Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
ISSN: 1665-2436
relime@clame.org.mx
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Organismo Internacional

Solanilla Chavarro, Leonardo; Tamayo Acevedo, Ana Celi; Pareja Ocampo, Gabriel Antonio

MEMORIA SOBRE LA EMERGENCIA DE LAS FUNCIONES ELÍPTICAS

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 18, núm. 1, marzo, 2015, pp. 77-108
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Distrito Federal, Organismo Internacional

Leonardo Solanilla, Ana Celi Tamayo, Gabriel Antonio Pareja

# MEMORIA SOBRE LA EMERGENCIA DE LAS FUNCIONES ELÍPTICAS

## Memory about the elliptic functions's emergence

RESUMEN

En este artículo respondemos algunos interrogantes que nos hemos formulado sobre y en torno a la emergencia histórica de las funciones elípticas en la primera mitad del siglo XIX. En primer lugar, queremos determinar las fuerzas más relevantes que producían tensiones en la disciplina durante la época considerada. Para ello, vamos a proponer una hipótesis explicativa del vuelco en la esfera del pensamiento matemático que resultó cuando se prefirieron las funciones en lugar de las integrales elípticas. Esta hipótesis se arraiga en el estado del "Análisis" y el "Álgebra" durante la época de la emergencia. Luego mostraremos que las construcciones de Abel y Jacobi de las funciones elípticas soportan nuestra hipótesis de trabajo. Por último, delineamos algunas conclusiones referentes a nuestras reflexiones.

PALABRAS CLAVE:

- *Integrales y funciones elípticas*
- *Historia de las Matemáticas*
- *Abel*
- *Jacobi*
- *Teoría de Galois*

ABSTRACT

In this article we answer some questions that we have made on and around the historical emergence of elliptic functions in the first half of the nineteenth century. First, we want to determine the most relevant forces that produced tensions in the discipline during the period considered. To do this, we propose an explanatory hypothesis on the overturning in the field of mathematical thinking that resulted when the functions were preferred instead of the elliptic integrals. This hypothesis is rooted in the state of "Analysis" and "Algebra" during the emergence time. Then we show that the constructions of Abel and Jacobi for the elliptic functions support our working hypothesis. Finally, we outline some conclusions concerning our reflections.

KEY WORDS:

- *Elliptic functions and integral*
- *Mathematics History*
- *Abel*
- *Jacobi*
- *Galois theory*

*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (2015) *18* (1): 77 – 108.
Recepción: Abril 25, 2012 / Aceptación: Diciembre 15, 2013. DOI: 10.12802/relime.13.1813

RESUMO

Neste artigo, respondemos algumas interrogantes que formulamos a respeito da emergência histórica das funções elípticas na primeira metade do século XIX. Em primeiro lugar, queremos determinar as forças mais relevantes que produziam tensões na disciplina durante a época considerada. Para isso, vamos propor uma hipótese explicativa sobre o giro na esfera do pensamento matemático, o qual sucedeu quando foram preferidas as funções em lugar das integrais elípticas. Essa hipótese se centra no estado da "Análise" e da "Álgebra" durante a época da emergência. A seguir mostraremos que as construções de Abel e Jacobi sobre as funções elípticas suportam a nossa hipótese de trabalho. Por último, delinearemos algumas conclusões referentes às nossas reflexões.

PALAVRAS CHAVE:

- *Integrais e funções elípticas*
- *História da Matemática*
- *Abel*
- *Jacobi*
- *Teoria de Galois*

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire nous répondons à certaines questions que nous avons posées sur et autour de l'émergence historique des fonctions elliptiques dans la première moitié du XIXe siècle. Tout d'abord, nous voulons déterminer les forces qui ont produit les tensions les plus importantes dans la discipline au cours de la période en question. Avec cela, nous proposons une hypothèse expliquant le changement dans le domaine de la pensée mathématique qui a abouti à des fonctions de préférence au lieu d'intégrales elliptiques. Cette hypothèse est enracinée dans l'état de l'analyse et l'algèbre à l'époque de l'émergence. Tout de suite nous montrerons que les constructions d'Abel et de Jacobi supportent notre hypothèse de travail. Enfin, nous esquissons quelques conclusions sur nos réflexions.

MOTS CLÉS:

- *Intégrales et fonctions elliptiques*
- *Histoire des mathématiques*
- *Abel*
- *Jacobi*
- *Théorie de Galois*

## 1. Introducción

¿Por qué estudiar hoy en día la historia de las integrales y las funciones elípticas? Los matemáticos responderán seguramente que muchos problemas de las Matemáticas contemporáneas hallan en la teoría de las funciones elípticas los ingredientes esenciales para su solución. Los historiadores de las Matemáticas encuentran fácilmente una explicación en el estatuto de su disciplina. Los interesados en la formación de nuevos matemáticos, posiblemente coincidirán con Recalde (2010), quien afirma con justa razón que:

> Si se toma como punto de partida la premisa de que las matemáticas son mucho más que un discurso formal o conjunto de técnicas muy útiles para el desarrollo de la ciencia y la tecnología, y si reconocemos, ante todo, las matemáticas como una actividad humana de razonamiento, cuyo propósito es contribuir a la explicación del mundo junto con otras actividades intelectuales, es claro que debemos propugnar por una formación que vaya más allá de los procesos algorítmicos. Esta demanda de preparación de matemáticos que tengan una visión integral del edificio matemático y que comprendan las razones de ser de este edificio como construcción de pensamiento en condiciones sociales y culturales históricamente determinadas. (p. xxxi)

Con esta triple visión (disciplinar, histórica y educativa) en mente, hemos emprendido el estudio de algunos textos originales de Abel y Jacobi, en los que las funciones elípticas emergen históricamente de las integrales elípticas. Además, ¿qué significa comprender una teoría matemática? Ciertamente no basta con el estado actual de la teoría. Las matemáticas se aprenden siempre desde una perspectiva hermenéutica y, quizás por ello, el estado contemporáneo de una teoría nos la presenta como algo totalmente acabado, casi que petrificado. Por esto, la salida a este problema de comprensión yace del lado de la historia, que revela la verdadera vena heurística de la investigación matemática. En particular, la emergencia de las funciones elípticas es muy cercana a la emergencia de la Variable Compleja como disciplina matemática. Así lo deja ver el reciente trabajo de Bottazzini y Gray (2013) que lleva el sugerente título de *Hidden Harmony – Geometric Fantasies, The Rise of Complex Function Theory*. En un marco más general, nuestras reflexiones pueden reportar algún provecho a aquellos interesados en la historia del, hoy llamado, Análisis Matemático.

Con el fin de contextualizar el estado de la disciplina en la época que nos interesa (comienzos del siglo XIX), es importante conocer algunos elementos del devenir histórico de las integrales elípticas. Estas datan del siglo XVII, prácticamente de la misma época en que emergía el Cálculo infinitesimal. Su motivación hay que buscarla en algunos problemas geométricos que encontraron respuestas en el lenguaje del Cálculo: rectificación de arcos, división de curvas en partes proporcionales o iguales y búsqueda de expresiones para el arco de una curva en términos del arco de otra (Tamayo, 2005). Dicha colección desordenada de problemas develó propiedades interesantes en dicho *corpus* de integrales. Ciertamente, la segunda mitad del siglo XVII y la primera mitad del XVIII fueron testigo de la aparición de muchas integrales que no se podían resolver por los métodos conocidos de solución. Sin embargo, en aquella época no se podía hablar propiamente de un “tipo” de integral elíptica, ya que no existía una teoría general para su estudio (Pareja, Solanilla y Tamayo, 2010). Algunos matemáticos, entre los que se cuentan los hermanos Bernoulli, se dieron a la tarea de estudiar curvas como la elipse y la lemniscata, entre otras, cuyas longitudes de arco no se pueden expresar por funciones racionales o funciones transcendentes conocidas -trigonométricas, exponencial y logarítmica- (Tamayo, 2005). La teoría toma nuevas fuerzas cuando el conde de Fagnano, hacia 1715, utiliza un método más elaborado que precisa de la determinación de soluciones a ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias que se presentan en la solución del problema de dividir la lemniscata en dos, tres y cinco partes iguales (Tamayo, 2005; Hernández y Palacio, 2009; Pareja et al., 2010). A mediados del siglo XVIII, Euler y Lagrange generalizan el trabajo de Fagnano alrededor de una teoría unificada que se centra en la solución a cierta ecuación diferencial fundamental (Pareja et al., 2010). Dicha ecuación se trata brevemente en la próxima sección. Pero hay que tener cuidado al respecto, si bien se puede decir que su motivación sigue siendo geométrica, sus resultados dependen cada vez más de propiedades más y más “analítico - transcendentes”, en concreto, propiedades de la solución a dicha ecuación fundamental. Euler, por ejemplo, escribió a lo largo de su vida alrededor de veintidós artículos sobre integrales elípticas -de acuerdo con *http://eulerarchive.maa.org/*- y, si bien es cierto que en sus comienzos se interesó particularmente por la rectificación de la elipse, la mayoría de su producción está centrada en el estudio de la ecuación diferencial fundamental, que aplica una y otra vez a varios tipos de problemas “geométricos”.

