revista Publicaciones, 2010, n. 40, pp. 49-71.

— AUZMENDI, E. Evaluación de las Actitudes hacia la Estadística en Estudiantes Universitarios y Factores que las determinan. Tesis Doctoral Inédita-Universidad de Deusto. Bilbao, España: 1991

— BEKDEMIR, M. The pre-service teachers' mathematics anxiety relate to deth of negative experiences in mathematics classroom whil they were students. En Educ Stud Math, 2010, n. 75, pp. 311-328.

— BETZ, NE. Prevalence, distribution and correlates of math anxiety in college students. Journal of Couseling Psychology, 1978, Vol. 25, n. 5, pp. 441-448.

— BLANCO, LJ; GUERRERO, E; CABALLERO, A. Cognition and Affect in Mathematics Problem Solving with Prospective Teachers. En The Mathematics Enthusiast, 2013 - Special Issue, Vol. 10, n. 1 y 2, pp. 335 – 364. Recuperado de: http://www.math.umt.edu/tmme/vol10no1and2/13-Blanco-et%20al_pp335_364.pdf.

— BUENDÍA, L. (Coord.). Modelos de análisis de la investigación educativa. Sevilla: Alfar, 1999.

— CABALLERO, A. Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la UEx. Trabajo Final de Máster no publicado-Universidad de Extremadura. Badajoz, España: 2007. Recuperado de: http://www.eweb.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/anacaba.pdf.

— CABALLERO, A. El Dominio Afectivo en las Matemáticas de los estudiantes para Maestro de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. Trabajo de investigación para la obtención del Diploma de Estudios Avanzados no publicado-Universidad de Extremadura. Badajoz, España: 2008.

— CABALLERO, A. Diseño, Aplicación y Evaluación de un Programa de Intervención en Control Emocional y Resolución de Problemas Matemáticos para Maestros en Formación Inicial. Tesis doctoral Inédita - Universidad de Extremadura, Badajoz, España: 2013. Recuperado de: http://dehesa.unex.es:8080/xmlui/handle/10662/590.

— CABALLERO, A; BLANCO, LJ; GUERRERO, E. Problem Solving And Emotional Education In Initial Primary Teacher Education. En The Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2011, Vol. 7, n. 4, pp. 281-292. Recuperado de: http://www.ejmste.com/v7n4/EURASIA_v7n4_Caballero.pdf.

— CABALLERO, A; GUERRERO, E; BLANCO, LJ. Construcción y administración de un instrumento para la evaluación de los afectos hacia las matemáticas. En revista Campo Abierto, 2014, 33(1):47-71.
— CALLEJO, ML. Un club matemático para la diversidad. Madrid, España: Narcea. 1994.
— CARBONERO, MA; MARTÍN, LJ; ARRANZ, E. Expectativas ante las matemáticas de alumnos de primer ciclo de Educación Secundaria. En Revista de Psicodidáctica, 1998, n. 6, pp. 69-78.
— FENNEMA, E; SHERMAN, JA. Fennema-Sherman mathematics attitude scales. Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by males and females. En Journal for Research in Mathematics Education, 1976, n. 7, pp. 324-326.
— GAIRÍN, J. Las actitudes en educación. Un estudio sobre la educación matemática. Barcelona, España: Boixareu Universitaria, 1990.
— GIL, N; BLANCO, LJ; GUERRERO, E. El papel de la afectividad en la resolución de problemas. En Revista de Educación, 2006, n. 340, pp. 551-569. http://www.revistaeducacion.mec.es/re340/re340_20.pdf.
— GÓMEZ-CHACÓN, IM. Matemática Emocional. Los Afectos en el Aprendizaje Matemático. Madrid, España: Narcea, 2000.
— HOPKINS, D. Investigación en el aula. Barcelona, España: PPU, 1989.
— MUÑOZ, JM; MATO, MD. Diseño y validación de un cuestionario para medir las actitudes hacia las matemáticas en alumnos de ESO. En Revista galego-portuguesa de psicoloxía e educación, 2006, Vol. 11-12, n. 13, pp. 413-424.
— NAVAS, MJ. Métodos, Diseños y Técnicas de Investigación Psicológica. Madrid, España: UNED, 2001.
— PALENZUELA, DL. Construcción y validación de una escala de autoeficacia percibida específica de situaciones académicas. En revista Análisis y Modificación de Conducta, 1983, Vol. 9, n. 21, pp. 185-219.
— PALENZUELA, DL; PRIETO, G; ALMEIDA, LS; BARROS, M. Una versión española de una batería de escalas de expectativas generalizadas de control (BEEGC). En Revista portuguesa de educaçao, 1997, Vol. 10, n. 1, pp. 75-96.
— PÉREZ-TYTECA, P; MONJE, J; CASTRO, E. Afecto y matemáticas. Diseño de una entrevista para acceder a los sentimientos de alumnos adolescentes. En revista Avances de Investigación en Educación Matemática, 2013, n. 4, pp. 65-82.
— PLAKE, BS; PARKER, CS. The development and avalidation of a revised version of the Mathematics Anxiety Rating Scale. En Educational and Psychological Measurement, 1982, n. 42, pp. 551-557.
— RICHARDSON, FC; SUINN, RM. The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. En Journal of Counseling Psychology, 1972, Vol. 19, n. 6, pp. 551-554.
— SANDMAN, RS. The mathematics Attitude Inventory: Instrument ans User´s Manual. En Journal for research in Mathematics Education, 1980, n. 11, pp. 148-149.
— SPIELBERGER, CD; GORSUCH, RR; LUSHENE, RE. STAI. Cuestionario de Ansiedad Estado/Rasgo. Madrid, España: TEA Ediciones. 1982.
— TAPIA, M; MARSH, GE. An instrument to measure mathematics attitudes. En Academic Exchange Quartely, 2004, Vol. 8, n.2. www.rapidintellect.com/AEQweb/cho25344l.htm.
— WIGFIELD, A; MEECE, JL. Math anxiety in elementary and secondary school students. En Journal of Educational Psychology, 1988, Vol. 80, n. 2, pp. 210-216.

Cuestionario sobre el Dominio Afectivo en la Resolución de Problemas Matemáticos

Nombre y Apellidos:..

Edad: .... **Sexo:** ☐ Hombre ☐ Mujer

Localidad de procedencia: ....

Curso: ....

Te rogamos que cuantifiques cada una de las siguientes cuestiones, según el grado de acuerdo con las afirmaciones que se expresan.

1 = Muy en desacuerdo 2 = En desacuerdo 3 = De acuerdo 4 = Muy de acuerdo

1. Casi todos los problemas de matemáticas se resuelven normalmente en pocos minutos, si se conoce la fórmula, regla o procedimiento que ha explicado el profesor o que figura en el libro de texto.	1	2	3	4
2. Al intentar resolver un problema es más importante el resultado que el proceso seguido.	1	2	3	4
3. Sabiendo resolver los problemas que propone el profesor en clase, es posible solucionar otros del mismo tipo si sólo les han cambiado los datos.	1	2	3	4
4. Las destrezas o habilidades utilizadas en las clases de matemáticas para resolver problemas no tienen nada que ver con las utilizadas para resolver problemas en la vida cotidiana.	1	2	3	4
5. Busco distintas maneras y métodos para resolver un problema.	1	2	3	4
6. Cuando se dedica más tiempo de estudio a las matemáticas se obtienen mejores resultados en la resolución de problemas.	1	2	3	4
7. Cuando resuelvo un problema suelo dudar de si el resultado es correcto.	1	2	3	4
8. Tengo confianza en mí mismo cuando me enfrento a los problemas de matemáticas.	1	2	3	4
9. Estoy calmado y tranquilo cuando resuelvo problemas de matemáticas.	1	2	3	4
10. Cuando me esfuerzo en la resolución de un problema suelo dar con el resultado correcto.	1	2	3	4
11. La suerte influye a la hora de resolver con éxito un problema de matemáticas.	1	2	3	4
12. Ante un problema complicado suelo darme por vencido fácilmente.	1	2	3	4
13. Cuando me enfrento a un problema experimento mucha curiosidad por conocer la solución.	1	2	3	4
14. Me angustio y siento miedo cuando el profesor me propone “por sorpresa” que resuelva un problema.	1	2	3	4
15. Cuando resuelvo problemas en grupo tengo más seguridad en mí mismo.	1	2	3	4
16. Cuando me atasco o bloqueo en la resolución de un problema empiezo a sentirme inseguro, desesperado, nervioso…	1	2	3	4
17. Si no encuentro la solución de un problema tengo la sensación de haber fracasado y de haber perdido el tiempo.	1	2	3	4
18. Me provoca gran satisfacción llegar a resolver con éxito un problema matemático.	1	2	3	4
19. Cuando fracasan mis intentos por resolver un problema lo intento de nuevo.	1	2	3	4
20. La resolución de un problema exige esfuerzo, perseverancia y paciencia.	1	2	3	4
21. En magisterio, he descubierto otras formas de abordar los problemas matemáticos.	1	2	3	4

CAPÍTULO 4
LA ANSIEDAD DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO ANTE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Rosa Gómez del Amo y Ana Caballero Carrasco

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas es un hallazgo común en multitud de investigaciones (Caballero, 2013, Durmus, 2004; Halat, 2007). Se han estudiado diversas variables que influyen en este hecho: el tipo de instrucción, el género, el ambiente, la falta de apoyo de los padres, la falta de confianza en sí mismo, los estilos de aprendizaje, la ansiedad matemática, etc. (Peker, 2005; Iossy, 2007). Algunas de estas variables están incluidas en los factores que engloban la ansiedad hacia las matemáticas y que son los siguientes: factores intelectuales, factores ambientales y de personalidad (Trujillo, y Hadfield, 1999). Entre los factores intelectuales cabe destacar las actitudes de los estudiantes, la falta de confianza en las habilidades matemáticas y los estilos de aprendizaje. Respecto a los factores ambientales, éstos incluyen el uso del método tradicional de enseñanza, el ambiente del aula, las demandas de los padres, etc. Mientras que los factores de personalidad implican la baja autoestima y la timidez de los alumnos entre otros aspectos (Peker, Halat y Mirasyedioglu, 2010).

Tomamos la definición de Gresham (2010) para describir la ansiedad hacia las matemáticas como un miedo irracional hacia esta disciplina, que obstaculiza la realización de cálculos numéricos y la resolución de problemas matemáticos en diversas situaciones de la vida académica y cotidiana del sujeto. Ampliamos esta definición con la aportada por Uusimäki y Nason (2004) que señala que

> la ansiedad hacia las matemáticas es un sentimiento de gran frustración o impotencia sobre la propia capacidad para las matemáticas, con una respuesta emocional aprendida a la hora de participar en las clases de matemáticas, escuchar un tema, trabajar a través de problemas y / o debatir sobre las matemáticas (Uusimäki y Nason, 2004, p. 370).

Actualmente, la ansiedad hacia las matemáticas es un fenómeno que ocurre desde Educación Primaria hasta estudios universitarios (Caballero, 2013; Yüksel-Sahin, 2008; Peker, Halat, y Mirasyedioglu 2010), convirtiéndose en uno de los problemas emocionales más prevalentes asociados a las matemáticas (Baloglu y Koçak 2006). Autores como Uusimäki y Nason (2004), atribuyen el origen de las creencias negativas de los profesores en formación y la ansiedad hacia las matemáticas a las experiencias como estudiantes de matemáticas, al efecto que tuvieron en ellos sus profesores y a los programas de formación docente. Relacionado con lo anterior, las experiencias docentes anteriores contribuyen a la idea de cómo se deben enseñar las matemáticas (Austin, Wadlington y Bitner 1992), pero si el aprendizaje no se corresponde con las expectativas se produce una fuerte desmotivación que hay que evitar (Gómez-Chacón, 2000).

Pero los profesores en formación no solo manifiestan ansiedad hacia las matemáticas, sino que también presentan ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas (Levine, 1996; Peker, 2006, 2009a). Bursal y Paznokas (2006), miden los niveles ansiedad hacia las matemáticas y los niveles de confianza para enseñar matemáticas en estudiantes de magisterio de educación primaria. Sus resultados sugieren que los futuros maestros de matemáticas poco ansiosos tienen más confianza para enseñar matemáticas que sus compañeros que tienen mayores niveles de ansiedad.

Peker (2006) define la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas como los sentimientos de tensión de los docentes y la ansiedad que se produce durante la enseñanza de los conceptos matemáticos, teorías y fórmulas o durante la resolución de problemas. Anteriormente, Gardner y Leak (1994) conceptualizaron la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas como la ansiedad manifestada en relación con las actividades de enseñanza, que implican la preparación y ejecución de las actividades en el aula.

Existen diferentes factores que afectan a la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas siendo el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico, las actitudes hacia las matemáticas y la confianza en sí mismo los que parecen tener mayor influencia en este aspecto (Peker, 2006). Un diálogo interno negativo puede ser también una causa fundamental de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas de forma que, cuando se enseña un concepto matemático, el profesor en formación probablemente no será capaz de enseñar dicho concepto, si él o ella se está constantemente diciendo a sí mismo que no puede enseñarlo, o que nunca ha sido bueno en la enseñanza de las matemáticas (Peker, 2009a).

Peker (2009a) indica que las técnicas de enseñanza aprendidas por los docentes en formación durante sus años escolares y sus estilos de aprendizaje tienen un impacto positivo en la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas. Este mismo autor (2008) encuentra una relación directa entre el nivel educativo y el nivel de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas de los docentes, de forma que, según aumenta el nivel educativo, aumenta la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas. En esta línea, Ameen, Guffey y Jackson (2002) señalan que la intensidad de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas está determinada por la experiencia, la edad y el rango de los docentes.

En el estudio desarrollado por Levine (1996) queda constatado que las discusiones abstractas relativas a los conceptos matemáticos aumentan la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas de los profesores en formación. En cambio, la utilización de materiales manipulativos, el desarrollo de estrategias de enseñanza y aprendizaje creativas y el diseño de planes de estudio para la enseñanza de conceptos matemáticos, reducen el nivel de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas.

Los síntomas de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas pueden incluir nerviosismo extremo, la incapacidad para concentrarse, autodiálogos negativos, distraerse fácilmente por ruidos al no poder oír a los estudiantes y la sudoración de las manos, entre otros (Peker, 2009a).

Igualmente, la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas puede reflejar los déficits reales o percibidos sobre el conocimiento del contenido, las habilidades y la enseñanza de las matemáticas, así como los recuerdos de fracasos en actividades matemáticas o haber sentido ansiedad hacia las matemáticas (Levine, 1993).

En esta misma línea, varios estudios han hecho hincapié en que la ansiedad y el miedo que un docente procese hacia las matemáticas va a verse reflejado en la conducta de sus alumnos (Howard, 1982) y por ende en el rendimiento de los mismos. Es por este motivo que actualmente muchos investigadores muestran un gran interés en analizar la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas, sobre todo con docentes en formación (Bursal y Paznokas, 2006; Ertekin, 2010; Liu, 2008; Peker, 2009a), ya que estos docentes sienten realmente miedo cuando piensan en cómo se desenvolverán y lo que deberían hacer y decir cuando estén en una clase de matemáticas (Peker, 2009b)

Por tanto, es de vital importancia detectar e intervenir en la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas de los profesores en formación ya que, como apunta Peker (2009b), puede provocar el desarrollo de comportamientos de enseñanza que son inapropiados, ineficaces y perjudiciales para la salud de los profesores. Caballero (2013), abunda en esta idea al mencionar la influencia que los afectos de los futuros docentes tendrán en el logro de sus alumnos.

Consecuentemente, nos planteamos en este capítulo presentar los resultados derivados de un estudio descriptivo exploratorio a través de una investigación por encuesta, desarrollado con el objetivo de analizar la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas de los estudiantes para maestro (EMP).

1. PARTICIPANTES

Forman parte de nuestro estudio 192 EMP del tercer curso de todas las especialidades de Magisterio, esto es Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Física, Audición y Lenguaje, Pedagogía Terapéutica y Lenguas Extranjeras, tratándose del curso previo a la entrada en vigor de los actuales Grados de Magisterio. De los mismos, un 80,73% son mujeres y el 19,27% son hombres presentando una edad media de 22 años (DT = 4,5).

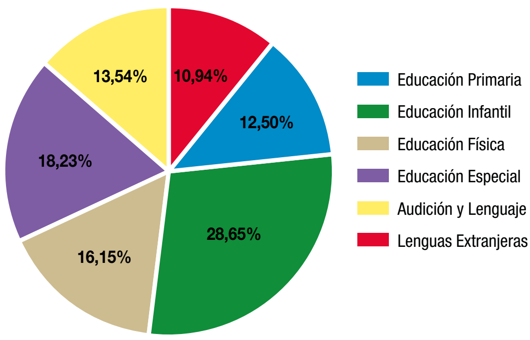


Figura 1. Porcentajes de la muestra según la especialidad de Magisterio cursada.

Por otro lado, un 21,9% de estos estudiantes consideran que tienen un nivel bajo de matemáticas, un 63% un nivel medio, un 13% un nivel alto y tan solo un 1,6% un nivel de matemáticas excelente.

2. INSTRUMENTO

Para la recogida de datos se ha hecho uso de la Mathematics Teaching Anxiety Scale - MATAS – (Peker, 2006), para lo cual se ha procedido a la traducción de dicha escala al castellano, conservando las diferentes dimensiones e ítems del original. La MATAS es una escala que consta de 23 proposiciones que hay que valorar en una escala tipo líkert de 5 puntos, significando el 1 totalmente desacuerdo, el 2 en desacuerdo, el 3 indeciso, el 4 de acuerdo y el 5 totalmente de acuerdo con las proposiciones negativas (Siento que no sé nada sobre los temas de matemáticas que voy a enseñar). Aunque en el caso de las proposiciones positivas (Me siento capacitado como profesor para resolver problemas matemáticos) esta escala se valora a la inversa, esto es de 5 a 1 puntos. Por tanto, la puntuación más alta que una persona puede hacer en el MATAS es 115 (23x5), y la más baja es de 23 (23x1).

Dicha escala presenta cuatro factores o dimensiones:

a) *Conocimiento del contenido* (10 ítems, del 1 al 10).
b) *Confianza en sí mismo* (6 ítems, del 11 al 16).
c) *Actitud hacia la enseñanza de las matemáticas* (4 ítems, del 17 al 20).
d) *Conocimiento didáctico* (3 ítems, del 21 al 23).

La fiabilidad de la escala original fue analizada mediante el coeficiente α de Cronbach para cada una de estas subescalas, obteniendo en Conocimiento del contenido un $\alpha = .90$, en la de Confianza en sí mismo un $\alpha = .83$, en la de Actitud hacia la enseñanza de las matemáticas un $\alpha = .71$ y en la referente al Conocimiento didáctico $\alpha = .61$. Para la Escala Total su índice de fiabilidad es de .91.

Una vez traducida la escala y procesados los datos derivados de la administración de la misma a la muestra descrita, analizamos la fiabilidad de la escala, obteniendo los siguientes resultados: la subescala Conocimiento del contenido obtiene un coeficiente α de Cronbach de .928; la subescala Confianza en sí mismo, un $\alpha = .88$; la relativa a Actitudes hacia la enseñanza de las matemáticas, un $\alpha = .92$; y en la de Conocimiento didáctico, un $\alpha = .797$. Se obtienen por tanto coeficientes de fiabilidad superiores a los de la escala original al analizarlos por subescalas o factores. Sin embargo, al analizar la fiabilidad de la escala total, hallamos un coeficiente α de Cronbach de .602, inferior al de la original.

Posteriormente, se procedió al análisis descriptivo e inferencial con el paquete estadístico SPPS 18.0 para Windows. En este capítulo damos cuenta de los resultados del análisis descriptivo.

3. RESULTADOS

Se presentan a continuación los resultados derivados del análisis descriptivo realizado a través del paquete estadístico SPPS 18.0 para Windows, ordenados según las dimensiones o factores a las que pertenecen.

3.1. Conocimiento del contenido (ítems 1 a 10)

La mayoría de los EMP manifiestan tener conocimiento de los contenidos matemáticos a enseñar en su futura labor docente (*M* = 2.19), tal como indican un 68.23% al estar en desacuerdo con el enunciado presentado en el Ítem 1. No obstante un 23.44% se muestran indecisos al respecto, quizás por no determinarse los contenidos curriculares. (Figura 2 y Tabla 1). Sólo un 4.69% y un 3.65% afirman no saber nada sobre los temas matemáticos a enseñar.

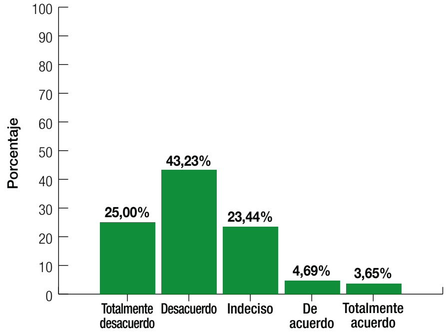


Figura 2. Ítem 1: Siento que no sé nada sobre los temas de matemáticas que voy a enseñar.

TABLA 1. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 1.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
192	2.19	.985	1	5

Como se puede observar tanto en la media mostrada en la Tabla 2 (*M* = 2.49) como en la Figura 3, más de la mitad de los EMP (56.25%) manifiesta que no temerá preguntar a compañeros docentes sobre temas matemáticos, estando un 23.96% indeciso. No obstante un 19.8% reconoce que tendrá miedo de realizar cuestiones de este tipo.

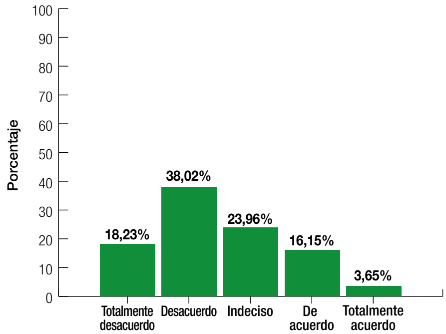


Figura 3. Ítem 2: Temeré preguntar, sobre cuestiones matemáticas que tendré que resolver, a otros profesores.

TABLA 2. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 2.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
192	2.49	1.078	1	5

En cuanto al recuerdo de las fórmulas matemáticas en su futuro docente ante la resolución de cuestiones, tal como se observa en la Figura 4, un 59.9% indica que no tendrá dificultades al respecto, mientras que un 21.88% afirma que tendrá dificultades con dicho recuerdo. Un 18.23% se muestra indeciso ante esta situación. Así, se obtiene una media de 2.5 en este ítem. (Tabla 3).

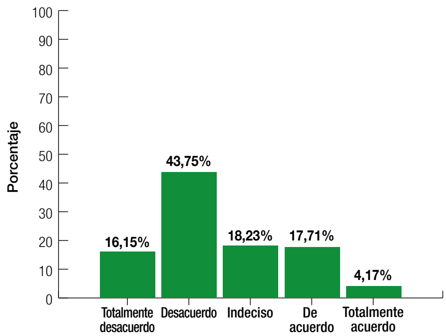


Figura 4. Ítem 3: Pienso que será duro, difícil para mí recordar las fórmulas matemáticas cuando tenga que resolver cuestiones, en clase de matemáticas.

Tabla 3. Estadísticos descriptivos del ítem 3.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
192	2.50	1.088	1	5

Como se aprecia en la Figura 5 y en la media indicada en la Tabla 4 (M = 2.26), los EMP, en su mayoría (69.27%), consideran que no se sentirán desesperados ante la enseñanza de temas matemáticos, aunque un 17.19% se muestra indeciso al respecto. En cambio, un 12.54% asegura que profesarán este sentimiento negativo ante la enseñanza de esta disciplina.

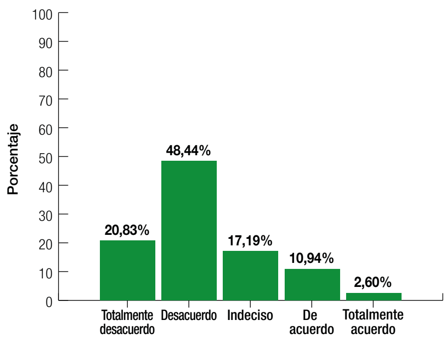


Figura 5. Ítem 4: Pienso que me sentiré desesperado cuando tenga que enseñar temas de matemáticas.

Tabla 4. Estadísticos descriptivos del ítem 4.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
192	2.26	.995	1	5

ÍNDICE

A través de la media (M = 2.33) (Tabla 5) y la Figura 6, se extrae que los EMP no sienten malestar al mencionárseles temas matemáticos a enseñar, tal como indica la mayoría (64.02%) al negar esta afirmación. Así, solo un 13.23% y 4.23% dicen estar de acuerdo y muy en desacuerdo, correspondientemente, con experimentar dicho malestar y un 18.52% se muestra indeciso al respecto.

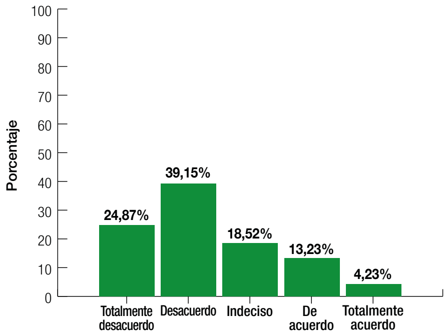


Figura 6. Ítem 5: Siento malestar (ansiedad) cuando se mencionan algunos temas de matemáticas que debo enseñar.

Tabla 5. Estadísticos descriptivos del ítem 5.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
189	2.33	1.115	1	5

A este ítem, se adjuntó una cuestión abierta en relación a los temas matemáticos que les infundía mayor ansiedad. Los resultados, en frecuencias por cada uno de los temas o contenidos indicados por los EMP, se presentan en la Figura 7.

Aunque, en relación con el tamaño muestral del estudio, son pocos los sujetos que explicitan contenidos matemáticos ante los que experimentan ansiedad (f = 58), se aprecia en la Figura 6 que las ecuaciones (f = 16), las raíces cuadradas (f = 11) y las integrales (f = 8) y la resolución de problemas (f = 8) son los contenidos matemáticos que más ansiedad provocan en los EMP. Son exiguas las frecuencias en el resto de contenidos explicitados por los EMP.

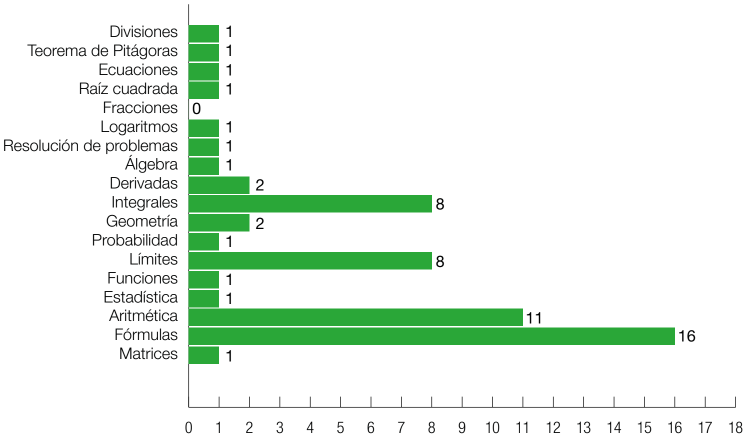


Figura 7. Temas matemáticos ante los que sienten ansiedad.

La mitad de los EMP, presentan expectativas de éxito ante la RPM al estar totalmente en desacuerdo o en desacuerdo con el ítem 6, mientras que un importante porcentaje del 24.48%, no muestra expectativas de éxito ante esta tarea matemática y un 25.52% está indeciso al respecto (Figura 8). De ahí la media de 2.7 respecto a esta afirmación (Tabla 6).

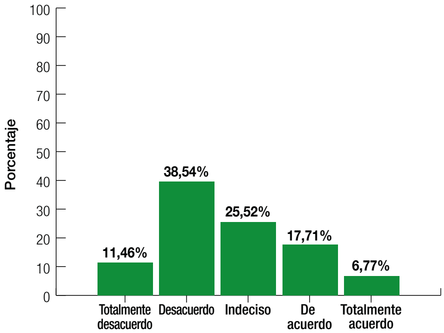


Figura 8. Ítem 6: Yo no tengo éxito para resolver problemas matemáticoss.

Tabla 6. Estadísticos descriptivos del ítem 6.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
192	2.70	1.098	1	5

Más de la mitad de los EMP (61.98%) no presentan miedo ante la enseñanza de temas matemáticos (M = 2.34). Sólo un 16.67% expresa estar de acuerdo con la afirmación de este ítem y por tanto reconocer sentir miedo ante la enseñanza de contenidos matemáticos. Un 21.35% se muestra indeciso ante este ítem (Figura 9 y Tabla 7).

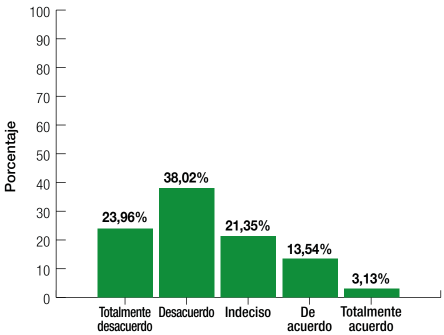


Figura 9. Ítem 7: Tengo miedo de enseñar temas de matemáticas.

Tabla 7. Estadísticos descriptivos del ítem 7.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
192	2.34	1.081	1	5

Los EMP consideran que no sentirán ansiedad cuando impartan clases de matemáticas (*M* = 2.3). Así, mientras que un 19.79% y un 46.35% señalan estar muy en desacuerdo y en desacuerdo con el enunciado, respectivamente, sólo un 12,5% manifiesta su conformidad con el mismo, siendo exiguos los casos que señalan la total conformidad.

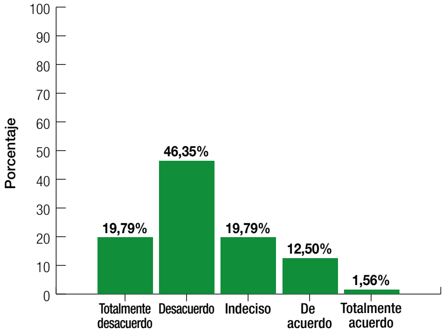


Figura 10. Ítem 8: Sentiré malestar (ansiedad) cuando imparta clases de matemáticas.

TABLA 8. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 8.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
192	2.30	.976	1	5

Más de la mitad de los EMP (59.9%) niega que les resulte duro la enseñanza de las matemáticas (*M* = 2.54). Sin embargo, no pasa desapercibido el porcentaje que está de acuerdo con experimentar dicha dureza, concretamente un 20.83% y un 4.17% totalmente de acuerdo. Siendo un 15.10% de los EMP se muestran indecisos al respecto (Figura 11 y la Tabla 9).

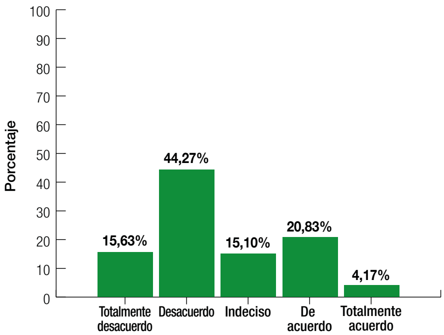


Figura 11. Ítem 9: Es duro para mi enseñar la asignatura de matemáticas.

TABLA 9. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 9.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
192	2.54	1.111	1	5

Poco más de la mitad de los EMP consideran que no les resultará difícil la enseñanza de conceptos matemáticos (un 13.02% está muy desacuerdo y un 39.58% desacuerdo) no pasando desapercibido el porcentaje que confirma la dificultad que les entrañará la enseñanza de conceptos matemáticos (19.79%). Es exiguo el de aquellos que muestran su total conformidad (3.65%) (Figura 12). De ahí la media (*M* = 2.61) (Tabla 10).

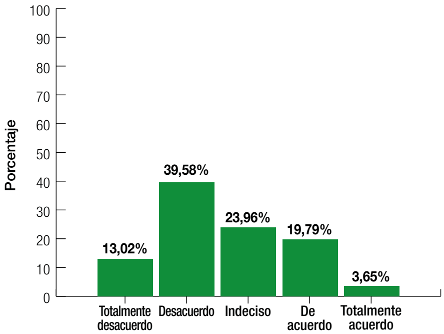


Figura 12. Ítem 10: Pienso que será duro/difícil para mí enseñar conceptos matemáticos.

TABLA 10. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 10.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
192	2.61	1.057	1	5

3.2. Autoconfianza (ítems 11 a 16)

Discrepando con resultados anteriores, sólo un 26.57% de los EMP piensa que estará relajado durante la enseñanza de temas matemáticos, mientras que un 31.77% y un 7.29% se manifiestan en desacuerdo y muy desacuerdo con experimentar dicha relajación (Figura 13). Es considerable el porcentaje que se muestra indeciso al respecto (34.38%.) De ahí la media (M = 3.04) (Tabla 11).

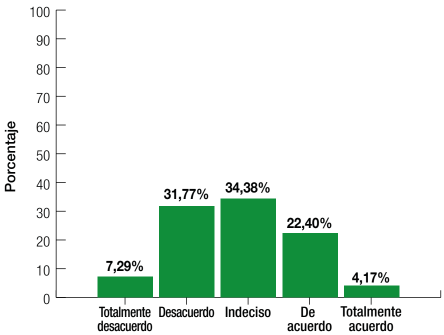


Figura 13. Ítem 11: Pienso que me sentiré relajado mientras enseñe temas de matemáticas.

TABLA 11. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 11.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
192	3.04	.991	1	5

Un 45.31% de los EMP se siente capacitado como docente para la resolución de problemas matemáticos. No así un 3.65% y un 14.06%, al estar muy desacuerdo y desacuerdo con esta proposición. De nuevo se obtiene un importante porcentaje de sujetos indecisos ante el enunciado, obteniéndose una media de 3.3 (Figura 14 y Tabla 12).

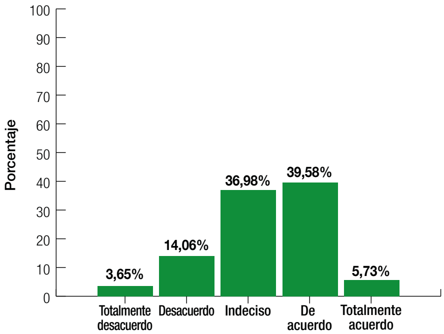


Figura 14. Ítem 12: Me siento capacitado como profesor para resolver problemas matemáticos.

TABLA 12. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 12.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
192	3.30	.910	1	5

En contraposición con lo enunciado en el ítem 10, se aprecia a través de la Figura 15 que un 26.57% asevera que les resulta fácil la enseñanza de temas matemáticos, frente a un total de un 39.06% que niega dicha facilidad. Un considerable porcentaje del 34.38% se muestra indeciso ante esta proposición (*M* = 2.84) (Tabla 13).

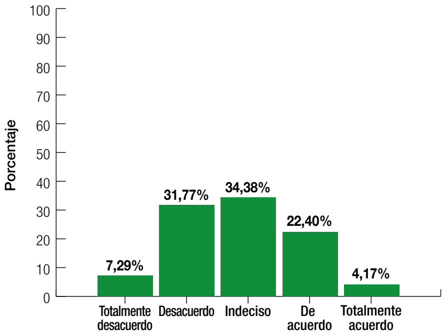


Figura 15. Ítem 13: Es muy fácil para mí enseñar temas de matemáticas.

TABLA 13. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 13.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
192	3.30	.910	1	5

Como se observa en la Figura 16, un 20.42% de los EMP presentan expectativas de éxito ante la resolución de cuestiones matemáticas, no así un 10.99% y un 28.8% al estar muy desacuerdo y desacuerdo, respectivamente, con presentar éxito ante cuestiones matemáticas. Un alto porcentaje del 39.79% manifiesta indecisión ante esta proposición.

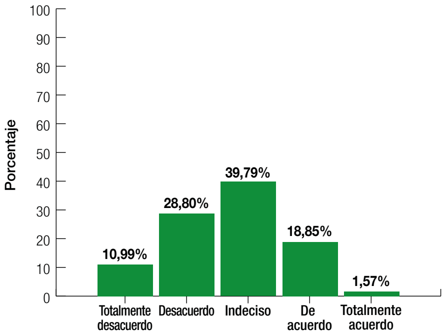


Figura 16. Ítem 14: Yo siempre tengo éxito para resolver cuestiones matemáticas.

TABLA 14. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 14.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
191	2.71	.949	1	5

Se aprecia en la Figura 17 y Tabla 15 (M = 2.9) que casi la mitad de los EMP (45.55%) se sienten indecisos al manifestarse en torno a experimentar relax ante problemas matemáticos nuevos que halle en su profesión docente. No obstante un 25.13% indica que experimentará relajación ante los problemas nuevos, mientras que un porcentaje algo superior del 29.32% niega que sentirá dicha sensación.

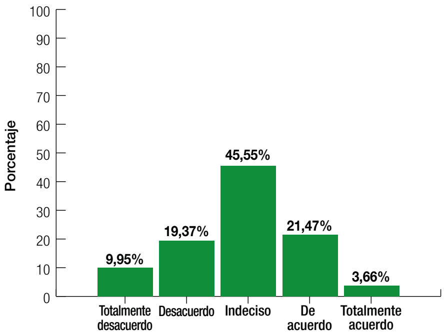


Figura 17. Ítem 15: Pienso que me sentiré relajado cuando encuentre problemas matemáticos nuevos, en clase como profesor.

TABLA 15. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 15.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
191	2.90	.973	1	5

Prácticamente en consonancia con el ítem 11, un 26.56% de los EMP piensan que se sentirán relajados durante las lecciones de matemáticas, mientras que un 36.98% se posiciona en el extremo opuesto al estar muy desacuerdo o desacuerdo con esta afirmación. Un alto porcentaje del 36.46% se muestra indeciso al respecto, hallándose una media de 2.84 (Tabla 16 y Figura 18).

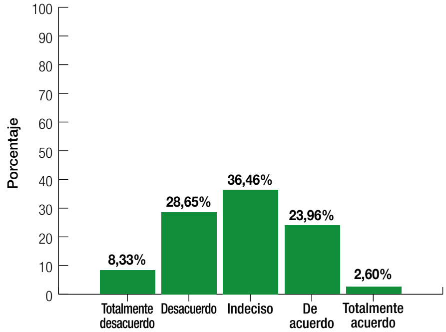


Figura 18. Ítem 16: Pienso que siempre me sentiré relajado en las lecciones de matemáticas.

Tabla 16. Estadísticos descriptivos del ítem 16.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
192	2.84	.971	1	5

3.3. Actitudes hacia la enseñanza de las matemáticas (ítems 17 a 20)

Tal como indican la Figura 19 y la Tabla 17 (M = 3.28), la mitad de los EMP, un 50.78%, piensa que les gustará la enseñanza de contenidos matemáticos, mientras que un 10.47% y un 13.09% discrepa al respecto al estar muy desacuerdo y desacuerdo con dicha actitud de gusto. No obstante, un 25.65% dice estar indeciso ante el enunciado propuesto.

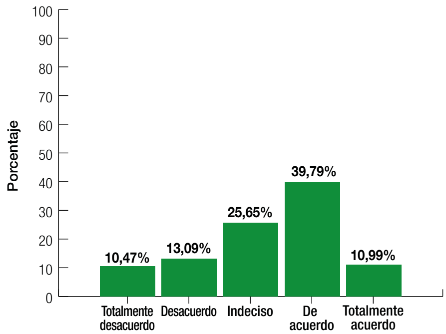


Figura 19. Ítem 17: Pienso que me gustará enseñar los contenidos matemáticos.

Tabla 17. Estadísticos descriptivos del ítem 17.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
191	3.28	1.148	1	5

ÍNDICE

En consonancia, un 48.44% piensa que le será agradable la enseñanza de temas matemáticos (M = 3.26), frente a un 8.85% y un 16.15% que discrepan al respecto con sendas contestaciones de muy desacuerdo y desacuerdo ante el enunciado. Es de nuevo importante el porcentaje de sujetos que se muestra indeciso al respecto, concretamente un 26.56% (Figura 20 y Tabla 18).

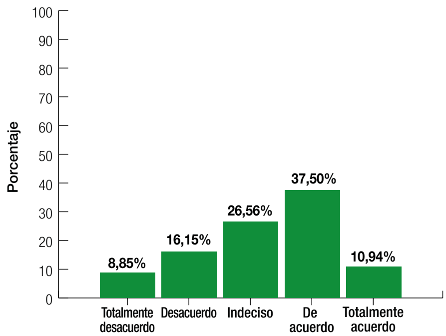


Figura 20. Ítem 18: Pienso que será agradable para mí enseñar los temas de matemáticas.

TABLA 18. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 18.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
192	3.26	1.127	1	5

A pesar del importante porcentaje que indica no tener éxito resolviendo cuestiones matemáticas, un 42.71% manifiesta que les gusta responder a las preguntas relacionadas con los temas matemáticos curriculares (*M* = 3.14), frente a un 28.12% que niega sentir dicho gusto. Un 29.17% está indeciso ante dicha actitud hacia la respuesta de preguntas sobre temas matemáticos a enseñar (Figura 21 y Tabla 19).

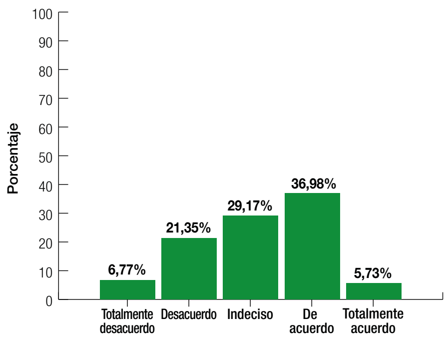


Figura 21. Ítem 19: Me gusta responder a las preguntas que están relacionadas con los temas matemáticos que se enseñan.

TABLA 19. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 19.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
192	3.14	1.035	1	5

En concordancia con el ítem 12 en la que casi la mitad de los EMP dicen sentirse capacitados como docentes para la RPM, Un 59.37% indica que le gusta enseñar a resolver problemas matemáticos (*M* = 3.38), de forma que un 51.56% está de acuerdo con dicha afirmación y un 7.81% muy de acuerdo. Un 7.29% y un 15.10% niegan total o parcialmente experimentar gusto ante la enseñanza de la RPM y un 18.23% se manifiesta indeciso (Figura 22 y Tabla 20).

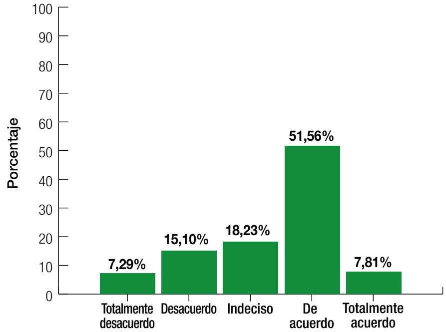


Figura 22. Ítem 20: Me gusta mostrar cómo se resuelven los problemas matemáticos.

Tabla 20. Estadísticos descriptivos del ítem 20.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
192	3.38	1.066	1	5

3.4. Conocimiento didáctico (ítems 21 a 23)

La Figura 23 y Tabla 21 evidencian que mientras que un 36.13% considera que podría utilizar diferentes puntos de vista y teorías sobre la enseñanza de las matemáticas, un 26.18% manifiesta que no podría hacerlo. Destacar que un considerable porcentaje del 37.70% se muestra indeciso ante el enunciado planteado, de ahí la media obtenida (*M* = 3.1).

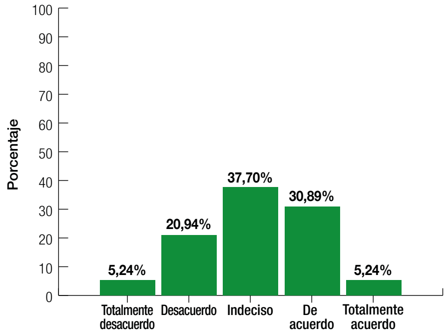


Figura 23. Ítem 21. Creo que podría utilizar diferentes puntos de vista y teorías sobre la enseñanza de matemáticas en mi vida docente.

Tabla 21. Estadísticos descriptivos del ítem 21.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
191	3.10	.965	1	5

Resultados similares se aprecian en la Figura 24 y Tabla 22 al preguntarles sobre el uso de métodos de acceso al conocimiento y de investigación en la enseñanza de las matemáticas como docentes. Al respecto, un 31.94% indica tener estas competencias docentes mientras que un 26.18% manifiesta no tener dicha capacidad o competencia. Un elevado porcentaje del 41.88% se muestra indeciso ante esta cuestión, lo que hace que la media en este ítem sea de 3.02.

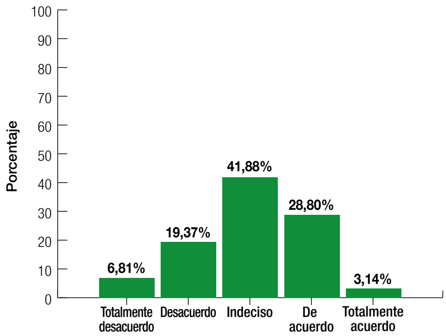


Figura 24. Ítem 22. Podría usar modos de acceder al conocimiento y métodos de investigación sobre la enseñanza de las matemáticas, en mi vida docente.

TABLA 22. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 22.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
191	3.02	.940	1	5

La Figura 25 y Tabla 23 muestran que casi la mitad de los EMP asegura poseer información y estrategias para la enseñanza de las matemáticas relacionadas con la educación especial (43.98%) (M = 3.35). Sólo un 15.71% manifiesta no poder hacer uso de dicha información y estrategias. Un considerable porcentaje del 40.31% está indeciso ante dicha posibilidad.

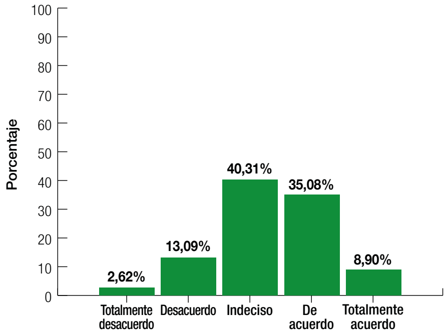


Figura 25. Ítem 23. Mientras enseñe matemáticas, podría usar información y estrategias relacionadas con la educación especial.

TABLA 23. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ÍTEM 23.

N	M	DT	Mínimo	Máximo
191	3.35	.910	1	5

9. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos, se desprende, en relación al conocimiento del contenido, que la mayoría de los EMP manifiestan tener conocimientos suficientes para desarrollar su futura labor como docentes de matemáticas, incluyéndose en esos conocimientos el recuerdo de las fórmulas matemáticas. Estos resultados discreparían con los de Baki (1997), quien, partiendo de la consideración de que los profesores de matemáticas deben estar equipados con conocimientos del contenido y con conocimiento didáctico del contenido, encuentra que no siempre los EMP cuentan con dichos conocimientos para enseñar a sus estudiantes lo que saben. Además, indican que no tendrán reparo en preguntar a compañeros docentes sobre cuestiones matemáticas a resolver en caso de duda. Ello hace que no les resulte difícil ni dura la enseñanza de los conceptos y temas matemáticos. Estos resultados son de gran interés en el tema que nos ocupa, ya que Levine (1996), Vinson (2001), y Peker (2006), encontraron que tanto el contenido, el conocimiento didáctico del contenido y la confianza en sí mismo son factores importantes en la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas. En consonancia, la mayoría indica no sentir malestar o ansiedad ante la mención de temas matemáticos a enseñar así como tampoco consideran que sentirán desesperación, miedo y ansiedad a la ahora de enseñarlos.

Respecto a los pocos sujetos que explicitan experimentar ansiedad o malestar ante algunos temas matemáticos (17.46%), indican que los temas matemáticos que les provocan mayor malestar son las ecuaciones, las raíces cuadradas, la resolución de problemas y las integrales.

De hecho, un 24.48% reconoce no tener éxito en la resolución de problemas matemáticos, frente a un 50% que está en contra de esta proposición.

Respecto a la autoconfianza mostrada por los EMP como docentes de matemáticas, encontramos datos no tan positivos como en el apartado anterior. Así, un 39% piensa que no se sentirá relajado ante la enseñanza de temas matemáticos frente a un 26.57% que considera lo contrario, algo que se contrapone a los resultados obtenidos en el apartado anterior. Un 45.31% se siente capacitado como docente para la resolución de problemas matemáticos existiendo un 36.58% que duda sobre dicha capacitación. Así, y un 39.06% manifiesta que no será fácil para ellos enseñar temas de matemáticas, existiendo un elevado número de EMP que se posicionan como indecisos.

Tan solo un 20.42% de los EMP presentan expectativas de éxito ante la resolución de cuestiones matemáticas y casi la mitad de los EMP se sienten indecisos al manifestarse en torno a que se sentirán relajados cuando encuentre problemas matemáticos nuevos en su profesión docente.

En relación a las actitudes hacia la enseñanza de las matemáticas, la mitad de los EMP piensa que les gustará y será agradable la enseñanza de contenidos y temas matemáticos, existiendo sendos porcentajes de en torno al 25% que dudan acerca de experimentar dichas actitudes. Igualmente, un 42.71% manifiesta gustarles responder a las preguntas relacionadas con los temas matemáticos a enseñar, aunque un 29.17% duda al respecto. Es importante este dato, ya que la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas puede deberse a las dificultades para responder a las preguntas de los estudiantes (Ameen, Guffey y Jackson, 2002). Indicar, igualmente, que a la mayoría de los EMP les gusta enseñar a resolver problemas matemáticos.

Por último, en relación al conocimiento didáctico, se aprecia un alto porcentaje de EMP que dudan sobre poseer dicho conocimiento y sobre su capacidad para la aplicación del mismo. Así, poco menos de la mitad considera que podría utilizar diferentes puntos de vista y teorías sobre la enseñanza de las matemáticas, solamente un 31.94% podría usar diferentes modos de acceder al conocimiento y distintos métodos de investigación sobre la enseñanza de las matemáticas y, un 43.98% asegura poder usar información y estrategias para la enseñanza de las matemáticas relacionadas con la educación especial. Datos no muy alentadores que se contraponen a los hallazgos de otras investigaciones en las cuales se encuentran que los EMP tienen previsto emplear los métodos constructivistas y de desarrollo que han aprendido en sus clases de matemáticas en la universidad, con el fin de hacer las matemáticas significativas para sus estudiantes (Trujillo y Hadfield, 1999). Este aspecto es muy importante, ya que como Levine (1996) indica, el aprendizaje manipulativo juega un papel importante en la adquisición de los conceptos matemáticos, y puede ayudar a reducir la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas. Además, la implementación de técnicas de enseñanza alternativas y estrategias de resolución de problemas también pueden ayudar a los EMP a ganar confianza en sí mismos y, por lo tanto, pueden reducir la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas.

Es importante señalar que en todas las cuestiones se aprecia un importante porcentaje (de hasta un 45%) de sujetos que se posicionan en la puntuación intermedia de la escala Likert, el 3, correspondiente a estar indeciso con el enunciado propuesto. Posiblemente a ello se deban las discrepancias encontradas entre determinados ítems que, desde direcciones opuestas, cuestionan sobre el mismo aspecto. Esto nos lleva a considerar, en primer lugar, que al ser muchos de los enunciados prospectivos, a los sujetos les resulta difícil manifestarse al respecto en tanto en cuando les supone anticipar situaciones futuras. Es por este motivo que sería recomendable suprimir este punto intermedio en futuras administraciones del cuestionario en EMP para un mayor posicionamiento de los sujetos ante las diferentes proposiciones.

Convendría, igualmente, reformular el tiempo verbal de los enunciados de forma que planteen las diferentes cuestiones en presente y así poder realizar un estudio con maestros de primaria en servicio.

BIBLIOGRAFÍA

— AMEEN, EC; GUFFEY, DM; JACKSON, C. Evidence of teaching anxiety among accounting educators. Journal of Education for Business, 2002, vol. 78, no 1, p. 16-22.

— BAKI, A. Çağdaş Gelişmeler Işığında Matematik Öğretmenliği Eğitimi Programları. Eğit. Bil, 1997, vol. 103, p. 46-54.

— BALOGLU, M; KOCAK, R. A multivariate investigation of the differences in mathematics anxiety. Personality and Individual Differences, 2006, vol. 40, no 7, p. 1325-1335.

— BURSAL, Mu; PAZNOKAS, L. Mathematics anxiety and preservice elementary teachers' confidence to teach mathematics and science. School Science and Mathematics, 2006, vol. 106, no 4, p. 173-180.

— CABALLERO, A. Diseño, Aplicación y Evaluación de un Programa de Intervención en Control Emocional y Resolución de Problemas Matemáticos para Maestros en Formación Inicial. Tesis doctoral Inédita - Universidad de Extremadura, Badajoz, España: 2013. Recuperado de: http://dehesa.unex.es:8080/xmlui/handle/10662/590.

— DURMUS, S. A diagnostic study to determine learning difficulties in mathematics. Kast. Educ. J, 2004, vol. 12, no 1, p. 125-128.

— ERHAN, E. Correlations between the mathematics teaching anxieties of pre-service primary education mathematics teachers and their beliefs about mathematics. Educational Research and Reviews, 2010, vol. 5, no 8, p. 446-454.

— GARDNER, LE.; LEAK, Gary K. Characteristics and correlates of teaching anxiety among college psychology teachers. Teaching of Psychology, 1994, vol. 21, no 1, p. 28-32.

— GRESHAM, G. A Study Exploring Exceptional Education Pre-Service Teachers' Mathematics Anxiety. Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, 2010, vol. 4.

— HALAT, E. Reform-based curriculum & acquisition of the levels. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2007, vol. 3, no 1, p. 41-49.

— HOWARD, B. C. Mathematics in content areas. En 62nd Annual Conference of the Association of Teacher Educators, Phoenix, ERIC No ED. 1982. p. 694.

— IOSSI, L. Strategies for reducing math anxiety in post-secondary students. En S. M. Nielsen, y M. S. Plakhotnik (Eds.), Proceedings of the Sixth Annual College of Education Research Conference: Urban and International Education Section. Miami, USA: Florida International University, 2007, pp. 30-35.

— LEVINE, G. Prior mathematics history, anticipated mathematics teaching style, and anxiety for teaching mathematics among pre-service elementary school teachers. Paper presented at the Annual Meeting of the International Group for Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, ERIC Document Reproduction Service No. ED373972. 1993.

— LEVINE, G. Variability in anxiety for teaching mathematics among pre-service elementary school teachers enrolled in a mathematics course. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association in New York, ERIC Document Reproduction Service No. ED398067. 1996.

— LIU, F. Impact of Online Discussion on Elementary Teacher Candidates' Anxiety towards Teaching Mathematics. Education, 2008, vol. 128, no 4, p. 614-629.

— PEKER, M. The relationship between learning styles and mathematics achievement students' acquiring primary mathematics teacher education. Eurasian Journal of Educational Research, 2005, vol. 21, p. 200-210.

— PEKER, M. Matematik **Öğretmeye** Yönelik Kaygi **Ölçeğinin** Geliştirilmesi. Journal of Educational Sciences & Practices, 2006, vol. 5, no 9, p. 73-92.

— PEKER, M. Eğitim programları ve öğretmen adaylarının matematik öğretme kaygısı. VIII. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 2008, p. 27-29.

— PEKER, M. Pre-service teachers' teaching anxiety about mathematics and their learning styles. Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 2009a, vol. 5, no 4, p. 335-345.

— PEKER, M. The use of expanded microteaching for reducing pre-service teachers teaching anxiety about mathematics. Scientific Research and Essays, 2009b, vol. 4, no 9, p. 872-880.

— PEKER, M; HALAT, E; MIRASYEDIOĞLU, Ş. Gender related differences in mathematics teaching anxiety. The Mathematics Educator, 2010, vol. 12, no 2, p. 125-140.

— TRUJILLO, KM; HADFIELD, OD. Tracing the roots of mathematics anxiety through in-depth interviews with preservice elementary teachers. College student journal, 1999, vol. 33, p. 219-232.

— UUSIMAKI, L; NASON, R. Causes underlying pre-service teachers' negative beliefs and anxieties about mathematics. En Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 2004. p. 369-376.

— VINSON, BM. A comparison of preservice teachers' mathematics anxiety before and after a methods class emphasizing manipulatives. Early Childhood Education Journal, 2001, vol. 29, no 2, p. 89-94.

