

**CUADERNO DE REFORZAMIENTO
PEDAGÓGICO - JEC**

**MATEMÁTICA 2
SECUNDARIA**



MINISTERIO DE EDUCACIÓN

CUADERNO DE REFORZAMIENTO PEDAGÓGICO - JEC MATEMÁTICA-SECUNDARIA 2

El presente cuaderno para estudiantes de segundo grado de Secundaria ha sido elaborado por el equipo de Jornada Escolar Completa de la Dirección de Educación Secundaria en el marco de la estrategia de reforzamiento pedagógico, que forma parte de las acciones de acompañamiento al estudiante.

Propuesta de contenido

Hubner Luque Cristóbal Jave
Gladis García Lizama

Revisión pedagógica

Manuel Fidencio Rodríguez Del Águila
Rosemary Fátima Montoya Gutiérrez
Oscar Aníbal Hernández Chingay
Rosa Lourdes Moina Choque
María Gladys Deza Julca
Vilma Alejandrina Fernández Ruiz
Henry Aparicio Abad

Corrección de estilo

Jesús Hilarión Reynalte Espinoza
Gerson Platini Rivera Cisneros

Diseño y diagramación

Víctor Raúl Ataucuri García

© Ministerio de Educación
Calle Del Comercio N.º 193, San Borja
Lima 41, Perú
Teléfono: 615-5800
www.minedu.gob.pe

Primera edición: noviembre de 2016
Tiraje: 153,366 ejemplares

Impreso en el Perú / *Printed in Peru*

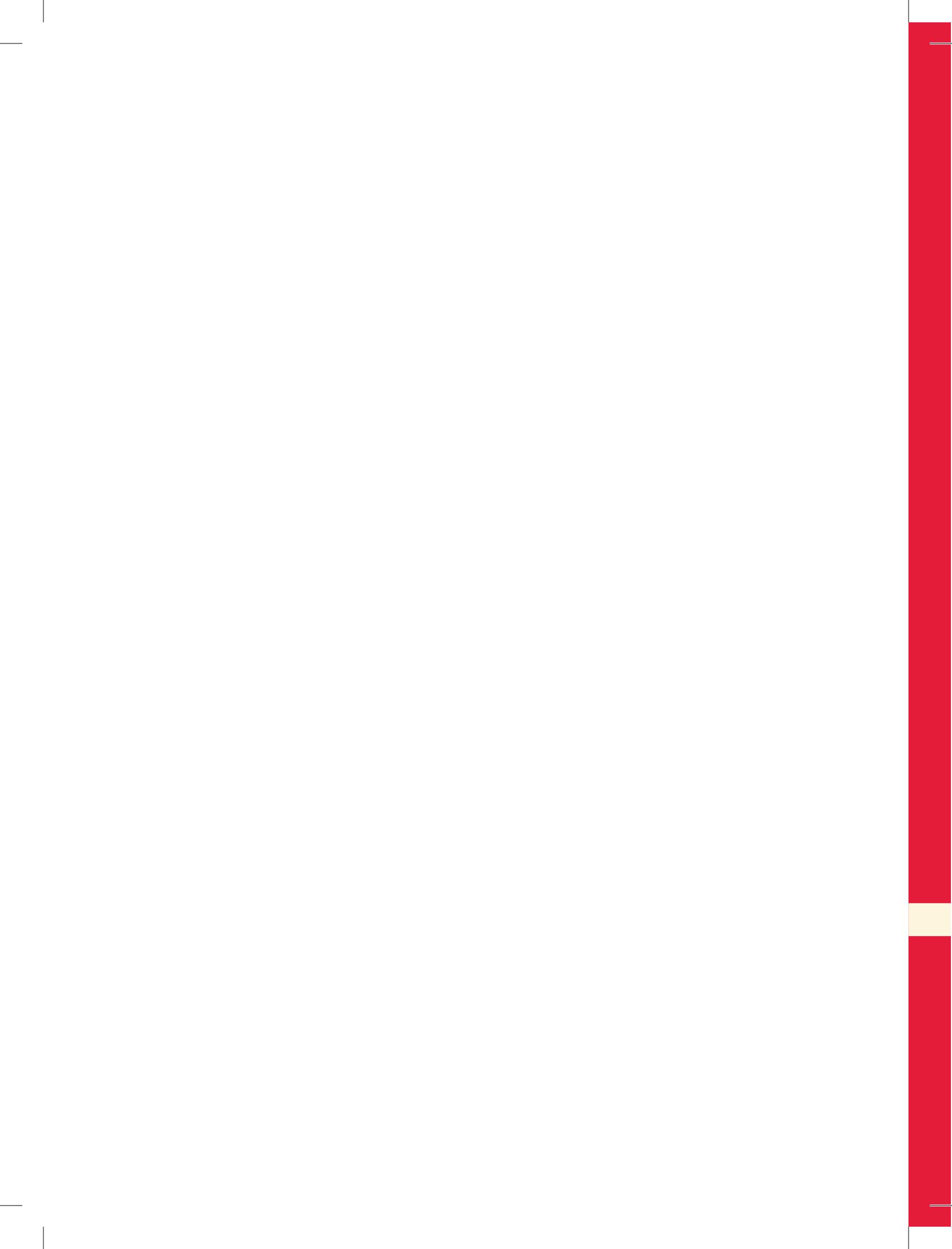
Impreso por: CECOSAMI S. A.
Cal. 3 Mza. E Lote 11 Urb. Santa Raquel, Lima - Ate
625-3535/www.cecosami.com

Hecho el Depósito Legal en la
Biblioteca Nacional del Perú N° 2016 - 16930

Todos los derechos reservados. Prohibida la reproducción de este material por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso del Ministerio de Educación.

ÍNDICE

	Página
Ficha: Leemos el recibo de energía eléctrica	5
Ficha: Conocemos la ferretería	13
Ficha: Los proyectos mejoran nuestra comunidad	23
Ficha: Albergamos perros abandonados en la calle	31
Ficha: Decidimos ver televisión por señal cerrada	41
Ficha: Las transformaciones geométricas en el antiguo Perú	51
Ficha: La importancia del calentamiento muscular previo a realizar un deporte	61
Ficha: La tómbola escolar	71
Ficha: La tienda de frutas	79
Ficha: Buscamos argumentos para tomar una buena decisión	87
Ficha: Los porcentajes y las compras	99
Ficha: Transformaciones geométricas con azulejos	107
Ficha: Carrera entre amigos	118
Ficha: Economizamos con el gas natural	128
Ficha: Histogramas y polígonos de frecuencias para representar el uso del tiempo libre	136
Ficha: Las medidas de tendencia central en el historial medallero de los Juegos Panamericanos	145
Ficha: Conocemos el uso de las probabilidades	158
Ficha: Crecimiento de las bacterias	167
Ficha: Las figuras geométricas en nuestro uso cotidiano	177
Ficha: Un paseo por el Parque de las Leyendas	185



Matemática 2.º grado

Ficha: Leemos el recibo de energía eléctrica



El recibo de energía eléctrica brinda información valiosa sobre el consumo mensual de electricidad en nuestros hogares. Es muy importante que sepamos leer e interpretar dicha información, pues nos permite optimizar nuestro consumo y ahorrar dinero. Debemos tener en cuenta, además, que la energía eléctrica es necesaria para nuestras actividades diarias, ya sea para el funcionamiento de artefactos o, simplemente, para alumbrarnos.

A continuación, te mostramos la imagen de un recibo de energía.

PAG. 1 de 1 JUNIO 2015

01347
Usuario: Suarez J. Grey
Dirección: Av. Cultura peruana 255
LIMA CERCADO
N° de Medidor: 02388987 3 Fils
Ruta: 84-252-3200-91

Numero de Cliente
552415252
11569

N° de Recibo: C-46385847

01954683700000650003072015026411000000007

Datos del Suministro

Alimentador	M-02	Pliego Tarifario	LIMA
Pot. Contratada	3.00 kW	Tarifa	BT9B
Medidor	MONOFÁSICO - Electrónico	Sistema Eléctrico	LIMA
Conexión	SUBTERRANEA	Tipo de Conexión	CT-1
Tensión	220 V - BT		

Detalle del Consumo

Lectura Actual (17/06/2015)	6272	Factor	1
Lectura Anterior (19/05/2015)	6114	Consumo kWh	158
		Precio Unitario S/. kWh	0.4341

Detalle de Importes por Consumo

CONSUMO HISTÓRICO EN kWh	Abr-15	101.00	Reposc. Elemt. Sustraídos	0.01
	May-15	98.00	Reposc. y Mant. de Conex	0.67
			Cargo Fijo	2.45
			Cargo por Energía	68.59
			Interes Compensatorio	0.07
			Alumbrado Público	7.75
			SUBTOTAL Mes Actual	79.54
			I.G.V.	14.32
			TOTAL Mes Actual	93.86
			Aporte Ley N° 28749	1.22
			Redondeo Mes Anterior	0.04
			Redondeo Mes Actual	-0.12
			Total Importes	S/. 95.00

Responde las siguientes preguntas:

- 1 ¿Qué aspectos importantes tiene el recibo?

- 2 ¿Qué tipo de números observas en el recibo? ¿Por qué crees que es necesario el uso de este tipo de números?

- 3 ¿Cuál es el porcentaje que se paga por concepto de IGV?

4 En el recibo mostrado, ¿cuál es el importe que se debe pagar por IGV?

5 ¿Explica cómo se obtiene el monto a pagar por el “Cargo por Energía”?

En grupos de trabajo de cuatro estudiantes, revisen la información importante para comprender la situación planteada.

APRENDEMOS

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Con respecto a la situación planteada, observamos que, además de los datos del suministro y usuario, en el recibo figuran las secciones “Detalle del Consumo” y “Detalle de Importe por Consumo”, en las que se evidencia el uso de los números racionales expresados en su forma decimal.

En “Detalle del Consumo” encontramos la lectura en kilowatts por hora (kWh) del mes actual y del mes anterior; la diferencia entre ambas cantidades da como resultado el consumo del presente mes. También hallamos el precio unitario por kWh, que multiplicado por el consumo del mes da el “Cargo por Energía” del mes actual.

En el sector correspondiente a “Detalle de Importes por Consumo”, apreciamos el consumo histórico mes a mes; esta información es muy importante porque con ella podremos controlar nuestra demanda de energía eléctrica. En la parte derecha vemos algunos pagos propios del servicio, como el cargo fijo, la reposición y el mantenimiento, el alumbrado público, etc., que adicionados al cargo por energía completan el “SUBTOTAL Mes Actual”.

El “TOTAL Mes Actual” resulta de la suma del “SUBTOTAL Mes Actual” y el “IGV” correspondiente.

Tengamos presente que el impuesto general a las ventas (IGV = 18 %) es un deber que tenemos todos los ciudadanos para con el país.

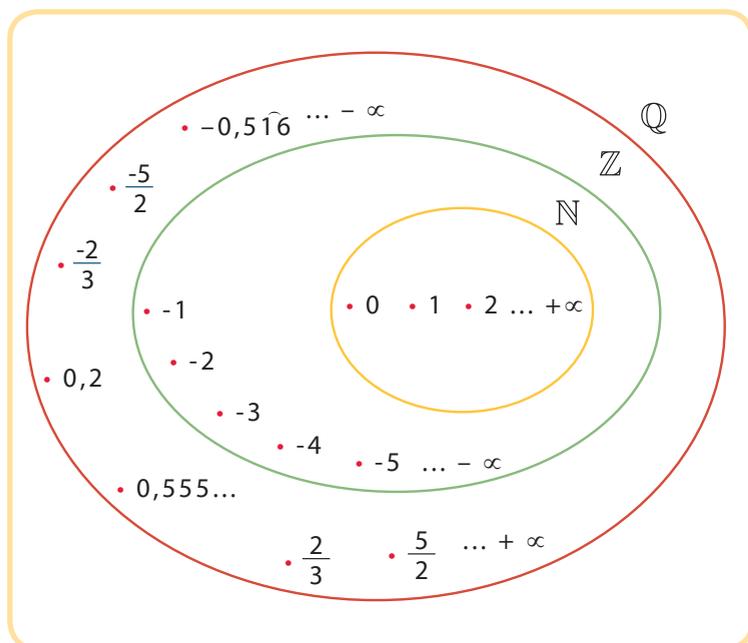
Para mayor información, podemos ingresar al siguiente enlace: <<https://goo.gl/BVGx8F>>

A continuación se presentan conceptos importantes que debemos conocer sobre los números racionales.

Los números racionales

Todos los elementos del conjunto de los números racionales pueden ser expresados como una fracción de la forma $\frac{a}{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$. Por ejemplo, el número fraccionario $\frac{-3}{8}$ es un número racional, ya que -3 y $8 \in \mathbb{Z}$ y $8 \neq 0$. A su vez, $\frac{-3}{8}$ puede ser expresado como el número decimal -0,375.

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES



Un número racional se puede representar por infinitas fracciones con similar valor numérico, es decir, por fracciones que sean equivalentes entre sí.

Por ejemplo: $\frac{1}{2}$ puede ser expresado como $\frac{2}{4}, \frac{4}{8}$, etc.

Es importante mencionar que los números enteros también pueden ser expresados como fracción, debido a que todo número entero tiene 1 como denominador; por tanto, son parte de los números racionales.

$$3 = \frac{3}{1}$$

El conjunto de los números racionales se denota con la letra \mathbb{Q} .

Representación de números racionales en la recta numérica

Al igual que los números naturales y enteros, los números racionales también pueden ser representados en la recta numérica; en ella cada número se representa por un solo punto.

Por ejemplo, podemos representar $\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, -\frac{9}{4}, -\frac{14}{5}$ en la recta numérica.

Expresamos las equivalencias:

$$\frac{5}{2} = 2,5$$

$$\frac{7}{3} = 2,333\dots$$

$$-\frac{9}{4} = -2,25$$

$$-\frac{14}{5} = -2,8$$

Luego procedemos a ubicar las fracciones en la recta numérica:



Orden en los números racionales

Decimos que el conjunto de los números racionales es ordenado porque si se toman dos números racionales cualesquiera, se puede establecer entre ellos una relación de orden; es decir, pueden ser comparados y se puede determinar cuál es el mayor, el menor o si son iguales.

Por ejemplo, si queremos saber cuál es el número mayor entre $\frac{2}{5}, 0,75$ y $\frac{3}{6}$, bastaría con compararlos uno a uno o representarlos en la recta numérica.

$$0,75 > \frac{3}{6} \text{ y } \frac{3}{6} > \frac{2}{5}, \text{ entonces: } 0,75 > \frac{3}{6} > \frac{2}{5}$$

Si trasladamos las fracciones a la recta numérica, tenemos:



Observamos que la fracción mayor se encuentra más a la derecha. Por lo tanto, $\frac{2}{5} < \frac{3}{6} < \frac{3}{4}$.

Un número racional se puede expresar como fracción, decimal y porcentaje. Por ejemplo:

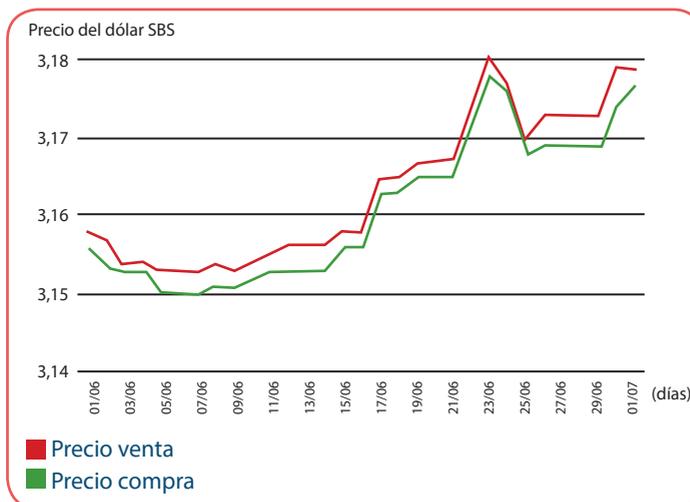
Fracción	Expresión decimal	Porcentaje
1	1,0	100 %
$\frac{1}{2}$	0,5	50 %
$\frac{1}{4}$	0,25	25 %
$\frac{1}{5}$	0,2	20 %
$\frac{3}{4}$	0,75	75 %
$\frac{7}{10}$	0,7	70 %

ANALIZAMOS

- La siguiente gráfica corresponde a la evolución del precio de compra y venta del dólar durante un mes. **¿Qué día el precio de venta del dólar registró la mayor alza? ¿Cuál es el precio de compra el día 7 de junio?**

RESOLUCIÓN

Observamos que en la gráfica la línea roja corresponde al precio de venta del dólar, mientras que la línea verde representa el precio de compra.



Fuente de gráfica: <http://cuantoestaeldolar.pe/historial.php>

Con respecto a la pregunta sobre el día en que el precio de venta registró la mayor alza, vemos que la línea roja muestra el pico más alto el 23 de junio.

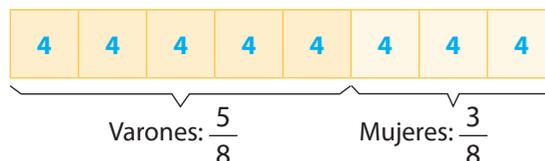
En cuanto a la segunda pregunta sobre el precio de compra del dólar el día 7 de junio, la respuesta es 3,15 soles, según podemos apreciar por la ubicación de la línea verde dentro del gráfico.

RESPUESTA: la mayor alza en el precio de venta ocurrió el 23 de junio, mientras que el 7 de junio el precio de compra fue de 3,15 soles.

- 2 En una sección de segundo grado, $\frac{5}{8}$ de los estudiantes son varones y 12 son mujeres. **¿Cuántos estudiantes hay en esta sección de segundo grado?**

RESOLUCIÓN

En esta sección, $\frac{5}{8}$ de los estudiantes son varones, lo cual indica que las mujeres representan $\frac{3}{8}$ del total de los estudiantes.



Sabiendo que $\frac{3}{8}$ de los estudiantes corresponden a las mujeres y estas son 12. Entonces, $\frac{1}{8}$ está representado por 4 estudiantes de dicha sección.

RESPUESTA: en la sección de segundo grado hay 32 estudiantes.

- 3 Una escuela cuenta con una delegación de estudiantes para participar en los juegos interescolares de Secundaria que se desarrollarán en septiembre. De esta delegación, que participará en diferentes disciplinas, $\frac{1}{4}$ pertenece a segundo grado; $\frac{3}{18}$, a tercer grado; $\frac{1}{3}$, a cuarto grado, y $\frac{1}{12}$, a quinto grado. **¿A qué grado pertenece la mayor parte de los estudiantes de esta delegación? ¿Cómo lo sabes?**

RESOLUCIÓN

En primer lugar, debemos comprender de qué trata el problema. Sabemos que hay una delegación de estudiantes, pero no cuántos la conforman. Por otro lado, conocemos que parte de dicha delegación corresponde a cada grado participante. Para determinar a qué grado pertenece la mayor parte de los estudiantes, debemos comparar todas las partes de la delegación.

Pensando en alguna estrategia que nos permita comparar dichas fracciones, podemos amplificar y simplificar cada fracción de tal manera que tengamos fracciones homogéneas, lo que facilita la comparación. También podemos representar las fracciones en su forma decimal y luego compararlas.

Entonces, anotamos los datos en la siguiente tabla:

Grado	Parte de la delegación	Fracciones homogéneas
Segundo	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{12}$
Tercero	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{12}$
Cuarto	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{12}$
Quinto	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Finalmente, ordenamos de mayor a menor:

$$\frac{4}{12} > \frac{3}{12} > \frac{2}{12} > \frac{1}{12}$$

RESPUESTA: la mayor parte de estudiantes de la delegación pertenece a cuarto grado; lo sabemos porque al tener fracciones homogéneas nos basta con comparar los numeradores para saber cuál es la mayor.

2 Carlos ocupa $\frac{1}{3}$ del día en trabajar, $\frac{1}{6}$ del día en estudiar y $\frac{1}{4}$ del día en dormir. **Escribe verdadero o falso según corresponda.**

- a) Carlos ocupa menos tiempo en trabajar que en estudiar o en dormir.
- b) Carlos ocupa más tiempo del día en estudiar que en trabajar o dormir.
- c) Carlos ocupa el mismo tiempo en trabajar y en dormir.
- d) Carlos ocupa más tiempo del día en trabajar que en estudiar o en dormir.

3 Una receta para preparar queques requiere de los siguientes ingredientes:

Ingrediente	Cantidad
Harina	$\frac{3}{2}$ tazas
Leche	$\frac{1}{2}$ taza
Azúcar	$\frac{2}{3}$ taza

Ingrediente	Cantidad
Huevos	2 unidades
Vainilla	$\frac{1}{3}$ cucharadita
Polvo de hornear	3 cucharaditas

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- a) Se utiliza la misma cantidad de vainilla y de polvo de hornear.
- b) Se utiliza más azúcar que harina en la preparación del queque.
- c) Se utiliza menos cantidad de leche que de azúcar.
- d) Se utiliza la misma cantidad de azúcar y de harina.

4 En una carrera de atletismo (100 m planos), José llegó a la meta en 19,2 s; Edson, en 19,19 s, y Diego, en 19,18 s. José afirma que ganó la carrera. **¿Estás de acuerdo con esa afirmación? ¿Por qué?**

5 En los Juegos Olímpicos de Londres 2012, en la categoría de atletismo 100 metros planos, el estadounidense Justin Gatlin registró 9,79 s, mientras que los jamaquinos Usain Bolt y Yohan Blake obtuvieron 9,63 s y 9,75 s, respectivamente.

¿En qué orden llegaron estos competidores a la meta?

- a) Justin Gatlin, Usain Bolt, Yohan Blake.
- b) Usain Bolt, Yohan Blake, Justin Gatlin.
- c) Justin Blake, Yohan Blake, Usain Bolt.
- d) Usain Bolt, Justin Gatlin, Yohan Blake.

6 Al partido entre Chile y Perú, en la ronda de semifinales de la Copa América Chile 2015, asistieron aproximadamente 45 000 personas. Si el estadio de Santiago tiene una capacidad máxima de 50 000 personas, **¿qué porcentaje de asistencia hubo en el estadio para ese partido?**

- a) 90 %
- b) 45 %
- c) 50 %
- d) 10 %

7 Elsa vende $\frac{1}{3}$ de su terreno a la municipalidad para construir una agencia municipal, mientras que $\frac{3}{10}$ del terreno se los cedió a uno de sus hijos para un negocio de lavado de autos. **¿Cuál de las dos partes mencionadas del terreno es la más pequeña? ¿Cómo lo sabes?**

Matemática 2.º grado

Ficha: Conocemos la ferretería



Responde las siguientes preguntas:

- 1 ¿Qué artículos encuentras en una ferretería? Señala tres de ellos.

- 2 ¿Con qué herramienta harías perforaciones en madera o metal?

- 3 ¿Qué instrumento te permite determinar el diámetro de esas perforaciones?

- 4 Uno de los artículos que se venden en la ferretería son las brocas. Estas se ofrecen en estuche o por unidad. En un estuche con cuatro brocas, la más gruesa mide $\frac{1}{2}$ pulgada y la más delgada, $\frac{1}{8}$ de pulgada de diámetro. ¿Qué medidas podrían tener las otras dos?

APRENDEMOS

ORDEN Y DENSIDAD EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Si tuviéramos que ordenar varios números racionales de menor a mayor, o viceversa, **¿cómo lo llevaríamos a cabo?**

Estrategia 1: homogeneizamos denominadores.

Si nos piden ordenar de menor a mayor los números $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, entonces debemos aplicar el siguiente procedimiento:

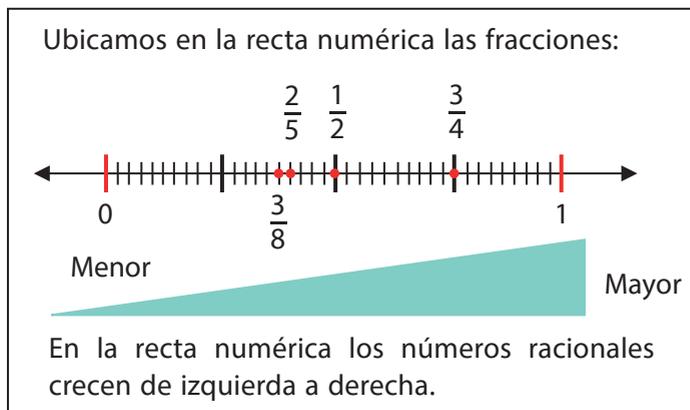
- Hallamos el menor número que sea divisible por todos los denominadores, es decir, por 4, 5, 2 y 8. Este número se conoce también como el mínimo común múltiplo (m.c.m.) y, en este caso, es 40.
- Homogeneizamos denominadores.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 10}{4 \times 10} = \frac{30}{40}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 8}{5 \times 8} = \frac{16}{40}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 20}{2 \times 20} = \frac{20}{40}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 5}{8 \times 5} = \frac{15}{40}$$



- Ordenamos los números observando únicamente los numeradores.

$$\frac{15}{40}, \frac{16}{40}, \frac{20}{40}, \frac{30}{40}$$

- Los sustituimos por los números equivalentes para obtener los números racionales ordenados de menor a mayor.

$$\frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$$

Estrategia 2: obtenemos su representación decimal.