Esta búsqueda de métodos más “sofisticados y abstractos” nos conduce a una definición más precisa de los conceptos. Para la época de la gran producción de Abel y Jacobi, la década de 1820 a 1830, los matemáticos seguían interesados en la resolución de problemas geométricos. Basta recordar el célebre teorema de Abel sobre la lemniscata y la enorme influencia de la geometría griega en la enseñanza. Sin embargo, sus métodos de estudio eran más elaborados que aquellos del siglo XVIII. Había problemas que se dejaban tratar mediante un número finito de operaciones aritméticas (álgebra, en el sentido del Islam medieval), otros que exigían el uso de sumas o productos infinitos y fracciones continuas (transcendentes, en el lenguaje del cálculo infinitesimal de la Edad Moderna). Para simplificar la presentación, incluimos en este último grupo de problemas a los que se podían modelar mediante ecuaciones diferenciales o Cálculo de Variaciones (lo cual tiene sentido). En la frontera entre estos dos ámbitos, se situaban aquellos problemas combinatorios de “convergencia”, los cuales buscaban determinar condiciones suficientes para que los procesos infinitos se comportaran, en la medida de lo posible, como los procesos con operaciones aritméticas finitas. Con el fin de usar nombres propios de la época, nos referiremos, de aquí en adelante, a estos problemas y a sus métodos de solución con los adjetivos algebraico, transcendente y combinatorio, respectivamente. Nos abstendremos, en lo posible, de usar el adjetivo analítico en el sentido generalmente aceptado en la actualidad (formalización del Cálculo).

A propósito, la metodología usada en este artículo se enfoca en la lectura de los textos matemáticos originales y no en referencias secundarias, que, a menudo, desvían la atención hacia las anécdotas y confunden al lector interesado en la historia y la enseñanza de las matemáticas. Así, por ejemplo, cuando hablamos de la cercanía intelectual de Jacobi y Legendre, estamos respaldados por los adjetivos laudatorios que el primero usa para referirse al segundo, en los *Fundamenta Nova* de 1829. De todos modos, cuando se haga necesaria una referencia secundaria, la fuente bibliográfica que soporta la afirmación quedará siempre clara para el lector.

En la primera sección del artículo examinamos las condiciones o tensiones en la esfera del pensamiento matemático que existían en la época de la producción de Abel y Jacobi. Ellas comprenden, en primer lugar, los trabajos de Euler y Lagrange sobre el tema junto con la obra descomunal de Legendre. De manera central, aunque menos directa, estas tensiones abarcan también los métodos algebraicos y la naciente teoría de las funciones complejas. Nuestra presentación es sucinta y reconocemos que, aunque cada uno de estos temas merece un estudio más detallado, nuestro deber es centrarnos en las funciones elípticas. La segunda sección está dedicada a proponer una hipótesis explicativa sobre la naturaleza de la emergencia de las funciones elípticas. En la tercera sección presentamos las construcciones de Abel y Jacobi, junto con nuestros argumentos a favor de la hipótesis de trabajo. Para finalizar, se esbozan las conclusiones del estudio.

## 2. Condiciones de la emergencia

En esta sección analizamos, en orden de importancia, algunas circunstancias que permitieron o favorecieron la emergencia histórica de las funciones elípticas. Ellas pueden entenderse como las fuerzas o tensiones en la esfera del pensamiento matemático que influenciaron dichos desarrollos.

## 2.1. *La herencia de Euler y Lagrange*

Las integrales elípticas habían conocido un primer cenit en manos de estos extraordinarios pensadores del siglo XVIII. Comencemos por recordar aquí el §. 26 en *De integratione aequationis differentialis* $mdx/\sqrt{1-x^4} = ndy/\sqrt{1-y^4}$ (Euler, 1761):

> De aquí y de esta manera, concluimos que la ecuación diferencial
>
> $$\frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cxx+2Dx^3+Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cyy+2Dy^3+Exy^4}}$$
>
> tiene como ecuación integral completa a
>
> $$0 = \alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(xx+yy) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta xxyy \ldots$$ [i] (p.50)

La demostración resulta ser una verificación de la tesis por diferenciación. En verdad, Euler no tenía una prueba directa de este hecho. Así lo deja ver, años más tarde, en el tímido *Lemma I* del artículo *Demonstratio theorematis et solutio problematis in actis erud. Lipsiensibus propositorum* (Euler, 1761):

> Si dos variables x, y dependen una de la otra según la relación
>
> $$0 = \alpha + \beta(xx+yy) + 2\gamma xy + \delta xxyy$$
>
> la suma y la diferencia de las fórmulas integrales
>
> $$\int \frac{dy}{\sqrt{-\alpha\beta + (\gamma\gamma - \alpha\delta - \beta\beta)yy - \beta\delta y^4}} \pm \int \frac{dy}{\sqrt{-\alpha\beta + (\gamma\gamma - \alpha\delta - \beta\beta)xx - \beta\delta y x^4}}$$
>
> *será igual a una constante.*[ii] (p.129)

Para la solución directa de la ecuación diferencial fue necesario esperar a Lagrange (1868), quien retoma el problema en su artículo *Sur l'intégration de quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable*. Su propósito es probar el resultado anterior de Euler por un método directo de ecuaciones diferenciales, distinto a la simple comprobación:

> Estas ecuaciones están comprendidas en la siguiente fórmula
>
> $$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}},$$

cuya integral se expresa en general por la ecuación

$$A + B(x+y) + C(x^2+y^2) + Dxy + E(x^2y + y^2x) + Fx^2y^2 = 0.$$ [iii]

La demostración de este hecho fundamental es larga y tediosa. Se puede leer en el original de Lagrange (1868), en el libro de Bellachi (1894) o en la interpretación moderna de Pareja et al. (2010). En este último, el asunto se simplifica grandemente al tomar la ecuación diferencial en la forma canónica de Legendre:

$$\frac{dx}{\sqrt{p(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{p(y)}} = 0, \qquad p(\xi) = (1-\xi^2)(1-k^2\xi^2),$$

donde $k$ denota el módulo jacobiano de la integral. Con estas útiles, aunque algo tramposas desde el punto de vista de la historia, simplificaciones se encuentra la solución general

$$-4Ck^2x^2y^2 + (\left((1+k^2)+C\right)^2 - 4k^2)(x^2+y^2) - 4C = 0.$$

La constante $C$ se determina a partir de una condición inicial $(x_o, y_o)$.

A partir de la teoría de Euler y Lagrange, se establece la propiedad más importante de las integrales elípticas. Para entenderla mejor, usamos otra vez la notación de Legendre

$$\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = \int_0^\phi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\phi), \qquad \xi = \sin\varphi.$$

En la variable $\varphi$, con $\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ (Bellachi, 1894) señala que

la ecuación diferencial toma la forma

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} = 0$$

cuya integral transcendente es, según la notación de Legendre,

$$F(k,\phi) + F(k,\phi) = F(k,\mu),$$

donde $\mu$ representa el valor de $\phi$ para $\phi' = 0$. La amplitud $\mu$ se obtiene de la relación mediante las sustituciones anteriores por la fórmula

$$\sin\mu = \frac{\sin\phi'\cos\phi\,\Delta\phi + \sin\phi\cos\phi'\,\Delta\phi'}{1 - k^2\sin^2\phi\sin^2\phi'}.$$ [iv] (p. 37)

Ésta es la célebre fórmula de adición de la primera especie, la propiedad a la que nos referíamos anteriormente. De manera alternativa, en Pareja et al. (2010), se resume diciendo que

> Para que se verifique la fórmula de adición
>
> $$F(k,\phi) + F(k,\psi) - F(k,\mu) = 0$$
>
> es necesario y suficiente que se cumpla la identidad de Lagrange
>
> $$\cos\mu = \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi\,\Delta\mu.$$

## 2.2. *Los Excercices y el Traité de Legendre*

El segundo gran logro de las integrales elípticas, que ha influido en la emergencia de las funciones elípticas, proviene de los estudios de A. M. Legendre. El conocido *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes, avec des tables pour en faciliter le calcul numérique* (Legendre, 1825) realiza una recopilación de las investigaciones que el estudioso francés había publicado en el primer tomo de sus *Exercices de calcul intégral* (Legendre, 1811). No se debe confundirse por el título del *Traité* ya que es un trabajo sobre integrales, no sobre funciones elípticas. El título tiene razón en que la obra tiene pretensiones de tratado y, así, abarca todo el conocimiento sobre las integrales elípticas que se tenía en su época. No vamos a referirnos aquí a todo su contenido, solamente a lo indispensable para los logros de Abel (1827, 1828) y Jacobi (1829). Nos referimos a la materia de los cinco primeros capítulos, en los que se encuentran formas canónicas o especies para las integrales elípticas. Esta reducción del problema a tres especies de integrales básicas constituye para nosotros la taxonomía de Legendre. El propósito del autor es claro, basta leer como comienza la obra (Legendre, 1825):

CAPÍTULO PRIMERO

*Idea general de los distintos tipos de transcendentes contenidos en la fórmula integral* $\int \frac{\boldsymbol{Pdx}}{\boldsymbol{R}}$.