— YÜKSEL-ŞAHIN, F. Mathematics anxiety among 4th and 5th grade Turkish elementary school students. International Electronic Journal of Mathematics Education, 2008, vol. 3, no 3, p. 179-192.

Datos sociolaborales

Los cuestionarios que se te presentan a continuación han sido elaborados con el propósito de conocer aspectos relacionados con los sentimientos y emociones de los estudiantes de magisterio en relación a la enseñanza de las matemáticas en su futuro profesional. Es muy importante para nosotros conocer tu sincera opinión sobre dichos aspectos. Las respuestas serán totalmente confidenciales. Gracias por tu colaboración.

Nombre y Apellidos: ....

Edad: .... **Sexo:** ☐ Hombre ☐ Mujer

Localidad de procedencia: ....

Curso y especialidad: ....

Itinerario cursado en Bachillerato: ....

Tipo de centro en el que estudiaste Primaria:

☐ Público ☐ Privado ☐ Concertado

Tipo de centro en el que estudiaste Secundaria:

☐ Público ☐ Privado ☐ Concertado

Estado civil:

☐ Soltero/a ☐ Casado/a – viviendo en pareja ☐ Viudo/a ☐ Separado/a – Divorciado/a

Número de hijos:

☐ Ninguno ☐ Uno ☐ Dos ☐ Tres ☐ Más de tres

Experiencia laboral:

☐ No ☐ Sí. Indica en qué ....

Valoración de su nivel de matemáticas:

☐ Bajo ☐ Medio ☐ Alto ☐ Excelente

Mathematics Teaching Anxiety Scale (MATAS)

Adaptación propia al español de la MATAS de Peker (2006)

Este cuestionario trata de evaluar los sentimientos y emociones que provoca a los estudiantes para maestro/profesor enseñar matemáticas en su futuro profesional. Para ello se emplea este cuestionario de 23 afirmaciones que son respondidas dependiendo del grado de conformidad y desconformidad con las mismas. Por favor, trata de responder a cada una de ellas **situándote como futuro profesor de matemáticas**. Gracias por tu colaboración.

1	2	3	4	5
Totalmente desacuerdo	Desacuerdo	Indecisión	De acuerdo	Totalmente de acuerdo

1. Siento que no se nada sobre los temas de matemáticas que voy a enseñar.	1	2	3	4	5
2. Temeré preguntar, sobre cuestiones matemáticas que tendré que resolver, a otros profesores.	1	2	3	4	5
3. Pienso que será duro, difícil para mí recordar las fórmulas matemáticas cuando tenga que resolver cuestiones, en clase de matemáticas.	1	2	3	4	5
4. Pienso que me sentiré desesperado cuando tenga que enseñar temas de matemáticas.	1	2	3	4	5
5. Siento malestar (ansiedad) cuando se mencionan algunos temas de matemáticas que debo enseñar. Indica cuáles: ____________________ ____________________	1	2	3	4	5
6. Yo no tengo éxito para resolver problemas matemáticos.	1	2	3	4	5
7. Tengo miedo de enseñar temas de matemáticas.	1	2	3	4	5
8. Sentiré malestar (ansiedad) cuando imparta clases de matemáticas.	1	2	3	4	5
9. Es duro para mi enseñar la asignatura de matemáticas.	1	2	3	4	5
10. Pienso que será duro/difícil para mí enseñar conceptos matemáticos.	1	2	3	4	5
11. Pienso que me sentiré relajado mientras enseñe temas de matemáticas.	1	2	3	4	5
12. Me siento capacitado como profesor para resolver problemas matemáticos.	1	2	3	4	5
13. Es muy fácil para mí enseñar temas de matemáticas.	1	2	3	4	5
14. Yo siempre tengo éxito para resolver cuestiones matemáticas..	1	2	3	4	5
15. Pienso que me sentiré relajado cuando encuentre problemas matemáticos nuevos, en clase como profesor.	1	2	3	4	5
16. Pienso que siempre me sentiré relajado en las lecciones de matemáticas.	1	2	3	4	5
17. Pienso que me gustará enseñar los contenidos matemáticos.	1	2	3	4	5
18. Pienso que será agradable para mí enseñar los temas de matemáticas.	1	2	3	4	5
19. Me gusta responder a las preguntas que están relacionadas con los temas matemáticos que se enseñan.	1	2	3	4	5
20. Me gusta mostrar cómo se resuelven los problemas matemáticos.	1	2	3	4	5
21. Creo que podría utilizar diferentes puntos de vista y teorías sobre la enseñanza de matemáticas en mi vida docente.	1	2	3	4	5

CAPÍTULO 5
¿QUÉ ENTENDEMOS POR PROBLEMA DE MATEMÁTICAS?

Lorenzo J. Blanco Nieto y Juan Pino Ceballos

La palabra problema es frecuentemente utilizada en el lenguaje común y en matemáticas y, en ambos casos, puede tener varios significados.

El diccionario de la Real Academia Española de la Lengua (2014) señala cinco acepciones para el vocablo 'problema':

1. Cuestión que se trata de aclarar.
2. Proposición o dificultad de solución dudosa.
3. Conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin.
4. Disgusto, preocupación.
5. Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos.

Podríamos reorganizar los términos empleados señalando que aparecen palabras o expresiones como cuestión o proposición (como sinónimo de tarea) que tratamos de aclarar que tiene una solución dudosa y desconocida y que tenemos dificultad para alcanzarla, lo que puede generarnos preocupación.

Es decir, en un primer acercamiento, podríamos señalar la existencia de problemas cuando hay una tarea a realizar que nos genera dudas en la manera de abordarla y/o solucionarla. En otros términos, podríamos asumir que un problema requiere de una situación que provoca incertidumbre y de una actitud de búsqueda de algún objetivo, explícito o implícito. En la vida cotidiana decimos "tengo un problema" cuando tenemos dudas sobre la manera de proceder ante una situación que nos preocupa.

Sin embargo, como nos recuerda Pino (2013), en matemáticas existe consenso sobre el carácter polisémico de la palabra problema, y no existe una única definición en la que todos estemos de acuerdo. Las expresiones 'problema de matemáticas' y 'resolución de problemas de matemáticas' tienen diferentes significados entre los profesores y para los alumnos y, ello puede enmascarar diferentes puntos de vista sobre lo que constituye un problema (Arcavi y Frielander, 2007).

A pesar de estos múltiples considerandos sobre el significado de la expresión problema, en la mayoría de los ciudadanos pervive la idea de problema de matemáticas como actividad que se propone a partir de un enunciado, normalmente escrito, con una estructura cerrada, y cuya resolución supone la aplicación inmediata de unos conocimientos (usualmente algoritmos específicos) previamente adquiridos. Este resultado ya era considerado en Leif y Dezaly (1961) al señalar que la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas encuentra su justificación en saber aplicar los conocimientos previamente adquiridos. Esto es: "asegurar el paso desde el conocimiento a su utilización práctica" (Leif y Dezaly, 1961, p. 205). Es la perspectiva llamada 'Enseñanza para la resolución de problemas' (ver capítulo 2), que asume que para desarrollar esta actividad sería necesario estudiar y conocer previamente los contenidos matemáticos y las técnicas operatorias para poder aplicarlas a alguna situación, real o matemática, planteada.

Sin embargo, y dentro de este esquema tradicional, se establece una diferencia entre lo que sería llamado típicamente problema y los meros ejercicios para practicar rutinas usuales en la enseñanza de los procesos matemáticos. Entenderíamos cómo ejercicios cuando la actividad plantea reconocer el resultado de un proceso o recordar una propiedad ("3 + 7 > 2 + 5. ¿Verdadero o falso?"), el reconocimiento o resolución de un algoritmo ("Resolver la ecuación x^2-3x-5=0"). Y los distinguiríamos de los problemas al señalar la importancia de que haya algo que buscar o un enigma que aclarar dentro de un contexto que debe estar, explícita o implícitamente, bien definido. "Calcular el área de un rectángulo sabiendo que su base mide 4 metros y su altura 3 metros" o "En una fiesta hay 30 personas, de las que 2/5 son niños y 3/5 niñas. ¿cuántas personas hay de cada género?".

A pesar de que esta diferencia pudiera estar clara, son numerosos los autores que la cuestionamos cuando tenemos en cuenta la actividad que los resolutores deben hacer para resolver estos enunciados. Es decir, es necesario precisar a qué nos referimos cuando hablamos de los problemas y cuestionar algunas de las actividades que han sido tradicionalmente tomadas como tales. Schoenfeld (1985) al analizar el siguiente ejemplo: "Juan tiene siete manzanas. Le da tres a María. ¿Cuántas manzanas le quedan a Juan?", señala que representan actividades que sitúan las matemáticas en el contexto del "mundo real", aceptando que la resolución de estas tareas, que toman como modelo tales situaciones reales, tiene por supuesto más "relevancia" que el resolver ejercicios numéricos como 7-3=?, pero no las sitúa en la categoría de problema. Schoenfeld (1985) afirma que

> es muy discutible el que se puedan considerar estos tipos de trabajos escolares como de "resolución de problemas" propiamente dichos. Tales ejercicios son, en verdad, más relevantes que los puramente numéricos, pero, en el fondo, todavía son ejercicios de tipo algorítmico o de fórmulas; hay muy poco de "problema" en resolver uno de estos ejercicios, cuando ya se han hecho docenas de tipo parecido (Schoenfeld, 1985, p. 28).

Es decir, una actividad puede resultar un problema en algún momento al presentar alguna dificultad en su resolución y dejar de ser un problema cuando ya hemos asimilado el procedimiento de solución.

Asumiendo esta aportación, tendríamos que entender que un problema es una relación particular entre la tarea y la persona que trata de resolverla. Y, así utilizar la palabra problema para referirse a una tarea que tiene dificultad para el individuo que está tratando de resolverla. "El hecho de que exista un problema no es una propiedad inherente de la tarea matemática: la palabra está ligada a la relación o interacción entre el individuo y esa tarea" (Santos, 2007, p. 48), considerando que "la dificultad debe ser un impase intelectual y no solamente en un nivel operacional o de cálculo" (Santos, 2007, p. 49).

Esto nos lleva a considerar que la resolución de una misma actividad puede representar un problema para una persona y no para otra. Así, resolver la tarea "En una fiesta hay 30 personas, de las que 2/5 son niños y 3/5 niñas. ¿cuántas personas hay de cada género?", puede que algunos resolutores queden en aprietos al tener dificultades con el uso de los números fraccionarios pero para otros puede ser una mera rutina de cálculo. Como lo puede ser la resolución de un sudoku, frecuente en los medios de comunicación.

Esta relación entre individuo y tarea debe implicar, además, el interés por la resolución, ya que en caso contrario tampoco existiría el problema. Por ejemplo, si planteamos a un grupo de ciudadanos la actividad de "calcular la derivada de la función $f(x) = x^2 + 3$, en el punto $x = 5$", observaríamos que presentaría mucha dificultad para la mayoría de ellos, pero probablemente pocos o ninguno tuviera decisión para intentar resolverlo y olvidarían esta cuestión. Consecuentemente no podemos decir que esta actividad se constituyera en un problema para ellos. Situación diferente sería si formara parte de su actividad o si tuvieran alguna motivación, intrínseca o extrínseca. Es decir, que el problema necesita de la aceptación del resolutor, el querer asumir el desafío y tratar de resolverlo.

A pesar de estas reflexiones, la diferencia entre problemas y ejercicio parece ser uno de los aspectos sobre lo que podríamos señalar cierta coincidencia entre los autores que escriben sobre ello, al aceptar que "un problema es una situación que difiere de un ejercicio en que el resolutor de problemas no tiene un proceso algorítmico que le conducirá, con certeza, a la solución" (Kantowki, 1981, p. 113).

Para comprender esta distinción podríamos recurrir a la diferenciación que se establece entre 'pensamiento reproductivo' y 'pensamiento productivo'. El primer caso, supone la reproducción de métodos y comportamientos ya conocidos y aplicamos estrategias que hemos experimentado con éxito. Es decir, repetimos lo que ya conocemos ante actividades similares y estaría mas cerca de los ejercicios que sirven para practicar una rutina, lo que hace que la actividad del resolutor se centre en recordar situaciones similares. La segunda expresión supone analizar la situación para generar una estrategia propia, lo que implica crear algo nuevo, establecer conjeturas, modelizar, etc. Expresiones que aparecen reiteradamente en el currículo de matemáticas de primaria y secundaria.

1. ¿QUÉ ES UN PROBLEMA MATEMÁTICO?

Teniendo en cuenta estas consideraciones vamos a retomar algunas referencias de autores que han tratado de sintentizar el significado de problema de matemáticas. Así, para House, Wallace y Johnson, (1983):

> Problema matemático es una situación que supone una meta para ser alcanzada donde existen obstáculos para alcanzar ese objetivo que requiere deliberación, y se parte del desconocimiento del algoritmo útil para resolver el problema. La situación es usualmente cuantitativa o requiere técnicas Matemáticas para su solución, y debe ser aceptado como problema por alguien antes de que pueda ser llamado problema (p. 10).

En Blanco (1993) se recogen propuestas anteriores sobre el significado de problema señalando que problema es

> una situación en la que se formula una tarea que debe ser desarrollada, y en la que en un ambiente de discusión, de incertidumbre y de comunicación se pretende alcanzar unos objetivos. En este propósito cuantitativo o no, pero que debe requerir técnicas Matemáticas, el proceso a seguir no debe ser conocido inmediata y fácilmente. Se requiere en todo caso una voluntad de atacar el problema provocado, por la necesidad de la solución o bien por algún tipo de motivación (Blanco, 1993, p. 23).

Para Carrillo (1998),

> el concepto de problema debe asociarse a la aplicación significativa (no mecánica) del conocimiento matemático a situaciones no familiares, la consciencia de tal situación, la existencia de dificultad a la hora de enfrentarse a ella y la posibilidad de ser resuelta aplicando dicho conocimiento (Carrillo, 1998, p. 87).

Podemos encontrar otras aportaciones al respecto en NCTM (1981), Charles y Lester (1982), Lester (1983), Borasi (1986), Codina y Rivera (2001), Santos (2007) y, finalmente, Pino (2013) quien hace una interesante revisión acerca de autores que han tratado de definir y caracterizar el vocablo problema. Este autor presenta una tabla que sintetiza diferentes aportaciones sobre las características que tiene que tener una actividad matemática para que pueda ser considerada problema, y de las que destacamos la necesidad de tener un objetivo al que no podemos llegar fácilmente con un proceso inmediato; las dudas y/o bloqueos generados por la situación planteada o por el desconocimiento de ese método claro que nos lleve a la solución; el aceptar el reto consciente para llegar a él lo que puede ser considerado por el resolutor como un desafío personal y uso de conceptos y procesos matemáticos.

10. ¿QUÉ ENTIENDEN POR PROBLEMA DE MATEMÁTICAS LOS ESTUDIANTES PARA PROFESORES DE PRIMARIA?

Los trabajos realizados con EMP muestran que ellos tienen una concepción muy tradicional sobre los problemas (Blanco, 1997). En nuestros trabajos hemos partido de un cuestionario sencillo (Anexo), por ejemplo la pregunta ¿qué entiendo por problema de *matemáticas?* con el fin de obtener información de sus concepciones sobre problema de matemática (Blanco, Guerrero y Caballero, 2013).

El análisis de sus respuestas nos permite afirmar que los EM formulan los problemas con un enunciado cerrado en el que de manera explícita o implícita indican el procedimiento de solución del mismo.

A modo de ejemplo, en Blanco, et al. (2013) y Caballero (2013) se analiza los problemas que proponen estudiantes para maestro en el curso 2008 - 09, cuando se les pide: *"Enuncia tres problemas de matemáticas"*, siendo la primera tarea del cuestionario.

Los autores indican que sobre un total de 178 problemas enunciados, 126 de ellos (70,8 %) eran problemas aritméticos de estructura aditiva o multiplicativa, que representaban situaciones comerciales elementales. Dos ejemplos de los problemas propuestos se ven en la Figura 1:

En un manzano hay 47 manzanas; María ha recogido 37 manzanas ¿Cuántas manzanas han quedado en el árbol?

En una frutería se vende 1 Kg. de manzanas a 1,75 €. Si Laura compra dos kilos, ¿cuánto dinero se ha gastado en total?

Figura 1. Ejemplos de "problemas de estructura aditiva".

Del resto, 31 (17,4 %) eran problemas de operaciones con fracciones (Figura 2).

Sabemos que Juan se ha comido 2/3 de una tarta. Su hermano Sergio 5/6 del resto ¿cuánto queda de la tarta?

Tres amigos disponen de 40 € para gastarse. El primero se gasta 2/5 del total y el segundo 2/3 de lo que gastó el primero. ¿Cuánto gastó el tercero?

Figura 2. Ejemplos de "problemas con fracciones".

Los problemas de Geometría representaban el 5,7 %, y sus enunciados era muy elementales y referidos al cálculo de áreas de figuras planas, similares a los típicos problemas de los libros de texto (Figura 3).

Calcular el área de un cuadrado cuyo lado mide 2 cm.

Figura 3. Ejemplos de "problemas de geometría".

En menor medida aparecieron problemas que supuestamente eran de ecuaciones referidos a situaciones de edad, grifos, velocidad de coches y trenes o animales de granjas, que son tradicionales en los problemas escolares desde hace más de 100 años. Solamente siete problemas de los 178, lo que representa el 3,9 % eran, según señalaban los estudiantes, de ecuaciones (Figura 4).

Un grifo llena una piscina en 20 horas. ¿Cuánto se tardará en llenar la misma piscina con cuatro grifos más?

En una granja hay caballos y gallinas. En total hay 74 patas y 12 picos. ¿Cuántos caballos y cuántas gallinas hay en la granja?

Figura 4. Problemas de ecuaciones.

Es interesante repasar el segundo problema para mostrar la dificultad que tienen para enunciar problemas que tengan plenamente sentido.

Los problemas propuestos tienen reflejo en las clasificaciones de algunos autores que se citan en el capítulo 7 sobre Tipos de Problemas. Así, observamos que en los textos presentados aparece toda la información necesaria para resolver el problema, en la línea de lo que Borasi (1986) llama 'Word problem". La resolución de los mismos sugiere una traducción del texto del enunciado a una expresión matemática, que son los problemas que Charles y Lester (1982) denominan "simple translation problem" o "complex translation problem". Lo anterior, supone utilizar algún algoritmo previamente conocido, lo que Butts (1980) llama "aplication problem".

Otro resultado que también podríamos asumir es el de Pino (2013), quien trabajó con estudiantes para maestro de secundaria (EMS) aplicándole el mismo cuestionario, al señalar que los estudiantes para profesores consideran que un problema es algo así como un ejercicio, pero un poco más complicado, que todos los problemas tienen datos e incógnitas, que habría que manipular los datos para obtener una respuesta o solución al problema y que para ello es necesario aplicar fórmulas u algoritmos conocidos que han sido enseñados por el profesor (Pino, 2013).

Los ejemplos anteriores mostrarían que las referencias básicas de los EM son las operaciones aritméticas o algoritmos algebraicos y, en menor medida, problemas de cálculo de áreas. Resulta interesante indicar que los contextos que describen son los tradicionales en los problemas de matemáticas desde los manuales de finales del siglo XIX. Así, suelen enunciar problemas de grifos, de relación entre el número de cabezas y patas de animales de granja, de trenes y distancias o de comparación de edades. Conviene destacar, que en ningún caso se refirieren a situaciones concretas de su entorno inmediato o la utilización de recursos digitales como los móviles o sus aficiones personales. Este resultado es, especialmente, importante por cuanto muestra que los estudiantes no relacionan los contenidos matemáticos con situaciones de su entorno. Y, por otra parte, muestra una contradicción con el currículo que señala que es necesario conectar la resolución de problemas con los intereses de los alumnos y relacionarlos con su entorno inmediato (ver capítulo 2). Esta idea es una de las más redundantes en los textos curriculares y, a juzgar por estos resultados, podemos señalar que no es muy considerada, ni en los libros de textos actuales ni en la mente de los futuros profesores que actúan, fundamentalmente, a partir de los recuerdos que tiene como alumnos de enseñanza obligatoria.

Los trabajos citados (Blanco, et al., 2013; Caballero, 2013) señalan las limitaciones de los EMP al enunciar otros tipos de actividades que pudieran ser consideradas como problemas de matemática. Así, los autores analizan las respuestas planteadas y tras mostrarle a los EMP el resultado del análisis, les plantean a 56 EMP la segunda parte de cuestionario: *¿Creéis que existen otros tipos de problemas? En caso afirmativo, escribid dos ejemplos.*

El análisis de las respuestas por los EM y la observación del aula evidenciaron las dificultades que tienen para enunciar actividades matemáticas diferentes a las analizadas en párrafos anteriores. En el trabajo se indica que el 25% de los participantes, contestaron directamente que no existen otros tipos de problemas, que justifican con las siguientes afirmaciones que consideraban desde su experiencia como discente:

> *"Yo creo que no, porque a lo largo de mi vida escolar siempre he hecho problemas del mismo tipo".*
>
> *"La verdad es que no tengo ni idea. Los problemas de matemáticas que conozco son los de toda la vida".*

Otros 34,5% escribieron problemas similares a los propuestos previamente pero con otros contenidos matemáticos como estadística o probabilidad que no habían aparecido entre los primeros enunciados.

La pregunta plateada y el debate que se establece motivó que algunos EM intuyeran la existencia de otros tipos de problemas matemáticos pero que, en ese momento, no fueron capaces de enunciar:

> *"Después de lo visto deben existir, pero en este momento no se me ocurre ninguno".*
>
> *"Claramente deben existir, pero me siento incapaz de encontrar algún ejemplo".*

Estas concepciones sobre la RPM que derivan de su experiencia escolar y que recuperarán cuando accedan a la profesión docente (Blanco, 1997) no es coherente con la que se maneja en los currículos de matemáticas que consideran una visión más amplia sobre los problemas, diferentes perspectivas como contenido, como aplicación y como metodología (ver capítulo 2) y en las clasificaciones usuales, como las señaladas, que muestran diferentes posibilidades (ver capítulo 7).

Queremos recordar que situaciones similares las hemos experimentado, como docentes, con estudiantes de la licenciatura de matemáticas y en cursos para la formación de profesores en secundaria. Las conclusiones del estudio realizado por Pino (2013), son bastante similares a las del trabajo de Blanco, et al. (2013), descrito en los párrafos anteriores.

Entre tales conclusiones encontramos que

> Los ejemplos de problemas que ellos han dado, nos muestran que estos estudiantes para profesor de matemáticas tienen una concepción muy tradicional acerca de lo que son los problemas, los ejemplos dados no van más allá de los típicos ejercicios de carácter algorítmico y los problemas con texto (word problem) que se resuelven traduciendo el texto al lenguaje matemático, lo que lleva, generalmente, a la aplicación de fórmulas o procedimientos rutinarios (p. 124).

3. OTRAS ACTIVIDADES MATEMÁTICAS

A modo de ejemplo proponemos algunas actividades que hemos utilizado en las aulas de formación de profesores para mostrar que existen otros tipos de problemas diferentes a los que aparecieron en el cuestionario y que nos permiten trabajar contenidos curriculares. Debemos significar que en la elección de los problemas tuvimos en cuenta las recomendaciones de Santos (1996) ya que las tareas que se sugieren a los estudiantes eran accesibles en base a sus conocimientos previos y no requerían del uso de ideas sofisticadas, ilustraban ideas matemáticas importantes de tipo conceptual o procedimental, podría resolverse de diferentes maneras y provocaban debate entre los alumnos.

Veamos en la Figura 5 un problema de Geometría escolar.

Jaime y Paula quieren averiguar si una lámina del taller de matemáticas es realmente cuadrada.

Jaime mide los lados, ve que son iguales y, consecuentemente, asegura que es cuadrada.

Paula mide las diagonales y, como obtiene la misma medida en ambas, concluye que la lámina es cuadrada.

¿Tienen razón los dos? ¿Sólo la tiene Jaime? ¿Sólo la tiene Paula? ¿No tiene razón ninguno de los dos? ¿Qué forma tiene la lámina?

Figura 5. Problema de Geometría.

La resolución de este problema requiere del uso de conceptos matemáticos pero no plantea la aplicación de ningún algoritmo o fórmula, ni la respuesta es un dato numérico. Por ello, cuando planteamos esta actividad preguntamos a los estudiantes para profesores si se trata de un problema de matemáticas, la respuesta es negativa o de duda para muchos de ellos al observar que no hay que aplicar ninguna fórmula o realizar cálculo alguno. Sin embargo, cuando abordamos la tarea, reflexionamos sobre los conceptos implicados, los errores que surgen y la discusión que se genera cambian de opinión puesto que experimentan la necesidad de debatir y reconsiderar su conocimiento matemático sobre los cuadriláteros.

La situación planteada genera un debate acerca de las definiciones de los cuadriláteros, de las diferentes clasificaciones que se pueden adoptar al respecto y, muy importante en los procesos de formación de profesores, provoca la necesidad de clarificar el significado y diferenciación entre definición y concepto (Blanco y Contreras, 2002; Blanco, Cárdenas, Gómez y Caballero, 2011). Ello, además debe completarse con el análisis de los textos escolares para reconceptualizar los contenidos implicados en la resolución de la tarea propuesta.

Las actividades de cálculo mental son interesantes y sugeridas en el currículo. Por nuestra parte, proponemos un juego numérico que puede, además, favorecer reflexiones sobre estrategias para solucionar problemas de matemáticas. Así, describimos el juego de *'llegar al 20'* (Figura 6).

Dos jugadores, alternativamente y partiendo de cero, van sumando 1 ó 2 a la cantidad del otro, y ganará el que llegue a 20

Figura 6. Juego de llegar a 20.

Es un sencillo juego de cálculo en el que los estudiantes encuentran sin dificultad una secuencia ganadora a partir del descubrimiento de una estrategia partiendo de la solución y volviendo hacia atrás. Que es, por otra parte, una estrategia usual en la resolución de problemas de matemáticas. Ello nos permite, engancharles en el juego y proponerles modificaciones con otras cantidades y operaciones, admitiendo en algunos casos respuestas exactas o aproximadas.

Así, podemos proponer que partiendo de un número entre 1 y 5 y multiplicando por 1, 2, 3 4 ó 5 la cantidad dada por el compañero, llegar o acercarnos al 10.000. Nuestra experiencia nos dice que cuando introducimos números más grandes los EMP llegan a apreciar la importacia del cáculo mental, reconocer nuevas estrategias para su desarrollo y admitir la utilidad del uso de la calculadora (en nuestro caso a partir de la calculadora del móvil) para mejorar el cálculo numérico, al reconocer que el juego sería más ágil que con la utilización de lápiz y papel.

Como tercer ejemplo para desarrollar actividades alternativas en el aula mostramos una tarea para trabajar los algorítmos de las operaciones básicas (Figura, 7). Así, propusimos algunas actividades que permitían trabajar los algoritmos tradicionales:

Sustituir los asteriscos por números para darle sentido a la operación, indicando el por qué de la elección de los números:

```
    4 7 * 0
      X 3 8
-----------
  * 8 0 8 *
* 4 * 8 *
-----------
* * 0 * * *
```

Figura 7. Problema para trabajar el algoritmo de la multiplicación

Este pasatiempo permite reflexionar sobre la lógica del algoritmo de la multiplicación y del sistema de numeración decimal. Asumiendo el interés de este tipo de actividad podemos realizar propuestas similares en diferentes niveles y con cualquier algoritmo aritmético o algebráico.

Finalmente, mostramos otro ejemplo (Figura 8) de problemas que pone de manifiesto que para resolver problemas no es suficiente con conocer los contenidos matemáticos implicados en la actividad, sino que se requiere conocer y dominar algunos procedimientos específicos de los que se indican en el capítulo 2 cuando se habla de la resolución de problemas como un contenido específico y en el capítulo 9 cuando se describe un Modelo General de Resolución de Problemas de Matemáticas.

Dos amigos se encuentran por la calle después de mucho tiempo sin verse. Uno de ellos, tras los saludos correspondientes, pregunta acerca de las edades de los hijos del otro. Este, enigmático le contesta:

– El producto de las edades de mis tres hijas es 36, y su suma es el número de la casa de enfrente.

El amigo, tras escuchar la curiosa respuesta y observar el número de la casa, le respondió:

– Me falta un dato

A lo que el primero añadió:

– Mi hija mayor toca el piano.

¿Qué edades tenían las hijas del intrigante amigo?

¿Cuál es el número de la casa de enfrente?

Figura 8. Problema que requiere de contenidos específicos de la resolución de problemas

Son ejemplos que evidencian que existen diferentes tipos de problemas de matemáticas cuya resolución requiere del conocimiento de conceptos y procesos propios del currículo de primaria. Pero, además, su desarrollo pone de manifiesto la importancia de adquirir conocimiento sobre el proceso de resolución de los problemas.

La experiencia docente e investigadora en diferentes niveles nos ha mostrado que los alumnos se sienten más motivados con estas actividades y que los objetivos de alcanzar a resolver problemas, en un ambiente de resolucíón de problemas, se consiguen más fácilmente.

BIBLIOGRAFÍA

— ARCAVI, A; FRIEDLANDER, A. Curriculum developers and problem solving: the case of Israeli elementary school projects. En *ZDM Mathematics Education*, 2007, n. 39, pp. 355-364.

— BLANCO, LJ. Consideraciones elementales sobre resolución de problemas. Badajoz, España: Univérsitas, 1993.

— BLANCO, LJ. Concepciones y creencias sobre la resolución de problemas de estudiantes para profesores y nuevas propuestas curriculares. En revista Quadrante, 1997 Vol. 6, n. 2, pp. 45-65.

— BLANCO, LJ; CÁRDENAS, JA; GÓMEZ, R; CABALLERO, A. Aprender a enseñar Geometría en Primaria. Una experiencia en formación de Maestros. Badajoz, España: Grupo DE-PROFE, 2011. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1951/2/2011_Aprender_Geometr%C3%ADa_Blanco%2C_C%C3%A1rdenas%2C_G%C3%B3mez_y_Caballero.pdf.

— BLANCO, LJ; CONTRERAS, LC. Un modelo formativo de Maestros de Primaria, en el área de Matemáticas, en el ámbito de la Geometría. En CONTRERAS, LC; BLANCO, LJ (Eds.): *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente*. Badajoz, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, 2002, pp. 93-124.

— BLANCO, LJ; GUERRERO, E; CABALLERO, A. Cognition and Affect in Mathematics Problem Solving with Prospective Teachers. En The Mathematics Enthusiast, 2013 - Special Issue, Vol. 10, n. 1 y 2, pp. 335 – 364. http://www.math.umt.edu/tmme/vol10no1and2/13-Blanco-et%20al_pp335_364.pdf.

— BORASI, R. On the nature of Problem. En *Educational Studies in Mathematics,* 1986, n. 1*7, pp.* 125-141.

— BUTTS, T. Posing problems property. En *NCTM 1980 Yearbook*, 1980, pp. 23-34.

— CABALLERO, A. Diseño, Aplicación y Evaluación de un Programa de Intervención en Control Emocional y Resolución de Problemas Matemáticos para Maestros en Formación Inicial. Tesis doctoral Inédita - Universidad de Extremadura, Badajoz, España: 2013. Recuperado de: http://dehesa.unex.es:8080/xmlui/handle/10662/590.

— CARRILLO, J. Resolución de problemas en la enseñanza secundaria: ejemplificación del para qué. En *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales",* 1998, n. 40, pp. 15-26.

— CHARLES, R; LESTER, F. Teaching problem solving. What, Why, How. Palo alto, CA: Dale seymour Pu, 1982.

— CODINA, A; RIVERA, A. Hacia una instrucción basada en la resolución de problemas: los términos problema, solución y resolución. En GÓMEZ, P; RICO, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada, España: Editorial Universidad de Granada, 2001.

— HOUSE, PA; WALLACE, ML; JOHNSON, MA. Problem Solving as a Focus: How? When? Whose Responsibility?. The agenda in action", NCTM, Virginia, 1983, p. 9-19.

— KANTOWKI, MG. "Problem solving". En FENNEMA, E (Ed.): *Mathematics Education Research. Implications for the 80´s*. Virginia: 1981, pp. 111-126.

— LEIF, J; DEZALY, R. Didáctica del cálculo, de las lecciones de las cosas y de las ciencias aplicadas. Buenos Aires, Argentina: Kapelusz, 1961.

— LESTER, F. Trends and issues in mathematical problem solving research. En LESH, R; LANDAU, M. (Ed.): *Acquisition of mathematics concepts and processes*. London: Academic Press, 1983, pp. 229-264.

— NCTM. Sugerencias para resolver problemas. México: Trillas, 1981.

— PINO, J. La resolución de problemas y el dominio afectivo: un estudio con futuros profesores de matemáticas de secundaria. En MELLADO, V; BLANCO, LJ; BORRACHERO, AB; CÁRDENAS, JA (Coords.): L*as emociones en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas. Badajoz, España:* Grupo DEPROFE, 2013.

— SANTOS, LM. Análisis de algunos métodos que emplean los estudiantes al resolver problemas matemáticos con varias formas de solución. *Educación Matemática*, 1996, Vol. 8 n. 2, pp. 57-69.

— SANTOS, LM. La Resolución de Problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos. México: Trillas, 2007.

— SCHOENFELD, A. Mathematical Problem Solving, Orlando: Academic Press Inc., 1985.

¿Qué entiendo por problema de matemáticas?

Nombre y Apellidos: ....

Parte 1

1. Enuncia tres problemas de matemáticas

2. Señala por qué es importante la resolución de problemas de matemáticas en la enseñanza obligatoria.

3. Escribe reflexiones personales sobre tu experiencia en la resolución de problemas de matemáticas en primaria y secundaria

4. ¿Qué consideración te merece la resolución de problemas de Matemáticas?

5. Añade algo que te parezca significativo y no hayas escrito

Parte 2

Una vez analizadas las cinco cuestiones anteriores y tras mostrar los resultados a los estudiantes, se les pregunta:

6. ¿Creéis que existen otros tipos de problemas? En caso afirmativo, escribid dos ejemplos.

CAPÍTULO 6
REFERENTES PARA PROPONER PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Lorenzo J. Blanco Nieto y Janeth A. Cárdenas Lizarazo

En el capítulo anterior hemos dado sentido a los problemas de matemáticas a partir de una tarea que debiera ser abordada y de la actitud/aptitud del resolutor. Hemos asumido un amplio significado para el vocablo 'problema', lo que nos va a permitir establecer diferentes variables, tanto para su formulación como para su resolución. En este capítulo, veremos algunas de estas variables, mientras que en el Capítulo 12 recordaremos diferentes clasificaciones de los mismos.

Nuevamente nos apoyamos en el currículo de la Comunidad Autónoma de Extremadura para resaltar aspectos que debemos considerar para proponer los problemas en las aulas. Así, por ejemplo en el currículo se indica que los estudiantes deben aprender a resolver y plantear problemas "relacionados con objetos, hechos y situaciones de la vida cotidiana" (Decreto, 2007, p. 7912) o problemas formulados para permitir a los estudiantes "disfrutar de aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios para las matemáticas" (Decreto, 2007, p. 8099).

Igualmente, explicita que las fuentes utilizadas para plantear las tareas deben ser diversas y familiares para los resolutores. Así, por ejemplo, se refiere en una de sus sugerencias a situaciones problemáticas relacionadas con temas de salud, consumo, medio ambiente, educación vial o a interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de casas y maquetas) realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares.

Por otra parte, se refiere a diferentes formas de presentar las tareas. Al respecto, habla de problemas enunciados en texto escrito o a partir de gráficos y tablas. Igualmente, son numerosas las sugerencias que aparecen en el currículo en referencia a las diferentes acciones que los alumnos debieran realizar cuando formulan o resuelven problemas: comprender, aplicar, calcular, explicar oralmente y por escrito, generalizar, comprobar, etc.

Atendiendo a estos aspectos hemos señalado cuatro referentes para formular los problemas matemáticos que analizaremos en los siguientes apartados: i. Contextos elegidos para formular la tarea; ii. Formatos en los que las proponemos; iii. Fuentes de donde obtendremos los datos y situaciones y, iv. Tipo de acción que propondremos a los estudiantes para resolverla.

1. CONTEXTOS

Cuando presentamos un problema lo enmarcamos en un contexto que puede reflejar una situación real, ficticia o lúdica con el que queremos darle sentido y/o aplicar los conceptos o procesos matemáticos.

Supongamos que queremos trabajar las 'medidas de superficies rectangulares'. Este contenido puede contextualizarse en diferentes situaciones, dependiendo de la manera en la que formulemos la tarea que deberá realizar el resolutor para alcanzar el objetivo propuesto en el enunciado.

Si miramos el libro de texto, es posible que nos encontremos con un problema típico y contextualizado en un aula rectangular y formulado a partir del enunciado que se muestra en la Figura 1.

Calcular el área de un aula sabiendo que tiene 7 metros de ancho y 11 metros de profundidad.

Figura 1. Problema en un contexto realístico.

Pero también podríamos enunciar un problema prescindiendo de la referencia al aula, y enunciarlo a partir de conceptos matemáticos (Figura 2 y 3).

Calcular el área de un rectángulo que tiene 7 metros de base y 11 metros de altura.

Figura 2. Problema en un contexto matemático.

Calcular el área de un rectángulo sabiendo que sus lados miden 7 metros y 11 metros.

Figura 3. Problema en un contexto matemático.

En el primer caso hacemos referencia a un espacio que nos es familiar y que podemos visualizar. Podríamos haber escogido una ventana o un campo de fútbol. En el segundo caso, es un problema general, sin referencia a ningún espacio ni objeto cotidiano. Las únicas referencias del enunciado son conceptos o procesos matemáticos.

Obviamente, y considerando que el aula de clase suele tener una forma rectangular podríamos proponerles a los alumnos una pregunta contextualizada en una situación real como puede ser el aula de clase (Figura 4).

¿Cuánto mide esta aula de clase?

Figura 4. Problema en un contexto real.

Admitiendo que existen contextos diferentes (Díaz y Poblete, 2001), como prueban los ejemplos anteriores, hemos establecido cuatro contextos diferentes en los que se pueden presentar los problemas y que denominamos: Real, Realístico, Matemático y Manipulativo y/o Recreativo.

Para ejemplificar estos cuatro contextos retomaremos estos ejemplos que están relacionados con el concepto de rectángulo y el procedimiento para calcular su superficie.

1.1. Contexto Real

En primer lugar, podemos partir de una situación a partir de un contexto real y del entorno de los estudiantes. Así, independientemente de la forma del aula, podremos plantear el problema de la Figura 4 o 5.

Calcular la superficie del aula.

Figura 5. Problema en un contexto real.

Con el enunciado anterior planteamos una actividad abierta, ya que no se sugiere ningún procedimiento determinado y único, así como tampoco un resultado concreto puesto que éste dependerá de las unidades de medida que utilicemos en el proceso. Pero el objetivo del problema es claro: conocer la superficie del aula.

Es obvio que para abordar esta tarea tendremos que analizar la forma del aula y decidir el procedimiento para calcular su superficie, lo que implica, además, debatir y seleccionar las unidades de medida que podemos utilizar. Nos enfrentamos a una situación abierta que no tiene un procedimiento explícito e inmediato para su resolución pero que requiere de conceptos y procedimientos matemáticos, que forman parte del currículo de primaria. Es decir, la resolución de este tipo de problemas requiere:

i. La creación de un modelo matemático. Así podremos medir con pasos o metros o podremos utilizar las baldosas del aula como referente de medida.

ii. La aplicación de conceptos y procesos matemáticos implícitos en el modelo. El uso de diferentes unidades de medida y de diferentes procedimientos de cálculo aparecerán en la resolución del problema

iii. Traducción de los resultados para analizar su validez, sacar conclusiones y tomar decisiones. Es evidente que los resultados diferirán si medimos con pasos de diferentes alumnos o con metros, y su operación para obtener las unidades de superficie.

La referencia a plantear y resolver problemas relacionados con la vida real de los alumnos es constantemente sugerida en los currículos, ya que ello permitiría darle sentido a los conocimientos matemáticos. Son muchas las situaciones escolares y personales de los alumnos que pueden ser referente explícito para plantear y resolver problemas que se resuelvan utilizando las matemáticas escolares. Las excursiones o salidas escolares que realizan los niños que en muchos casos llevan aparejado gastos y desplazamientos, referencias a las zonas donde habitan (población, extensión, distancias) y el uso de los móviles o de las actividades de fin de semana, son algunos de los referentes que surgen de manera inmediata.

El currículo extremeño señala: "Aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y comprender la realidad circundante y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica" (Decreto, 2007, p. 8099).

ÍNDICE

En relación a los contextos reales conviene recordar una referencia del Diseño Curricular Base para la Enseñanza Secundaria Obligatoria (MEC, 1989) donde se señalaba:

No son los mismos problemas los que necesita resolver un matemático, un adulto, un adolescente y un niño. La realidad incluye su propia percepción del entorno físico y social y componentes imaginadas y lúdicas que despiertan su interés en mayor medida que las situaciones reales desde el punto de vista adulto. En consecuencia, la activación del conocimiento matemático mediante la resolución de problemas reales no se consigue transvasando de forma mecánica situaciones que pueden ser muy pertinentes y significativas para el adulto, pero que pueden fácilmente no tener estas características para los alumnos (MEC, 1989, p. 480).

1.2. Contexto Realístico

Podríamos suponer la existencia de un aula rectangular para plantear el problema, tal como señalábamos al inicio de este capítulo en la Figura 1.

En este caso, no existe ninguna decisión previa de los resolutores en relación al proceso de resolución o al tipo de medida. Su tarea es identificar y recordar la fórmula adecuada y aplicarla. Su acción se limita a recordar el algoritmo a utilizar, sustituir los datos del enunciado y proceder al cálculo.

El planteamiento de este problema sugiere un procedimiento inmediato como es recordar y aplicar la fórmula para la superficie del rectángulo que, a buen seguro, estará en el mismo capítulo donde se ha propuesto la actividad. Este problema se plantea para justificar la aplicación de las matemáticas a una situación real, pero la tarea que desarrolla el resolutor es claramente diferente a la que desarrollaría en el primer caso planteado para el contexto real. Diríamos que en este caso la realidad que nos presenta el problema viene tamizada, por el proponente del problema, que implícitamente sugiere un procedimiento de solución.

Probablemente esta tarea no genere ninguna dificultad para los resolutores que ya hayan resuelto algunos similares, por lo que podría ser considerada no como un problema para ellos, sino más bien como un ejercicio (ver capítulo 5).

1.3. Contexto Matemático

Para trabajar el cálculo de superficie de figuras rectangulares podríamos prescindir de la relación con figuras reales o situaciones concretas y enunciar la actividad con referencias exclusivas a conceptos matemáticos. Así, podríamos plantear las tareas de la Figuras 2 o 3.

Los enunciados sugeridos son muy similares al problema planteado en el contexto realístico. La invitación implícita al procedimiento viene sugerida por la estructura del enunciado y los ejemplos puestos en el tema del libro. En este caso, el texto incluye de manera explícita las variables de la expresión para calcular la superficie de los rectángulos (base y altura o la medida de los dos lados), excluye toda referencia a una situación real o simulada, y sólo establece un contexto matemático. No hay una referencia a la realidad y sí a conceptos y proceso matemáticos.

Aparentemente, las tareas en contextos realisticos y matemáticos parecen similares pero el índice de acierto o fracaso en la resolución de estos problemas es diferente. De esa manera, sugerimos plantear a los resolutores, independientemente del nivel escolar los problemas de las Figuras 6 y 7.

Calcular el volumen de una piscina rectangular que mide 5 m. de ancho, 10 m. de largo y 2 m. de profundidad

Figura 6. Problema en un contexto realístico.

Calcular el volumen de un ortoedro cuyas medidas son 5 m., 10 m. y 2 m.

Figura 7. Problema en un contexto matemático.

1.4. Contexto Manipulativo y/o Recreativo

Los recursos manipulativos y tecnológicos nos sugieren múltiples actividades para trabajar las matemáticas escolares. Así, para trabajar con el cálculo de superficie de los rectángulos podríamos haber utilizado el Geoplano o la Trama Cuadrangular y construir rectángulos diferentes (Blanco, Cárdenas, Gómez, y Caballero, 2011; Blanco y Márquez, 1987).

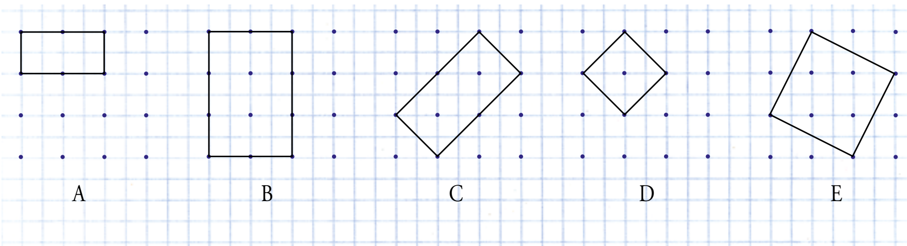


Figura 8. Algunos rectángulos en una Trama cuadrangular de 4 x 4.

Cuando los alumnos dibujan los rectángulos en la trama lo hacen en diferentes posiciones y tamaños (Figura 8). De manera inmediata, surge la confusión sobre 'rectángulo', 'cuadrado' y 'rombo' a partir de la representación D en la Figura 8. Esta situación nos sugiere recordar la definición de los tres conceptos (Figura 9) para aclarar que el cuadrado es un caso particular del rombo y del rectángulo, de acuerdo a la clasificación usual de los cuadriláteros en los libros de textos escolares.

Rectángulo:	Cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.
Cuadrado:	Cuadrilátero con cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales.
Rombo:	Cuadrilátero con cuatro lados iguales.

Figura 9. Definiciones del cuadrado, rectángulo y rombo.

Estas dificultades sobre los conceptos implicados no aparecen en ninguno de los tres contextos anteriores. El cálculo del área de cada uno de ellos presenta, en algún caso, algunas dificultades y sugiere otros procedimientos de solución diferentes al uso de la fórmula. Así, en las dos primeras representaciones de la Figura 8, la referencia a la unidad de los lados puede ser un recurso fácil, pero éste no es inmediato en el rectángulo de la figura C, en el que el recurso al Teorema de Pitágoras o a algún procedimiento de composición o descomposición de figura no les resulta fácil.

En Blanco, et al. (2011), se muestra un trabajo con estudiantes para maestro acerca de la clasificación de los cuadriláteros en el que se desarrolla un proceso constructivo que pone, así mismo, en evidencia las dificultades de los EMP en el aprendizaje de la Geometría, algunas de las cuales ya eran profundizadas por Blanco y Contreras (2002).

La presentación y desarrollo de esta tarea muestra novedades cognitivas y afectivas en la manera en la que los alumnos abordan su actividad, así como una mayor motivación a utilizar procedimientos menos algorítmicos.

2. FORMATO DE PRESENTACIÓN DE LOS PROBLEMAS

La información y demandas que se les sugiere a los estudiantes en los problemas pueden presentarse en diferentes formatos (Chamorro y Vecino, 2003). Así, por ejemplo, si queremos proponer problemas aritméticos relativos a artículos de un supermercado podemos plantear un texto escrito, una tabla con los productos y los precios o simplemente una imagen obtenida del escaparate de una tienda o una propaganda de sus productos (Figura 10).

Figura 10. Imagen del escaparate de una charcutería.

Esta categoría se refiere a la forma en que se presenta la información en el enunciado, y se ha construido en base a lo planteado por Chamorro y Vecino (2003)

Dentro de un mismo contexto aparecen diferentes formatos o soportes de presentación de la actividad:

ÍNDICE

texto escrito; tabla; gráfico, imagen y recursos manipulativos. A este respecto, los medios de comunicación nos aportan informaciones diversas presentadas en diferentes formatos. Así, podríamos utilizar la clasificación de equipos de baloncesto para plantear y resolver problemas, ya sea haciendo uso de las tablas en las que se presenta esta información (Tabla 1, p. 102), redactando un texto o elaborando un esquema que de cuenta de la información.

El dar un texto de un problema de distancias o de población es diferente a facilitar un mapa donde se indiquen distancias y la población de los diferentes pueblos, o una tabla con los mismos datos. Estos serían también buenos formatos, siendo la información presente las fuentes de datos empleadas para plantear y resolver problemas.

Para profundizar en la importancia de las variables que podamos considerar en la presentación de los problemas, vamos a proponer algunos ejemplos de problemas que tienen el mismo objetivo: *Calcular el área del triángulo* y que se resuelven todos siguiendo el mismo procedimiento: *Aplicación de la fórmula b x h/2*. Observaremos cómo la presentación condiciona al resolutor en la manera de abordar el problema, generando mayor o menor dificultad. En este caso los problemas planteados lo son todos en contexto matemático.

Primer ejemplo: Proponemos un formato usual en los materiales escolares (Figura 11).

Calcular el área de un triángulo de base 5 cm y de altura 8 cm.

Figura 11. Problema escolar en formato textual.

Es un problema considerado sencillo en el que la tarea del resolutor es recordar y aplicar la fórmula del área de un triángulo. Este problema, o ejercicio según algunos a autores no suele presentar dificultad.

Segundo ejemplo: Podemos hacer una modificación del problema anterior con la introducción de una figura que servirá de soporte para la obtención de datos (Figura 12).

Calcular el área de un triángulo de base 5 cm y de altura 8 cm:

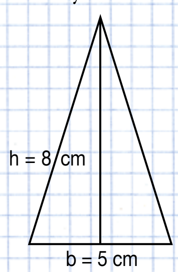


Figura 12. Problema escolar en formato textual y gráfico.

ÍNDICE

En este caso, la figura acompaña al texto dando información de los datos del problema y su resolución tampoco genera dificultad en los estudiantes.

Podríamos concluir que la resolución de los dos problemas anteriores indicaría que el resolutor sabe resolver problemas de áreas de triángulos, y que es capaz de identificar la base y la altura de un triángulo para resolver los problemas de cálculo de área de un triángulo. En tal situación, no tendríamos en cuenta las dificultades que los alumnos tienen con el concepto de altura de un triángulo y la dificultad para identificar la base y la altura en los triángulos que no están en la posición estándar de los libros de texto, en los que aparecen apoyados sobre una base horizontal y 'una' altura vertical.

Tercer ejemplo: Podríamos modificar la figura del triángulo y dibujar un triángulo obtusángulo apoyado sobre un vértice (Figura 13).

La presentación de esta figura genera en el resolutor una actitud diferente a los casos anteriores que evidencia dificultades en relación a los conceptos básicos del triángulo (base y altura), no apreciados en la resolución de los dos primeros ejemplos. La actividad matemática es la misma en el segundo y tercer problema ya que, en ambos casos, lo que hay que hacer es identificar la base y la altura y sustituir los valores en la fórmula elegida.

Sin embargo, muchos alumnos desisten en este tercer problema o lo resuelven mal ya que tienen dificultad para identificar una base y su altura correspondiente para poder aplicar la fórmula adecuadamente. En este caso se ve la dificultad del concepto de altura de un triángulo (Azcárate, 1997; Blanco, 2001) que no está dibujado en posición estándar.

Así, es frecuente encontrar que *(6 cm. x 3 cm.) / 2 = 9 cm²* sería la solución al problema.

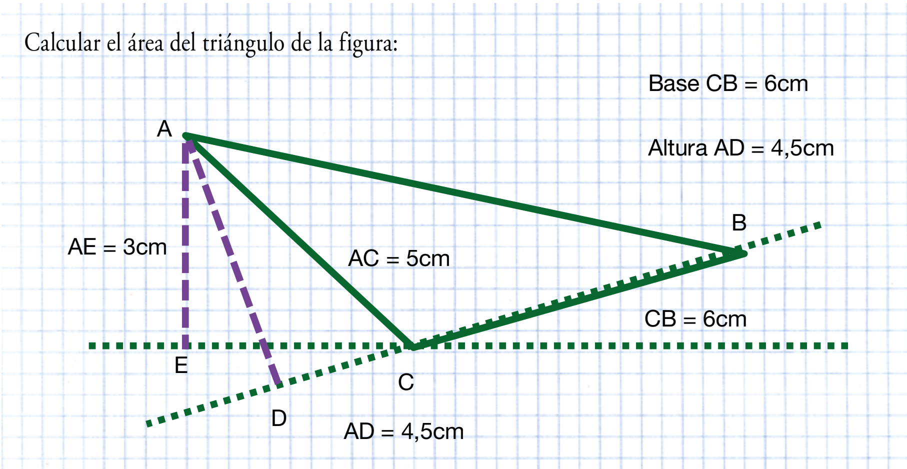


Figura 13. Triángulo obtusángulo del que se pide calcular su área

Cuarto ejemplo: Una dificultad similar presentan los alumnos cuando planteamos el problema de la Figura 14.

Calcular el área del triángulo de la figura:

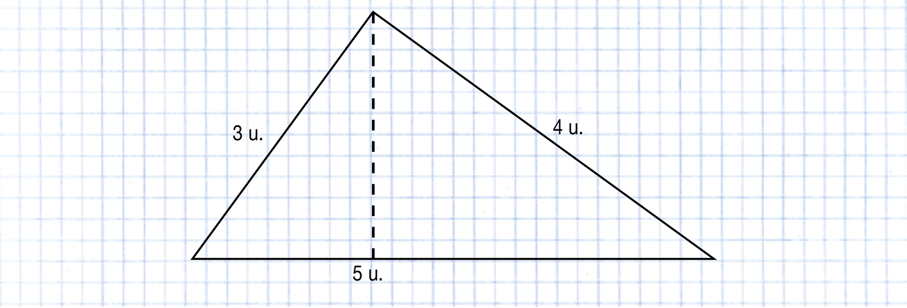


Figura 14. Triángulo rectángulo del que se pide calcular su área.

En este caso, la identificación de la base con el lado horizontal y la altura con un segmento vertical les lleva a plantar un sistema de ecuaciones para su determinación. A pesar de que los números son claramente pitagóricos, son muy escasos los alumnos que identifican el triángulo con un triángulo rectángulo y considerar los catetos como bases y alturas del mismo.

Simplemente un giro en la figura facilitaría la visualización de la base y de la altura y permitiría resolver más fácilmente el problema. El análisis y resolución de la situación planteada nos llevaría a una nueva fórmula para calcular el área de los triángulos rectángulos: 'Para calcular el área del triángulo rectángulo se multiplica el valor de los catetos y se divide entre dos'. Esta expresión es un 'descubrimiento' para muchos estudiantes para maestro.

Los cuatro problemas propuestos nos indican la importancia de la presentación del problema y cómo los conceptos y procesos matemáticos, útiles en el problema, se ven condicionados por su presentación.

3. FUENTES

Las diferentes actividades pueden plantearse a partir de situaciones diversas que de un modo general viene referidas en el currículo. Así, en el currículo extremeño se plantea la necesidad de "Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas… así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana" (Decreto, 2007, p. 7827). Y, específicamente, se refiere a algunas de ellas al señalar la necesidad de analizar e interpretar diferentes "situaciones problemáticas relacionadas con temas de salud, consumo, medio ambiente, educación vial" (Decreto, 2007, p. 7923).

Y señala un objetivo para el final de la etapa de primaria:

> "El desarrollo de la competencia matemática al final de la educación obligatoria, conlleva utilizar espontáneamente –en los ámbitos personal y social– los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones" (Decreto, 2007, p. 7835).

Los trabajos de Blanco, et al. (2013) que se comentan en el capítulo 5 mostrarían que esta sugerencia del currículo no se desarrolla en las aulas ni se refleja en los libros de texto. Los alumnos de diferentes niveles educativos no ponen ejemplos de estas situaciones cuando se les pregunta acerca de la utilidad de las matemáticas en 'su' actividad cotidiana. Ello, nos lleva a sugerir un cambio profundo en las situaciones que sirven de apoyo para plantear los problemas, que deben modificarse para partir de contextos personales, sociales o culturales del entorno de los alumnos. La experiencia de los propios estudiantes nos sugiere múltiples situaciones que pueden ser matematizables en relación a los contenidos matemáticos escolares, por ejemplo los datos que se logran extraer de las diferentes competiciones deportivas (Tabla 1). Ello sería un elemento fundamental para que pudieran "valorar las Matemáticas como parte integrante de nuestra cultura" (Decreto, 2007, p. 8099).