Para ordenar de mayor a menor los números $\frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}$, efectuamos los siguientes pasos:

- Obtenemos la expresión decimal de cada número.

$$\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0,75$$

$$\frac{7}{9} = 7 \div 9 = 0,777\dots$$

$$\frac{5}{6} = 5 \div 6 = 0,8333\dots$$

$$\frac{1}{3} = 1 \div 3 = 0,3333\dots$$

- Los ordenamos en su forma decimal: 0,8333...; 0,777...; 0,75; 0,3333..., y los reemplazamos por sus equivalentes en forma fraccionaria:

$$\frac{5}{6}, \frac{7}{9}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}$$

1 ¿Cómo obtenemos un número racional comprendido entre dos números racionales cualesquiera?

Estrategia 1: sacamos el promedio de los dos números dados.

Si queremos conseguir un número entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{8}$, entonces debemos seguir estos pasos:

- Sumamos las fracciones y dividimos el resultado por dos:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}}{2} = \frac{\frac{5}{8}}{2} = \frac{5}{16}$$

- Siguiendo el mismo procedimiento, podemos obtener otro número entre $\frac{1}{8}$ y $\frac{5}{16}$, también entre $\frac{5}{16}$ y $\frac{1}{2}$, y así sucesivamente.

Estrategia 2: sumamos numeradores y denominadores.

Para obtener un número entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{7}{8}$, llevamos a cabo los siguientes pasos:

$$\frac{3 + 7}{4 + 8} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

- Siguiendo el mismo procedimiento, podemos obtener otro número entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$, también entre $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{8}$, y así sucesivamente.

¿Cómo podemos comprobar si el número que resulta de este procedimiento se encuentra comprendido entre los números racionales dados?

Podemos concluir que entre dos números racionales hay _____ números racionales. A este principio se le denomina densidad de los números racionales.

ANALIZAMOS

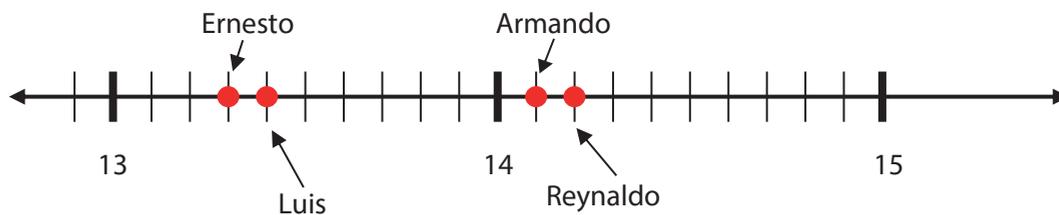
- Algunos de los tiempos registrados de los cinco primeros puestos en la carrera de 100 metros planos se muestran en la siguiente tabla:

Atleta	Tiempo (segundos)	Puesto
Ernesto	13,3	1.º
José		2.º
Luis	13,4	3.º
Armando	14,1	4.º
Reynaldo	14,2	5.º

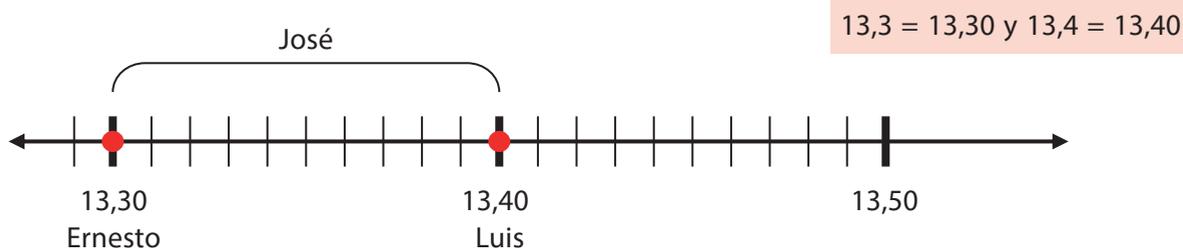
- ¿Qué valores podría tomar el tiempo que ha marcado José en esta carrera sin que se altere el orden de llegada?
 - Solo 13,5.
 - Solo 13,25; 13,5 o 13,75.
 - Infinitos valores.
 - Ninguno, porque entre 13,3 y 13,4 no hay más números.

RESOLUCIÓN

Señalamos en la recta numérica los puntos que representan a los números decimales.



En las competencias atléticas, el que hace menos tiempo llega primero a la meta. José llegó en segundo lugar. Por lo tanto, su tiempo registrado tiene que ser mayor que Ernesto (13,3 s) y menor que Luis (13,4 s).



Observamos que en la recta numérica el tiempo de José puede ser cualquier valor comprendido entre 13,3 y 13,4.

RESPUESTA: el tiempo registrado por José puede tomar infinitos valores, sin que se altere el orden de llegada.

- 2 Cinco atletas participaron en la prueba de salto largo. Sus mejores saltos fueron registrados en la siguiente tabla:

Atleta	Longitud de salto (m)
María López	2,65
Gricelda Escobar	2,37
Silvia Laynes	2,54
Dora Merino	2,39
Amalia Ramos	2,27

Si la mínima longitud de salto para clasificar a la siguiente etapa es 2,40 m, **¿quiénes clasificaron?**

- a) María López y Silvia Laynes.
- b) Amalia Ramos, Gricelda Escobar y Dora Merino.
- c) Gricelda Escobar y Dora Merino.
- d) Todas clasificaron.

RESOLUCIÓN

Ordenamos las longitudes de salto de menor a mayor en la tabla:

Atleta	Amalia Ramos	Gricelda Escobar	Dora Merino	Silvia Laynes	María López
Longitud (m)	2,27	2,37	2,39	2,54	2,65

Observamos que si la mínima de longitud de salto es 2,40 m, las que clasifican son las longitudes mayores que 2,40 m. Los únicos que cumplen con la condición son Silvia Laynes (2,54 m) y María López (2,65 m).

$$2,54 > 2,40 \text{ y } 2,65 > 2,40$$

RESPUESTA: se clasificaron Silvia Laynes y María López.

- 3 En la ferretería se venden tres tamaños de llaves de boca, iguales que el modelo de la imagen.



Para desarmar una máquina se probó con una llave de $1 \frac{1}{4}$ (pulgadas), pero resultó muy grande. Cuando se probó con una de $\frac{3}{4}$ (pulgadas), esta resultó muy pequeña. Entonces, **¿de qué medida debe ser la llave de boca que se necesita?**

- a) 2"
- b) $\frac{5}{8}$ "
- c) $1 \frac{1}{16}$ "
- d) $\frac{1}{2}$ "

RESOLUCIÓN

Hallamos la fracción equivalente de cada una de las fracciones del problema:

Fracción	Fracción equivalente
$1 \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$	$\frac{20}{16}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{12}{16}$

Analizamos el problema; la medida de la llave de boca debe ser mayor que $\frac{3}{4}$ y menor que $1 \frac{1}{4}$ o de sus expresiones equivalentes.

$$\frac{12}{16} < f < \frac{20}{16}$$

Para determinar cuál es la medida de la llave, debemos hallar la fracción equivalente entre las alternativas para identificar cuál de ellas cumple con la condición.

Fracción	Fracción equivalente
2	$\frac{32}{16}$
$\frac{5}{8}$	$\frac{10}{16}$
$1\frac{1}{16}$	$\frac{17}{16}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{16}$

De las alternativas, la única que cumple la condición es $1\frac{1}{16}$, equivalente a $\frac{17}{16}$, que es mayor que $\frac{12}{16}$ y menor que $\frac{20}{16}$.

PRACTICAMOS

- 1 En la ferretería se venden tres tamaños de llaves de boca, iguales que el modelo de la imagen.



Las medidas en pulgadas de estas llaves son $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$. Si las ordenamos de menor a mayor, **¿cuál sería el ordenamiento?**

- a) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$
- b) $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$
- c) $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$
- d) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{2}$

- 2 En una competencia de natación de 200 metros libres, se registraron los siguientes tiempos por cada nadador:

¿Cuál de los nadadores obtuvo el tercer lugar?

- a) Aníbal Pérez.
- b) Luis Atúncar.
- c) Gabriel Ochoa.
- d) Juan Quiroga.

Nadador	Tiempo (minuto:segundos)
Aníbal Pérez	2:05,10
Juan Quiroga	1:53,15
Gabriel Ochoa	1:48,25
Celso Rivadeneyra	2:00,45
Horacio López	1:49,15
Luis Atúncar	1:58,23

Observa la siguiente infografía y resuelve las preguntas 3, 4 y 5 con la información que incluye.



Fuente de imagen: <<https://goo.gl/vPuayi>>

3 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre la composición del costo de producción del café es correcta?

- a) El $\frac{1}{5}$ del costo corresponde a la mano de obra.
- b) Los $\frac{3}{5}$ del costo corresponden a los fertilizantes.
- c) Los $\frac{3}{5}$ del costo corresponden a otros costos.
- d) El $\frac{1}{5}$ del costo corresponde a los fertilizantes.

4 ¿Cuál es el país con menor producción de café entre los años 2012 y 2013?

- a) Etiopía.
- b) Brasil.
- c) Colombia.
- d) Vietnam.

5 Según la distribución de la producción por tamaño de área, Dora opina que en tierras más pequeñas hay una mayor producción de café que en tierras extensas. ¿Estás de acuerdo con Dora? Argumenta tu respuesta.

- 6** En dos balanzas defectuosas se pesa una bolsa con cebollas. En una de ellas se registra $1\frac{1}{4}$ kg; mientras que en la otra, 1,120 kg. Si el peso real de la bolsa con cebollas se encuentra entre estos valores, **¿cuál de las siguientes medidas podría corresponder al peso real?**
- 1,17 kg
 - 1,12 kg
 - 1,10 kg
 - 1,00 kg
- 7** Se vierte leche en un recipiente graduado, de modo que la marca que alcanza la leche queda comprendida entre las marcas correspondientes a 1,2 y 1,3 litros. **¿De cuántos valores se podría tomar la medida real de la leche?**
- Solo 1,25 litros.
 - Infinitos valores.
 - Solo 9 valores.
 - Solo 1,2 o 1,3 litros.
- 8** Tres marcas de detergente realizan la siguiente promoción para bolsas de 100 gramos. La marca Limpia Todo incrementa $\frac{1}{8}$ de detergente en cada bolsa; la marca Saca Mugre incrementa cada bolsa con 15 % de detergente y la marca Blancura Total llena 112,5 gramos de detergente en cada bolsa. **¿Cuáles de las marcas coincidieron en la cantidad de detergente que se ha incrementado en cada bolsa?**
- Limpia Todo y Saca Mugre.
 - Saca Mugre y Blancura Total.
 - Limpia Todo y Blancura Total.
 - Ninguna, todas incrementaron cantidades diferentes.
- 9** Sobre una plancha de metal se perforan dos orificios cuyas medidas de diámetro son $\left(\frac{3}{4}\right)''$ y $1''$; respectivamente. Si el orificio menor es muy estrecho y el mayor es muy holgado, **¿qué medida podría tener el diámetro del orificio que se ajusta mejor a los requerimientos?**
- $\left(\frac{5}{8}\right)''$
 - $\left(\frac{1}{2}\right)''$
 - $\left(\frac{9}{8}\right)''$
 - $\left(\frac{11}{16}\right)''$

- 10 La cantidad de ácido sulfúrico (al 30 %) que se encuentra en la composición de 100 g de detergente, se muestra en la siguiente tabla:

Marca de detergente	Cantidad de ácido sulfúrico al 30 %
Limpia Todo	9,135 g
Blancura Total	9,35 g
Saca Manchas	9,12 g
Lava Más	9,4 g

¿Cuál de las marcas contiene una menor cantidad de ácido sulfúrico al 30 %?

- a) Limpia Todo.
- b) Blancura Total.
- c) Saca Manchas.
- d) Lava Más.

Seguimos practicando

- 11 Un banco otorga 12,5 % de interés anual por un depósito a plazo fijo de 12 meses. Esto quiere decir que:
- a) Por cada S/ 10 de depósito, se recibiría S/ 0,12 de interés.
 - b) Por cada S/ 10 de depósito, se recibiría S/ 1,25 de interés.
 - c) Por cada S/ 10 de depósito, se recibiría S/ 0,125 de interés.
 - d) Por cada S/ 10 de depósito, se recibiría S/ 12,5 de interés.

- 12 La ferretería dispone de las siguientes brocas para concreto:



Si las brocas se encuentran dispuestas de menor a mayor diámetro en pulgadas ("), **¿cuál de las siguientes opciones podría ser la medida de una de las brocas sin etiqueta?**

- a) $\left(\frac{5}{8}\right)''$
- b) $\left(\frac{3}{4}\right)''$
- c) $\left(\frac{3}{16}\right)''$
- d) $\left(\frac{5}{16}\right)''$

13 En una caja de tomates se verifica que el peso del tomate más pequeño es de 0,05 kg, mientras que el peso del más grande es de 0,12 kg. **¿Cuál sería el peso de los tomates que están en la caja?**

- a) 0,13 kg
- b) 0,08 kg
- c) 0,045 kg
- d) 0,125 kg

14 Juan y Esperanza plantean la siguiente propuesta a Luis para obtener un préstamo de dinero a plazos. Observa:

Juan promete pagar el 19 % de interés. Esperanza promete pagar como interés $\frac{1}{5}$ de la cantidad prestada. Si Luis quiere obtener la mayor utilidad por el dinero prestado, **¿a cuál de los dos amigos debe otorgarle el préstamo?** Justifica tu respuesta.

15 En una maratón de 25 km, la persona que va en primer lugar cruza la marca de los 15 km, pero en ese instante la que va en el tercer lugar hace lo propio y pasa la marca de los 10 km. Solo hay marcas cada 5 km. **¿Cuántos valores serían los adecuados para indicar la medida de la distancia recorrida por el atleta que va en segundo lugar en ese momento?**

- a) Solo 11, 12, 13 y 14 km.
- b) Solo 12,5 km.
- c) Solo 14 km.
- d) Infinitos valores.

Matemática 2.º grado

Ficha: Los proyectos mejoran nuestra comunidad



Las municipalidades distritales reciben partidas de dinero para financiar proyectos en bien de la comunidad. La municipalidad de un distrito ancashino ha destinado esta partida para la implementación de los siguientes proyectos:

Proyecto Áreas Verdes: S/ 12 000.

Proyecto Cuidando la Salud: S/ 16 000.

Proyecto Mejoro mi Barrio: S/ 20 000.

Proyecto Construcción de Losa Deportiva: S/ 12 000.

Proyecto Leo para Aprender: S/ 15 000.

Otros proyectos: S/ 25 000.



Fuente de imagen: <<http://goo.gl/wqXn3o>>

Responde a continuación

- 1 ¿Qué tipo de actividades ejecuta la municipalidad de tu distrito?

- 2 ¿Qué fracción del dinero se ha destinado a cada uno de los proyectos mencionados?

- 3 ¿Qué parte o fracción del dinero se va utilizar en el Proyecto Cuidando la Salud más que en el Proyecto Construcción de la Losa Deportiva?

Ahora, veamos información importante para comprender la situación planteada.

APRENDEMOS

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Para operar con números racionales, podemos utilizar su expresión fraccionaria o decimal.

Adición y sustracción de números racionales

- Se presentan dos casos:

A) Adición y sustracción de fracciones con igual denominador (fracciones homogéneas): en este caso, se suman o restan los numeradores y se escribe el mismo denominador.

Ejemplos: $\frac{2}{15} + \frac{7}{15} - \frac{4}{15} = \frac{2+7-4}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

B) Adición y sustracción de fracciones con diferentes denominadores (fracciones heterogéneas): en este caso, primero debemos homogeneizar las fracciones (por amplificación o simplificación) y luego procedemos como en el primer caso.

Ejemplos: $\frac{5}{6} + \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{25}{30} + \frac{18}{30} - \frac{10}{30} = \frac{25+18-10}{30} = \frac{33}{30} = \frac{11}{10}$

- Para sumar o restar decimales, debemos considerar las cifras enteras y las cifras decimales, ya que en todo momento es necesario mantener la posición de la coma. En el caso de la resta, si el minuendo cuenta con menos cifras decimales que el sustraendo, debemos agregar ceros para obtener la misma cantidad de cifras decimales.

Ejemplos: $3,57 + 2,106 = 5,676$
 $4,25 - 3,248 = 4,250 - 3,248 = 1,002$
 (Agregamos un cero a la derecha de 4,25).

Multiplicación y división de números racionales

- El producto de dos fracciones es otra fracción. En ella el numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores.

Es decir: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{a \times c \times e}{b \times d \times f}$ → Producto de numeradores.
→ Producto de denominadores.

Ejemplos: $\frac{6}{14} \times \frac{5}{9} = \frac{6 \times 5}{14 \times 9} = \frac{30}{126} = \frac{5}{21}$

$\frac{18}{28} \times \frac{21}{12} = \frac{9}{14} \times \frac{7}{4} = \frac{9 \times 7}{14 \times 4} = \frac{9}{8}$

(Simplificamos previamente, siempre que sea posible).

- La división es la operación inversa de la multiplicación. Para dividir dos fracciones, se multiplica el dividendo por el inverso del divisor.

Así, para dividir $\frac{a}{b}$ por otra distinta de cero $\frac{c}{d}$, se multiplica $\frac{a}{b}$ por el inverso de $\frac{c}{d}$.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

dividendo

divisor

inverso del divisor

Ejemplos:

1. $\frac{21}{20} \div \frac{12}{5} = \frac{21}{20} \times \frac{5}{12} = \frac{21 \times 5}{20 \times 12} = \frac{7 \times 1}{4 \times 4} = \frac{7}{16}$

2. $8 \div \frac{2}{3} = 8 \times \frac{3}{2} = \frac{8 \times 3}{2} = 4 \times 3 = 12$

$$3. \frac{12}{9} \div 4 = \frac{12}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{\cancel{12} \times 1}{\cancel{9} \times 4} = \frac{1 \times 1}{3 \times 1} = \frac{1}{3}$$

$$3. \frac{\frac{5}{6}}{\frac{10}{3}} = \left[\frac{5}{6} \div \frac{10}{3} \right] = \frac{5 \times 3}{6 \times 10} = \frac{1 \times 1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

En el caso de los números decimales, la multiplicación se realiza prescindiendo de las comas. Además, en el resultado de derecha a izquierda se sitúa la coma según la suma del número de cifras decimales de ambos factores.

Ejemplos:

- $2,8 \times 3,16 = 8,848$
- $15,56 \times 10,2 = 158,712$

Para dividir dos números decimales, se iguala la cantidad de cifras decimales en ambos números; si es necesario, se agregan ceros al número con menos cifras decimales. Luego se eliminan las comas y se divide como si fueran números enteros.

Ejemplos:

- $8,26 : 1,6 = 8,26 : 1,60 = 826 : 160 = 5,1625$
- $4,5 : 2,75 = 4,50 : 2,75 = 450 : 275 = 1,6363\dots$

Para dividir un número decimal por un número entero, se efectúa la división como si fuera entero el dividendo y se pone en el cociente una coma al bajar la primera cifra decimal.

Ejemplos:

- $160,75 : 5 = 32,15$
- $10,24 : 4 = 2,56$

Para dividir un número entero por un número decimal, se suprime la coma del divisor y a la derecha del dividendo se escriben tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor.

Ejemplos:

- $62 : 3,4 = 620 : 34 = 18,23$
- $18 : 0,75 = 1800 : 75 = 24$

ANALIZAMOS

- Tres amigos se asocian para montar un negocio de comidas. Alberto aporta $\frac{1}{6}$ del capital; Bertha, $\frac{2}{5}$, y César, el resto del capital. **¿Qué fracción del capital aportó César más que Bertha?**

RESOLUCIÓN

Debemos comprender que en este problema intervienen tres personas. Cada una de ellas aporta una parte del capital necesario para montar el negocio de comidas.

Lo solicitado en el problema es saber qué fracción aportó más César que Bertha. Sin embargo, para dar respuesta a esta interrogante, necesitamos saber qué parte del capital aportó César.

Entonces, vamos a representar con la letra "C" lo aportado por César.

Luego: $\frac{1}{6} + \frac{2}{5} + C = 1$. Homogeneizando denominadores tenemos que $\frac{5}{30} + \frac{12}{30} + C = \frac{30}{30}$.

Por tanto, la parte que aportó César constituye $\frac{13}{30}$ del capital.

Finalmente, hallamos la diferencia entre $\frac{13}{30}$ y $\frac{2}{5}$ para saber qué fracción aportó César más que

Bertha. Esa diferencia es $\frac{1}{30}$ del capital.

RESPUESTA: César aportó $\frac{1}{30}$ del capital más que Bertha.

- 2 El dormitorio de Edson es de forma rectangular. Sus dimensiones son 3,50 m y 3,20 m. Si desea colocar mayólicas cuadradas de $\frac{1}{4}$ m de longitud, **¿cuántas mayólicas como mínimo necesitará su dormitorio?**

RESOLUCIÓN

Dibujamos el cuarto de Edson:

La longitud de los lados de la mayólica cuadrada es $\frac{1}{4}$ m = 0,25 m.

Para calcular el número de mayólicas, tendremos que calcular cuántas caben en el largo y ancho de la habitación rectangular.

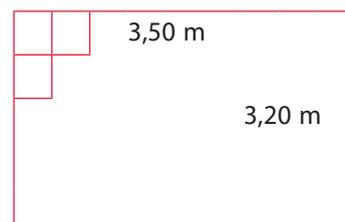
Para calcular el número de mayólicas que se utilizarán, tendremos que realizar los siguientes cálculos:

$$\text{N.º de mayólicas} = \frac{3,50 \text{ m}}{0,25 \text{ m}} = 14 \text{ mayólicas}$$

$$\text{N.º de mayólicas} = \frac{3,20 \text{ m}}{0,25 \text{ m}} = 12,8 \approx 13 \text{ mayólicas}$$

Se tiene que redondear porque las mayólicas se venden por piezas. Lo que sobra no se utiliza.
N.º total de mayólicas = 14 x 13 = 182 mayólicas.

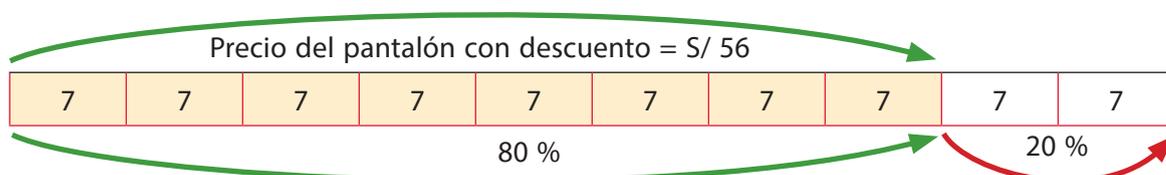
RESPUESTA: se necesitan como mínimo 182 mayólicas.



- 3 En una tienda todos los productos cuentan con un descuento de 20 % del precio de la etiqueta. Si hemos pagado S/ 56 por un pantalón, **¿cuál es su precio de etiqueta?**

RESOLUCIÓN

Solución 1: representamos gráficamente el descuento del 20 % y el pago realizado:



Entonces, 10 rectángulos pequeños equivalen al precio del pantalón sin descuento: 10 x 7 = 70

RESPUESTA: el precio de etiqueta del pantalón es de S/ 70.

Solución 2:

El descuento es del 20 %; es decir, se paga el 80 % del precio de la etiqueta.

Si consideramos el precio de etiqueta con la incógnita P , entonces la siguiente expresión representa el precio que se ha pagado por el pantalón:

$$56 = \left(\frac{80}{100}\right)P$$

$$56 = \left(\frac{4}{5}\right)P$$

$$\frac{(56 \times 5)}{4} = P$$

$$70 = P$$

Finalmente, el precio de etiqueta del pantalón es de S/ 70.

RESPUESTA: el precio de etiqueta del pantalón es de S/ 70.

- 4 Para tarrajear el techo de forma rectangular de una sala, un albañil cobra S/ 18 por cada m^2 . Si el techo de la sala mide 4,60 m por 3,40 m, **¿cuánto cobrará el albañil por el trabajo?**

RESOLUCIÓN

Para resolver esta incógnita, debemos considerar el cálculo del área del techo que se va a tarrajear. Como es de forma rectangular, hallamos el área multiplicando sus dimensiones. Así:

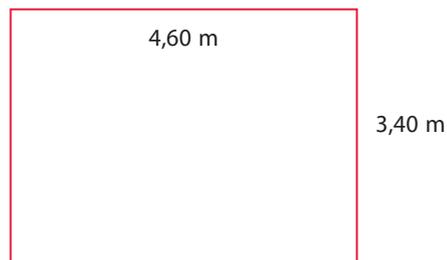
Área del techo = 4,60 m x 3,40 m

Área del techo = 15,64 m^2

Sabemos que el albañil cobra S/ 18 por cada m^2 .

Entonces, por el trabajo cobrará:

S/ 18 x 15,64 m^2 = S/ 281,52



RESPUESTA: el albañil cobrará S/ 281,50 (la cifra se redondea debido a que en nuestro sistema monetario no es común el uso de monedas menores de 10 céntimos).

PRACTICAMOS

- 1 Ángel y Daniel aportaron dinero para montar un negocio. Ángel aportó S/ 17 564,30 y Daniel aportó el resto de dinero. Si Ángel dio S/ 4874,50 más que Daniel, **¿cuánto dinero reunieron para hacer el negocio?**
- S/ 22 438,80
 - S/ 30 254,10
 - S/ 35 128,60
 - S/ 12 689,90

- 12 En una asamblea se discuten temas sobre participación ciudadana, pero tras la primera hora se observa que $\frac{3}{8}$ del total de asistentes se retira, y después de la segunda hora, $\frac{1}{6}$ del total. **¿Qué parte del total de asistentes aún queda en la asamblea?**

- 13 Un agricultor cultiva $\frac{1}{4}$ de su terreno con zanahorias, $\frac{2}{5}$ con lechugas y el resto con tomates. **¿En qué parte del terreno plantó tomates?**

- a) $\frac{7}{20}$
- b) $\frac{3}{9}$
- c) $\frac{6}{9}$
- d) $\frac{13}{20}$

- 14 Un albañil debe ejecutar $\frac{6}{7}$ de una obra en 3 días. Para esto, cada día trabaja de forma constante. **¿Qué parte de la obra avanzará diariamente?**

- 15 Una feria exhibe un puesto de vasijas. Durante el día en este puesto, se vendieron 6 de cada 10 vasijas que se trajeron. Si finalmente quedan 12 vasijas, **¿cuántas vasijas se pusieron a la venta?**

- a) 20 vasijas.
- b) 28 vasijas.
- c) 30 vasijas.
- d) 60 vasijas.