> 1. Designamos con P una función racional cualquiera de x, y con R el radical $\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4}$... [v] (p. 4)

Luego de mostrar que las potencias impares del radical se pueden omitir sin pérdida de generalidad, Legendre (1825) encuentra que la parte transcendente (ni circular ni logarítmica, puesto que estos casos son conocidos) de una integral elíptica tiene la forma

$$H = A' \int \frac{d\phi}{\varDelta} + B' \int \Delta d\phi + C' \int \frac{d\phi}{(1 + n\sin^2\phi)\Delta}. \quad \text{(p. 16)}$$

Las cantidades A', B', C', son constantes y, por lo tanto, lo que importan son las formas de las integrales. Cada uno de estos sumandos integrales constituye una especie básica. Si estudiamos estos tres tipos de integrales, comprenderemos todas las integrales elípticas (Legendre, 1825):

> 15. Con esto, las funciones o transcendentes elípticas comprendidas en la fórmula H, se dividirán en tres especies:
>
> La primera y la más simple se representa por la fórmula; $\int d\phi/\varDelta$;
>
> La segunda es el arco de la elipse, medido a partir del semieje menor, y cuya expresión es; $E = \int \Delta d\phi$;
>
> La tercera y última especie se representa por $\int d\phi/((1 + n\sin^2\phi)\varDelta)$; ella contiene, además del módulo c común a las otras dos especies, un parámetro n que, según se quiera puede ser positivo o negativo, real o complejo.[vi] (p. 18)

En lo que sigue consideraremos, únicamente y para simplificar la presentación, integrales elípticas de la primera especie.

Hay otro tipo de condiciones de la emergencia que no provienen directamente del campo de las integrales elípticas. Ellas tienen que ver con el desarrollo de otros campos de las Matemáticas, que estaban conociendo también nuevos esplendores. En concreto, nos referimos a ciertos estudios algebraicos (en el sentido explicado en la Introducción) y a la teoría de las funciones complejas (como se le llamaba, y aún a veces se le llama, en la literatura alemana).

## 2.3. *El viejo problema de la resolución algebraica de las ecuaciones*

En primer lugar, queremos mencionar las *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* de Lagrange (1869). En la versión final de este artículo, el autor considera inicialmente los métodos renacentistas de solución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado. Luego enfrenta la resolución de las ecuaciones de quinto grado y de grados ulteriores (Lagrange, 1869):

> El problema de la resolución de las ecuaciones de grados superiores al cuarto pertenece a esa clase de problemas que no se ha podido resolver, ni tampoco se ha podido demostrar su imposibilidad.[vii] (section troisième)

Luego, obtiene sus conclusiones sobre los métodos que ha examinado. Lo interesante es que la complejidad del problema lo conduce a estudiar las propiedades de las raíces de las ecuaciones, en particular, las que tienen que ver con sus permutaciones. Para ilustrar este punto, citamos el pasaje donde expresa los coeficientes de una ecuación en términos de las funciones simétricas elementales evaluadas en las raíces (Lagrange, 1869):

> 89. Supondremos, como en la Sección anterior, que la ecuación propuesta está representada, en general, por
>
> $$x^{\mu} + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + px^{\mu-3} + \cdots = 0,$$
>
> y que sus $\mu$ raíces se designan por $x', x'', x''', x^{IV}, \cdots, x^{(\mu)}$.
>
> Con ello se tendrá, debido a la naturaleza de las ecuaciones, que
>
> $$-m = \quad x' + x'' + x''' + x^{IV} + \cdots,$$
>
> $$n = \quad x'x'' + x'x''' + x''x''' + x'x^{IV} + x''x^{IV} + x'''x^{IV} + \cdots,$$
>
> $$-p = \quad x'x''x''' + x'x''x^{IV} + x'x'''x^{IV} + x''x'''x^{IV} + \cdots,.$$
>
> ………………………………………………………………
>
> Y queda claro que estas funciones de $x', x'', x''', x^{IV}, \cdots$, mediante las que se expresan las cantidades $m, n, p, \cdots$, serán todas necesariamente de la forma $f[(x', x'', x''', x^{IV}, \cdots)]$, y en consecuencia dichas funciones serán todas similares, lo que constituye una propiedad fundamental de estas ecuaciones.[viii] (p. 359)

Este hecho junto con el llamado teorema fundamental de las funciones simétricas jugará un papel crucial en las *Recherches* de Abel (1827, 1828). Para que esta presentación quede completa, incluimos el teorema fundamental en la versión contemporánea de Hadlock (1978):

> TEOREMA 9. Todo polinomio simétrico P sobre F en $x_1, x_2, \cdots, x_n$ puede escribirse como un polinomio Q sobre F en las funciones simétricas elementales. Si P tiene coeficientes enteros, lo propio vale para Q. El grado de Q es menor o igual al grado de P.[ix] (p. 42)

El otro trabajo que queremos analizar es el de las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801). Esta obra fundamental contiene la definición de las clases módulo $m$, las congruencias de primer y segundo grado y los residuos de las potencias, entre otros temas novedosos para la época de su publicación. De central importancia para la investigación de Abel (1827, 1828) es la sección séptima, que lleva el título de *Deaequationibus, circuli sectiones definientibus.* Allí se anuncian los alcances de la Teoría de los transcendentes elípticos (Gauss, 1801):

> Los principios de la teoría que vamos a explicar de hecho se extienden mucho más allá de lo que indicaremos. Por ello, pueden ser aplicados no solamente a las funciones circulares sino también a otras funciones transcendentales, por ejemplo, a aquellas que dependen de la integral $\int dx/\sqrt{1-x^4}$ y también a varios tipos de congruencias. Ya que, sin embargo, estamos preparando un gran trabajo sobres esas funciones...[x] (Section septima)

Pronto veremos que tanto la teoría de las congruencias, como la división de las secciones de una circunferencia tuvieron una influencia decisiva en Abel (1827, 1828). Por demás, los desarrollos de Gauss constituyen uno de los más fructíferos puntos de encuentro entre las esferas de lo algebraico y lo transcendente.

Los matemáticos actuales agregarán, sin duda, en este punto que el estado del pensamiento algebraico al que queremos referirnos encierra la génesis de la moderna Teoría de Grupos, con lo cual nosotros coincidimos, ya que Abel (1827, 1828) y Jacobi (1829) descubrieron que sus funciones elípticas tienen dos periodos independientes. Ciertamente, el grupo abeliano que generan dichos periodos constituye hoy la parte imprescindible de una estructura de módulo sobre los enteros, que podemos asociar a un toro. Este hecho, con las notaciones propias de la época, es usado reiteradamente en los *Fundamenta Nova* de Jacobi (1829).

Los asuntos algebraicos a los que nos referimos han sido tratados, con mayor detalle y presentando variados ejemplos, en Pareja, Solanilla y Tamayo (2013).

## 2.4. *La teoría de las funciones complejas*

Cuando iniciamos la investigación, dábamos por cierto que esta naciente teoría había jugado un papel dominante en la emergencia de las funciones elípticas. Para nuestra sorpresa, su papel no fue tan protagónico como pensábamos y así, esta ingenua hipótesis inicial reveló muy pronto su falsedad: el descubrimiento o emergencia de un concepto matemático no tiene por qué relacionarse con la forma como se presenta en los libros de texto contemporáneos[1]. En verdad, si bien Euler (1707-1783) y Gauss (1777-1855) ya tenían ciertos conocimientos del tema, ha sido Cauchy a quien el destino reservó el honor de establecer los grandes teoremas de la disciplina en los años 1814-1825. Quien lea los textos originales de Abel (1827, 1828) y Jacobi (1829), puede observar que la influencia de estos trabajos de Cauchy sobre las primeras teorías de las funciones elípticas fue mínima. Acaso, la sola mención de que es posible definir *intégrales définies, prises entre des limites imaginaires,* basta para leer sin dificultades las *Recherches* y los *Fundamenta Nova*. Leamos algunos apartes del comienzo de Cauchy (1825), donde se da ya la definición de integral de línea compleja:

> … Así pues, para abarcar con la misma definición a las integrales tomadas entre límites y a las integrales tomadas entre límites complejos, conviene usar la notación
>
> $$(4)\ \int_{x_o+y_o\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)dz$$
>
> para denotar el límite (o uno de los límites) a los que converge la suma. Para obtener dos sucesiones de este tipo, basta suponer
>
> $$(7)\ x=\phi(t);\quad y=\chi(t),$$
>
> donde $\phi(t)$, $\chi(t)$ son dos funciones continuas de una nueva variable $t$, siempre crecientes o decrecientes desde $t=t_o$ hasta $t=T$, y tales que cumplen las condiciones
>
> $$(8)\begin{cases}\phi(t_o)=x_o, & \chi(t_o)=y_o,\\ \phi(T)=X, & \chi(T)=Y;\end{cases}$$
>
> … Así se tendrá
>
> $$(12)\quad A+B\sqrt{-1}=\int_{t_o}^{T}\left[\phi'(t)+\sqrt{-1}\chi'(t)\right]f(\phi(t)+\sqrt{-1}\chi(t))dz\,;\ldots$$ [xi] (pp. 3-5)

[1] En la actualidad existen varias formas equivalentes de construir la Variable Compleja, las cuales se pueden clasificar según el concepto de partida que se quiera adoptar. Por ejemplo, se puede definir una función holomorfa como aquella que es diferenciable en el sentido complejo en un abierto dado (es decir, que es real diferenciable y cumple las ecuaciones de Cauchy Riemann en dicho abierto), o bien se puede definir una función analítica como aquella que es desarrollable en series de potencias en el abierto. Los dos conceptos resultan ser equivalentes y existen muchas otras maneras de caracterizar dichas funciones. Invitamos el lector a hojear el teorema de caracterización en Remmert (1991, pp. 236-237).