TABLA 1. CLASIFICACIÓN DE EQUIPOS DE BALONCESTO EN LA ACB. TEMPORADA 2013 – 14

Equipo	Partidos ganados	Partidos perdidos	Puntos a favor	Puntos en contra
Real Madrid	32	2	3.001	2.480
Valencia Basket	30	4	2.930	2.554
FC Barcelona	27	7	2.785	2.467
Unicaja Málaga	23	11	2.745	2.467
Herbalife Gran Canaria	22	12	2.595	2.430
Laboral Kutxa	19	15	2.777	2.702
Cajasol	18	16	2.543	2.545
CAI Zaragoza	18	16	2.647	2.601

También podemos considerar como fuentes para proponer problemas recursos manipulativos o digitales fácilmente accesibles, los medios de comunicación escritos o audiovisuales, la literatura y los cuentos infantiles o de adolescentes o, simplemente, de observación de la realidad escolar y de la zona donde se inserta el centro.

A modo de ejemplo, podríamos señalar que los medios de comunicación, escrito o en la red, son un material vivo y actual, al mismo tiempo, que una gran fuente de situaciones que nos pone en contacto directo con nuestro medio real, social, cultural y económico. Y, todo ello en los diferentes ámbitos local, regional, nacional e internacional. Por lo tanto, es un recurso que permite darle sentido a las actividades matemáticas y conectar las matemáticas con la realidad. En los medios aparecen suficientes conceptos matemáticos como diferentes clases de números (enteros, fracciones o negativos), diagramas y representaciones estadísticas, etc. Del mismo modo, podemos ampliar a otros medios la referencia que Fernández y Rico (1992) hacía para los medios escritos "la prensa no sólo facilita buenos ejemplos y situaciones para la introducción de un determinado concepto, sino que permite trabajar y razonar matemáticamente en contextos más amplios" (Fernández y Rico, 1992, p. 14).

La observación de las secciones de los medios son una fuente abundante para plantear actividades matemáticas, en general, y para plantear problemas en particular. En Alsina (1994), Corbalán (1991, 1995 y 1997), Muñoz, Fernández, y Bueno (1995), Paulos (1996) y Rico y Fernández (1987) podemos encontrar referencias a estas actividades.

Frecuentemente podemos observar libros de cuentos, novelas o películas entre las que encontramos algunas propuestas o planteamientos que implican algún concepto matemático. Esto sucede, por una parte, en la lectura de autores que como Lewis Carrol, Miguel de Guzmán o Luis Balbuena quienes han puesto al servicio de la literatura parte de su saber matemático. Igualmente, es fácil utilizar ciertas situaciones de la literatura que sin haber sido escritas con esa intencionalidad pueden aprovecharse como material didáctico en la enseñanza de las matemáticas. A este respecto, podemos encontrar algunos trabajos que utilizan cuentos concretos con fuentes para las actividades matemáticas. Así, por ejemplo, los *Viajes de Gulliver* son analizados en el trabajo del Grupo Beta (1990) y Fernández y González (1995) indagan en las posibilidades matemáticas del libro de Julio Verne *La vuelta al mundo en 80 días*. También podemos encontrar libros específicos cuya lectura, completa o parcial, lleva implícita la resolución de diferentes actividades matemáticas como *El asesinato del profesor de matemáticas* (Serra, 2008) o *Primo y algunos dislates sobre números* (Thio de Pol, 1976) o *Las intrigantes aventuras del Doctor Ecco* (Shasha, 1989).

En Blanco y Blanco (2009a, 2009b), Blanco, Caballero y Blanco, (2010), Caballero, Blanco y Blanco (2010) y Marín (2013) podemos encontrar algunas referencias básicas de cómo trabajar los cuentos como recurso para la enseñanza de las matemáticas en los niveles de infantil, primaria y secundaria.

4. TAREA

Cuando un resolutor enfrenta una actividad matemática son diferentes las tareas que puede realizar. Ello dependerá de la naturaleza de la actividad propuesta, del nivel de conocimiento y experiencia del resolutor o de los objetivos que se propongan, entre otros factores. Algunos autores como Chamorro y Vecino (2003) y Pino y Blanco (2008) han señalado algunas tareas específicas de los resolutores de problemas.

En el Informe del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2012) se menciona que en las pruebas TIMMS del 2007 se clasifican las tareas matemáticas en tres dominios o procesos cognitivos: Conocer, Aplicar y Razonar, señalándose diferentes actividades en cada caso:

> Conocer: Reconocer, Calcular, Recuperar, Medir y Clasificar/Ordenar.
>
> Aplicar: Seleccionar (p.ej. una operación, método o estrategia, algoritmos, etc. apropiado), Representar, Modelizar (p.ej. una ecuación o un diagrama, etc.), Aplicar, Resolver problemas rutinarios.
>
> Razonar: Analizar, Generalizar, Sintetizar/Integrar, Justificar, Resolver problemas no rutinarios (p. 78).

Por nuestra parte hemos revisado diferentes currículos y encontrado numerosas referencias a las tareas que debieran propiciarse en las actividades matemáticas: abstraer, analizar, aplicar, argumentar, calcular, clasificar, comparar, completar, conjeturar, contar, convencer, desarrollar modelos, diseñar estrategias, estimar, explicar oralmente y por escrito, formular, generalizar, idear, identificar, inferir, interpretar, inventar, investigar, medir, modelizar, ordenar, organizar, plantear problemas, proveer, proponer, representar, sintetizar, tomar decisiones y validar.

Todas estas tareas demandan capacidades diferentes y han sido categorizadas de diferentes maneras. Por ejemplo, en la Figura 15 presentamos dos categorias: la de Fortuny (2000) y la de Krathwohl (2002). Fortuny (2000) se refiere a: tareas de bajo rango cognitivo, medio y alto, donde las tareas de alto rango indican un nivel de reflexión cognitiva en el que se sintetizan informaciones, se establecen deducciones, etc., mientras que en tareas de bajo rango indica tareas capacidades o habilidades que implican acciones inmediatas de tipo reproductivo, donde se requiere que el alumno comprenda la tarea y tenga una idea previa clara.

Krathwohl (2002) agrupa estas tareas en seis 6 categorías diferentes: recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear. Esta categorización la hace modificando la Taxonomía de Blomm e incluyendo la tarea de crear como un nivel superior. Esto es, retoma como punto de partida las tareas que hacen referencia a la memorización y reproducción de conocimientos, y las tareas se van complejizando a medida de que el alumno debe hacer uso de su pensamiento productivo.

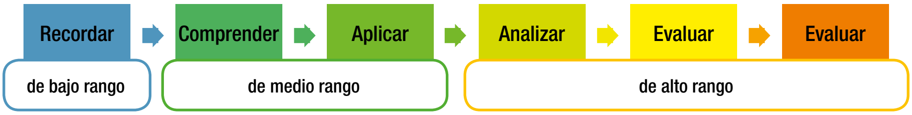


Figura 15. Categorización de tareas según las capacidades demandadas a los alumnos

Además los diferentes tipos de tareas suelen estar vinculadas con mayor fuerza a cuestiones conceptuales o procedimentales.

Como hemos visto a lo largo de este capítulo, las tareas se presentan bajo algún formato y estan vinculadas a un contexto. Es decir, hay una situación que las define y de ella se desglosan las tareas que se pretenden desarrollar con los alumnos. A traves de la situación que presentamos en la Figura 16 desglosaremos diferentes tareas, las cuales ubicaremos según la categorización presentada en la Figura 15.

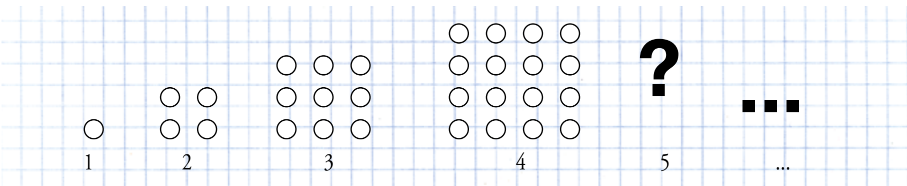


Figura 16. Situación de la que se desglosan las diferentes tareas propuestas.

4.1. Tareas de bajo rango cognitivo

En estas tareas se hace referencia a actividades que ponen en juego la memoria para poder resolverla. Un ejemplo de tarea que evalúa lo conceptual se puede ver en la Figura 17, mientras que en la Figura 18 se evalúan cuestiones más a nivel procedimental.

Completa la frase

En la Figura 16, la cantidad de puntos que compone cada una de las figuras se caracteriza por ser números ______________________________

Figura 17. Tarea de bajo nivel cognitivo conceptual

Como podemos ver, la tarea de la Figura 17 indaga por el nombre de un procedimiento. No exige realizar ningún tipo de relación entre los conceptos que intervienen en la situación descrita. Y, en la Figura 18 se debe realizar la operación que se indica, no hay necesidad de identificar el algoritmo por el que se pregunta sino que éste ya está dado, por lo que se puede afirmar que el resolver el algoritmo de manera adecuada es lo que se evalúa.

la cantidad de puntos que compone cada una de las figuras se halla al coger el número de la figura y multiplicarlo por sí mismo, como si hallara el área de un cuadrado. Así, en la figura 10 tendría (10x10) puntos, es decir, que tiene __________ puntos en total.

Figura 18. Tarea de bajo nivel cognitivo procedimental

4.2. Tareas de medio rango cognitivo

Las tareas que se proponen en las Figuras 19 y 20, para su solución, requieren el establecer relaciones entre los conceptos y/o los datos que se presentan para poder solucionar dichas tareas.

En la siguiente tabla se presenta el número de cada figura con su correspondiente cantidad de puntos. Además te mostramos la relación que se establece de una cantidad a otra para poder saber la cantidad de puntos que tiene cada figura.

Figura Nº.	1		2		3		4		5	
		x1		x2		x3		x4		x5
Cantidad de puntos	1		4		9		16		25	

Describe cuales son las relaciones que se pueden establecer entre el número de figura y la cantidad de puntos que ésta contiene.

Figura 19. Tarea indaga por lo conceptual y que demanda un nivel cognitivo medio

¿Cómo se puede hacer para saber cuántos puntos tiene la figura 100?

Elabora una tabla en la que se indique el número de las 10 primeras figuras y la cantidad de puntos que constituye .cada una de las figuras

Figura 20. Tarea indaga por lo procedimental y que demanda un nivel cognitivo medio

Esto es, en este tipo de tareas no basta con memorizar un concepto o un procedimiento algoritmico, para hacer frente a la tarea propuesta. En lo conceptual requiere el ser capaz de visualizar relaciones para describirlas (Figura 20) y en lo procedimental se necesita reconocer cúal es el prodedimiento algoritmico que relaciona una cantidad con otra para así poder llegar a solucionar la tarea con éxito.

4.3. Tareas de alto rango cognitivo

La explicación/modelización de un fenómeno complejo mediante el uso integrado de una red de conceptos interrelacionados, son el tipo de acción que se debe realizar para solucionar la tarea planteada, y se asumen como tareas de un alto nivel cognitivo.

Como se puede observar la tarea propuesta en la Figura 21 es similar a la tarea propuesta en la Figura 19 y solo se diferencian en los formatos empleados. Los formatos brindan claridad y ayudan a facilitar la información de las tareas que se proponen. Así en la tarea de la Figura 19 su respuesta está orientada a describir lo que se presenta en la tabla, mientras que en la Figura 21 se pide encontrar y describir las relaciones que se pueden establecer entre las dos magnitudes.

Haciendo uso del lenguaje matemático describe cuales son las relaciones que se pueden establecer entre el número de figura y la cantidad de puntos que ésta contiene.

Figura 21. Tarea indaga por lo conceptual y que demanda un nivel cognitivo alto

La tarea propuesta en la Figura 22 requiere de la creatividad del alumno. En ella se hace necesario considerar que para resolver una tarea existe más de un camino. Para poder solucionar esta tarea es necesario buscar las relaciones, que se pueden establecer a partir de la evolución de cada una de las figuras, en su representación gráfica y tabular.

Enuncia cuatro estrategias diferentes a través de las cuales se pueda encontrar el número de puntos que contiene una figura.

Figura 22. Tarea indaga por lo procedimental y que demanda un nivel cognitivo alto.

Es decir, el alumno no puede quedarse solo con la información que se le da a simple vista en la situación y en la tarea propuesta, tiene que interpretar, explorar, proponer, ensayar,…, haciendo de dicha tarea una actividad compleja.

BIBLIOGRAFÍA

— ALSINA, C. ¿Para qué aspectos concretos de la vida deben preparar las matemáticas? En UNO: revista de didáctica de las matemáticas, 1994, n. 1, pp. 37-44.

— AZCÁRATE, C. Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? En revista Suma, 1997, n. 25, pp. 23-30.

— BLANCO, B; BLANCO, LJ. Cuentos de Matemáticas como recurso en la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Innovación Educativa, 2009(a), n. 19, pp. 193-206. Recuperado de: https://minerva.usc.es/bitstream/10347/4986/1/pg_193-206_innovacion19.pdf.

— BLANCO, B; BLANCO, LJ. Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. En revista Números, 2009(b), n. 71, pp. 75-85. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos_03.pdf.

— BLANCO, B; CABALLERO, A; BLANCO, LJ. Matemática y lenguaje a partir de la lectura de cuentos. Propuesta didáctica para Secundaria. En revista Aula de Innovación Educativa, 2010, n. 189, pp. 85-96. Recuperado de: http://aula.grao.com/revistas/aula/189-competencia-matematica/matematica-y-lenguaje-a-partir-de-la-lectura-de-cuentos.

— BLANCO, LJ. Errors in the Teaching/Learning of the Basic Concepts of Geometry. En International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 2001, 24 de mayo. Recuperado de: http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijmenu.htm.

— BLANCO, LJ; MÁRQUEZ, L. Entorno al teorema de Pick: Una experiencia de enseñanza de la Geometría. En revista Números, 1987, n. 16, pp. 41-53. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/16/Articulo04.pdf.

— BLANCO, LJ; CONTRERAS, LC. Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza. Revista Unión, 2012, 30, pp. 101-123. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/30/Archivo_11_de_volumen_30.pdf.

— BLANCO, LJ; CÁRDENAS, JA; GÓMEZ, R; CABALLERO, A. Aprender a enseñar Geometría en Primaria. Una experiencia en formación de Maestros. Badajoz, España: Grupo DEPROFE, 2011. http://funes.uniandes.edu.co/1951/2/2011_Aprender_Geometr%C3%ADa_Blanco%2C_C%C3%A1rdenas%2C_G%C3%B3mez_y_Caballero.pdf.

— BLANCO, LJ; GUERRERO, E; CABALLERO, A. Cognition and Affect in Mathematics Problem Solving with Prospective Teachers. En The Mathematics Enthusiast, 2013 - Special Issue, Vol. 10, n. 1 y 2, pp. 335-364. Recuperado de: http://www.math.umt.edu/tmme/vol10no1and2/13-Blanco-et%20al_pp335_364.pdf.

— CABALLERO, A; BLANCO, B; BLANCO, LJ. Matemáticas a través de los cuentos: Un propuesta didáctica para primaria. En revista Aula de Innovación Educativa, 2010, n. 188, pp. 79-95. Recuperado de: http://aula.grao.com/revistes/aula/188-competencia-en-comunicacion-linguistica/matematicas-a-traves-de-los-cuentos.

— CHAMORRO, C; VECINO, F. El tratamiento y la resolución de problemas. En CHAMORRO, C. (Coord.) Didáctica de las Matemáticas. Madrid, España: Pearson. PrenticeHall, 2003, pp. 273-299.

— CORBALÁN, F. Prensa, Matemáticas y enseñanza. Zaragoza, España: Miera editores, 1991.

— CORBALÁN, F. La matemática aplicada a la vida cotidiana. Barcelona, España: Graó, 1995.

— CORBALÁN, F. Notas sobre prensa y enseñanza de las matemáticas. UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 1997, n. 12, pp. 69-82.

— DÍAZ, MV; POBLETE, A. Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. En revista Números 2001, n. 45, pp. 33-41.

— DÍAZ, MV; POBLETE, A Evaluación de tipos de problemas en Derivación. En Revista de Educación Matemática, 1999, Vol. 11, n. 1, pp. 46-56.

— DECRETO 82/2007, de 24 de abril, por el que se establece el Currículo de Educación Primaria Obligatoria para la Comunidad Autónoma de Extremadura, 2007, pp. 7825-7929.

— DIARIO OFICIAL DE EXTREMADURA –DECRETO-. Decreto 83/2007, de 24 de abril, por el que se establece el Currículo de Educación Secundaria Obligatoria para la Comunidad Autónoma de Extremadura, 2007, pp. 7980-8151.

— FERNÁNDEZ, J; GONZÁLEZ, M. La vuelta al mundo en ochenta días y la influencia de la medida del tiempo. Números, 1995, n. 26, pp. 37-46.

— FERNÁNDEZ, A; RICO, L. Prensa y educación matemática. Madrid, España: Síntesis, 1992.

— MARÍN, M. (Coord.) Cuentos para aprender y enseñar matemáticas en educación infantil. Madrid, España: Narcea, S.A. de Ediciones, 2013.

— MARTÍNEZ, F. Catálogos de precios. Catálogo de ideas. En revista *Números* 1995, n. 26, pp. 65-72.

— MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Madrid, España: 2012.

— MUÑOZ, J; FERNÁNDEZ, J; BUENO, B. El día de la prensa. En revista *Números* 1995, n. *26, pp.* 41-64.

— PAULOS, JA. Un matemático lee el periódico. Barcelona, España: Tusquets Editores-Metatemas 44, 1996.

— PINO, J; BLANCO, LJ. Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y Chile, en relación con los contenidos de proporcionalidad. Publicaciones, 2008, nº 38, p. 63-88.

— RICO, L; FERNÁNDEZ, A. Prensa y Matemáticas. En Cuadernos de Pedagogía, 1987, n. 145, pp. 56-60.

— SIERRA, J. El asesinato del profesor de Matemáticas. Salamanca, España: Anaya, 2008.

— SHASHA, D. Las intrigantes aventuras del Doctor Ecco. Barcelona, España: Labor, 1989.

— THIO DE POL, S. Primo y algunos dislates sobre números. Alhambra. Madrid, 1976.

CAPÍTULO 7
MODELO INTEGRADO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS: MIRPM

Lorenzo J. Blanco Nieto y Ana Caballero Carrasco

Cuando vemos a un deportista triunfar en la alta competición nos asombramos de sus habilidades para su especialidad y de sus capacidades generales en referencia a una buena preparación física y mental. En estas situaciones nos es fácil reconocer que detrás de ese éxito hay muchas horas de entrenamiento duro y constante, asumiendo que el deportista en su preparación no solo se limita a repetir mecánicamente el tipo de actividad que ejecuta en la alta competición. Así, por ejemplo, podemos informarnos por los medios de comunicación especializados que los futbolistas o jugadores de baloncesto en su sesiones de preparación hacen carrera continua, otras veces van al gimnasio, realizan diferentes juegos con el balón, ensayan las tácticas, ... y participan en sesiones de vídeos para ver sus errores o para analizar el trabajo que ha programado su entrenador para un próximo encuentro. Y, evidentemente, también jugarán diferentes partidos para ultimar su preparación física y táctica.

Pues bien, podremos utilizar ésta metáfora para tratar de comprender cuál debería ser el trabajo con los aprendices sobre resolución de problemas de matemáticas. Así, parece obvio señalar que para tener éxito en una tarea compleja como es la resolución de problemas implicaría el desarrollo completo de diferentes problemas, como el futbolista necesita jugar partidos completos para ultimar su puesta a punto. Pero su formación, también requerirá de la realización de actividades específicas que les permita profundizar sobre las diferentes fases del modelo general de la resolución de problemas, y que de manera muy específica se señalan en el currículo (Ver capítulo 2).

Las propuestas curriculares actuales incluyen la resolución de problemas como un contenido específico (Blanco y Cárdenas, 2013; Cárdenas, 2014). Es decir, indican la necesidad de enseñar a resolver problemas de matemáticas y ayudar a los estudiantes a mejorar su capacidad como resolutores de problemas. De esta manera, la resolución de problemas se convertiría en un contenido específico que tiene, al mismo tiempo, un carácter transversal.

El currículo actual señala que "el trabajo matemático debe saber combinar los contenidos relativos al cálculo[…] o la resolución de problemas" (Decreto, 2007, p. 8097). Esta propuesta no es nueva, ya que las orientaciones curriculares (MEC, 1992) indicaban, entre otras cuestiones, que

> se brindará a los niños la oportunidad de familiarizarse con procesos que facilitan la exploración y resolución de problemas como: comprensión y expresión de la situación matemática (verbalización, dramatización, discusión en equipo), extracción de datos y análisis de los mismos, representación en forma gráfica del

> problema o situación, formulación de conjeturas y verificación de su validez o no, exploración mediante ensayo y error, formulaciones nuevas del problema, comprobación de resultados y comunicación de los mismos. Se hace necesario, asimismo, desarrollar la capacidad de persistir en la exploración de un problema (MEC, 1992, p. 92).

Conjuntamente, se sugería que "el alumno debe desarrollar y perfeccionar sus propias estrategias, a la vez que adquiere otras generales y específicas que le permiten enfrentarse a las nuevas situaciones con probabilidad de éxito" (MEC, 1992, p. 92).

Estas recomendaciones se han mantenido y desarrollado en las nuevas propuestas curriculares aunque hemos de señalar que con poco éxito (Blanco, Guerrero, y Caballero, 2013; Puig, 2008; Santos 2008), aspecto que vendría refrendado en los informes internacionales como el PISA o TIMSS. Al mismo tiempo, una revisión de trabajos relacionados con la resolución de problemas de matemáticas, nos descubre referencias concretas a experiencias e investigaciones desarrolladas con alumnos y profesores de diferentes niveles para descubrir sus conocimientos y concepciones sobre la RPM e intentar mejorar su capacidad como resolutores (Blanco et al, 2013; Caballero, 2013; Callejo, 1994; Carrillo, 1996; Guzmán, 1991; Pino, 2013; Puig, 1996; Santos, 1996,). Es evidente que tales experiencias no pueden ser trasplantadas al aula, pero en ellas se contienen diferentes recomendaciones que ayudan en la actividad docente a cumplir el objetivo señalado en el currículo.

Todos los trabajos asumen que el desarrollo de la capacidad de resolver problemas no puede ser un objetivo alcanzable fuera de un trabajo específico de resolución de problemas. Callejo (1994) nos recuerda al respecto que es conveniente fomentar un proceso de comunicación que anime a los alumnos a expresar sus ideas e intenciones, permitiéndoles descubrir nuevas formas de aproximarse al problema, de percibirlo, de atacarlo y constatar que los otros también tienen bloqueos, vacilaciones, fallos, etc., lo que les ayudará a superar su miedo al fracaso en esta tarea y dará confianza para afrontar nuevos retos.

También el trabajo colaborativo ayuda en este aprendizaje. Los alumnos son capaces de debatir en grupo acerca de sus propuestas y dudas, reformular sus argumentos y procedimientos para abordar el problema. La comunicación que se establece entre los estudiantes resolviendo el problema es una buena base que permite reflexionar y discutir sobre el proceso seguido, y favorece que los resolutores puedan comprender y asimilar los diferentes procedimientos para resolver problemas. "Haciendo ésto, los estudiantes pueden hablar acerca del proceso de resolución más que preguntar la respuesta" (Castro et al, 1995, p. 28).

Al respecto, parece pertinenete recordar la aportación de Puig (1996) según la cual indica que al pedirle al resolutor que describa de forma retrospectiva lo que ha hecho para obtener la solución del problema, indica que lo que éstos describen no es el proceso de resolución, sino el conjunto de operaciones con el que se obtiene el resultado a partir de los datos, que es sólo el producto final del proceso de resolución, de modo que en esta descripción desaparece prácticamente todo rastro de los elementos del proceso.

La experiencia nos ha mostrado que la reflexión en grupo sobre la acción revela capacidades de los estudiantes que tradicionalmente han estado ignoradas con otras formas de trabajar la resolución de problemas. Igualmente, ayuda a los estudiantes a valorar mejor la resolución de problemas, a encontrar justificación para un mayor y más organizado esfuerzo y a tener una visión más amplia de las matemáticas.

Con el desarrollo del Modelo General de Resolución de Problemas queremos mostrar a los estudiantes algunas herramientas útiles para las tareas matemáticas y proporcionar experiencias que evidencien destrezas para abordar la resolución de problemas con mayor autoestima y expectativa de éxito. Ello podría ayudar a evitar el bloqueo o desesperación inicial y la desconfianza e inseguridad cuando los caminos son inciertos.

A este respecto, hacemos nuestras las palabras de Callejo (1994) en relación con las dificultades para enseñar a resolver problemas, según las cuales

> se pueden proponer problemas sugerentes, despertar el interés por esta actividad matemática, dar pautas, indicaciones, ayudar a los estudiantes a explicitar sus procesos de pensamiento y a reflexionar sobre ellos, etc., pero la manera de abordar la resolución de problemas es algo muy personal y en este sentido lo que se puede hacer es ayudar a cada estudiante a descubrir su propio estilo, sus capacidades y sus limitaciones. No se trata pues de transmitir a los estudiantes métodos, reglas heurísticas o trucos, sino las actitudes profundas que han conducido a ellos, partiendo de sus propias experiencias (p. 67).

1. MODELOS GENERALES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En general, los modelos de resolución de problemas se basan, fundamentalmente, en el modelo de Polya (1985) que distingue cuatro fases que el autor considera convenientes para favorecer la enseñanza de la resolución de problemas: Comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva. Al mismo tiempo, el autor sugiere una serie de preguntas y recomendaciones que acompañarían en el desarrollo del proceso que propone y que resumimos en la Figura 1.

En la literatura sobre la resolución de problemas podemos encontrar diferentes aportaciones de autores que han establecido estrategias para ayudar a resolver problemas. Así, en Blanco (1991, 1993) se resumen las aportaciones de Polya (1985), Schoenfeld (1980, 1985a), Bransford y Stein (1987), Rosenbaun et al (1989). Pero igualmente, podemos encontrar propuestas interesantes en Mason, Burton y Stacey (1988), Guzmán (1991), Callejo (1994), Puig (1996), Carrillo, (1996), Santos (2007), Juidias (2007), Caballero, (2013) y Pino (2013). En las diferentes propuestas se sugieren una serie de heurísticos, para cada una de las fases, que pueden servir de guía en el proceso de resolver el problema puesto que ayudan al resolutor a aproximarse y comprenderlo y a ordenar eficientemente sus recursos para resolverlo (Carrillo, 1996; Santos, 2007). Los heurísticos son actividades concretas encuadradas en el proceso general que ayudan al resolutor a desarrollar habilidades y actitudes positivas en el proceso de resolución.

En los cursos de formación de maestro proponemos otros ejemplos más sencillos para mostrar que para resolver los problemas de matemáticas no solo se necesita conocimiento matemático sino otro tipo de factores, cognitivos y afectivos, que son los que determinan en gran medida que podamos abordar la terea con perspectiva de éxito. Siendo éste un aspecto que hemos tratado en el capítulo 5.

Cuando plantemos éste tipo de problemas, como el de la Figura 8 del Capítulo 5, los alumnos se quedan desconcertados y, en algunas ocasiones, empiezan a dar soluciones posibles a partir de algunos datos. En cualquier caso, no abordan el problema para analizar el enunciado o sugerir algún procedimiento de resolución. Los contenidos matemáticos para resolver este problema son todos del nivel de primaria pero su resolución exige experiencia, conocimientos sobre resolución de problemas y autocontrol por parte del resolutor. La solución al problema es fácil encotrarla en la red.

Complementariamente a estos modelos, algunos autores (Blanco, 1993; Guzmán, 1991; Manson, Burton y Stacey, 1988) analizan las situaciones de bloqueos que se presentan a los resolutores cuando las sugerencias anteriores no les son suficientes para resolver otras situaciones problemáticas. Por ejemplo, cuando planteamos el problema de los cuadros del ajedrez o el de la división de un triángulo obtusángulo en triángulos acutángulos (Blanco, 1993).

Es importante la consideración de estas situaciones por cuanto provocan actitudes negativas hacia la resolución de problemas que repercutirán en la forma de abordar los problemas de matemáticas en general. Así, el miedo a lo desconocido y el consiguiente retraimiento, nerviosismo, las prisas por acabar cuanto antes, cierta desazón ante la prueba, son algunas de las actitudes que Guzmán (1991) señala como obstáculos y que tendríamos que intentar superar.

Mason, Burton y Stacey (1988) señalan que, probablemente, la lección más importante que podríamos aprender es la de que estar atascado o bloqueado en un problema es una situación muy digna, que constituye, además, una parte esencial del proceso de mejora del razonamiento. De hecho, se puede aprender mucho más de un intento de resolución fallido que de una cuestión resuelta con toda rapidez y sin dificultades, siempre que pienses seriamente sobre ella. Igualmente Wood (1988) se refiere a este aspecto cuando señala que el desarrollo de tu habilidad para resolver problemas está directamente relacionado con la cantidad de angustia que estés dispuesto a aguantar durante la búsqueda de una solución.

2. MODELO INTEGRADO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Por nuestra parte, venimos trabajando con los estudiantes para maestro en la implementación de un Modelo Integrado de Resolución de Problemas de Matemáticas (MIRPM) que considere de manera integrada aspectos cognitivos y afectivos, y en el que se hemos especificado cinco fases, tal como se sintetiza en la Figura 1.

	HEURÍSTICOS	CONTROL EMOCIONAL
1. Análisis/comprensión y familiarización con el enunciado	Releer el enunciado, notaciones, gráficos, extracción de datos explícitos e implícitos, de objetivos, determinar contextos y condiciones...	Respiración Relajación muscular Autoinstrucciones
2. Búsqueda de estrategia/s de solución	Relacionar datos-incógnitas, conocimientos previos, re-enunciar el problema, enunciar subproblemas...	
3. Ejecución de la/s estrategia/s	Registrar y explicar todos los pasos, actuar con rigor, orden y precisión...	
4. Examen/control de la solución y del proceso	Analizar la consistencia de la solución y del proceso, resolver de modo diferente, transferencia y generalización...	Autoinstrucciones
5. ¿Cómo me siento? ¿Qué he aprendido?	Valora tu actitud, tus avances y proposición de una pequeña meta	Autoinstrucciones Reflexiones para modificar su afectividad

Figura 1. Modelo Integrado de RPM (Caballero, 2011, 2013).

En cada una de las diferentes fases señalamos unos objetivos específicos, siendo el objetivo general de ayudar a los estudiantes a aprender a resolver problemas a partir de su propio estilo. Así, en la primera fase nos proponemos, por una parte, ayudar a los estudiantes a tomar conciencia y gestionar sus respuestas cognitivas, fisiológicas, motoras y emocionales que pudieran surgir ante la RPM y por otra, mostrar cómo analizar una situación planteada, captando sus objetivos y extrayendo la información más relevante.

El objetivo de la segunda fase, se enmarca en el diseño, descripción y selección de las posibles estrategias que conduzcan a la solución de los distintos problemas matemáticos que pudieran plantearse. A este respecto, recordamos la reincidencia de las propuestas curriculares en la necesidad de resolver los problemas siguiendo diferentes procedimientos y la de ayudar a los resolutores a descubrir estrategias personales.

La tercera fase mostraría características del proceso de ejecución de la/s estrategia/s seleccionada/s para la resolución del problema matemático, siempre desde el orden y el rigor y controlando en todo momento el proceso. El buen orden y la buena presentación en la ejecución de los problemas posibilitaría un mayor control del proceso así como que podamos volver a ellos como elemento de repaso y estudio.

Obtenida la solución del problema, el objetivo de la fase cuarta sería revisar la adecuación de la respuesta dada al problema matemático dado y reconsiderar el proceso seguido a lo largo de su resolución, para reflexionar sobre la tarea realizada y aprender de ello para transferir el conocimiento a otros problemas futuros.

Finalmente, en la quinta fase, terminaríamos con una reflexión acerca del estado de ánimo seguido en las diferentes fases de la resolución el problema, para facilitar la confianza y autoestima y aumentar las expectativas de autoeficacia y de éxito en los resolutores.

2.1. Fase I. Acomodación/análisis/comprensión/familiarización con la situación planteada

Abordar un problema requiere, en primer lugar, un control de la situación. Estudios diferentes coinciden en que los resolutores, cuando abordan los problemas, muestran inseguridad, desconfianza y ansiedad y manifiestan autoinstrucciones negativas (Anderson, 2007; Caballero, Blanco & Guerrero, 2009; Caballero, 2013; Hernández, Palarea & Socas, 2001; Jackson, 2008; Sánchez, Segovia & Miñán, 2011). Invertir esta situación debe ser un primer referente en esta fase inicial.

Es por ello que, antes de comenzar el problema, se ponen en práctica técnicas de relajación muscular progresiva propuesto por Edmund Jacobson, de control de la respiración y de la modificación cognitiva a través de autoinstrucciones (Meichenbaum, 1985), es decir, de la modificación y sustitución de autodiálogos negativos por otros positivos.

En esta primera fase, las autoinstrucciones se centran en utilizar las emociones como señal para poner en marcha las técnicas de control emocional mencionadas anteriormente y a guiar al resolutor mediante comentarios positivos, preparándole para afrontar el problema. Aunque lo ideal es que cada resolutor elabore sus propias autoinstrucciones, proponemos algunas como:

- *Si me siento mal es una señal de que puedo empezar a afrontar la situación.*
- *Mi objetivo es afrontar la emoción negativa.*
- *No hay motivo para preocuparse.*
- *Puedo relajarme.*
- *Ya lo resolví con éxito en otra ocasión.*
- *Los pensamientos negativos no me ayudan nada.*

Pero, al mismo tiempo, debemos proporcionarle diferentes heurísticos que le permitan abordar la tarea para comprender el enunciado planteado y ayudarle a diseñar diversas estrategias de solución.

Es, probablemente, en esta fase inicial donde se hace más evidente la necesidad de integración de los aspectos afectivos y cognitivos.

Los trabajos que han estudiado las dificultades de los alumnos ante los problemas nos hablan de la falta de comprensión lectora o falta de atención cuando leen el enunciado, la tendencia a traducir literalmente el enunciado del problema a una expresión matemática, y del desconocimiento de elementos de análisis de la situación planteada y de heurísiticos específicos para esta primera fase.

Por ello, es importante plantearle a los estudiantes para maestros problemas que evidencien estas situaciones que luego acompañaremos con actividades específicas que puedan proponerse para primaria (Capítulo 13).

Una de las primeras cuestiones es desmontar el error de enseñar a resolver problemas en primaria asociando palabras con operaciones que pudieran utilizarse para resolver los problemas. Así, incluso en algunos libros de texto se sugiere como recurso identificar palabras como 'más', 'añadir' o 'comprar' con la operación de sumar. De igual manera las palabras 'quitar' o 'menos' se asociarían con la operación de restar, como la de repartir se asimilaría a la operación de dividir. Son "palabras claves" (Blanco & Calderón, 1994, Puig, 1996) que a veces llevan al error y, además, al realizar tal identificación no permite saber si los alumnos resuelven el problema por la asimilación de palabras o porque comprenden la situación planteada y el significado de la operación.

Así, es interesante analizar problemas como los enunciados en la Figura 2.

"Tengo 20 caramelos y me los como todos menos 8. ¿Cuántos me quedan?"

"Abel tenía 8 cochecitos, compró algunos más y ahora tiene 14. ¿Cuántos compró?"

Figura 2. Problemas propuestos en primaria.

Pero también podemos retomar la aportación de Lockead y Mestre (1988) al plantear la situación que se presenta en la Figura 3.

Escribe una ecuación usando las variables E y P para representar la siguiente afirmación: Hay seis veces tantos estudiantes como profesores en la universidad

Figura 3. Problema propuesto por Lockead y Mestre (1988).

En el trabajo citado los autores resaltan como típica respuesta incorecta: 6E = P, donde E representa el número de estudiantes y P el número de profesores. Nuestra experiencia docente indica que también es una respuesta típica de los estudiantes para profesores de primaria y en algunos de secundaria.

Para trabajar estos problemas indican tres niveles de compresión de los enuciados:

- *Comprensión cualitativa*. Acerca del significado del texto.
- *Comprensión cuantitativa*. Saber la relación cuantitativa entre las variables, y saber verbalizarla.
- *Comprensión conceptual*. Expresar lo anterior mediante alguna expresión matemática.

La tendencia a traducir literalmente los enunciados de los problemas produce error en algunas situaciones que puedan resultar engañosas. Así, observamos que muchos alumnos suman cuando les planteamos el problema enunciado en la Figura 4.

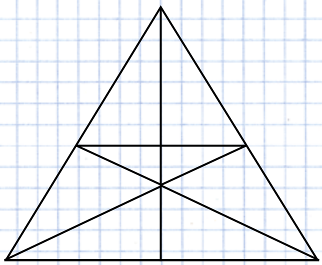
Hay 200 metros de mi casa a la pescadería, 300 de la pescadería al colegio. ¿Cuánto hay desde mi casa hasta la pescadería?

Figura 4. Problema aditivo de traducción compleja.

El análisis de los estudiantes para maestro cuando resuelven problemas pone de manifiesto su dificultad y falta de costumbre en la utilización de las representaciones y notaciones para analizar y resolver los problemas, aún cuando se habla de figuras específicas como sucede en el caso de geometría.

Por ello, es importante trabajar este aspecto para poner de manifiesto la importacia de este recurso en muchos problemas. Ponemos para ello dos ejemplos de problemas donde la representación y notación parecen importantes (Figura 5).

- Un caracol sube una pared de cinco metros, por el día sube dos metros y por la noche resbala uno, ¿cuántos días tarda en alcanza la cima de la pared?



- Calcular el número de triángulos de la siguiente figura e indica por qué estás seguro de la solución y del procedimiento

Figura 5. Problemas que requieren especial cuidado en al buscar su solución.

La importancia de la representación grafica o manipulativa es algo en lo que debemos insistir ya que nuestros estudiantes apenas la utilizan. Y es por ello que proponemos algunos problemas que evidencian su importancia al intuir los alumnos una respuesta contradictoria con lo que resulta cuando hacemos una adecuada representación del problema (Figura 6).

Dos personas van a compartir la comida que tienen. El primero aporta dos panes y el segundo tres. Al comenzar llega un tercero que no aporta comida, pero en agradecimiento a la generosidad de sus amigos les da cinco monedas para que se la repartan entre ellos. ¿Cómo deberían distribuirse las monedas los dos primeros?

Figura 6. Problemas de distribución de panes y monedas.

En dicho problema, la mayoría de los estudiantes que dicen resolverlo aceptan la solución trivial del reparto en dos o tres monedas que no es proporcional a la aportación de cada uno al tercer comensal.

Los trabajos sobre resolución de problemas nos aportan una relación de heurísticos para esta primera fase que debieran considerarse en clase para que los estudiantes fueran asumiéndolos en su tarea como resolutores:

- Releer el enunciado e imaginar mentalmente la situación.
- Expresar el enunciado en otros términos o formularlo con otras palabras.
- Introducir notación, gráficos, diagramas, ... adecuados.
- Seleccionar el material adecuado o disponer de un modelo manipulativo.
- Determinar datos (explícitos e implícitos) y condiciones del problema.
- Descomponer el problema en otros, si ello es posible.
- Analizar el contexto y conceptos y procesos explícitos e implícitos.
- Ejemplificar casos especiales.
- Delimitar el objetivo del problema.

2.2. Fase II. Búsqueda/diseño de estrategia/s de solución

El análisis de los problemas debe guiar al resolutor a diseñar o escoger diferentes estrategias de solución. Y, para que ello pueda desarrollarse es importante que los estudiantes describan y reflexionen sobre ellas.

Al igual que en la primera fase, en el caso de que se sigan produciendo respuestas cognitivas, emocionales y fisiológicas negativas, han de seguir practicándose las técnicas de relajación y respiración muscular. En cuanto a las autoinstrucciones, en esta segunda fase se centran en el afrontamiento de la situación y en guiar el proceso. Durante ésta y la tercera fase, algunas de las autoverbalizaciones positivas propuestas son:

- *Voy a mantener el control.*
- *Puedo hacerlo, de hecho lo estoy haciendo.*
- *Si no pienso en el miedo no lo tendré.*
- *Si estoy tenso/a, respiraré profundamente y me relajaré.*
- *Si cometo errores es normal, puedo corregirlos.*
- *Me concentraré en la tarea.*
- *Puedo mantener la tensión dentro de límites manejables.*
- *Si lo he conseguido en otras ocasiones ahora también puedo hacerlo.*

En el Capítulo 2 hemos analizado lo que el currículo señala sobre la importancia de este segundo paso. Las referencias a la importancia de *"la expresión, oral y escrita en el proceso seguido"* o las múltiples referencias a la "elaboración de estrategias personales" que indica el currículo de primaria, muestran la importancia de que los estudiantes experimenten y reflexionen sobre esta segunda fase del Modelo General. Por ello es importante que los estudiantes investiguen y diseñen diferentes estrategias y que sepan identificar y utilizar la más adecuada a cada caso.

Santos (2007) señala “no solamente es importante que el estudiante conozca la existencia de ciertas estrategias, sino que también es importante que desarrolle una serie de habilidades que le permitan identificar en qué situaciones utilizarlas” (p. 47).

Igualmente, indica que “aprender matemáticas significa que el estudiante identifique, seleccione y use estrategias comúnmente usadas por los matemáticos al resolver problemas” (Santos, 2007, p. 47).

Así lo subrayan también los estándares curriculares cuando señalan que

> uno de los objetivos principales del enfoque de resolución de problemas para la docencia es que los niños sean capaces de desarrollar y aplicar estrategias para su resolución. Entre ellas se incluyen el uso de materiales manipulativos, el ensayo y error, la elaboración de tablas y listas ordenadas, la elaboración de diagramas, la búsqueda de patrones y la reconstrucción de un problema (NCTM, 1991, p. 22).

La manera de proceder en la resolución de problemas provoca en los estudiantes la creencia de que “resolver problemas es un acto de seleccionar una serie de ‘trucos’ que sólo son accesible a unos pocos” (Santos, 2007, p. 48).

En Santos (2007, pp. 74-80 y 174-176) se identifican métodos de resolución de problemas que se ejemplifican en cada caso.

Algunos heurísticos para esta segunda fase:

- Recordar y explorar problemas similares en forma, datos o conclusiones o con menos variables.
- Buscar la relación datos – incógnitas, y con las condiciones del problema.
- Simplificar (descartando casos, eliminando condiciones imponiendo condiciones a las variables).
- Estimar, conjeturar.
- Descomponer el problema y enunciar subproblemas.
- Partir de casos particulares.
- Argüir por contradicción.
- Asumir el resultado y trabajamos a partir del mismo, para relacionarlo con las condiciones iniciales.

2.3. Fase III. Ejecución de la/s estrategia/s

La observación del trabajo de los alumnos de primaria y de secundaria cuando resuelven problemas en sus cuadernos muestra una cierta desorganización y falta de rigor en los modos en los que éstos resuelven los problemas. Así, podemos encontrar expresiones como “2 x 3 = 6 + 4 = 10”, que se corresponden con una forma de hablar, pero que escritas de esa manera son, claramente, incorrecta.

Los trabajos sobre resolución de problemas indican la importacia de que los resolutores vayan controlando, en todo momento, el proceso de resolución de problemas. De esta manera, señalamos cuatro aspectos que nos parecen que debieran tenerse en cuenta:

- Registrar y explicar todos los pasos.
- Resaltar los logros intermedios.
- Actuar con rigor, orden y precisión.
- Controlar el estado de la ejecución.

La actuación acorde a estos cuatro aspectos, les ayuda a optimizar sus recursos para ser buenos resolutores de problemas.

También el currículo, como se muestra en el capítulo 2, indica la importancia de estos aspectos y recalca la necesidad de incidir en una presentación clara y ordenada, tanto del proceso como de los resultados alcanzados, fomentando en ellos el interés por la limpieza y una buena presentación de su trabajo.

Es también en este paso cuando deben considerar la elección y uso de las diferentes estrategias para resolver las situaciones planteadas.

2.4. Fase IV. Análisis del proceso y de la solución

Un aspecto que resulta necesario para que el aprendizaje tenga lugar hace referencia a la necesidad de explicitar en todo momento los objetivos y metodología desarrollada, sobre todo cuando entre nuestras metas está la de enseñar a resolver problemas.

La manera de finalizar el problema será un factor decisivo que posibilite o no el aprovechamiento de la actividad realizada para futuros ejercicios. A este respecto, señalamos la necesidad de recordar e interaccionar con los alumnos respecto a los objetivos planteados en la presentación del problema, bien respecto a determinados conceptos, bien respecto a la enseñanza de la heurística, bien respecto de algún procedimiento algorítmico**.**

Las preguntas y cuestiones que se suscitaban en cualquiera de los procesos señalados en el capítulo IV para la resolución de problemas, deben ser tenidas en consideración para posibilitar el mejor aprendizaje del alumno, tanto de los conceptos matemáticos implicados en el problema como del propio proceso de resolución. La revisión del enunciado, del proceso o de la solución obtenida debe ser referencia obligada para evitar situaciones como la que se puede suscitar en el problema que aparece en la Figura 7.

Un grupo de 147 niños quieren ir de excursión en autobuses de 40 plazas ¿Cuántos autobuses se necesitan?

Figura 7. Problema que requiere revisar la coherencia de la solución.

Como es un problema de dividir, resolveríamos: 127: 40 = 3, y sobran 7.

En este caso, suelen concluir: sólo necesitaríamos 3 autobuses.

Esta conclusión pone en evidencia la necesidad de estudiar la interpretación de los resultados. Al respecto se propone:

Revisar el enunciado y el objetivo del problema.

Revisar el proceso.

Revisar los conceptos implicados.

Revisar la solución obtenida y la coherencia de la misma.

Es decir, la actividad de resolución de problemas no está enteramente concluida porque las respuestas dadas sean correctas. Lo estará si el resolutor comprende y es capaz de explicar lo que ha hecho, cómo lo ha hecho y por qué sus acciones son las apropiadas para esa situación.

Respecto a las autoinstrucciones, después de abordar el problema matemático, van dirigidas que el resolutor se elogie por haberse enfrentado a la situación. Así, algunas de las autoinstrucciones propuestas en este sentido son:

– *Lo conseguí o por lo menos lo he intentado.*
– *La próxima vez no tendré que preocuparme tanto.*
– *Puedo disminuir la ansiedad relajándome.*
– *Tengo que decirle a mi compañero lo bien que lo he hecho.*
– *Me he dado la oportunidad de aprender, me haya salido como me haya salido y eso es lo importante.*

2.5. Fase V. ¿Cómo me siento? ¿Qué he aprendido?

Al igual que la cuarta fase del modelo se centra en la revisión del proceso de resolución del problema así como también de la solución obtenida del mismo, se ha de revisar la implicación personal del resolutor a lo largo del problema. Esto último es la finalidad de la quinta fase, puesto que en la realización del problema, además de las metas de contenido matemático, se incluyen otras metas de carácter personal relacionadas con el autoconcepto, la actitud, la ansiedad... ante la RPM.

Así, en esta última fase del modelo integrado de RPM han de valorarse las actitudes, las emociones y el esfuerzo suscitado en los diferentes momentos del problema. Del mismo modo, se ha de reflexionar y valorar los avances conseguidos a nivel personal, determinando si sus actitudes hacia la RPM han mejorado, si han sido capaces de gestionar las respuestas cognitivo-emocionales ante esta tarea matemática, si ven aumentadas sus expectativas de éxito y de autoeficacia, etc.

Además, en función de este análisis, los resolutores han de proponerse una pequeña meta u objetivo a conseguir en el siguiente problema al que se enfrente.

Algunas sugerencias al respecto son:

– *Valora la actitud que has tenido al enfrentarte al problema.*
– *Medita sobre el esfuerzo que has hecho.*
– *Piensa qué avance has conseguido al resolver este problema con respecto a otros.*
– *Proponte una pequeña meta a conseguir para el siguiente problema que se te plantee.*

BIBLIOGRAFÍA

— BLANCO, LJ. Conocimiento y acción en la enseñanza de las Matemáticas, de profesores de E.G.B., y estudiantes para profesores. Cáceres, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura, 1991.
— BLANCO, LJ. Consideraciones elementales sobre resolución de problemas. Badajoz, España: Univérsitas, 1993.
— BLANCO, LJ; GUERRERO, E; CABALLERO, A. Cognition and Affect in Mathematics Problem Solving with Prospective Teachers. En The Mathematics Enthusiast, 2013 - Special Issue, Vol. 10, n. 1 y 2, pp. 335 – 364. Recuperado de: http://www.math.umt.edu/tmme/vol10no1and2/13-Blanco-et%20al_pp335_364.pdf.
— BLANCO, LJ; GUERRERO, E; CABALLERO, A; BRÍGIDO, M; MELLADO, V. The affective dimension of learning and teaching mathematics and science. En CALTONE, MP (Ed): Handbook of Lifelong Learning Developments. Nova Science Publishers. 2009, pp. 265 – 287.
— BLOCK, SD; DÁVILA, VM; MARTÍNEZ, FP. La resolución de problemas: Una experiencia de formación de maestros. En revista Educación Matemática, 1995, Vol. VII, n. 3, pp. 5-26.
— BRANSFORD, J; STEIN, B. Solución IDEAL de Problemas. Barcelona, España: Labor, 1987.
— CABALLERO, A. Descripción de un programa de intervención en resolución de problemas y control emocional con maestros en formación inicial. En *International Journal of Developmental and Educational Psychology, INFAD Revista de Psicología, 2011, vol. , n.* 1, pp. 45-54. Recuperado de: http://infad.eu/RevistaINFAD/2011/n2/volumen1/INFAD_020123_45-54.pdf.
— CABALLERO, A. Diseño, Aplicación y Evaluación de un Programa de Intervención en Control Emocional y Resolución de Problemas Matemáticos para Maestros en Formación Inicial. Tesis doctoral Inédita - Universidad de Extremadura, Badajoz, España: 2013. Recuperado de: http://dehesa.unex.es:8080/xmlui/handle/10662/590.
— CALLEJO, ML. Un club matemático para la diversidad. Madrid, España: Narcea. 1994.
— CARRILLO, J. La resolución de problemas en matemáticas. En revista Investigación en la Escuela, 1995, n. 25, pp. 79-86.
— CASTRO, E ET AL. Resolución de problemas en el Tercer Ciclo de E.G.B. Granada, España: Universidad de Granada, 1995.
— C.E.P. DE VILLARROBLEDO. Resolución de problemas: Consejos para los profesores. Versión de la serie: Problem solving tip for teachers. Phares G. O'Daffer, 1989.

— DIARIO OFICIAL DE EXTREMADURA –DECRETO-. Decreto 82/2007, de 24 de abril, por el que se establece el Currículo de Educación Primaria Obligatoria para la Comunidad Autónoma de Extremadura, 2007, pp. 7825-7929.
— DIARIO OFICIAL DE EXTREMADURA –DECRETO-. Decreto 83/2007, de 24 de abril, por el que se establece el Currículo de Educación Secundaria Obligatoria para la Comunidad Autónoma de Extremadura, 2007, pp. 7980-8151.
— GARCÍA, E. Ideas, pautas y estrategias heurísticas para la resolución de problemas. En revista Aula, 1992, n. 6, pp. 14-21.
— GARCÍA, M; LORENZO, R. Matemática básica para pensar mejor. En BLANCO, L; CASAS, L (Coords.) Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas. Badajoz, España: S.E.E.M., pp. 93-104.
— GUZMÁN, M. Para pensar mejor. Barcelona, España: Labor, 1991.
— HERNÁNDEZ, J.; PALAREA, MM.; SOCAS, MM. Análisis de las concepciones, creencias y actitudes hacia las Matemáticas de los alumnos que comienzan la Diplomatura de Maestro. El papel de los materiales didácticos. En SOCAS, M.; CAMACHO, M.; MORALES, A.: Formación del profesorado e investigación en educación matemática II. La Laguna: Departamento de Análisis matemático. Universidad de la Laguna, 2001, p. 115-124.
— JACKSON, E. Mathematics anxiety in student teachers. Practitioner research in higher education, 2008, vol. 2, no 1, p. 36-42.
— LOCHHEAD, J; MESTRE, JP. From words to algebra: mending misconcepcions. En COXFORD, AF; SHULTE, AP (Eds.): The ideas of Algegra, K-12. Reston, VA: NCTM, 1988, Yearbook, pp. 127-135.
— MASON, J; BURTON, L; STACEY, K. Pensar matemáticamente. Barcelona, España: MEC-Labor, 1988.
— MEC. Educación Primaria. Matemáticas. Madrid, España: 1992.
— NCTM. Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. 1906 Reston, Virginia: Association Drive, 1991.
— PAULOS, JA. Un matemático lee el periódico. Barcelona, España: Tusquets Editores Metatemas 44, -1996.
— PEREZ, L. ¿Un problema?. En revista Epsilón, 1991, n. 20, pp. 45-48.
— POLYA, G. Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas, 13ª edición, 1985.
— SÁNCHEZ, J; SEGOVIA, I; MIÑÁN, A. Exploración de la ansiedad hacia las matemáticas en los futuros maestros de Educación Primaria. Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, 2011, vol. 15, n. 3, pp. 297-312.
— SANTOS, LM. Análisis de algunos métodos que emplean los estudiantes al resolver problemas matemáticos con varias formas de solución. En revista Educación Matemática, 1996, Vol. 8 n. 2, pp. 57-69.
— SANTOS, LM. La Resolución de Problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos. México: Trillas, 2007.
— WOODS, L. Estrategias de pensamiento. Ejercicios de agilidad mental. Barcelona, España: Labor, 1988.

CAPÍTULO 8
LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS ESCOLARES

Lorenzo J. Blanco Nieto, Ana Caballero Carrasco y Janeth A. Cárdenas Lizarazo

Las actividades con las operaciones aritméticas elementales (sumar, restar, multiplicar y dividir) y las de lectura y escritura constituyen en los primeros niveles de la enseñanza una de las primeras referencias para evaluar el aprendizaje escolar de nuestros pequeños. Cuando me identifico como profesor de matemáticas, muchos padres me cuentan alborozados los adelantos de sus hijos de cuatro o cinco años con los números. ¡Mi hijo ya sabe los números!, exclaman satisfechos.

Diversas investigaciones en educación matemática han profundizado en las situaciones de enseñanza-aprendizaje en relación con el aprendizaje de los primeros números, las operaciones aritméticas y resolución de problemas aritméticos, dando lugar a conclusiones interesantes que debieran ser consideradas en la realidad escolar diaria (Blanco y Calderón, 1994). Los estudios sobre ello, frecuentemente considerados en artículos y libros de investigación o divulgación, encuentran poco eco en los libros de textos, cuadernillos de problemas y en la actividad docente que se desarrolla en los centros de enseñanza primaria. Y tampoco en las numerosas referencia que están apareciendo en la red. O, al menos en la amplitud deseada.

1. LOS PROBLEMAS REPRESENTAN SITUACIONES QUE SE TRANSMITEN CON UN LENGUAJE

Cuando buscamos estudios sobre los problemas aritméticos escolares (PAE) encontramos múltiples publicaciones y autores, entre ellas Puig y Cerdán, 1988; Maza, 1989; Bermejo, 1990; Bermejo y Rodríguez, 1991; Blanco y Calderón, 1994; Castro, Rico y Gil, 1992.

Cuando proponemos un enunciado de un problema con referencia a una operación aritmética lo hacemos pensando en una situación cotidiana que se desarrolla en tiempo y lugar determinados y que transmitimos con lenguaje específico. Esta referencia a la situación representada en el enunciado del problema debe ser un elemento necesario para comprender los problemas y darle significado a las operaciones implicadas. Sin embargo, los problemas escolares planteados en las aulas se enuncian pensando más en el algoritmo que en la situación planteada. Su evaluación será más en función de si el algoritmo está bien resuelto que si el alumno ha comprendido la situación que se le plantea.