Matemática 2.º grado

Ficha: Albergamos perros abandonados en la calle



Para alimentar a un perro adulto durante 30 días se necesitan dos bolsas de alimento.



Una sociedad protectora de animales alberga en una casa a todos los perros que encuentra abandonados en la calle. El veterinario de dicha sociedad tiene dificultades para dar en adopción a los perros en edad adulta, por ello da a conocer la ración de alimento que consumen buscando sensibilizar a sus visitantes, ya sea para su adopción o para que realicen donaciones.

A continuación se presenta la siguiente situación:

Se sabe que en dicho albergue hay 16 perros adultos sin adoptar y cada uno de ellos consume dos bolsas de alimento durante un mes (30 días).

- 1 Establece en una tabla de doble entrada la relación que hay entre el número de perros y la ración de alimento mensual sugerido por el veterinario.

Número de perros	2	4	6	8	10	12	14	16	20
Número de bolsas de alimento	4	8							

- 2 ¿Cuántas bolsas se necesitarán para alimentar a los 16 perros durante un mes?

- 3 ¿Qué relación encuentras entre el número de perros y el número de bolsas de alimento?

- 4 Representa mediante pares ordenados la relación que encontraste.

Con respecto a la situación planteada en el texto “Albergamos perros abandonados en la calle”, con el propósito de encontrar la solución, planteamos aplicar la estrategia de ensayo y error, para lo cual escribimos los valores en una tabla de doble entrada y analizamos el comportamiento de estos datos.

APRENDEMOS

PROPORCIONALIDAD

Magnitud. Es todo aquello susceptible de sufrir variación, ya sea de aumento o disminución, y que puede ser medido.

Ejemplos: peso, tiempo, rapidez, número de obreros, eficiencia, entre otros.

Razón. Es la comparación de un número con otro mediante el cociente indicado de dichos números.

Si $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ representa la "razón de a en b ".

Los términos de la razón son a y b , donde: $\frac{a}{b}$ es el antecedente.
 b es el consecuente.

Proporción. Es la igualdad de dos razones de una misma clase. Ejemplo: $\frac{6}{2} = \frac{15}{5} = 3$

Siendo 3 la razón de proporcionalidad.

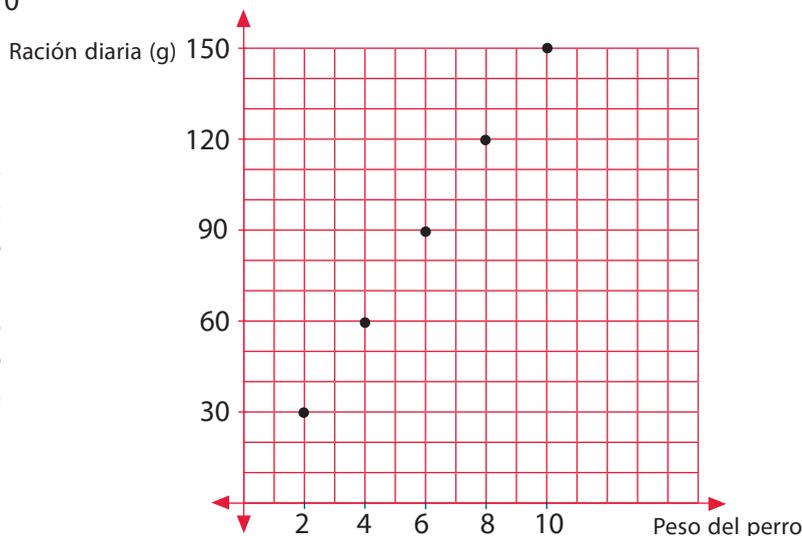
¿Qué entendemos por magnitudes directamente proporcionales?

Veamos el siguiente ejemplo: en la tabla se representa una relación de magnitudes directamente proporcionales entre el peso del perro y la ración de alimento diario que le corresponde según la sugerencia del veterinario.

Peso del perro (kg)	2	4	6	8	10
Ración diaria (g)	30	60	90	120	150

Observamos: $\frac{30}{2} = \frac{60}{4} = \frac{90}{6} = \frac{120}{8} = \frac{150}{10} = 15$, entonces la razón de proporcionalidad directa es $k = 15$.

A este tipo de proporción directa se le conoce como función lineal; es decir: $y = 15x$, donde 15 es la constante de proporcionalidad. Además, si trazamos una línea recta por los puntos, esta pasa por el origen de las coordenadas, lo cual es requisito para ser una función lineal.

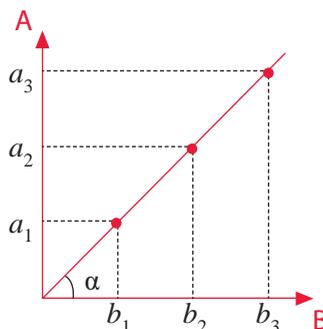


Entonces:

Magnitudes directamente proporcionales (DP). Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número. La razón de proporcionalidad directa k se obtiene mediante el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra. Veamos la tabla:

Magnitud A	a_1	a_2	a_3	a_4
Magnitud B	b_1	b_2	b_3	b_4

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = k$. Es decir, si A es DP a B, entonces $k = \frac{A}{B}$. Gráficamente:

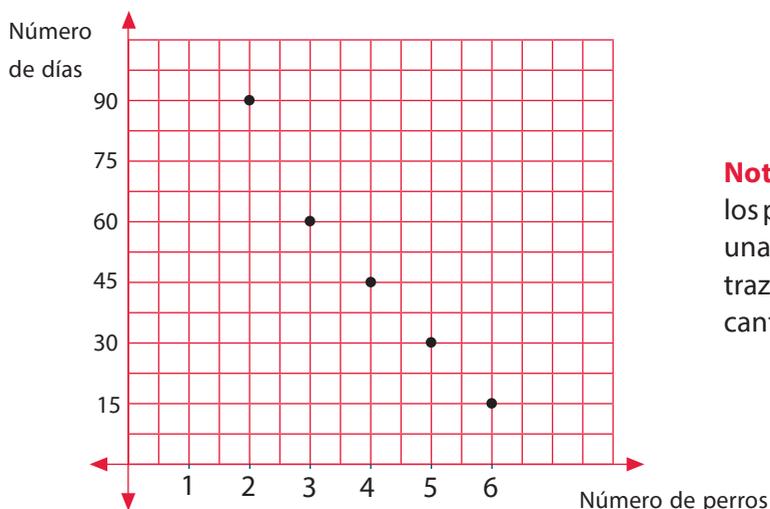


¿Qué entendemos por magnitudes inversamente proporcionales?

Veamos el siguiente ejemplo: en la tabla se representa la relación de magnitudes inversamente proporcionales entre el número de perros y el número de días.

Número de perros	6	5	4	3	2	1
Número de días	30	36	45	60	90	180

Observamos que $6 \times 30 = 5 \times 36 = 4 \times 45 = 3 \times 60 = 1 \times 180 = 180$, entonces la razón de proporcionalidad inversa es $k = 180$.



Nota: como vemos en la gráfica, si unimos los puntos, nos dará una curva, la cual grafica una proporción inversa. En este caso, no la trazamos por tratarse de una situación con cantidades enteras (el número de perros).

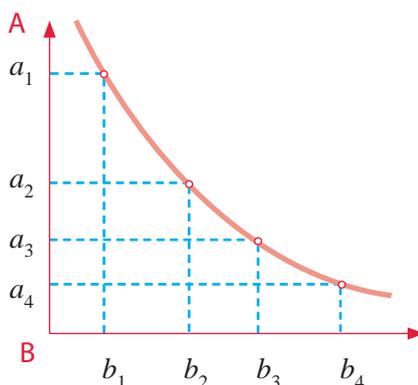
Entonces:

Magnitudes inversamente proporcionales (IP). Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada respectivamente por el mismo número. La razón de proporcionalidad inversa k se obtiene mediante el producto de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra. Veamos la siguiente tabla:

Magnitud A	a_1	a_2	a_3	a_4
Magnitud B	b_1	b_2	b_3	b_4

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = a_3 \cdot b_3 = a_4 \cdot b_4 = k$$

Es decir, si A es IP a B, entonces $k = A \times B$. Gráficamente:



ANALIZAMOS

- El tutor de los estudiantes de segundo grado planifica un viaje a Lunahuaná para el 19 de setiembre por el Día de la Juventud. Para ello, cada estudiante debe juntar S/ 120; la condición es que cada estudiante aporte la misma cantidad cada día hasta reunir el dinero que le corresponde. **Completa la siguiente tabla en la que se relaciona el valor del aporte diario y el número de días necesario para que cada estudiante logre reunir todo el dinero.**

Aporte de dinero diario	1			4		6		10	12
Número de días	120	60			24	20	15	12	10

Si estamos en la quincena de agosto y solo se da la cuota fija en los días que se va al colegio (de lunes a viernes), **¿cuál será la cuota mínima que debe aportar el estudiante para lograr reunir el dinero antes de la fecha del paseo?**

RESOLUCIÓN

Completamos la tabla aplicando la estrategia heurística de ensayo y error.

Aporte de dinero diario	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Número de días	120	60	40	30	24	20	15	12	10

Observamos que se trata de magnitudes inversamente proporcionales, ya que:

$$(1)(120) = (2)(60) = (3)(40) = (4)(30) = (5)(24) = (6)(20) = (8)(15) = (10)(12) = (12)(10) = 120.$$

Entonces, la razón de proporción inversa es 120.

Luego $k = (\text{aporte de dinero diario})(\text{número de días})$.

Como desde la quincena del mes de agosto hasta el 19 de setiembre hay solo 24 días (tomamos 24 para obtener la cuota fija), sin contar sábados ni domingos, entonces hallamos la cuota mínima que debe aportar el estudiante para lograr reunir el dinero antes de la fecha del paseo.

$$(1)(120) = (x)(24). \text{ Entonces, } x = 5$$

RESPUESTA: la cuota mínima que debe aportar el estudiante para lograr reunir el dinero es de S/ 5 por día, sin contar los sábados ni domingos, tal como señala la condición del problema.

- 2** En una prueba de ciclismo se reparte un premio de S/ 9250 entre los tres primeros corredores que lleguen a la meta, de modo inversamente proporcional al tiempo que han tardado en llegar. El primero tarda 12 min; el segundo, 15 min, y el tercero, 18 min. **¿Cuánto le corresponde a cada uno, según el orden de llegada?**

RESOLUCIÓN

Asignamos letras a los premios que cada ciclista ha recibido según su orden de llegada.

El primero recibió a soles.

El segundo recibió b soles.

El tercero recibió c soles.

Luego: $a + b + c = 9250$.

Premio S/	a	b	c
Tiempo (minutos)	12	15	18

Las magnitudes *premio* y *tiempo* son inversamente proporcionales.

Aplicamos la constante de proporcionalidad:

$$k = 12 \times a \longrightarrow a = \frac{k}{12}$$

$$k = 15 \times b \longrightarrow b = \frac{k}{15}$$

$$k = 18 \times c \longrightarrow c = \frac{k}{18}$$

Sabemos que: $a + b + c = 9250$

Reemplazamos: $\frac{k}{12} + \frac{k}{15} + \frac{k}{18} = 9250$

Hallamos m. c. m. (12, 15, 18) = 180

$$\frac{15k + 12k + 10k}{180} = 9250$$

$$37k = 9250 \times 180$$

$$k = 45\,000$$

$$a = \frac{45\,000}{12} = 3750$$

$$b = \frac{45\,000}{15} = 3000$$

$$c = \frac{45\,000}{18} = 2500$$

RESPUESTA: el primero recibe S/ 3750; el segundo, S/ 3000, y el tercero, S/ 2500.

3 En una institución educativa, de los 210 estudiantes de segundo grado de Secundaria, se inscriben en una actividad extraescolar 170; mientras que de los 160 alumnos de tercer grado, se apuntan 130. **¿Cuál de los grados ha mostrado más interés por la actividad?**

- a) Han mostrado más interés los estudiantes de tercer grado porque van más del 90 %.
- b) Han mostrado más interés los estudiantes de segundo grado porque van más estudiantes que tercero; en segundo van 170, mientras que en tercero solo van 130.
- c) Han mostrado más interés los estudiantes de tercero porque van el 81,25 %, mientras que en segundo solo van el 80,95 %.
- d) Han mostrado el mismo interés tanto los estudiantes de segundo como los de tercer grado.

RESOLUCIÓN

Aplicando regla de tres simple:

1.º Del enunciado del problema, comprendemos que nos hablan de dos grados de estudiantes:

2.º grado de Secundaria		3.º grado de Secundaria	
N.º de estudiantes	Porcentaje	N.º de estudiantes	Porcentaje
210	100 %	160	100 %

2.º Ahora queremos saber qué porcentaje del total de estudiantes de cada grado representan los estudiantes que se inscribieron en esa actividad extraescolar. Veamos:

2.º grado de Secundaria		3.º grado de Secundaria	
N.º de estudiantes	Porcentaje	N.º de estudiantes	Porcentaje
210	→ 100 %	160	→ 100 %
170	→ x	130	→ y

3.º Calculamos x e y . Para calcular estos valores tenemos que analizar qué clase de magnitudes son "N.º de estudiantes" con respecto al "Porcentaje", y llegamos a la conclusión de que son **magnitudes directamente proporcionales**, porque si una aumenta, la otra también aumenta proporcionalmente. Así encontramos el valor de x e y .

$$x = (100) \frac{170}{210} \qquad y = (100) \frac{130}{160}$$

$$x = 80,952380\dots \qquad y = 81,25$$

$$x = 80,95$$

4.º Analizando los valores de x e y , concluimos que y representa mayor porcentaje; en tal sentido, la respuesta a la pregunta del ítem es: **el tercer grado ha mostrado mayor interés por inscribirse en la actividad extraescolar.**

5.º Para responder el ítem, tenemos que leer una por una las alternativas, y solo una será la correcta. De acuerdo a lo calculado, solo la alternativa "c" es la correcta.

6.º Entonces, han mostrado más interés los estudiantes de tercero porque va el 81,25 %, mientras que en segundo solo va el 80,95 %.

4 En una pequeña industria en Gamarra, se confeccionan tres pantalones por hora. Completa la información de la tabla:

Tiempo (horas)	1	6	7	10		
Cantidad de pantalones		9	18		27	36

De la situación dada, **¿en cuánto tiempo se confeccionarán 60 pantalones y cuántos pantalones se confeccionarán en 8 horas?**

RESOLUCIÓN

Completamos la tabla aplicando la estrategia heurística de ensayo y error.

Tiempo (horas)	1	3	6	7	9	10	12...	<i>x</i>	8
Cantidad de pantalones	3	9	18	21	27	30	36....	60	<i>y</i>

Analizamos cómo son las magnitudes *tiempo* y *cantidad de pantalones*.

Así tenemos que al aumentar las horas también aumentaría la cantidad de pantalones proporcionalmente.

Observamos que se trata de magnitudes directamente proporcionales, ya que:

$$\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{18}{6} = \frac{21}{7} = \frac{27}{9} = \frac{30}{10} = \frac{36}{12} = 3, \text{ Entonces la razón de proporcionalidad directa es } k = 3.$$

Para determinar en cuánto tiempo se confeccionarán 60 pantalones, tenemos que hallar *x*:

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{60} \qquad 3x = 60 \qquad x = 20$$

Para determinar cuántos pantalones se confeccionarán en 8 horas, tenemos que hallar *y*:

$$\frac{1}{3} = \frac{8}{y} \qquad y = 24$$

RESPUESTA: 60 pantalones se confeccionarán en 20 horas y en 8 horas se confeccionarán 24 pantalones.

PRACTICAMOS

- 1** Los ingredientes de una receta para un postre casero son los siguientes: 1 vaso de mantequilla; 3 huevos; 1,5 vasos de azúcar y 2 vasos de harina. Si solo tenemos 2 huevos, **¿cómo debemos modificar los ingredientes restantes de la receta para poder hacer el postre?**

- 2** El precio de un pasaje varía inversamente con relación al número de pasajeros. Si para 14 pasajeros el pasaje es S/15, **¿cuántos pasajeros habrá cuando el pasaje cueste S/ 6?**

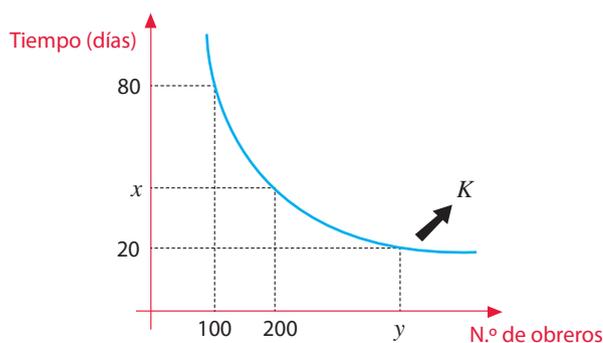
- a) 35 pasajeros.
- b) De 5 a 6 pasajeros.
- c) 84 pasajeros.
- d) 56 pasajeros.

3 El precio de un diamante es directamente proporcional al cuadrado de su peso. Si un diamante que pesa 80 g cuesta S/ 3200, **¿cuánto valdrá otro diamante de 100 g de peso?**

- a) S/ 5000
- b) S/ 4000
- c) S/ 2048
- d) S/ 50

4 El gráfico muestra el comportamiento de dos magnitudes (*cantidad de obreros y tiempo*); halla numéricamente el valor de $\frac{y}{x}$.

- a) 440
- b) 10
- c) 275
- d) 6



5 Dos amigos han obtenido la misma calificación en dos exámenes de Matemática con distinta cantidad de preguntas. Todos los ejercicios tenían la misma puntuación. Si Sergio resolvió correctamente 24 de las 30 preguntas que tenía su examen, **¿cuántos aciertos tuvo Jorge si su prueba constaba de 20 preguntas?**

- a) 14 aciertos.
- b) 16 aciertos.
- c) 20 aciertos.
- d) 24 aciertos.

6 La distancia que cae un cuerpo partiendo del reposo varía en relación con el cuadrado del tiempo transcurrido (se ignora la resistencia del aire). Si un paracaidista en caída libre cae 64 pies en 3 s, **¿qué distancia caerá en 9 s?**

- a) 576 pies.
- b) 192 pies.
- c) 7,11 pies.
- d) 567 pies.

- 7 Se necesita envasar 600 L de una sustancia química en recipientes. Hay recipientes de 10, 15, 20, 25, 30, 40 y 50 L. Además, se quiere envasar el total de la sustancia en un solo tipo de recipiente. Completa la tabla con el volumen del recipiente y la cantidad de los recipientes necesarios.

Volumen	10									
Cantidad	60									

¿Qué cantidad mínima de envases se puede utilizar para envasar los 600 L de la sustancia química?

- a) 15 envases.
 - b) 12 envases.
 - c) 10 envases.
 - d) 14 envases.
- 8 Con 2 litros de leche, César puede alimentar a sus cachorros durante 6 días. **¿Cuántos días podrá alimentarlos si compra una caja de 5 litros de leche?**
- a) 15 días.
 - b) 24 días.
 - c) 2,4 días.
 - d) 18 días.
- 9 Con un depósito de agua se llenan 36 jarras. **¿Cuántas jarras se podrán servir si solo se llenan hasta tres cuartos de su capacidad?**
- a) Se podrán servir 48 jarras.
 - b) Se podrán servir 27 jarras.
 - c) Se podrán servir 24 jarras.
 - d) Se podrán servir igual cantidad de jarras.
- 10 Entre tres pintores han pintado la fachada de un edificio y han cobrado S/ 4160. El primero ha trabajado 15 días; el segundo, 12 días, y el tercero, 25 días. **¿Cuánto dinero tiene que recibir cada uno?**
- a) Reciben S/ 1200, S/ 960 y S/ 2000, respectivamente.
 - b) Reciben S/ 960, S/ 2000 y S/ 1200, respectivamente.
 - c) Todos reciben la misma cantidad.
 - d) Reciben S/ 2000, S/ 1200 y S/ 960, respectivamente.

Seguimos practicando

- 11 Al dejar caer una pelota, tarda diez segundos en llegar al suelo. Como la velocidad depende del tiempo transcurrido, se anotaron sus valores en distintos momentos y resultó la siguiente tabla. El tiempo está dado en segundos, y la velocidad, en metros por segundo.

Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Velocidad (m/s)	0	9,8	19,6	29,4	39,2	49	58,8	68,6	78,4	88,2	98

Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué velocidad llevaba la pelota a los 6,5 s?

b) ¿Cuántos segundos más demoraría si al tocar el suelo hubiera alcanzado una velocidad de 117,6 m/s?

12 Observa el anuncio de rebajas:

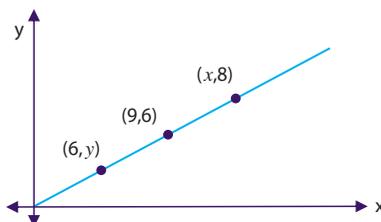


a) ¿Están rebajados estos artículos proporcionalmente?

b) Si la respuesta anterior es negativa, responde: ¿cuál de las dos prendas tiene más rebaja?

13 El siguiente gráfico ilustra dos variables, x e y , en proporcionalidad directa. Señale el valor de $x \cdot y$

- a) 3
- b) 16
- c) 48
- d) 60,75



14 Para construir un puente de 1200 m se cuenta con 300 vigas que se colocarían cada 40 m. Después de un estudio minucioso, se decide reforzar la obra y se utilizan 100 vigas más. **¿A qué distancia se deben colocar las vigas?**

- a) Se deben colocar a 53,3 m de distancia entre ellas.
- b) Se deben colocar a la misma distancia entre ellas; es decir, cada 40 m.
- c) Se deben colocar a 30 m de distancia entre ellas.
- d) Se deben colocar a 300 m de distancia entre ellas.

15 Los médicos utilizan el índice de masa corporal (IMC) para evaluar el nivel de grasa en las personas. El IMC varía directamente en relación con el peso de una persona e inversamente con relación a la estatura de la persona al cuadrado. Diversos estudios realizados han concluido que el grupo de mejor salud corresponde a un IMC comprendido entre 20 y 25 kg/m^2 . Juan mide 1,7 m con un peso de 66 kg y un IMC de 23, por lo que se considera que está dentro del grupo de las personas que tienen buena salud. **Averigua si Sheila se encuentra en el mismo grupo si mide 1,6 m y su peso es de 54 kg.**

Matemática 2.º grado

Ficha: Decidimos ver televisión por señal cerrada



El padre de un estudiante de segundo grado, preocupado porque su hijo pasa muchas horas viendo los *reality show* en la televisión de señal abierta, opta por adquirir televisión por señal cerrada con HD para que su hijo tenga opción de elegir diversos programas culturales. Después de averiguar las diversas ofertas que les ofrecen las empresas, se anima por la siguiente opción: por S/ 50 mensuales, disfrutará de 54 canales con HD; pero tiene que pagar por la instalación y el decodificador la suma de S/ 180.

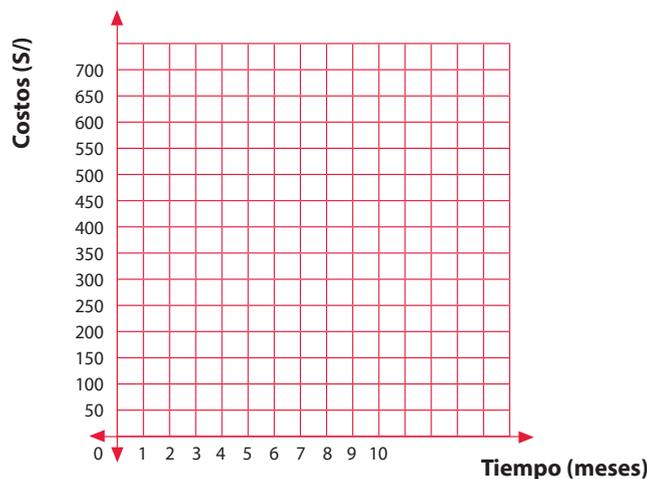


Responde las siguientes preguntas:

- 1 ¿Qué tipo de programas miras frecuentemente en la televisión?

- 2 Expresa el costo total en función de los meses en los que se utilizaría el servicio de señal cerrada con HD. Ten en cuenta los costos fijos.

- 3 Grafica en el plano cartesiano el consumo mensual de la señal cerrada adquirida.



4 ¿Cuánto pagaría en total por los 9 meses?

Con respecto a la situación planteada en el texto “Decidimos ver televisión por señal cerrada”, debemos tener en cuenta el costo inicial que se tiene que pagar por la instalación y el decodificador, para lo cual tenemos que elaborar una tabla de doble entrada con el fin de analizar el comportamiento de los datos, tanto de la cantidad de meses a consumir como del costo total que se pagaría por los servicios de cable con HD.