La terminología que usa Cauchy para referirse a lo que hoy llamamos funciones analíticas (*fonction monodrome, fonction monogène, fonction synectique*) suena extraña al lector contemporáneo, aunque evoca propiedades fundamentales de tales funciones. Dichos términos o expresiones dominaron el estudio de las funciones complejas en Francia durante todo el siglo XIX, tal como es patente en el popular texto de Briot y Bouquet (1859). La disertación de Riemann de 1851, es decir, los *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe*, no estaban todavía disponibles en 1827. Tampoco se esperaban las obras de Liouville o Weierstrass. El lector interesado en la historia de la Variable Compleja puede referirse al libro de Remmert (1991).

Sobre la teoría de funciones, en general, tampoco parece haber influido significativamente en el nacimiento de la noción de función elíptica. En efecto, el asunto de las discontinuidades de las funciones elípticas se limita a ciertos polos[2]. Como referencia para este tema, se pueden leer las cuatro primeras secciones del primer capítulo del libro de Recalde (2010) sobre las funciones de Baire. En ellas se explican las clasificaciones de funciones de Euler y Cauchy junto con la relación entre la integral de Riemann y la representación de funciones.

## 3. Hipótesis de trabajo

La consideración de las fuerzas o tensiones descritas en la sección anterior y el examen de los trabajos pioneros de Abel (1827, 1828) y de Jacobi (1829) nos han sugerido la siguiente hipótesis explicativa de la emergencia de las funciones elípticas: salvo por algunos elementos muy básicos de la integración en el plano complejo, las funciones elípticas surgieron de los transcendentes elípticos reales del siglo XVIII, bajo una fuerte influencia de las nuevas ideas que renovaban el paisaje del Álgebra en la primera mitad del siglo XIX.

Al referirnos a los elementos básicos queremos abarcar solamente los fundamentos de la integración compleja. En otras palabras, afirmamos que no hubo influencia alguna de los grandes teoremas integrales de la Variable Compleja, tal como la conocemos hoy. No hay evidencia de que las primeras construcciones de las funciones elípticas recurrieran al Teorema o a la Fórmula

[2] El estudio de estas singularidades fue tratado posteriormente por Liouville (1809-1882) y Weierstrass (1815-1897).

Integral de Cauchy, ni mucho menos a sus consecuencias inmediatas, como el célebre Teorema de Liouville. Cuando hablamos de los transcendentes elípticos reales del siglo XVIII queremos significar el esplendor que habían alcanzado las integrales elípticas en las manos de Euler, Lagrange y tantos otros pensadores (ecuación diferencial fundamental). Además, en este nombre queremos incluir el Teorema Fundamental del Cálculo, los métodos de integración tradicionales que incluyen las funciones circulares y las logarítmicas, así como el uso sistemático de las ecuaciones diferenciales para formular problemas y el desarrollo de técnicas para encontrar soluciones a dichas ecuaciones. Las nuevas ideas algebraicas de las que hablamos ya han sido mencionadas en la sección anterior. Ellas comprenden el estudio de las permutaciones de las raíces de las ecuaciones algebraicas, el éxito de Gauss al resolver el problema de la construcción de los polígonos regulares y la invariancia de ciertas expresiones bajo lo que hoy en día llamamos la "acción de un grupo".

Llamamos la atención sobre el hecho de que la hipótesis de arriba no es, en modo alguno, trivial. La teoría contemporánea de las funciones elípticas es un capítulo más de la Variable Compleja y se sustenta sobre sus grandes teoremas. *Cf.*, por ejemplo, Lang (1987) y Akhiezer (1970 / 1990).

## 4. Construcciones de Abel y Jacobi

A continuación examinamos la construcción de las funciones elípticas en los dos primeros recuentos sistemáticos de la disciplina. Ellos se deben respectivamente a Abel (1827, 1828) y a Jacobi (1829). Ponemos particular atención en la validez de nuestra hipótesis de trabajo.

### 4.1. *Las* Recherches *de Abel*

Hay dos ideas que gobiernan la primera parte (§I al §V) de las *Recherches sur les fonctions elliptiques* de Abel (1827-1828), a saber: la construcción de las funciones elípticas y la división de las curvas cuyas longitudes de arco son elípticas, en particular, la lemniscata.

#### 4.1.1. *Construcción de las funciones*

El punto de partida de la primera idea es la integral de la primera especie en la forma

$$\int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-c^2\zeta^2)(1+e^2\zeta^2)}},$$

donde $c^2, e^2 > 0$. La manera contemporánea de estudiar esta integral, para $z$ compleja, sería como una función por medio del Teorema Integral de Cauchy y sus consecuencias. Sin embargo, esta integral presenta algunos problemas en el eje real del plano complejo, similares a aquellos de la función arco-seno circular. Por ello y, tal vez, por su experiencia con las funciones circulares y lemniscáticas, Abel propone que el objeto correcto es la función inversa de la integral. Luego, prueba que efectivamente la inversa es la manera correcta de estudiar las cuestiones elípticas.

En primer lugar, construye la inversa $\varphi$ en el eje real. En el intervalo $[-1/c, 1/c]$, la integral es, en términos actuales, biyectiva y se puede definir su inversa. Luego se puede extender a toda la recta como una función par de periodo

$$4\int_0^{1/c} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} = 2\varpi.$$

La función resultante es diferenciable en todo el eje real con derivada

$$\pm\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2).}$$

El signo se decide por los intervalos en donde la función crece o decrece. El mismo procedimiento se repite para el eje imaginario mediante una sencilla integración compleja. En este eje, la función inversa $\varphi$ tiene periodo

$$4i\int_0^{1/e} \frac{dy}{\sqrt{(1-c^2y^2)(1+e^2y^2)}} = 2\tilde{\varpi}i\,.$$

Este paso, en el que la integral misma exige una integración imaginaria, es crucial.

El siguiente paso crucial es la extensión a todo el plano complejo. Esto se realiza de forma muy elegante: se exige que la fórmula de adición (que ya se cumple en los ejes real e imaginario) se cumpla también en todo el plano. Así pues, se debe tener

$$\varphi(z_1+z_2)=\frac{\varphi(z_1)\varphi'(z_2)+\varphi'(z_1)\varphi(z_2)}{1+c^2e^2\varphi^2(z_1)\varphi^2(z_2)}.$$

En particular,

$$\varphi(x+iy)=\frac{\varphi(x)\varphi'(iy)+\varphi'(x)\varphi(iy)}{1+c^2e^2\varphi^2(x)\varphi^2(iy)}.$$

Por la forma como fue construida, la función $\varphi$ (que va del plano complejo al plano extendido o esfera de Riemann, es decir, se adjunta el infinito) resulta tener dos periodos ortogonales, uno real y otro puramente imaginario. Ellos son, precisamente, los periodos en el eje real e imaginario que hemos mencionado más arriba, a saber: $2\varpi$, $2\widetilde{\varpi}i$. Con más generalidad, se verifica que

$$\varphi(z+m\varpi+n\widetilde{\varpi}i)=(-1)^{m+n}\varphi(z),$$

para todas los valores enteros de $m,n$.

En consecuencia, una función elíptica queda determinada totalmente por sus valores en una región fundamental *R*, que por facilidad se puede tomar como un rectángulo "semiabierto" cuyos lados son tan largos como los periodos. Este hecho anuncia ya que la definición propia de una función elíptica debe hacerse en un toro.

En relación con los ceros y los polos de $\varphi$, Abel (1827, 1828) prueba que

$$\varphi(z)=0 \ \leftrightarrow z=m\varpi+n\widetilde{\varpi}i \ (m,n \text{ enteros})$$

y que

$$\varphi(z)=\infty \ \leftrightarrow z=\left(m+\frac{1}{2}\right)\varpi+\left(n+\frac{1}{2}\right)\widetilde{\varpi}i \ (m,n \text{ enteros}).$$

Abel no parece darse cuenta de la importancia de este último resultado. Si las funciones elípticas fuesen holomorfas en su región fundamental, serían acotadas en todo el plano y, por lo tanto, constantes. Claro está, asumimos que sabemos el célebre Teorema de Liouville. Ciertamente, los aportes de Liouville a las funciones elípticas son posteriores y, así, constituyen un episodio que no se cubre en este artículo.

### 4.1.2. *División de las curvas*

Para la división de los arcos elípticos de una curva en partes iguales, Abel comienza por establecer los valores de φ en los múltiplos enteros de un argumento. Ciertamente,

$$\varphi(nz) = \varphi(z)\varphi'(z)r_n\big(\varphi^2(z)\big),$$

cuando $n$ es par. Aquí, $\varphi'$ es la derivada de $\varphi$ y $r_n\big(\varphi^2(z)\big)$ es una función racional del cuadrado de la función elíptica. Cuando $n$ es impar,

$$\varphi(nz) = \varphi(z)s_n\big(\varphi^2(z)\big),$$

donde $s_n$ también es una función racional. La demostración de estas dos expresiones se basa simplemente en la aplicación reiterada de la fórmula de adición.

El problema de la división de la curva es el inverso: dado $\varphi(nz)$, se debe determinar $\varphi(z)$. Abel (1827, 1828) procede, en un primer paso, a hacer una lista de todas las soluciones a dicho problema inverso. Ello le permite encontrar un hecho algebraico crucial para la solución: si se conoce una solución $\varphi(w)$ que produce $\varphi(nw)$, entonces las demás soluciones se pueden escribir evaluando a $\pm\varphi$ en ciertas translaciones de $\pm w$ en múltiplos fraccionarios de los periodos de $\varphi$. El lector matemático contemporáneo descubre inmediatamente que dichas translaciones constituyen un grupo isomorfo a cierto grupo de clases residuales de los números enteros. La lista completa en sí no posee utilidad inmediata, pero su existencia resulta ser fundamental para los pasos posteriores. Remitimos a los interesados al original, o al trabajo de Murcia y Saldaña (2011), para ver las listas correspondientes a los casos par e impar. Agreguemos que la demostración de este hecho fundamental reposa sobre la doble periodicidad de las funciones elípticas y la fórmula de adición. Dicho sea de paso, el original de Abel (1827, 1828) tiene el sabor de la moderna Teoría de Números. Este hecho no sorprende, pues Abel no para de reconocer en su proceder la gran influencia de Gauss (1801).