En relación a ello, podríamos formular diferentes problemas conteniendo las mismas cantidades y sugiriendo el mismo algoritmo para su solución, pero que representan situaciones diferentes. Ello, implicaría necesariamente que esos problemas deban ser considerados de diferente manera cuando se trabaja en clase. Ello sería así si nos interesa que los alumnos analicen la situación que se les plantea.

Así podremos considerar los ejemplos sencillos enunciados en la Figura 1 que se resuelven con el mismo procedimiento algorítmico: 3 + 4 = ?.

"Abel tenía tres caramelos, compró cuatro caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene ahora?"

"Abel tiene tres caramelos y Helia tiene cuatro caramelos. ¿Cuántos caramelos tienen entre los dos juntos?"

"Abel tiene tres caramelos, y Helia tiene cuatro caramelos más que Abel. ¿Cuántos caramelos tiene Helia?"

"Abel tenía tres caramelos. Y compró cuatro caramelos más para tener tantos como Helia, ¿cuántos caramelos tiene Helia?"

Figura 1. Problemas que presentan diferentes situaciones que se resuelven con el mismo algoritmo.

Estos ejemplos muestran enunciados que se resuelven con la misma operación pero traducen situaciones distintas. Si quisiésemos dramatizar la situación en clase para favorecer la comprensión del enunciado por parte de los alumnos, representaríamos 'obras de teatro' diferentes para cada ejemplo. Esta idea nos debe llevar a asumir que los problemas que se resuelven con la misma operación, e incluso teniendo los mismos datos y resultados, no tienen porqué ser todos iguales.

Pero también podemos encontrar ejemplos de situaciones diferentes que se resolverían con la misma operación de multiplicar. Así, presentamos los tres enunciados presentados en la Figura 2:

"Hugo tiene tres paquetes de caramelos. Cada paquete tiene 10 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Hugo?"

"Ana tiene 10 caramelos. Hugo tiene tres veces más caramelos que Ana. ¿Cuántos camelos tiene Hugo?"

"Hugo tiene 10 camisetas y tres pantalones. Si se pone una camisa y un pantalón cada vez, ¿de cuántas formas distintas puede vestirse?"

Figura 2. Problemas que presentan diferentes situaciones que se resuelven con la misma operación de multiplicar.

Todas estas situaciones se comunican a través de un lenguaje (oral, escrito, gráfico, imagen, etc) que los alumnos de primaria están adquiriendo en ese momento. Por otra parte, debemos procurar que los alumnos expresen con claridad y en términos precisos sus experiencias. De esta manera, el lenguaje debe de ser el vehículo de expresión de la actividad que realiza, e imprescindible para la evaluación.

Por todo ello, el lenguaje y la estructura linguística del problema adquiere singular importancia. Hay que recordar que los alumnos condicionados por una enseñanza tradicional y mecanicista, suelen hacer una traducción directa del proceso verbal a la expresión matemática, teniendo escasamente en cuenta el significado del problema planteado de forma oral o por escrito. “Maestro, ¿este problema, es de sumar?”.

La mayor importancia dada a los procesos algorítmicos sobre los conceptuales, en la enseñanza de las matemáticas, provoca en los niños una obsesión de búsqueda del algoritmo correspondiente al problema sin plantearse previamente el significado del mismo. “Algunos investigadores parecen pensar que la correspondencia entre ambos lenguajes se establece fundamentalmente por medio de palabras claves. Imaginan, por tanto, un proceso de traducción secuencial en el que el sujeto decide la operación que tiene que realizar en función del significado que atribuye a la ‘palabra clave’ con que se encuentra al recorrer el enunciado” (Puig y Cerdán, 1988, p. 116).

Así, nos encontramos con algunas asociaciones como ‘dar’, ‘comprar’ o ‘más’ que se asocian a la operación de sumar. Otras palabras como ‘menos’ o ‘comer’ quese asociarían a la resta, o la de ‘repartir’ a la división. Estas asociaciones se fomentan erróneamente, en las propias aulas y en algunos libros de texto.

Esta rutina de asociar palabras claves a operaciones, provoca que cuando forzamos a los estudiantes para maestro una repuesta rápida ante el problema enunciado en la Figura 3, nos encontremos que un grupo importante de ellos da 12 caramelos como solución al problema, inducidos por el vocablo ‘menos’ y la acción de ‘comer’.

Tengo 20 caramelos y me los como todos menos 8. ¿Cuántos me quedan?

Figura 3. Enunciado con palabras claves que inducen a la resta.

De manera similar, si planteamos a los alumnos de primaria el problema expuesto en la Figura 4, nos encontramos que algunos alumnos resuelven este problema con la operación de sumar: 3 + 7 = 10. Las palabras ‘compró’ y `más’ inducen a la operación suma, dando una respuesta incorrecta.

Miguel tenía tres caramelos, compró algunos más y ahora tiene 7, ¿cuántos compró?

Figura 4. Enunciado con palabras clave que inducen a la suma.

Pero, si proponemos el problema enunciado en la Figura 5, los niños resolverán correctamente mediante la operación: 8 - 3 = 5, inducidos por la palabra “comió”, que sugiere disminución de la cantidad.

Miguel tenía 8 caramelos, se comió algunos y ahora tiene 3. ¿Cuántos comió?

Figura 5. Enunciado con palabra clave que sugiere disminución de cantidad.

Ya Mialaret en su libro *Las Matemáticas. Cómo se aprenden. Cómo se enseñan*, (Mialaret,1977) daba una serie de enunciados similares y señalaba los porcentajes de alumnos que los respondían, para ejemplificar que el lenguaje y la acción representada son fundamentales. Así, por ejemplo, propuso los dos problemas presentados en la Figura 6 a alumnos de 7 a 9 años.

"¿Cuánto cuestan tres lápices a 12 francos cada uno?"

"Un ciclista recorre 12 Km en una hora. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en tres horas?"

Figura 6. Enunciados que evidencian que el lenguaje y la acción representada son fundamentales (Mialaret, 1977).

Los porcentajes del primero están entre el 56,3 % y el 79,6% según grupos, mientras que en el segundo se mantiene del 35,5 % al 66,5%. Era evidente que los niños estaban más familiarizados con los francos pero no con los kilómetros (Mialaret, 1977, 39).

Ya hemos señalado que la comprensión del problema implica una representación de la situación planteada que viene referida en términos de espacio y del tiempo, por lo que los términos empleados y la estructura del enunciado tienen mucha importancia. Así, el pasado, presente y futuro de los verbos indica una secuencia de hechos que puede presentarse de una manera ordenada o no. El uso del condicional (Si… entonces..) en los enunciados de los problemas implicaría una capacidad deductiva que algunos alumnos, por su edad, no tienen. La utilización incorrecta de los tiempos de los verbos o el abuso de los adverbios en los enunciados supone, así mismo, una dificultad añadida, como lo es, el orden de los números en relación a la operación implícita en el enunciado.

Para ejemplificar estas aportaciones vamos a enunciar una misma situación de diferente manera, que nosotros proponemos como trabajo a los estudiantes para maestro (EMP) con los que trabajamos.

Así, les proponemos que analicen los enunciados presentados en la Figura 7, mostrando y debatiendo sobre sus semejanzas y diferencias.

"Tenía siete caramelos, me comí cuatro, ¿cuántos me quedan?"

"Si tengo siete caramelos y me como cuatro, ¿cuántos me quedan?"

"Si tengo siete caramelos y me como cuatro, ¿cuántos me quedarán?"

"Tenía siete caramelos, ¿cuántos me quedan si me he comido cuatro?"

"¿Cuántos caramelos me quedarán, si de siete que tenía me como cuatro?"

"Si me como cuatro caramelos de los siete que tenía, ¿cuántos tendré?"

"Me como cuatro caramelos, tenía siete, ¿cuántos tendré?"

"Tengo siete caramelos, me como cuatro caramelos ¿cuántos tengo?"

"Me como cuatro caramelos, ¿cuántos caramelos me quedarán de los siete que tenía?"

"Si tengo siete caramelos y me como cuatro, ¿cuántos tengo?"

Figura 7. Enunciados para debatir sobre las semejanzas y diferencias al enunciar una misma situación.

El análisis de los enunciados nos descubren diferentes variables que debemos considerar en el trabajo con los problemas escolares, que hacen que no todos los enunciados que representan una misma situación sean iguales y presenten las mismas dificultades.

Así señalamos algunas de ellas:

- La operación aritmética que resuelve el problema no es el elemento que deba definir la dificultad de compresión de los enunciados.
- La compresión del problema viene determinada por la representación que realicemos de la situación planteada y del análisis que hagamos de ello.
- Los "problemas de sumar y restar", o de "multiplicar y dividir" pueden implicar más de una operación y estrategia en su resolución.
- Existen 'palabras clave' que inducen a los alumnos a una determinada operación aritmética. En algunos casos induciendo al error.
- La estructura del texto puede condicionar la resolución de problema. Así, la secuencia seguida en el enunciado y el orden de los números es un aspecto importante.
- Una misma situación puede ser enunciada de maneras diferentes, no todas igualmente comprensibles.
- La comprensión del problema implica una representación de la realidad que viene referida en términos de espacio y del tiempo, lo que se comunica con el uso de diferentes términos o expresiones lingüísticas.
- Las formas gramaticales implicadas en el enunciado (tiempo de los verbos, adverbios o uso del condicional) son variables importantes para la comprensión de las situaciones planteadas.
- Las formas de presentación concreta (escrita, gráfica, textos largos o no, etc.) favorecen o dificultan la compresión del problema.
- La secuencia establecida para mostrar la historia del enunciado es importante.
- El uso de términos conocidos/desconocidos por los estudiantes es también un referente para comprender el enunciado.

Finalmente, queremos indicar que las dificultades señaladas por el uso de determinadas variables no debe implicar su eliminación de los enunciados que propongamos. Puesto que son expresiones usuales en el lenguaje cotidiano lo que debemos recordar es su dificultad para que las tratemos con mayor cuidado e intensidad en las actividades del aula.

2. LOS PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA

Diferentes autores han trabajado acerca de la clasificación de los problemas de estructura aditiva. Así, autores como Heller y Greno (1978); Carpenter y Moser (1983); De Corte y Verschaffel (1985); Puig y Cerdán (1988); Maza (1989, 1991a); Blanco (1989); Blanco y Calderón (1994), plantean cuatro tipos de problemas de estrucutra aditiva: Problemas de Cambio, de Combinación, de Comparación y de Igualación.

2.1. Problemas de Cambio

Los problemas de cambio son aquellos en los que un suceso cambia el valor de una cantidad, como el de la Figura 8.

Paloma tenía siete caramelos, se comió tres caramelos, ¿Cuántos le quedarán?

Figura 8. Problema de estructura aditiva de cambio I.

En el enunciado presentado consideramos una secuencia y una cantidad inicial determinada por los caramelos que tenía Paloma (*Paloma tenía siete caramelos*). Una segunda secuencia expresa una acción (*se comió tres caramelos*) que modifica la cantidad inicial, y que da lugar a una tercera secuencia que, en este enunciado, contiene la incógnita y se refiere a la cantidad final resultante (¿Cuántos de quedan?).

Destacamos en estos problemas tres secuencias representadas en la Figura 9.

La secuencia seguida en el ejemplo de la Figura 9 es la normal en consideración al tiempo y que se refleja en el tiempo de los verbos. No obstante, podríamos alterar la secuencia del enunciado estableciendo un orden diferente. Ello dará lugar a una nueva estructuración del enunciado del problema anterior.

Figura 9. Esquema que presentan los problemas de cambio.

Así, podríamos haberlo planteado como se presenta en la Figura 10. En este caso, alternamos las dos primeras secuencias y la estructura presentada en el problema ya no es isomorfa a la secuenciación temporal que resultaría de la dramatización real, lo que supone dificultad para la comprensión del problema.

Paloma se comió tres caramelos de los siete que tenía, ¿cuántos le quedan?

Figura 10. Problema de estructura aditiva de cambio II.

La acción que modifica la cantidad inicial puede llevar a un aumento de la cantidad (Paloma compró caramelos) o a una disminución de la cantidad inicial (Paloma regaló caramelos). Ello provoca dos tipos de problemas de cambio.

Problemas de Cambio-unión son aquellos en los que la acción realizada origina un incremento de la cantidad inicial.

"En una estantería hay 12 libros, Jaime coloca 8 libros más, ¿Cuántos libros habrá en total?"

"En una estantería había 12 libros y ahora hay 20 ¿Cuántos libros ha colocado Jaime?"

"Jaime colocó 8 libros en una estantería y ahora hay 20. ¿Cuántos libros había al inicio?"

Figura 11. Problemas de estructura aditiva de cambio-unión.

Problemas de Cambio-separación son aquellos en los que la cantidad inicial se ve disminuida debido a la acción realizada.

"En un parque había 30 árboles y sólo quedan 20. ¿Cuántos árboles se han secado?"

"En un parque había 30 árboles y se han secado 10 árboles. ¿Cuántos árboles quedarán?"

"Se han secado 10 árboles de un parque y ahora sólo quedan 20. ¿Cuántos árboles había al principio?"

Figura 12. Problemas de estructura aditiva de cambio-separación.

La diferenciación entre problemas de Cambio-Unión y Cambio-Separación, podría llevarnos a pesar que si la cantidad aumenta el problema 'sería de sumar' y si la cantidad disminuye 'el problema sería de restar'. Un somero repaso de los ejemplos anteriores nos muestra que esta asociación no es correcta.

Recordando los tres estados del esquema anterior (inicial, intermedio y final) podemos plantear diferentes situaciones según situemos la cantidad desconocida. Así, en referencia a la situación que nos pueda representar la colocación de los libros en la estantería o el número de árboles en el parque, podemos desconocer la cantidad de libros o de árboles que había al principio, la cantidad de libros que hemos colocado o de árboles que se han secado, o la cantidad de libros o de árboles que quedaran al final. Podríamos plantear como actividad enunciar los seis tipos de problemas considerando el número de coches de un aparcamiento y la acción de entrar o salir.

2.2. Problemas de Combinación

Los problemas de combinación representan una situación estática donde dos cantidades son consideradas separadamente o en combinación, como los de la Figura 13:

"Iván tiene cinco globos y su primo Joan tiene tres, ¿Cuántos tienen entre los dos juntos?".

"Entre Paula y su prima Mirian tienen ocho globos. Paula tiene cinco, ¿cuántos tiene Mirian?"

Figura 13. Problemas de estructura aditiva de combinación.

Se refieren, estos problemas, a la relación que existe entre un conjunto y una partición del mismo en dos o más subconjuntos. En esta relación, podemos partir de conocer el cardinal de cada uno de los dos subconjuntos y querer calcular el cardinal del conjunto unión (como en el primer ejemplo) cuya representación queda indicada en la Figura 14, o conocer el cardinal de un subconjunto y el del conjunto unión y desconocer el cardinal del otro subconjunto (como el en segundo ejemplo), situación representada en la Figura 15. Ello nos lleva a dos situaciones diferenciadas, si queremos conocer la cantidad total o algunas de las partes.

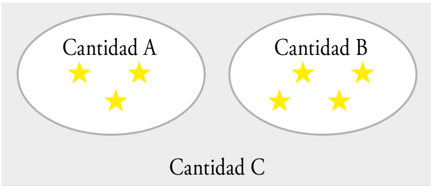


Figura 14. Representación de Problema de combinación donde se desconoce el cardinal del conjunto unión.

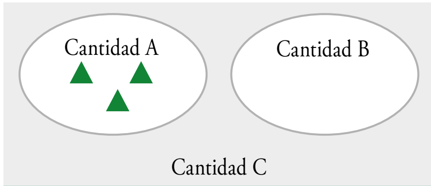


Figura 15. Representación de Problema de combinación donde se desconoce el cardinal de un subconjunto.

2.3. Problemas de Comparación

Los problemas de comparación presentan situaciones en las que dos cantidades son comparadas para establecer las diferencias cuantitativas entre ellas.

> Los problemas de este tipo comparten con los de combinación su carácter estático, pero mientras que en los de combinar la relación se establece entre conjuntos, en estos se establece entre cantidades, de manera que lo que en aquellos eran relaciones de inclusión entre conjuntos, pasan a ser aquí relaciones de comparación entre cantidades (Puig y Cerdán, 1988, 103).

En la Figura 16 se presentan dos ejemplos de problemas de comparación.

"Rodrigo tiene 3 caramelos y Valle tiene 7 ¿Cuántos caramelos tiene Valle más que Rodrigo?"

"Jaime tiene 17 caramelos, y Juanjo tiene 14 más que Jaime, ¿cuántos caramelos tiene Juanjo?"

Figura 16. Problemas de estructura aditiva de comparación.

Para diferenciar entre los problemas de comparación se consideran tres tipos diferentes de cantidades: cantidad de referencia, la cantidad comparada con la anterior y la diferencia que se pueda establecer entre ambas (Figura 17). Esta consideración da lugar a seis tipos de problemas diferentes (Puig y Cerdán, 1988; Maza, 1989, 1991; Blanco y Calderón, 1994). En los ejemplos que mostramos en la Figura 18, la cantidad de caramelos que tiene David sería la cantidad de referencia (Más que David - Menos que David) y la cantidad de caramelos que tendría Jesús sería la cantidad comparada.

CANTIDAD DE REFERENCIA	DIFERENCIA	CANTIDAD COMPARADA
Cantidad A Rodrigo tiene 3 caramelos	**Cantidad B** más que Rodrigo	**Cantidad C** Valle tiene 7 caramelos

Figura 17. Esquema que presentan los problemas de Comparación.

- David tiene 13 caramelos. Jesús tiene 28 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Jesús más que David?
- David tiene 17 caramelos. Jesús tiene 12 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Jesús menos que David?
- David tiene 13 cromos. Jesús tienen 5 más que David. ¿Cuántos cromos tiene Jesús?”
- David tiene 18 cromos. Jesús tiene 7 menos que David. ¿Cuántos cromos tiene Jesús?
- Jesús tiene 18 lápices. Tiene 5 más que David ¿Cuántos tiene David?
- Jesús tiene 9 lápices. Tiene 7 menos que David ¿Cuántos tiene David?

Figura 18. Diferentes posibilidades de problemas de comparación.

En estos problemas aparecen de forma más explícita los errores de asociación de una operación matemática a una determinada palabra, dado el uso frecuente de las expresiones “más que” y “menos que” y la asociación más - sumar y menos – restar.

2.4. Problemas de Igualación

Los problemas de igualacion se caracterizan por ser problemas híbridos de comparación y cambio. Es la misma clase de acción que en los problemas de cambio pero basados en la comparación de dos conjuntos disjuntos (Carpenter y Moser, 1983). Presentan una estructura muy similar a la de los problemas anteriores salvo que la comparación viene determinada por una acción de cambio, tal como se presenta en la Figura 19 y se ejemplifica en la Figura 20.

CANTIDAD DE REFERENCIA	Cambio Unión DIFERENCIA Cambio Separación	CANTIDAD COMPARADA
Cantidad A • Juanjo tiene 12 discos • Tantos como Juanjo	**Cantidad B** ¿Cuántos tiene que comprar Rodrigo para tener 12?	**Cantidad C** Rodrigo tiene 8 discos

Figura 19. Esquema que presentan los problemas de Igualación.

Juanjo tiene 12 discos y Rodrigo 8, ¿cuántos tiene que comprar Rodrigo para tener tantos como Juanjo?

Figura 20. Problema de estructura aditiva de Igualación.

El problema presentado en la Figura 20, podríamos, en cierto sentido, asimilarlo a un problema de cambio que sería: "Rodrigo tiene 8 discos, Cuántos tiene que comprar para tener 12?".

O también a un problema de comparación: "Juanjo tiene 12 discos, y Rodrigo 8, ¿cuántos tiene Rodrigo menos que Juanjo?".

En los problemas de igualación, hay una comparación entre cantidades establecida por medio del comparativo "tantos como" o expresión similar, que implica un equilibrio de cantidades con simultaneidad de cambio y comparación.

La estructura básica de este tipo de problemas es la de problemas de comparación, están presentes aquí también tres tipos de cantidades: de referencia, comparada y diferencia (Blanco y Calderón, 1994; Carpenter y Moser, 1983; Puig y Cerdan, 1988, Maza, 1989 y 1991).

3. LOS PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

De igual manera que hemos analizado una clasificación para los problemas de estructura aditiva pueden estudiarse diversas características de los problemas de estructura multiplicativa. Estos problemas han sido analizados por diferentes autores como Puig y Cerdan, (1988); Maza, (1991b); Castro, Rico y Castro, (1995) y Castro y Castro, (1996), entre otros.

En los problemas de estructura multiplicativa señalaremos dos clasificaciones diferentes, según consideremos el tipo de cantidades dadas en el enunciado o la situación que se representaba en el mismo (Figura 21).

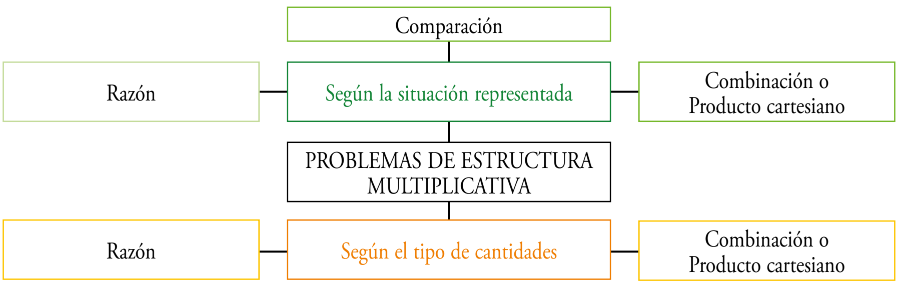


Figura 21. Clasificaciones de los problemas de estructura multiplicativa

3.1. Problemas de estructura multiplicativa según el tipo de cantidad

Schwartz (1988) analiza los problemas de estructura multiplicativa en función de dos tipos de cantidades: Intensivas (I) y Extensivas (E). A este respecto recordaremos que "una cantidad es un par ordenado (x, u) en el que x es un número y u es una unidad de una magnitud: Por ejemplo, 4 canicas, 3,5 kg, 120 Km/h." (Puig y Cerdán, 1988, p. 125).

Las cantidades extensivas expresan la extensión de una entidad o substancia y se refiere a un conjunto, montón o trozo de esa entidad o substancia. Son aditivas, puesto que los números pueden sumarse, manteniendo inalterada la unidad que los acompaña. Una cantidad extensiva viene expresada por una unidad simple (3 metros, 2 naranjas). Pueden diferenciarse las cantidades extensivas discretas y continuas en referencia a la clasificación tradicional de magnitudes.

Las cantidades intensivas son unidades compuestas, formadas por el cociente de dos cantidades extensivas y viene expresada por una unidad compuesta (60 km/h). Las cantidades intensivas, a diferencia de las extensivas, no son aditivas.

En base a esta distinción entre las cantidades, podemos hacer referencias a clasificaciones diferentes que aparecen en Puig y Cerdán (1988) y Castro y Castro (1996), recogiendo la siguiente que acompañamos con algunos ejemplos de problemas:

Problemas asociados a la terna (I, E, E′), donde se señalan tres tipos I x E = E′; E′ / E = I; E′ / I = E., tal como se ejemplifica en la Figura 22.

I x E = E'	"Compras 2 paquetes de caramelos. Cada paquete tiene seis caramelos. ¿Cuántos caramelos compraste?"
E' / E = I	"Tengo 20 caramelos, a repartir entre 5 niños ¿a cuántos caramelos tocarán?"
E' / I = E	"Tengo 20 caramelos y quiero dar 5 a cada niño ¿cuántos niños se beneficiarán del reparto?"

Figura 22. Problemas de estructura multiplicativa asociados a la terna (I, E, E′).

Problemas asociados a la terna (E, E′, E″), sugiere otros tres tipos E x E′ = E″; E″ / E = E y E″ / E′ = E, tal como se muestra en la Figura 23.

E x E' = E''	"Una niña tiene 4 camisas (azul, rosa, blanca, y verde) y tres faldas (azul, roja, marrón). ¿De cuántas formas diferentes puede vestirse la niña?"
E / E' = E''	"La superficie de un rectángulo es 20 m2, ¿cuánto mide la base si la altura, mide 4 m.?"

Figura 23. Problemas de estructura multiplicativa asociados a la terna (E, E′, E″).

Problemas asociados a la terna (I, I′, I″), donde incluye problemas de tipo I x I′ = I″ y las divisiones asociadas. Ejemplos de estos problemas se muestran en la Figura 24.

I x I' = I''	"Cada caja de caramelos tiene 3 bolsas, y cada bolsa tiene 10 caramelos ¿cuántos caramelos hay en una caja?" "Un tren tiene 5 vagones y cada vagón tiene 50 asientos ¿cuántos asientos tiene el tren?" "¿Cuántos minutos hay en un día?"
I / I' = I''	"Hay 12 caramelos en una bolsa, en paquetes de cuatro caramelos ¿Cuántos paquetes entran en una bolsa?"

Figura 24. Problemas de estructura multiplicativa asociados a la terna (I, I′, I″).

3.2. Problemas de estructura multiplicativa según la situación representada

Por otra parte, Castro y Castro (1996) se refieren a la aportación de Nesher (1988) quien se sitúa desde una perspectiva lingüística para buscar las relaciones semánticas entre las proposiciones subyacentes al texto. Así, distinguen tres grandes categorías: de razón, de comparación y de combinación o producto cartesiano.

Problemas de razón que aparecen como una subclase del tipo I x E = E′, como los ejemplos de la Figura 25. En el primer problema de la Figura 25, aparece el cociente de dos magnitudes (cantidad intensiva; caramelo/paquete, km./h.), que se repiten un número de veces determinado (en relación con la unidad del denominador). La razón que aparece en estos problemas caracteriza este grupo, y le da el nombre.

"Compramos 3 paquetes de caramelos, que tienen 4 caramelos cada uno. ¿Cuántos caramelos hemos comprado?"

"Cuantos km. has recorrido durante 3 horas, si has estado corriendo a razón de 4 km./h."

Figura 25. Problemas de estructura multiplicativa de Razón.

Problemas de comparación, donde hay implicadas tres cantidades y tratamos de conocer una de ellas a partir de las otras dos. Una cantidad actúa como referente en la comparación, otra actúa de cantidad comparada y la tercera de factor de comparación. En este segundo caso, aparece la comparación de dos cantidades para determinar una de ellas a partir de la relación que se ha establecido entre las dos (doble, triple, tantas veces más, ...) (Figura 26).

Iván tiene tres euros y Paula tiene cuatro veces los euros de Iván. ¿Cuántos euros tiene Paula?

Figura 26. Problema de estructura multiplicativa de Comparación.

Problemas de combinación o producto cartesiano, donde aparecen dos cantidades para determinar el número de combinaciones que pueden establecerse entre ellas. En estos problemas los diagramas cartesianos pueden servir para representarlos, facilitando su comprensión, como sucede con el ejemplo de la Figura 27.

Valle tiene seis camisas y dos pantalones. Si se pone una camisa y un pantalón cada vez, ¿de cuántas formas distintas puedes vestirte?

Figura 27. Problema de estructura multiplicativa de Comparación.

4. PROBLEMAS EN DOS ETAPAS

Los problemas en más de una etapa son problemas más complejos que contienen más de una situación de las señaladas anteriormente. Cada una de estas situaciones puede dar lugar a subproblemas diferentes. Así podemos considerar los problemas expuestos en la Figura 28.

"En un huerto había 14 árboles, se han plantado 13 naranjos y 17 higueras, ¿cuántos árboles habrá ahora?"

"Queremos comprar tres paquetes de patatas de 1,35 euros y cinco cajas de galletas de 2,40 euros. ¿Cuánto nos gastaremos?"

Figura 28. Problemas de estructura multiplicativa de Razón.

Haciendo las combinaciones oportunas de los tipos cualesquiera de los señalados en apartados anteriores podremos enunciar nuevos problemas más complejos, tanto en referencia a la estructura aditiva, como a la estructura multiplicativa o a la mezcla de ambas. Ante esta situación, es evidente que la relación entre los datos y el objetivo del enunciado presenta mayor dificultad, ya que pueden establecerse diferentes conexiones. En algunos casos, esta relación vendrá expresada explícitamente, mientras que en la mayoría de los enunciados aparece una relación implícita.

Así, podemos encontrar ejemplos donde vienen enunciados explícitamente dos incógnitas, como el presentado en la Figura 29, o enunciados más simples, donde debe considerarse una incógnita intermedia que aparece implícitamente, como en la Figura 30.

David se ha gastado 2,30 euros el sábado y 5,50 euros el domingo. ¿Cuánto se ha gastado el fin de semana? Si tenía 10 euros, ¿cuánto le quedará?

Figura 29. Problema de dos etapas con dos incógnitas explícitas.

David se ha gastado 2,30 euros el sábado y 5,50 euros el domingo. Si tenía 10 euros, ¿cuánto le quedará?

Figura 30. Problema de dos etapas con la incógnita intermedia implícita.

La resolución de estos problemas puede implicar diferentes estrategias de solución, lo que hace más complejo el proceso de toma de decisiones del resolutor. Analizar y resolver el problema implica diferenciar las dos etapas presentes en el mismo, introducir la incógnita auxiliar cuando ésta no esté explícitamente expresada en la presentación del problema y plantear diferentes estrategias.

Estudiemos el siguiente problema:

"Tenía 50 euros, compré un disco de 15 euros, y después gasté 9 euros en un libro, ¿Cuánto me sobró?".

El análisis de este problema nos revela dos procedimientos para su solución. En ambos casos definiendo dos subproblemas diferenciados, de tal manera que la solución del primero actuará como dato del segundo subproblema.

a) Podemos escoger un primer camino donde enunciaremos dos problemas de cambio-separación, de los considerados:
   1) *Primer subproblema*
      "Tengo 50 euros, compré un disco de 15 euros, ¿Cuánto me sobró?".
      Solución: 50 euros – 15 euros = 35 euros me sobraron.
   2) *Segundo subproblema*
      Tomando la solución del primer subproblema (35 euros) podremos definir un nuevo problema, también de cambio-separación:
      "Me quedan 35 euros, y me gasté 9 euros en un libro, ¿Cuánto me sobró?".
      La solución de este segundo problema será la solución al problema planteado inicialmente.
b) Estudiemos ahora una segunda estrategia para resolverlo, enunciado otros dos subproblemas:
   1) *Primer subproblema*
      "Me gasté 15 euros en un disco y 9 euros en un libro, ¿cuánto me gasté?".
      En este primer caso es un problema de combinación donde consideramos dos cantidades (15 euros y 9 euros) que reunimos para ver la cantidad total que me gasté.
      Solución: 15 euros + 9 euros = 24 euros me gasté.
   2) *Segundo subproblema*
      El segundo problema será un problema de cambio-separación similar a los enunciados en la primera estrategia. Nuevamente la solución del problema de combinación considerado en primer lugar, será un dato para el segundo enunciado.

      "Tengo 50 euros, me gasté 24 euros, ¿Cuánto me sobró?"

La clasificación de los problemas en dos etapas es compleja, ya que se basa en la combinación de los tipos estudiados para los problemas de una etapa, dando lugar a múltiples situaciones diferentes.

5. EPÍLOGO

Las referencias y ejemplos de problemas que se muestran en este capítulo indican la diversidad de enunciados que pueden proponerse a los alumnos en los primeros niveles. El estudio de los manuales escolares muestra la ausencia de la mayoría de enunciados que se correspondan con los diferentes tipos de problemas, aún cuando las situaciones representadas son familiares a los niños.

Por otra parte, los textos escolares proponen unos tipos de problemas en los primeros cursos, cuando los alumnos trabajan los problemas de una etapa (Blanco y Calderón, 1994), y otros diferentes cuando los alumnos se incician en los problemas dos etapas, lo que añade dificultad a la enseñanza de la resolución de problemas.

Estas dos evidencias, mostrarían una vez más, que la investigación educativa no se refleja en los materiales escolares y, por ende, en la práctica escolar en las aulas. Lo que debería ser objeto de reflexión en las instituciones educativas.

BIBLIOGRAFÍA

— BERMEJO, V. El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas. Barcelona: Ed. Pidós Educador, 1990.

— BERMEJO, V.; RODRIGUEZ, P. Las operaciones de sumar: el caso de los problemas verbales. En Suma, 1991, n. 8, p. 35-39.

— BLANCO, L. et al. La resolución de problemas de suma y resta en Ciclo Inicial de E.G.B. Dos aspectos importantes para el análisis didáctico: Realidad y Lenguaje. En Campo Abierto, 1989, n. 6, 65-80.

— BLANCO, L.J.; CALDERÓN, M. Los problemas de Sumar y Restar. Badajoz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura., 1994.

— CARPENTER, TP.; MOSER, MM. The acquisition of addition and subtraction concepts. En LESH, R & LANDAU, M. Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. Orlando: Academic Press, INC, 1983, p. 7-44.

— CASTRO, E; RICO, L.; CASTRO, E. Estructuras aritméticas elementales y su modelización. Bogotá: G.E.I., 1995.

— CASTRO, E.; CASTRO, E. Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de magisterio sobre la estructura multiplicativa. En GIMÉNEZ, J.; LLINARES, S.; SÁNCHEZ, M.V. (Eds.); El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática. Comares. Granada, 1996, p. 119-141.

— MAZA, C. Sumar y restar: El proceso de enseñanza/aprendizaje de la suma y de la resta. Madrid: Visor, 1989.

— MAZA, C. Enseñanza de la suma y de la resta. Madrid: Sintesis, 1991.

— MAZA, C. Enseñanza de la multiplicación y división. Madrid: Sintesis, 1991a.

— M.E.C. Educación Primaria. Matemáticas. Madrid, 1992.

— MIALARET, G. Las Matemáticas. Cómo se aprenden, cómo se enseñan. Madrid: Visor. 2da. Ed, 1986.

— N.C.S.M. Essential Mathematics for the twenty-first century. The position of the NCSM. Mathematics Teacher, 1989, vol. 82, n. 6, p. 470-474.

— NCTM. Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática. Sevilla: S.A.E.M, 1991.

— ORTON, A. Didáctica de las Matemáticas. Madrid: Morata-MEC, 1990.
— PUIG, L.; CERDÁN, F. Problemas aritméticos escolares. Madrid: Síntesis, 1988.
— SCHWARTZ, JL. Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In HIEBERT, J; BERH, M. (Eds.) Number concepts and operations in the middle grades. Lawrence Erbaum: Reston VA: NCTM, 1988, p. 41-52.
— VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In LESH, R; LANDAU, M. (Eds.). Adquisitions of mathematics concepts and process. New York: Academic Press, 1983, p. 127-174.

CAPÍTULO 9
TRABAJAMOS CON UN PROBLEMA DE GEOMETRÍA

Lorenzo J. Blanco Nieto y Clara Jiménez Gestal

Nuestra intención en este capítulo es mostrar la diferencia entre 'resolver un problema de matemáticas' y utilizar un problema de matemáticas para trabajar la 'resolución de problemas', con el objetivo de hacer matemáticas y enseñar/aprender a resolver problemas.

Para ello vamos a proponer un problema de cálculo de área de un cuadrado y desarrollaremos las fases del modelo general reflejando, en gran medida, diferentes cuestiones que nos han aparecido durante el desarrollo de nuestro trabajo docente en el aula. Debemos especificar que esta actividad la hemos desarrollado con estudiantes del Grado de Primaria en la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura.

Con este ejemplo queremos, además, poner de manifiesto el significado de la expresión repetida en los currículos de matemáticas en diferentes niveles que indica que la resolución de problema es el contexto para aprender matemáticas. Pero, además, consideramos que la resolución de problema es, en sí mismo, un contenido específico, tal y como desarrollamos en el capítulo 2.

El contenido del trabajo muestra la actividad del aula y las reflexiones y aportaciones de los estudiantes en diferentes sesiones. Esta actividad suele desarrollarse en dos sesiones de hora y media cada una, para que dé tiempo a realizar las actividades sugeridas por el profesor, reflexionar sobre lo realizado y evaluarla.

El planteamiento de este tipo de actividades no debiera resultar novedoso, ya que viene sugerido en la propuesta curricular, para la enseñanza de las matemáticas, desde el año 1992 y comentada en el capítulo 2.

> ... el alumno debe desarrollar y perfeccionar sus propias estrategias, a la vez que adquiere otras generales y específicas que le permiten enfrentarse a las nuevas situaciones con probabilidad de éxito. En este sentido, se brindará a los niños la oportunidad de familiarizarse con procesos que facilitan la exploración y resolución de problemas como: comprensión y expresión de la situación matemática (verbalización, dramatización, discusión en equipo), extracción de datos y análisis de los mismos, representación en forma gráfica del problema o situación, formulación de conjeturas y verificación de su validez o no, exploración mediante ensayo y error, formulaciones nuevas del problema, comprobación de resultados y comunicación de los mismos. Se hace necesario, asimismo, desarrollar la capacidad de persistir en la exploración de un problema (MEC, 1992, p. 92).

Para ejemplificar el desarrollo del Modelo Integrado (Capítulo 7) presentamos el problema a partir del enunciado propuesto en la Figura 1.

Calcular el área y perímetro de un cuadrado cuyo radio mide 3 m.

Figura 1. Problema de geometría de sólo texto.

Cuando mostramos el enunciado de la Figura 1 a los estudiantes, surge la primera sorpresa y duda acerca de los términos empleados en el mismo. Así, la idea de que el cuadrado pueda tener un radio genera confusión y debate, lo que resulta muy interesante para la formación matemática de los futuros maestros.

Así, aparecen las primeras cuestiones a resolver: ¿tiene sentido hablar del radio de un cuadrado? En tal caso, ¿cómo lo definiríamos? Hay que hacer notar, que este debate surge, también, cuando trabajamos con estudiantes del Grado de Matemáticas o con profesores en ejercicio.

Esta cuestión nos permite identificar al cuadrado como un polígono regular y significar que el concepto de radio de un polígono regular aparece entre los contenidos de primaria.

No obstante, este debate no aparece cuando enunciamos el problema según la Figura 2, lo que nos permite hablar de la importancia de la presentación en los problemas.

Calcular el área del cuadrado de la figura sabiendo que el radio mide 3 m.

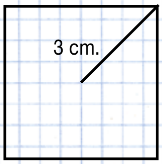


Figura 2. Problema de geometría acompañado de una figura.

La experiencia nos muestra que en esta ocasión los estudiantes aceptan el término de radio del cuadrado sin generar duda o debate, lo que no significa que asuman el concepto. Esta doble presentación nos permite hablar a los estudiantes de la importancia de los formatos (verbal/figura) en los enunciados de los problemas que analizamos en más profundidad en el Capítulo 6.

1. DESARROLLO DE LA PRIMERA FASE DEL MODELO GENERAL

Llegado a este punto, iniciamos la primera fase del Modelo Integrado (ver Capítulo 7), partiendo de la identificación y descripción de los conceptos explícitos e implícitos que aparecen en la figura una vez dibujadas algunas líneas y establecidas nuevas medidas.

De esta manera, transformamos la figura inicial en nuevas figuras que nos sugieren nuevos conceptos, datos y relaciones entre ellos (Figura 3).

ÍNDICE

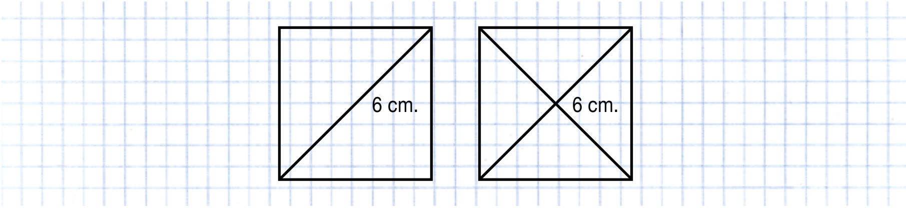


Figura 3. Nueva representación del cuadrado original con líneas.

Ante esta situación pedimos a los estudiantes que encuentren figuras, indiquen sus características, datos que conocemos o podemos conocer en cada una de ellas, determinar relaciones entre las figuras, etc. Y se pone de manifiesto la importancia de la notación en matemáticas para facilitar la comunicación (Figura 4).

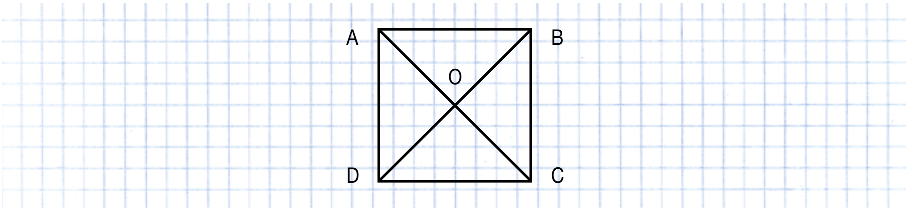


Figura 4. Nueva representación del cuadrado original con las anotaciones.

Obviamente, la primera figura que señala es el 'cuadrado ABCD', que nos lleva a recordar la definición de cuadrado. Llegado este punto, la pregunta es inmediata: ¿qué fórmulas podemos utilizar para calcular el área y perímetro de la figura ABCD? En diferentes ocasiones, como consecuencias de actividades anteriores en el aula, algunos estudiantes señalan que también es un rombo ya que tiene los cuatro lados iguales. Lo que nos lleva a plantear la definición de rombo y establecer la relación entre cuadrado y rombo y señalar que el 'cuadrado es un caso particular del rombo'.

A pesar de esta observación, la primera intención de los estudiantes para calcular el área del cuadrado es utilizar el teorema de Pitágoras en el triángulo BCD y así conocer cuánto mide el lado del cuadrado. Es evidente que estos estudiantes están pensando en la expresión: Área de la figura ABCD = l^2.

En muy pocas ocasiones algunos estudiantes plantean que dado que la figura es también un rombo podríamos utilizar la expresión: Área de la figura ABCD = (dxd)/2. La posibilidad de usar la expresión de cálculo de área de un rombo de manera general para los cuadrados es un descubrimiento para un número importante de estudiantes.

Debido a las dudas de los estudiantes acerca de esta relación, en numerosas ocasiones aprovechamos esta situación para plantear las dificultades estudiadas con los conceptos geométricos (Blanco, 2001).

Retomamos la búsqueda de polígonos a partir de la Figura 4. Y los estudiantes comienzan a señalar diversos triángulos: ABC; ACD; BCD y ABD.

La posición de estos triángulos hace que los estudiantes los reconozcan, fácilmente, como triángulos rectángulos, pero no así como triángulos isósceles. Indican que de estos triángulos conocemos la hipotenusa y a partir de ahí podríamos conocer la medida del cateto (lado del cuadrado) utilizando el teorema de Pitágoras.

Planteamos en este momento un nuevo subproblema: "¿Podríamos conocer la superficie de estos triángulos?"

La observación del triángulo ABD mostraría, con alguna dificultad para ellos, que la base mide 6 m y la altura 3 m., por lo que podremos aplicar la expresión del área de un triángulo. La relación entre el triángulo ABD y el cuadrado ABCD, es inmediata, por lo que se sugiere una nueva estrategia de solución del problema. Algunos espontáneamente lo indican sin ser una pregunta del profesor.

Otros estudiantes reconocen los triángulos: AOB; BOC; COD y AOD. Dada la tarea inmediata anterior reconocen que estos triángulos son rectángulos e isósceles. E indican que son una cuarta parte del cuadrado pedido, pensando así en una nueva estrategia de solución del problema original.

Surge la cuestión de analizar cómo calcular la superficie y las dudas sobre su base y su altura dada la posición que tienen. La respuesta de los estudiantes resulta interesante: 'Si giramos el triángulo (Figura 5), podemos ver que la base mide tres metros y la altura también tres metros'.

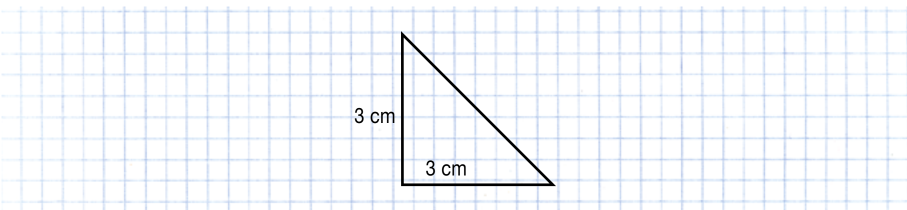


Figura 5. Giramos el triángulo para visualizar la base y la altura

Es este otro momento que merece una reflexión interesante ya que la posición de triángulo rectángulo apoyado sobre uno de sus catetos, propuesta por los estudiantes, nos permite generalizar su aportación a todos los triángulos rectángulos. Lo que nos lleva a enunciar un 'nuevo teorema': Para calcular el área de los triángulos rectángulos multiplicamos los catetos entre sí y dividimos por dos el resultado.

Llegado este momento, observamos a los estudiantes investigando nuevas figuras y tratando de encontrar sus relaciones con el cuadrado. Y, siguiendo con la dinámica seguida empiezan a enumerar triángulos más pequeños, también rectángulos e isósceles: AHO; BOF,... que consideran son un octavo del cuadrado original (Figura 6).

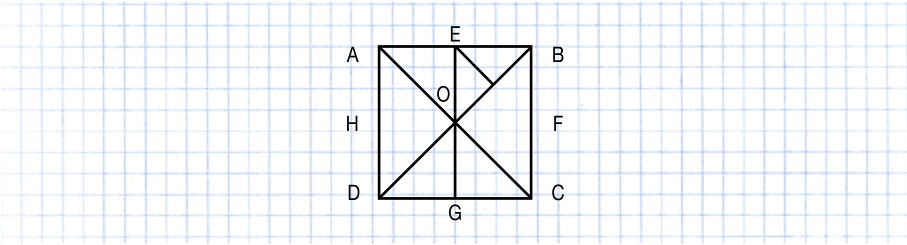


Figura 6. Nuevas líneas y nuevos triángulos.

Para determinar las dimensiones de estos triángulos se refieren, usualmente, al teorema de Pitágoras ya que conocen el valor de la hipotenusa pueden calcular el valor de los catetos. Pero en algunas ocasiones, algunos estudiantes han mostrado una solución más sencilla al comparar los triángulos ABD y BEO, y observar que la base del primero (ABD) que es BD y vale 6 cm, es el doble de la base del triángulo BEO, que valdrá 3 cm. De igual manera, si la altura del primero (OA) mide 3 cm, la altura del segundo medirá 1,5 m (Figura 6). Ello nos permitirá calcular el área del triángulo BEO y, por comparación, la del cuadrado ABCD.

Los estudiantes han ideado y, en algunos casos, expresado diferentes formas de calcular el área del cuadrado pedido. Podríamos insistir en esta fase y profundizar en el análisis de la figura para encontrar nuevas relaciones que sugirieran nuevos procedimientos o variaciones de alguno de los que se hayan podido pensar.

Para finalizar esta primera fase del modelo retomamos la actividad desarrollada en dos aspectos:

Recordamos y repasamos los conceptos aparecidos hasta el momento: cuadrado; radio de un cuadrado; rombo; rectángulo; cuadrilátero; polígono; polígono regular; lado de un cuadrado; diagonal de un cuadrado; triángulo; triángulo isósceles; triángulo rectángulo; cateto de un triángulo rectángulo; hipotenusa de un triángulo rectángulo; altura de un triángulo; base de un triángulo; área de un cuadrado; área de un rombo, área de un triángulo, área de un triángulo rectángulo.

Revisamos la actividad realizada para fijar los conceptos y datos, explícitos o implícitos, que tenemos en relación a lo que nos pide el problema. Es usual que en este momento, los estudiantes recuerden que intentamos calcular el área del cuadrado y se olviden del cálculo del perímetro.

2. DESARROLLO DE LA SEGUNDA FASE DEL MODELO INTEGRADO

En el desarrollo de la primera fase se han sugerido y, en algunas ocasiones, explicitado diferentes procesos para calcular el área del cuadrado original. Sin embargo, parece muy oportuno insistir en la necesidad de que los estudiantes expliquen "oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas"

(Decreto, 2007, p. 7920), como se indica en el currículo de matemática en el nivel de primaria. La expresión "estrategias personales" aparece siete veces en el currículo de primaria (Consejería de Educación, 2007a), que insiste en la importancia de que los estudiantes expresen oralmente y por escrito las estrategias para resolver los problemas.

Nuestra experiencia nos recuerda que los estudiantes para maestro tienen dificultades para verbalizar y/o escribir los procesos que resuelven los problemas. Por ello, en este punto les pedimos que redacten de manera precisa, al menos, cuatro procedimientos diferentes para calcular el área del cuadrado ABCD a partir del análisis realizado. Ello les permitirá, así mismo, consolidar las estrategias sugeridas, facilitando una primera fase para su generalización.

Retomamos la Figura original con las notaciones y líneas que hemos añadido en las Figuras 3, 4 y 6.

Podríamos señalar que escriben las siguientes estrategias generales:

- Dado que conocemos el valor de la diagonal de la figura, podemos calcular el área del cuadrado/rombo a partir del producto de sus diagonales y dividiendo por dos el resultado. Es la fórmula para calcular el área del rombo.
- A partir del triángulo rectángulo ABD y dado que conocemos el valor de la hipotenusa, podemos calcular el valor del lado del cuadrado y luego aplicar la fórmula para calcular el área de un cuadrado.
- Del triángulo ABD conocemos el valor de su base BD y de su altura OA, por lo que podemos calcular su área. El área del cuadrado será el doble.
- Podemos calcular el área del triángulo rectángulo AOB ya que sabemos el valor de sus catetos que podemos situar como base y altura del triángulo. Una vez realizado multiplicamos por cuatro el resultado obtenido.
- Considerando el triángulo anterior AOB y dado que conocemos el valor de sus catetos, podemos calcular el valor de la hipotenusa al aplicar el teorema de Pitágoras. La hipotenusa coincide con el lado de cuadrado por lo que podemos aplicar la fórmula del área de un cuadrado.

Al respecto de las respuestas de los EMP queremos hacer algunas observaciones. El análisis de las respuestas de los estudiantes a la actividad pedida nos muestra la dificultad que tienen para diferenciar la redacción de la estrategia y el proceso de resolución del problema. Pero, igualmente, muchos estudiantes renuncian a los apuntes tomados en la primera fase, incluido las figuras y representaciones, e intentan redactar las estrategias partiendo de cero. Es decir, no aprovechan el trabajo que ellos mismos han realizado.

Las respuestas de los alumnos muestran las dificultades que tienen para escribir las estrategias concretas para resolver el problema. Así, por ejemplo, podemos encontrar una redacción como la que sigue:

> "Hallar el área mediante el teorema de Pitágoras, dado que conocemos la diagonal (que sería la hipotenusa de un triángulo cuya área es la mitad del cuadrado) y con ella averiguamos los catetos, que son los lados del cuadrado. Con ello ya podemos aplicar el área del cuadrado, aplicando la fórmula".

La redacción anterior muestra, en primer lugar, algunas afirmaciones que no son precisas y rigurosas. Así, *"Hallar el área mediante el teorema de Pitágoras"*, no es una afirmación cierta. El teorema de Pitágoras relaciona la medida de los lados (catetos e hipotenusa) o la superficie de los cuadrados que podemos formar con ellos.

Pero al mismo tiempo indica dificultades claras para discernir entre una estrategia concreta para un problema específico y una estrategia general para problemas similares.

Así, podemos encontrar:

> "Usamos el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$. Con el mismo averiguamos el valor de los lados del cuadrado. Multiplicando un lado por el otro obtenemos el área".

Que son cuestiones generales pero sin relación específica con las figuras del problema y sin unir específicamente las proposiciones entre sí.

También resulta interesante la falta de rigor en el uso de los símbolos. Así, por ejemplo, pueden utilizar para calcular el valor del lado del cuadrado la expresión $h^2 = c^2 + c^2$ y cambiar la letra 'h' por la 'l' para significar la expresión del área del cuadrado.

3. DESARROLLO DE LA TERCERA FASE DEL MODELO GENERAL

La tercera fase del Modelo General se refiere al desarrollo de las diferentes estrategias que hayamos podido diseñar. Es un paso importante que nos llevará a la solución del problema y en el que fijaríamos algunas características necesarias. Así, se deberán registrar todos los pasos a seguir y que han debido de establecerse en el diseño de cada una de las estrategias. Es importante que los resolutores sepan explicar y controlar en todo momento cada uno de los pasos seguidos hasta alcanzar la solución. Y, finalmente, se debe actuar con orden, rigor y precisión en el manejo de los conceptos y procesos como norma para un buen desarrollo matemático. Tener en cuenta estas cuestiones parece importante para llegar a la solución del problema evitando errores y equivocaciones. Por ello, parece oportuno que los estudiantes las valoren, lo que es responsabilidad del profesorado.

En nuestro caso sólo vamos a resolver el problema siguiendo tres procedimientos.

– Desarrollo de la Estrategia 1.

  La diagonal del cuadrado/rombo ABCD viene dada en el enunciado del problema y vale 6 cm. Aplicamos la expresión del cálculo del área de un rombo.

  $A = (6 \text{ cm.} \times 6 \text{ cm.}) / 2 = 36 / 2 = 18 \text{ cm}^2$

– Desarrollo de la Estrategia 2.

  A partir del valor de la hipotenusa en el triángulo rectángulo ABD, calculamos el valor del cateto que coincide con el lado del cuadrado.

  $d^2 = l^2 + l^2$ $\quad 6^2 = l^2 + l^2 = 2\ l^2$ $\quad 36 = 2\ l^2$ $\quad 18 = l^2$ $\quad = \sqrt{18}$
  El lado del cuadrado vale $\sqrt{18}$ cm.

El área del cuadrado es l^2. A = l^2 = √18 cm x √18 cm = 18 cm^2.

Solución: El área del cuadrado mide 18 cm^2

Cuando los EMP resuelven el problema hallan la raíz de 18, obteniendo un resultado con expresión decimal. Luego lo vuelven a elevar al cuadrado por lo que el resultado no da exactamente 18 cm^2.

Resulta curioso observar como la falta de control de los pasos intermedios, en relación al objetivo del problema, hace que la mayoría de los resolutores lleguen hasta el final del proceso sin darse cuenta que en un momento del desarrollo ya habían calculado el valor de $l^2 = 18$, que es la solución.

– Desarrollo de la Estrategia 3

Cuando consideramos el triángulo AOB del que hemos observado que es isósceles y rectángulo y cuyos catetos miden 3 cm. Consideramos ambos catetos como la base y altura del triángulo y aplicamos la nueva expresión para calcular el área de los triángulos rectángulos. El cuadrado contiene cuatro veces este triángulo.

4. DESARROLLO DE LA CUARTA FASE DEL MODELO GENERAL

Finalizada la fase tres, podríamos señalar que el problema estaría resuelto. Sin embargo, plantear y resolver problemas de matemáticas en primaria tiene la finalidad de trabajar matemáticas y de aprender a resolver problemas. Es por ello, que se hace necesario la cuarta fase de revisión del proceso y de la solución para aprender del trabajo realizado. Y favorecer la transferencia de los conocimientos aprendidos a otras situaciones y problemas posteriores.

Podemos iniciar esta fase releyendo el problema y comprobando que todos los resultados de los diferentes procedimientos son iguales, y viendo la consistencia de la solución obtenida con la situación planteada. No es inusual que, en secundaria, nos encontremos con soluciones de problemas de áreas con resultados negativos o números decimales cuando la solución trata de personas.

Por otra parte, en el currículo se indica "... la toma de conciencia de los procedimientos mentales y las estrategias que utiliza para resolver problemas, constituye un fuerte motor del desarrollo cognitivo" (Decreto, 2007a, p. 7840). Por ello parece oportuno revisar, comparar y valorar las diferentes estrategias. Cuando revisamos las estrategias señaladas y preguntamos cuál o cuáles les han resultado más fáciles es usual que hagan referencias a la primera estrategia (d x d/2), aunque reconocen la dificultad de identificar la figura con un rombo. Y, al mismo tiempo, señalan que la estrategia dos, que inicialmente habían pensado la gran mayoría, resulta más complicada por el uso de las raíces cuadradas.