APRENDEMOS

FUNCIONES

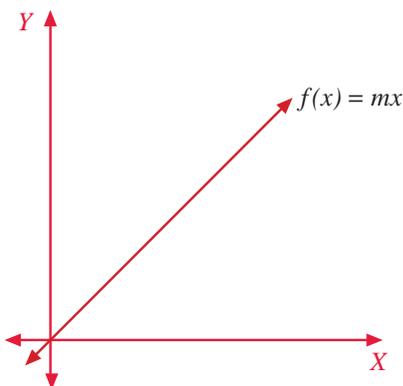
Función lineal

f es una función lineal si su regla de correspondencia es de la forma: $f(x) = mx$, siendo $m \neq 0$;

Dominio $f(x) = \mathbb{R}$, Rango $f(x) = \mathbb{R}$

La representación de una función lineal es una línea recta que siempre intercepta al origen de coordenadas (0,0).

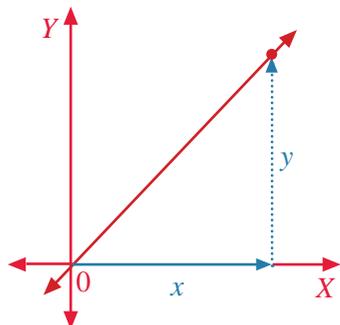
La función lineal representa cualquier fenómeno de variación proporcional directa.



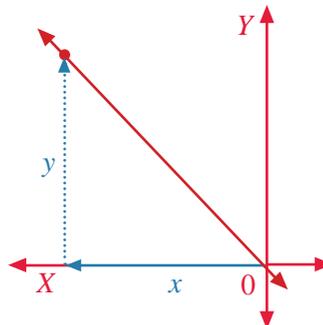
En la función lineal $y = mx$, m es la pendiente de la recta, y se halla dividiendo el valor de la variable dependiente y por el correspondiente valor de la variable independiente x .

$$m = \frac{y}{x}$$

El valor de la pendiente m es la medida del crecimiento o decrecimiento de la recta de la ecuación $y = mx$, y nos indica la variación de la variable y por cada incremento de una unidad de la variable x .

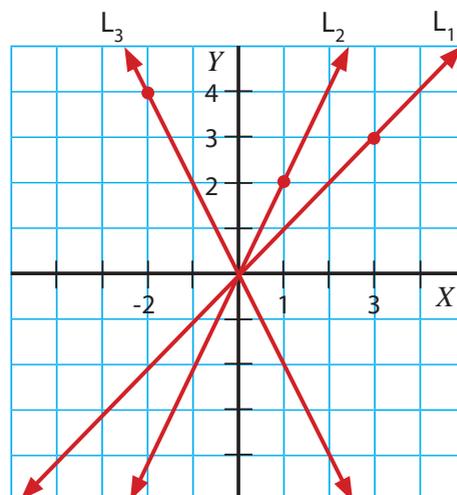


$m > 0$, la recta es creciente.



$m < 0$, la recta es decreciente.

La pendiente de una recta nos proporciona su inclinación respecto del eje X (ángulo que forma la recta con dicho eje). En el siguiente ejemplo ilustramos que cuanto mayor es la pendiente, mayor es la inclinación de la recta.



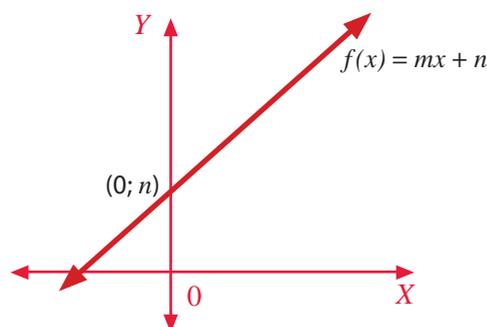
Las tres gráficas son funciones lineales, cuya expresión es $y = mx$, pues son rectas que pasan por el origen de coordenadas.

La pendiente la obtenemos de la siguiente manera: $m = \frac{y}{x}$

Ecuación de la recta	Pendiente de la recta: m
$L_1: y = x$	$L_1: m = \frac{3}{3} = 1$
$L_2: y = 2x$	$L_2: m = \frac{2}{1} = 2$
$L_3: y = -2x$	$L_3: m = \frac{4}{-2} = -2$

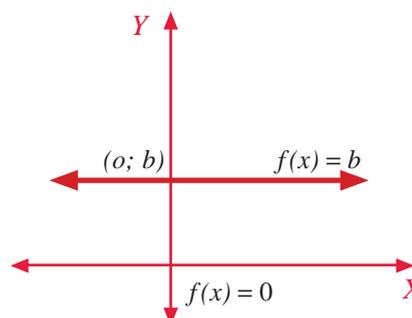
Función afín

Son aquellas funciones cuya gráfica es una línea recta **que no pasa por el origen de coordenadas**. Su expresión algebraica es $y = mx + n$, donde m es la pendiente de la recta y n es la ordenada en el origen (la recta corta el eje de ordenadas en el punto $[0; n]$). Con dominio $f(x) = \mathbb{R}$, Rango $f(x) = \mathbb{R}$.



Función constante

Una función f es constante si su regla de correspondencia es $f(x) = b$ para cualquier valor x y b que sean números reales. Con dominio $f(x) = \mathbb{R}$, Rango $f(x) = \mathbb{R}$.



ANALIZAMOS

1 En el Perú, la altura promedio en centímetros de los niños cuyas edades son de 6 a 10 años es una función lineal de su edad en años. La altura de un niño de 6 años es 84 cm y la altura de un niño de 7 años es 98 cm.

- Expresa la estatura en función de la edad.
- Grafica la situación dada en el diagrama cartesiano.
- ¿Cuál será la altura aproximada de un niño cuando tenga 10 años?
- ¿Se podrá calcular con la regla anterior la altura de una persona de 20 años?

RESOLUCIÓN

Elaboramos una tabla de doble entrada con las variables intervinientes:

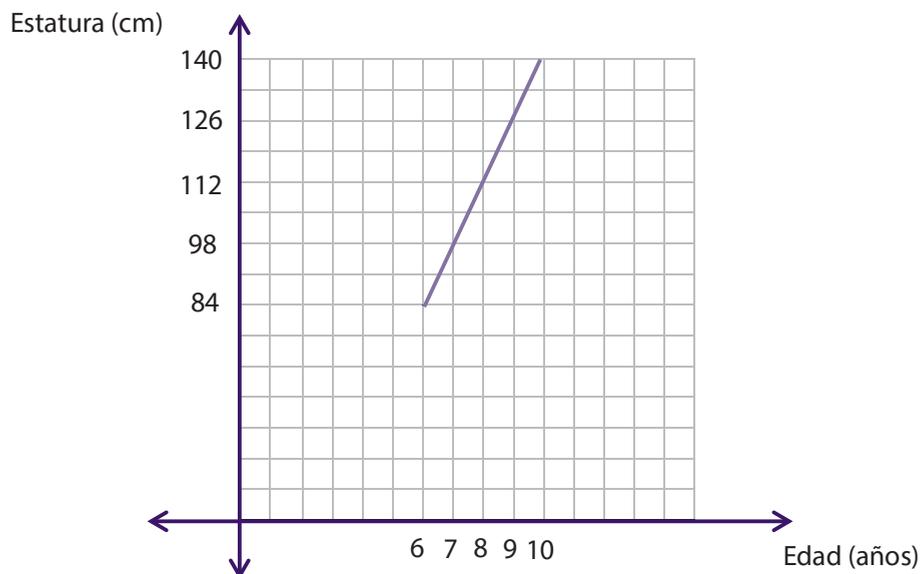
Edad (años)	6	7	8	9	10
Estatura (cm)	84	98	112	126	140

Los valores numéricos de las estaturas generan una sucesión cuya razón es 14, por lo tanto, su regla de formación sería la siguiente:

Estatura = (14) (número de años desde 6 hasta 10 años).

Respondiendo las preguntas:

- $f(x) = 14x$, donde x es el número de años, y está acotado por $6 \leq x \leq 10$.
- Para graficar, debemos tener cuidado en identificar qué intervalo es una función lineal.



- Podemos responder a partir de la tabla elaborada anteriormente o por la fórmula encontrada:
 $f(10) = (14)(10) = 140$ cm
- No, porque 20 años está fuera de la fórmula encontrada, que solo acepta valores de 6 hasta 10.

2 La Municipalidad de Lima para contrarrestar la ola de accidentes causada por la excesiva velocidad de autos y combis manejados por conductores irresponsables, decide aplicar multas teniendo en cuenta el rango de la velocidad del móvil:

I. Si una persona es sorprendida conduciendo su automóvil entre 60 y 80 km/h, las multas por exceso de velocidad se determinan por la siguiente función:

$$f(x) = 100(x - 60) + 80, \text{ siendo } 60 < x < 80;$$

donde x es la velocidad del móvil.

$f(x)$ es el costo de la multa en soles.

II. Si un conductor llega o pasa los 80 km/h, se le suspenderá por un año su licencia de conducir.

Responde las siguientes preguntas:

- a) Si el radar detectó a un conductor que conducía a 66 km/h, **¿a cuánto asciende la multa que deberá pagar el infractor?**
- b) **¿A qué número entero de velocidad se expiden las primeras multas?**
- c) Gabriel fue a pagar su multa por manejar a excesiva velocidad, la que ascendía a S/ 1880. **¿A qué velocidad se le encontró conduciendo?**

RESOLUCIÓN

Para responder las preguntas, utilizamos la fórmula que determina las multas:

$$f(x) = 100(x - 60) + 80, 60 < x < 80$$

- a) $f(66) = 100(66-60) + 80 = (100)(6) + 80 = 680$ soles es la multa que el conductor debe pagar.
- b) A los 61 km/h se expiden las primeras multas.
- c) $1880 = 100(x - 60) + 80$, entonces: $x = 78$; es decir, se le encontró manejando a 78 km/h.

3 Midiendo la temperatura a diferentes alturas se han obtenido los datos de esta tabla:

Altura (m)	0	360	720	990
Temperatura (°C)	10	8	6	4,5

Obtén la expresión algebraica de la temperatura en función de la altura e indica cuál sería la temperatura a 3240 m de altura.

RESOLUCIÓN

Observamos de la tabla que cuando la altura es 0 m la temperatura es 10 °C, por lo tanto, la gráfica no pasa por el origen de coordenadas, entonces es una función lineal afín de la siguiente forma:

$$f(x) = mx + b$$

Ahora, reemplacemos el primer par ordenado: (0; 10) en la expresión:

$$f(x) = mx + b$$

$$10 = m(0) + b \quad \longrightarrow \quad 10 = 0 + b \quad \longrightarrow \quad 10 = b$$

La nueva expresión reemplazando el valor de $b = 10$ sería: $f(x) = mx + 10$; pero aún nos falta hallar el valor de m (pendiente), para ello utilizamos el siguiente par ordenado $(360; 8)$ reemplazando en: $f(x) = mx + 10$:

$$8 = m(360) + 10 \rightarrow 8 - 10 = m(360) \rightarrow -2 = m(360) \rightarrow -\frac{2}{360} = m$$

Simplificando: $m = -\frac{1}{180}$

Finalmente, reemplazamos en $f(x) = mx + 10$, obteniendo la siguiente expresión algebraica:

$$f(x) = -\frac{x}{180} + 10, \text{ que es la regla de correspondencia de la función pedida.}$$

Hallando la temperatura a 3240 m de altura, que representa el valor de x , reemplazamos en:

$$f(x) = -\frac{x}{180} + 10$$

$$f(x) = -\frac{(3240)}{180} + 10$$

$$f(x) = -18 + 10$$

$$f(x) = -8 \text{ °C}$$

RESPUESTA: la temperatura a 3240 m de altura es -8 °C .

- 4 Los científicos forenses usan las longitudes de la tibia (t), el hueso que va del tobillo a la rodilla, y del fémur (r), el hueso que va de la rodilla a la articulación de la cadera, para calcular la estatura de una persona. La estatura (h) de una persona se determina a partir de las longitudes de estos huesos, usando funciones definidas por las siguientes fórmulas (todas las medidas están en centímetros):

Para hombres:

$$h(r) = 69,09 + 2,24r$$

$$h(t) = 81,69 + 2,39t$$

Para mujeres:

$$h(r) = 61,41 + 2,32r$$

$$h(t) = 72,57 + 2,53t$$

Responde las siguientes preguntas:

- Calcula la estatura de un hombre cuyo fémur mide 58 cm.
- Calcula la estatura de un hombre cuya tibia mide 41 cm.
- Calcula la estatura de una mujer cuyo fémur mide 50 cm.
- Calcula la estatura de una mujer cuya tibia mide 38 cm.

RESOLUCIÓN

Hallamos los valores aplicando las fórmulas:

- $h(58) = 69,09 + 2,24(58) = 199,01$ centímetros de estatura.
- $h(41) = 81,69 + 2,39(41) = 179,68$ centímetros de estatura.
- $h(50) = 61,41 + 2,32(50) = 177,41$ centímetros de estatura.
- $h(38) = 72,57 + 2,53(38) = 168,71$ centímetros de estatura.

PRACTICAMOS

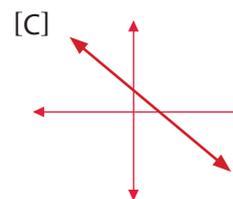
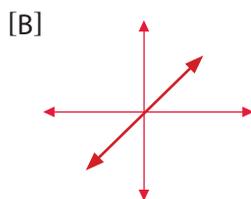
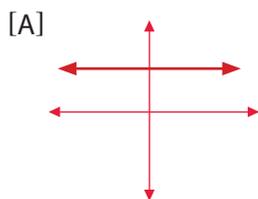
1 Una empresa interprovincial de buses lanza una oferta dirigida a estudiantes que desean viajar al sur de la capital. La oferta consiste en pagar una cuota fija de S/ 10 más S/ 0,02 por cada kilómetro recorrido.

a) Halla la fórmula de la función que relaciona el costo del viaje con los kilómetros recorridos.

b) Calcula el dinero que debe pagar un estudiante si quiere hacer un viaje cuyo recorrido es de 120 kilómetros.

c) Teniendo en cuenta la pregunta anterior, si cada estudiante de un aula de segundo grado pagó S/ 16 en un viaje, **¿a cuántos kilómetros estuvo su destino?**

2 Relaciona cada gráfica con la función correspondiente:



(I) Función afín	(II) Función constante	(III) Función lineal
------------------	------------------------	----------------------

a) AI, BII, CIII.

c) AII, BIII, CI.

b) AIII, BII, CI.

d) AII, BI, CIII.

3 La distancia que recorre un avión que viaja a una velocidad de 500 millas por hora (*mph*) es una función del tiempo de vuelo. Si *S* representa la distancia en millas y *t* es el tiempo en horas, entonces la función es:

a) $S(t) = t/500$

c) $S(t) = 500 + t$

b) $S(t) = 500t$

d) $S(t) = 500/t$

4 El padre de familia de un estudiante de segundo grado le enseña a su hijo la factura de gas natural que llegó y le pide que le ayude a averiguar el costo del m³ de gas y la fórmula para calcular el costo total del recibo en función de los m³ de gas consumido.

a) 0,15; $f(x) = 7,74 + 0,15x$

b) 16,65; $f(x) = 7,74 + 16,65x$

c) 0,15; $f(x) = 0,15 + 7,74x$

d) 15; $f(x) = 15 + 7,74x$

Conceptos	
Cargo fijo	S/ 7,74
Consumo (111 m ³)	S/ 16,65
Total	S/ 24,39

9 ¿Cuáles de las siguientes expresiones son funciones afines?

I. $f(x) = 3x - 5$

II. $y = 2x$

III. $f(x) = 20 - 0,2x$

- a) Solo I.
- b) Solo II.
- c) II y III.
- d) I y III.

10 ¿Cuáles de las siguientes situaciones son funciones lineales?

- I. El costo de una llamada por celular está dado por los segundos consumidos.
- II. Un electricista que da servicios a domicilio cobra S/ 20 por cada hora de trabajo más S/ 50 por la visita.
- III. El precio en soles que hay que pagar por un viaje de x km viene dado por la expresión $y = 2x + 1,5$.

- a) II y III.
- b) Solo I.
- c) Solo II.
- d) Solo III.

Seguimos practicando

- 11** Una empresa petrolífera paga a sus obreros según los metros excavados. Por el primer metro paga 60 soles, y por los restantes, 30 soles cada uno.

Responde las siguientes preguntas:

- a) Halla la expresión matemática que nos dé el costo (y) en función de los metros excavados (x).
- b) ¿Cuánto cobra un obrero que excavó 10 metros?

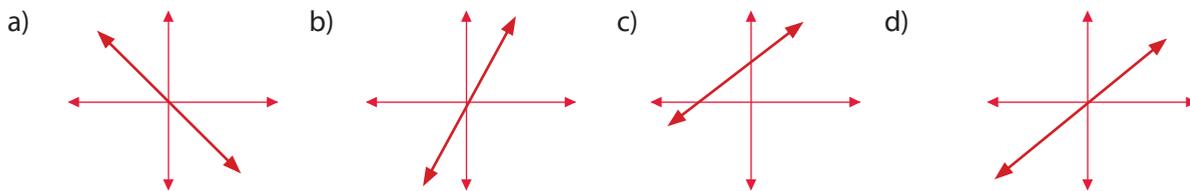
- 12** En la excavación de un pozo un ingeniero se adentra para verificar el proceso y se da cuenta de que la temperatura aumenta 1°C cada 100 m de profundidad. Teniendo en cuenta que la temperatura en la superficie es de 10°C , resuelve los siguientes problemas:

- a) Halla la fórmula de la función que relaciona la temperatura con la profundidad.

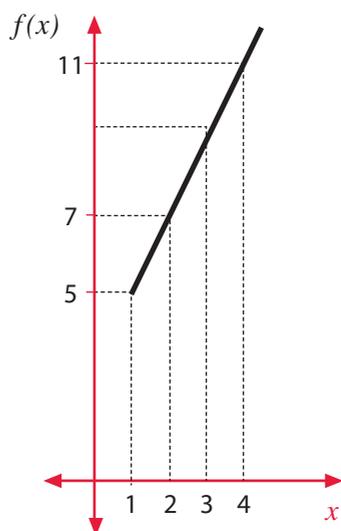
- b) ¿Qué temperatura habrá a 230 m de profundidad?

- c) ¿Cuántos metros habrá que bajar para que la temperatura sea de 25°C ?

13 ¿Cuál de las siguientes gráficas es una función afín?



14 Del siguiente gráfico:



Calcula el valor numérico de $E = \frac{f(2)+f(4)}{f(3)-f(1)}$

- a) 3
- b) 4,5
- c) 1,5
- d) -3,6

15 La siguiente tabla corresponde a una función afín:

$$y = mx + n$$

x	0	10	20	30	40	50
y	-3		37			97

Completa la tabla y obtén su expresión algebraica hallando su pendiente y la ordenada en el origen.

- a) $y = 2x + 3$
- b) $y = 3x + 2$
- c) $y = 2x - 3$
- d) $y = 3x - 2$

Matemática 2.º grado

Ficha: Las transformaciones geométricas en el antiguo Perú¹



Chan Chan es la ciudadela de barro más grande de América precolombina, por lo que su importancia radica en valores históricos, estéticos, culturales y sociales. Posee un alto grado de organización espacial y abarca alrededor de 20 km². El fenómeno El Niño (que en 1925 destruyó el magnífico mural del Palacio Velarde), los sismos y la actualmente elevada napa freática, sumados a la persistencia de agricultores precarios, constituyen los principales agentes contra su preservación. Es por esto que el Mincetur² y el INC³ han iniciado los trabajos de conservación e investigación en el conjunto Velarde.



Situación problemática

En una de las paredes de este complejo arquitectónico, se observan estas figuras que siguen cierto orden. Cuatro de ellas han sido retiradas para darles mantenimiento; sin embargo, para no olvidar su posición al momento de sacarlas, se anotó lo siguiente: “De derecha a izquierda: traslación-rotación-traslación-rotación”.

Responde las siguientes preguntas:

1 ¿Cómo son las figuras que se observan?

2 ¿Tienen la misma forma? ¿Qué puedes decir de sus posiciones?

¹ Adaptado de Gabriela y Laura (2010). Capítulo II. *Los secretos de Chan Chan* (blog). Recuperado de <<http://lossecretosdechanchan.blogspot.com/>>

² Ministerio de Comercio Exterior y Turismo.

³ Instituto Nacional de Cultura.

3 ¿Qué significa *trasladar* y *rotar*?

4 Según las anotaciones al momento de retirar las figuras (de derecha a izquierda: traslación-rotación-traslación-rotación), completa las que hacen falta en la foto.

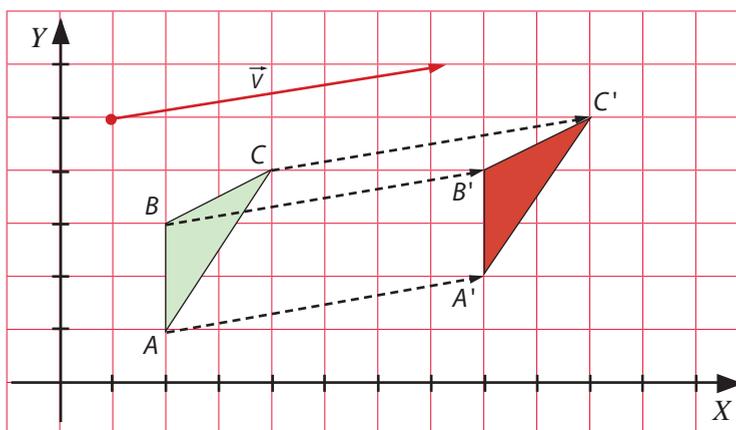


APRENDEMOS

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

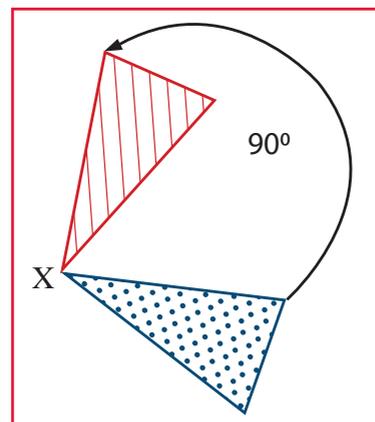
La traslación. Es una transformación geométrica que se realiza en el plano. En esta transformación, las figuras solo cambian su posición, es decir, solo cambian de lugar. Su orientación, tamaño y formas se mantienen.

Ejemplo: En este caso, la figura ABC se traslada tomando como referencia el vector $(6, 1)$, el cual indica que la figura original debe moverse 6 unidades a la derecha y 1 unidad hacia arriba para transformarse en la figura $A'B'C'$.



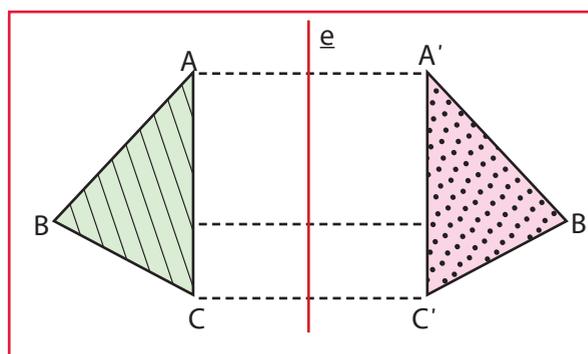
Las rotaciones o giros. Son movimientos que realizan las figuras alrededor de un punto fijo en el plano. En las rotaciones, las figuras conservan su forma, tamaño y ángulos. Las transformaciones por rotación pueden ser positivas o negativas, dependiendo del sentido del giro. Si el giro es en sentido antihorario, será positivo, y si el giro es en sentido horario, será negativo.

Ejemplo: se aprecia que la figura azul rota 90° alrededor del punto X para transformarse en la figura roja.



La reflexión. Es la imagen de un objeto o ser vivo que se muestra en el espejo. Para obtener la reflexión de una figura, se utiliza una recta que recibe el nombre de eje de reflexión. A la reflexión respecto de una recta también se le denomina simetría axial.

Ejemplo: el triángulo verde se refleja con respecto a un eje de reflexión para convertirse en el triángulo rosado.



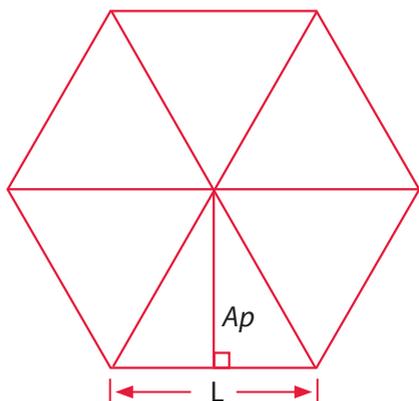
POLÍGONOS REGULARES

Se denomina polígono regular a aquel que tiene todos sus lados y ángulos congruentes.

El perímetro de un polígono regular se calcula multiplicando la longitud de uno de sus lados por el número de lados que tenga.

Por otra parte, también podemos calcular el área de cualquier polígono regular dividiéndolo en triángulos, todos con un vértice común en el centro del polígono. Al obtener el área de uno de ellos y multiplicarla por el número de triángulos que se forman, se obtiene el área total.

Para calcular el área del triángulo, basta con conocer su base (el lado del polígono) y su altura (el apotema del polígono).



Hexágono regular

$$A = n(A\Delta)$$

$$A = n \frac{Ap \cdot L}{2}$$

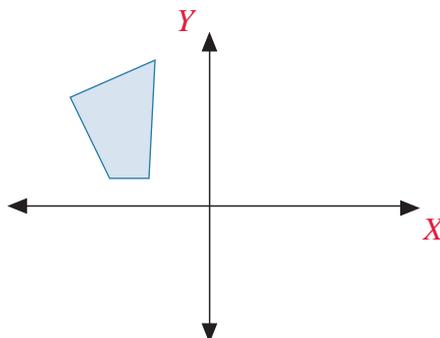
$$A = \frac{(n \cdot L) \cdot Ap}{2}$$

De esto se desprende que: $A = \frac{P \cdot Ap}{2}$; donde P : perímetro,

L : longitud del lado, n : número de lados, Ap : apotema.