A continuación, se realiza una simplificación del problema: no es necesario considerar a todos los enteros, sino sólo a los números primos. Esto es una consecuencia evidente de las fórmulas de adición. Abel (1827) retoma entonces el problema de determinar los valores de $\varphi(z/p)$, $p$ primo, para un valor dado de $\varphi(z)$. El caso $p = 2$ (bisección) se resuelve fácilmente con la sola fórmula para el argumento doble

$$\varphi(z) = \frac{2\varphi(z/2)\varphi'(z/2)}{1 + c^2e^2\varphi^4(z)}.$$

Más aún, en este caso las expresiones resultantes de $\varphi(z/2)$ involucran únicamente raíces cuadradas y operaciones de cuerpo, o sea, esta cantidad es construible con regla y compás. El caso correspondiente a un primo impar $p$ es mucho más complicado y demanda la construcción de varias e ingeniosas funciones auxiliares, amén de la consabida doble periodicidad y la utilísima fórmula de adición. Abel usa también un ingrediente algebraico crucial al que nos hemos referido párrafos atrás: el teorema fundamental de las funciones simétricas. Este resultado provee el vínculo necesario entre las propiedades de las funciones elípticas y la solución de la ecuación bajo consideración. En fin, al final del procedimiento queda claro, para el lector de hoy, que los valores de $\varphi(z/p)$, $p$ primo e impar, son construibles a partir de $\varphi(z)$ mediante radicales y operaciones de campo. En esta oportunidad, sin embargo, las raíces no son siempre cuadradas y así, no se puede concluir que estos valores sean construibles con regla y compás. Desde el punto de vista de la moderna teoría de Galois, la demostración de Abel se puede reconstruir para producir una "torre de cuerpos" que dé razón de la constructibilidad por radicales (Murcia y Saldaña, 2011).

El §V de las *Recherches* de Abel (1827, 1828) termina con la aplicación de toda la teoría mencionada en el párrafo anterior al problema de la división de la lemniscata, es decir, a la inquietud que Gauss (1801) había sembrado en la sección séptima de sus *Disquisitiones* (ver más arriba). En efecto, Abel logra demostrar su célebre teorema sobre la lemniscata (Abel, 1827-1828):

> *« Es posible dividir la circunferencia completa de la lemniscata en m partes iguales* con sólo regla y compás*, si m es de la forma* $2^n$ *ou* $2^n+1$*, siendo este número primo; o bien si m es el producto de varios números de estas dos formas. »*
>
> *Este teorema es, como se ve, precisamente el mismo del señor* Gauss *sobre la circunferencia.*[xii] (p. 314)

La historia de esta solución puede leerse en (Hernández y Palacio, 2009). Reiteramos que si nos atenemos a los originales mencionados en esta sección, la influencia de Gauss (1801) sobre Abel (1827, 1828) parece haber sido en cuestiones "algebraicas". Abel lo reconoce cada vez que prueba la constructibilidad de una cantidad. Las reflexiones de Gauss sobre los transcendentes elípticos estuvieron durante muchos años confinadas al secreto de su diario matemático (como muchas otras de sus invenciones).

### 4.2. *Los* Fundamenta Nova *de Jacobi*

A continuación nos damos la licencia de organizar los resultados principales de la primera parte de los *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* (Jacobi, 1829), con subtítulo *De transformatione functionum ellipticarum* en tres subsecciones: transformaciones integrales (elípticas), construcción de las funciones (elípticas) y transformaciones funcionales (elípticas).

#### 4.2.1. *Transformaciones integrales*

Comienza Jacobi (1829) el tratado con una reelaboración de algunos resultados del *Traité* (Legendre, 1825). De paso, digamos que en toda la obra, el alemán muestra gran admiración y respeto por los logros de Legendre. En concreto, se interesa con gran acierto y precisión en las funciones racionales reales $y = y(x)$ cuya sustitución produce una transformación de formas diferenciales tal que

$$\frac{dy}{\sqrt{a' + b'y + c'y^2 + d'^{y^3} + e'y^4}} = \frac{dx}{w\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}}.$$

Jacobi prueba que dichas transformaciones existen y que, tomadas las debidas precauciones, la función $w$ es constante. Más adelante, demuestra que hay transformaciones de este tipo que producen la forma canónica de Legendre para la primera especie, o sea, la forma diferencial de la derecha se simplifica a

$$\frac{dx}{w\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}},$$

para cierta constante $k$. Esta constante resulta ser muy importante para lo que sigue y recibe el nombre de módulo (de la integral correspondiente). Hecha esta reducción, las transformaciones integrales son las $y = y(x)$ que realizan

$$\frac{dx}{w\sqrt{(1 - x^2)(1 - \lambda^2x^2)}} \rightarrow \frac{dx}{w\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}},$$

En otras palabras, el problema se reduce a una mera transformación de módulos $\lambda \rightarrow k$. Jacobi (1829) desarrolla toda una serie de proposiciones (de naturaleza predominantemente algebraica, si bien se refieren a cantidades transcendentes) que dan razón de todas las transformaciones posibles para un orden preestablecido de la función racional $y(x)$ (dicho orden es el máximo de los grados de su numerador y denominador). En particular, Jacobi se detiene en las transformaciones de orden tres y cinco. Valga la pena mencionar aquí que las mentadas proposiciones se demuestran también por métodos algebraicos, en particular, se usa la invariancia de los resultados bajo ciertos grupos de sustituciones. Claro está, Jacobi (1829) no utiliza ni el nombre, ni la noción de grupo.

### 4.2.2. *Construcción de las funciones*

A continuación, Jacobi se da a la tarea de construir las funciones elípticas. Su construcción difiere en algunos puntos importantes de la de Abel (1827, 1828). El punto de partida es la integral elíptica de la primera especie en forma trigonométrica

$$u(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}}, \ \varphi \in [-\pi/2\,, \pi/2],$$

que resulta de la sustitución $x = \sin\phi$. La inversa de $u$ se extiende como antes a toda la recta real. Jacobi llama a dicha inversa $am\, u$ (amplitud de $u$). Un nombre especial merece la derivada

$$\frac{d}{du}\, am\, u = (\pm)\sqrt{1 - k^2 sen^2\phi} = \Delta\, am\, u.$$

Las funciones elípticas son, para Jacobi (1829), las composiciones

$$\sin am\, u, \cos am\, u, \Delta\, am\, u, \tan am\, u, \cdots$$

En seguida y sin demostración, Jacobi evoca (tal vez debemos decir exige) el cumplimiento de la fórmula de adición

$$\sin am\,(u+v) = \frac{\sin\phi \cos\psi \pm \sin\psi \cos\phi\, \Delta\phi}{1 - k^2 \sin^2\phi \sin^2\psi},$$

donde $\phi = am\, u$ y $\psi = am\, v$. Otras fórmulas similares se verifican para $\cos am\, u$ y $\Delta\, am\, u$. Entre otras muchas consecuencias interesantes, ellas producen que la función $\sin am\, u$ es periódica con periodo igual $4K$, donde $K = u(\pi/2)$. Se debe notar que todas las funciones elípticas de Jacobi (1829) se pueden construir a partir de ésta última. Son muchas las identidades que resultan de las fórmulas de adición (Jacobi, 1829), las cuales ponen de manifiesto el carácter algebraico (en especial, finito) de gran parte de lo que sigue.

En el momento de extender las funciones al plano complejo, Jacobi (1829) difiere de Abel (1827-1828). En efecto, el alemán usa la sustitución trigonométrica

$$\sin\phi = i\tan\psi.$$

Este cambio de variable, evidente al experto, está justificado por

$$\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = \frac{id\psi}{\sqrt{\cos^2\psi + k^2\sin^2\psi}} = \frac{id\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}},$$

donde $k' = \sqrt{1-k^2}$ $k$ es el módulo conjugado de $k$. Este hecho crucial permite definir

$$\sin am\,(iu,k) = i\tan am\,(u,k')$$

y las demás funciones elípticas en el eje imaginario. Notemos que ha sido necesario especificar los módulos respectivos como un argumento adicional de la función. De este modo, $\sin am$ (con módulo $k$) resulta ser periódica en este eje con periodo igual a $2K'$, donde

$$K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\phi}}.$$

De nuevo, la extensión a todos los complejos se realiza por la fórmula de adición. La función resultante tiene, entonces, un periodo real $4K$ y un periodo imaginario $4k'i$. Sin embargo, debemos aclarar que Jacobi sabía ya que los periodos no tenían que ser ortogonales, tal como lo deja la parte b) de la cita siguiente (Jacobi, 1829):

> De las fórmulas anteriores, que deben considerarse fundamentales para el análisis de las funciones elípticas, queda claro que:

a) Las funciones elípticas del argumento imaginario $iv$, módulo $k$, se pueden transformar en otras reales de argumentos $v$, módulo $k' = \sqrt{1-k^2}$. De donde, en general, las funciones elípticas del argumento complejo $u + iv$, módulo $k$, se componen de dos funciones elípticas, una de argumento $u$, módulo $k$, y otra de argumento $v$, módulo $k'$.

b) Las funciones elípticas gozan de dos periodos, uno real, otro imaginario siempre y cuando el módulo $k$ sea real. Cuando dicho módulo es complejo, cada uno de los dos periodos es complejo. A esto es lo que llamaremos *principio de la doble periodicidad*. Con lo cual, se realiza la periodicidad analítica en la mayor generalidad posible. Así, las funciones elípticas no sólo se deben contar entre las otras funciones transcendentes, las cuales pueden tener muchas o mayores elegantes propiedades, sino que también se han de distinguir por poseer ciertas propiedades en un grado perfecto y absoluto.[xiii] (pp. 86-87)

Estos asuntos estarían en el ojo del huracán para los matemáticos posteriores a Jacobi, tanto que, aún hoy, constituyen el punto de partida para el estudio de las funciones elípticas.