Para ellos es un descubrimiento que para calcular el área de un cuadrado podamos utilizar dos expresiones diferentes. Y que se pueda elegir una u otra en función de los datos que nos aporte el enunciado.

El análisis de las otras tres estrategias nos indica que para calcular el área de una figura podemos descomponerlas en otras más pequeñas, si ello facilita los cálculos. El currículo señala que "se valorará también el empleo de métodos para calcular áreas basados en la descomposición en figuras elementales" (Decreto, 2007b, p. 8112), procedimiento que no es recurso usual en los estudiantes para maestro. Y que, consecuentemente, no reproducirán en sus aulas.

La comparación de los procedimientos 1 y 2 con los procedimientos 3, 4 y 5 nos indica que para calcular el área de una superficie podemos utilizar una formula directa si tenemos los datos para ello, o utilizar un procedimiento de composición, descomposición o complementación si, como en el caso que nos ocupa, podemos calcularla fácilmente.

El análisis de la estrategia cuatro nos lleva a definir una nueva fórmula que, también, les resultará interesante. Así, del uso de la Figura 4 podemos generalizar a todos los triángulos rectángulos la consideración de base y altura para sus catetos, lo que nos lleva a enunciar un nuevo procedimiento para calcular el área de los triángulos rectángulos: "Para calcular el área de los triángulos rectángulos multiplicamos sus catetos y dividimos por dos el resultado".

Siempre debemos preguntar si existen otros procedimientos de solución de los problemas. En este caso existen otras formas diferentes de resolver este problema que se sustenta del uso del método de descomposición/complementación para calcular el área de figuras planas.

Por nuestra parte añadimos una de ellas (Figura 7) que surgió en clase a partir de una doble modificación de la Figura 6. Así, el EM dibujó un cuadrado inscrito (EFGH) cuyo lado vale 3 y es la mitad del cuadrado ABCD.

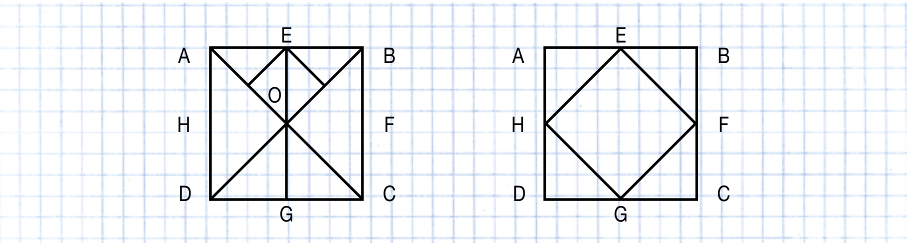


Figura 7. Nuevas líneas y nuevos triángulos (Doble modificación de la figura 6).

La trasferencia de conocimiento a otras situaciones puede plantearse a partir de proponerles que enuncien problemas que presenten situaciones análogas o se resuelvan siguiendo alguno de los procedimientos utilizados en el problema.

Así, es usual que los estudiantes propongan ejemplos como:

"Calcular el área de un hexágono regular de radio 5cm."

La consolidación de los conocimientos alcanzados podría hacerse proponiendo en esta situación uno de estos problemas a la clase.

5. DESARROLLO DE LA QUINTA FASE DEL MODELO GENERAL

En los trabajos que hemos realizado le hemos dado importancia a diferentes aspectos del dominio afectivo en relación a la resolución de problemas (Gil, Blanco y Guerrero, 2006). Estos trabajos nos muestran las dificultades de tipo afectivo que los estudiantes para maestro tienen como resolutores de problemas (Capítulo 1 y 3).

Es por ello que en el modelo propuesto (Capítulo 7) hemos considerado la última actividad señalada en la fase cuatro y esta nueva fase al objeto de reforzar la confianza, autoestima e interés por los problemas. Así, reflexiones acerca de ¿qué he aprendido? ¿he sido capaz de enfrentarme al problema? o autoinstrucciones positivas como *"he sido capaz de resolverlo", "ahora lo encuentro más fácil e interesante"*, etc. parece oportuno señalarlas al objeto de evitar algunos bloqueos ante situaciones similares en el futuro.

Y, para finalizar, les indicamos a los estudiantes los problemas que hemos resuelto, explícita o implícitamente, para justificar el esfuerzo realizado.

- Calcular lo que miden los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 6 cm.
- Calcular el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm.
- Calcular el área de un cuadrado de lado 3 cm.

BIBLIOGRAFÍA

— BLANCO, LJ. Errors in the Teaching/Learning of the Basic Concepts of Geometry. International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 2001, p. 2-11. Recuperado de: http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/lberrgeo.pdf.

— BLANCO, LJ; GUERRERO, E; CABALLERO, A. Cognition and Affect in Mathematics Problem Solving with Prospective Teachers. En The Mathematics Enthusiast, 2013 - Special Issue, Vol. 10, n. 1 y 2, p. 335 – 364. Recuperado de http://www.math.umt.edu/tmme/vol10no1and2/13-Blanco-et%20al_pp335_364.pdf.

— CABALLERO, A; BLANCO, LJ; GUERRERO, E. Problem Solving And Emotional Education In Initial Primary Teacher Education. En The Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2011, Vol. 7, n. 4, p. 281-292. Recuperado de: http://www.ejmste.com/v7n4/EURASIA_v7n4_Caballero.pdf.

— Decreto 82/2007 por el que se establece el Currículo de Educación Primaria para la Comunidad Autónoma de Extremadura. DOE, nº 50 de 3 de Mayo de 2007.

— Decreto 83/2007 por el que se establece el Currículo de Educación Secundaria Obligatoria para la Comunidad Autónoma de Extremadura. DOE, nº 50 de 5 de Mayo de 2007.

— GIL, N; BLANCO, LJ; GUERRERO, E. El papel de la afectividad en la resolución de problemas. Revista de Educación, 2006, n. 340, p. 551–569. Recuperado de http://www.revistaeducacion.mec.es/re340/re340_20.pdf.

— MEC Primaria. Área de Matemáticas. Madrid: MEC, 1992.

CAPÍTULO 10
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS Y TIC.
PROPUESTAS ACTUALES Y PERSPECTIVAS DE FUTURO

Luis M. Casas García y José Luis Torres Carvalho

1. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y TIC

1.1. *Matemáticas y resolución de problemas*

En nuestra vida cotidiana, la resolución de problemas es una de las habilidades que todos utilizamos de forma continua. Planificar, tomar decisiones o gestionar nuestros asuntos, requieren el uso del pensamiento lógico y habilidades de resolución de problemas.

Estas habilidades incluyen procesos tales como el análisis y la síntesis, la predicción, la evaluación o la reflexión, procesos que son habitualmente trabajados en el campo de las matemáticas. Uno de los objetivos de su enseñanza es, precisamente, educar a los alumnos como resolutores eficaces de problemas, que aparecen primero en la construcción de los objetos matemáticos y se pueden aplicar después en diferentes contextos de la vida diaria.

Esta realidad ha sido destacada en numerosos documentos curriculares, tanto nacionales como internacionales (NCTM, 2000; Real Decreto 126/2014) así como en los resultados de la investigación (Blanco, 2007; Blanco y Blanco, 2009; Casas, Luengo, Ramos y Carvalho, 2013; Santos-Trigo, 2008; Schoenfeld, 1985, 1992, 2007), algunos de ellos recogidos en este mismo volumen, y hay una aceptación general de que el primer objetivo de la enseñanza de las matemáticas debe ser convertir a los alumnos en competentes resolutores de problemas.

Pero si queremos que la resolución de problemas sea educativamente eficaz, ha de contribuir a desarrollar determinadas capacidades básicas en los alumnos: leer comprensivamente, reflexionar, establecer hipótesis, planificar y evaluar las estrategias, comprobar resultados y saberlos comunicar.

Y para ello es necesario que la enseñanza de las matemáticas incida en estos procesos planteando a los alumnos verdaderos problemas, pues solamente los que lo sean ayudarán a desarrollar estas capacidades. En caso contrario serán meros ejercicios, útiles, quizá, para desarrollar otras capacidades, pero no éstas a las que nos estamos refiriendo.

1.2. Enseñanza de las matemáticas y TIC

En los últimos años, las TIC, Tecnologías de la Información y la Comunicación, se han introducido en todos los ámbitos de nuestra vida, y, cómo no, en el ámbito de la enseñanza. Pero su utilización merece algunas reflexiones.

La primera de ellas es: ¿para qué han servido en matemáticas las tecnologías de la comunicación antiguas y qué han aportado las nuevas TIC?

Tradicionalmente, la enseñanza de las matemáticas se ha basado en el proceso de la comunicación de conocimientos entre el profesor y el alumno, convirtiéndose en un proceso más o menos unidireccional o bidireccional dependiendo del modelo educativo adoptado: desde un extremo en que el profesor transmite y el alumno recibe la información, hasta un modelo en que el conocimiento se construye de forma interactiva mediante la comunicación entre ambos. En cualquiera de estos modelos, la palabra y el libro han sido instrumentos esenciales en la comunicación.

Desde el momento en que aparecieron las nuevas tecnologías, de forma muy breve podemos señalar que, respecto a lo que nos ofrecían las antiguas, hemos mejorado en dos aspectos:

- Transmisión de información: las nuevas TIC han mejorado la forma tradicional, secuencial, en que el profesor, de forma verbal, o los libros en forma escrita, transmitían la información, y han facilitado el acceso a una cantidad ingente de información al alcance de cualquiera, en una forma visualmente atractiva.
- Herramientas de representación y cálculo: permiten reducir el tiempo que tradicionalmente se dedicaba a tareas rutinarias permitiendo centrarse en otras de más alto nivel.

La segunda cuestión que debemos plantearnos es ¿qué pueden aportar las TIC en el futuro? Señalaremos tres aspectos que nos parecen destacados:

- En primer lugar, está mejorando día a día el atractivo de la información, y sobre todo la forma realística en que se presenta la información, bastante diferente a las opciones presentadas en los tradicionales medios escritos.
- Otra posibilidad es su poder para simular procesos que en otra forma serían lentos o complejos, ayudándonos en la aproximación manipulativa a la solución de un problema, o en su resolución mediante procesos de ensayo y error.
- También nos ofrecen la posibilidad de mejor interacción entre alumnos y con el profesor, encontrar información desconocida, resolver de forma colaborativa un problema o utilizar las cada vez más extendidas plataformas virtuales.

1.3. Modelos de enseñanza y TIC

Debemos hacer, por último, una reflexión común a cualquier otra tecnología introducida en la enseñanza: las tecnologías no son neutras, y su utilización depende del modelo pedagógico que se adopte.

Un modelo pedagógico nuevo no es necesariamente mejor que los anteriores, esto es evidente, y así, otra cuestión que surge es, que si se siguen haciendo las mismas cosas en matemáticas con herramientas TIC que sin ellas ¿para qué incorporarlas? Las tradicionales tecnologías de la información y la comunicación (la palabra, el libro,…) pueden ser utilizadas en muy diversas formas, desde las más creativas hasta las más rutinarias, dentro de distintos modelos pedagógicos (aprendizaje por repetición, aprendizaje constructivista,...) y del mismo modo pueden serlo las nuevas tecnologías.

Frente al modelo de TIC, actualmente está surgiendo un nuevo concepto, el de TAC: tecnologías del aprendizaje y el conocimiento, orientadas dentro de nuevos modelos pedagógicos, hacia los usos más formativos, tanto para el estudiante como para el docente, y cuyo objetivo fundamental se basa en aprender a aprender, mediante el uso de la tecnología. Dentro de este modelo creemos que es en el que se debe orientar la resolución de problemas con apoyo en las tecnologías y en esta línea presentaremos a continuación la situación actual y las tendencias de futuro.

2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y TIC: PROPUESTAS ACTUALES

Actualmente existen, no digamos que muchas, pero sí algunas, propuestas relacionadas con la resolución de problemas en matemáticas presentadas en formato TIC. Intentaremos en este apartado hacer una revisión, que ante todo deseamos que pueda ser útil para el docente de Primaria y de primeros cursos de Secundaria, sobre lo que las Nuevas Tecnologías, y particularmente Internet, nos ofrecen.

En forma sintética, podemos indicar que, actualmente, existen cinco grandes áreas que describiremos a continuación.

- Propuestas teóricas sobre resolución de problemas, entre las que destacan las recomendaciones y guías de resolución de problemas, tanto para profesores como, en algunos casos, para alumnos.
- Herramientas para la resolución de problemas tales como calculadoras, hojas de cálculo o aplicaciones dinámicas que sirven de ayuda en el cálculo o la representación.
- Herramientas que permiten realizar simulaciones de procesos y crear o resolver situaciones matemáticas, como pueden ser las relacionadas con la estadística.
- Herramientas de programación, inspiradas en lenguajes como Logo o Smalltalk, que posibilitan la creación y publicación por los alumnos de aplicaciones interactivas, animaciones, simulaciones, juegos y otros recursos educativos relacionados con contenidos educativos en matemáticas.
- Propuestas de actividades para alumnos, que, en algunos casos se asemejan a las tradicionales, pero que en otros, como veremos, ofrecen alternativas educativamente novedosas.

La mayor parte de los ejemplos que presentaremos a lo largo de este capítulo dan la posibilidad de acceso a través de páginas Web o de instalación y uso en ordenadores, conectados o no a pizarras interactivas digitales. Sin embargo, no podemos olvidar que, actualmente, emergen herramientas de gran calidad técnica, adaptadas o concebidas en origen para dispositivos móviles (tablets o smartphones), habitualmente conocidas como Apps. Estas aplicaciones, dinámicas e intuitivas, aprovechando la simplicidad de funcionamiento de las pantallas táctiles pueden ser de gran ayuda en la enseñanza de la resolución de problemas.

2.1. Propuestas teóricas sobre resolución de problemas

Podemos encontrar, en primer lugar, algunas en forma de libros o artículos publicados en la red, traslación al modelo TIC del modelo tradicional de libro.

En esta línea, podemos señalar, por su interés, el trabajo de Isabel Echenique, disponible en: http://www.edu.xunta.es/centros/ceipisaacperal/system/files/matematicas.pdf

En este trabajo se ofrecen recomendaciones teóricas para la enseñanza de la resolución de problemas, clara y bien sistematizada, dirigida a profesorado de Primaria, así como una propuesta de taller de resolución de problemas para los cursos de este nivel educativo.

En una línea distinta, otras páginas presentan problemas para ser trabajados en el aula, ofreciendo recomendaciones para su resolución. La mayor parte de ellas se centran en una tipología concreta de problemas, los llamados problemas aritméticos escolares, que son los que, con diferencia, aparecen más frecuentemente.

En Educación Infantil encontramos alguna propuesta de este tipo de páginas, como la que nos ofrece el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte: http://ntic.educacion.es/w3/recursos/primaria/lengua_literatura/problemas/index.html.

Los problemas propuestos en esta página se centran sobre todo en la comprensión lectora de los enunciados.

Para el nivel de Primaria, consideramos interesante la página de José M. de la Rosa Sánchez (Figura 1): http://www.actiludis.com/.

Figura 1. Actiludis (José M. de la Rosa Sánchez).

En su sección "Teoría de Problemas", ofrece sugerencias interesantes para la enseñanza de problemas aritméticos escolares. Se centra, sobre todo, en explicar la tipología de los problemas, y en su adecuada graduación para su enseñanza.

Si nos centramos en la resolución de problemas en Secundaria, encontramos páginas como la desarrollada por la Consejería de Educación de Extremadura (Figura 2): http://conteni2.educarex.es/mats/11813/contenido/

En ella se ofrecen tanto propuestas de actividades para desarrollar en línea, como recomendaciones a los alumnos para su resolución.

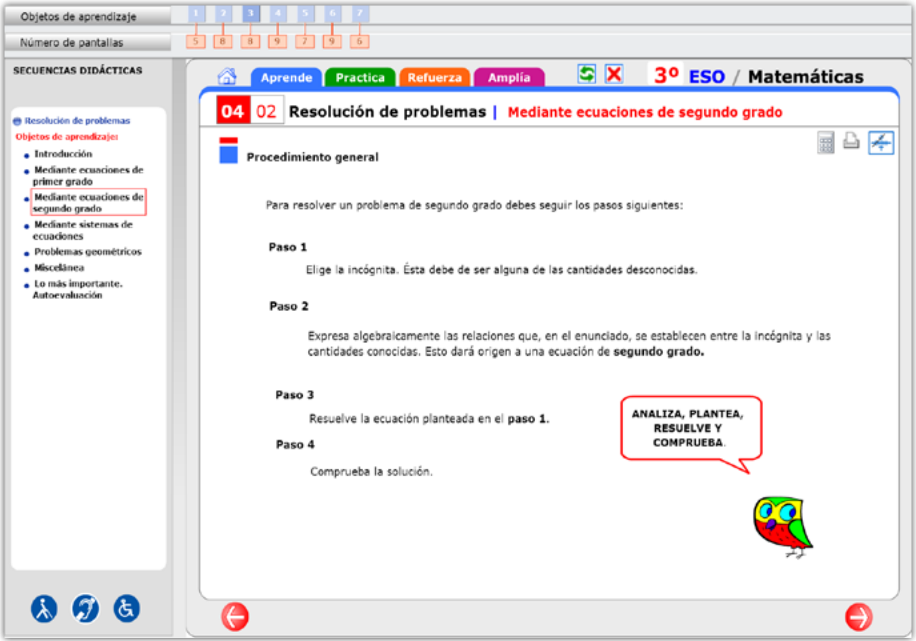


Figura 2. http://conteni2.educarex.es/mats/11813/contenido/

2.2. Herramientas para la resolución de problemas

La red ofrece, desde hace bastante tiempo, distintas herramientas para trabajar la resolución de problemas. Entre ellas, podemos diferenciar cinco grupos:

Herramientas de cálculo y representación gráfica

Una muestra de estas páginas es la de Mariano Real Pérez (Figura 3), http://www.wikisaber.es/ComunidadWiki/ContenidosCompartidos/LObjects_Shared/Pitagoras/apoyo/bloques/herrami/herrami.htm

Figura 3. ∏itágoras Herramientas. Recursos para las matemáticas (Mariano Real Pérez).

En ella disponemos de herramientas como calculadoras, numéricas y gráficas como ayuda para la resolución de problemas.

Herramientas de autor

Un buen número de estas herramientas permiten, actualmente, de una manera relativamente sencilla, la realización de actividades para alumnos: puzzles, actividades de relacionar o completar, preguntas de elección múltiple, etc. Entre estas herramientas podemos citar *JClic*, *Cuadernia*, *Hot Potatoes*, *eXelearning*, *PHPWebQuest*, entre otras.

El problema común a todas estas aplicaciones, en su estado actual de desarrollo es, en nuestra opinión, que, aunque ofrecen posibilidades de presentar información o distintos formatos para que los alumnos respondan a las actividades propuestas, siguen estando, por el momento, limitadas a pocas alternativas: completar, elegir la respuesta correcta, seleccionar o relacionar, y comprobar la respuesta dada por el alumno.

Sin embargo, empiezan a surgir proyectos de desarrollo de herramientas que intentan colmatar estas lagunas introduciendo nuevas posibilidades, como la autorregulación del proceso de resolución, la mayor interacción usuario-máquina o entre usuarios, una mayor variedad de modelos de problemas y más flexibilidad en su forma de representación y resolución. En este tipo de entornos la resolución de problemas se desarrolla a través de prácticas de enseñanza colaborativa inspiradas en el constructivismo.

Algunos ejemplos de entornos con estas características son las aplicaciones *ARILAB2* y *ARI@ITALES* (http://www.itd.cnr.it/arilab/_english/) creadas por los investigadores Rosa Maria Bottino y Giampaolo Chiappini (Bottino, 2007; Bottino y Chiappini, 2002).

La aplicación *ARILAB2* (Figura 4) está compuesta por un área del profesor, un área del alumno, un área de comunicación y una hoja de resolución de los problemas con las siguientes herramientas: Billetes y monedas, Ábaco, Calendario, Recta numérica, Hoja de cálculo, Gráficos, Números, Operaciones aritméticas, Fracciones y Manipulador simbólico.

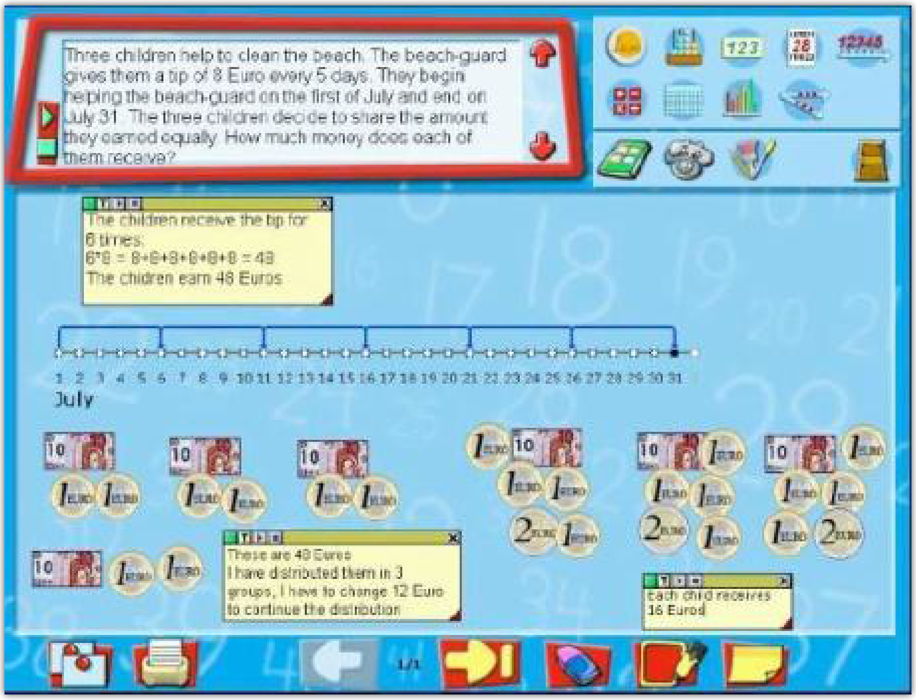


Figura 4. Aplicación ARILAB2 (Rosa María Bottino y Giampaolo Chiappini).

Herramientas dinámicas

En este grupo incluimos aquellas aplicaciones que simulan herramientas reales aunque con mayores potencialidades. De este modo permiten abordar la resolución de problemas, por ejemplo geométricos, de un modo interactivo.

En este tipo de herramientas, una de las que más se han extendido es *Geogebra* (Figura 5), un potente programa de matemática dinámica que ofrece recursos para que los alumnos puedan trabajar, permitiéndoles la creación de construcciones y modelos para exploración interactiva, no sólo en geometría, sino en álgebra, cálculo o estadística. Accesible en www.geogebra.org.

Permite también a los profesores crear páginas web interactivas y compartirlas con otros profesores de todo el mundo. Muchas de ellas están disponibles en http://www.geogebratube.org/.

En una posición intermedia entre los productos creados con herramientas de autor y las herramientas dinámicas propiamente dichas, hay también recursos dedicados a la enseñanza de la Geometría, como los disponibles en el portal *Educarex* (Figura 6), de la Junta de Extremadura:

http://contenidos.educarex.es/mci/2004/18/ o http://contenidos.educarex.es/mci/2007/24/

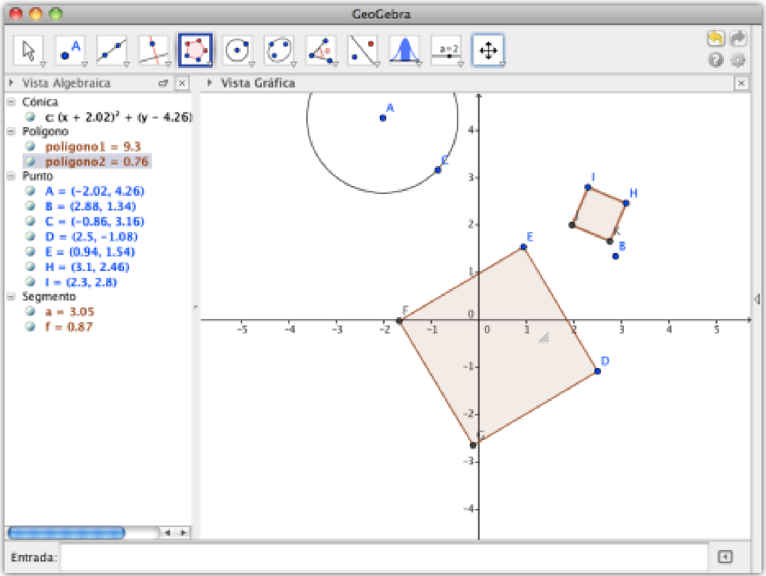


Figura 5. Herramienta dinámica Geogebra (www.geogebra.org).

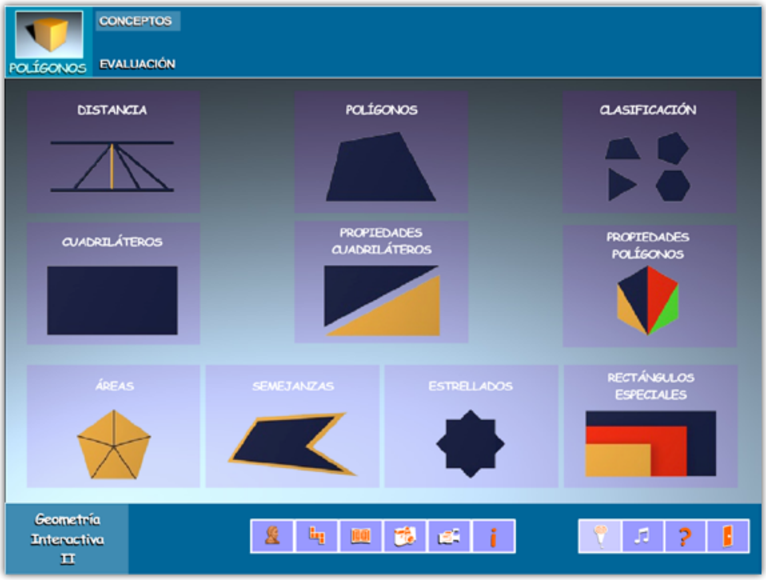


Figura 6. Educarex (Junta de Extremadura)

Dirigidas a la enseñanza Primaria y a los primeros niveles de Secundaria, estas páginas, elaboradas por Cipriano Sánchez y Luis M. Casas, presentan a los alumnos problemas y actividades de Geometría que pueden ser resueltos mediante la utilización de herramientas dinámicas.

ÍNDICE

Herramientas para simulación

Estas herramientas permiten simular procesos que, de otra forma, serían difíciles de reproducir, de manera que apoyan la resolución de problemas y la adquisición de conceptos matemáticos proporcionando a los alumnos situaciones de simulación, ensayo y error.

Como ejemplo de este tipo de herramientas proponemos la página de Juan García Moreno, el Laboratorio virtual de Azar y Probabilidad (Figura 7): http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/index.html

Figura 7. Laboratorio Básico de Azar, Probabilidad y Combinatoria (Juan García Moreno).

Dirigido a los últimos ciclos de Primaria y los primeros cursos de Secundaria, es un recurso multimedia en forma de página web, que ofrece multitud de instrumentos interactivos, que permiten una metodología basada en la experimentación.

Herramientas de programación

En la categoría de las herramientas de programación incluimos aplicaciones como Scratch, Kodu o Squeak. A través de la creación de proyectos colaborativos basados en estas herramientas, los alumnos pueden desarrollar su capacidad de resolución de problemas, su capacidad de comunicar matemáticamente, el pensamiento computacional, así como explorar importantes nociones de lógica y matemática.

Scratch es un lenguaje gráfico orientado a objetos y eventos, inspirado en el lenguaje Logo, que a través de un interfaz muy intuitiva y sencilla posibilita la creación de actividades interactivas, animaciones, simulaciones, juegos, música y arte, que pueden ser compartidas en la Web. Los programas son montados a partir de bloques a semejanza de lo que hacemos con las piezas de Lego. Cada bloque del lenguaje contiene instrucciones separadas pero que pueden ser agrupadas libremente como si los bloques se encajaran.

A través de la página de *Scratch* (http://scratch.mit.edu/) se pueden explorar o modificar proyectos ya existentes, crear nuevos proyectos o interactuar con la comunidad mundial de utilizadores de Scratch para obtener o compartir ideas.

Kodu (http://www.kodugamelab.com/), es un nuevo lenguaje de programación visual hecho específicamente para la creación de juegos, desarrollado por *Microsoft Research*, para usuarios del sistema operativo *Windows* o de la consola XBOX. Parte de la idea de que al crear videojuegos los jóvenes están involucrados en actividades creativas y desarrollan competencias en distintas áreas de conocimiento, concretamente competencias lógico-matemáticas.

Kodu permite también diseñar mundos en tres dimensiones a partir de objetos configurados previamente por el programa sin una sintaxis compleja. Cada uno de los objetos puede ser configurado y programado con base en condiciones y secuencias.

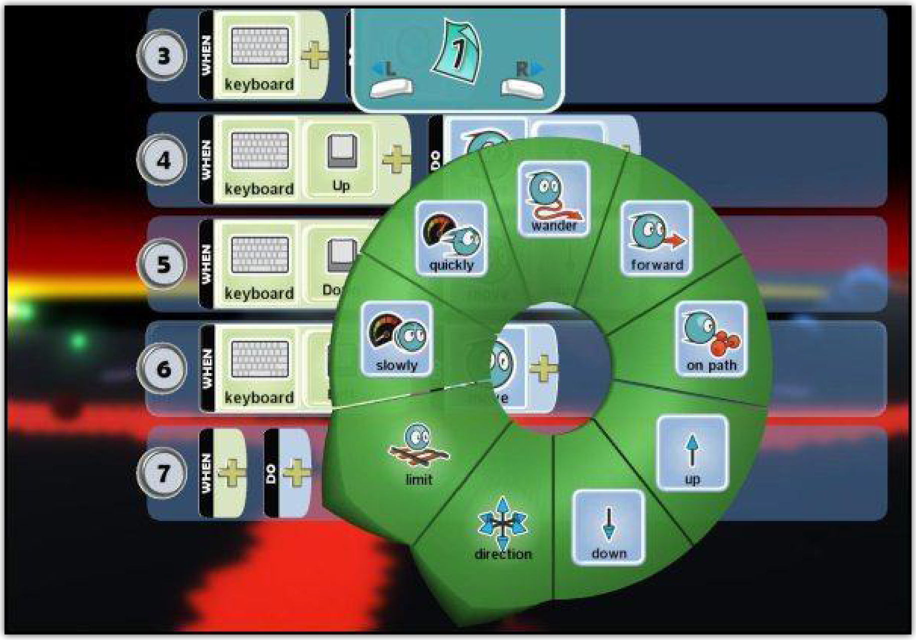


Figura 8. Kodu.

Squeak (http://www.squeak.org/) es una moderna herramienta open source, con todas las funciones y el ambiente de programación del lenguaje *Smalltalk*. Esta herramienta pretende, a partir de varios medios de expresión (texto, video, sonido, música, gráficos 2D, gráficos 3D, etc.) ser el soporte para el desarrollo de nuevas aplicaciones multimedia educativas.

Como todas las herramientas que se incluyen es esta categoría, está destinada a ayudar a los alumnos a cambiar su forma de aprendizaje y a "aprender creando". *Squeak* responde a una visión de la tecnología como instrumento al servicio del "aumento de la inteligencia humana", procurando ayudar a los alumnos a comprender y valorar el mundo de una forma diferente. Alan Kay, el principal promotor del proyecto *Squeak* que comenzó en *Apple* y continuó desde *Walt Disney*, colaboró estrechamente con Seymour Papert, discípulo de Piaget y creador de Logo, en el MIT.

2.3. Propuestas de actividades

En cuanto a las propuestas de problemas que podemos encontrar en la Red, naturalmente es imposible hacer un recuento exhaustivo de todas ellas. Podemos, sin embargo, presentar algunos ejemplos significativos, señalando los más destacados en función de los distintos niveles o áreas a os que estén dirigidos.

Por lo general, y como característica común a muchas de estas propuestas, podemos decir que, más que ante auténticos problemas (Ver capítulos 5 y 12), en su mayor parte encontramos propuestas de ejercicios, de distinto tipo y dificultad.

Problemas aritméticos escolares

La mayor parte de las propuestas están, como indicábamos, dirigidas a la resolución de problemas aritméticos escolares. Suelen aparecer como colecciones de problemas escritos, organizados por niveles de dificultad, por edades o por tipología de problemas, aunque también encontramos páginas que presentan estos problemas y permiten resolverlos directamente en red. Estas páginas suelen estar organizadas en función del tipo de operación que se debe emplear para resolverlos (problemas de suma, de resta,…) o bien, aunque esto es menos usual, según su estructura semántica (problemas de cambio, de combinación,...) que son considerados en el capítuo 9.

Una tendencia bastante repetida es la oferta de páginas que se limitan a presentar en formato digital los clásicos problemas escolares que se planteaban en formato papel, sin aportar mucho más que un soporte diferente para la propuesta, como http://www.tinglado.net/?id=problemas-elementales (Figura 9). En estos casos, las Nuevas Tecnologías ofrecen poco que no ofrecieran antes los libros o la exposición por parte del profesor.

En cuanto a la interacción con el alumno, en la mayor parte de ellas, la tarea que se pide al alumno es escribir o seleccionar la respuesta correcta y comprobarla.

Un ejemplo prototípico de ello es la página http://www.usaelcoco.com/ (Figura 10) en la que se presentan varias secciones, que proponen problemas aritméticos de distinta tipología, agrupados con base en criterios poco definidos. Evalúa si la respuesta es correcta y, en algunos casos, ofrece información de apoyo a la resolución de los problemas.

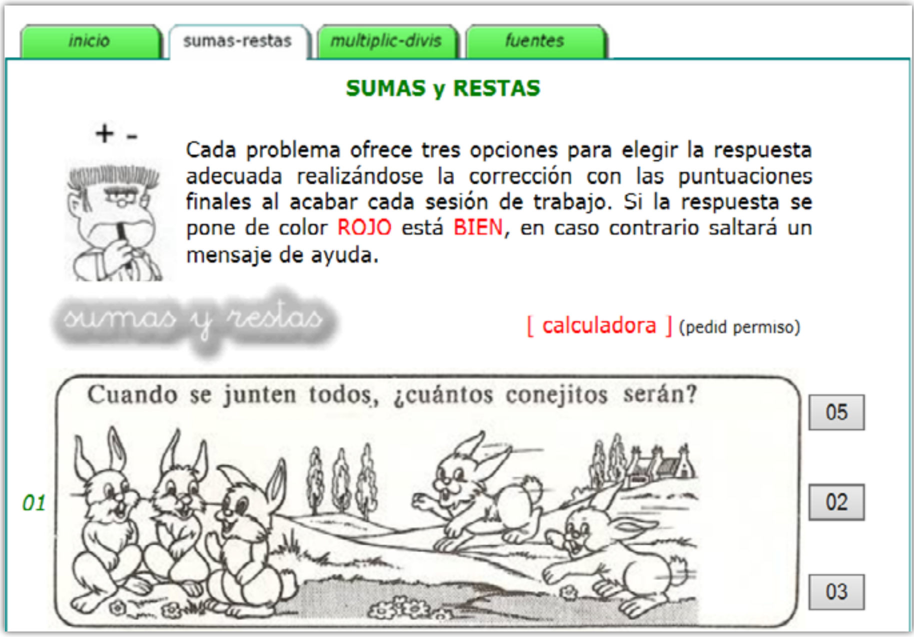


Figura 9. El tinglado.

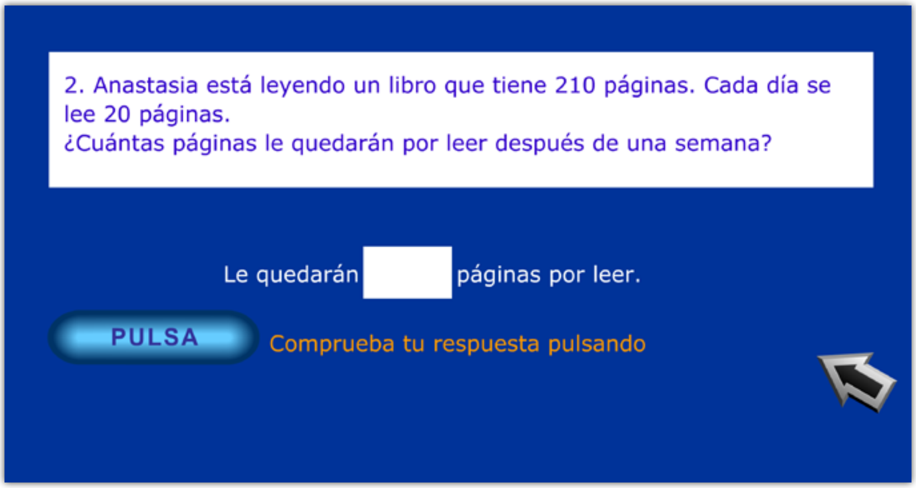


Figura 10. Usa el coco.

Otras páginas, como la de *GenMagic* http://www.genmagic.net/educa/course/view.php?id=3 (Figura 11) proponen problemas que, aunque en contenido no difieren de los tradicionales, presentan la información en forma distinta de la puramente textual (Ver capítulo 6).

Figura 11. GenMagic.

Prácticamente todas las aplicaciones que hemos visto coinciden en que, además de que sólo contienen los tradicionales problemas aritméticos escolares, son bastante sencillas, tanto en lo referenta a su diseño como al modelo didáctico subyacente, pues responden al modelo conductista de refuerzo de los aciertos/errores del alumno. Incluimos varias de ellas al final de este trabajo como Anexo.

Otra tipología de problemas

Algunas páginas incluyen, además de los clásicos problemas aritméticos, otros tipos de problemas. Por ejemplo *Winmates*, http://www.winmates.net/proble/pisaged/pisaged0.php (Figura 12) aunque con una presentación poco atractiva, ofrece una sección de problemas, que en nuestra opinión los más interesantes son los destinados a alumnos de 6 a los 16 años (Enseñanza Básica y Secundaria Obligatoria).

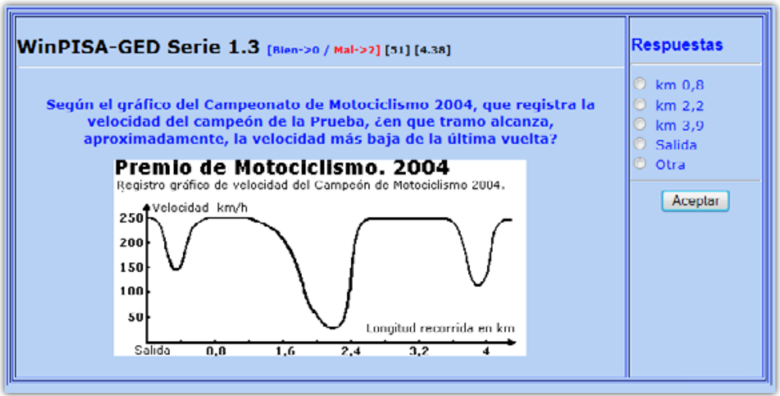


Figura 12. Winmates.

Llama la atención la denominación que emplea como "problemas tipo PISA", pues recoge el tipo de tareas que suelen incluirse en esta prueba de evaluación internacional. Y llama más aún la atención que esta modalidad sea poco frecuente en los materiales mostrados anteriormente.

En la línea de *Winmates*, pero con significativas diferencias en cuanto a la modularidad, flexibilidad, aleatoriedad y dinamismo de los modelos de problemas, encontramos la aplicación *Pmate* (http://pmate.ua.pt/) (Figura 13) del Proyecto Matemática y Enseñanza, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Aveiro (Portugal). Se trata de una aplicación que genera ejercicios y problemas basados en una estructura modular de enunciados y argumentos.

Los modelos de problemas creados en PmatE presentan formulaciones diferentes pero con la misma estructura y los mismos objetivos, lo que permite que distintos alumnos trabajando sobre el mismo modelo, en ordenadores diferentes, tengan siempre concretizaciones distintas del problema. Los modelos son creados y clasificados con base en temas, objetivos didácticos y niveles de dificultad (Carvalho, 2011).

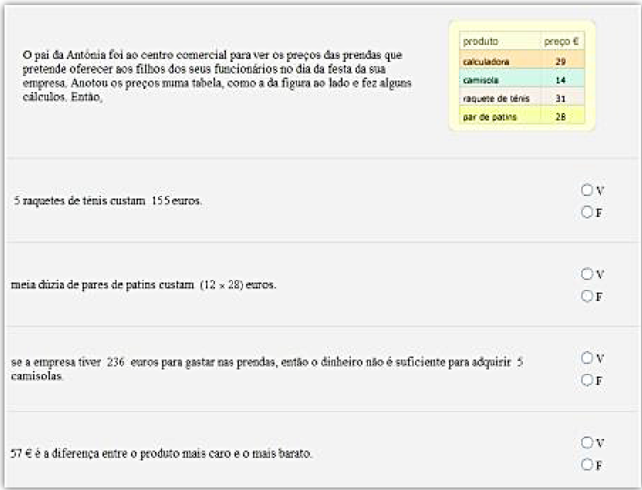


Figura 13. Pmate (Departamento de Matemáticas de la Universidad de Aveiro, Portugal).

La página de Juan García Moreno titulada "Resolución de Problemas – Metamodelos TIC" (Figura 14), de muy buena calidad técnica, como todos sus productos, tiene una concepción totalmente distinta, ya que presenta otro tipo de problemas:

http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/

Esta página presenta problemas aritméticos escolares, geométricos, de razonamiento lógico, o de búsqueda exhaustiva, y los agrupa en torno a seis clases o "metamodelos" (García Moreno, 2011). Propone no sólo distintos tipos de problemas, sino soluciones guiadas y sistemas de ayuda al alumno. Las distintas alternativas para presentar datos o responder a los problemas planteados son sumamente variadas: introducir números, completar textos, seleccionar o desplazar elementos, construir figuras, etc. Los contenidos muy bien adaptados para alumnos de Primaria, no coinciden con los habitualmente propuestos en los libros de texto (Figura 15).

Figura 14. Resolución de Problemas – Metamodelos TIC (I) (Juan García Moreno).

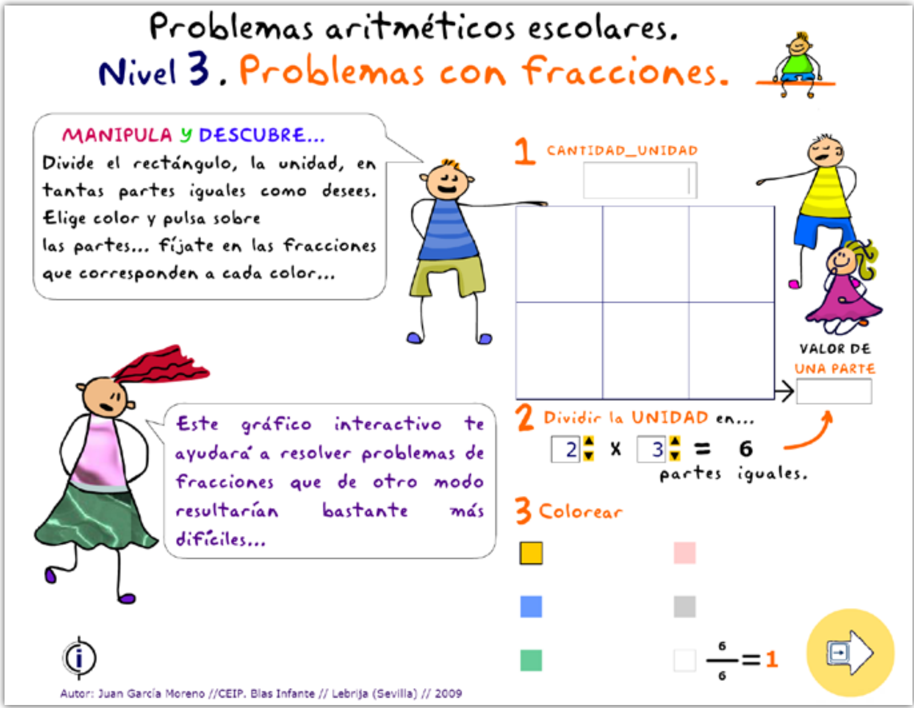


Figura 15. Resolución de Problemas – Metamodelos TIC (II) (Juan García Moreno).

La página presenta, por otra parte, unas guías didácticas sencillas y sumamente interesantes en las que se describen pormenorizadamente el contexto y los contenidos de la aplicación, objetivos que se persiguen y se hace referencia a su interés didáctico. Como se puede constatar, las aplicaciones propuestas presentan una enorme variedad de procedimientos de resolución: insertar números, completar texto lineal y texto organizado en tablas (con completado asistido y corrección instantánea), seleccionar elementos de la pantalla, desplazar elementos gráficos, desplazar elementos textuales o gráficos, realizar pesadas en una balanza virtual con funcionamiento realista, argumentar sobre imágenes y modelos dinámicos que expresan relaciones cuantitativas, trazar líneas y caminos, construir, dibujar, componer y descomponer (cortar) figuras, etc. (García Moreno, 2011)

Escenarios y Proyectos

Una de las alternativas para la enseñanza de la resolución de problemas que consideramos más interesante es la que podemos agrupar bajo la denominación de Escenarios, Proyectos o Casos. Por tales se entienden representaciones preparadas por el profesor, alrededor de un tema significativo, organizadas didácticamente con un guion que permita dirigir la reflexión e indagación del alumno y contrastarla con las de sus compañeros (Azcárate y Cardeñoso, 2011). Este tipo de trabajo supone un reto para los alumnos, pues acostumbrados a resolver problemas aislados, deben afrontar diferentes procedimientos y decidir soluciones adecuadas que implican más de un contenido.

En ellos se les propone entornos de aprendizaje activo, implicándoles en actividades auténticas de investigación, en lugar de introducir los conceptos y técnicas descontextualizadas, o aplicadas únicamente a problemas tipo. De esta forma, pueden poner en práctica los conceptos adquiridos, en casos concretos, contextualizados, situaciones globales que permiten el desarrollo de las diferentes fases de la resolución de problemas.

Una de las propuestas de este tipo es la presentada en

http://www.ersilia.org/uds_mates/wb_udmates_es/src/index.html (Figura 16).

Figura 16. Unidades Didácticas para el aprendizaje de matemáticas en primaria.

En ella se trabajan distintas situaciones problemáticas a partir de situaciones realísticas (una granja, un restaurante, etc.) que el alumno debe resolver.

También se presentan problemas utilizando la metodología de escenarios en la página http://www.genmagic.org/mates1/mercat1c.swf . En la situación presentada en la Figura 17 se simula la tarea de comprar en el mercado. En cada actividad el alumno dispone de un valor en dinero que puede utilizar para comprar las cantidades de artículos indicados. El alumno tiene que estructurar la información, calcular los precios particulares, los finales y los cambios solicitados en la situación.

Figura 17. GenMagic.

Mediante el uso de esta propuesta didáctica, se han desarrollado interesantes experiencias en el ámbito de la resolución de problemas estadísticos con datos reales y simulaciones de fenómenos. Se trata de desarrollar el razonamiento estadístico como herramienta de resolución de problemas y no como fin en sí mismo (Batanero y Díaz, 2005).

En esta línea están los proyectos estadísticos propuestos por la Consejería de Educación del Gobierno de Canarias en (Figura 18):

Figura 18. Estadística en Primaria.

http://www3.gobiernodecanarias.org/istac/webescolar/primaria.php

También para Primaria, son interesantes los ejemplos en forma de proyectos, en la página: http://estadistica2013.unizar.es/?q=node/106.

3. EL FUTURO: APRENDIZAJE COLABORATIVO, RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y TIC

Como hemos tenido ocasión de comprobar en las páginas anteriores, buena parte de las propuestas de resolución de problemas y TIC hacen un uso que reproduce el que se podría haber hecho con tecnologías anteriores (libros, pizarra, …) y utilizan propuestas metodológicas (aprendizaje por repetición, aprendizaje basado en procesos de estímulo / respuesta, …) que no difieren en nada de los tradicionales.

Por otra parte, ninguna de ellas hace uso de una de las mayores potencialidades de las tecnologías: su capacidad para establecer comunicaciones.

Podemos aprovechar estas potencialidades de las TIC llevando a cabo actividades colaborativas que difieren de las que se realizan con el uso de las metodologías tradicionales y ofrecen nuevas posibilidades para el desarrollo cognitivo de nuestros alumnos.

Ejemplos de este tipo de trabajo son los propuestos ya en 2002 por Gómez García en su trabajo de Tesis disponible en http://biblioteca.ucm.es/tesis/edu/ucm-t26874.pdf. En ella se hace un repaso de tecnologías que pueden ser aplicadas para trabajo colaborativo y se proponen ejemplos de aplicación de estas tecnologías en el aula, para resolver, mediante aprendizaje colaborativo, problemas propuestos a los alumnos.

Un magnífico ejemplo, más actual, de trabajo en esta línea, no sólo por su realización práctica, sino por sus reflexiones para la enseñanza, es el que propone el "Proyecto Clepsidra", del profesor Carlos Morales Socorro (Morales, 2013):

http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/abriendolaescuela/files/2011/10/I-2008-clepsidra.pdf

En este documento se muestra cómo, a partir de la investigación sobre la construcción de un reloj de agua, una clepsidra, se potencia la búsqueda de información para resolver problemas y el trabajo comunicativo de los alumnos. Es muy interesante, además, la integración que se hace de nuevas tecnologías disponibles para los alumnos.

En este mismo documento se presenta también el "Proyecto Galileo": http://www.youtube.com/watch?v=_3MhsLyvz0g. Consiste en estudiar las funciones cuadráticas mediante el estudio del proceso de caída libre de un objeto. En ambos proyectos se presenta la integración de recursos para buscar información, o para comunicarla (por ejemplo Google Docs) así como programas específicos de matemáticas (por ejemplo Geobebra u Open Office Calc) libremente disponibles en la Red.

El futuro de la resolución de problemas mediante el uso de las TIC camina, en nuestra opinión, en la misma dirección de las propias tecnologías: el adecuado uso de las TIC como auténticas TAC, esto es, tecnologías para el aprendizaje y el conocimiento. El futuro no está en las propias TIC, sino en el cambio en su utilización. La idea clave es que deben servir para presentar contenidos o reforzarlos, pero además para apoyar nuevas dinámicas de trabajo, que incluyan la exploración, la creación y la comunicación.

- El **Software Libre** Específico de Matemáticas (MAXIMA, SAGE, ...) y el Genérico de Ofimática (OpenOffice) puede integrarse en el aula tal y como lo haría en un entorno real de investigación científico-matemático. Por tanto, no se hace un uso académico del mismo sino que se reproduce su uso real, lo cual es un detalle a tener muy en cuenta.

- Los **materiales manipulables** o, simplemente, los **objetos reales** deben estar presentes en el aula. El Profesorado de Idiomas habla de "**Realia**" para referirse a esta misma idea... El alumnado debe medir, comprobar, experimentar, ... y, posteriormente, construir modelos matemáticos y extraer conclusiones.

- Si queremos que nuestros alumnos/as disfruten con la Matemática, debemos transmitirles y **DEMOSTRARLES** lo que es en realidad: **¡La Reina de las Ciencias!**

Figura 19. Proyecto Clepsidra: Agua, Matemáticas y Tiempo (Morales, 2013)

Desde hace algunos años se emplea el término Web 2.0, para aludir a las aplicaciones web que permiten tanto acceder a información o a productos creados por otras personas, como también aprovechar sus potencialidades para la creación de contenidos propios y, sobre todo, comunicarlos a otras personas. Esta es la idea con la que se trabaja en la actualidad en los foros de profesores dedicados a la enseñanza de las matemáticas.

La Web 2.0 es considerada en la actualidad como una actitud más que como una herramienta, un cambio de paradigma en la comunicación en la red que transforma la pasividad en la colaboración. Los contenidos son creados en su mayor parte por los usuarios, que a su vez reciben valoraciones de otros usuarios retroalimentando estas aportaciones. La enseñanza y, en particular, las matemáticas no pueden dejar pasar esta oportunidad de trabajar las diferentes competencias a través de blogs, redes sociales, y otras plataformas colaborativas. FESPM (2012, sin paginar)

Del mismo modo, avanzaremos con un nuevo concepto: Matemáticas 2.0 al referirnos a las aplicaciones TIC para la enseñanza de las matemáticas que permitirán además de su utilización pasiva o individual, la participación y la comunicación, en entornos de aprendizaje colaborativo.

Éste, creemos, es el camino hacia el futuro y consideramos que en esta línea han de plantearse las nuevas propuestas de integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación y resolución de problemas.

BIBLIOGRAFÍA

— AZCÁRATE, P; CARDEÑOSO, JM. La Enseñanza de la Estadística a través de Escenarios: implicación en el desarrollo profesional. *Boletim de Educação Matemática*, 2011, vol. 24, n. 40, p. 789-810. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291222113009.

— BATANERO, C; DÍAZ, C. El Papel de los Proyectos en la Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística. En J. PATRICIO ROYO (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas*. Zaragoza: ICE, 2005, p.125-164. Recuperado de: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/ICE.pdf.

— BLANCO, LJ. *Analizar y comprender es el primer paso para resolver problemas y tomar decisiones.* XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Granada del 4 al 7 de Julio de 2007.

— BLANCO, B; BLANCO, LJ. Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. *Números, 2009, n.* 71, p. 75-85. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos_03.pdf.

— BOTTINO. RM. On-line learning networks: framework and scenarios. *Education and Information Technologies*, 2007, vol. 12, n. 2, p. 93-105.

— BOTTINO, RM; CHIAPPINI, G. Advanced Technology and Learning Environments, Discussing their relationships in the Arithmetic Problem Solving. En LD. ENGLISH, (Ed) *The Handbook of International Research in Mathematics Education*. Mahwah-NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2002, p. 757–786.

— CARVALHO, JL. *Estudio de las posibilidades de aplicación a la enseñanza de la Matemática del entorno PmatE: Validación y aportaciones en 1º Ciclo de Enseñanza Básica de Portugal*. Tesis Doctoral. Badajoz: Universidad de Extremadura, 2011.

— CASAS, L; LUENGO, R; RAMOS, JL; CARVALHO, JL. *Resolución de problemas aritméticos elementales: expectativas y resultados.* XVI Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas JAEM. Palma de Mallorca, 2 al 5 de Julio de 2013.

— GARCÍA MORENO, J. *Metamodelos y modelos TIC (I) en la resolución de problemas*, 2011. Recuperado de: http://www.didactmaticprimaria.com/2011/11/metamodelos-y-modelos-tic-en-la.html.

— FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS *Seminario federal "La Tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas".* Universidad de Valencia, 2012. Recuperado de: http://www.fespm.es/Seminario-federal-La-Tecnologia-en.

— GÓMEZ GARCÍA, M. *Estudio teórico, desarrollo, implementación y evaluación de un entorno de enseñanza colaborativa con soporte informático (CSCL) para Matemáticas.* Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid, 2002.

— MORALES C. *El Aprendizaje basado en Proyectos en la Educación Matemática del siglo XXI. Cuaderno de bitácora.* Ponencia presentada en XV JAEM. Palma de Mallorca, 2 al 15 de Julio, 2013. Recuperado de: http://www.oei.es/salactsi/carlosmoralessocorro.pdf.

— NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM, 2000.
— Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero*, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.* Boletín Oficial del Estado, 52, de 1 de Marzo de 2014. Recuperado de: https://www.boe.es/boe/dias/2014/03/01/pdfs/BOE-A-2014-2222.pdf.
— SANTOS-TRIGO, M. On the use of technology to represent and explore mathematical objects or problems dynamically. *Mathematics and Computer Education Journal,* 2008, vol. 42, n. 2, p. 123-139.
— SCHOENFELD, AH. *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press, 1985.
— SCHOENFELD, AH. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: MacMillan, 1992, p. 334-370. Disponible en http://hplengr.engr.wisc.edu/Math_Schoenfeld.pdf.
— SCHOENFELD, AH. Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 2007, vol.* 39, n. 5-6, p. 537-551.

Otras páginas de interés

Páginas que ofrecen ayudas teóricas o dirigidas a la práctica de los alumnos para la resolución de problemas.