ANALIZAMOS

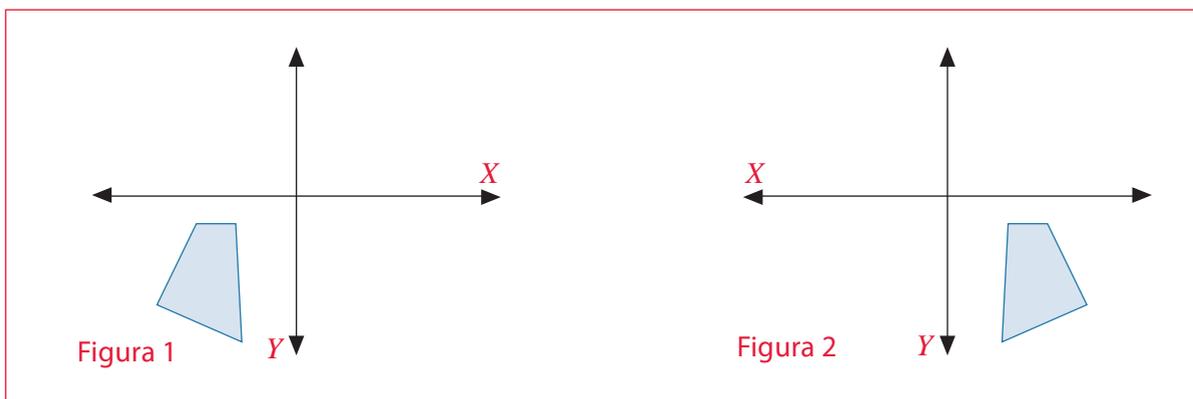
- 1 La siguiente figura muestra un polígono irregular ubicado en uno de los cuadrantes del plano cartesiano:



¿Cómo quedará finalmente la figura si se aplican dos movimientos sucesivos: el primero, una reflexión con respecto al eje X , y luego un reflexión con respecto al eje Y ?

RESOLUCIÓN

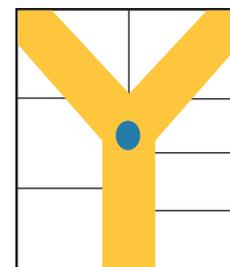
Sabemos que si consideramos al eje X como eje de reflexión, la figura tendrá que reflejarse hacia abajo, como en la figura 1. Y si a este resultado le aplicamos una reflexión tomando como punto el eje Y , el polígono regular tendrá que reflejarse hacia la derecha, y quedará como la figura 2:



- 2 Se desea colocar cámaras de seguridad en un centro comercial de una sola planta. El área coloreada en el plano representa las zonas transitables. Las cámaras podrán tener una vista de giro de 360° y tendrán que cubrir toda la región transitable. Indica en el plano los puntos donde deberán ser colocadas las cámaras para cumplir con ese propósito si estas deben sumar la menor cantidad posible.

RESOLUCIÓN

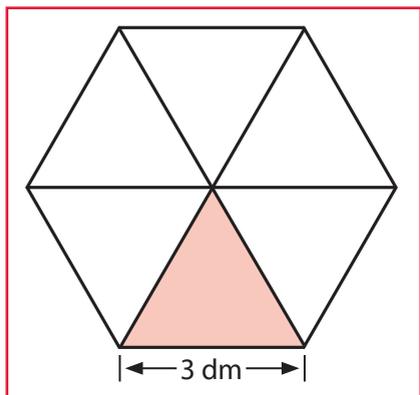
Dado que las cámaras tienen una vista de giro de 360° , esto quiere decir que dan una vuelta completa. Entonces, basta con colocar solo una en el punto de bifurcación de la región coloreada para tener una vista de toda la zona transitable.



- 3 Se desea colocar en la pared un espejo en forma hexagonal regular que tenga como medida de lado 3 dm. **¿Cuánto medirá la superficie de dicho espejo?**

RESOLUCIÓN

El espejo tiene forma de un hexágono regular. Hacemos un pequeño bosquejo. Para conocer la superficie, podemos descomponer el hexágono regular en triángulos.



Observamos que los triángulos son equiláteros; por tanto, si determinamos el área de uno de ellos y la multiplicamos por 6, obtendremos el área del hexágono. Calculamos el área de uno de los triángulos $l=3\text{dm}$

$$A_{\Delta} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \rightarrow A_{\Delta} = \frac{3^2 \sqrt{3}}{4} \rightarrow A_{\Delta} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ dm}^2$$

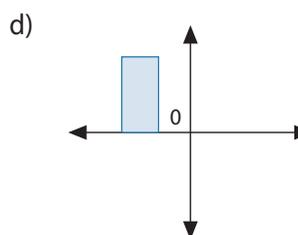
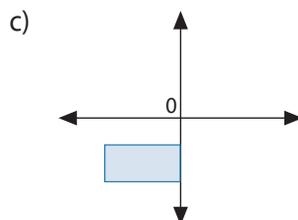
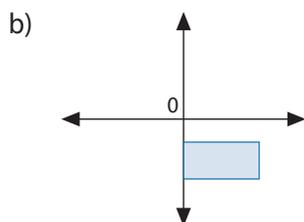
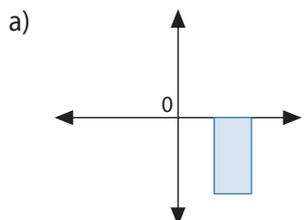
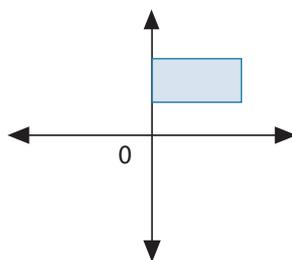
Finalmente, para obtener el área del hexágono, multiplicamos por 6.

$$A_{\Delta} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 6 \rightarrow A = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ dm}^2$$

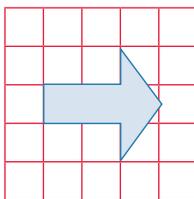
Entonces, la superficie del espejo con forma de hexágono regular es $\frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ dm}^2$.

PRACTICAMOS

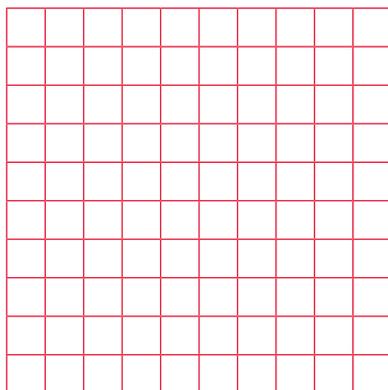
- 1 **¿Cuál de las siguientes opciones muestra el resultado de rotar la figura 180° en sentido horario alrededor del punto 0?**



- 2 En una tarea de arte, Dante realizó la ampliación de la siguiente figura.



Si la ampliación consistía en duplicar la figura, dibuja en la cuadrícula la figura ampliada por Dante.



- 3 Elena está diseñando el jardín rectangular de un condominio. Ella ha plasmado su diseño en una hoja en la cual 1 cm equivale a 1 m. Si cuenta con 100 m de vallas, escribe verdadero o falso según corresponda:



- I. Según el diseño de Elena, el jardín tendrá una superficie de 525 m^2 .
 - II. Si ella quiere ampliar la superficie del jardín, necesariamente debe comprar más vallado.
 - III. Si reduce 5 m a un lado y aumenta 5 m al otro, no varía el área del jardín.
 - IV. Si la superficie del jardín se redujera a la mitad, también se necesitaría la mitad de la longitud del vallado.
- a) VVFF.
 - b) FVVV.
 - c) FFFF.
 - d) VFFF.

4 Con respecto al problema anterior, **¿cuánto será la máxima superficie que podrá tener el jardín utilizando los 100 m de vallas?**

- a) 525 m²
- b) 625 m²
- c) 2500 m²
- d) 10 000 m²

5 Si Elena no quiere limitarse a un jardín de forma rectangular, sino que quiere un diseño circular, y quiere utilizar la mayor longitud de vallas disponibles, **¿cuánto mediría la máxima longitud entera del radio de la superficie del jardín si este tuviera forma circular?** Considera $\pi = 3,14$ y los datos de los problemas 3 y 4.

- a) 15 m
- b) 16 m
- c) 50 m
- d) 100 m

6 El siguiente mapa corresponde a la red de carreteras que une los pueblos de un distrito. En él está indicado el tiempo en minutos que demora ir de un lugar a otro. **¿Cuántos minutos como mínimo demora una persona para ir de las Gardenias a los Jazmines?**



- a) 28 minutos.
- b) 33 minutos.
- c) 21 minutos.
- d) 20 minutos.

- 7 Con respecto al problema anterior, si Ernesto demoró 31 minutos en trasladarse, **¿de qué lugar a otro pudo haber ido?**

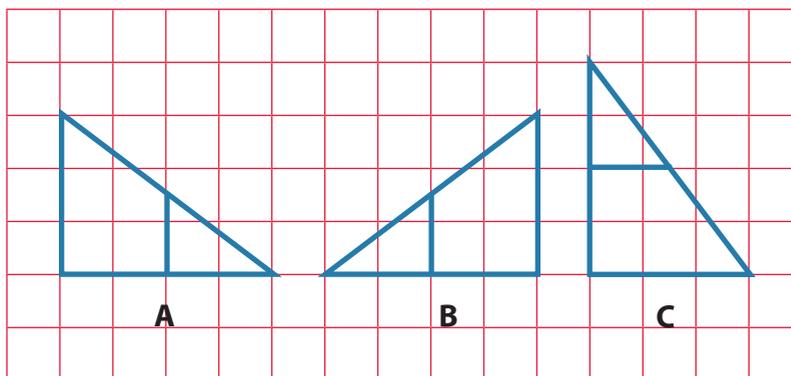
- 8 Se desea colocar una plancha de vidrio sobre el tablero de una mesa que tiene forma de un hexágono regular. Si uno de los lados de la mesa tiene 4 dm, determina la superficie del vidrio que encaja exactamente para cubrir todo el tablero de la mesa.

- a) $6\sqrt{3}$ dm²
- b) 6 dm²
- c) $24\sqrt{3}$ dm²
- d) 24 dm²



- 9 Observa las figuras A, B y C. **¿Cuál es el orden de las transformaciones que debemos efectuar a la figura A para que se convierta en la figura B y, seguidamente, en la figura C?**

- a) Reflexión y rotación.
- b) Reflexión y traslación.
- c) Rotación y traslación.
- d) Rotación y reflexión.



- 10 Una plaza tiene forma de un hexágono regular. Por el aniversario van a colocar cadenas de una esquina a otra, de tal manera que las cadenas se crucen en el punto central de la plaza. Si la plaza mide 15 m en cada lado, **¿cuánta será la longitud mínima de la cadena que unirá dos esquinas de la plaza?**

- a) 90 m
- b) 60 m
- c) 30 m
- d) 15 m

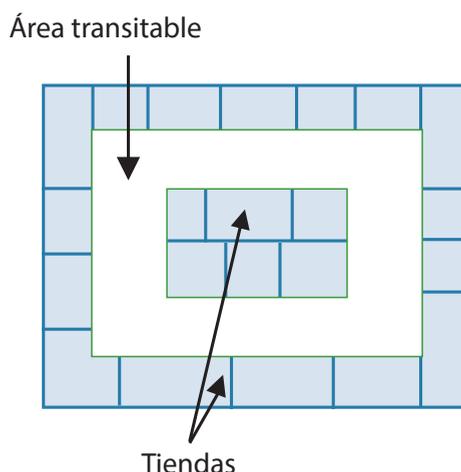
Seguimos practicando

11 Las monedas de un sol tienen un polígono regular inscrito. Si una diagonal une dos vértices no comunes de un polígono, **¿cuántas diagonales podríamos trazar en este polígono regular inscrito en la moneda de un sol?**

- a) 8 diagonales.
- b) 20 diagonales.
- c) 40 diagonales.
- d) 56 diagonales.



12 Se muestra el plano de un centro comercial de una sola planta. La parte coloreada representa las áreas por donde transita la gente. Se van a instalar cámaras de seguridad para observar toda el área transitable. Estas cámaras podrán tener una vista de 360°. Coloca en el plano los puntos donde se deberían instalar las cámaras para que sumen la menor cantidad posible y que con estas se pueda observar toda el área transitable.

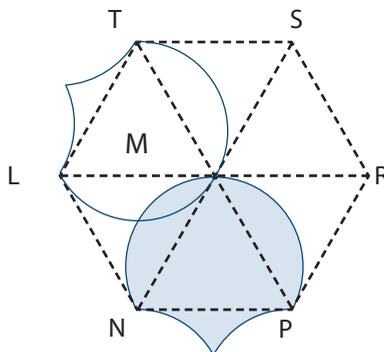


13 En la plaza de una ciudad se está construyendo una pileta de forma circular. Se van a extender 5 tubos que irán desde el centro de la pileta hasta 5 puntos en el borde de esta; en ellos se instalarán grifos distribuidos a una misma distancia unos de otros. **¿Cuánto medirá el ángulo de abertura entre tubo y tubo?**

- a) 36°
- b) 72°
- c) 90°
- d) 360°



- 14 Para la decoración del aula, Patricia decide hacer figuras sobre un hexágono regular. En la imagen siguiente, se observa una región sombreada y la silueta que resulta de aplicarle un movimiento a dicha región.



Señala qué movimiento se le aplicó a la región sombreada para obtener su imagen.

- a) Una reflexión tomando como eje el segmento \overline{NS} .
 - b) Una reflexión tomando como eje el segmento \overline{LR} .
 - c) Una rotación de 30° con centro en el punto L.
 - d) Una rotación de 120° con centro en el punto M.
- 15 Una empresa fabrica triángulos musicales. Cada lado del triángulo mide 18,5 cm y la varilla con que se toca, 15 cm. Si se desea aprovechar al máximo una varilla sin trabajar cuya longitud es 5,5 m, ¿cuántos triángulos musicales completos (triángulo y varilla) se podrán obtener de la varilla sin trabajar?

- a) 7 triángulos musicales.
- b) 7,8 triángulos musicales.
- c) 8 triángulos musicales.
- d) 9,9 triángulos musicales.

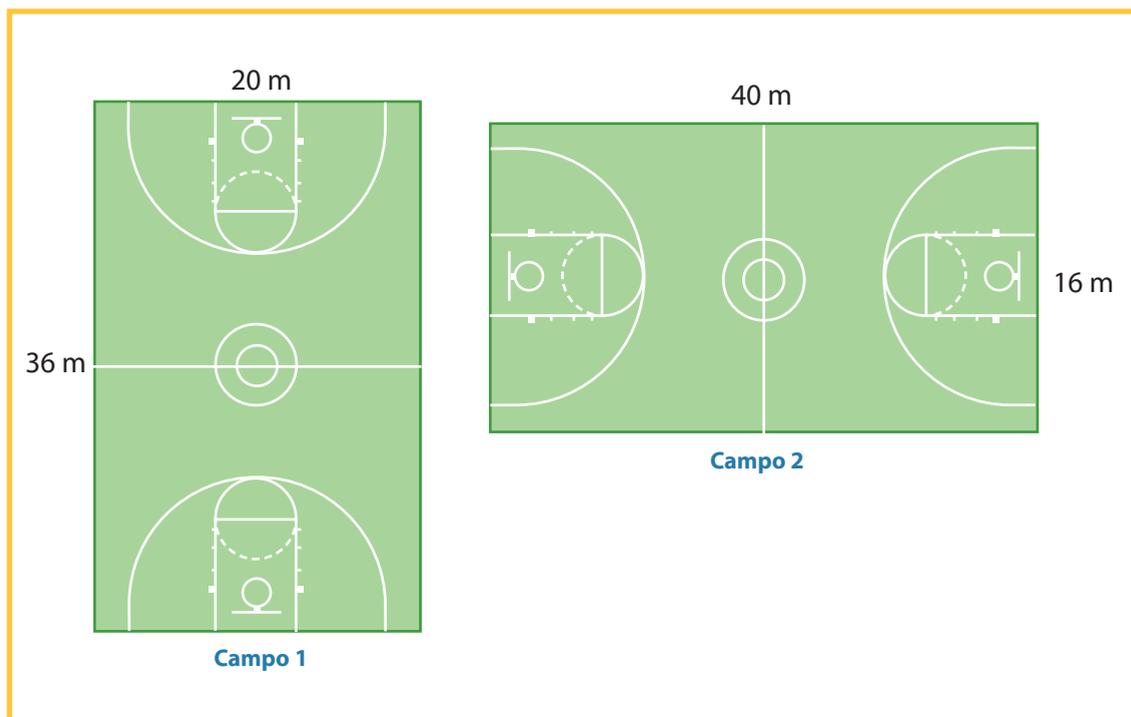


Matemática 2.º grado

Ficha: La importancia del calentamiento muscular previo a realizar un deporte



El profesor de Educación Física planificó realizar partidos de fútbol y vóley para la sesión de hoy día, pero antes les pide a sus estudiantes que den 3 vueltas alrededor de uno de los campos de su preferencia como parte del calentamiento de rutina.



Responde las siguientes preguntas:

1 ¿En cuál de los campos corren menos distancia?

2 ¿Cuál de los dos campos te parece que ocupa más espacio dentro de la escuela?

3 ¿Qué otras medidas podría tener un campo que ocupe el mismo espacio que el campo 1?

Con respecto a la situación planteada en el texto “La importancia del calentamiento muscular previo a realizar un deporte”, debemos tener en cuenta que los campos deportivos presentados son regiones de forma rectangular. El espacio que ocupan estos campos, y cualquier otra forma, se conoce como *superficie*, y a su contorno se le llama *perímetro*.

Es importante que realicemos varios ejemplos con dimensiones diferentes para entender cuál es la relación que hay entre el perímetro de una forma y el espacio que esta ocupa.

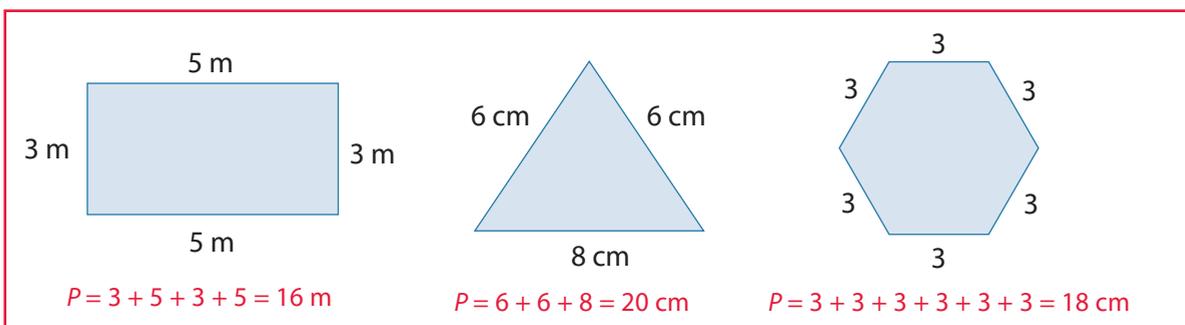
APRENDEMOS

ÁREAS Y PERÍMETROS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

¿Qué es el perímetro?

El perímetro (P) de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.

Ejemplos:



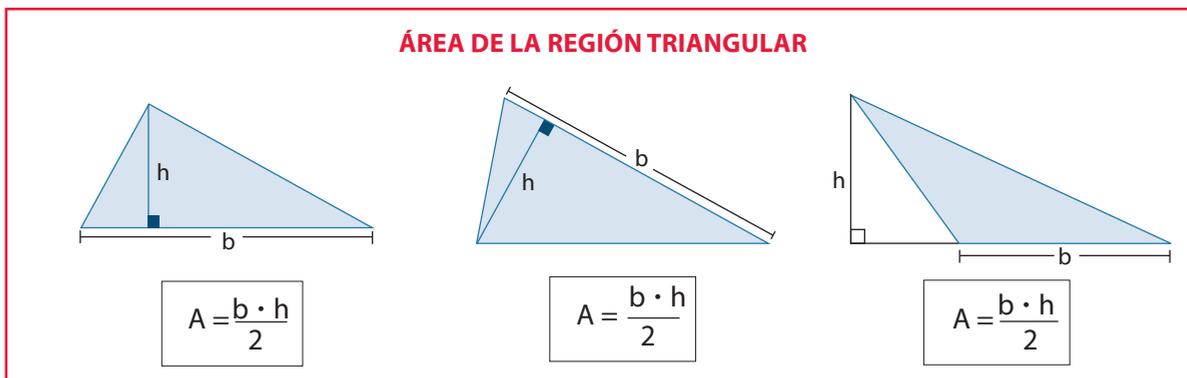
Área

El área de una superficie es un número que indica las veces que una cierta unidad de superficie está contenida en la superficie total.

Para medir superficies, las unidades se usan elevadas al cuadrado. Su nombre y valor se derivan de las unidades de longitud; por ejemplo, si la medida es un cuadrado de 1 cm por lado, se denomina 1 cm² y se lee "un centímetro cuadrado".

Como ya dijimos, el área es la medida de una superficie y, por lo tanto, se expresa en unidades cuadradas del sistema métrico decimal, como el mm², cm², dm², m², hm², km².

Veamos algunas fórmulas de regiones notables:



RECTÁNGULO

$A = a \cdot b$

CUADRADO

$A = l^2$

ROMBO

$A = \frac{(AC)(BD)}{2}$

TRAPECIO

En el trapecio, B y b son bases.

$\overline{BC} // \overline{AD}$

M → punto medio de \overline{AB}

$\overline{MH} \perp \overline{CD}$

⇒ $A = a \cdot c$

$A = \frac{(B + b)}{2} h$

Otras fórmulas importantes:

POLÍGONO REGULAR

$A = \frac{p \cdot Ap}{2}$

$p = \text{perímetro}$

$Ap = \text{apotema}$

ÁREA DEL CÍRCULO

$A = \pi \cdot R^2$

$\pi = 3,1416$
(Aproximadamente)

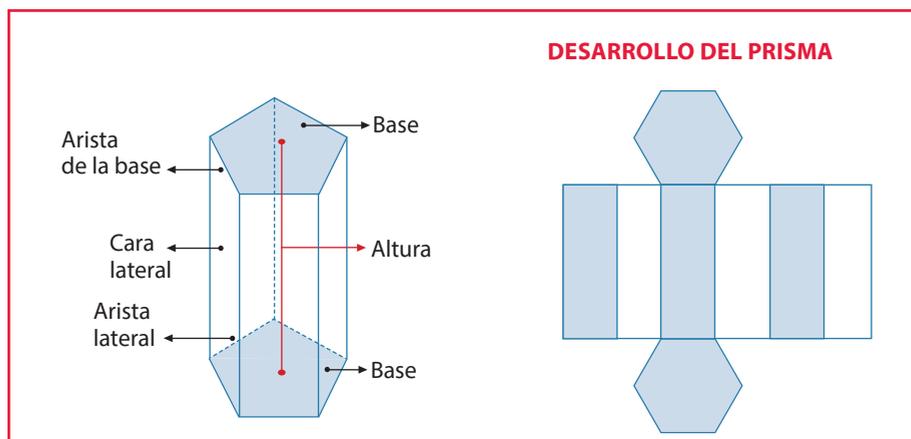
ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR

$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$

Veamos algunos sólidos geométricos con sus elementos y su respectivo desarrollo.

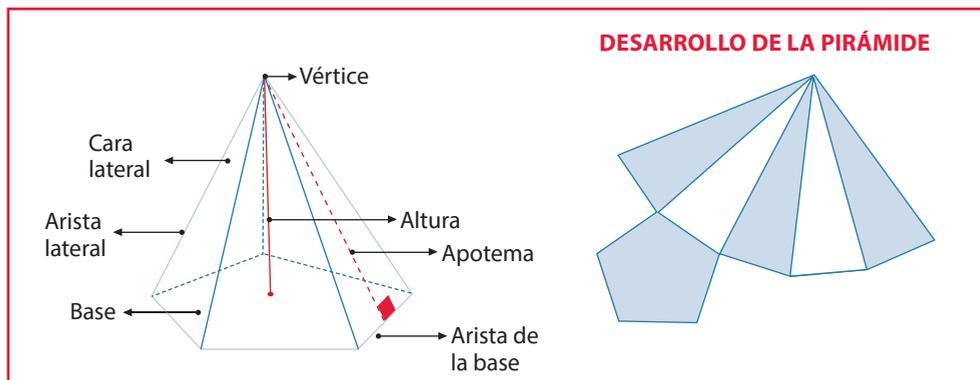
Prismas

Los prismas son poliedros que tienen dos caras paralelas e iguales llamadas bases y caras laterales que son paralelogramos.



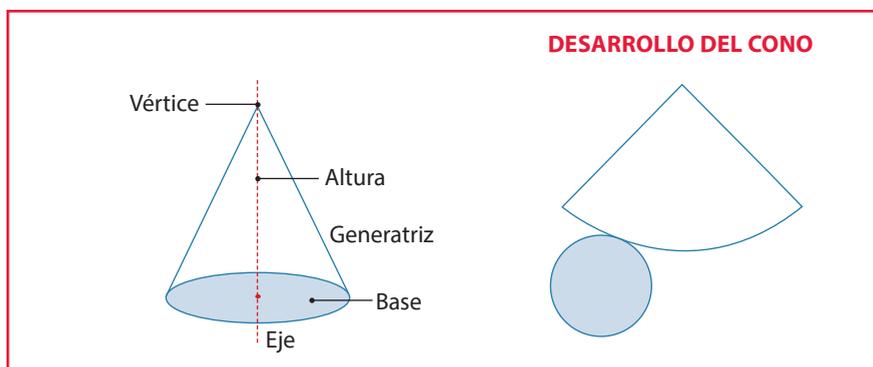
Pirámides

Son poliedros cuya base es un polígono cualquiera y cuyas caras laterales son triángulos con un vértice común, que es el vértice de la pirámide.