### 4.2.3. *Transformaciones funcionales*

Si las funciones surgen de las inversas de las integrales, entonces las transformaciones integrales se deben poder llevar a las funciones. Tal parece haber sido el pensamiento iluminador de la investigación en la primera parte de los *Fundamenta Nova*. Ciertamente, la transformación integral $k \to \lambda$ de más arriba se deja interpretar como la transformación que convierte $\sin am\,(u,k)$ en $\sin am\,(u/w\,,\lambda)$. Con esto, Jacobi (1829) retoma sus teoremas para las transformaciones integrales y demuestra que los polinomios (numerador y denominador) que definen la transformación racional $y = y(x)$ se expresan de manera muy elegante y concisa en términos de las funciones elípticas. De hecho, todos los resultados sobre las transformaciones integrales encuentran una reformulación más limpia en términos de las funciones. Tal como antes, la demostración de estas proposiciones descansa en la existencia de cantidades invariantes bajo la acción de un "grupo de sustituciones". En el presente caso de las transformaciones funcionales, se trata del grupo de translaciones que introduce la doble periodicidad de las funciones elípticas.

Recordemos, así mismo, que dichas transformaciones no son únicas. Para un orden fijo $n$, existen varias de ellas. Al entenderlas dentro del contexto de las funciones elípticas, las distintas transformaciones de un mismo orden quedan determinadas por la cantidad

$$\omega = \frac{mK + m'K'i}{n},$$

donde $m, m'$ son ciertos enteros primos entre sí. En virtud de las fórmulas de adición, es suficiente considerar las cantidades

$$\omega = \frac{K}{n} \text{y} \quad \omega = \frac{K'}{n} i.$$

Jacobi (1829) distingue las transformaciones correspondientes a estos dos valores de ω con del adjetivo de “reales” (primera y segunda respectivamente). Las páginas 102 a 107 de los *Fundamenta Nova* (en la edición de las obras de Jacobi) contienen muchos detalles sobre las transformaciones reales.

Lo más interesante de todo es, sin embargo, el hecho de que Jacobi se aplica al estudio de ciertas propiedades de la “estructura” de las transformaciones elípticas. Se trata de propiedades interesantísimas. En primer lugar, Jacobi (1829) demuestra que toda transformación $k \to \lambda$ posee una transformación “complementaria” $k' \to \lambda'$, es decir una transformación que envía el módulo conjugado $\sqrt{1 - k^2}$ al módulo conjugado $\sqrt{1 - \lambda^2}$. Más tarde, demuestra igualmente que la transformación $k \to \lambda$ tiene una transformación “suplementaria” $\lambda \to k$. Actualmente, diríamos que tiene una inversa. Con ello, el lector contemporáneo intuye que a las transformaciones elípticas se les puede dar una estructura de grupo y que Jacobi está indagando la “estructura de dicho grupo”.

Estos hallazgos son mucho más que hechos estéticos aislados o descubrimientos elegantes. La verdad es que son, además, muy útiles. Con ayuda de su teoría de las transformaciones suplementarias (o inversas, como decimos hoy), Jacobi (1829) prueba que toda la teoría desarrollada por Abel (1827, 1828) sobre la división de las longitudes de arco elípticas es una consecuencia de la teoría de las transformaciones funcionales elípticas. Éste y otros hechos similares revelan que los *Fundamenta Nova* encierran un propósito de dimensiones titánicas: la teoría de las transformaciones elípticas contendría la solución a todos los problemas elípticos.

Mencionemos también que la primera parte de Jacobi (1829) también es una gran reconciliación con los grandes logros de Legendre (1825), en particular, en lo relativo al estudio de las llamadas integrales elípticas completas. La amistad intelectual de estos dos maestros se muestra repetidamente en sus escritos. El estilo de Jacobi es parecido al de Legendre y el alemán lo reconoce sin pensarlo dos veces. En el §22 de los *Fundamenta Nova*, Jacobi no sólo alaba una demostración del francés, sino que lo llama *summus in hac doctrina arbiter* (Jacobi, 1829, p. 94; en los Gesammelte Werke). De otro lado, Legendre toma claramente partido en favor de Jacobi sobre la originalidad de sus funciones elípticas, tal como es patente en el estudio de Cooke (2005).

Además de todo esto, los *Fundamenta Nova* contienen un detallado estudio de las ecuaciones modulares, es decir, las ecuaciones algebraicas que relacionan los módulos $k$ y $\lambda$. Son éstas ecuaciones polinómicas en dos indeterminadas cuyas soluciones abarcan todas las transformaciones elípticas de un orden dado.

La bibliografía y las traducciones de los *Fundamenta Nova* son escasas, tal vez porque fueron escritos en latín, tal vez porque pasaron de moda muy rápidamente. En el trabajo de Solanilla (2011) se han estudiado la mayor parte de los detalles matemáticos e históricos que contiene la primera parte de esta obra.

### 4.3. *Comparación de las* Recherches *con los* Fundamenta Nova

Si nos limitamos a la primera parte (Abel, 1827, 1828, §I al §V) y a la primera parte de Jacobi (1829), notaremos que las diferencias, si bien evidentes, no son crucialmente significativas. Con el fin de elucidar este punto, traemos la siguiente tabla de resumen:

TABLA I
Resultados de Abel y Jacobi (Solanilla, 2011, p. 65)

| *Asunto* | *Recherches (1ª parte)* | *Fundamenta Nova (1ª parte)* |
|---|---|---|
| Propósito | Una teoría de la división de las longitudes de arco elípticas | Una teoría general de las funciones elípticas |
| Taxonomía de Legendre | Se usa la primera especie como punto de partida | Se revisa la teoría de las transformaciones integrales racionales de la primera especie |
| Construcción de las funciones elípticas | Se repite la construcción real en el eje imaginario y se aplica adición | Se usa un cambio de variable trigonométrico para el eje imaginario y se aplica adición |

| | | |
|---|---|---|
| Doble periodicidad | Sirve para demostrar la constructibilidad por radicales de la división de los arcos y el teorema de la lemniscata | Lleva a las varias transformaciones funcionales elípticas de una orden dado |
| Estructura de las transformaciones elípticas | No se trata | Transformaciones complementarias y suplementarias, ellas explican los hallazgos de Abel |
| Ecuaciones modulares | No se tratan | Propiedades de invariancia, ecuación diferencial de tercer orden |

Como se puede ver, Jacobi (1829) logra mayores niveles de generalidad y explica, como un caso particular, el gran teorema de Abel (1827, 1828) sobre la lemniscata. Sin embargo, para contemplar con mayor claridad el alcance de Jacobi, es necesario revisar las segundas partes de estas obras, donde sus autores abordan las representaciones de las funciones elípticas en series y productos infinitos, en cuanto ellas son funciones transcendentes. Es cierto que ambos lograron expresiones significativas para tales series y productos, sin embargo, Jacobi toma de nuevo la ventaja al introducir la función $\Theta$, que la posteridad ha bautizado con su nombre. Las funciones elípticas se expresan transcendentalmente como cocientes de ciertas variaciones de esta función, un hecho que marcó la investigación en el área durante el resto del siglo XIX.

Algunos historiadores han tratado de reconstruir la rivalidad de Abel y Jacobi, un hecho que parece no estar confirmado en fuentes escritas directas. La obra de Abel apareció primero y Jacobi parece haber sido siempre muy respetuoso de los logros de su colega. Más aún, hay evidencia que Jacobi explicó a Legendre algunas cosas que él no entendía en el novedoso lenguaje de Abel (Cooke, 2005).

## 5. A manera de conclusión

El aspecto más sobresaliente de la emergencia de las funciones elípticas en la primera mitad del siglo XIX es el cambio de enfoque que se presenta en el ámbito de lo analítico - transcendente con respecto a la tradición heredada de Euler y

Lagrange. La propiedad más importante de las nuevas funciones es la fórmula de adición, un hecho que ni Abel (1827-1928) ni Jacobi (1829) demostraron con detalle. Es preciso recordar que los exigentes argumentos diferenciales e integrales que conducen a la mencionada fórmula constituyeron una preocupación central para los matemáticos del siglo XVIII. Abel y Jacobi, por el contrario, prefirieron dedicarse a deducir conclusiones y sacar provecho de la fórmula de adición.