La página de José María Sorando Muzás ofrece una interesante reflexión acerca de la resolución de problemas en general: estrategias, enseñanza – aprendizaje y aplicaciones en Educación Secundaria.

http://catedu.es/matematicas_mundo/PROBLEMAS/problemas.htm

Aunque ofrece problemas presentados tan sólo en forma de texto, es interesante la página de José Escudero Martín, que, además de orientaciones sobre métodos y estrategias de resolución de problemas, presenta una buena colección de ellos.

http://platea.pntic.mec.es/jescuder/BLOG-1/Resolucion%20de%20problemas%20matematicos.pdf

Otra página que ofrece orientaciones y guía, de manera sencilla a los alumnos en la resolución de problemas aritméticos escolares es la del C.E.I.P. San José de Calasanz, en Valencia:

http://www.duendecrispin.com/gusanito-de-seda/bertin-matematico.html

También se ofrecen orientaciones sencillas a los alumnos, en la siguiente página, con problemas aritméticos escolares elementales:

http://conteni2.educarex.es/mats/80172/contenido/index.html

Páginas que ofrecen propuestas de problemas para trabajar en el aula.

Entre las páginas que ofrecen colecciones de problemas aritméticos escolares, en un formato similar al de los libros de texto, podemos destacar, además de las señaladas anteriormente, las siguientes:

http://www.polavide.es/Banco_problemas/index.html

http://www.interpeques2.com/trabajos/actividades/problemasmenu.htm

http://www.cuadernosdigitalesvindel.com/libres/fproblemas.php

http://www.cuadernosdigitalesvindel.com/libres/cmates.php

http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/WebC/eltanque/default.htm

http://recursostic.educacion.es/primaria/cifras/web/colegio/colegio.html

También en la misma línea están páginas como la del portal Educarex, de la Junta de Extremadura o, la del Ministerio de Educación.

http://contenidos.educarex.es/mci/2010/42/inicio.html

http://ntic.educacion.es/w3/recursos/primaria/matematicas/porcentajes/index.html#

En esta misma línea, están los de problemas de Olimpiadas Matemáticas que ofrecen Raimundo Alba García y José María Vázquez de la Torre Prieto en:

https://twitter.com/matesymas

Hay también en la Red material que se puede bajar para trabajar la resolución de problemas (de nuevo problemas aritméticos escolares, aunque bien secuenciados e interesantes para Educación Primaria) en formato impreso. Tenemos un buen ejemplo en: http://www.ceipignaciohalcon.es/

También ofrece un generador aleatorio de problemas, aunque más bien son ejercicios, la página en inglés que referimos anteriormente:

http://www.wolframalpha.com/pro/problem-generator/

Dirigidos a tercer ciclo de Primaria, la página: http://milagrotic.blogspot.com.es/search/label/Problemas presenta problemas de todo tipo, con orientaciones para su resolución. Predominan, sin embargo, actividades que son más ejercicios que auténticos problemas.

Del mismo modo, la página: http://www.wikisaber.es/ComunidadWiki/ContenidosCompartidos/LObjects_Shared/Pitagoras/home.htm propone problemas (de nuevo la mayoría, ejercicios) orientados a los últimos ciclos de Primaria y primeros de Secundaria.

Esta página del Ministerio de Educación proporciona numerosos recursos que han sido creados con ayudas del propio ministerio:

http://ntic.educacion.es/v5/web/ninos/los_numeros/

Orientada concretamente a la enseñanza de la estadística, se proponen numerosos enlaces a actividades en la página de la profesora Luisa Mª Arias: http://luisamariaarias.wordpress.com/category/0-3-matematicas/15-estadistica-y-probabilidad/

También se ofrecen propuestas de trabajo en temas concretos en estadística para los últimos niveles de Secundaria, en la página

http://www.estadisticaparatodos.es/taller/taller.html

En la siguiente página, creada a partir de un proyecto europeo, se proponen escenarios para trabajar con estadística, dirigidos a profesores y alumnos de Educación Secundaria http://www.earlystatistics.net/?page=scenarios

CAPÍTULO 11
ACTIVIDADES ESPECÍFICAS PARA PRIMARIA
SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Lorenzo J. Blanco Nieto

1. INTRODUCCIÓN

De manera explícita o implícita, el análisis del currículo (Ver Capítulo 2) y la propuesta de Modelo Integrado de Resolución de Problemas Matemáticos (MIRPM - Capítulo 7) nos sugieren una serie de actividades específicas en las diferentes fases de la resolución de problemas, que servirían a modo de entrenamiento en el aprendizaje para resolver problemas.

Es por ello que, en este capítulo, nos proponemos desarrollar actividades sencillas para centrar la atención y reflexión y, consecuentemente, el aprendizaje de los alumnos en diferentes procesos que son importantes en la RPM y, que en ocasiones, quedan olvidados. La realización de estas actividades permitiría a los alumnos adquirir determinadas rutinas propias del proceso de resolución de problemas, que se sugieren para formular, abordar, planificar, resolver y reflexionar sobre los problemas planteados. Si queremos que los alumnos desarrollen sus propias estrategias, o se familiaricen con procesos de exploración y representación de situaciones, realicen estimaciones o formulen conjeturas, es necesario partir de actividades concretas y motivadoras, adaptadas a su nivel de maduración.

Dado que estas activiades formarían parte del aprendizaje de los alumnos, entendemos que, también, deberían ser parte de la evaluación. Ello ayudaría para que los alumnos le dieran la importancia que merecen.

En las publicaciones sobre resolución de problemas podemos encontrar propuestas concretas o sugerencias que nos facilitarían una relación de actividades que nos ayudaría a alcanzar el objetivo de favorecer el trabajo sobre la resolución de problemas (Borralho y Borrões, 1995; Castro et al, 1995 Ferrero, 1991; Figueras, 1994; García, 1992, 2005; Luceño, 1996).

Ferrero (1991) hace una importante introducción sobre el papel del juego en la enseñanza de las matemáticas. Muestra numerosos problemas de diferentes niveles para practicar en el aula y desarrollar hábitos y actitudes positivas frente al trabajo escolar, estimulando la creatividad, el razonamiento, desarrollo de estrategias o la colaboración entre los resolutores.

Figueras (1994) aporta un trabajo interesante y útil para los maestros de enseñanza primaria y señala diferentes dificultades que los alumnos presentan en la resolución de problemas. Hace referencia a la comprensión de las operaciones y de los enunciados o al procedimiento de solución de los problemas. A partir de ellas, propone una serie de actividades prácticas que ayudarán a desarrollar estrategias personales de resolución. Así, propone siete actividades diferentes donde quiere insistir en el proceso de manipulación, transformación, expresión semántica y representación sintáctica en la resolución de problemas. Por ejemplo, propone pasar de una acción a una operación. Se trataría de escenificar una situación matemática y que los niños expresen la operación representada. O, dada una situación inicial y una final descubrir qué transformación se ha realizado y expresarlo aritméticamente.

También indica actividades concretas a partir de su análisis sobre las dificultades de los alumnos ante los problemas. Ello, le sugiere proponer que a partir de una operación concreta los alumnos redacten el enunciado de un problema que se pueda resolver con ella. O, a partir de un problema y varias soluciones escoger la buena sin hacer operaciones, explicando su razonamiento y elección.

Esta propuesta, nos recuerda la importancia de las actividades para relacionar los conceptos y operaciones aritméticas implicadas en los problemas y las situaciones que estos representan. Hay que recordar que la formulación o invención de problemas es algo que se sugiere en el currículo. En el currículo de Primaria encontramos Unidades de Análisis (Ver Capítulo 2) que nos muestran esta idea: "Formular problemas sencillos en los que se precise..." (Decreto, 2007, p. 7915). O, también: "Invención de problemas a partir de situaciones dadas" (Decreto, 2007, p. 7913).

Es, pues, necesario señalar actividades que provoquen y ayuden a los alumnos en el análisis y comprensión de las situaciones iniciales, o la búsqueda de situaciones lo más reales posibles y la utilización de procedimientos de solución útiles para cuando el alumno esté fuera del contexto escolar. Que les ayuden a entender y generalizar las estrategias.

Consecuentemente, iremos proponiendo situaciones concretas y reflexionando acerca de la idoneidad de su propuesta en la enseñanza obligatoria. El objetivo es proporcionar a los maestros en formación un material concreto que puedan utilizar en las aulas de primaria.

Cuando analizamos el currículo de primaria encontramos múltiples sugerencias sobre actividades que facilitaría alcanzar las competencias señaladas en relación a la resolución de problema:

- *Inventar y formular problemas sobre diferentes contenidos.*
- *Producir e interpretar distintos tipos de información.*
- *Comprensión en detalle de la situación planteada.*
- *Expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones.*
- *Identificar y selecionar las variables y relacionarlas.*
- *Comprender la situación para extraerla información relevante y la que no.*
- *Analizar el enunciado para especificar los datos implíticos e explícitos y el objetivo del mismo.*
- *Representar la situación descrita.*
- *Establecer un plan de trabajo para resolver los problemas.*
- *Elaborar y utilizar instrumentos y estrategias personales.*

- *Verbalizar el proceso seguido y el razonamiento utilizado.*
- *Anticipar/estimar la solución al problema.*
- *Comprobar la solución si se ha encontrado.*
- *Comunicar y valorar los resultados y tomar decisiones.*
- *Evaluar, en cada momento, el proceso seguido.*

Y, finalmente, podríamos señalar la referencia específica a la evaluación de los apectos anteriores.

Por nuestra parte, hemos seleccionados diferentes actividades que ayudarán a los resolutores a reflexionar y considerar algunos factores que intervienen en la resolución de los problemas. Para ello hemos seleccionado algunas activades que hemos considerado teniendo en cuenta diferentes aspectos que resaltamos:

- Que favorezcan el desarrollo de habilidades mentales
- Que sean susceptibles de reflexiones sobre aspectos concretos en relación a la enseñanza de la matemática, en general y sobre la resolución de problemas, en particular.
- Sencillas y con normas claras para entender y ejecutar
- Que puedan se modificadas, y adaptadas, fácilmente, a otros contenidos y niveles educativos.
- Motivadoras, que sorprendan y despierten interés en el resolutor.
- Útiles para los niveles de enseñanza obligatoria y que, por lo tanto, debieran figurar entre las actividades de aula.

2. FORMULAR/INVENTAR PROBLEMAS E INTERPRETAR SITUACIONES

Las actividades que vamos a plantear tienen como objetivo general identificar situaciones que puedan ser resueltas con algún procedimiento matemático lo que permitirá a los alumnos adquirir o reforzar el significado de las operaciones aritméticas en relación a situaciones que puedan presentarse en diferentes contextos (Ver Capítulo 6).

2.1. Inventar o formular problemas que se realicen con distintos algoritmos o procesos

Inventar problemas a partir de otros o que impliquen conceptos y/o procesos matemáticos, permite acercarse a los problemas de otra manera. Se entenderá y reflexionará sobre algunas relaciones entre objetos matemáticos implicados que pasan inadvertidas en los proceso de solución. El alumno podrá observar que no es más fácil inventar problemas que resolverlos.

Para ejemplificar este tipo de actividad vamos a señalar tres contenidos específicos: la multiplicación, las fracciones y las ecuaciones. Esta actividad podría ser resuelta de manera genérica dando situaciones en las que podría utilizarse una operación determinada. Pero, podremos concretarla más si le añadimos datos numéricos concretos. Es este caso, deberán precisar más la aplicación real de las operaciones sugeridas.

Respecto de la multiplicación planteamos las siguientes actividades:

– Enunciar un problema que se resuelva con una operación de multiplicar.
– Enunciar un problema que se resuelva con la operación 23 x 56.
– Enunciar un problema que implique el concepto de doble.
– Enunciar un problema que relacione los números 88 y 22.
– Enunciar un problema cuya resolución implique la suma de fracciones.
– Enunciar un problema cuya resolución implique la multiplicación de fracciones.
– Enunciar un problema que se resuelva con la operación 2/3 x 1/6;
– Enunciar un problema que se resuelva con la ecuación 2x + 10 = 40.

2.2. A partir de una situación concreta, preguntar por el significado de la operación realizada

Podemos plantearle preguntar directamente a los resolutores por la utilidad de realizar una operación que se realiza en una situación concreta. Podremos plantear una misma situación que se resuelve de varias operaciones. Ello, ayudaría a reforzar el significado de las operaciones aritméticas o de conceptos matemáticos puesto que nos permite establecer relaciones interesantes.

Es fácil recordar el origen de la multiplicación como suma de sumandos iguales.

– "Una chocolatina cuesta 60 céntimos, ¿qué averiguamos si multiplicamos tres por 60?".
– "Una chocolatina cuesta 60 céntimos, ¿qué averiguamos si sumamos tres veces 60?".

O recordar relaciones y conceptos aritméticos

– "Si comprobamos que 25 es el cuadrado de 5, ¿qué podemos decir y escribir de la relación entre los números 5 y 25?"

Y utilizar estas relaciones para enunciar un problema concreto.

Cuando propongo esta actividad a los estudiantes para maestro les indico que deben encontrar, al menos, 10 relaciones diferentes. En el trabajo de esta actividad, al igual que en otras, aceptamos diferentes formas de expresión lo que nos permite profundizar en el lenguaje matemático.

2.3. A partir de una situación concreta, preguntar por la operación adecuada a la acción

Nos planteamos con este tipo de activiades para generalizar e interiorizar el proceso seguido y el significado de los conceptos y operaciones implicadas. Así, podemos proponer:

– "Si supieras lo que vale un lápiz. ¿Cómo calcularías lo que valen varios?". (Luceño, 1986, p. 140).
– "Si supieras lo que cuestan varios lápices, ¿cómo averiguarías lo que vale uno?" (Luceño, 1986, p. 140).

2.4. Plantear supuestos a partir de una fórmula o expresión matemática

Estas actividades son, especialmente, útiles para comprender el significado en las fórmulas de geometría escolar y las relaciones entre los conceptos implicados.

- "La longitud de la circunferencia es 17 cm. ¿Qué conoceremos si dividimos 17 entre π?".

Es usual que la primera respuesta haga referencia al radio. Pero, de manera inmediata algunos alumnos señalarán, también, al diámetro. De igual manera, si proponemos:

La diagonal de un cuadrado mide 8 cm. ¿qué podemos averiguar a partir de este dato?"

Es interesante comprobar el debate que se produce a partir de esta pregunta buscando conceptos y procesos para utilizar la diagonal como dato inicial. Esta actividad nos puede llevar al 'descubrimiento' de algunos alumnos cuando se indica que podemos calcular el área del cuadrado a partir de las diagonales, mediante la aplicación de la expresión dxd/2 (Ver capítulo 9).

2.5. Redactar enunciados de problemas a partir de determinadas preguntas o cuestiones

Una situación similar a la anterior podemos plantarla a partir de preguntas que pueden surgir de la curiosidad ante situaciones cotidianas. Así, se indaga por situaciones donde la pregunta que se le explicita, tenga sentido.

- ¿Cuántos lápices compró Beatriz?
- ¿Cuántos kilómetros recorrieron?
- ¿Cuál es el volumen del cono?
- ¿Cuál es el volumen del recipiente?

Enunciar un problema cuya pregunta sea "¿Cuál es el volmen del cono?" implica el análisis de la figura y la interiorización de las variables que aparecen en la fórmula del volumen del cono.

2.6. Formular problemas a partir de datos explícitos

Podemos porponerles a los resolutores un conjunto de datos para que ellos sean capaces de plantear situaciones que les ayudarían a formular diferentes problemas. Una sucesión de datos, un dibujo, un gráfico, una tabla, o una sucesión de viñetas pueden ser un buen motivo para desarrollar una historia que implique un problema matemático.

Sabemos que Beatriz tenía 80 cromos y Miguel 45 cromos, formular problemas con esos datos.

A partir de los datos que nos aporta los precios de un kiosko de chucherías (Chicle, 5 céntimos; 1 chocolatina 30 c.; regaliz 20 c.; chupachups, 20 c.) (Figura 1).

Figura 1. Kiosko (http://www.salamancalia.es/2977/empresas-alimentacion/kiosko-chuches.aspx).

La clasificación de los equipos de primera división de fútbol, como origen de preguntas y de formulación de problemas (Tabla 1).

TABLA 1. CLASIFICACIÓN DE EQUIPOS DE FÚTBOL.

	Puntos	**Partidos**				**Goles**	
		J	G	E	P	F	C
1. Deportivo	33	15	10	3	2	26	11
2. Barcelona	31	14	9	4	1	40	15
3. Real Madrid	29	15	9	2	4	25	13
4. Valencia	27	15	7	6	2	21	13
5. At. de Madrid	26	15	8	2	5	16	19

2.7 Analizar una situación para deducir otras ideas

Podemos plantearle a los resolutores actividades específicas con el objetivo de que busquen relaciones entre diferentes variables que aparecen en una fórmula concreta.

- Sabemos que el radio del bidón de Abel mide 5cm. Al bidón no le caben más de 2 litros ¿Qué información utilizamos para obtener tal conclusión? (Castro et al, 1995, 21)
- El lado de la base cuadrada de un depósito mide 2m. Sabemos que en el depósito no caben más de 50 metros cúbicos de agua. ¿Qué podemos averiguar del depósito?
- El radio de la base de un depósito cilíndrico es de 1m. Sabemos que en el cilindro no caben más de 50 metros cúbicos de agua. ¿Qué podemos averiguar del depósito?

3. ANÁLISIS/COMPRENSIÓN DEL ENUNCIADO Y/O SITUACIÓN

Las actividades que proponemos en este apartado tienen como objetivo general fijar la atención de los resolutores en analizar las situaciones planteadas antes de diseñar la estrategia de solución. Comprensión lectora, la traducción de la situación/ problema planteado, atención en la realización de la actividad, análisis del enunciado, significado de los diferentes procesos matemáticos útiles para la resolución de problemas son algunas de las cuestiones que queremos trabajar y que están en la base de errores en la solución de los problemas.

Por ello, consideramos conveniente proponer algunas actividades que llamarán la atención de los alumnos de enseñanza obligatoria que comprenderán la importacia de las cuestiones que hemos señalado, generando hábitos adecuados de resolución de problemas.

Los problemas enunciados necesitarán de una lectura comprensiva del texto en referencia a la situación y a los datos aportados. El análisis de los resolutores requerirá señalar los datos que utilizamos y/o desechamos en cada caso, por ser o no necesarios para constestar adecuadamente. Nos permitirán trabajar sobre los datos necesarios e introducir modificaciones al enunciado para darle sentido a la actividad.

3.1. Reconocer datos mezclados, superfluos o innecesarios a partir de un enunciado concreto

- Rodrigo tiene 2 euros, Miguel 3 euros y Valle 1 euro y 50 céntimos. Rodrigo compra regaliz y se gasta 40 céntimos ¿Cuánto tiene Miguel más que Valle?, ¿Cuánto le queda a Rodrigo?
- Paloma va en automovil de Badajoz a Madrid cuya distancia es de 400 km. Si consume 8 litros cada 100 km, ¿Cuántos litros gastará en 250 km? (Adaptado de Ferrero, 1991).

3.2. Enunciados de problemas donde falten datos o que tengan preguntas inesperadas

Situaciones de este tipo inducen a los alumnos a detenerse ante el enunciado del problema y discriminar los datos, evitando la resolución automática de los mismos.

- Raúl tiene una cuerda compuesta de dos trozos, uno azul y otro rojo. El trozo azul mide 7 metros ¿Cuál es la longitud de la cuerda?.
- Para pagar 7 litros de leche entregamos un billete de 50 euros. ¿Cuánto nos devolverán? (Adaptado de Ferrero, 1991).
- La edad de Abel es el doble de la de su hermana Helia, que es la mitad que la de su primo Iván. ¿cuántos años tiene Helia?
- Hugo se montó en un autobús que recogió 3 pasajeros en la salida, 5 en una parada, 7 en otra, 6 en otra y 8 en la última, ¿cuántas paradas hizo?.

3.3. Enunciados de problemas cuya estructura sugiere algún tipo de procedimiento algorítmico

- Hay 200 metros de mi casa a la pescadería, 300 de la pescadería al colegio. Calcula la distancia de mi casa a la pescadería (Adaptado de Ferrero, 1991).
- Si un niño tarda en ir a la escuela 20 minutos, ¿cuántos minutos tardarán cuatro niños?. (Luceño, 1986).
- Mirian tiene 14 cromos y se gastó 2 euros, ¿Cuántos cromos le quedarán?
- Tengo 20 caramelos y me como todos menos 8, ¿Cuántos me quedan?

En la resolución de las actividades anteriores podemos encontrar que algunos resolutores, en su ansiedad por encontrar la operación aritmética adecuada, plantee un procedimiento aparentemente lógico pero que no se corresponde con la situación planteada. Así en el primer caso pueden resolver 200 + 300; o el segundo con una multiplicación 20 x 4, o con una resta los dos últimos.

Cuando trabajamos en el aula de formación inicial de maestros planteamos de manera reiterada algunas cuestiones para reflexionar sobre las actividades anteriores. Así, formulamos alguna cuestiones para reflexionar:

- "En la situación planteada, ¿está bien formulada la pregunta?"
- "En la situación planteada, ¿qué otras cuestiones podríamos proponer?"
- "¿Qué conceptos y proceso han aparecido en las nuevas propuestas?"

3.4. Análisis de la información dada

Analizar la información dada en el enunciado es necesario en la resolución de problemas. Por ello, sugerimos actividades como las que proponemos, en primer lugar, cuyo resultado sería gratificante para los alumnos. Podemos desarrollar la actividad a modo de cuento, tal como se ejemplifica en la Figura 2.

Actualmente la red ha puesto de moda una actividad que se contaba con reales y pesetas hace algún tiempo, que Paulos (1996) recogió y que adaptamos a los euros y la época actual (Figura 3).

—"Pero no tengo tiempo para la escuela", explicaba Jaime a su madre.

—"Duermo ocho horas diarias que, sumadas, dan 122 días al año, suponiendo que cada día es de 24 horas. No hay clase los sábados, ni los domingos, que suman 104 días por año. Tenemos 60 días de vacaciones de verano. Necesito tres horas diarias para comer, que son más de 45 días al año. Y, al menos dos horas diarias de tiempo libre, que suman más de 30 días al año"

Jaime escribió estas cifras mientras hablaba, después sumó todos los días. La suma daba 361.

Sueño (8 horas diarias)	122 días
Sábados y domingos	104 días
Vacaciones de verano	60 días
Comidas (3 horas diarias)	45 días
Tiempo libre (2 horas diarias)	30 días
TOTAL	361 días

—"Ya ve", continuó Jaime "me deja tan sólo cuatro días para estar enfermo y en cama, y ni siquiera he tomado en cuenta los siete días de feria que tenemos cada año".

El tutor se rascó la cabeza.

—"Algo no anda bien aquí", murmuró.

Figura 2. Ejemplo de cómo desarrollar una actividad a modo de cuento.

Tres hombres se inscriben en un hotel y se instalan en una habitación de 60 euros. Consecuentemente, cada huésped paga 20 euros. Cuando ya están en la habitación, el gerente se da cuenta de que la habitación vale sólo 55 euros y que les ha cobrado de más. Entrega cinco euros al botones para que se los devuelva. Bien sea porque tenía dificultades para dividir 5 entre 3 o, más bien, porque no encontraba las monedas adecuadas para repartir los 5 euros entre los tres hombres, el botones le dio 1 euro a cada uno y se guardó los dos restantes para él. Más tarde, se da cuenta de que cada hombre ha pagado 19 euros (20 euros menos el euro que le ha devuelto). El botones reflexiona y cuenta: '19 euros que ha pagado cada uno por 3 son 57 euros, más 2 euros que me he quedado suman 59 euros'. Ante esta situación el botones baja nervioso ya que no sabe qué ha sido del euro que falta y se lo cuenta al gerente que también queda desconcertado.

Figura 3. Problema de Paulos (1996) adaptado a la época actual.

Este ejemplo y el contexto jocoso en el que usualmente se plantea, muestra las dificultades de expresión y comprensión matemática que muchos ciudadanos tienen. El problema no está en la situación planteada, sino en su presentación oral que orienta hacia la paradoja. Es curioso que este resultado encuentre acomodo en la desconfianza y renuncia de muchos ciudadanos a analizar cuestiones que tienen que ver con las matemáticas y poco autoconcepto para abordar cuestiones matemáticas.

Pero, en ocasiones, también podemos encontrar situaciones interesantes en enunciados tradicionales de los libros de texto. Consideramos que el profesor debe aprovechar esas situaciones para inducir a los resolutores a analizar los enunciados y señalarle la importancia de tal actividad.

Arquímedes nació en el año 212 antes de Cristo y murió en el 287 antes de Cristo. ¿Cuántos años vivió? (Castro et al, 1995, 18).

Al comprar un pantalón de 45 euros, me rebajaron el 115 %. ¿Cuánto me costó?.

Los problemas de Geometría y la búsqueda inmediata de recordar y aplicar la fórmula sugerida, explícita o implícitamente, puede llevar a los resolutores situaciones interesantes para trabajar en aula.

4. SIGNIFICADO DE LOS PROCESOS ARITMÉTICOS Y GEOMÉTRICOS

Uno de los aspectos fundamentales en la enseñanza de las matemáticas es que los aprendices sean capaces de encontrar el significado de los conceptos y de los procesos algorítmicos. Así, podemos hablar de un mismo significado para la operación suma, pero es evidentemente que podemos utilizar diversos algoritmos para resolver una suma. Los dedos que se utilizan a modo de calculadora en una edad infantil (y adulta), diferentes algoritmos escritos según los sistemas de numeración (sistema romano o decimal), el cálculo mental o recursos tecnológicos nos inidican procesos variados para la operación suma.

—¡Una parcela! ¡Voy a comprarme una parcela! —gritó Mateo alborozado y sin soltar el periódico de la mano.

—¿Qué me dices?, ¿te ha tocado el cupón?- dijo Beatriz sorprendida.

—No, aclaró Mateo. Esto es una ganga; piden sólo 6.000 euros. Llamaré inmediatamente a la señora que la vende.

Mientras nuestro futuro propietario marcaba el número de teléfono, Beatriz cogió el periódico y, tras leer atentamente el anuncio, le gritó: "No llames. Esto es una estafa".

¿Es realmente una estafa el anuncio, o es una excusa de la mujer para no comprarla?

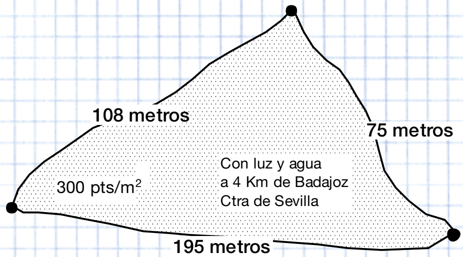


Figura 4. Problema de geometría: "Comprar una parcela".

Si el objetivo de la resolución de problemas es desarrollar en los alumnos la capacidad de describir, analizar, interpretar, tomar decisiones, etc. en diferentes situaciones que puedan presentárseles en la vida real, podríamos asumir que las actividades de cálculo son un elemento más y no necesariamente el principal en los problemas de matemáticas. Es decir, el desarrollo de los algoritmos aritméticos (operaciones y fórmulas) tendrían un papel de herramienta, en la resolución de los problemas, para facilitar el desarrollo de las capacidades indicadas. Por ello, proponemos actividades que permiten centrarnos en el significado de los conceptos y procesos y en la lógica interna de estos últimos.

4.1. Introducción de una notación para resolver el problema

El uso de notaciones o representaciones para resolver problemas es fundamental en primaria y un recurso útil en matemáticas. Damos dos ejemplos de ello. En el primero la notación resulta decisiva para tener la seguridad de que hemos alcanzado la solución (Figura 5). En el segundo, veremos que la representación del problema facilita su comprensión (Figura 6).

Intenta encontrar un método claro que te permita contar todos los triángulos que aparecen en la Figura. Luego, escribe cuántos hay, cómo los has contados y por qué tienes la seguridad de que no te falta ninguno

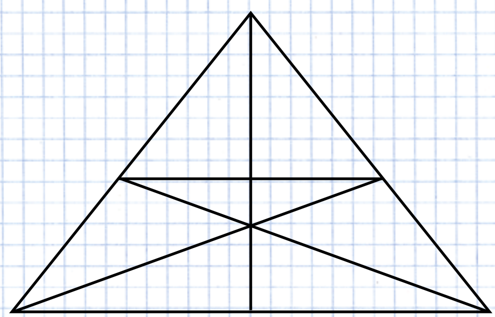


Figura 5. Problema de geometría: "Contar todos los triángulos de la figura".

Dos personas comparten la comida. El primero aporta dos panes y tres, el segundo. Al comenzar, llega un tercero que no aporta ningún pan, pero da cinco monedas a los comensales anteriores. ¿Cómo deberían distribuirse las cinco monedas los dos primeros?

Figura 6. Problema que incita a su representación para su comprensión.

5. DISEÑO O ELECCIÓN DE ESTRATEGIAS

La referencia a la necesidad de elaborar/diseñar estrategias (en plural) para resolver los problemas es uno de los aspectos más repetidos en el currículo de primaria. Así, la "utilización de estrategias personales de resolución" (Decreto, 2007, 7920) o la sugerencia de "… observar la facultad de emplear más de un procedimiento y la perseverancia en la búsqueda de soluciones, y la expresión, oral y escrita en el proceso seguido" (Decreto, 2007, 7920) y "…Valorar las diferentes estrategias…" (Decreto, 2007, 7924), son cuestiones que expresamente aparecen en el currículo. Podríamos asumir que el currículo señala que los aprendices deben elaborar, utilizar y explicar oralmente y por escrito diversas estrategias, personales o con los procedimientos propios de Primaria, para resolver los problemas. Conscuentemente, propondremos actividades que permitan a los resolutores desarrollar estas capacidades.

5.1. Diseñar estrategias con diferentes niveles de concreción

Los libros de problemas de matemáticas nos permiten seleccionar problemas que pueden ser resueltos utilizando diferentes estrategias que se corresponden con diferentes niveles de conocimiento. Es conveniente que en Primaria podamos desarrollar estrategias manipulativas para la resolución de problemas, siempre que ello sea posible (Figura 7).

Dice una vieja historia que cierto día acercose un mozo a un vendedor de espárragos en el mercado, y así le dijo:

—Ved que traigo conmigo este cordel que mide un palmo, y pregunto cuánto me cobraréis por el mazo de espárragos que pueda atar con él.

Pidió el aldeano cinco reales y el mozo se mostró conforme, pagó y se llevó la mercancía.

A los dos días presentose el mozo y dijo al vendedor:

—Aquí vengo con este cordón que mide dos palmos. Os acordaréis que por los espárragos que pude atar con el cordel de un palmo, me cobrasteis cinco reales. Así que por el mazo que atemos con este cordón de dos palmos os pagaré diez reales, si lo veis justo.

Aceptó el aldeano, aunque le quedó cierta duda sobre la venta. ¿Están justificadas las dudas del aldeano?

Figura 7. Problema que propicia el desarrollo de estrategias manipulativas.

5.2. Utilización de la estimación y cálculo mental, como procedimiento de resolución del problema

Son múltiples veces que, en nuestra actividad diaria, abordamos situaciones en las que precisamos de estimaciones y no necesariamente de cálculos exactos. Esta situación, que refleja la situación real, debe llevarnos a cuestionar la necesidad de realización de cálculos precisos en todos los problemas escolares. En algunas situaciones para estimaciones nos es más cómodo y útil desarrollar el cálculo mental sin necesidad de recurrir al lápiz y papel o a la calculadora. Si utilizamos las estimaciones a través del cáculo mental es conveniente, siempre que sea posible y a posteriori, confrontarlo con el resultado exacto.

– ¿Cuántos estudiantes hay en el colegio?

Los problemas de estimaciones pueden plantearse, también, a partir de presentar varias soluciones posibles y que el alumno elija la que le parece más adecuada.

– En Reyes me regalaron un móvil, ¿Cuántos mensajes o wasp escribo en una semana? ¿y durante un mes?.

  Muchos
  Más de 100
  Más de 50 y menos de 100
  Más de 15 y menos de 50
  Menos de 15

5.3. Problemas para evidenciar estrategias generales de resolución de problemas

Es conveniente seleccionar algunos problemas que nos permitan evindenciar y asumir estrategias generales usuales en los problemas de matemáticas, como pueden ser suponer el problema resuelto o partir de un caso particular.

Suponer el problema resuelto.

– Javier se montó en el ascensor, bajo 5 pisos, subió 6 y bajó 7. Y, ahora está en el piso 2º. ¿En cuál se montó?

– Dos jugadores, partiendo de cero o de uno, van añadiendo uno o dos a la cantidad que el otro indique, hasta que uno de los dos llegue al veinte, que será proclamado ganador. ¿Cuál es la estrategia ganadorade este juego?

Partir de un caso particular

– El otro día, en una tienda, me encontré con la siguiente situación: me hacían un descuento del 20%, pero, tenía que pagar un impuesto del 15%. El tendero, amigo mío, me dio a elegir, primero el descuento o el impuesto. Todavía no he salido de dudas, y no sé que decirle en el futuro. ¿Qué debo decidir?

6. REVISIÓN DEL PROBLEMA Y DE LA SOLUCIÓN

Si bien el problema termina cuando se encuentra la solución, la activad de resolución de problema debe finalizar con una reflexión sobre el proceso realizado, que puede venir indicado a partir de algunas cuestiones. De esta manera, al finalizar el problema plantearemos actividades que exijan de los alumnos la explicación del trabajo realizado. La capacidad de comparar las estrategias seguidas cuando hayamos utilizado más de una; la importancia de formular problemas similares y de replantear el mismo problema con otra estructura diferente son aspectos que mostrarían la comprensión asimilación del resolutor de la actividad realizada y ayudaría a la capacidad de generalización y de traducción del problema a situaciones semejantes o nuevas.

Así, con el problema resuelto, podremos plantearles a los resolutores:

- Inventar problemas similares a los resueltos, bien con otros datos y/o en otras situaciones o bien que sigan un procedimiento similar.
- ¿Qué hemos aprendido del problema? ¿Qué conceptos y procesos matemáticos están implicados en el problema?
- De los procedimientos utilizados ¿cuál nos resulta más fácil? ¿Cuál nos gusta más?

7. EPÍLOGO

Las activades mostradas y otras que podamos plantear tienen como objetivo fundamental que los alumnos aprendan a resolver problemas. Son numerosos los heurísticos que implica la actividad de resolución de problemas y que se muestran en los currículos. Ponerlos de manifiesto y que los alumnos los asuman parece un objetivo necesario.

Al mismo tiempo, y dado que la evaluación debe formar parte del proceso de enseñanza debemos proponer actividades de evaluación que evidencien que los alumnos han asimilado nuestro propósito al plantear estas activiades.

BIBLIOGRAFÍA

— BLANCO, B; BLANCO, LJ. Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria. Números, 2009, n. 71, p. 75 – 85. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Articulos_03.pdf

— BORRALHO, A; BORRÕES, MO ensino/aprendizagem da matemática: Algumas perspectivas metodológicas. Évora: Universidade de Évora, 1995.

— CASTRO, E. ET AL. Resolución de problemas en el tercer ciclo de E.G.B. Granada: Universidad de Granada, 1995.

— FERRERO, L. El juego y la Matemática. Madrid: La Muralla, 1991.

— FIGUERAS, E. Leer, escribir, comprender matemáticas. Los problemas. Suma, 1994, nº 19, p. 20-34.

— GARCÍA, E. Ideas, pautas y estrategias heurísticas para la resolución de problemas. Aula, 1992, nº 6, p. 14-21.

— LUCEÑO, JL. El número y las operaciones aritméticas básicas: su psicodidáctica. Alicante: Marfil, 1986.

— PAULOS, JA. Un matemático lee el periódico. Tusquets Editores. (Metatemas 44). Barcelona, 1996.

CAPÍTULO 12
TIPOS DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Juan Pino Ceballos

En este capítulo analizaremos algunas clasificaciones de problemas y daremos ejemplos para varias de las tipologías que se presentan, tratando de cubrir distintas áreas y niveles del currículo escolar. Como es fácil de suponer, existen diversas y variadas formas de distinción para los problemas, ellas dependen de los criterios que sean utilizados. Además, por la gran variedad de situaciones que se pueden presentar, es prácticamente imposible tener una única clasificación y, por otra parte, un mismo problema podría pertenecer a más de una categoría. En el transcurso del capítulo encontraremos categorías de problemas que son francamente dicotómicas y otras que son bastante más exhaustivas.

Como se ha dicho en capítulos anteriores, la resolución de problemas constituye un verdadero dilema para la enseñanza de la matemática. Cuando hablamos de problemas no nos estamos refiriendo a la versión trivializada de los ejercicios con texto, también acuñados como "*word problems*" en lengua inglesa. Por el contrario, aquí el término se refiere a situaciones verdaderamente complejas, capaces de potenciar el desarrollo del pensamiento de los alumnos, y de proporcionar formas de actuación para enfrentar los desafíos de la ciencia, la técnica y la vida cotidiana. Situaciones así, son difíciles de encontrar en la práctica educativa (Cruz, 2006).

Sin embargo, en las tipologías de problema que presentamos en los párrafos siguientes encontraremos actividades matemáticas que no se enmarcan en el concepto de problema que hemos citado en el párrafo anterior. Por tanto, queda a criterio del lector discriminar en las situaciones matemáticas que se presentan cuáles de ellas se corresponden a auténticos problemas de matemáticas.

La resolución de las tareas que hemos propuesto en capítulos precedentes implica diferentes conocimientos y habilidades que nos permiten establecer diferencias entre ellas. Si, al mismo tiempo, recordamos los referentes (contexto, formato, fuentes y tareas) que hemos analizado en el capítulo 6 encontraremos suficientes criterios para realizar clasificaciones de las actividades matemáticas.

En el currículo, y en los libros sobre resolución de problemas, se establece una diferencia general entre problema y ejercicio que ha sido ampliamente analizada. Los ejercicios aparecen con el objetivo de reconocer o practicar algún procedimiento aritmético o algebraico usuales y repetidos en la enseñanza de las matemáticas, pero existen diferentes maneras de presentarlos cuya resolución exigirá diferentes tareas para el resolutor. De igual manera, los contextos o fuentes y las tareas exigidas a los resolutores nos permitirán establecer diferencias entre los problemas. En Pino y Blanco (2008) se indica que la mayoría de los problemas que aparecen en los libros de texto supone la aplicación de algún procedimiento o fórmula estudiada con anterioridad, y señala que la actividad fundamental de estos resolutores es más mecánica que reflexiva.

Este capítulo se estructura en dos partes. En el primer apartado presentamos los aspectos generales de algunas de las tipologías de problemas más divulgadas en el campo de las matemáticas y su didáctica, haciendo la distinción entre clasificaciones dicotómicas y otras más exhaustivas. En los primeros párrafos incluimos las que clasifican los problemas en dos amplias categorías y luego aquellas que incluyen más de dos categorías. En el segundo apartado se explican con mayor grado de detalle varias de las tipologías del primer apartado, incorporando ejemplos para cada clase con el propósito de ayudar a la comprensión de los diversos tipos de problemas.

1. REVISIÓN DE ALGUNAS CLASIFICACIONES SOBRE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Numerosos autores han propuesto clasificaciones de las actividades y problemas de matemáticas. A partir de G. Polya, en 1945, con su conocido libro "*How to solve it*" que ha sido traducido a varios idiomas, podemos continuar citando a Butts (1980), Charles y Lester (1982), Borasi (1986), Blanco, (1993), Borasi y Abrantes (citado por Boavida, 1993), Vila (1995), Puig (1996), Díaz y Poblete (2001), Fan y Zhu (2006), Juidías y Rodríguez (2007), Pino y Blanco (2008) e Isoda y Olfos (2009), que clasifican los problemas de matemáticas según diferentes criterios.

La clasificación de Polya recoge la distinción que hacían los griegos, entre teorema y problema. Este matemático menciona sólo dos tipos de problemas: "problema por resolver" y "problema por demostrar", el criterio de distinción se refiere al objetivo del problema. Las partes que constituyen el problema son distintas según sea el caso, en un problema por resolver hay incógnita, datos y condición, y en un problema de demostrar hay hipótesis y conclusión (Polya, 1986). Hay varios autores que hacen este tipo de clasificaciones, considerando sólo dos categorías, es el caso de Blum y Niss (1991) que tipifica los problemas en *problemas aplicados y puros*, para ello considera el contexto como criterio para establecer su tipología, los primeros son los que surgen de contextos reales, el mundo real concebido como todos aquellos problemas que están fuera de las matemáticas, mientras que los problemas puros se hallan inmersos en el mundo propio de las matemáticas.

La revisión de trabajos sobre la clasificación de la resolución de problemas nos proporciona algunas expresiones que conectan entre sí, nos referimos a ciertas clasificaciones dicotómicas. Así, podemos encontrar problemas rutinarios y no rutinarios, problemas abiertos y problemas cerrados, problemas bien definidos y mal definidos, problemas bien estructurados y mal estructurados, que en expresión de Noda (2000) "quedan vagamente delimitados" (Noda, 2000, p. 20). Esta autora en su Tesis Doctoral realiza un estudio acerca las diferentes aportaciones en tal sentido, de los que extraemos las referencias de Simon (1973) sobre problemas bien y mal definidos y de Simon (1973) y Frederiksen (1984) sobre problemas bien y mal estructurados. Así, los problemas bien definidos serían aquellos en que existe un consenso sobre los objetivos y se consideran resueltos cuando el resolutor alcanza ese objetivo. Pozo et al (1994), señalan que "un problema bien definido o estructurado es aquel en el que se puede identificar fácilmente si se ha alcanzado la solución" (Pozo et al, 1994, p. 23). En los problemas 'mal definidos' establecer los objetivos forma parte del problema.

Con respecto a la estructura de los problemas, Noda (2001) y Santos (2007) recogen el trabajo de Simon (1973), en el que distingue entre problemas "bien estructurados" y problemas "mal estructurados"; el criterio de clasificación se refiere a la estructura y formulación del problema. Los problemas bien estructurados son aquellos que encontramos en los textos escolares donde toda la información necesaria para resolverlos está contenida en el enunciado, las reglas para encontrar la solución correcta son claras y se tienen criterios definidos para verificar la solución; por ejemplo: *calcular el volumen de una esfera de radio 5 cm*. En el otro extremo están los problemas mal estructurados que son similares a los problemas que nos encontramos en la vida diaria. Se trata de problemas que no presentan una estructura bien definida, y donde la información puede ser insuficiente o excesiva, lo que necesita que sean reformulados. Su resolución requiere diferentes procesos y criterios que deben ser considerados. Por ejemplo: ¿Cuánto cuesta un coche?

Otros autores también hacen la distinción entre problemas abiertos y cerrados, en relación a la situación de partida y a la solución pedida. Para Pehkonen (1997), una de las tipologías más importantes es la clasificación, no exhaustiva, entre problemas abiertos y cerrados. Esta distinción se refiere al grado de exactitud de la descripción de las situaciones de partida y llegada. En un problema cerrado el inicio y el final están exactamente explicados en la tarea. Si la situación de partida o la de llegada son abiertas, entonces tenemos un problema abierto. En este mismo contexto, Isoda y Olfos (2009) plantean que los problemas por naturaleza son abiertos señalando que "en el ámbito de la matemática escolar se dice que un problema es abierto para un estudiante si éste no dispone de procedimientos estándares para solucionarlo, o bien, el problema tiene varias soluciones" (Isoda y Olfos, 2009, pp. 99-100). La posibilidad de varias soluciones y, simultáneamente, diferentes estrategias de solución sería lo que caracterizaría a los problemas abiertos.

Puig (1996), utilizando como criterio de clasificación el método de resolución del problema, presenta las siguientes clases: *ejercicios de reconocimiento* si el resolutor lo único que tiene que hacer es buscar en la memoria el resultado; mientras que si ha de ejecutar un algoritmo de forma automática, se tratará de un *ejercicio algorítmico*. Además, considera los *problemas de aplicación* cuando el resolutor conoce un procedimiento para resolver el problema y ha de justificar que ese procedimiento es adecuado para obtener la solución; mientras que cuando el resolutor tiene que crear un procedimiento de solución se trata de *problemas de búsqueda*.

Noda (2001) y Santos (2007), también se hacen eco del trabajo de Frederiksen (1984) que establece tres categorías sobre la estructura de los problemas, este autor utiliza como criterio de clasificación la estructura, formulación y método de resolución del problema. Los problemas bien estructurados estarían claramente formulados y se resolverían mediante aplicación de un algoritmo conocido y podría comprobarse fácilmente su correcta resolución. Los problemas estructurados que requieren pensamiento productivo, que serían similares a los anteriores pero el resolutor debería diseñar total o parcialmente el procedimiento de resolución, que no estaría explícito en el enunciado. Por ejemplo: *En un club de tenis hay 35 jugadores para jugar un campeonato en el que jugarán todos contra todos, una sola vez. ¿Cuántas partidas serán necesarias?* Y, finalmente, problemas mal estructurados donde la formulación no estaría clara, sin un procedimiento inmediato que garantice la solución y donde faltarían criterios para determinar cuándo la solución se ha conseguido. En el sentido de las tipologías comentadas en estos últimos párrafos, Fan y Zhu (2006) presentan varias clasificaciones que utilizaron en un estudio comparativo entre los textos escolares de Estados Unidos y China Continental, los que detallaremos más adelante.

En cuanto a las tareas de investigación matemática en el aula, Blanco (1993) propone en su clasificación los "problemas de investigación matemática" y Ponte et al. (1999), Stacey y Scott (2000) y Braumann (2002) se refieren a las actividades de investigación a nivel de aula al considerar que las fronteras entre investigación y problemas es muy difusa.

En el apartado que sigue, queremos mostrar diversos tipos de problemas que exigen formas diferentes de afrontarlos, tanto desde la perspectiva cognitiva como afectiva. No pretendemos hacer una clasificación exhaustiva de problemas, pero sí es necesario conocer diferentes actividades que puedan proponerse en primaria, así como diferentes recursos que puedan servirnos de base para plantearlos. A este respecto, en la elección de los diferentes problemas que incorporamos hemos tenido presente los niveles de complejidad que indican Rico y Lupiañez (2008), en el análisis de las tareas que se proponen en el Informe PISA, en el que plantean que el diseño y selección de tareas escolares es la función más relevante del docente, siempre que esté en relación con los objetivos a conseguir.

2. CLASIFICACIONES Y EJEMPLOS PARA CADA TIPO

2.1. La clasificación de Borasi

Raffaella Borasi, educadora de las matemáticas italiana radicada en E. Unidos, realiza uno de los primeros aprontes en la tarea de aclarar distintas clases de problema. Motivada por su interés en mejorar la enseñanza de la resolución de problemas, elabora una tipología de problemas considerando los siguientes criterios de clasificación: el contexto, la formulación, las soluciones y el método de aproximación para alcanzar la solución (Borasi, 1986). Tales elementos estructurales dan origen a las siguientes categorías de problemas. Cada categoría va acompañada de un ejemplo.

Problema con texto

Se trata de problemas formulados a través de un texto en el que se da con precisión los datos necesarios para obtener la solución (Figura 1).

Rosa Inés va a la cafetería y compra un sándwich y una bebida. Para pagar entrega a la cajera un billete de 10 euros. El sándwich cuesta 6 euros y la bebida 2,5. ¿Cuánto le devolverá la cajera?

Figura 1. Ejemplo de problema con texto según Raffaella Borasi.

Ejercicio

Son aquellas tareas o actividades matemáticas que pretenden desarrollar algún tipo de algoritmo.

Resolver la ecuación $5x - 12 = 18$

Figura 2. Ejemplo de ejercicio según Raffaella Borasi.

Puzle

Son aquellos problemas en que el contexto nos muestra el potencial creativo y recreativo de la matemática, en que el resolutor necesita ser flexible y considerar varias perspectivas. La formulación puede resultar engañosa y la solución no tiene necesariamente que suponer procesos matemáticos (Figura 3).

Utilizando 3 tetraminós distintos. Determinar las dimensiones del menor rectángulo que se puede pavimentar (teselar) con esas 3 figuras. Considere que cada figura mide 4 u2

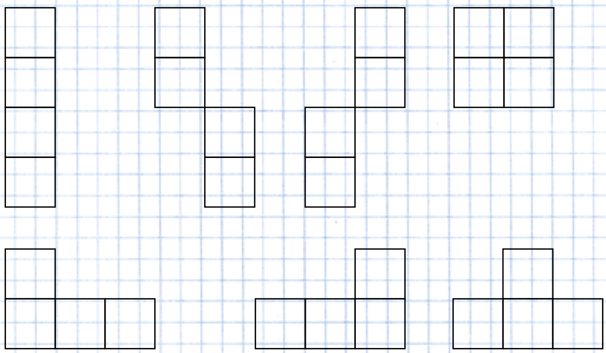


Figura 3. Ejemplo de problema de Puzle según Raffaella Borasi.

Prueba de una conjetura

En este tipo de problema lo que se trata es la demostración de un teorema o de cierta propiedad matemática (Figura 4).

Demostrar que si a y b son números naturales impares, entonces a + b es un número par.

Figura 4. Ejemplo de problema de una conjetura según Raffaella Borasi.

Problemas de la vida real

Los problemas de la vida real suponen tres procesos básicos: la creación de un modelo matemático de la situación, la aplicación de procedimientos y técnicas matemáticas al modelo, y la traducción a la situación real para analizar la validez de la solución (Figura 5).

Un estanque para almacenar agua tiene forma cilíndrica. El radio es de 5 metros y la altura es de 16,5 metros. Para los efectos de manutención se necesita pintar el estanque (incluyendo sus bases). Un galón de pintura cubre un área aproximada de 40 metros cuadrados. Si un galón de pintura vale 23 euros, calcular el costo total de la pintura.

Figura 5. Ejemplo de problema de la vida real según Raffaella Borasi.

Situación problemática

En este tipo de problemas el resolutor se enfrenta a un nuevo resultado matemático sin disponer de toda la información necesaria. Por lo general, se trata de una situación que plantea una pregunta abierta sobre cierta propiedad matemática. La formulación es regularmente vaga, puesto que en este caso se tratan de establecer nuevas conjeturas; los métodos de aproximación suelen ser diversos; y la exploración del contexto, así como las sucesivas formulaciones del problema, son fundamentales (Figura 6).

Un teorema fundamental establece que la descomposición de un número natural en producto de números primos es única. ¿Qué ocurre si cambiamos en dicho enunciado la palabra producto por la palabra suma?

Figura 6. Ejemplo de situación problemática según Raffaella Borasi.

Situación

Son aquellas tareas que facilitan la formulación de conjeturas por parte del alumno. En ellas se presentan ciertos hechos o propiedades matemáticas que requieren de la reflexión de los alumnos con el propósito de establecer nuevas relaciones o propiedades en relación con la información que proporciona la situación. Una característica distintiva es que no hay una pregunta específica o una consigna acerca de lo que el alumno tiene que realizar (Figura 7).

Considere que los “números en escala” son los que se pueden escribir como la suma de dos o más números naturales consecutivos. Por ejemplo: 5 es un número en escala porque se puede escribir como 2 + 3.

Figura 7. Ejemplo de situación según Raffaella Borasi.

Los dos últimos tipos de la clasificación de Borasi, en estricto rigor, no describen problemas propiamente tales como la mayoría de los profesores los entienden. Pensamos que la autora incluye estas categorías porque están en consonancia con los criterios que utiliza para configurar su tipología. Sin embargo, son situaciones que permiten presentar tareas matemáticas a los alumnos que les permitan utilizar estrategias cognitivas de nivel superior, en la perspectiva que para aprender matemáticas hay que "hacer matemáticas" y proporcionarles oportunidades para aprender a pensar por sí mismos.

2.2. La clasificación de Blanco

Blanco (1991) plantea que hacer matemáticas en clase debería consistir en proponer a los alumnos una serie de tareas que les permitan: abstraer, aplicar, convencer, clasificar, inferir, organizar, representar, idear, generalizar, comparar, explicar, diseñar y desarrollar modelos, validar, conjeturar, analizar, contar, medir, sintetizar y ordenar, etc. El desarrollo de estas actividades puede plantearse a partir de diferentes propuestas que el autor citado ha ordenado en una clasificación de problemas, en la que ha considerado aportaciones anteriores realizadas por Butts (1980), Charles y Lester (1982) y Borasi (1986), y que ha sintetizado en Blanco (1991, p. 62), como criterio para establecer su tipología de problemas. No obstante, tenemos que considerar que ninguna clasificación puede ser exhaustiva, estableciéndose siempre intersecciones entre los diversos apartados y apareciendo actividades de difícil catalogación, todo esto por la enorme diversidad de problemas que pueden proponerse de diferentes niveles y contenidos. De acuerdo con lo anterior y de algunas otras aportaciones, Blanco (1993), establece los siguientes tipos de actividades en relación con la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas.

Ejercicio de reconocimiento

Con este tipo de ejercicio se pretende resolver, reconocer o recordar un factor específico, una definición o una proposición de un teorema (Figura 8).

Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide 57°, ¿cuánto mide el otro ángulo agudo?

Figura 8. Ejemplo de ejercicio de reconocimiento según Lorenzo J. Blanco.

Ejercicios algorítmicos o de repetición

Son ejercicios que pueden ser resueltos con un proceso algorítmico, a menudo un algoritmo numérico (Figura 9).

Resolver la ecuación $5x - 7 = 2x + 8$

Figura 9. Ejemplo de ejercicio algorítmico o de repetición según Lorenzo J. Blanco.

Problemas de traducción simple o compleja

Son problemas formulados en un contexto concreto y cuya resolución supone una traducción del enunciado, oral o escrito, a una expresión matemática. En el enunciado del problema aparece toda la información necesaria para la resolución del mismo y suele, implícitamente, indicar la estrategia a seguir. Son los típicos problemas de los libros de texto en los que el método de solución se reduce a interpretar correctamente el problema, es decir, a elegir el algoritmo adecuado. Se quiere reforzar la comprensión de los conceptos matemáticos y de las habilidades computacionales de los alumnos y conseguir que estos sean capaces de traducir situaciones del mundo real a expresiones matemáticas (Figura 10).

Un salón para realizar reuniones o ceremonias tiene una tarifa fija de 100 euros, más un cobro adicional de 30 euros por hora. Si se contrata el salón para hacer una ceremonia de 2 horas y 15 minutos, ¿cuánto habrá que pagar por el arriendo del salón?

Figura 10. Ejemplo de problema de traducción simple o compleja según Lorenzo J. Blanco.

Problemas de procesos

Son problemas que se diferencian de los anteriores en que la forma de cálculo no aparece claramente delimitada, dándose la posibilidad de conjeturar varios caminos para encontrar la solución. Este tipo de problemas intenta ejemplificar los procesos inherentes a su solución. Ayudan a desarrollar estrategias generales de comprensión, planificación y de solución de problemas. No hay información precisa que permita traducir el enunciado a una expresión matemática (Figura 11).

Un hexágono tiene 9 diagonales, ¿cuántas diagonales tendrá un polígono de 10 lados?

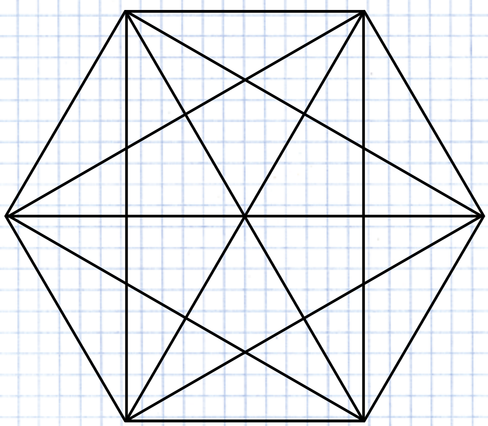


Figura 11. Ejemplo de problema de procesos según Lorenzo J. Blanco.

Problemas sobre situaciones reales

Se trata de plantear actividades lo más cercanas posibles a situaciones reales que requieran el uso de habilidades, conceptos y procesos matemáticos. Aunque no sean típicamente matemáticos al considerar otros tipos de información, las matemáticas juegan un papel preponderante para encontrar la solución. Es una herramienta que ayuda a organizar, sintetizar y representar los datos, dándole significado a las decisiones que se tomen.