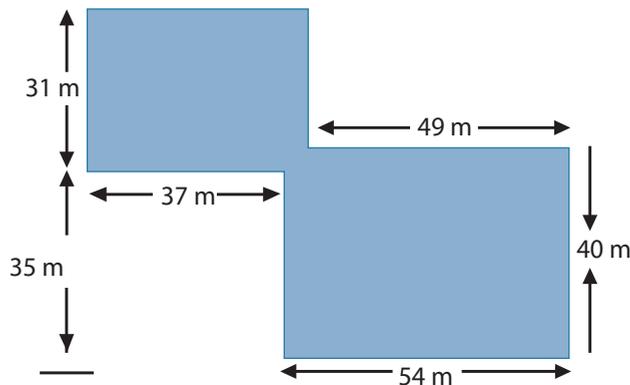
Cono

Es el cuerpo de revolución obtenido al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

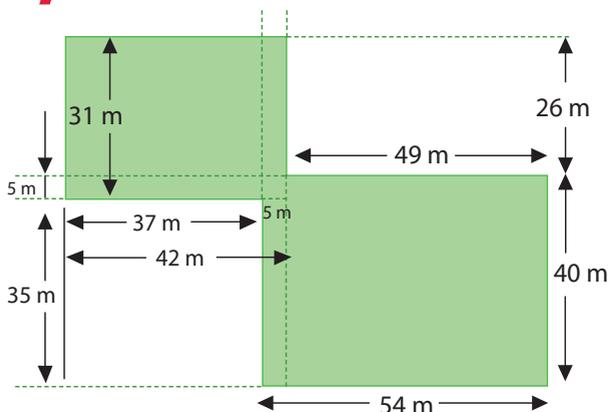


ANALIZAMOS

1 El siguiente gráfico representa los patios de una institución educativa. A Daniel, un estudiante de segundo grado, le han dejado como actividad que calcule el área total de los patios. **¿Cuánto mide dicha superficie?**



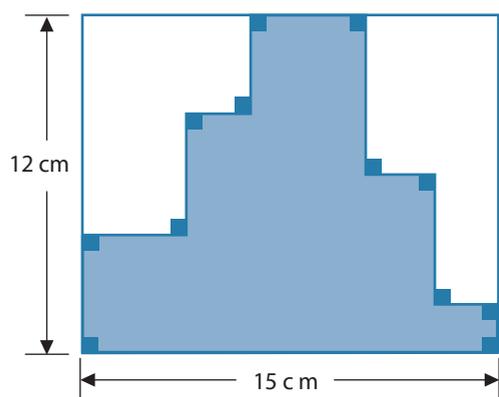
RESOLUCIÓN



$$A = 42 \times 31 + 54 \times 40 - 5^2 = 3437 \text{ m}^2$$

$$P = 54 + 40 + 49 + 26 + 42 + 31 + 37 + 35 = 314 \text{ m}$$

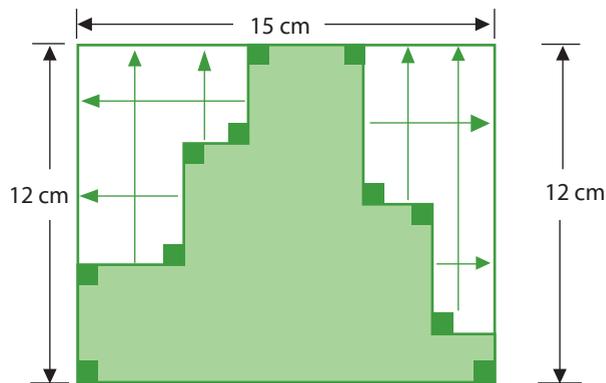
2 **¿Cuál es el perímetro de la región sombreada?**



$$P = 12 + 15 + 12 + 15 = 54 \text{ cm}$$

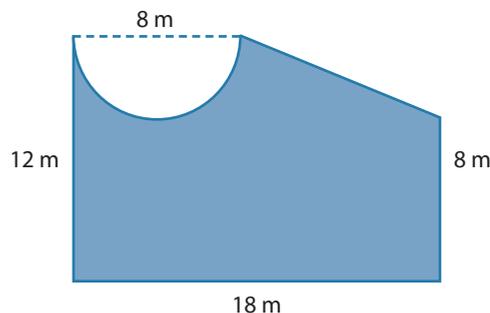
RESOLUCIÓN

Trasladando los lados de la figura, se llega a obtener un rectángulo. Luego, sumando sus lados, obtenemos el perímetro pedido.

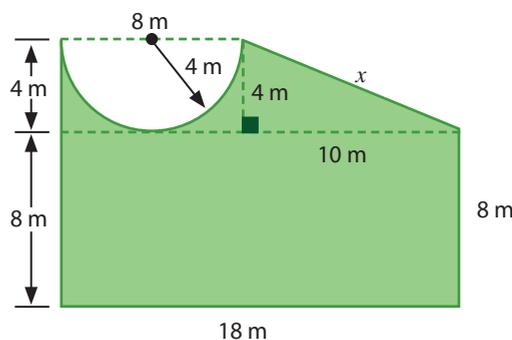


RESPUESTA: el perímetro de la región sombreada es 54 cm.

- 3 Calcula el perímetro y el área de la figura sombreada.



RESOLUCIÓN



$$x = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} \approx 10,77\text{m}$$

$$A_{\text{RECTÁNGULO}} = 18 \times 8 = 144 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{TRAPECIO}} = \frac{8+18}{2} \cdot 4 = 52 \text{ m}^2$$

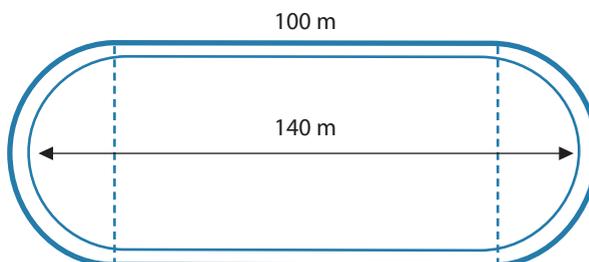
$$A_{1/2 \text{ CÍRCULO}} = \frac{\pi \cdot 4^2}{2} = 25,12 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{RECTÁNGULO}} + A_{\text{TRAPECIO}} - A_{1/2 \text{ CÍRCULO}} = 144 + 52 - 25,12 = 170,88 \text{ m}^2$$

$$P = 18 + 8 + 10,77 + \frac{2\pi \cdot 4}{2} + 12 \approx 61,33 \text{ m}$$

RESPUESTA: el área sombreada es $170,88 \text{ m}^2$ y su perímetro es $61,33 \text{ m}$.

- 4 María entrena con su bicicleta en un campo de deportes que tiene las medidas del siguiente gráfico. Su entrenador le dice que tiene que hacer 12 km sin parar. ¿Cuántas vueltas tiene que dar al campo de entrenamiento? Considera $\pi = 3,14$.



RESOLUCIÓN

Hallamos el perímetro del campo: tomamos en cuenta que por diferencia hallamos el radio de la semicircunferencia que forman los bordes del campo de deportes.

Perímetro de las curvas, circunferencia: $2\pi r = 2(3,14)(20\text{ m}) = 125,6\text{ m}$

Entonces, el perímetro total del campo es:

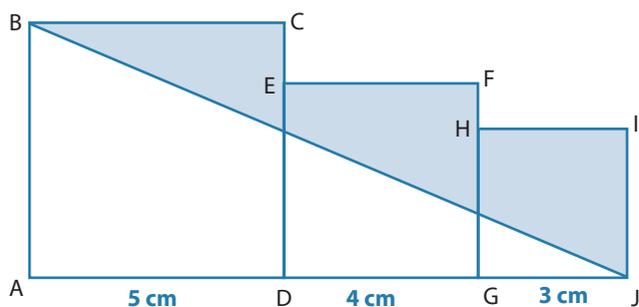
$100\text{ m} + 100\text{ m} + 125,6\text{ m} = 325,6\text{ m}$, luego: $12\text{ km} = 12\,000\text{ m}$

Para hallar el número de vueltas, dividimos 12 000 entre el perímetro del campo deportivo: $12\,000\text{ m} / 325,6\text{ m} = 36,86$ aproximadamente.

RESPUESTA: para completar los 12 km, tiene que dar 37 vueltas al campo de entrenamiento.

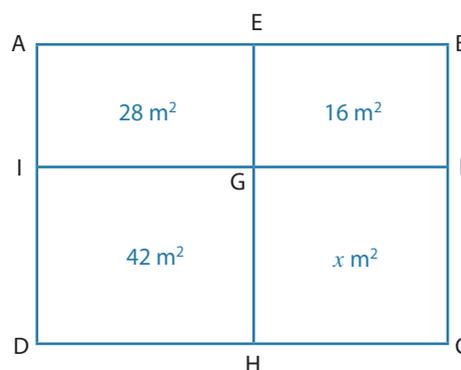
PRACTICAMOS

- 1 Calcula el área de la zona coloreada, si se sabe que $ABCD$, $DEFG$ y $GHIJ$ son cuadrados.



- 2 Sea el rectángulo $ABCD$ y el cuadrado $EBFG$, calcular el área de la región de forma rectangular $GFCH$.

- a) 24 m^2
- b) 16 m^2
- c) 28 m^2
- d) 44 m^2

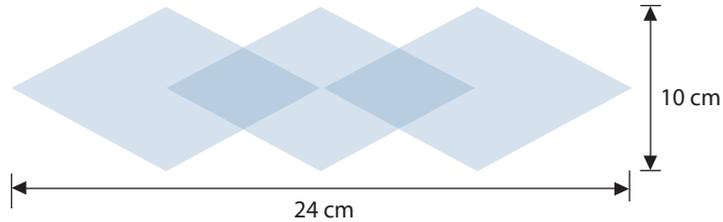


- 3 Un salón cuadrado tiene una superficie de 50 m^2 . Si se ha embaldosado con losetas cuadradas de 25 cm de lado, **¿cuántas losetas son necesarias?**

- a) 800 losetas.
- b) 1250 losetas.
- c) 400 losetas.
- d) 50 losetas.

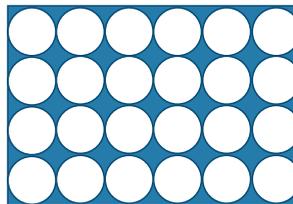
- 4 La chompa de Teresa tiene un dibujo de rombos como el de la figura. La franja mide 24 cm de largo y 10 cm de ancho. **Calcula el área total de la figura.**

- a) 240 cm²
b) 34 cm²
c) 150 cm²
d) 90 cm²



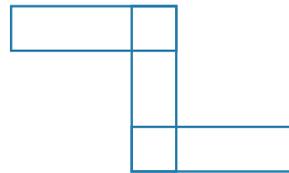
- 5 Después de sacar las latas de leche de una caja, las marcas que quedan al fondo de esta tienen forma circular de 7,4 cm de diámetro cada uno. Calcula el área de la región sombreada. Considerar $\pi = 3,14$.

- a) 2346 cm²
b) 828,48 cm²
c) 282,48 cm²
d) 1314,24 cm²



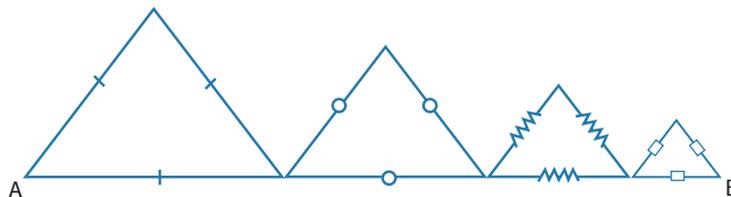
- 6 Tres rectángulos de 7 cm de largo y 2 cm de ancho se han superpuesto de la manera que se indica en la figura. **¿Cuál es el perímetro de la figura resultante?**

- a) 28 cm
b) 38 cm
c) 30 cm
d) 50 cm



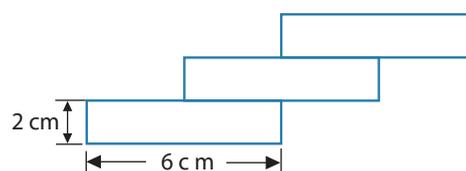
- 7 Si $AB = 40$ m, calcula la suma de los perímetros de los cuatro triángulos equiláteros.

- a) 160 m
b) 180 m
c) 120 m
d) 480 m

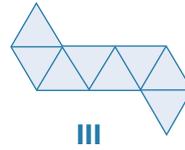
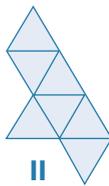


- 8 En la figura existen 3 rectángulos iguales. Calcular el perímetro de la figura si el extremo de uno coincide con el centro del otro.

- a) 36 cm
b) 38 cm
c) 32 cm
d) 30 cm

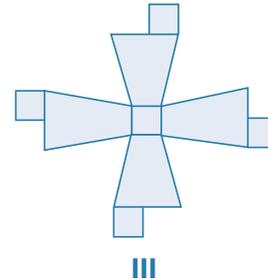
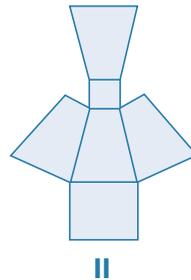
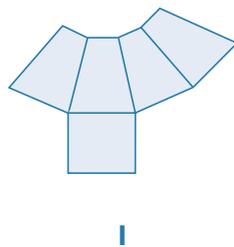
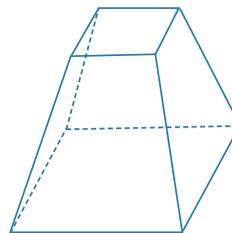


9 ¿Cuál o cuáles de los siguientes desarrollos forman un sólido geométrico?



- a) Solo I.
- b) Solo II.
- c) Solo III.
- d) I y III.

10 ¿Cuáles de los desarrollos corresponden al sólido mostrado?



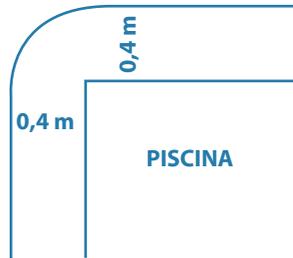
- a) I y III.
- b) I y II.
- c) Solo III.
- d) II y III.

Seguimos practicando

11 Lucía está haciéndose una chalina de lana de muchos colores. La chalina mide 120 cm de largo y 30 cm de ancho. ¿Cuál es el perímetro de la chalina?

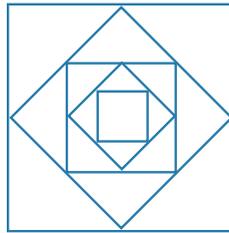
- a) 180 cm
- b) 150 cm
- c) 300 cm
- d) 360 cm

- 12 Una piscina rectangular de 10 m de largo por 5 m de ancho está rodeada por un paseo de 40 cm. **¿Cuánto mide el borde exterior del paseo?** Considera $\pi = 3,14$.

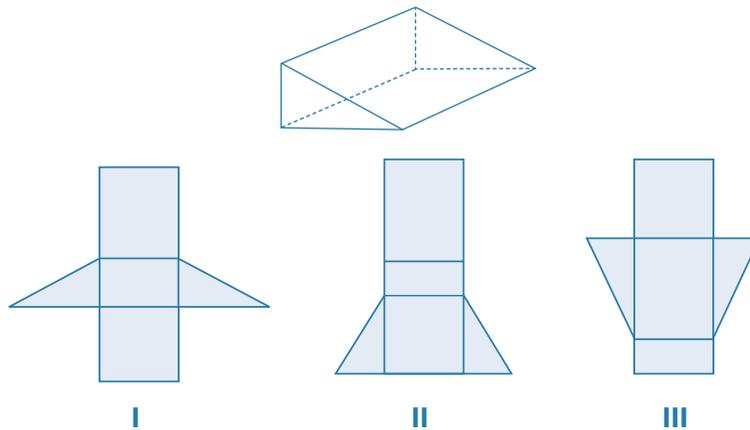


- 13 Para cubrir un patio rectangular, se han usado 540 baldosas de 600 cm^2 cada una. **¿Cuántas baldosas cuadradas de 20 cm de lado serán necesarias para cubrir el patio idéntico?**
- a) 810 baldosas de 20 cm de lado.
b) 600 baldosas de 20 cm de lado.
c) 540 baldosas de 20 cm de lado.
d) 20 baldosas de 20 cm de lado.
- 14 El perímetro del cuadrado interior es de 32 cm. **Calcula el perímetro del cuadrado exterior.**

- a) 128 cm
b) 64 cm
c) 32 cm
d) 182 cm



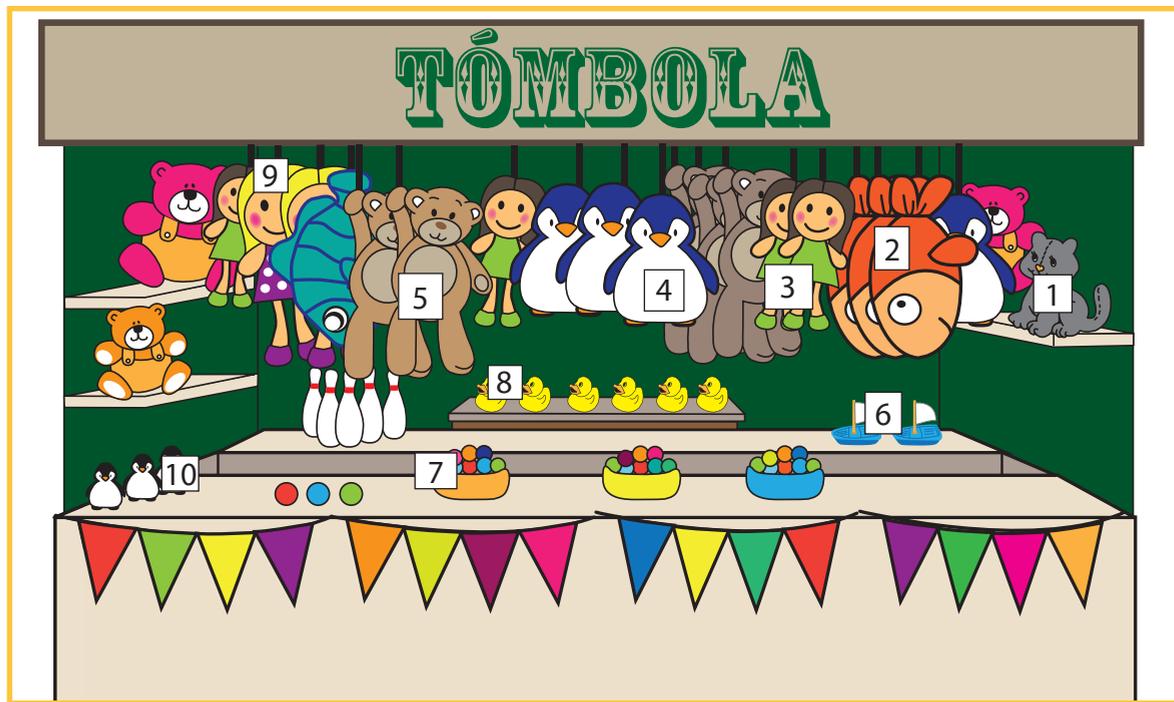
- 15 **¿Cuáles de los desarrollos corresponden al sólido mostrado?**



- a) Solo I.
b) Solo II.
c) Solo III.
d) II y III.

Matemática 2.º grado

Ficha: La tómbola escolar



Observa la imagen y responde las siguientes preguntas:

1 ¿Qué artículos observas?

2 Completa la tabla con la cantidad de artículos que hay en la tómbola.

Artículo	Nombre	Costo (S/)	Cantidad
1	Pantera	3,00	
2	Pescado	5,00	
3	Muñeca pequeña	2,00	
4	Pingüino	6,00	
5	Oso	4,00	
6	Juguete pequeño	1,00	
7	Caramelo	0,10	
8	Patito de hule	0,50	
9	Muñeca grande	6,50	
10	Pingüinito de hule	0,80	

3 ¿Cómo se juega la tómbola?

4 ¿Cuál es la finalidad de la tómbola?

5 ¿Qué condiciones se deben dar para que se asegure una buena recaudación de dinero? Menciona algunas de ellas.

6 Si el precio de cada boleto es S/ 1,50 y se juega extrayendo un boleto de la urna, ¿qué artículos se tendrá que tener en mayor cantidad para asegurar una mayor utilidad?

APRENDEMOS

EXPERIMENTOS ALEATORIOS Y DETERMINÍSTICOS

Todo juego de azar, como la tómbola, se centra en el cálculo de las probabilidades.

Para resolver problemas relacionados con probabilidades, es necesario recordar qué es un experimento aleatorio y qué es un experimento determinístico.

1 Un experimento es aleatorio cuando no se conoce con anticipación lo que va a ocurrir o el resultado que se va a obtener; mientras que en un experimento determinístico sí se conoce lo que ocurrirá o el resultado que se obtendrá de él.

Ejemplo 1: en cada caso señala si los experimentos descritos son determinísticos o aleatorios.

a) Lanzar un dado normal (con seis caras diferentes): _____

b) Extraer una ficha de una urna llena de fichas diferentes: _____

c) Indicar qué día de la semana será mañana: _____

d) Soltar una piedra desde lo alto de un edificio: _____

- 2 El espacio muestral (Ω) es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Ejemplo 2: si el experimento aleatorio es lanzar un dado normal, ¿cuál es el espacio muestral?

- a) {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- b) {enero, febrero, marzo, abril}
- c) {a, b, c, d, e}
- d) {3, 5, 7, 9, 11, 13}

- 3 Un evento (ε) o suceso se refiere a la ocurrencia de algún subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo 3: si el experimento aleatorio es extraer, sin ver, una carta y observar el número representado en ella, su espacio muestral es el siguiente:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

¿Cuáles son eventos de este experimento aleatorio?

- a) La carta es de espadas.
- b) La carta tiene un número par.
- c) La carta es la más grande en tamaño.
- d) La carta está cortada por la mitad.

- 4 La probabilidad de ocurrencia de un evento $P(\varepsilon)$ es un número comprendido entre 0 y 1 y nos indica la posibilidad de ocurrencia del evento (ε). 0 representa ocurrencia nula (fracaso) y 1, ocurrencia segura (éxito).

La probabilidad de un evento aleatorio se calcula con la siguiente relación:

$$P(\varepsilon) = \frac{\text{N.º de casos favorables}}{\text{N.º de casos posibles}}$$

Los casos favorables son los elementos del espacio muestral que cumplen las características del evento, y los casos posibles son todos los elementos del espacio muestral.

Ejemplo 4: si el experimento aleatorio es extraer al azar una carta de un grupo de 13 cartas diferentes y observar el número representado en ella, ¿cuál es la probabilidad de obtener una carta con número par?

RESOLUCIÓN

Según el ejemplo anterior, el espacio muestral es el siguiente:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

De lo cual se obtiene que la cantidad de casos posibles es 13.

El evento consiste en obtener una carta con número par. Los casos favorables son {2, 4, 6, 8, 10, 12}. De esto se desprende que son 6 los casos favorables.

Siendo el evento ε : carta con número par, entonces $P(\varepsilon) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{6}{13}$.

- 5 Retornando a la situación problemática, podemos decir que para asegurar un mejor éxito en la tómbola se debe incrementar la probabilidad de ocurrencia de extraer un boleto con la numeración de un artículo con un precio menor de S/ 1,50. Y minimizar la ocurrencia de extraer un boleto con la numeración de un artículo con costo mayor de S/ 1,50.

Con las cantidades contadas y escritas en la tabla, determinamos el espacio muestral (Ω), con lo que obtendremos los casos posibles. El evento (ε) es extraer un boleto con numeración 6, 7 u 8. Con esto obtendremos la cantidad de casos favorables. Con estos dos datos se obtiene la probabilidad de ocurrencia. Si esta probabilidad es mayor que 0,5; estaremos frente a condiciones favorables de ganancia.

ANALIZAMOS

En un cierto día en una tómbola, se tienen los artículos y costos mostrados en la siguiente tabla:

Artículo	Nombre	Costo (S/)	Cantidad
1	Pantera	3,00	3
2	Pescado	5,00	4
3	Muñeca pequeña	2,00	5
4	Pingüino	6,00	2
5	Oso	4,00	3
6	Juguete pequeño	1,00	7
7	Caramelo	0,10	40
8	Patito de hule	0,50	6
9	Muñeca grande	6,50	4
10	Pingüinito de hule	0,80	6
			80

El juego consiste en extraer de una urna un boleto con la numeración del artículo.

- 1 ¿Cuál es la probabilidad de obtener un caramelo?

RESOLUCIÓN

El espacio muestral está dado por los boletos, un boleto por cada artículo; es decir, los casos posibles son 80.

El evento consiste en que la numeración del boleto sea 7, para lo cual hay 40 casos favorables.

$$\text{Luego: } P(\text{caramelo}) = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} = 0,5$$

- 2 Si para extraer un boleto se debe pagar S/ 1,50, ¿cuál es la probabilidad de no obtener ganancias en una jugada?