En la esfera de los requerimientos de rigor se evidencia un cambio de sustancia y de estilo. Euler (1707-1783) y Lagrange (1736-1813) podrían calificarse propiamente como apodícticos. De otro lado, Abel (1827) y Jacobi (1829), sin dejar de ser demostrativos, pueden considerarse mucho más constructivos. Estas afirmaciones merecen explicaciones adicionales. El artículo de Euler (1756-57), que trata la ecuación diferencial fundamental, está organizado en parágrafos muy cortos alrededor de un *theorema* y su respectiva *demonstratio*. El trabajo de Euler (1761), en el que se trata la aplicación de la teoría de esta ecuación diferencial a la solución de problemas geométricos en la elipse, también está organizado en ideas breves pero no en parágrafos sino en una cadena lemas, corolarios, escolios, problemas y casos dispuestos alrededor de un teorema principal y su demostración. Los trabajos de Abel y Jacobi, por el contrario, buscan relatar la construcción de las funciones elípticas, como se ha delineado más arriba. No es que no sean demostrativos, pero, sin duda, dan menos importancia a la demostración (que enfrentan en otras de sus obras). Este cambio significativo es el síntoma de un vuelco en la manera de concebir las matemáticas en la Europa de los años 1820-1830. Para Euler, el problema de la existencia de los objetos matemáticos no es central: la solución a una ecuación diferencial es la prueba de que existe. Abel y Jacobi, por otro lado, parten de una especie de definición y se ven en la obligación de mostrar que tales objetos (funciones elípticas) existen y poseen importantes propiedades. Se trata de un cambio decisivo en la esfera del pensamiento: lo matemáticamente posible da paso a lo matemáticamente existente, en cuanto se puede construir.

Aunado a lo anterior, conviene referirse brevemente a la motivación geométrica de Euler. Sin duda conoció el trabajo de Fagnano y se interesó por ciertos problemas geométricos de las cónicas centrales. Sin embargo, muy pronto el análisis infinitesimal detrás de la ecuación diferencial fundamental encerró y ocultó dicha motivación geométrica original. Lo geométrico, en los artículos de Euler sobre las integrales elípticas, tiene siempre el tinte de lo geométrico - infinitesimal.

Quizás con mayor precisión, deberíamos decir que la respuesta última, que explica la nueva manera de ver los objetos de la matemática, ha de buscarse en las justificaciones que los matemáticos de la primera mitad del siglo XIX esgrimieron para defender sus nuevas formas de acción. Nos referimos concretamente al vuelco ocurrido en la década de 1820, que llevó a los matemáticos a exigirse mayor rigor en la conceptualización (Sørensen, 2010; Schubring, 2005).

En un plano más concreto y particular, dicho cambio de enfoque se manifestó en la preferencia por lo algebraico y en un escaso interés por indagar en las bases de las funciones elípticas dentro de la Variable Compleja (como ocurrió después). Ciertamente, creemos que el papel protagónico de las fórmulas de adición (y las identidades elípticas que de ellas se derivan) debe entenderse como un esfuerzo por lograr un mayor rigor teórico, un rigor “algebraico” o “canónico”, en el sentido de que las demostraciones se automatizan grandemente en la práctica. Para ellos, el análisis de lo transcendente evade de alguna manera el “rigor algebraico”. Una práctica que han heredado los textos contemporáneos de Álgebra y Topología. Otro aspecto del mismo fenómeno sería la despreocupación por, lo actualmente llamado, análisis complejo. En verdad, tanto Abel (1827, 1828) como Jacobi (1829) emplean las más de las veces métodos de la variable real (extendidos de alguna forma correcta) para tratar las funciones complejas. En particular, el punto de partida de sus construcciones en el plano complejo es siempre la definición de las funciones en los ejes real e imaginario.

Desde esta perspectiva, las descripciones historiográficas más comunes y predominantes sobre los aportes de Abel (1827, 1828) y Jacobi (1829) a los fundamentos de las funciones elípticas parecen ingenuas y hasta intrascendentes. Nos referimos concretamente a ese lugar común tan recurrente sobre la genialidad abeliana - jacobiana de invertir las integrales elípticas. Desde el punto de vista del profundo cambio vivían las matemáticas, dicha anotación, tan generalmente proferida sobre la materia, casi que se desvanece.

Respecto al desplazamiento del objeto de conocimiento desde la integral hasta la función elíptica, se pueden proponer las siguientes hipótesis explicativas:

- La imposibilidad de definir una función diferenciable en todo el cuerpo de los reales cuando se usa la función asociada a la integral elíptica de la primera especie.
- La fuerza de una tradición que se remonta a la antigüedad griega. *A grosso modo*, de alguna manera es más natural para el pensamiento matemático occidental trabajar con la función seno que con su inversa.
- La fórmula de adición toma una forma más sencilla y práctica en las funciones elípticas. Ciertamente, la versión de dicha fórmula para las integrales tiene inicialmente sentido sólo para un intervalo real. Luego, se hace necesario precisar varias e intricadas instrucciones (congruencias, por ejemplo) para llevarla a toda la recta.

– La Variable Compleja provee el marco propicio para resolver el asunto de los dos pares de raíces conjugadas del polinomio de grado cuarto que determina la función elíptica. En otras, palabras el plano complejo es el espacio ideal donde se pueden tener dos periodos linealmente independientes.

Para finalizar, las funciones elípticas contemporáneas son consecuentes de las de Abel (1827, 1828) y Jacobi (1829). Todavía es posible trazar su genealogía y encontrar rasgos similares entre unas y otras. Sin embargo, todo parece indicar que ellas deben su ser no sólo al arduo trabajo matemático, sino también a nuevas concepciones sobre el "deber ser" de las Matemáticas. El rigor clásico del siglo XVIII ya no era suficiente. Europa era otra. Las matemáticas "debían ser" algo más riguroso, estricto y formal. Había que proponer definiciones y mostrar que ellas no eran superfluas, ya que era posible construir objetos que las satisfacían. Lo que se puede construir, existe.

## Reconocimientos

Esta investigación ha sido financiada parcialmente por la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad de Medellín y el Comité Central de Investigaciones de la Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia. Los autores agradecen igualmente al Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad de Medellín y a la Facultad de Ciencias de la Universidad del Tolima por su valiosa colaboración para el desarrollo de esta investigación. Así mismo, los autores manifiestan sus sentimientos de gratitud a los revisores y al equipo editorial de RELIME.

## Referencias bibliográficas

Abel, N. H. (1827). Recherches sur les fonctions elliptiques. In A. L. Crelle (Ed.), *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *Cahier 2* (pp. 101-181)**.** Berlín, Alemania : G. Reimer.

Abel, N. H. (1828). Recherches sur les fonctions elliptiques. En A. L. Crelle (Ed.), *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *Cahier 3* (pp. 160-190)**.** Berlín, Alemania: G. Reimer.

Akhiezer, N. I. (1990). *Elements of the Theory of Elliptic Functions* (H. H. McFader, Trad.) Providence, Estados Unidos de América: American Mathematical Society. (Reimpreso de *Элементы теории эллипти́ческих функций*, por N. I. Akjiezer (Н. И. Ахиезер), 1970, Москва (Moscú), Сою́з Сове́тских Социалисти́ческих Респу́блик (Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas): Nauka (Наука))

Bellachi, G. (1894). *Introduzione storica alla teoria delle funzione ellittice*. Firenze, Italia: Barberà.

Bottazzini, U. & Gray, J. (2013). *Hidden Harmony - Geometric Fantasies: The Rise of Complex Function Theory*. New York, United States of America: Springer.

Briot, M. & Bouquet, M. (1859). *Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques*. Paris, France: Mallet-Bachelier.

Cauchy, A.-L. (1825). *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires.* Paris, France: Bure Frères.

Cooke, R. (2005). C. G. J. Book on Elliptic Functions (1829). In I. Grattan-Guinness (Ed.), *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940* (pp. 412-430). Amsterdam, Holanda: Elsevier.

Euler, L. (1761). De integratione aequationis differentialis $\frac{\mathrm{mdx}}{\sqrt{1-\mathrm{x}^4}} = \mathrm{ndy}/\sqrt{1-\mathrm{y}^4}$. In *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (Tomus VI, pp. 37-57). Petropoli (San Petersburgo), Rusia: Typis Academiæ.

Euler, L. (1761). Demonstratio theorematis et solutio problematis in actis erud. Lipsiensibus propositorum. In *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* (Tomus VII, pp. 128-162). Petropoli (San Petersburgo), Rusia: Typis Academiæ.

Gauss, C. F. (1801). *Disquisitiones Arithmeticae*. Lipsiae (Leipzig), Germania (Alemania): Commissis apud Gerh. Fleische.

Hadlock, C. (1978). *Field Theory and its Classical Problems.* Providence, United States of America : The Mathematical Association of America.

Hernández, U. & Palacio, O. (2009). *División de la lemniscata: Geometría, Análisis, Álgebra* (Tesis inédita de pregrado). Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.

Jacobi, C. G. J. (1829). *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. Regiomonti (Königsberg), Alemania: Sumptibus fratrum Bornträger.

Kragh Sørensen, H. (2010). *The Mathematics of Niels Henrik Abel, Continuation and New Approaches in Mathematics during the 1820s*. Aarhus, Dinamarca: Aarhus Universitet.

Lang, S. (1987). *Elliptic Functions*. New York, United States of America: Springer.

Lagrange, J. (1868). Sur l'intégration de quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable. In J. A. Serret (Ed.), *Œuvres de Lagrange* (Tome III, pp. 5-33). Paris, France: Gauthier-Villars. (Reimpreso de *Miscellanea Taurinensia,* Tome IV*,* 1766-1769. Turín, Italia.)