Estos problemas dan oportunidad a la construcción de diagramas, a la realización de estimaciones, cálculo de las medidas, procesos de análisis y síntesis, pero sobre todo ayudan a comprender el significado de las matemáticas y su relación con la realidad (Figura 12).

En el curso se están realizando varias actividades de recolección de dinero para hacer una gira del curso a otra ciudad. Se ha programado la presentación de una obra de teatro, la sala tiene capacidad para 200 personas. Si la entrada para niño vale 5 euros y la entrada de adulto vale 10 euros, ¿cuántas entradas de niño y de adulto se deben vender para recaudar una cantidad de 1550 euros?

Figura 12. Ejemplo de problema sobre situaciones reales según Lorenzo J. Blanco.

Problemas de investigación matemática

Son problemas directamente relacionados con contenidos matemáticos, cuyas proposiciones pueden no contener ninguna estrategia para representarlos, y sugieren la búsqueda de algún modelo para encontrar la solución. En estas actividades son usuales las expresiones como "Probar que..."; "Encontrar todos los..."; "Para que... es...?", etc.

Este tipo de problemas suele asociarse con actividades que implican conceptos difíciles y un alto conocimiento matemático, lo que provoca que en los niveles de enseñanza elemental muchas veces no aparezcan, causándoles un perjuicio a nuestros estudiantes (Figura 13).

Se ordenan los primeros 20000 números naturales en una tabla de 6 columnas, ¿en qué columna estará el número 718? ¿y el número 19657?

Figura 13. Ejemplo de problema de investigación matemática según Lorenzo J. Blanco.

Problemas de puzles

Son problemas en los que se pretende mostrar el potencial recreativo de las matemáticas. Obliga a flexibilizar la forma de enfrentar el problema y a considerar varias perspectivas ya que normalmente el contexto y la formulación que se hacen de estos problemas suele ser engañosa. Su resolución puede depender más de una chispa o *idea feliz* que de la ejecución de un proceso matemático (Figura 14).

Una región rectangular de 13 por 5 unidades se divide en 4 regiones y con ellas se construye un cuadrado de 8 por 8 unidades. ¿Es cierto, entonces, que 65 = 64?

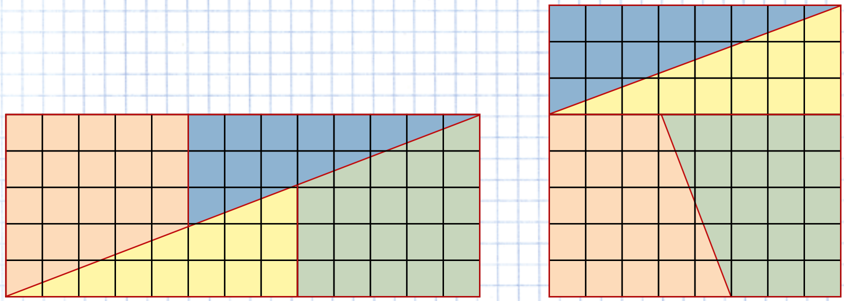


Figura 14. Ejemplo de problema de Puzles según Lorenzo J. Blanco.

Historias matemáticas

Frecuentemente podemos observar en las librerías, o bibliotecas, algunos libros de cuentos, novelas, entre los que encontramos algunas propuestas o planteamientos que requieren de nosotros un esfuerzo que impliquen algún concepto matemático. Algunos textos de autores clásicos como Lewis Carroll, Malba Tahan, Martin Gardner y otros, constituyen una buena fuente de temas interesantes y que, además, permiten motivar el aprendizaje de las matemáticas (Figura 15).

La historia del tablero de ajedrez.

> Al noroeste de la India (seguramente en el actual Pakistán o Afganistán), había un poderoso rey hindú llamado Sheram, tan rico y rodeado de tantos placeres que de ninguno de ellos podía gozar. Ordenó al más inteligente de sus sirvientes, llamado Seta, que creara un juego capaz de entretenerle. Pasado algún tiempo Seta presentó a su señor el ajedrez, un juego que emulaba la guerra y que se jugaba en un tablero con sesenta y cuatro casillas, alternativamente blancas y negras dispuestas en ocho filas y ocho columnas. El rey quedó tan encantado que le permitió escoger su recompensa. Seta le dijo: "Majestad, soy hombre modesto, y me conformaría con que me paguéis un grano de trigo por el primer cuadrado, dos por el segundo, cuatro en el tercero, ocho en el cuarto, y así sucesivamente hasta llegar a la última casilla del tablero" El rey, encantado por la modesta petición de este modesto súbdito accedió en seguida, pero su alegría pronto se trocaría en ira cuando se dio cuenta de que ni con todo el trigo de su país alcanzaría a pagar semejante suma (Perelman, 1975).

Explicar utilizando procedimientos matemáticos por qué el Rey no podría pagar tal recompensa.

Figura 15. Ejemplo de historias matemáticas según Lorenzo J. Blanco.

2.3. La clasificación de Díaz y Poblete

Si bien el trabajo que presentan estos autores se refiere al campo algebraico, su tipología es bastante genérica por lo que se puede aplicar en otros campos. Estos autores clasifican los problemas considerando como criterio la naturaleza y el contexto de los mismos. Según su naturaleza tenemos problemas rutinarios y no rutinarios, y según el contexto mencionan: los problemas reales, problemas realistas, problemas fantasistas y problemas puramente matemáticos (Díaz y Poblete, 2001).

Con respecto al primer criterio de clasificación, estos autores sólo describen explícitamente los problemas no rutinarios. Por tratarse de categorías que son dicotómicas haremos una descripción de los problemas rutinarios en sentido contrario a los no rutinarios.

Problemas rutinarios son aquellos en que el resolutor conoce un procedimiento previamente aprendido, un algoritmo o una rutina, que le permitan determinar la(s) solución(es). Muchos de los problemas que se presentan en los libros de texto son de este tipo. Considerando el contexto, los autores incluyen los cuatro tipos siguientes para problemas rutinarios.

Problema de contexto real

Un problema se enmarca en un contexto real si se produce efectivamente en la realidad y compromete la actitud del alumno en la misma (Figura 16).

Mide con un hilo el diámetro y la longitud de la circunferencia de tres objetos circulares de distinto tamaño (un CD, un plato, una rueda de bicicleta, un disco antiguo de vinilo,…). Calcula la razón entre el diámetro y la longitud de cada objeto. ¿Qué puedes concluir de estas razones?

Figura 16. Ejemplo de problema de contexto real según Díaz y Poblete (2001).

Problema de contexto realista

Un problema se enmarca en un contexto realista si es susceptible de producirse realmente. Se trata de una simulación de la realidad o de una parte de la realidad (Figura 17).

La tarifa de un taxi consiste en una cantidad fija de 1,5 euros, más 0,5 euros por cada 200 metros o fracción de 200 m. ¿Cuánto habrá que pagar al taxista por un recorrido de 1300 m?

Figura 17. Ejemplo de problema de contexto realista según Díaz y Poblete (2001).

Problema de contexto fantasista

Un problema se enmarca en un contexto fantasista si es fruto de la imaginación y está sin fundamento en la realidad (Figura 18).

En una lejana civilización extraterrestre sus habitantes tienen dos dedos en cada mano, cuando ellos cuentan usando sus dedos dicen: “ta, te, ti, cuaterna, …” para indicar los números 1, 2, 3 y 4 nuestros. ¿Cómo nombrarán, estos extraños seres, los números siguientes hasta el 8 nuestro?

Figura 18. Ejemplo de Problema de contexto fantasista según Díaz y Poblete (2001).

Problema de contexto puramente matemático

Un problema se enmarca en un contexto puramente matemático si hace referencia exclusivamente a objetos matemáticos: números, relaciones y operaciones aritméticas, figuras geométricas, etc (Figura 19).

Dada una región rectangular cuyos lados miden a y b. Si duplicamos estas medidas, ¿qué pasa con el perímetro de la figura?, y ¿con el área?

Figura 19. Ejemplo de problema de contexto puramente matemático según Díaz y Poblete (2001).

Problemas no rutinarios

Problemas no rutinarios son aquellos en que el alumno no conoce una respuesta ni un procedimiento previamente establecido o rutina, para encontrarla (Figura 20).

Pepe dice a su mamá que no alcanzó a escribir la tarea de matemáticas. Lo único que recuerda es que había una sustracción que tenía resultado igual a 5, y que los números eran uno de 2 dígitos y el otro de 3 dígitos. ¿Cómo podrá la mamá reconstruir la tarea y resolverla?

Figura 20. Ejemplo de problema no rutinario según Díaz y Poblete (2001).

2.4. Las tipologías de Fan y Zhu

Fan y Zhu (2006) hicieron un estudio comparativo de los distintos tipos de problemas de matemáticas que se presentan en textos escolares de China Continental y Estados Unidos. Para tal efecto, utilizaron las categorías de problemas que damos a conocer a continuación. El criterio para clasificar que utilizaron estos autores se refiere a una mezcla de aportaciones basadas en libros de texto.

Problemas rutinarios y problemas no rutinarios

Un problema rutinario es aquel para el cual el resolutor puede seguir un cierto algoritmo conocido, fórmula o procedimiento para obtener la solución, y, por lo general, el camino de acceso a la solución es inmediatamente evidente (Figura 21).

Un rectángulo mide 12 cm de largo y 5 cm. de ancho. ¿Cuál es el área del rectángulo?

Figura 21. Ejemplo de Problema rutinario según Fan y Zhu (2006).

Por otra parte, un problema no rutinario es una situación que no se puede resolver con sólo la aplicación de un algoritmo estándar, fórmula o procedimiento, que suele estar fácilmente disponible para resolver el problema por los estudiantes (Figura 22).

El perímetro de un terreno rectangular es de 48 m. ¿Cuál es su área?

Figura 22. Ejemplo de Problema no rutinario según Fan y Zhu (2006).

Problemas tradicionales y problemas no tradicionales

Los autores citados no describen explícitamente los problemas tradicionales, sin embargo incorporamos algunos elementos que los describen según Reusser y Stebler (1997): son problemas que no invitan o desafían, a los alumnos, para que activen y utilicen su conocimiento sobre sus experiencias y el mundo real, se elaboran de forma semánticamente empobrecida a modo de viñetas verbales lo que hace que los enunciados de muchos problemas degeneran en ecuaciones mal disimuladas. En este tipo de problemas los alumnos saben por su experiencia escolar que todos los problemas tienen solución, que cualquier dato numérico incluido en un problema es relevante para resolverlo y que todo lo que es relevante para su resolución está incluido en el texto del problema (Figura 23).

Un electricista corta 20 metros de alambre en pedazos de 2,5 metros cada uno. ¿Cuántos pedazos de alambre podrá hacer?

Figura 23. Ejemplo de Problema tradicional según Reusser y Stebler (1997).

Por otra parte, los problemas no tradicionales son presentados en cuatro categorías que describimos a continuación: planteamiento o invención de problemas, tipo rompecabezas, problemas de proyectos y problemas de diarios.

a) Planteamiento o invención de problemas

La primera clase es planteamiento o invención de problemas, en este caso se requiere que los estudiantes creen preguntas usando la información dada en la situación. El planteamiento o invención de problemas puede ayudar a los estudiantes a ver un tema estándar en una forma más clara y ayudarles a adquirir una comprensión más profunda de él. Se pueden generar situaciones originales o reformular un problema desde una situación estímulo dada. También es interesante considerar que el acto de plantear un problema por parte de los alumnos es una manera eficaz de lograr experiencias de aprendizaje positivas (Figura 24).

b) Tipo rompecabezas

En la segunda clase de problemas no tradicionales tenemos aquellos del tipo rompecabezas que a menudo permiten a los estudiantes participar en un posible enriquecimiento a través de las matemáticas recreativas (Figura 25).

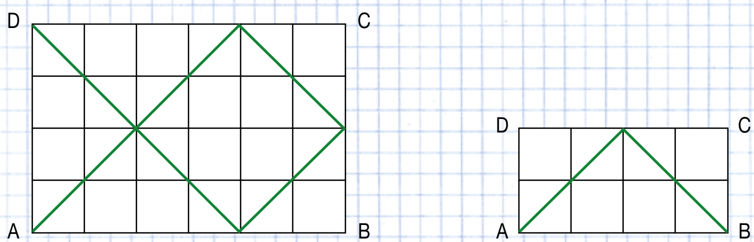
c) Problemas de proyectos

En la tercera clase encontramos los problemas de proyectos, que son tareas o series de tareas que implican uno o más de los siguientes procesos: recolección de datos, observación, buscar referencias, identificar, medir, analizar, determinar patrones o relaciones, graficar y comunicar. Los problemas de proyectos, por lo general, requieren que los estudiantes tomen una cantidad considerable de tiempo (por ejemplo, un par de días, semanas o incluso meses) hasta el final (Figura 26).

d) Problemas de diarios

La última clase de problemas no tradicionales son los problemas de diarios que incitan a los estudiantes a escribir un texto para expresar sus ideas, experiencias, preguntas, reflexiones, su comprensión personal o acerca de nuevos aprendizajes. A través de lo escrito por los estudiantes, los profesores pueden obtener información útil sobre el aprendizaje de los estudiantes y de su propia enseñanza (Figura 27).

Imagine una mesa de billar, como se representa más abajo. Suponga que una bola se golpea desde la esquina A en un ángulo de 45°. Cuando la bola rebota sobre un lado de la mesa continúa su trayectoria siguiendo un ángulo de 45°. En el ejemplo 1, la bola se desplaza sobre una mesa de 6 por 4 unidades y termina su recorrido en el punto D, después de rebotar 3 veces sobre los lados. En el ejemplo 2, la pelota se desplaza sobre una mesa de 4 por 2 y finaliza su recorrido en el punto B, después de rebotar sólo una vez.



Ejemplo 1 Ejemplo 2

Observe los ejemplos de la Figura 24, piense acerca de esta situación para mesas de otras medidas y escriba algunas preguntas o problemas que a usted se le ocurran (traducido de Silver et al, 1996).

Figura 24. Ejemplo de Problema no tradicional - Planteamiento o invención de problemas según Fan y Zhu (2006).

Dada la siguiente figura, recorte todas sus piezas y construya otra figura. Use equivalencia de áreas para demostrar que a2 + b2 = c2.

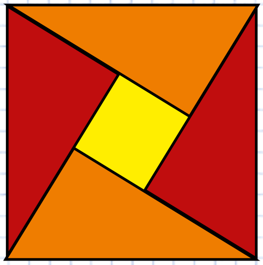


Figura 25. Ejemplo de Problema no tradicional – Tipo rompecabezas según Fan y Zhu (2006).

Busque las tarifas de las llamadas telefónicas de donde usted vive a una ciudad o pueblo que tiene un código de área diferente. Compare las tarifas de dos empresas de larga distancia para las llamadas de distinta duración. Usted puede tener que considerar diferentes momentos del día y de la semana. No haga las llamadas para determinar sus costos. (McConnell et al., 1996; citado en Fan y Zhu, 2006).

Figura 26. Ejemplo de Problema no tradicional – De proyectos según Fan y Zhu (2006).

Redacte un texto de un folio, para publicar en el Diario Mural, con sus ideas para multiplicar números de dos dígitos sin usar el procedimiento de cálculo tradicional.

Figura 27. Ejemplo de Problema no tradicional – De diarios según Fan y Zhu (2006).

Problemas de final abierto y problemas cerrados.

Esta clasificación hace hincapié en el carácter abierto de las respuestas definitivas a la situación, y no se refiere a las maneras de enfocar la situación.

Un problema de final abierto es un problema con varias o muchas soluciones (Figura 28).

Se hacen configuraciones con 6 cuadrados del mismo tamaño, como las que se muestran a continuación. Dibuje tres configuraciones posibles que permiten armar un cubo.

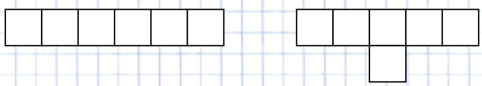


Figura 28. Ejemplo de Problema de final abierto según Fan y Zhu (2006).

Por otra parte, un problema de final cerrado es un problema que sólo tiene una sola solución, no importa la cantidad de diferentes maneras que haya para llegar a ella (Figura 29).

El Estrecho de Gibraltar es la entrada al mar Mediterráneo desde el Océano Atlántico. Si el ancho del estrecho medido en metros, lo divide por 11, le suma -9, le resta -4 y divide por 20, el resultado es 1. ¿Cuál es la anchura del estrecho de Gibraltar?

Figura 29. Ejemplo de Problema de final cerrado según Fan y Zhu (2006).

Problemas aplicados y problemas no aplicados.

Un problema no aplicado es una situación que no está relacionada con alguna experiencia práctica en la vida cotidiana o en el mundo real, podemos decir que son puramente matemáticos (Figura 30).

Calcular el volumen de un cilindro recto de radio basal 4 cm y altura igual a 12 cm.

Figura 30. Ejemplo de Problema no aplicado, según Fan y Zhu (2006).

Por el contrario, un problema aplicado es un problema relacionado con -o que surge en- el contexto de una situación de la vida real. Entre los problemas de aplicación, en este estudio se distinguen dos subtipos de problemas: ficticios y auténticos.

Los problemas de aplicación ficticios son aquellos cuyas condiciones y datos son ficticiamente creados por el autor del problema (Figura 31).

Un automóvil emplea 2,5 horas en recorrer el trayecto que va desde la ciudad A a la ciudad B, cuando va a una velocidad media de 100 km por hora. ¿Cuánto demora el automóvil en realizar el mismo recorrido si lo hace a una velocidad media de 120 km por hora?

Figura 31. Ejemplo de Problema de aplicación ficticio según Fan y Zhu (2006).

En tanto que los problemas de aplicación auténticos son aquellos cuyas condiciones y datos son tomados a partir de situaciones reales o percibidas de la vida cotidiana de los propios estudiantes (Figura 32).

El papá de Ana María desea embaldosar con cerámicas cuadradas de 40 por 40 cm., un patio rectangular que mide 2,5 m de ancho por 4m de largo, ¿cuántas baldosas se necesitan para embaldosar el patio?

Figura 32. Ejemplo de Problema de aplicación auténtico según Fan y Zhu (2006).

Problemas de un paso y problemas de múltiples pasos

Los problemas que se pueden resolver directamente a través de una operación se definen como problemas de un solo paso (Figura 33).

Carlos tiene 5 libros de cuentos y 3 libros de poemas. ¿Cuántos libros tiene Carlos?

Figura 33. Ejemplo de Problema de un solo paso según Fan y Zhu (2006).

Por el contrario, los problemas que se resuelven aplicando dos o más operaciones se llaman problemas de varios pasos (Figura 34).

Rosa trajo 10 euros a la escuela. En el primer recreo compró golosinas en el kiosco gastando 3 euros y en el segundo recreo gastó otros 5 euros. ¿Cuánto dinero le quedó al terminar la jornada?

Figura 34. Ejemplo de Problema de múltiples pasos según Fan y Zhu (2006).

Problemas con datos suficientes, problemas con datos extraños y problemas con datos insuficientes

Si un problema tiene más información o condiciones que las suficientes para resolver el problema, se considera como un problema con datos extraños (Figura 35).

En otro sentido si la información proporcionada en un problema no es esencialmente suficiente para obtener la solución y no es esperable ni posible que el resolutor pueda completar la información faltante, entonces el problema es considerado como un problema con datos insuficientes (Figura 36).

Josefa y su mamá fueron a comprar a la verdulería. Como Josefa solo tiene 5 años y se cansa cuando caminan mucho se fueron en el bus N°9. En la verdulería compararon 3 kilos de naranjas, 1 kilo de palta, 2 kilos de limones y 3 kilos de patatas. ¿Cuántos kilos tuvo que cargar en su bolsa de compras la mamá de Josefa?

Figura 35. Ejemplo de Problema con datos extraños según Fan y Zhu (2006).

¿Cuánta agua contiene un estanque de forma cilíndrica que tiene 1,5 m de diámetro?

Figura 36. Ejemplo de Problema con datos insuficientes según Fan y Zhu (2006).

La otra categoría se refiere a los problemas con datos suficientes, en los que la información que se entrega es exactamente la suficiente para resolver el problema (Figura 37).

Hallar dos números enteros cuya suma sea igual 36 y cuya diferencia sea 10.

Figura 37. Ejemplo de Problema con datos suficientes según Fan y Zhu (2006).

Problemas en formato puramente matemático, problemas en forma verbal, problemas en forma visual y problemas en una combinación de formas.

Esta clasificación se basa en las formas de representación de un problema que describen tanto la situación como la presentación de los datos para la pregunta.

Cuando un problema incluye sólo expresiones matemáticas, se clasifica en la categoría de problema presentado en una forma puramente matemática (Figura 38).

Verifique que "si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$", utilizando números naturales en tres situaciones distintas.

Figura 38. Ejemplo de Problema en formato puramente matemático según Fan y Zhu (2006).

En aquellas situaciones en que la presentación es del todo verbal, es decir, escrita en palabras solamente, entonces el problema está codificado en la categoría de los problemas en forma verbal (Figura 39).

Encontrar números naturales que sean múltiplos de dos y de tres a la vez.

Figura 39. Ejemplo de Problema en forma verbal según Fan y Zhu (2006).

Si la presentación del problema consiste simplemente en cifras, imágenes, gráficos, cuadros, tablas, diagramas, mapas, etc., entonces este problema se clasifica en los *problemas en* forma visual (Figura 40).

Finalmente, los problemas en una forma combinada son aquellos que se presentan en una combinación de dos o tres de las formas anteriores (Figura 41).

Si L1 / / L2, ¿cuánto mide el ángulo x?

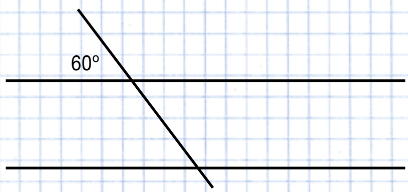


Figura 40. Ejemplo de Problema en forma visual según Fan y Zhu (2006).

ÍNDICE

Una lata de conservas de forma cilíndrica tiene 11,5 cm de altura y 5 cm de radio en la base, como se muestra en la figura siguiente. Calcular la cantidad de papel que se necesita para hacer la etiqueta del tarro, considerando que debe haber un borde de un centímetro para pegar la etiqueta.

Figura 41. Ejemplo de Problema en forma combinada según Fan y Zhu (2006).

BIBLIOGRAFÍA

— BLANCO, LJ. Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas de profesores de enseñanza general básica y estudiantes para profesores. Manuales UNEX, nº 11, Badajoz: Servicio de Publicaciones Universidad de Extremadura, 1991.

— BLANCO, LJ. Una clasificación de problemas matemáticos. Epsilon, 1993, n. 25, p. 49- 60.

— BLUM, W; NISS, M. Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects: State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. Educational Studies in Mathematics, 1991, vol. 22, nº 1, p. 37-68.

— BOAVIDA, AM. Resolução de problemas em educação matemática: Contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores (Tesis de Maestría). Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 1993.

— BORASI, R. On the nature of problems. Educational Studies in Mathematics, 1986, vol. 17, nº 2, p. 125-141.

— BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da Matemática. Em PONTE, JP.; COSTA, C.; ROSENDO, AI.; MAIA, E.; FIGUEIREDO, N.; DIONISIO, A.: Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de os professsores Lisboa: Sociedad de Educación Matemática, 2002, p. 5-24.

— BUTTS, T. Posing problems properly. In KRULIK, S.; REYS, R. (Eds.): Problem solving in school mathematics. Reston, VA: NCTM Yearbook, 1980, p. 23-33.

— CONTRERAS, LC. Resolución de problemas: un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula. (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, 1998.

— CHARLES, R; LESTER, F. Teaching problem solving. What, Why, How. Palo Alto. Dale Seymour Pu, 1982.

— CRUZ, M. La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas. Tomo 1 La Habana: Educación Cubana, 2006.
— DÍAZ, MV; POBLETE, A. Categorizando tipos de problemas en algebra. UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas, 2001, nº 27, p. 93-103.
— FAN, L; ZHU, Y. Focus on the representation of problem types in intended curriculum: a comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. International Journal of Science and Mathematics Education, 2006, nº 4, p. 609 - 626.
— FREDERIKSEN, N. Implications of Cognitive Theory for Instruction in Problem Solving. Review of Educational Research, 1984, vol. 54, nº 3, p. 363-407.
— ISODA, M; OLFOS, R. El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. U. Católica de Valparaíso, 2009.
— JUIDÍAS, J; RODRÍGUEZ, I. Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. Revista de Educación, 2007, nº 342, p. 357-286.
— NODA, MA. Aspectos epistemológicos y cognitivos de la resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. Un estudio con alumnos del primer ciclo de la ESO y maestros en formación. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna. España, 2000.
— NODA, MA. La resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. Números, Revista de didáctica de las matemáticas, 2001, nº 47, p. 3-18.
— PEHKONEN, E. (Ed). Use of Open-Ended Problems in Mathematics Classroom.Research Report 176. University of Helsinki, Dept. of Teacher Education, 1997.
— PERELMAN, Y. Matemáticas Recreativas. Moscú: Editorial Mir, 1975.
— PINO, J; BLANCO, LJ. Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y Chile, en relación con los contenidos de proporcionalidad. Publicaciones, 2008, nº 38, p. 63-88.
— POLYA, G. Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas. Traducción de Polya, G. (1945). How to solve it. Princeton: Princeton University Press, 1986.
— PONTE, JP; ABRANTES, P; FONSECA, H; BRUNHEIRA, L. Investigaçoes matemáticas na aula e no currículo. Lisboa: Asociación de Profesores de matemáticas, 1999.
— POZO, JL; PÉREZ, MP; DOMÍNGUEZ, J; GÓMEZ, MA; POSTIGO, Y. Solución de problemas Madrid: Santillana/Aula XXI, 1994.
— PUIG, L. Elementos de resolución de problemas. Granada: Comares, 1996.
— REUSSER, K; STEBLER, R. Every word problem has a solution-the social rationality of mathematical modeling in schools. Learning and instruction, 1997, vol. 7, nº 4, p. 309-327.
— RICO, L; LUPIÁNEZ, JL. Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular. Madrid: Alianza, 2008.
— SANTOS, M. Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. ZDM Mathematics Education, 2007, nº 39, p. 523—536.

— SILVER, EA; LEUNG, SS; KENNY, PA. Posing Mathematical problems in a complex task enviroment: An exploratory study. Journal for Research in Mathematics Education, 1996, vol. 27, nº 3, p. 293-309.

— SIMON, H. A. The structure of ill-structured problems. Artificial Intelligence, 1973, nº 4, p. 181-201.

— STACEY, K; SCOTT, N. Orientation to deep structure when trying examples: a key to successful problem solving. En CARRILLO, J.; CONTRERAS, LC.: Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos. España: Hergué, 2000, p. 119-146).

— TAHAN, M. El hombre que calculaba. Verón Editor. Barcelona, 1981.

— VILA, A. ¿Problemas de matemáticas? ¿Para qué? Una contribución al estudio de las creencias de profesores/as y alumnos/as. En Actas de la VII JAEM, 1995, p. 32-37.

CAPÍTULO 13
EJEMPLOS Y EJEMPLIFICACIÓN
EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Carlos Figueiredo y Luis Carlos Contreras González

Considérese un problema matemático cualquiera. Toda persona que pretenda resolver ese problema tendrá, *a priori*, que identificar comprensiblemente todos los conceptos matemáticos involucrados en él. Es decir, un problema matemático *está siempre* encuadrado por uno o más conceptos matemáticos, de forma que su resolutor tiene que conocerlos y saber articularlos para que, eventualmente, pueda llegar a su solución.

Tómese el problema geométrico de la Figura 1.

A una circunferencia pueden inscribirse y circunscribirse cuadrados como muestra la figura adjunta.

Sabiendo que el área del cuadrado inscrito es de cuatro unidades de superficie, ¿qué área tiene el cuadrado mayor?

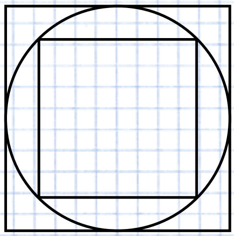


Figura 1. Problema geométrico: "Cuadrados inscritos y circunscritos en una circunferencia".

En este problema es fácil identificar de forma inmediata los conceptos de cuadrado y circunferencia, vienen referidos en el texto y, además, están representados gráficamente. Refiere, asimismo, las nociones de circunferencia inscrita o circunscrita a un cuadrado. Pero hay otros conceptos que no están presentes en el texto, y son fundamentales para poder emprender la tarea que permita encontrar la respuesta a la cuestión. Por ejemplo: la diagonal de un cuadrado, un triángulo rectángulo, el punto medio de un segmento de recta, la medida de la longitud de un segmento y la medida de un área. Este caso, igualmente, puede incluir la aplicación de un teorema, que no siendo un concepto, relaciona los conceptos de triangulo rectángulo, catetos, hipotenusa y respectivas medidas.

En conclusión, tiene sentido que algunos conceptos sean considerados en una fase anterior a la resolución de problemas. Como sabemos, para que se resuelva un problema matemático, no siempre son necesarios contenidos anteriormente presentados, se puede enseñar

ÍNDICE

a resolver problemas a través de los heurísticos que se desarrollan, pasando los conceptos a un segundo plano. Por esto, muchas veces, antes de que se enseñe a resolver problemas, es necesario trabajar los conceptos matemáticos que, en determinado contenido, estén presentes.

Cuando un profesor pretende enseñar un concepto matemático cualquiera a sus alumnos, es común y tradicional que empiece por presentar su definición. Los profesores con experiencia suficiente saben que la sola presentación de la definición no será suficiente para que los alumnos consigan entender y aplicar el concepto vehiculado por esa definición. Es por eso que, en una fase posterior, los profesores ilustran el concepto matemático con un conjunto de ejemplos que *encajan* en la definición presentada. En lo que concierne a este capítulo, tendremos como lema que las matemáticas se enseñan, sobretodo, a través de los ejemplos (Mason y Watson, 2005), ya que las definiciones adquieren su significado, principalmente a través de los ejemplos.

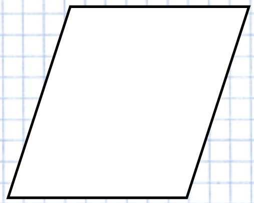
En todo caso, ejemplificar un concepto matemático (bien como nociones, procedimientos o teoremas) no es solamente la presentación aleatoria de uno u otro ejemplo. Desde una perspectiva de la enseñanza, existen varios aspectos del uso pedagógico de los ejemplos que enfatizan el significado y exprimen la complejidad de este elemento central de la enseñanza de los conceptos matemáticos (Zaslavsky, 2010). Para que la ejemplificación de un profesor sea efectiva, es necesario que se observen ciertos aspectos en la forma en la que se van a presentar los ejemplos (y qué ejemplos) a los alumnos. De todos esos aspectos a tener en cuenta a la hora de presentar nuestros ejemplos a los alumnos, este capítulo solamente referirá aquellos que consideramos los más importantes. Por supuesto, se irán dejando pistas para que aquél lector más curioso pueda, por si, profundizar en el tema.

Según Watson y Mason (2005), el término *ejemplificación* se usa para describir una situación en la que se presenta cualquier cosa específica y particular como representante de una clase más general, y para la cual se quiere dirigir la atención de los alumnos. Los objetos matemáticos solamente se asumen como ejemplos cuando son percibidos como "ejemplos *de* algo": concepto, conjeturas, aplicación de un procedimiento, métodos y técnicas, etc. La idea fundamental es el acto de *ver algo como ejemplo de alguna "cosa"* (Goldenberg y Mason, 2008).

A su vez, en educación matemática, la palabra *Ejemplo* es utilizada con una amplia variedad de sentidos (Bills *et al.*, 2006). Podemos entender como *ejemplo* la particularización de una definición o la resolución de un problema, pasando por el procedimiento matemático para ser reproducido por los alumnos. En todos estos sentidos podemos encontrar una inmensidad de ejemplos, los que presentamos en la Figura 2 sirven como ilustración de lo que hemos afirmado.

Las situaciones planteadas en la Figura 2 son 'ejemplos de ejemplos' a las que podríamos añadirles situaciones relacionadas con los teoremas y su aplicación, que nos llevaría a hablar de ejemplos de aplicación de un teorema. Como ilustración, tomemos el caso del teorema de Pitágoras para calcular la medida de la longitud de uno de sus catetos. En cualquiera de los sentidos, los ejemplos pueden ser vistos como herramientas culturalmente mediadoras entre los alumnos y los conceptos matemáticos, los teoremas, las técnicas y los problemas matemáticos. Los estudios relacionados con el aprendizaje de conceptos sugieren que los ejemplos y los no ejemplos, cuando son presentados de una forma pensada y ponderada, ayudan a distinguir los aspectos importantes de los menos importantes y a construir nuestra interpretación del concepto (Zaslavsky, Harel y Manaster, 2006). No importa si los ejemplos son presentados antes o después de las definiciones, antes o después de la sistematización de los procedimientos, antes o después de las demostraciones formales de los teoremas. Parece importante conocer la función que queremos destinar al ejemplo que se presenta. Si es una particularización de lo que es general; si es la aplicación de un teorema; si es para adquirir agilidad en el cálculo o en el uso de un procedimiento.

Definición: Un paralelogramo es un polígono con los lados paralelos dos a dos.
Ejemplo:



Procedimiento: Calcular el mínimo común múltiplo de dos números.
Ejemplo: Calcular el mínimo común múltiplo de 2 y 3.

1. Escribimos los primeros múltiplos de ambos números
   Múltiplos de 2: 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18
   Múltiplos de 3: 0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24
2. Señalamos los múltiplos que son comunes a 2 y 3
   Múltiplos de 2: 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18
   Múltiplos de 3: 0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24
3. Elegimos el menor de los múltiplos comunes que no sea el cero.
   El mínimo común múltiplo de 2 y 3 es el 6.

Problema: Problema geométrico
Ejemplo: ¿Qué relación hay entre el área del rombo y el área del cuadrado que lo contiene?

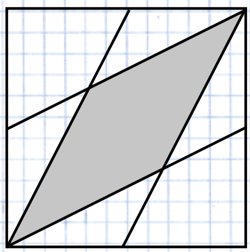


Figura 2. "Ejemplos de ejemplos".

En este momento, podemos responder a la cuestión: ¿qué es un ejemplo?

La respuesta no es sencilla. Para Watson y Mason (2002a), el término ejemplo es usado para cubrir una extensión amplia de géneros matemáticos, incluidos los ejemplos de clases. Ejemplos que ilustran conceptos, ejercicios resueltos que muestran técnicas, ejemplos de problemas y cuestiones que pueden ser resueltas, ejemplos de objetos apropiados que satisfacen determinadas condiciones, ejemplos de formas de responder a una pregunta, construcción de pruebas, y muchos otros. De un modo general, los ejemplos deben ser vistos dentro de un contexto dado. Watson y Mason (2005) utilizan el término *Ejemplificación* para describir cualquier situación en la cual algo específico se muestra para representar una clase con la cual el alumno debe familiarizarse. Así, un caso particular de una situación general, una cuestión de examen, una particularización de una definición, un objeto específico que invalida una generalización falsa, un procedimiento matemático para ser reproducido por los alumnos cabe dentro de lo que se llama la ejemplificación del profesor. Zaslavsky y Lavie (2005), en un estudio con los objetivos de explorar y caracterizar el uso que los profesores hacen de los ejemplos, definieron el concepto de *Ejemplo Instructivo*. Este término es utilizado para indicar cualquier ejemplo presentado por el profesor dentro de un contexto de enseñanza de un tópico en particular. Los *ejemplos instructivos*, en el aula, son una parte integrante de la enseñanza de las matemáticas que tienen una gran influencia en el aprendizaje de los alumnos.

1. LOS EJEMPLOS, NO EJEMPLOS Y CONTRAEJEMPLOS

La utilización de los ejemplos no es una tarea trivial del profesor. No basta presentar ejemplos y esperar que cumplan su función, puesto que su elección ha de hacerse dentro de un abanico de posibilidades, cada una de ellas vinculada a una finalidad concreta (Watson y Mason, 2005). Además, los profesores necesitan aceptar que, en ciertos momentos, algún ejemplo es "mejor" que otro (Huckstep, Rowland y Thwaites, 2002). Un *ejemplo* no es un objeto que exista de forma independiente, y el término *ejemplificación* no transmite cualquier contenido sin que haya una contextualización de lo que se pretende ejemplificar. Además, como fácilmente se constata, *aquello* que se ejemplifica puede surgir de una diversidad de situaciones. El uso de los ejemplos está tan integrado en los actuales modelos de enseñanza de las matemáticas que todo aquello que se pueda escribir sobre el uso de los ejemplos puede parecer banal. Sin embargo, en la misma medida que hacer uso de los ejemplos pueda ser trivial y común, escoger ejemplos y secuencias de ejemplos adecuados a nuestros propósitos constituye, desde luego, una ocupación que puede acarrear algunos problemas (Asghari, 2007).

Un *ejemplo* debe ser entendido como una situación particular referida a un concepto o a una definición.

Siendo así, a partir de la definición siguiente "Definición 1: Se llama *Poliedro* a un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos", podemos presentar como ejemplos una pirámide o un prisma.

Los *no-ejemplos* sirven para definir los límites de un concepto, de un caso en que un procedimiento no se aplique o falle en la obtención del resultado deseado o, también, para demostrar que las condiciones de un teorema son precisas, bien definidas (Bills *et al*. 2006). Son casos que, siendo próximos del ejemplo, no son ejemplos por no cumplir alguna regla inherente a la definición.

Así, en relación con la Definición 1, tenemos el no-ejemplo: cono, que no es un poliedro porque su cara lateral no es un polígono.

Consideremos, ahora esta otra definición: "Definición 2: Se llama *Poliedro Regular* a todo poliedro en el que todas sus caras son polígonos iguales y regulares, y de forma que en cada uno de sus vértices concurre el mismo número de caras.". En este caso podríamos presentar el no-ejemplo: pirámide triangular (que no sea un tetraedro regular).

Los *contra-ejemplos* nos son familiares por utilizarse para demostrar la falsedad de determinados argumentos o afirmaciones. Se utilizan para revelar mejor las diferencias entre conceptos o para definir bien sus límites (Zaslavsky y Ron, 1998).

Estos casos son ejemplos porque son objetos matemáticos, que verifican todas las características iniciales presentes en la afirmación pero que no poseen la/las características adicionales que la afirmación les atribuye.

Véase la siguiente afirmación (falsa) en Geometría del plano: "Afirmación: Todo cuadrilátero de diagonales perpendiculares y de igual longitud es un cuadrado". Un contra-ejemplo se muestra en la Figura 3.

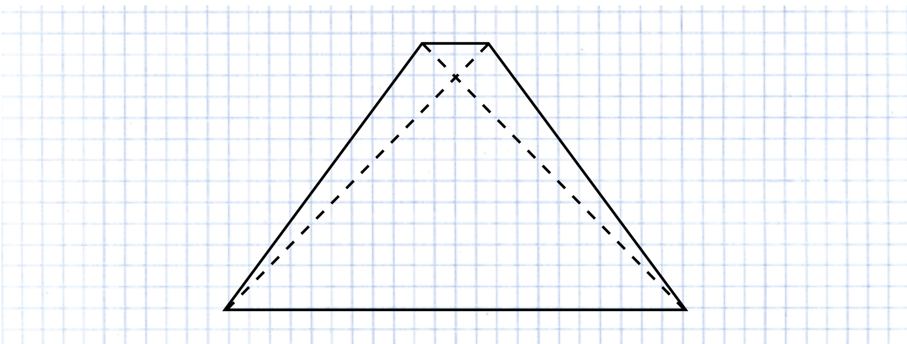


Figura 3. Contra-ejemplo

O, entonces, tratándose de un **argumento**, es un objeto matemático que verificando las características presentes en el antecedente, no posee las características imputadas por el consecuente. Como en el caso de este (falso) argumento:

"Argumento: Como 18, 36 y 72 son simultáneamente múltiplos de 9 y múltiplos de 6, entonces todos los múltiplos de 9 son también múltiplos de 6".

Esta afirmación se puede fácilmente contrariar con el contra-ejemplo 27.

2. SECUENCIAS DE EJEMPLOS Y VARIACIÓN

Muchos de los estudios que tratan el uso de secuencias de ejemplos sugieren que una secuencia específica de ejemplos tiene influencia en el aprendizaje. En particular, se recomienda la combinación de conjuntos de ejemplos, y de no ejemplos, en el seno de las secuencias de ejemplos, para focalizar la atención de los alumnos en los aspectos críticos de los ejemplos que son relevantes (Bills *et al*., 2006). Sin embargo, el uso de secuencias de ejemplos no tiene siempre el mismo rol u objetivo, las secuencias de ejercicios cuya vocación es la de mejorar la fluencia de rutinas y procedimientos son, probablemente, estructurados de forma diferente que aquellas destinadas a promover o inducir generalizaciones.

Mason (2003), en un trabajo sobre la estructura de la atención, se refiere a los trabajos de F. Marton y colegas sobre la noción de *Variación*. Marton y Booth (1997) dieron inicio a una nueva perspectiva en el contexto de la enseñanza de las matemáticas basada en el principio de que aprender consiste en hacer nuevas distinciones; simultáneamente, *discernir algo de*, y *relacionarlo con*, un contexto. En otras palabras, aprender a distinguir pormenores que antes no podíamos discernir. Sin embargo, hacer distinciones, discernir nuevas características es únicamente el inicio. Solo se pueden discernir nuevas características si existe un cambio, y solamente habrá variaciones si existe algo que, en nuestra percepción, se mantenga (relativamente) invariante. Es por esta razón que el tema de la *invariación en el centro del cambio* es tan importante en todas las matemáticas (Mason, 2003; Mason y Johnston-Wilder, 2006; Mason, 2008).

Los trabajos de F. Marton (e.g. Marton y Booth, 1997) se fundamentan en los resultados de una investigación que duró 25 años y que culminó en una teoría general sobre el *Aprendizaje y Conocimiento* llamada Teoría de la Variación. Esta teoría señala que "Si un aspecto de un fenómeno o evento varía mientras otro u otros se mantienen inalterados, se observará el aspecto cambiante". La parte del contenido que varía es llamada *Dimensión de la variación*. Para Marton y sus colegas la variación está en el centro de esta teoría pedagógica que se apoya en este aspecto esencial: aquello que puede ser alterado, que puede variar, sin modificar el sentido de invariación o de estructura se llama *Dimensión de la variación*. Destaquemos que si solo un aspecto en particular es presentado como una dimensión de variación, y si esa variación es comedida, es posible que esa variación sea mejor notada, pues se evidenciará ante un telón de fondo constituido por todos los otros aspectos que no variaron. Si todo estuviera variando nada podría ser discernido.

Posteriormente, Mason y Watson (2005) han desarrollado dos conceptos relacionados con la variación y que están íntimamente relacionados. En el ámbito de la variación, ampliaron el concepto de dimensión de variación al de *Dimensión de Variación Posible* para indicar que personas diferentes (o la misma persona) pueden encontrar diferentes aspectos que varían sin que el ejemplo deje de ejemplificar el concepto inicial. Al mismo tiempo, en cada una de las dimensiones, aquello que puede variar puede ser entendido con variaciones de amplitud diferente, para personas diferentes o en circunstancias diferentes; de este modo decimos que a cada *Dimension de Variación Posible* le corresponde siempre una *Amplitud de Cambio Permisible*.

En el contenido relativo a las potencias de números naturales, considérense las secuencias:

0; 1; 4; 9; 16; 25; 36 y 1; 2; 8; 16; 32; 64

Esta tarea se puede considerar un desafío del tipo ¿Qué es diferente y que es semejante en cada uno de los elementos de la secuencia?

En esta actividad se pretende que el alumno identifique lo que cambia y lo que no cambia. En el primer caso, todos los números son cuadrados; esto es, como potencias, el alumno debe discernir que es la base que varía pero el exponente permanece inalterado. En la segunda secuencia, por el contrario, es la base que permanece inalterada y es el exponente que varía.

Como fácilmente se observa, en las potencias, podemos identificar dos dimensiones de variación posibles y, cada una de ellas, con su amplitud de cambio permisible. Si nos situamos en el ámbito de sexto de primaria, en el primer caso, la amplitud de cambio permisible de la base puede ser cualquiera de los números naturales. Por otra parte, en la segunda secuencia, también la amplitud de cambio permisible abarca todos los naturales. Claro está que, transcurriendo los años, y a lo que le concierne al estudio de las potencias, las diferentes amplitudes de cambio se pueden alargar a números de otro tipo.

Según Mason (2011b), en la teoría de la variación, aprender es ser consciente de aquello que puede variar (dimensión de variación posible) y/o de la amplitud en que esa variación se puede efectuar (amplitud de cambio permisible), sin que se alteren significativamente las características del objeto. Ser consciente de lo que existe en un dado caso que lo convierte en ejemplo de algo es crucial para que se pueda aprender de él *como* ejemplo. Para que se consiga un aprendizaje en el alumno, o para que el alumno pueda hacer las generalizaciones pretendidas, el discernimiento del aspecto en cuestión puede ser conseguido de dos maneras: mantener el aspecto a generalizar inalterado mientras todo lo demás varia o, entonces, aplicar cambios en el aspecto en causa mientras todo lo demás se mantiene invariante. Tomar un ejemplo y proceder a pequeñas modificaciones, alterar ese ejemplo de modo que mantenga ejemplo de algo, crea una colección de ejemplos con *un aspecto en común* que se considera una *clase de ejemplos* del concepto.

En el aula, para que los alumnos puedan generalizar y abstraer, cabe al profesor controlar las dimensiones de variación posibles, y sus respectivas amplitudes de variación permisibles, con el objetivo de diseñar situaciones matemáticas capaces de animar a los alumnos a que se involucren en los contenidos matemáticos; conjuntamente, el análisis de las dimensiones de variación posibles pueden indicar las potencialidades y las debilidades de las situaciones matemáticas encuadradas en casos particulares. La consciencia de las dimensiones de variación posibles en las situaciones presentadas es, esencialmente, la percepción de la generalidad. Ayudar a los alumnos a abstraer un concepto matemático es equivalente a ayudarlos a tomar consciencia de los aspectos, características, relaciones e propiedades que son invariantes y, simultáneamente, de los aspectos y características importantes en los cuales se permite alguna variación (Mason, 2005).

Considera las situaciones siguientes:

Situación 1: Una persona tiene que comprar entradas de cine y sabe que cada una cuesta 5€. Completa el cuadro siguiente.

n.º de entradas	1	2	4	
Precio en Euros	5	10		15

Situación 2. Pedro tiene que llevar unos libros de la librería a la biblioteca de su escuela. Su profesor le aconsejó que no cargara demasiado su mochila: no más que 5 kilogramos. Sabiendo que todos los libros son iguales y que cada libro pesa 350 gramos, Pedro construyó una tabla con las cantidades que puede transportar.

n.º de libros	1	2	5		
Peso en gramos	350	750		3500	

Indica, en la última columna, el número máximo de libros que Pedro podrá transportar y su respectivo peso.

Situación 3: Una tornera llena un tanque a razón de 10 litros por minuto. De este modo, el volumen de agua en el tanque puede ser leído en la siguiente tabla:

n.º de minutos	1	5	7,5		T
Volumen de agua (litros)	V=10	V=50	V=	V=100	V=

Situación 4: Un grupo de amigos, para saber el precio de la gasolina en varios puntos de abastecimiento de la ciudad, fueron a repostar sus coches cada uno a su gasolinera. La cantidad de gasolina y respectivo precio pagado puede ser consultada en la siguiente tabla:

Gasolinera	A	B	C	D	E
litros de combustible	52	35.8	20		L
Cuantía pagada en euros	68.64	46.54		34.84	P
Precio por litro (€/l)	1.32		1.33	1.34	

Completa el cuadro y, en relación con la gasolinera E, explica el significado de la letra K en la expresión P=KL.

Figura 4. Secuencias de Ejemplos y Variación.

En sexto de primaria, consideremos el concepto de Magnitudes Proporcionales. Cuando los alumnos son confrontados con "Dos magnitudes son proporcionales si a medida que una aumenta o disminuye, la otra aumente o disminuye en la misma proporción.", muy probablemente no podrán intuir la generalidad que el concepto encierra. Los ejemplos presentados serán una herramienta muy potente para que el profesor pueda llevar los alumnos a generalizar el concepto de una forma correcta.

En la secuencia de ejemplos que se presenta en la Figura 4, la *Situación 1.* solamente requiere del alumno que relacione las dos cantidades, el precio de cuatro entradas y el número de entradas que cuestan 15 €. En la *Situación 2.* le situación presentada a los alumnos es identica a la anterior, pero con una condicionante: el número máximo de libros con peso inferior a 5Kg. Por su vez, la *Situación 3.* en la última columna, pretende que el alumno generalice la relación entre las dos cantidades a través de una expresión donde figuren las dos variables, el tiempo y el volumen. Por último, en la *Situación 4.* se pretende que, además de generalizar la expresión $P = KL$ (como en *3.*), se pretende que el alumno aísle la constante de proporcionalidad, y le dé significado.

3. TRANSPARENCIA DE UNA REPRESENTACIÓN Y EJEMPLOS TRANSPARENTES

La noción de transparencia está fuertemente relacionada con la representación que se utiliza para un concepto cualquiera. Una *representación transparente* es aquella que no tiene ni más ni menos significado que la idea o estructura que representa. Una *representación opaca* enfatiza unos aspectos de la idea o estructura y atenúa otros, normalmente los esenciales.

Asumiendo esta idea, Zazkis y Gadowsky (2001) afirman que todas las representaciones de números naturales son opacas, aunque cada una de ellas tiene aspectos transparentes. Para aclarar esta afirmación mostramos varias representaciones del número 46.656. Así pues, 216^2 es transparente a la idea de que 46.656 es un cuadrado perfecto; 36^3 muestra que 46.656 es un cubo perfecto; 3x15.552 permite concluir que 46656 es un múltiplo de 3 y de 15552; por último, la representación 5x7x31x43+1 nos indica que 466656 cuando es dividido por 5, 7, 31 o 43 conduce al resto 1.

La noción de representación transparente puede extenderse a otros contenidos en el estudio del número en primaria: el número 30 es transparente al hecho de que es un múltiplo de 10 porque el último digito es un 0; la fracción 3/7 es menor que la unidad ya que el numerador es menor que el denominador.

La representación de un lapso de tiempo 1.23 horas no es transparente a cuantos minutos y segundos ha transcurrido después de una hora. Pero la representación 1h 12′ 34″ sí lo es. Las representaciones 0.3 y 3/10 indican, en ambos casos, una cantidad igual a tres décimas partes de la unidad. En los años posteriores, en secundaria, cuando empiezan a surgir contenidos de álgebra y cálculo, donde las expresiones conllevan una generalidad, se pueden observar muchas más representaciones transparentes a conceptos matemáticos.

Posteriormente, la noción de transparencia fue objeto de un estudio más pormenorizado y se pudo observar que las representaciones transparentes presentaban diferencias en lo que concierne al *qué* y al *cómo* la representación es transparente; así, las representaciones fueron divididas en *inmediatamente transparentes* y en *mediatamente transparentes* (Figueiredo, 2010; Blanco, Figueiredo, Contreras y Mellado, 2010). Cabe referir que el estudio se focalizó en el uso de ejemplos en el ámbito de las funciones, aunque los dos tipos de transparencia descritos son perfectamente observables en otros conceptos matemáticos. La transparencia inmediata (o directa) coincide con la idea de transparencia descrita antes, mientras que la transparencia mediata (o indirecta) nos posibilita identificar aspectos relativos al concepto a partir de aspectos proporcionados por la transparencia inmediata, relacionándolos entre sí. En lo que respecta al concepto de número, podemos afirmar que 1236 es un número par (porque termina en 6); esto es, la representación 1236 es inmediatamente transparente a la idea de número par. Por otro lado, 1236 es divisible por tres (criterio de divisibilidad por tres: 1+2+3+6=12, como 12 es múltiplo de 3, entonces 1236 es divisible por tres), esta representación también es inmediatamente transparente al hecho de 1236 ser divisible por tres. Considerando que 1236 es simultáneamente divisible por dos y por tres, aspectos obtenidos por transparencia inmediata, podemos afirmar que esta representación es *mediatamente transparente* a la idea de múltiplo de 6. Con el ejemplo anterior podemos ver como la transparencia mediata (o indirecta) puede ayudar el profesor a transmitir al alumno la noción de máximo común divisor, o, tal vez, introducir problemas basados en la divisibilidad de números enteros. Una tarea interesante en este ámbito, pasa por mostrar (informalmente) que los divisores de un número se pueden obtener a través de multiplicaciones entre ellos, aunque la multiplicación de dos divisores de N no siempre es un divisor de N (Figura 5).

– Indica todos los divisores de 36.

– Qué puedes decir sobre las afirmaciones:

Si multiplicamos dos divisores cualesquiera de 36 obtenemos un divisor de 36.

A partir del 6, todos los divisores de 36 se pueden obtener del producto de dos divisores de 36.

Figura 5. Representaciones mediatamente transparentes.

En relación con los múltiplos de un número dado, se pueden presentar ejemplos semejantes, como se presenta en la Figura 6.

Indica si son verdaderas o falsas las afirmaciones:

– Si un número es simultáneamente múltiplo de 3 y de 10, entonces también es múltiplo de 30.
– Todo el múltiplo de 3 y 4, simultáneamente, es múltiplo de 12.
– Todos los números que son, al mismo tiempo, múltiplos de 3 y 6 también son múltiplos de 18.

Figura 6. Ejemplos semejantes.

Para que los alumnos observen esa transparencia se requiere, por parte del profesor, alguna orientación de forma que ellos puedan leer o interpretar las expresiones. Por ello, el papel que los ejemplos juegan en esa orientación es preponderante. Con ejemplos, o con secuencias de ellos, los alumnos podrán percibir lo que varía y lo que no varía, orientando su atención hacia los aspectos generales que se pretenden alcanzar. Como puede verse, la noción de *transparencia* es bastante versátil en su aplicabilidad. Zazkis y Gadowsky (2001) citan a Mason para recordar que cada representación atrae nuestra atención para diferentes representaciones del número. Además, la atención puede ser atraída para diferentes propiedades del número, del conjunto de números o del concepto matemático en estudio. Se revela especialmente importante que los profesores pongan atención a las estructuras de representación de los conceptos que utilizan, de forma que los alumnos puedan ver en las representaciones que se les presenta aquello que sus profesores quieren mostrar y constaten aquello que es transparente. Por ello, destacamos la sugerencia de R. Zazkis (2005), al señalar que debemos empezar por pedir a nuestros alumnos que *miren* y, después, que *miren otra vez*.

En suma, en la enseñanza y el aprendizaje de las ideas matemáticas, objetos matemáticos y procesos matemáticos debemos tener presente que capitalizar las potencialidades de una representación dada es una componente importante para la comprensión de las ideas matemáticas (Lesh, Behr y Post citados por Zazkis y Gadowsky, 2001). En la actividad del profesor, la transparencia de determinadas representaciones a ciertos aspectos de los conceptos debe ser algo a tenerse en cuenta. Para Zazkis y Gadowsky (2001) una selección cuidadosa de tareas puede ayudar a los alumnos a identificar aspectos transparentes de las representaciones de los números.

La divisibilidad por 10 es un contenido donde la idea de transparencia es muy utilizada por los profesores y por alumnos para resolver situaciones concretas, posiblemente sin que perciba esa transparencia, o sin que se tome consciencia de ella (Figura 7).

Un pastor tiene un rebaño 120 de ovejas. Cuando tiene que trasladar el rebaño de un pasto a otro, el pastor utiliza su camioneta. Como la camioneta del pastor puede llevar 10 ovejas, di cuantos viajes tendrá que efectuar el pastor.

Figura 7. Representación transparente de la divisibilidad por 10.