RESOLUCIÓN

Para obtener ganancia en la extracción de boletos, se deben extraer boletos con la numeración 6, 7, 8 o 10, es decir: $7 + 40 + 6 + 6 = 59$

$$\text{Luego: } P(\text{ganar}) = \frac{59}{80} = 0,7375$$

$$P(\text{no ganar}) = \frac{21}{80} = 0,2625$$

- 4 Para la primera fecha, de los 5 equipos que integran la categoría II, se elige por sorteo una de las secciones que pasa automáticamente a la siguiente fecha. **¿Cuál es la probabilidad de que sea elegida una de las secciones de cuarto grado?**

a) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{1}{2}$

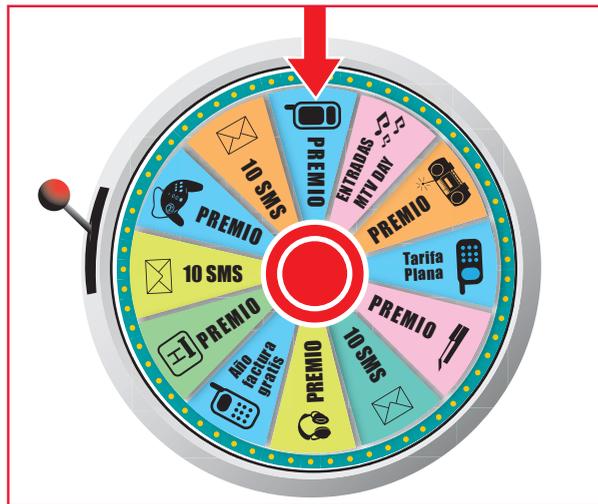
b) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{5}$

- 5 Si en la categoría II para cada encuentro se eligen los equipos al azar, **¿cuál es el espacio muestral sobre el que se eligen los equipos que jugarán el primer partido de esta categoría?**

La ruleta

Una empresa de telefonía, para premiar a sus clientes por su preferencia, fabrica esta ruleta y hace que cada cliente elegido la haga girar para determinar el obsequio que le dará. Observa la ruleta:



Con esta información responde las preguntas 6, 7 y 14.

- 6 **¿Cuál es el espacio muestral de los obsequios que otorga esta ruleta?**

- 7 **¿Cuál es la probabilidad de que un cliente, al hacer girar esta ruleta, obtenga como obsequio 10 SMS?**

a) $\frac{3}{10}$

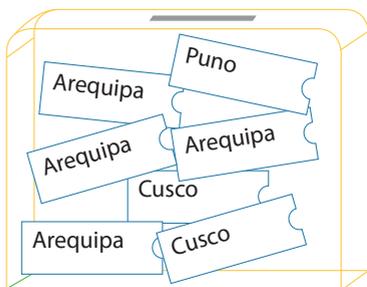
c) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{12}$

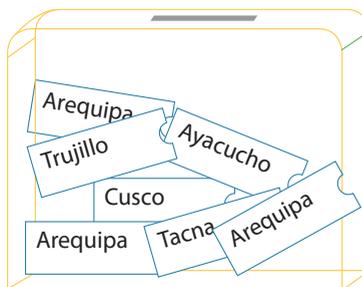
d) $\frac{1}{4}$

Empresa de transporte

Una empresa de transporte desea premiar a sus pasajeros más frecuentes con boletos de viaje ida y vuelta a diversos destinos nacionales, para lo cual prepara dos urnas idénticas donde deposita los boletos con los diversos destinos de viaje.



Urn 1



Urn 2

Con esta información resuelve las preguntas 8, 9, 10 y 15.

8 Luego de extraer dos boletos de la urna 2, uno de Cusco y el otro de Tacna, sin devolverlos a la urna, ¿cuál es la probabilidad de que al extraer el tercer boleto el destino sea Ayacucho?

- a) $\frac{1}{5}$
- b) $\frac{2}{7}$
- c) $\frac{1}{7}$
- d) $\frac{1}{4}$

9 ¿Qué boletos se deben extraer de la urna 1 para que la probabilidad de extraer un boleto con destino a Cusco sea del 50 %?

10 Un pasajero desea ir a Arequipa, ¿cuál de las urnas le convendría escoger para extraer el boleto con ese destino? Argumenta tu respuesta.

Seguimos practicando

11 Si en las primeras 10 extracciones solo se entregaron caramelos, **¿cuál es la probabilidad de que en la siguiente extracción salga nuevamente un caramelo?**

a) $\frac{3}{7}$

c) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{4}{7}$

d) $\frac{3}{8}$

12 Para el partido inaugural, se seleccionarán al azar 2 equipos de cada categoría. **¿Cuál es la probabilidad de que, en el encuentro de la categoría I, haya por lo menos una de las secciones del segundo grado?**

a) $\frac{8}{21}$

c) $\frac{3}{7}$

b) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{7}$

13 En la primera etapa del campeonato, los equipos deben enfrentarse unos contra otros solo una vez. Para cada encuentro se eligen al azar los equipos que se enfrentarán. Si en el primer encuentro jugaron el salón de primero A con el de tercero B, **¿cuál es la probabilidad de que el segundo encuentro ocurra entre dos equipos de segundo grado?**

a) $\frac{3}{7}$

c) $\frac{3}{20}$

b) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{5}$

14 **¿Cuál es la probabilidad de que un cliente, al hacer girar esta ruleta, no obtenga obsequio?**

a) 1

b) $\frac{1}{12}$

c) 0

d) $\frac{1}{2}$

15 Jorge extrae un boleto de la urna 1. **¿Cuál es la probabilidad de que este boleto corresponda al destino de Cusco?**

a) $\frac{3}{14}$

c) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{2}{7}$

d) 1

Matemática 2.º grado

Ficha: La tienda de frutas



Observa la siguiente imagen:



Responde las siguientes preguntas:

- 1 ¿Qué frutas conoces?

- 2 ¿Cuánto costarían 3 kg de manzanas rojas?

- 3 ¿Cuántos kilogramos de manzana delicia puedes comprar con S/ 10?

- 4 ¿El peso calculado en la pregunta anterior será una cantidad entera?

Situación problemática

Lucía va al mercado a comprar frutas. Pide 2 kg de manzana Israel y $3\frac{1}{2}$ kg de tunas verdes. Paga con un billete de S/ 20 y recibe de vuelto S/ 8. De retorno a casa, Lucía tiene la sensación de que le han dado menos vuelto del que le corresponde. ¿Qué expresión matemática le permitiría comprobar a Lucía que ha recibido el vuelto justo?

Para resolver este problema, podemos enfrentarla de la siguiente forma:

No es suficiente que simbolicemos con x la cantidad que le estarían cobrando en exceso a Lucía ni sumarla con el cálculo de lo que gastó en cada producto más el vuelto que recibió. Es necesario

también tener alguna referencia para compararla con esta expresión mediante una relación de igualdad o desigualdad. Los \$/ 20 constituyen la referencia. Por tanto, la relación podría quedar así:

$$\text{Costo manzana Israel} + \text{costo de tunas verdes} + \text{vuelto} + x = 20$$

Al efectuar los cálculos, obtendremos el valor de x . Este valor nos permite llegar a alguna de las siguientes conclusiones:

- › Si x es igual a 0, entonces a Lucía le dieron el vuelto justo.
- › Si x es una cantidad menor que 0, entonces le dieron **más** vuelto del previsto.
- › Si x es una cantidad mayor que 0, entonces le dieron **menos** vuelto del previsto.

Para obtener el valor, podemos desarrollar los cálculos de la siguiente manera:

- › El costo de la manzana Israel: (2) (\$/ 3,20) = \$/ 6,40.
- › El costo de las tunas verdes: (3,5) (\$/ 1,20) = \$/ 4,20.
- › Vuelto: \$/ 8,00.

La expresión quedaría así:

$$6,40 + 4,20 + 8 + x = 20$$

APRENDEMOS

ECUACIONES E INECUACIONES

Si nos hubiesen preguntado cuánto más o cuánto menos recibió Lucía de vuelto, obtendríamos la respuesta al hallar el valor de x que cumple esa igualdad, es decir, al observar la solución de la ecuación anterior.

En nuestra vida cotidiana estamos siempre elaborando cálculos o estimando cantidades. Estos cálculos o estimaciones provienen de relaciones matemáticas de igualdad (ecuaciones) o de desigualdad (inecuaciones). Tales relaciones suelen representarse de la siguiente manera:

- › $0,5x + 2 = 10,8$
- › $3x + \frac{1}{2} = 3$
- › $2,5x - 1 < 11,2$
- › $\frac{3}{5}x + 0,2 > 0,7$

¿Cómo resolvemos ecuaciones o inecuaciones?

- 1 **Por ensayo y error.** Consiste en ir probando valores para la incógnita con el fin de ir aproximándonos a la verificación de la igualdad.

Ejemplo 1: resolvamos la siguiente ecuación: $2,5x + 1,2 = 5,7$

Para $x = 1 \rightarrow 2,5(1) + 1,2 = 2,5 + 1,2 = 3,7$ (falta).

Para $x = 2 \rightarrow 2,5(2) + 1,2 = 5 + 1,2 = 6,2$ (excede).

Para $x = 1,5 \rightarrow 2,5(1,5) + 1,2 = 3,75 + 1,2 = 4,95$ (falta).

Para $x = 1,8 \rightarrow 2,5(1,8) + 1,2 = 4,5 + 1,2 = 5,7$ (verifica).

Por lo que: $x = 1,8$ es la solución de la ecuación.

- 2 Usando reglas de transposición.** Consiste en aplicar los procedimientos ya conocidos cuando se resuelven ecuaciones de primer grado con coeficientes e incógnita enteros.

Ejemplo 1: hallemos el valor de la variable de la siguiente ecuación: $2,5x + 1,2 = 5,7$.

$$\text{Transponemos } 1,2 \rightarrow 2,5x = 5,7 - 1,2$$

$$2,5x = 4,5$$

$$\text{Transponemos } 2,5 \rightarrow x = \frac{4,5}{2,5}$$

$$x = 1,8$$

Ejemplo 2: resolvamos la inecuación: $1,2x - 2,6 < 5,8$.

$$\text{Transponemos } 2,6 \rightarrow 1,2x < 5,8 + 2,6$$

$$1,2x < 8,4$$

Recordemos que si 1,2 hubiese sido negativo, el sentido de la desigualdad cambiaría de menor a mayor.

ANALIZAMOS

- 1** Juan compra en la tienda de frutas cierta cantidad de mandarinas y el doble en peso de papayas. En total gasta S/ 14,40. ¿Cuántos kilogramos de mandarina compró?

RESOLUCIÓN

Usamos la letra x para representar los kilogramos de mandarina que compró Juan.

Juan compró $2x$ kg de papayas.

El dinero que Juan destinó para cada compra resulta de la multiplicación del peso del producto por el precio de cada unidad de peso de este producto. Así:

Para las mandarinas: $2,2x$

Para las papayas: $1,3(2x) = 2,6x$

La ecuación que desarrolla la situación es la siguiente:

$$2,2x + 2,6x = 14,40$$

$$4,8x = 14,40$$

$$x = \frac{14,40}{4,8}$$

$$x = 3,00$$

Interpretamos el resultado obtenido:

Si la incógnita x es el peso de la mandarina comprada por Juan, entonces la respuesta es 3 kg.

- 2** Se quiere cercar un terreno de forma rectangular para destinarlo al cultivo de manzanas. Para esto, se dispone de 480 m de alambre de púas, el cual se usará para rodear el terreno con tres vueltas. Si la diferencia entre las dimensiones del terreno es de 20 m, **¿cuáles podrían ser las medidas de este terreno?**

RESOLUCIÓN

Ancho del terreno: x

Largo del terreno: $x + 20$

Borde del terreno: $x + 20 + x + 20 + x + x = 4x + 40$

Longitud del alambre que vamos a utilizar para construir la cerca: $3(4x + 40)$.

Para que el alambre alcance, debemos establecer la siguiente condición: $3(4x + 40) \leq 480$

Luego, desarrollamos la inecuación:

$$4x + 40 \leq 160$$

$$4x \leq 120$$

$$x \leq 30$$

Finalmente, interpretamos el valor encontrado:

El resultado $x \leq 30$ nos indica que el lado menor del terreno debe medir como máximo 30 m. Esto significa que el otro lado del terreno debería medir como máximo 50 m (lo cual resulta de sumar $30 + 20$). Pero estas medidas no son las únicas, sino que hay varios pares de medida para los valores de x menores que 30.

De esta manera, tenemos los siguientes pares:

30 y 50 m

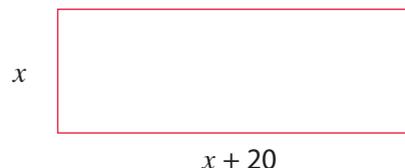
20 y 40 m

25 y 45 m

29 y 49 m

etc.

Así sucesivamente.



- 3 Luis paga S/ 1,80 por cada kilogramo de mandarinas, pero venderá cada kilogramo a S/ 2,20. **¿Cuántos kilogramos de mandarinas debe comprar y vender como mínimo para obtener una utilidad mayor de S/ 40?**

RESOLUCIÓN

1.º Para determinar la utilidad, determinemos la ganancia por kilo de mandarina:

Ganancia = precio de venta - precio de costo

$$\text{Ganancia} = \begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 2,20 & - & 1,80 \end{array} = \text{S/ } 0,40 \text{ por kg}$$

2.º Para obtener la utilidad (ganancia) mayor a S/ 40, multiplicamos:

Cantidad de kilos que debe comprar y vender por la ganancia y obtener utilidad mayor (>) a 40

$$\begin{aligned} x(0,40) &> 40 \\ x &> \frac{40}{0,4} & \Rightarrow & \frac{400}{4} \\ x &> 100 \text{ kg} \end{aligned}$$

Debe comprar y vender como mínimo 100 kg de mandarina para obtener utilidades mayores a S/ 40.

- 4 En un huerto de manzanas se recolectó cierta cantidad de manzanas delicia y el doble más 20 kg de manzanas rojas. Luego se llenaron bolsas con 10 kg de manzanas en cada una de ellas. Cada bolsa con manzanas delicia se vendió a S/ 30 y cada bolsa con manzanas rojas a S/ 35. Si por la venta total de manzanas se recibieron S/ 570, **¿cuántos kilos de manzanas se recolectaron en total?** (Tener como referencia los precios mostrados en la imagen de la página 79).

RESOLUCIÓN

Interpretando el enunciado podemos establecer lo siguiente:

La cantidad de kilos de manzanas delicia la representaremos por: x

Como la cantidad de kilos de manzanas rojas es el doble más 20 kg, la representamos por: $2x + 20$

Pero como llenaron bolsas con 10 kg de manzanas en cada una de ellas, tendremos:

Las manzanas delicias: $\frac{x}{10}$

Las manzanas rojas: $\frac{2x + 20}{10}$

Como cada bolsa con manzanas delicia se vendió a S/ 30, tenemos: $30 \frac{x}{10}$

Y cada bolsa con manzanas rojas se vendió a S/ 35, entonces tenemos: $35 \frac{2x+20}{10}$

Si por la venta total de manzanas se recibieron S/ 570

$$30 \frac{x}{10} + 35 \frac{2x + 20}{10} = 570$$

$$\frac{30x}{10} + \frac{70x + 700}{10} = 570 \rightarrow \frac{30x + 70x + 700}{10} = 570$$

$$\frac{100x + 700}{10} = 570 \rightarrow 100x + 700 = (570) \cdot (10)$$

$$x = \frac{5700 - 700}{100} \rightarrow x = 50$$

Por tanto:

La cantidad de kilos de manzanas delicias será: $x = 50$ kg

La cantidad de kilos de manzanas rojas será: $2x + 20 = 20(50) + 20 = 100 + 20 = 120$ kg

El total de kilos de manzanas que se recolectaron será: $50 + 120 = 170$ kg

RESPUESTA: se recolectaron 170 kg de manzanas.

PRACTICAMOS

- Rosa compra cierta cantidad de melocotones a S/ 10,80. Ella siente que el peso del producto no es el adecuado, así que realiza la verificación del peso en otra balanza y nota que esta registra 0,1 kg menos de lo esperado por cada kilogramo. Rosa retorna y presenta el reclamo respectivo, pidiendo la devolución del dinero cobrado en exceso. **¿Cuánto dinero le deben devolver a Rosa?**
 - S/ 1,10
 - S/ 1,00
 - S/ 4,00
 - S/ 0,30

El camión frutero

Los comerciantes van al mercado mayorista y compran las frutas que venderán en sus puestos de fruta. Para trasladar la mercancía desde ese lugar hasta sus puestos, deciden contratar a un chofer para que los traslade en su camión. Este cobra S/ 10 por transportar a cada pasajero y S/ 0,30 por cada kilogramo de fruta.



Según esta información, responde las preguntas 5, 6 y 7.

- 5 Se tienen 15 kg de cada variedad de palta: palta fuerte y palta Hass. **¿Entre qué valores oscilará la diferencia entre la cantidad de palta fuerte y palta Hass?**

- 6 Si la tendencia de crecimiento o decrecimiento en la evolución de la palta Hass de España y Estados Unidos continúa de forma constante, **¿en cuánto tiempo coincidirán los valores de las exportaciones hacia ambos países?**

- a) 1,15 años.
- b) 1,2 años.
- c) 3,5 años.
- d) 0,15 años.

- 7 **¿Entre qué años se produjo la mayor diferencia en la exportación total de la palta Hass?**

- a) 2006 - 2007
- b) 2007 - 2008
- c) 2010 - 2011
- d) 2011 - 2012

Empresas de fumigación

Dos empresas de fumigación de cultivos de fruta mantienen la siguiente tarifa:

Empresa de fumigación	Costo fijo (constante)	Costo por hectárea fumigada (varía según la cantidad de hectáreas [ha] por fumigar).
Sanidad total	S/ 50	250
Cultivo sano	S/ 25	300

Con esta información, resuelve las preguntas 8, 9 y 10.

- 8 **¿Qué expresión representa el costo por fumigar n hectáreas con la empresa Sanidad Total?**

- a) $50n + 250$
- b) $50 + 250n$
- c) $50n - 250$
- d) $300n$

- 9 Un agricultor tiene 3 hectáreas de cultivos de fruta. Sin embargo, solo dispone de S/ 700 para invertir en su fumigación. **¿Qué empresa le convendría contratar para abarcar la mayor área posible? ¿Cuántas hectáreas de sus cultivos quedarían sin fumigar?**
- Le convendría contratar a Sanidad Total, pero quedarían sin fumigar 0,4 hectáreas.
 - Le convendría contratar a Sanidad Total, pero quedarían sin fumigar 2,6 hectáreas.
 - Le convendría contratar a Cultivo Sano, pero quedarían sin fumigar 0,75 hectáreas.
 - Le convendría contratar a Cultivo Sano, pero quedarían sin fumigar 2,25 hectáreas.
- 10 **¿Para cuántas hectáreas el precio en las dos empresas fumigadoras es el mismo?**
- 2 ha
 - $\frac{1}{2}$ ha
 - $\frac{1}{5}$ ha
 - 5 ha

Seguimos practicando

- 11 Cada kilogramo de manzana delicia cuesta S/ 3,80; y cada kilogramo de manzana Israel, S/ 2,70. Silvia, en lugar de comprar x kilogramos de manzana delicia, compra $(x + 1)$ kg de manzana Israel. De esta manera, logra ahorrar S/ 3,90. **¿Cuántos kilogramos de manzana Israel compró Silvia?**
- 6 kg
 - 4,4 kg
 - 4 kg
 - 7 kg
- 12 Se sabe que 1 kg de manzana roja vale lo mismo que 2 kg de mandarinas más S/ 0,20. También, que el precio de 1 kg de mandarinas es el mismo que el de 1,5 kg de plátanos más S/ 0,30. Entonces, **¿cuántos kilogramos de manzanas rojas valen lo mismo que 6 kg de plátanos más S/ 0,70?**
-
- 13 En una bolsa se colocan 25 manzanas. Si se sabe que de 5 a 7 de estas manzanas equivalen a 1 kg, **¿entre qué valores estará el peso de la bolsa?**
- Entre 3 kg y 5 kg.
 - Entre 5 kg y 7 kg.
 - Entre 4 kg y 5 kg.
 - Entre 6 kg y 8 kg.

Matemática 2.º grado

Ficha: Buscamos argumentos para tomar una buena decisión



El entrenador deportivo de una institución educativa debe elegir a uno de los dos jugadores que están en la banca para que ingrese al campo en un partido de básquet decisivo durante los Juegos Deportivos Escolares Nacionales 2015. Para tomar la decisión, consulta con su asistente, que le muestra una tabla con la efectividad de cada uno de ellos en los partidos anteriores.

Los puntos anotados por cada jugador en los cinco últimos partidos figuran en la siguiente tabla:

Partidos Jugadores	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º
Pablo	14	14	10	6	20
Claudio	12	16	13	15	14

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿De qué manera crees que los datos presentados podrían ayudar a tomar una decisión?

2. ¿Conoces las medidas de tendencia central? ¿Sabes cuáles son?

3. Determina el promedio aritmético, mediana y moda de los puntos de cada uno de los jugadores.

	Pablo	Claudio
Promedio aritmético		
Mediana		
Moda		

4. ¿Qué diferencias observas entre los promedios aritméticos, medianas y modas en ambos jugadores?

5. ¿Por cuál de los dos jugadores te inclinarías tú y por qué?

APRENDEMOS

TABLA DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

La distribución de frecuencias o tabla de frecuencias es una ordenación de datos estadísticos en la que se asigna a cada dato la frecuencia que le corresponde.

Tipos de frecuencia

- Frecuencia absoluta (f_i) es el número de veces que se repite un valor en un conjunto de datos.
- Frecuencia absoluta acumulada (F_i) es la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado.
- Frecuencia relativa (h_i), es el cociente entre la frecuencia absoluta de un determinado valor y el número total de datos. Se expresa también como porcentaje ($h_i \%$) multiplicando por 100 dicho cociente.

Tabla de frecuencias para datos no agrupados

Ejemplo: Durante la primera quincena del mes de julio, en una ciudad se han registrado las siguientes temperaturas máximas en grados Celsius ($^{\circ}\text{C}$): 32, 31, 28, 29, 30, 31, 31, 30, 31, 31, 28, 28, 29, 30 y 31.

La tabla de frecuencias correspondiente a estos datos no agrupados es la siguiente:

Temperaturas en la primera quincena de julio

Temperatura máxima ($^{\circ}\text{C}$)	f_i	F_i	h_i	$h_i \%$
28	3	3	0,20	20 %
29	2	5	0,13	13 %
30	3	8	0,20	20 %
31	6	14	0,40	40 %
32	1	15	0,07	7 %
Total	15		1,00	100 %

Tabla de frecuencias para datos agrupados

Ejemplo: Una empresa de calzado anotó las tallas de zapatos de treinta de sus clientes: 38, 42, 35, 23, 24, 43, 22, 36, 37, 20, 32, 35, 40, 21, 41, 42, 24, 38, 40, 38, 30, 34, 42, 28, 42, 36, 38, 24, 30 y 28. Como la variable tallas de zapato tiene muchos valores, se deben agrupar los datos en intervalos. Seguimos los siguientes pasos:

1. Determinamos el número de intervalos (k) con esta ecuación: $k = \sqrt{n}$, donde n es el número de datos.

$$k = \sqrt{30} \approx 5,48, \text{ entonces } k = 5$$

2. Encontramos el rango o recorrido: $R = \text{dato mayor} - \text{dato menor} = 43 - 20 = 23$.

3. Determinamos la amplitud del intervalo (A)

$$A = R/k = 23/5 = 4,6 \approx 5$$

4. Formamos el primer intervalo:

Límite inferior = 20

Límite superior = 20 + 5 = 25

Entonces el primer intervalo es [20; 25[

5. Por otro lado, la marca de clase (x_i) es el punto medio de un intervalo. Es el valor representativo de una clase.

$$x_i = \frac{Li + Ls}{2} = \frac{20 + 25}{2} = 22,5$$

6. Por tanto, la tabla de frecuencias correspondiente a estos datos es la que sigue:

Tallas de zapatos de los clientes de una empresa de calzado

Tallas de zapato	x_i	f_i	F_i	h_i	$h_i \%$
[20; 25[22,5	7	7	0,23	23 %
[25; 30[27,5	2	9	0,07	7 %
[30; 35[32,5	4	13	0,13	13 %
[35; 40[37,5	9	22	0,30	30 %
[40; 45]	42,5	8	30	0,27	27 %
Total		30		1,00	100 %

Elección de un gráfico estadístico según el tipo de variable

Por ser más adecuados, se recomienda el uso de estos gráficos según el tipo de variable.

Tipo de variable	Gráfico estadístico	Representación
VARIABLE CUALITATIVA NOMINAL U ORDINAL	Gráfico de barras. Puede ser simple o múltiple, vertical u horizontal. En un eje se ubican las categorías y en el otro eje, las frecuencias.	<p>Gráfico de barras que muestra la frecuencia absoluta de mascotas. El eje vertical representa la frecuencia absoluta (de 0 a 8) y el eje horizontal muestra las categorías: perro, pájaro, hamster y gato. Las barras están coloreadas y tienen patrones: perro (verde con puntos), pájaro (azul con triángulos), hamster (rojo con líneas horizontales) y gato (azul con líneas diagonales).</p>
	Gráfico circular. Se representa en un círculo dividido en sectores. Cada sector es proporcional a las frecuencias relativas.	<p>Gráfico circular 3D que muestra las ventas de comida. El círculo está dividido en sectores que representan porcentajes: Bocadillos (40%), Ensaladas (21%), Sopa (15%), Bebidas (9%) y Postres (15%). Una leyenda a la derecha muestra los patrones de cada categoría.</p>

Tipo de variable	Gráfico estadístico	Representación
VARIABLE CUALITATIVA NOMINAL U ORDINAL	Pictogramas. Son gráficos con dibujos alusivos al carácter que se está estudiando y cuyo tamaño es proporcional a la frecuencia que representan.	
CUANTITATIVA DISCRETA O CONTINUA	Gráfico de barras. También se utilizan para datos cuantitativos discretos.	
	Gráfico lineal. Se utiliza para representar una serie de datos registrados en un tiempo determinado y observar variaciones y tendencias.	
	Histogramas. Se usa para datos cuantitativos, continuos o discretos, agrupados. La base está dada por cada intervalo y la altura es la frecuencia correspondiente.	