Lagrange, J. (1869). Réflexions sur la résolution algébrique des équations. In J. A. Serret (Ed.), *Œuvres de Lagrange, Tome troisième,* (pp. 205-421). Paris, France: Gauthier-Villars. (Reimpreso de *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 1770-1771. Berlín, Alemania: Chez Chrétien Frédéric Voss.)

Legendre, A.-M. (1811). *Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures.* Paris, France: Courcier.

Murcia, J. & Saldaña, A. (2011). *Las funciones elípticas de Abel* (Tesis inédita de Especialización). Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.

Pareja, G. Solanilla, L. & Tamayo, A. (2010). *Integrales elípticas con notas históricas*. Medellín, Colombia: Sello Universidad de Medellín.

Pareja, G. Solanilla, L. & Tamayo, A. (2013). Indicios del papel preponderante del álgebra en la emergencia de las funciones elípticas. *Revista de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín*, 2 (2), 43-52.

Recalde, L. (2010). *La teoría de las funciones de Baire. La constitución de lo discontinuo como objeto matemático.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Remmert, R. C. (1991). *Theory of Complex Functions.* New York, United States of America: Springer.

Schubring, G. (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17-19$^{th}$ Century. France and Germany.* New York, United States of America: Springer.

Solanilla, L. (2011). *Las transformaciones elípticas de Jacobi.* Ibagué, Colombia: Universidad del Tolima.

Tamayo, A. (2005). *Geometría y análisis en la historia temprana de las integrales elípticas* (Tesis inédita de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

i Hinc itaque concludimus huius aequationis differentialis :

$$\frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cxx+2Dx^3+Ex^4}}=\frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cyy+2Dy^3+Exy^4}}$$

aequationem integralem eamque completam ese

$$0=\alpha+2\beta(x+y)+\gamma(xx+yy)+2\delta xy+2\varepsilon xy(x+y)+\zeta xxyy\ldots$$

ii Si binae variabiles $x$ et $y$ ita a se invicem pendeant, vt. sit:

$$0=\alpha+\beta(xx+yy)+2\gamma xy+\delta xxyy$$

erit sive summa, sive differentia, harum formularum integralium

$$\int\frac{dy}{\sqrt{-\alpha\beta+(\gamma\gamma-\alpha\delta-\beta\beta)yy-\beta\delta y^4}}\pm\int\frac{dy}{\sqrt{-\alpha\beta+(\gamma\gamma-\alpha\delta-\beta\beta)xx-\beta\delta yx^4}}$$

aequalis quantitati constanti.

iii Ces équations sont comprises dans la formule suivante:

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}=\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}},$$

dont l'integrale est exprimée en général par l'équation

$$A+B(x+y)+C(x^2+y^2)+Dxy+E(x^2y+y^2x)+Fx^2y^2=0.$$

iv l'equazione differenziale prende la forma

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'}=0$$

il cui integrale trascendente è secondo le notazioni de Legendre

$$F(k,\phi)+F(k,\phi)=F(k,\mu)$$

rappresentando con $\mu$ il valore di $\phi$ per $\phi'=0$. L'ampliezza $\mu$ si otterrà dalla relazione con le precedenti sostituzioni per la formula:

$$\sin\mu=\frac{\sin\phi'\cos\phi\,\Delta\phi+\sin\phi\cos\phi'\,\Delta\phi'}{1-k^2\sin^2\phi\sin^2\phi'}.$$

v CHAPITRE PREMIER.
*Idée générale des différentes sortes de transcendantes contenues dans la formule intégrale* $\int\frac{\boldsymbol{Pdx}}{\boldsymbol{R}}$.

1. Nous représentons par $P$ une fonction rationnelle quelconque de $x$, et par $R$ le radical

$$\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}\ldots$$

vi 15. Cela posé, les fonctions ou transcendantes elliptiques comprises dans la formule H, seront divisés en trois espèces :

La première et la plus simple est représentée par la formule $\int d\phi/\Delta$;
La seconde es l'arc d'ellipse, compté depuis le petit axe, et dont l'expression est $E = \int \Delta d\phi$;
En fin, la troisième espèce est représentée par la formule. . . . . . . . $\int d\phi/((1+n\sin^2\phi)\Delta)$; ellecontient, outre le module $c$ commun aux deux autres espèces, un paramètre $n$ qui peut être à volonté positif ou négatif, réel ou imaginaire.

vii Le problème de la résolution des équations des degrés supérieurs au quatrième est un de ceux dont on n'a pas encore pu venir à bout, quoique d'ailleurs rien n'en démontre l'impossibilité.

viii 89. Nous supposerons, comme dans la Section précédente, que l'équation proposée soit représentée généralement par

$$x^{\mu} + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + px^{\mu-3} + \cdots = 0,$$

et que ses racines, qui doivent être au nombre de $\mu$, soient désignées par $x', x'', x''', x^{IV}, \cdots, x^{(\mu)}$. Ainsi l'on aura, par la nature des équations,

$$-m = \quad x' + x'' + x''' + x^{IV} + \cdots,$$

$$n = \quad x'x'' + x'x''' + x''x''' + x'x^{IV} + x''x^{IV} + x'''x^{IV} + \cdots,.$$

$$-p = \quad x'x''x''' + x'x''x^{IV} + x'x'''x^{IV} + x''x'''x^{IV} + \cdots,.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Et il est clair que ces fonctions de $x', x'', x''', x^{IV}, \cdots$, par lesquelles sont exprimées les quantités $m, n, p, \cdots$, seront nécessairement toutes de la forme $f[(x', x'', x''', x^{IV}, \cdots)]$, et que par conséquent ces fonctions seront toutes semblables, ce qui est une propriété fondamentale des équations.

ix Theorem 9. Every symmetric polynomial *P* over *F* in $x_1, x_2, \cdots, x_n$ can be written as a polynomial *Q* over *F* in the elementary symmetric functions. If *P* has all integral coefficients, then so too does *Q*. The degree of *Q* is less than or equal to the degree of *P*.

x Ceterum principia theoriae, quam exponere aggredimur, multo latius patent, quam hic extenduntur. Namque non solum ad functiones circulares, sed pari successu ad multas alias functiones transscendentes applicari possunt, e. g. ad eas quae ab integrali $\int dx/\sqrt{1-x^4}$ pendent, praetereaque etiam ad varia congruentiarum genera : sed quoniam de illis functionibus transscendentibus amplum opus peculiare paramus, . . .

xi … Donc, pour embrasser dans la même définition les intégrales prises entre des limites réelles, et les intégrales prises entre des limites imaginaires, il convient de représenter par la notation

$$(4) \int_{x_o+y_o\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z)dz$$

le limite ou l'une des limites vers lesquelles converge la somme. . . Pour obtenir deux suites de cette espèce, il suffit de supposer

$$(7)\ \ x = \phi(t); \quad y = \chi(t),$$

*$\phi(t)$, $\chi(t)$* étant deux fonctions continues d'une nouvelle variable *t*, toujours croissantes ou décroissantes depuis $t=t_o$ jusqu'à $t=T$, et assujetties à vérifier les conditions

$$(8)\begin{cases}\phi(t_o) = x_o, & \chi(t_o) = y_o,\\ \phi(T) = X, & \chi(T) = Y;\end{cases}$$

… On aura donc

$$(12) A + B\sqrt{-1} = \int_{t_o}^{T} [\phi'(t) + \sqrt{-1}\chi'(t)] f(\phi(t) + \sqrt{-1}\chi(t)) dz ; \dots$$

xii « On peut diviser la circonférence entière de la lemniscate en *m* parties égales par la règle et le compas seuls, si *m* est de la forme $2^n$ ou $2^n + 1$, ce dernier nombre étant en même temps premier; ou bien si *m* est un produit de plusieurs nombres de ces deux formes. »
Ce théorème est, comme on le voit, précisément le même que celui de M. Gauss, relativement au circle.

xiii E formulis praecedentibus, quae et ipsae tamquam fundamentales in analysi functionum ellipticarum considerari debent, elucet:

a) functiones ellipticas argumenti imaginarii $iv$, moduli $k$, transformari posse in alias realis $v$, móduli $k' = \sqrt{1-k^2}$. Unde generaliter functiones ellipticas argumenti imaginarii $u + iv$, moduli $k$, componere licet e functionibus ellipticis argumenti $u$, móduli $k$, et aliis argumenti $v$, móduli $k'$.
b) functiones ellipticas duplici gaudere periodo, altera reali, altera imaginaria, siquidem modulus $k$ est realis. Utraque fit imaginaria, ubi modulus et ipse est imaginarius. Quod principium duplicis periodi nuncupabimus. E quo, cum universam, quae fingi potest, amplectatur periodicitatem analyticam, elucet functiones ellípticas non aliis adnumerari debere transcendentibus, quae quibusdam gaudent elegantis, fortasse pluribus illas aut maioribus, sed speciem quandam iis inesse perfecti et absoluti.

## Autores

**Leonardo Solanilla Chavarro**. Universidad del Tolima, Ibagué Colombia. leonsolc@ut.edu.co

**Ana Celi Tamayo Acevedo**. Universidad de Medellín, Colombia. actamayo@udem.edu.co

**Gabriel Antonio Pareja Ocampo**. Universidad de Antioquia, Colombia. gpareja@ayura.udea.edu.co