Como es natural, no es innata en los alumnos la noción de divisibilidad por diez. Es papel del profesor transmitir esa noción a los alumnos. Además, nos preguntamos si el profesor es consciente de la idea de transparencia de un número a la división exacta por diez. Es nuestra creencia que, si el profesor identifica las diversas transparencias de las representaciones con que trabaja en su quehacer diario, podrá ser más eficaz al transmitir esas ideas a sus estudiantes, ya que estará en condiciones de identificar y transmitir todos esos aspectos transparentes de las representaciones. En el caso particular de la división por diez, los libros de texto tratan la idea de transparencia de un número a la divisibilidad por diez sin que esa característica de la representación sea evidenciada. De hecho, lo normal es que se hagan dos o tres divisiones por diez y se extraiga una norma parecida con: "Para dividir un número, acabado en cero, por diez eliminamos el cero final." Al final nos podemos cuestionar si, al saber la norma y aplicarla, el alumno comprende realmente la idea de divisibilidad por diez y generalizar a la división por cien, mil, diez mil, etc. Más, ¿podrá el alumno identificar la transparencia de la representación 720000, a la divisibilidad por diez, cien, mil y diez mil en simultáneo? Y, además, ¿entender su significado?

Divide y completa la tabla en tu cuaderno:

División	Cociente	Resto	Exacta	Inexacta
120 : 10	12	0	X	-
3.400.000 : 10	340.000	0		
3.400.000 : 100		0		
3.400.000 : 1000				
3.400.000 : 10000				
3.400.000 : _______	34	0	X	-

Figura 8. Ejemplo de transparencia de una representación a la divisibilidad por cien.

En vez de poner situaciones del tipo: *"Resuelve las divisiones mentalmente: 120 : 10; 4.300 : 100; 17.000 : 100"* mediante la aplicación *ciega* de la norma, hay ejemplos que realzan mejor la idea de divisibilidad por diez, cien, mil, etc. (Figura 8).

4. LA UTILIZACIÓN CONJUNTA DE LA VARIACIÓN Y LA TRANSPARENCIA

En la práctica, es muy aconsejable que la variación y la transparencia se utilicen de forma integrada. De una forma general, la variación ayuda a facilitar la percepción de transparencia inmediata de una representación dada y, posteriormente, facilitar al alumno percibir las transparencias mediatas que estén asociadas. En todo caso, muchas veces, para percibir la variación es necesario *ver* a qué la representación es transparente; y por eso, no se puede afirmar perentoriamente que es la variación la que hace *ver* la transparencia de la representación ni, tampoco, que es la transparencia la que permite ver lo que varía y lo que no varía. Es por eso que estos dos aspectos de la ejemplificación del profesor de matemáticas van tan unidos y aparecen, casi siempre, de forma simultánea (Figura 9). La simbiosis entre la variación y la transparencia se observa muy bien en los tipos de ejemplos que Figueiredo y Contreras (2013) proponen cuando distinguen los ejemplos estáticos – casos de papel y lápiz – de los ejemplos dinámicos – con recurso a Geogebra, o con otro software similar – aunque ambos casos integren estos dos conceptos.

En la secuencia presentada en la Figura 9 el alumno puede percibir que todos los factores son números múltiplos de 10, 100 o 1000, ya que las representaciones utilizadas son transparentes a ese hecho. Del mismo modo, también pueden percibir que los productos encontrados son múltiplos de 100, 1000 o 10.000, y por esa vía generalizar la norma, normalmente utilizada, que consiste en multiplicar los factores 2, 3, 5, 22 o 33, y sumar todos los ceros presentes.

En cada uno de los casos, y con la ayuda de la calculadora, completa en tu cuaderno:

1. 30×50 = ____________________
2. 300×50 = ___________________
3. 300×2000 = _________________
4. 33000×2200 = _______________

Explica, con tus palabras, una manera fácil de calcular los productos sin utilizar la calculadora.

Figura 9. Ejemplo de uso integrado de la Variación y la Transparencia.

Otra situación donde es aconsejable hacer uso de la variación y de la transparencia es aquella que permita evitar las generalizaciones precipitadas (Figura 10).

En el ejemplo de la Figura 10 es muy probable que alguno de los alumnos de la clase escriba 4x4 y 5x5, justamente porque el ejemplo (mal seleccionado) puede inducir una falsa generalización. En este caso, sería más aconsejable alterar la estructura de la actividad:

Considerando que 3+3+3=3×3, escribe la siguiente suma en forma de multiplicación:

4+4+4= ______ × _____

5+5+5= ______ × _____

Figura 10. Uso integrado de la Variación y la Transparencia para evitar generalizaciones precipitadas.

Considerando la relación que existe entre la suma y el producto, completa la tabla en tu cuaderno.

Suma de parcelas	Producto de factores
2+2+2	3×2
5+5+5	3×5
8+8+8	3× __
4+4+4+4+4+4	__ ×4
3+3+3_______	5×3

Figura 11. Uso integrado de la Variación y la Transparencia para la comprensión y generalización de conceptos.

Con la secuencia de ejemplos presentada en la Figura 11, la variación lleva al alumno a la comprensión del concepto de multiplicación de números naturales y, al mismo tiempo, le permite generalizar el concepto al identificar que la transparencia de la representación nxa equivale a una suma en que la parcela a figura n veces, en casos concretos.

Con los ejemplos anteriores se puede concluir la importancia del uso de la variación para que el alumno adquiera la capacidad de identificar aspectos transparentes de las representaciones. Esto es, cómo la transparencia necesita de la variación para poder *mostrar* las potencialidades de la representación y, por su parte, cómo la variación carece de las características transparentes de las representaciones para ser mejor *percibida*. La sinergia entre la variación y la transparencia es un factor de enseñanza que posibilita que los alumnos generalicen y abstraigan los conceptos.

En síntesis, lo que se pretende es que los alumnos puedan *ver* aquello que las representaciones muestran. Dicho de otra forma, las representaciones no son transparentes de forma automática, tenemos que ser nosotros, los profesores, quienes ayudemos a los alumnos a *ver* aquello que las representaciones tienen para mostrar. Y entonces, cuando los alumnos puedan *ver* los aspectos transparentes de las representaciones, se podrá afirmar que la generalización o la abstracción del concepto se ha hecho efectivo.

Con todo lo que se expuso, esperamos que las nociones (necesariamente breves) sobre la utilización de los ejemplos en clase de matemáticas, y todos los ejemplos aportados, puedan dar una idea sobre el asunto. Además, esperamos que el abordaje del asunto pueda despertar el lector para la problemática que la ejemplificación supone, de forma que, cada vez que en clase presente un ejemplo, pueda estar consciente de que ejemplificar es mucho más que presentar ejemplos.

BIBLIOGRAFÍA

— BILLS, L; DREYFUS, T; MASON, J; TSAMIR, P; WATSON, A; ZASLAVSKY, O. Exemplification in Mathematics Education. In NOVOTNA, J.; MORAOVÁ, H.; KRÁTKÁ, M.; STEHLÍKOVÁ, N. (Eds.): Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Prague: Czech Republic, 2006, p. 126-154.

— BLANCO LJ; FIGUEIREDO, CA; CONTRERAS, LC; MELLADO, V. The use and classification of examples in learning the concept of function: A case study. In NATA, RV (Ed.): Progress in Education. New York, USA: Nova Publishers, 2010, vol. 9, p. 129-156.

— GOLDENBERG, P; MASON, J. Sheding light on and with example spaces. Educational Studies in Mathematics, 2008, nº 69, p. 183-194.

— FIGUEIREDO, CA. Los Ejemplos en Clase de Matemáticas de Secundaria como Referente del Conocimiento Profesional. (Tesis Doctoral), Universidad de Extremadura, Badajoz, España, 2010.

— FIGUEIREDO, CA; CONTRERAS, LC; BLANCO LJ. La ejemplificación del concepto de función: diferencias entre profesores noveles y profesores expertos. Educación Matemática, 2012, Vol. 24, n.º 1, p. 5-37.

— FIGUEIREDO, CA; CONTRERAS, LC. A função quadrática: variação, transparência e duas tipologias de exemplos. Avances de Investigación en Educación Matemática, 2013, nº 3, p. 45-68.

— HUCKSTEP, P; ROWLAND, T; THWAITES, A. 'Primary Teachers' Mathematics Content Knowledge: What does it look like in the Classroom?', Proceedings of BERA Conference, University of Exeter, 2002.

— MARTON, F; BOOTH, S. Learning and Awareness. Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum, 1997.

— MASON, J; WATSON, A. Mathematical Exercises: what is exercised, what is attended to, and how does the structure of the exercises influence these? Invited Presentation to SIG on Variation and Attention. Nicosia, Greece: EARLI, 2005.

— MASON, J; JOHNSTON-WILDER, S. Designing and using mathematical tasks (2nd ed.). St. Albans: Tarquin, 2006.

— MASON, J. Structure of Attention in the Learning of Mathematics, in J. NOVOTNÁ (Ed.) Proceedings, International Symposium on Elementary Mathematics Teaching, Charles University, Prague, 2003, p. 9-16.

— MASON, J. What is Exemplified in Mathematics Classrooms?, 2005. Recuperado de: http://mcs.open.ac.uk/jhm3/OtherPapers/Mason%202005%20What%20is%20Eg%27d

— MASON, J. Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In KAPUT, J.; CARRAHER, D.; BLANTON, M. (Eds.): Algebra in the early grades. New York: Erlbaum, 2008, p. 57–94.

— MASON, J. Phenomenology of Example Construction. ZDM, 2011b, vol. 43, nº 2, p. 195-204.

— WATSON, A; MASON, J. Extending example spaces as a learning/teaching strategy in mathematics. In COCKBURN, A.; NARDI, E. (Eds.): Proceedings of PME 26, University of East Anglia, 2002a, vol 4., p. 377.

— WATSON, A; MASON, J. Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2005.

— ZASLAVSKY, O; RON, G. Students' understanding of the role of counter-examples. Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Stellenbosch, South Africa., 1998, vol. 1, p. 225-232.

— ZASLAVSKY, O; LAVIE, O. Teachers' use of instructional examples. Paper presented at the 15th ICMI study conference: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. Águas de Lindóia, Brazil, 2005.

— ZASLAVSKY, O; HAREL, G; MANASTER, A. A teacher's treatment of examples as reflection of her knowledge-base. In NOVOTNÁ, J. ; MORAOVÁ, H.; KRÁTKÁ, M.; STEHLÍKOVÁ, N. (Eds.): Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Prague, Czech Republic, 2006, vol. 5, p. 457–464.

— ZASLAVSKY, O. The explanatory power of examples in mathematics. Challengs for teaching. In M. K. STEIN, L. KUCAN (Eds.), Instructional explanations in the disciplines. New York: Springer, 2010.

— ZAZKIS, R; GADOWSKY, K. Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In CUOCO, A. (Ed.): NCTM 2001 Yearbook: The roles of representation in school mathematics. Reston, VA: NCTM, 2001, p. 41-52.

— ZAZKIS, R. Representing numbers: prime and irrational. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2005, vol. 36, nº 2-3, p. 207-217.

CAPÍTULO 14
LA EVALUACIÓN SOBRE
LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

María J. Cáceres García y José M. Chamoso

A pesar de las directrices que se establecen en los currículos oficiales de muchos países del mundo referidas a resolución de problemas, considerada como eje vertebrador de la enseñanza y aprendizaje de matemáticas, a los estudiantes, usualmente, se les siguen planteando actividades para cuya resolución se ha de aplicar una estrategia que deben identificar de forma inmediata puesto que se les ha entrenado previamente para ello.

Muchos estudiantes se quejan de que, cuando resuelven problemas de matemáticas, a sus profesores sólo les interesa el resultado. El problema está bien cuando el resultado es correcto; en otro caso está mal y no hay nada que valorar. Aunque en nuestra sociedad estamos acostumbrados a una escala de calificación de 0 a 10, la situación anterior permite poco más de dos calificaciones que coinciden con los valores extremos. En la realidad, esto no es completamente cierto porque, generalmente, el docente suele asignar calificaciones intermedias basadas en unos criterios propios, usualmente claros y fundamentados por la experiencia, pero que, sin embargo, pueden no coincidir con los que tiene el profesor del aula contigua. Además, estos criterios no siempre están escritos y, cuando lo están, suelen ser desconocidos por los estudiantes.

En capítulos anteriores se ha tratado en profundidad qué es un problema de matemáticas en diferentes sentidos. En éste nos preocupa su evaluación. Se pretende dotar de significado a los diversos valores de la calificación y posibilitar el uso de la evaluación para obtener información útil para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje.

1. LA EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES

El significado de la evaluación ha ido variando según las finalidades que se le otorgan, desde la medición del logro de los alumnos hasta la recolección sistemática de evidencias para ayudar a la toma de decisiones que se refieran al aprendizaje de los estudiantes o al desarrollo de los materiales y el programa (Romberg, 1989). La evaluación ha sufrido pocos cambios a lo largo del tiempo y, en muchas ocasiones, los profesores la consideramos como algo aislado, separado del proceso de enseñanza-aprendizaje, que sirve para mostrar resultados al final del proceso. No en vano, es frecuente establecer varios periodos cerrados de información durante el curso que se llaman primera, segunda o tercera evaluación. Al finalizar cada uno de estos periodos, los estudiantes reciben las "notas".

La evaluación es una parte fundamental del proceso de enseñanza-aprendizaje que no se puede considerar de forma aislada. En este trabajo entendemos la evaluación como elemento fundamental dentro del curriculum y, por tanto, unida a la instrucción. Este aspecto está siendo cada vez más relevante para la comunidad de educadores matemáticos, como así ponen de relieve publicaciones tanto en el campo de la investigación como en el de la innovación (por ejemplo, Azcárate, 2006). Los métodos y requisitos de la evaluación tienen más influencia en qué y cómo aprenden los estudiantes que cualquier otro factor del proceso de enseñanza-aprendizaje. Los alumnos se adaptan, en cada caso, a la forma de explicar y de evaluar del profesor y estudian en función de qué, cómo y cuándo serán evaluados. Conocedores de esta realidad, los docentes debemos realizar un cambio de concepción de la evaluación como instrumento sancionador con el que mostrar autoridad para pasar a considerarla como un proceso que sirva de autorreflexión al alumno, para que sepa qué es capaz de hacer, qué debe mejorar y cuáles son sus errores. Y, finalmente, aprovechar esta información para guiar el aprendizaje de cada estudiante y tomar decisiones tanto instruccionales como institucionales (Boud, 2000; Cardenas, Blanco, Gómez y Guerrero, 2013; Chamoso y Cáceres, 2009).

Habitualmente se hace referencia a dos tipos de evaluación: la formativa, que trata de la orientación y asesoramiento de los estudiantes y suele ser de carácter cualitativo, y la sumativa, que se ocupa de la calificación y promoción de los alumnos, y suele ser cuantitativa. En el mundo anglosajón se diferencian los términos *assessment* y *evaluation* según se asocie a la evaluación formativa o a la sumativa respectivamente (Rico, 1993). Desde las directrices nacionales e internacionales se aconseja el carácter formativo de la evaluación de manera que se utilice como un instrumento útil tanto para los profesores, puesto que puede favorecer la reflexión sobre la práctica docente mediante información de fortalezas y debilidades de la propia actuación, como para los alumnos, puesto que les permite ser conocedores de lo que saben y lo que deben seguir trabajando, así como de su proceso de aprendizaje (Chamoso, Cáceres y Azcárate, 2012).

Se recomienda que la evaluación sea continua, orientadora y criterial. Continua, puesto que debe comenzar con la evaluación inicial, continuar durante todo el proceso formativo y terminar con la evaluación final en un proceso que debe ser algo más que aumentar el número de pruebas escritas puesto que ha de incluir actividades variadas con las que el profesor pueda realizar un adecuado seguimiento del progreso de aprendizaje. Orientadora, como instrumento que permita diagnosticar logros y debilidades para después buscar soluciones con nuevas estrategias de enseñanza-aprendizaje. Criterial, de manera que fije la atención en el progreso individual del alumno respecto a metas establecidas desde el comienzo del curso y cuyo punto de partida se establezca en la evaluación inicial (BOE, 2006a; NCTM, 2000).

Si deseamos realizar una evaluación criterial, en el diseño de nuestro sistema de evaluación hemos de seleccionar los aspectos en los que nos fijaremos, y establecer evidencias y criterios que permitan su valoración. Estos criterios dependerán de las características de las tareas y de los objetivos que pretendamos conseguir con su realización y deben reunir las siguientes características (Azcárate, 2006): *Flexibilidad*: pueden ser cambiados siempre que se considere apropiado; *Personalización*: han de adecuarse a nivel individual de acuerdo a las necesidades e intereses y *Equilibrio* entre cantidad y calidad, y, en caso de conflicto, priorizar la calidad. En concreto, para la evaluación de tareas relacionadas con el aprendizaje matemático recomienda, además de criterios de carácter general como la participación en el aprendizaje o la aplicación práctica del conocimiento, otros más vinculados con aspectos cognitivos como: *Pertinencia:* adecuación a las nociones o destrezas trabajadas; *Profundidad:* evidencia en las respuestas de un estudio rico y variado; *Amplitud:* utilización de diversidad de conceptos o estrategias; *Precisión:* uso de detalles pertinentes en una exposición clara y precisa; *Coherencia:* empleo de nexos lógicos para formar un todo a partir de la coordinación de diversos elementos; *Lenguaje:* utilización correcta de reglas y terminología matemática; *Exactitud:* comprensión percibida en los errores y/o terminología utilizada; *Creatividad:* presentación de ideas de forma diferente a la usual; *Contextualización:* establecimiento de relaciones con otras ideas y saberes y *Autonomía:* selección entre diversas ideas y recursos, muestras de iniciativa.

Si pretendemos realizar una verdadera evaluación formativa, debemos decidir qué criterios son los adecuados a nuestros objetivos de enseñanza, qué instrumentos y técnicas son más apropiados y en qué momento debemos utilizarlos, qué actividades permitirán realizar un mejor seguimiento y, además, qué instrumentos facilitarán la valoración de las diversas actividades que se utilicen a lo largo del proceso. Además, los estudiantes deben ser conocedores en todo momento de los criterios por los que van a ser evaluados. Entenderlos, ser capaces de aplicarlos al trabajo propio e, incluso, cambiar las reglas en determinados casos son aspectos importantes para su formación. De hecho, un indicador de la excelencia del progreso sería que cada alumno pudiera evaluar su propio trabajo de la misma forma que lo hacen sus profesores. La autoevaluación permite la colaboración entre estudiante y profesor (Cáceres, Chamoso y Azcárate, 2010; Shepard, 2001).

Para facilitar la compleja tarea de valorar las diversas actividades que compondrán el entramado del proceso evaluativo, tanto a alumnos como a profesores, se pueden utilizar matrices de valoración, que se suelen llamar rúbricas o listas de valoración. Estas matrices son instrumentos que facilitan la calificación y, además, permiten que los estudiantes conozcan con antelación los criterios con los que las diversas tareas serán valoradas de manera que proporcionen una valiosa información cualitativa para la mejora del proceso de aprendizaje. Tanto en unas como en otras se reflejan los criterios de evaluación y se establecen distintos niveles de consecución para cada uno de ellos (Graue, 1995; Ross, McDougall y Hogaboam-Gray, 2003; Shepard, 1995; Silver y Kenney, 1995).

Las rúbricas de evaluación pueden ser holísticas o analíticas en función del tipo de evaluación que se desee realizar y los criterios que consideremos para ello. Las rúbricas holísticas se utilizan generalmente para realizar una evaluación de naturaleza sumativa, ya sea para evaluar la adquisición de un conocimiento concreto o bien para valorar la calidad global de actividades abiertas donde no haya una respuesta correcta definitiva y pueda permitir errores en el proceso. Las analíticas se suelen utilizar para una evaluación más pormenorizada de los diversos aspectos que se consideran fundamentales en el proceso. Estas rúbricas son más costosas de construir y de aplicar que las holísticas pero, por otro lado, permiten un alto grado de retroalimentación para los estudiantes (Nitko, 2001).

Mertler (2001) ofreció indicaciones para elaborar cada una de ellas (Tabla 1 y Tabla 2).

Tabla 1. Plantilla para rúbricas holísticas.

Valoración	Descripción
5	Demuestra una comprensión completa del problema. Incluye en la respuesta todos los requisitos de la tarea
4	Demuestra una comprensión considerable del problema. Incluye todos los requisitos de la tarea
3	Demuestra una comprensión parcial del problema. Incluye la mayoría de los requisitos de la tarea
2	Demuestra una comprensión mínima del problema. No incluye varios requisitos de la tarea
1	Demuestra que no comprende el problema
0	No contesta o no intenta hacer la tarea

Tabla 2. Plantilla para rúbricas analíticas.

Nivel	Inicial 1	En desarrollo 2	Conseguido 3	Ejemplar 4	Valoración
Criterio 1	Descripción que refleje el nivel de rendimiento de partida	Descripción que refleje el movimiento hacia el nivel de dominio	Descripción que refleje la consecución del nivel de dominio	Descripción que refleje el nivel más alto de rendimiento	
Crierio2					
Criterio3					
…					

Cuando la matriz de valoración no se completa con la descripción que refleje el cambio de un nivel a otro, sino que se establece un criterio general para determinar el nivel de consecución de todos los criterios, en lugar de rúbrica se suele llamar plantilla o lista de valoración, o de cotejo. En cualquier caso, los criterios pueden ser valorados en una escala cualitativa que caracterice el nivel alcanzado por cada alumno en cada caso, permitiendo valorar progresivamente su avance contrastando entre las situaciones inicial y final. No todos los criterios han de ser valorados con la misma ponderación sino que ésta dependerá de los objetivos de enseñanza y aprendizaje, y de evaluación planteados.

2. LA VALORACIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE MATEMÁTICAS

En la legislación actual se valora la importancia de la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas. Ya en el Real Decreto que establece las enseñanzas mínimas para la etapa de Educación Primaria se señala

> Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje matemático [...], puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática. En la resolución de un problema se requieren y se utilizan muchas de las capacidades básicas: leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo que se va revisando durante la resolución, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución si se ha encontrado, hasta la comunicación de los resultados (BOE, 2006b, p. 43096).

En su homólogo para Educación Secundaria se dice

> En todos los cursos se ha incluido un bloque de contenidos comunes que constituye el eje transversal vertebrador de los conocimientos matemáticos que abarca. Este bloque hace referencia expresa, entre otros, a un tema básico del currículo: la resolución de problemas. Desde un punto de vista formativo, la resolución de problemas es capaz de activar las capacidades básicas del individuo, como son leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo, revisarlo, adaptarlo, generar hipótesis, verificar el ámbito de validez de la solución, etc. pues no en vano es el centro sobre el que gravita la actividad matemática en general (BOE, 2007, p. 750).

Una actividad tan importante para el aprendizaje matemático debe ser evaluada de acuerdo a lo establecido anteriormente. Pero, cuando nos planteamos la evaluación de la resolución de un problema matemático, es posible que no todos estemos pensando en lo mismo. Ya se ha explicado en este libro la diversidad de tipos de problemas que se pueden plantear en matemáticas como pueden ser abiertos, realistas, auténticos o de otro tipo. En función de nuestros objetivos de enseñanza y criterios de evaluación plantearemos unos tipos u otros y estaremos interesados en el procedimiento de resolución con mayor o menor intensidad. Utilizando ejemplos como los del capítulo 6 de este libro, podemos trabajar el cálculo de la superficie de un rectángulo con un planteamiento propio del contexto real del alumno: Calcular la superficie del aula sabiendo que mide 7 m. de ancho y 11 m. de fondo. Con la elección de cada tarea establecemos su complejidad lo que repercutirá en la acción del resolutor y, probablemente, en la del evaluador.

En la evaluación de la resolución de problemas se suele destacar la importancia del proceso de resolución en sus diversas fases. Por ello se debe tener en cuenta el desarrollo y las ideas que han tenido lugar durante el proceso, las conjeturas, imágenes o intenciones; estrategias de comprensión tales como diagramas, tablas, gráficos o cualquier otra forma que permita expresar la información; el diseño de un plan como la utilización de métodos algebraicos o aritméticos, trasladar el problema a un contexto geométrico o numérico o descomponerlo en otros más simples y, finalmente, verificar el resultado de las operaciones, considerar las conexiones entre los contenidos para analizar el significado de la solución (Santos, 2007).

Para poder valorar en profundidad esta información parece adecuada la utilización de matrices de valoración analíticas considerando criterios correspondientes a cada uno de los aspectos que estimemos importantes. A continuación mostramos algunos ejemplos que plantean diversos niveles de complejidad, tanto de elaboración como de aplicación, que han sido utilizadas por algunos autores para la evaluación de resolución de problemas de matemáticas.

Villa y Poblete (2007) consideraron la resolución de problemas como una competencia genérica instrumental integrada dentro de un sistema de enseñanza universitaria basado en competencias. Para su evaluación presentaron una rúbrica muy completa en la que establecieron tres niveles de dominio: l. Identificar y analizar un problema para generar alternativas de solución, aplicando los métodos aprendidos; 2. Utilizar su experiencia y criterio para analizar las causas de un problema y construir una solución más eficiente y eficaz; y 3. Proponer y construir en equipo soluciones a problemas en diversos ámbitos, con una visión global. Para cada uno de ellos establecieron 6 indicadores de forma global que adaptaron en cada dominio: 1. Identificación; 2. Definición; 3. Recogida de información; 4. Metodología; 5. Alternativas; 6. Plan de actuación. Cada indicador es valorado de 1 a 5 por medio de descriptores.

Los autores de este capítulo utilizamos, en aulas de formación de docentes, la lista de valoración que se muestra en la Tabla 3 para trabajar las dificultades que plantea la evaluación de la resolución de problemas. A partir de la aplicación de esta matriz de valoración a la resolución de algunos problemas, en el aula los estudiantes trataban de mejorar los criterios de valoración y planteaban la posibilidad de establecer ponderaciones a cada apartado que permitieran dar una información cuantitativa a la resolución de cualquier problema.

Thomas (2008) planteó el método A+E+I+O=U para mostrar el razonamiento seguido en la resolución de problemas de matemáticas, donde estas letras son las iniciales en inglés de Respuesta (*Answer*), Explicación eficiente (*Efficient Explanation*), Información (*Information*), Organización (*Organization*) y Comprensión (*Understanding*). El método básicamente consiste en acostumbrar a los estudiantes a responder preguntas relativas a cada uno de estos aspectos antes de entregar sus tareas. Además se les plantea que se pregunten: por qué han elegido esas estrategias, por qué alguien podría argumentar a favor de un método diferente o por qué es significativo el concepto estudiado. Posteriormente se les facilita la lista de evaluación presentada en la Tabla 4, donde el autor presenta de forma muy precisa los indicadores que establecen niveles de calidad en los aspectos sobre los que previamente se les ha preguntado. Probablemente, por su extensión, el autor no la expresó en forma de matriz sino que enumeró los indicadores para cada aspecto en forma de lista.

Una rúbrica de evaluación más simple es la presentada por Azcárate (2006), empleada en un contexto de utilización de un portfolio de aprendizaje de la asignatura de matemáticas para autoevaluar las capacidades en resolución de problemas. Esta matriz de valoración (Tabla 5) se utilizó con alumnos de Enseñanza Secundaria, pero se podría adaptar fácilmente para ser utilizada en Primaria.

TABLA 3. MATRIZ DE VALORACIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA PARA TRABAJO CON FUTUROS DOCENTES.

Valoración de la resolución de un problema

5: Totalmente de acuerdo
4: De acuerdo
3: Indiferente
2: Con desacuerdos
1: Totalmente en desacuerdo
– : No procede

	CRITERIOS	5	4	3	2	1	–
Contenido	Conoce los conceptos	5	4	3	2	1	-
	Relaciona unos conceptos con otros	5	4	3	2	1	-
	Realiza correctamente los cálculos	5	4	3	2	1	-
Procedimiento	Explica el planteamiento	5	4	3	2	1	-
	Describe la estrategia de resolución	5	4	3	2	1	-
	Utiliza instrumentos aclaratorios: gráficos, casos particulares, otros	5	4	3	2	1	-
	Dice qué va a hacer y lo hace	5	4	3	2	1	-
	Resuelve de varias formas y generaliza	5	4	3	2	1	-
	Verifica los resultados	5	4	3	2	1	-
Aspectos generales	Añade a las cantidades su significado y utiliza correctamente la notación elegida	5	4	3	2	1	-
	Organiza la información	5	4	3	2	1	-
	Estructura correctamente el trabajo	5	4	3	2	1	-
	Presenta con limpieza, orden, margen…	5	4	3	2	1	-
Resolución global	La solución es correcta globalmente	5	4	3	2	1	-
	Obtiene resultados parciales correctos	5	4	3	2	1	-
	Generaliza la respuesta	5	4	3	2	1	-

Valoración general y observaciones

TABLA 4. MÉTODO A+E+I+O=U PARA EVALUAR EL RAZONAMIENTO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (THOMAS, 2008).

A para Respuesta	
1.	La respuesta es exacta, responde directamente a la pregunta formulada, está claramente indicada y con la unidad de medida adecuada. Indica que el estudiante entiende la pregunta.
2.	La respuesta es muy razonable y casi exacta, pero falta una pequeña cantidad o utiliza mal la unidad de medida (por ejemplo, el estudiante utiliza cm. en vez de pulgadas). O es una estimación, pero está etiquetada como exacta cuando se pide una respuesta exacta (por ejemplo, un estudiante contesta 1.41 cuando se pide la raíz cuadrada de 2).
3.	La respuesta es razonable o precisa pero tiene un error grave en la unidad de medida empleada (por ejemplo, el estudiante mide un área en cm en vez de en cm2).
4.	Se proporciona una respuesta a la que se llega mediante un proceso razonable, pero no es adecuada o se comete un gran error (por ejemplo, el estudiante da la altura de un edificio como 40000 pies en vez de 400 pies).
5.	La respuesta no es razonable o esencialmente carece de respuesta.
E para Explicación	
1.	La explicación es clara, eficiente y sin errores, o el estudiante proporciona múltiples explicaciones que conecta unas con otras, como revisar un proceso con un segundo enfoque.
2.	La explicación es eficaz pero no necesariamente es la opción más eficiente. O la descripción es correcta pero torpe o prolija, expresada sin la utilización de notación matemática o símbolos.
3.	La explicación es adecuada y efectiva pero puede contener una o dos pequeñas lagunas donde no se expresa cómo se llega a las conclusiones o los pasos seguidos para llegar a la respuesta.
4.	Se inicia la explicación; el proceso iniciado podría ser eficaz si se completara.
5.	La explicación no muestra una estrategia adecuada o esencialmente no se realiza.
I para Información	
1.	La información necesaria para resolver el problema es completa y está claramente destacada. Todas las cantidades están acompañadas de la unidad de medida correspondiente y el proceso de obtención es explícito. La notación matemática está usada correctamente y los términos están definidos.
2.	La mayoría de información está disponible y las cantidades están acompañadas de la unidad de medida, pero existen pequeños errores o faltan unidades (por ejemplo, un aspecto importante de la solución del problema, como "2cm. por cada 3 minutos" se expresa simplemente como "2/3").
3.	La mayoría de las cantidades están acompañadas de la unidad de medida pero faltan algunas unidades que confunden el proceso.
4.	Las unidades de medida están mal utilizadas o no se especifican. Las variables se utilizan sin haber sido definidas.
5.	La notación y las unidades de medida se utilizan muy poco o nunca.
O para Organización	
1.	La organización es exhaustiva y completa. Se puede seguir el proceso de pensamiento en la explicación, los pasos están indicados correctamente o siguen un orden lógico.
2.	El proceso surge en orden pero se salta algunos pasos de menor importancia que el estudiante considera obvios.
3.	Los pasos están indicados o siguen un orden; sin embargo, el proceso puede contener errores en la resolución de ecuaciones o faltan pasos que confunden la explicación (por ejemplo, para dar respuesta a 12cm por 3 menos 6cm un estudiante puede escribir 12*3=36-6cm mostrando poco respeto por el signo igual así como por la consistencia de las unidades).
4.	Se intenta organizar el proceso pero los pasos están desordenados o faltan pasos importantes del proceso.
5.	El proceso es desorganizado, ilegible u oculto, o es complicado o imposible de seguir.
Lo que equivale a U (Comprensión)	

TABLA 5. PLANTILLA PARA AUTOEVALUAR LAS HABILIDADES DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

	Lo hago bien	A veces tengo dificultades	Lo hago con ayuda	No lo sé hacer
Dado un problema, comprendo la información del enunciado	☐	☐	☐	☐
Soy capaz de expresar con mis propias palabras el problema	☐	☐	☐	☐
Soy capaz de distinguir qué datos son importantes y cuáles no	☐	☐	☐	☐
Soy capaz de representar gráficamente el problema	☐	☐	☐	☐
Soy capaz de planificar un proceso que resuelva el problema	☐	☐	☐	☐
Soy capaz de resolver correctamente todas las operaciones del problema	☐	☐	☐	☐
Soy capaz de revisar el proceso, buscar los posibles errores que haya cometido y corregirlos	☐	☐	☐	☐
Soy capaz de valorar si la resolución es correcta	☐	☐	☐	☐
Soy capaz de explicar el proceso realizado	☐	☐	☐	☐
Soy capaz de inventar un problema dadas unas claras condiciones	☐	☐	☐	☐
Soy capaz de buscar problemas parecidos cuando me enfrento a uno nuevo	☐	☐	☐	☐

Todas estas posibilidades para valorar problemas han demostrado su utilidad en contextos concretos pero pueden mostrar dificultades de aplicabilidad en casos más generales. Como ya hemos dicho previamente, las actividades de evaluación más frecuentes son pruebas escritas en las que los problemas suelen formar parte y por lo que los estudiantes no suelen expresar muchos aspectos que se consideran en estas rúbricas. Además, en muchas ocasiones nuestros alumnos están acostumbrados a realizar la resolución de los problemas "en sucio", es decir, resuelven el problema en un papel distinto al que entregan posteriormente como resolución definitiva donde lo que más parece importar es la estética a cambio de la pérdida de la información que proporcionaría el verdadero proceso de resolución.

A continuación presentaremos nuestra propuesta.

3. NUESTRA MATRIZ DE VALORACIÓN PARA LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Vamos a presentar la elaboración de una matriz de valoración de la resolución de un problema de matemáticas (Tabla 6). Como ya hemos explicado previamente, los criterios de evaluación son propios de cada docente por lo que parece complejo que una misma rúbrica de evaluación de resolución de problemas sirva para todos. Por ello establecemos criterios amplios que pueden ser precisados por cada docente así como indicadores generales para cada nivel de valoración. Además, no establecemos la ponderación de cada apartado sino que este aspecto lo dejamos abierto a criterio del docente que la utilice.

TABLA 6. MATRIZ DE VALORACIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS.

Valoración para todos los indicadores

5: Cumple todos los requisitos de forma brillante.
4: Cumple todos los requisitos pero comete algún error leve
3: Trata de cumplir los requisitos pero comete varios errores leves
2: Trata de cumplir los requisitos pero comete algún error grave
1: No lo intenta o comete errores muy graves que hacen que la respuesta no tenga sentido
– : El apartado no procede

Criterios generales	Indicadores	Valoración	Explicación
Comprensión del problema	Expresa el problema con sus palabras de forma precisa. Discrimina datos útiles de otras informaciones		
	Clarifica correctamente la información del problema mediante gráficos, tablas, diagramas, la construcción de un modelo o patrón		
Planificación y ejecución de la estrategia de resolución	Describe de forma precisa la estrategia de resolución		
	Distingue y explica todos los pasos seguidos e incluye toda la información necesaria sobre lo que representa cada número o letra		
	Demuestra de forma explícita que conoce, relaciona y aplica correctamente los contenidos matemáticos implicados en el proceso		
	Realiza correctamente todos los cálculos necesarios en el problema y tiene siempre en cuenta las unidades de medida		
Solución del problema	Contesta correctamente a la pregunta que se plantea y, en su respuesta, utiliza correctamente la notación y unidades de medida		
	Valora si la solución es correcta (tiene sentido…)		
Análisis del proceso y la solución	Revisa el proceso, detecta los errores cometidos y los corrige		
	Evalúa la estrategia y plantea alternativas de resolución		
	Generaliza la respuesta		
Presentación	Presenta con limpieza, orden, margen…		

Para establecer los criterios generales hemos considerado las diversas fases de resolución de un problema. A partir de ellas hemos señalado dos indicadores para cada criterio, excepto para "Planificación y ejecución de la estrategia de resolución" donde hemos considerado cuatro debido a la dificultad para detectar la planificación en la resolución escrita de problemas y de resumir los indicadores que consideramos adecuados para la valoración del proceso de resolución. Además, hemos dedicado un apartado a la presentación de los trabajos escritos por parte del estudiante ya que consideramos que, en muchas ocasiones, los problemas que se evalúan se resuelven de forma escrita. Hemos seguido esta estructura para facilitar que la matriz de valoración sea manejable ya que, en muchas ocasiones, el exceso de precisión tanto en criterios como en indicadores dota al instrumento de demasiada complejidad y anima a rechazarlo.

La matriz de valoración consta de cuatro columnas. La primera refleja los criterios de valoración; la segunda, los indicadores que nos permitirán establecer las valoraciones de cada criterio; la tercera incluye la valoración numérica en cada caso y, la última, concreta la explicación de la valoración obtenida (Tabla 6).

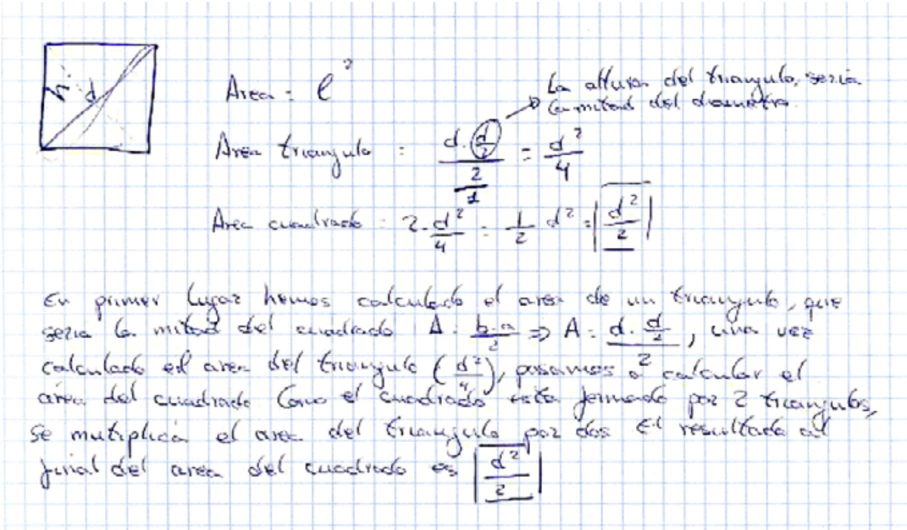
4. DISCUSIÓN SOBRE LA EVALUACIÓN DE UN PROBLEMA DE MATEMÁTICAS

En este apartado vamos a plantear una situación hipotética donde dos profesores, con objetivos de enseñanza distintos y, por tanto, con criterios de evaluación diferentes (Tabla 7), plantean el mismo problema. Posteriormente valoraremos las respuestas de dos estudiantes con nuestra matriz de valoración, de acuerdo a los criterios establecidos por cada uno de estos docentes. El problema es similar al desarrollado en el Capítulo 9 en un caso particular: Calcula el área de un cuadrado del que sólo conocemos la diagonal *d*.

Tabla 7. Criterios de evaluación de dos profesores.

Criterios de evaluación	Profesor 1	Profesor 2
Criterio 1	Traducir al lenguaje algebraico la información contenida en enunciados donde aparezcan relaciones entre magnitudes	Calcular áreas de medidas planas utilizando la unidad de medida adecuada
Criterio 2	Utilizar el planteamiento y resolución de ecuaciones como una herramienta para resolver problemas	Utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas así como la comprobación de la respuesta
Criterio 3	Utilizar el teorema de Pitágoras para el cálculo de longitudes y áreas de figuras planas	Expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado, el procedimiento seguido en la resolución de problema

Es muy probable que la calificación que recibiría la respuesta de un estudiante fuera diferente para cada uno de estos profesores pero la información cualitativa debería ser la misma. Consideremos las respuestas reales de dos estudiantes al problema propuesto (Figuras 1 y 2).



Area = l^2

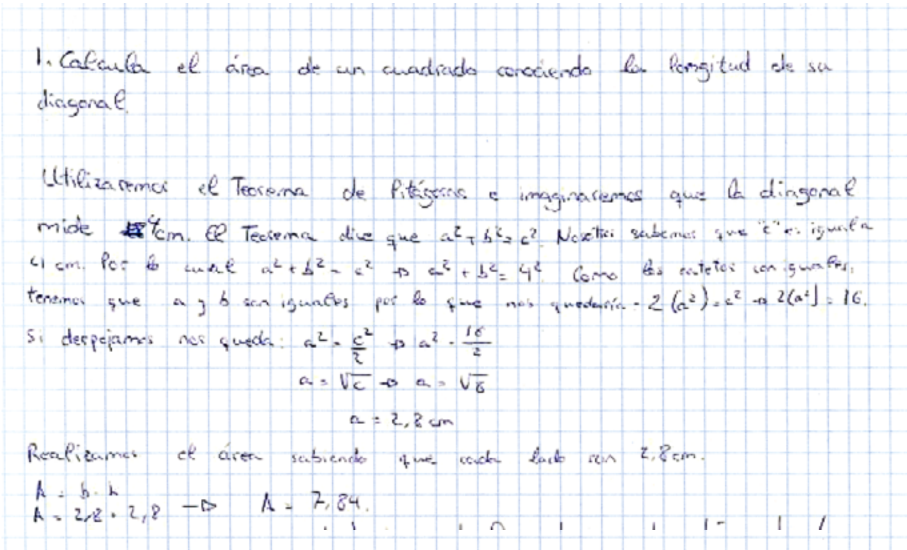
La altura del triangulo sería la mitad del diametro

Area triangulo = $\frac{d \cdot \frac{d}{2}}{2} = \frac{d^2}{4}$

Area cuadrado = $2 \cdot \frac{d^2}{4} = \frac{1}{2} d^2 = \boxed{\frac{d^2}{2}}$

En primer lugar hemos calculado el area de un triangulo, que sería la mitad del cuadrado $A = \frac{b \cdot a}{2} \Rightarrow A = \frac{d \cdot \frac{d}{2}}{2}$, una vez calculado el area del triangulo $\left(\frac{d^2}{4}\right)$, pasamos a calcular el area del cuadrado. Como el cuadrado esta formado por 2 triangulos, se multiplica el area del triangulo por dos. El resultado al final del area del cuadrado es $\boxed{\frac{d^2}{2}}$

Figura 1. Estudiante 1.



1. Calcula el área de un cuadrado conociendo la longitud de su diagonal

Utilizaremos el Teorema de Pitágoras e imaginaremos que la diagonal mide 4 cm. El Teorema dice que $a^2+b^2=c^2$. Nosotros sabemos que "c" es igual a 4 cm. Por lo cual $a^2+b^2=c^2 \rightarrow a^2+b^2=4^2$. Como los catetos son iguales, tenemos que a y b son iguales por lo que nos quedaría $2(a^2)=c^2 \rightarrow 2(a^2)=16$.

Si despejamos nos queda: $a^2 = \frac{c^2}{2} \rightarrow a^2 = \frac{16}{2}$

$a = \sqrt{c} \rightarrow a = \sqrt{8}$

$a = 2,8$ cm

Realizamos el área sabiendo que cada lado son 2,8 cm.

$A = b \cdot h$

$A = 2,8 \cdot 2,8 \rightarrow A = 7,84.$

Figura 2. Estudiante 2.

¿Cuál de los dos estudiantes obtendría mejor calificación con cada uno de los profesores?

Si obviamos los criterios de evaluación de cada profesor, y nos fijamos sólo en la respuesta final al problema, el estudiante 1 expresa la respuesta correcta salvo que no incluye ninguna unidad de medida ni en la respuesta ni en el proceso; sin embargo, el estudiante 2 resuelve el problema para el caso particular en que "*d*" valga 4cm y, aunque utiliza la unidad de medida para expresar la longitud del lado del triángulo, no lo hace en la respuesta.

Veamos cuáles, o en qué parte, de los criterios de evaluación considerados por cada profesor se cumplen (Tabla 8).

TABLA 8. VALORACIÓN DEL CUMPLIMIENTO DE DOS ESTUDIANTES DE LOS CRITERIOS DE EVALUACIÓN ESTABLECIDOS POR DOS PROFESORES

	Criterios	Estudiante 1	Estudiante 2
Profesor 1	Criterio 1	Traduce el enunciado al lenguaje algebraico	Traduce al lenguaje algebraico un caso particular
	Criterio 2	No resuelve ecuaciones	Plantea y resuelve ecuaciones (en el caso particular)
	Criterio 3	No utiliza el teorema de Pitágoras	Utiliza el teorema de Pitágoras
Profesor 2	Criterio 1	Calcula el área. No utiliza unidades	No calcula el área. A veces usa unidades
	Criterio 2	Utiliza técnicas de resolución. No comprueba la respuesta	Utiliza parte de una técnica de resolución. No comprueba la respuesta
	Criterio 3	Expresa el procedimiento seguido	Expresa el parte del procedimiento puesto que no dice cómo llegaría a partir del caso particular a la respuesta general

El primer estudiante sólo cumple uno de los tres criterios de evaluación establecidos por el primer profesor mientras que cumple parte de los tres criterios propuestos por el segundo. Aunque no podamos establecer una calificación concreta, parece claro que este estudiante obtendría mejor calificación con el segundo profesor que con el primero. El segundo estudiante afronta todos los criterios de evaluación del primer profesor, aunque sea en un caso particular, pero no cumpliría prácticamente ninguno de los que exige el segundo. En estos casos la calificación sería muy diferente en función del profesor que corrigiera su resolución.

Si aplicamos nuestra plantilla de valoración a las resoluciones de estos dos estudiantes la situación sería la indicada en la Tabla 9.

En ambos casos hemos valorado con la máxima puntuación el apartado "Demuestra de forma explícita que conoce, relaciona y aplica correctamente los contenidos matemáticos implicados en el proceso". Cada uno de ellos utiliza contenidos distintos que quizás no sean los que esperaban los profesores involucrados. De hecho, el segundo estudiante, a pesar de no dar la respuesta correcta, cumple todos los criterios de evaluación del primer profesor, que están íntimamente relacionados con contenidos matemáticos, aunque es poco probable que un profesor valorara la resolución de este problema con una puntuación alta.

Si consideramos que todos los indicadores ponderaran igual en la calificación final, aunque no es usual que un profesor dé, por ejemplo, el mismo valor a la buena presentación de un trabajo y el conocimiento de los contenidos, el primer estudiante obtendría 32 puntos de 55, que en la escala decimal que utilizamos habitualmente correspondería a un 5.8, mientras que el segundo tendría 24 puntos de 55, que correspondería a un 4.3. En ambos casos las calificaciones están próximas al 5 pero es poco probable que éstas fueran las calificaciones para estos estudiantes en un contexto real.

Esta situación es algo que ocurre cada día en las aulas de matemáticas. Podemos preguntarnos si las respuestas de estos estudiantes hubieran sido las mismas si hubieran conocido previamente los criterios con los que serían evaluados. O en qué variarían sus respuestas después de utilizar un método como el A+E+I+O=U en el que prima la comunicación del razonamiento. También sería interesante conocer qué haría nuestro hipotético profesor 1 con la respuesta del estudiante 1 a pesar de sus criterios iniciales. Parece evidente que criterios de evaluación únicamente conceptuales pueden llevarnos a situaciones paradójicas cuando el estudiante utiliza una estrategia de resolución que no habíamos barajado al plantear la actividad. También nos preguntamos si todos los tipos de problemas pueden ser evaluados de la misma forma. Este tipo de situaciones nos invitan a interesarnos cada día más en las técnicas e instrumentos de evaluación y en la aplicación de los mismos en el aprendizaje de matemáticas, un campo en el que hay mucho margen para avanzar y en el que queda mucho por descubrir.

TABLA 9. APLICACIÓN DE LA MATRIZ DE VALORACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE UN MISMO PROBLEMA POR DOS ESTUDIANTES.

Valoración para todos los indicadores
5: Cumple todos los requisitos de forma brillante.
4: Cumple todos los requisitos pero comete algún error leve
3: Trata de cumplir los requisitos pero comete varios errores leves
2: Trata de cumplir los requisitos pero comete algún error grave
1: No lo intenta o comete errores muy graves que hacen que la respuesta no tenga sentido
- : El apartado no procede

Criterios generales	Indicadores	Estudiante 1 Valoración / Explicación	Estudiante 2 Valoración / Explicación
Comprensión del problema	Expresa el problema con sus palabras de forma precisa. Discrimina datos útiles de otras informaciones	1 No escribe sobre ello	1
	Clarifica correctamente la información del problema mediante gráficos, tablas, diagramas, la construcción de un modelo o patrón	4 Utiliza un gráfico pero no clarifica qué representa h	1
Planificación y ejecución de la estrategia de resolución	Describe de forma precisa la estrategia de resolución	5	2 Utiliza un caso particular pero no explica cómo llegar a la solución del problema planteado
	Distingue y explica todos los pasos seguidos e incluye toda la información necesaria sobre lo que representa cada número o letra	4 No explica qué es l	2 No explica qué es a, b y c. No utiliza el dato del problema d
	Demuestra de forma explícita que conoce, relaciona y aplica correctamente los contenidos matemáticos implicados en el proceso	5	5
	Realiza correctamente todos los cálculos necesarios en el problema y tiene siempre en cuenta las unidades de medida	3 No utiliza unidades de medida en el proceso	4 No siempre utiliza unidades de medida en el proceso
Solución del problema	Contesta correctamente a la pregunta que se plantea y, en su respuesta, utiliza correctamente la notación y unidades de medida	3 No utiliza unidades de medida en la respuesta	2 Contesta a un caso particular sin unidades de medida
	Valora si la solución es correcta (tiene sentido…). Generaliza la respuesta	1 No escribe sobre ello	1 No valora si la respuesta tiene sentido ni generaliza
Análisis del proceso y la solución	Revisa el proceso, detecta los errores cometidos y los corrige	1 No escribe sobre ello	1 No escribe sobre ello
	Evalúa la estrategia y plantea alternativas de resolución	1 No escribe sobre ello	1 No escribe sobre ello
Presentación	Presenta con limpieza, orden, margen…	4	4
Total	Si todos los apartados tienen la misma ponderación	32/55	24/55

BIBLIOGRAFÍA

— AZCÁRATE, P. Propuestas alternativas de evaluación en el aula de matemáticas. En J.M. CHAMOSO (Ed.), Enfoques actuales en la didáctica de las Matemáticas. Madrid: MEC, Colección Aulas de Verano, 2006, p. 187-219.

— BOE. Ministerio de Educación y Ciencia. LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, 2006a.

— BOE. Ministerio de Educación y Ciencia. Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria, 2006b.

— BOE. Ministerio de Educación y Ciencia.Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, 2007.

— BOUD, D. Understanding learning at work. London: Routledge, 2000.

— CÁCERES, MJ; CHAMOSO, JM; AZCÁRATE, P. Analysis of the revisions that pre-service teachers of Mathematics make of their own project included in their learning portfolio. Teaching and Teacher Education, 2010, vol. 26, nº 5, p. 1115-1226.

— CÁRDENAS, J; BLANCO, LJ; GÓMEZ, R; GUERRERO, E. Resolución de problemas de matemáticas y evaluación: aspectos afectivos y cognitivos. En grupo de investigación DEPROFE (ed.), Las emociones en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas, 2013 p. 67-88.

— CHAMOSO JM; CÁCERES MJ. Analysis of the reflections of student-teachers of Mathematics when working with learning portfolios in Spanish university classrooms. Teaching and Teacher Education, 2009, nº 25, p. 198-206.

— CHAMOSO, JM; CÁCERES, MJ; AZCÁRATE, P. La reflexión como elemento de formación docente en matemáticas: análisis e instrumentos. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 2012, nº 10, p. 13-51.

— GRAUE, ME. Connecting Visions of Authentic Assessment to the Realities of Educational Practice. En T. A. Romberg (Ed.), Reform in School Mathematics and Authentic Assessment. Albany: State University of New York Press, 1995, p. 260-275.

— MERTLER, CA. Designing scoring rubrics for your classroom. Practical Assessment, Research y Evaluation, 2001, vol. 7, nº 25. Recuperado de: http://PAREonline.net/getvn.asp?v=7yn=25.

— N.C.T.M. Principles and Standards for School Mathematics. Virginia: Reston, NCTM, 2000.

— NITKO, AJ. Educational assessment of students (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Merrill, 2001.

— RICO, L. Mathematics Assessment in the Spanish Educational System. En M. NISS (Ed.), Cases of assessment in Mathematics Education. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1993, p. 9-20.

— ROMBERG, TA. Evaluation: a coat of many colours. En D. Robitaille (Ed.), Evaluation and Assessment in Mathematics Education. París: Unesco, 1989, p. 3-17.

— ROSS, JA; MCDOUGALL, D; HOGABOAM-GRAY, A. A Survey Measuring Elementary Teachers' Implementation of Standards-Based Mathematics Teaching. Journal for Research in Mathematics Education, 2003, vol. 34, nº 4, p. 344-363.

— SANTOS, LM. La Resolución de Problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos. México: Trillas, 2007.

— SHEPARD, LA. The Role of Classroom Assessment in Teaching and Learning. En V. RICHARDSON (Ed.), Handbook of Research on Teaching. Washington: American Educational Research Association, 2001, p. 1066-1101.

— SHEPARD, LA. Using assessment to improve learning. Educational leadership, 1995, vol. 52, nº 5, p. 38-43.

— SILVER, EA; KENNEY, PA. Sources of Assessment Information for Instructional Guidance in Mathematics. En ROMBERG, T.A. (Ed.): Reform in School Mathematics and Authentic Assessment. Albany: State University of New York Press, 1995, p. 38-86.

— THOMAS, L. A, E, I, O, U and always Y. A Simple Technique for Improving Communication and Assessment in the Mathematics Clasroom. Mathematics Teacher, 2008, vol. 102, nº 1, p. 16-23.

— VILLA, A; POBLETE, M. Aprendizaje basado en competencias. Una propuesta para la evaluación de las competencias genéricas. Bilbao; Mensajero, Universidad de Deusto, 2007.

RELACIÓN DE AUTORES

Blanco Nieto, Lorenzo J.
Catedrático de Universidad de Didáctica de la Matemática. Universidad de Extremadura. lblanco@unex.es

Caballero Carrasco, Ana.
Profesora Ayudante de Didáctica de la Matemática. Universidad de Extremadura. acabcar@unex.es

Cáceres García, Mª José.
Profesora Contratado Doctor de Didáctica de la Matemática. Universidad de Extremadura. mjcaceres@unex.es

Cárdenas Lizarazo, Janeth A.
Profesora Ayudante Doctor de Didáctica de la Matemática. Universidad de Zaragoza. Janeth_ac@yahoo.com

Carvalho, José Luis.
Profesor Asociado de Didáctica de la Matemática. Universidad de Extremadura. jlcsvarao@gmail.com

Casas García, Luis M.
Profesor Contratado Doctor de Didáctica de la Matemática. Universidad de Extremadura. luisma@unex.es

Contreras González, Luis Carlos.
Profesor Titular de Universidad de Didáctica de la Matemática. Universidad de Huelva. lcarlos@uhu.es

Chamoso, José Mª.
Profesor Titular de Universidad de Didáctica de la Matemática. Universidad de Salamanca. jchamoso@usal.es

Figueiredo, Carlos A.
Profesor de Secundaria. Elvas (Portugal). carlosaafigueiredo@sapo.pt

Gómez Del Amo, Rosa.
Doctoranda. Universidad de Extremadura. rosagomez@unex.es

Guerrero Barona, Eloisa
Profesora Titular de Psicología Evolutiva. Universidad de Extremadura. eloisa@unex.es

Jiménez Gestal, Clara.
Profesora Titular Interina de Didáctica de la Matemática. Universidad de la Rioja. clara.jimenez@unirioja.es

Pino Ceballos, Juan.
Universidad Católica de Temuco (Chile). jpino@uct.cl

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

98

ÍNDICE

INICIO