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Son valores que permiten representar un conjunto de datos. Estos son los siguientes:

- La media aritmética o promedio (\bar{x}) es resultado de dividir la suma de todos los datos entre la cantidad total de datos.
- La mediana (M_e) es el valor correspondiente a la posición central del conjunto de datos ordenados de manera creciente o decreciente.
- La moda (M_o) es el valor que más se repite, es decir, el valor que tiene mayor frecuencia absoluta.

ANALIZAMOS

1 Las edades de los jóvenes que entrarán en un equipo de fútbol se muestran en la siguiente tabla:

Edades de los jóvenes del equipo de fútbol

Edad	f _i
16	7
17	8
18	5
19	4
20	6
Total	30

Determina el valor del promedio aritmético, mediana y moda de las edades de estos jóvenes.

RESOLUCIÓN

Para determinar el promedio de las edades, debemos sumar las edades de todos los jóvenes y luego lo dividiremos entre la cantidad de jóvenes. Así:

$$\bar{x} = \frac{7(16) + 8(17) + 5(18) + 4(19) + 6(20)}{30} = \frac{534}{30} = 17,8$$

Por lo tanto, el promedio de edad de los jóvenes que entrenan en este equipo de fútbol es 17,8 años. Debemos considerar que, al tener un número par de datos, vamos a encontrar dos valores centrales, aquellos ubicados en la posición 15 y 16 respectivamente. Por tanto, para determinar la mediana se debe sacar el promedio de ambos valores.

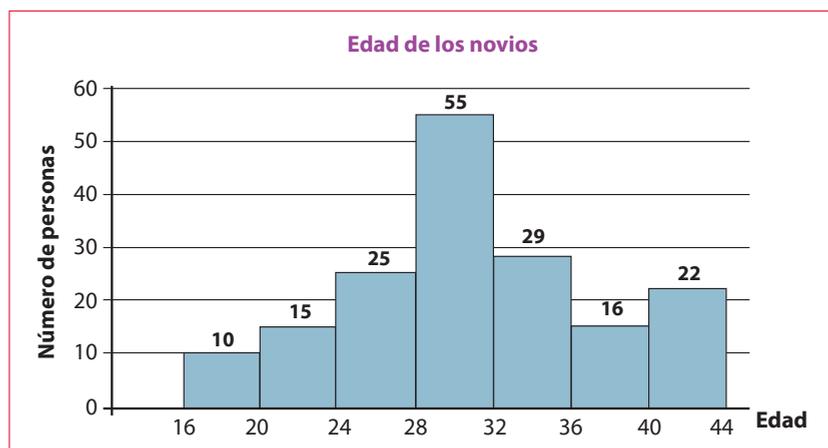
Tenemos 15 jóvenes que tienen 16 años y 17 años, entonces la edad en la posición 15 es 17 años y en la posición 16 es 18 años. Luego:

$$M_e = \frac{17 + 18}{2} = 17,5$$

Por lo tanto, la mediana de la edad de los jóvenes es 17,5 años.

La moda es el valor que se repite con mayor frecuencia; entonces, la moda de las edades es 17 años porque, a diferencia de las otras edades, hay más jóvenes con esa edad en los entrenamientos del equipo.

2 El histograma de frecuencias muestra las edades de los novios que contrajeron matrimonio en la municipalidad de un distrito. Según el gráfico, **¿cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta?**



- a) El histograma registra las edades de 172 personas que contrajeron matrimonio en ese distrito.
- b) Menos del 8 % de los novios tienen más de 16 años y menos de 20 años.
- c) 55 novios que contrajeron matrimonio tienen la mayor edad registrada.
- d) Más de la mitad de los novios tienen más de 24 años y menos de 36 años.

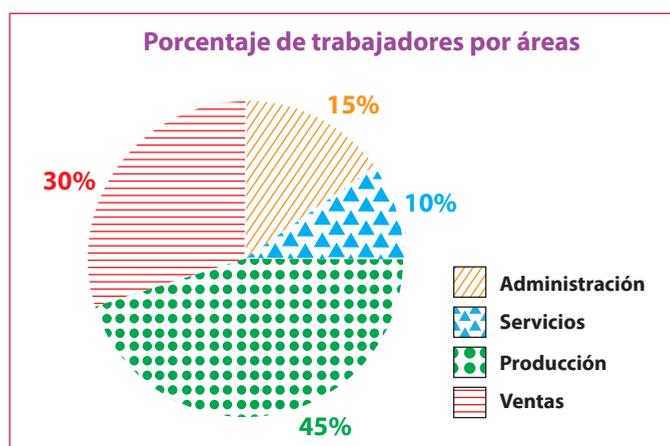
RESOLUCIÓN

La alternativa (a) es correcta, ya que si sumamos las frecuencias el resultado es 172.

La alternativa (b) también es correcta, ya que $10/172 = 0,058 = 5,8\%$; por lo tanto, efectivamente, es menor al 10 % el total.

La alternativa (c) hace referencia a la cantidad de novios cuyas edades están entre los 28 y 32 años, que no es la mayor edad registrada; por lo tanto, esta es la afirmación incorrecta.

- 3 En una empresa de embutidos, los trabajadores se distribuyen en diferentes áreas, tal como muestra el gráfico.



Si en la empresa hay un total de 120 trabajadores, **elabora una tabla de frecuencias con estos datos.**

RESOLUCIÓN

Si el total es 120, determinamos la cantidad de trabajadores en cada área.

$$\text{Administración: } \frac{15}{100} \cdot (120) = 18$$

$$\text{Servicios: } \frac{10}{100} \cdot (120) = 12$$

$$\text{Producción: } \frac{45}{100} \cdot (120) = 54$$

$$\text{Ventas: } \frac{30}{100} \cdot (120) = 36$$

Con estos datos procedemos a elaborar una tabla de frecuencias.

PRACTICAMOS

1 La posta médica registró las edades de 30 de sus pacientes adultos mayores. Con estos datos construyeron una tabla de frecuencias.

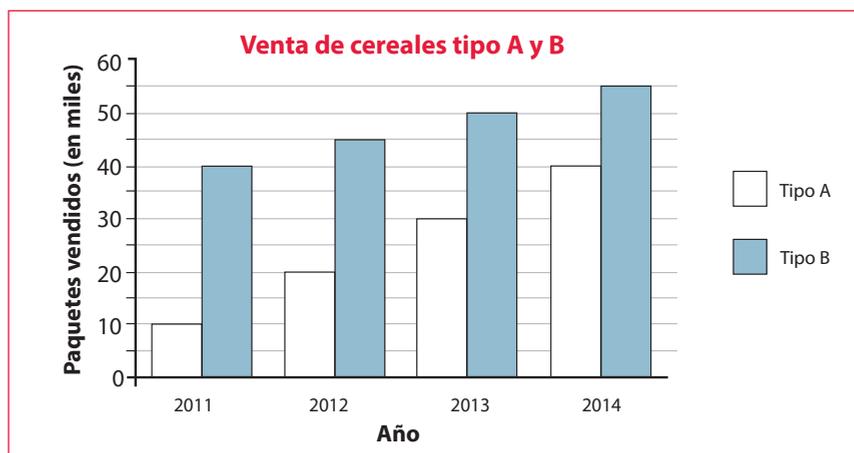
Completa la tabla y determina el porcentaje de pacientes adultos mayores que tienen al menos 72 años de edad.

- a) 13 %
- b) 33 %
- c) 50 %
- d) 67 %

Edad	Marca de clase (x_i)	f_i	h_i	h_i (%)
[54; 60[57	9	0,3	30 %
[60; 66[63			
[66; 72[69	5	0,17	
[72; 78[75	4	0,13	13 %
[78; 84]	81	6		
Total		30	1	100 %

2 El gráfico muestra la venta de dos tipos de cereales, A y B, durante 4 años. Si la tendencia en la venta de los cereales continúa durante los próximos 10 años, ¿en qué año la venta de los cereales A será igual a la venta de los cereales B?

- a) 2024
- b) 2018
- c) 2017
- d) 2015



3 En un estudio socioeconómico, se registró el salario mensual de un grupo de padres de familia de una sección de segundo grado de Secundaria.

S/ 1700	S/ 2300	S/ 1000	S/ 1250	S/ 1000
S/ 1300	S/ 1250	S/ 1000	S/ 1700	S/ 1000
S/ 1700	S/ 2300	S/ 1000	S/ 2000	S/ 1000
S/ 1300	S/ 1250	S/ 1000	S/ 1250	S/ 1000
S/ 1250	S/ 2300	S/ 1000	S/ 1000	S/ 1700

¿Cuántos padres de familia de esta sección perciben un salario menor que el promedio de este grupo?

- 4 Para saber si nuestra nota se encuentra entre los que sacaron más o los que sacaron menos en un examen de Matemática, debemos tomar como referencia una de las notas obtenidas por los estudiantes. Si las notas obtenidas son: 08, 14, 15, 18, 10, 10, 09, 11, 13, 14, 15, 08, 09, 10, 14, 12, 15, 18, 20, 16, 10, 11, 16, 18, 08, 13 y 18, **¿cuál es esa nota que nos servirá como referencia?**
- a) 14
 - b) 13
 - c) 11
 - d) 08

- 5 A una charla informativa sobre orientación vocacional asistieron jóvenes de distintas edades.

Edad	Cantidad de jóvenes
15	12
16	15
17	13
18	16
19	8

Determina la diferencia entre la mediana y la moda del conjunto de datos.

- 6 En una encuesta, se les preguntó a los estudiantes de un grupo sobre su comida favorita. Algunos resultados se presentan en la siguiente tabla:

Comida	Arroz con pollo	Cebiche	Ají de gallina	Otros	Total de encuestados
Cantidad de estudiantes	4	20	¿?	3	36

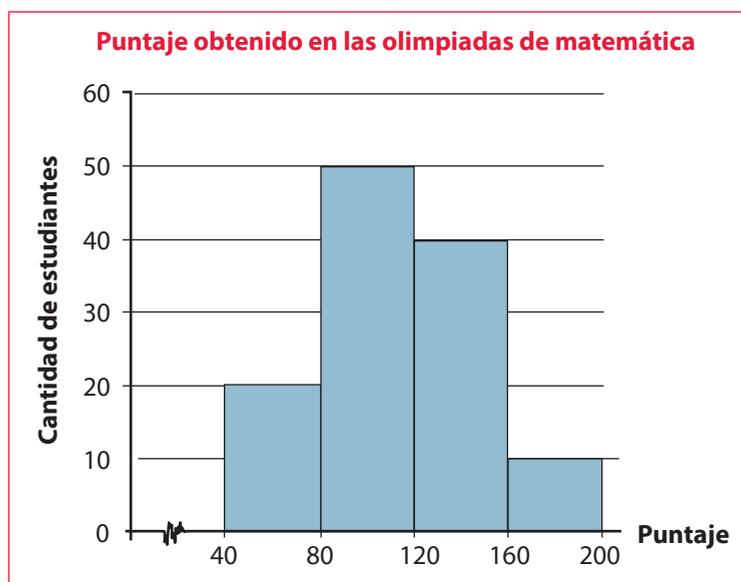
¿Cuál(es) de los siguientes datos se pueden obtener a partir de la información presentada?

- I. El número de estudiantes del grupo que prefiere arroz con pollo.
 - II. El número de estudiantes del grupo que prefiere seco a la norteña.
 - III. El porcentaje de estudiantes del grupo que prefiere cebiche.
- a) I solamente.
 - b) III solamente.
 - c) I y II solamente.
 - d) I y III solamente.

7 Paola estudia en un instituto de enseñanza del idioma inglés. Ella obtuvo las siguientes notas en los tres primeros exámenes: 12, 20 y 15. Solo le falta el cuarto examen para terminar el ciclo. Si ella desea tener una nota final de 16 en el rubro de exámenes, **¿cuál es la mínima nota que debe obtener en el cuarto examen si en este instituto no se otorgan puntos a favor?**

- a) 17
- b) 16
- c) 18
- d) 15

8 El siguiente histograma de frecuencias muestra el puntaje obtenido por un grupo de estudiantes en las olimpiadas de matemática de un distrito.



Según el gráfico, **¿cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta?**

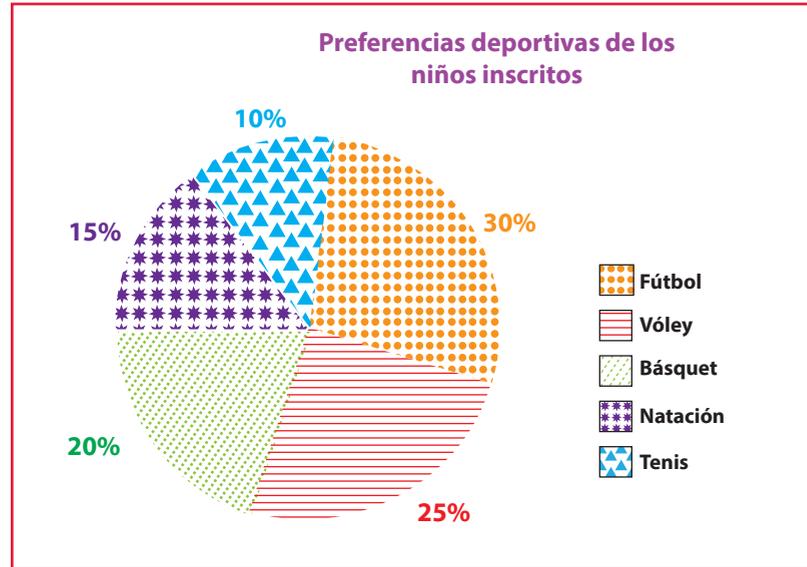
- a) El histograma registra las notas de 120 estudiantes que participaron en las olimpiadas de matemática.
- b) El 75 % de estos estudiantes obtuvieron puntajes mayores que 80 y menores que 160.
- c) 20 estudiantes obtuvieron los mínimos puntajes de las olimpiadas.
- d) 50 estudiantes obtuvieron los máximos puntajes de las olimpiadas.

9 Se les preguntó a 32 personas de un distrito por el número de horas diarias que se dedican a ver televisión. Los resultados son estos: 0, 2, 4, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 0, 2, 4, 2, 2, 4, 0, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 4, 4 y 0. **¿Cuál es la moda de estos datos?**

- a) 0
- b) 2
- c) 3
- d) 4

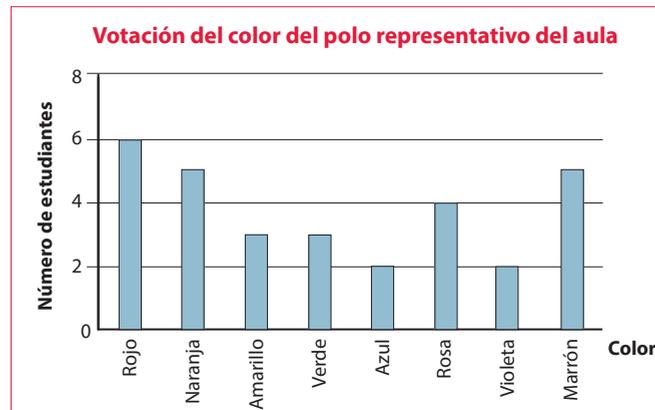
- 10 Se registraron en un gráfico circular las preferencias de los niños inscritos durante la primera semana en un club deportivo. Si sabemos que 8 niños prefieren básquet, **¿cuántos niños se inscribieron en dicho club en la primera semana?**

- a) 100 niños.
b) 40 niños
c) 30 niños.
d) 20 niños.



Seguimos practicando

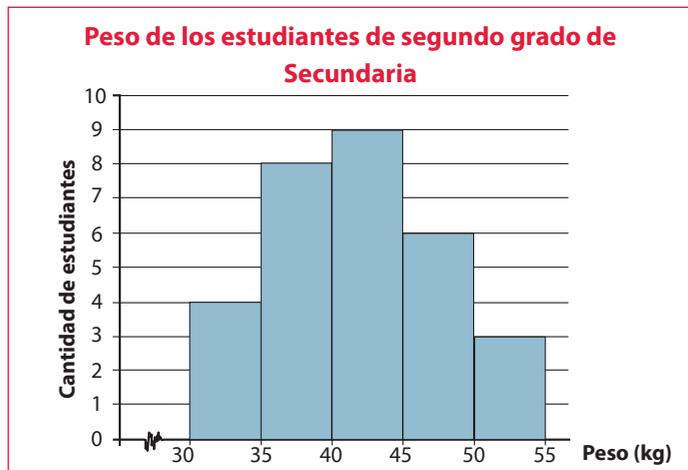
- 11 En el aula de segundo de Secundaria, se realizó una votación para decidir el color del polo que usarán para representar al aula en las olimpiadas deportivas. El siguiente gráfico de barras muestra estos resultados.



¿Qué colores tuvieron más de 3 votos?

- a) Rojo.
b) Amarillo y verde.
c) Azul y violeta.
d) Rojo, naranja, rosa y marrón.

- 12 El profesor de Educación Física registró en el siguiente gráfico el peso de los estudiantes de segundo grado de Secundaria.



¿Cuál de los siguientes cuadros corresponde a los datos del gráfico?

- a)
- | Peso | Cantidad de estudiantes |
|----------|-------------------------|
| [30; 35[| 4 |
| [35; 40[| 8 |
| [40; 45[| 9 |
| [45; 50[| 6 |
| [50; 55] | 3 |
- b)
- | Peso | Cantidad de estudiantes |
|----------|-------------------------|
| [30; 35[| 4 |
| [35; 40[| 12 |
| [40; 45[| 21 |
| [45; 50[| 27 |
| [50; 55] | 30 |
- c)
- | Peso | Cantidad de estudiantes |
|----------|-------------------------|
| [30; 35[| 30 |
| [35; 40[| 35 |
| [40; 45[| 40 |
| [45; 50[| 45 |
| [50; 55] | 50 |
- d)
- | Peso | Cantidad de estudiantes |
|----------|-------------------------|
| [30; 35[| 3 |
| [35; 40[| 4 |
| [40; 45[| 6 |
| [45; 50[| 8 |
| [50; 55] | 9 |

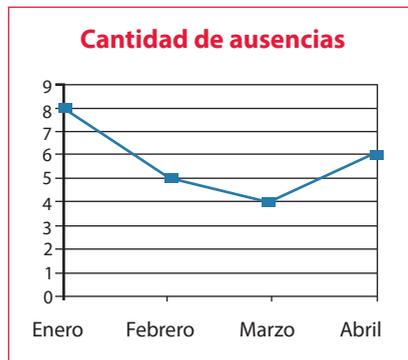
- 13 Un estudiante dejó caer una pelota 6 veces desde la azotea de un edificio de 20 m de altura. En la siguiente tabla, el estudiante registró el tiempo que tardó la pelota en llegar al suelo en cada una de las caídas. ¿Cuál es el promedio del tiempo que demora en caer la pelota?

- a) 1,8 segundos.
 b) 1,9 segundos.
 c) 2 segundos.
 d) 2,2 segundos.

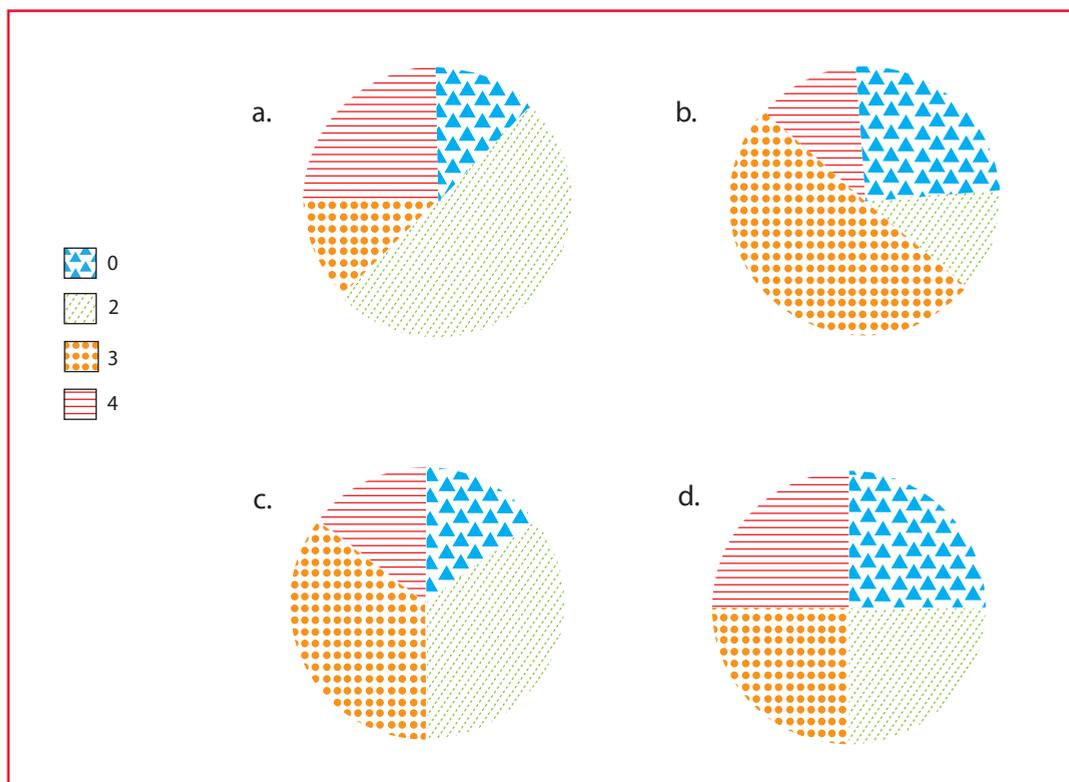
Número de caída	Tiempo de caída (segundos)
Primera	2
Segunda	2,1
Tercera	1,9
Cuarta	2
Quinta	1,8
Sexta	2,2

- 14 La siguiente gráfica representa el número de ausencias del personal de una empresa de lácteos durante cuatro meses. **¿Entre qué meses se produjo la reducción de las ausencias en dicha empresa?**

- a) En marzo.
- b) De febrero a abril.
- c) De enero a marzo.
- d) De enero a abril.



- 15 Se les preguntó a 32 personas de un distrito por el número de horas diarias que se dedican a ver televisión. Los resultados son estos: 0, 2, 4, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 0, 2, 4, 2, 2, 4, 0, 4, 2, 2, 4, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 4, 4 y 0. **¿Cuál de los gráficos circulares corresponde a los datos recogidos con respecto a la cantidad de horas que 32 personas se dedican a ver televisión?** Los datos están representados en la leyenda.



Matemática 2.º grado

Ficha: Los porcentajes y las compras



El comprobante de pago es un documento que acredita la transferencia de bienes, la entrega en uso o la prestación de servicios; además, avala una relación comercial.

Se usan varios tipos de comprobantes de pago: la factura, la boleta de venta, el recibo por honorarios, etc.

Es importante pedir o emitir el comprobante de pago con el fin de evitar la evasión de impuestos; de esta manera, el Estado puede obtener los recursos para poder brindar educación, salud, seguridad, justicia, obras públicas, apoyo a los más necesitados, entre otros beneficios.



Fuente de imagen: <<https://goo.gl/ZSdWVo>>

Responde las siguientes preguntas:

1 ¿Por qué es importante pedir el comprobante de pago al efectuar una compra?

2 ¿Qué es el IGV?

3 ¿Cuál es el porcentaje que corresponde al IGV?

4 María y su mamá fueron a comprar aceite Primor Premium y aceite de oliva Extra Virgen. Luego de pagar esa compra, recibieron el comprobante de venta que se observa en la imagen.

a) ¿Cuánto es el IGV que se aplica según el comprobante?

b) ¿En qué porcentaje se incrementó el subtotal con respecto al total?

PUNTO DE VENTA PSJE- LAS BRISAS - HUARAL TEL: 246-1117 R.U.C 12347654454			
TICKET #. 001 - 000009			
Caja Predeterminada			
Cliente:	PUBLICO EN GENERAL	11/07/2014	
Usuario:	ADMINISTRADOR	11:04:17a.m.	
CANT.	DESCRIPCIÓN		IMPORTE
1	ACEITE PRIMOR PREMIUM ENVASE X 1 LT X	2,55	2,55
2	ACEITE OLIVA EXTRA VIRGEN ENVASE X 500 ML X	1,50	3,00
SUBTOTAL:			S/ 5,55
IGV			S/ 0,99
TOTAL			S/ 6,49
SON: SEIS NUEVOS SOLES CON 49/100 CÉNTIMOS			
¡GRACIAS POR SU COMPRA! NO SE ACEPTAN CAMBIOS NI DEVOLUCIONES			

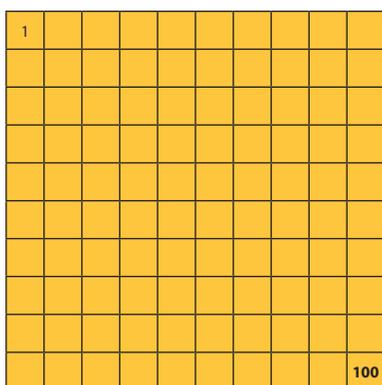
APRENDEMOS

LOS PORCENTAJES

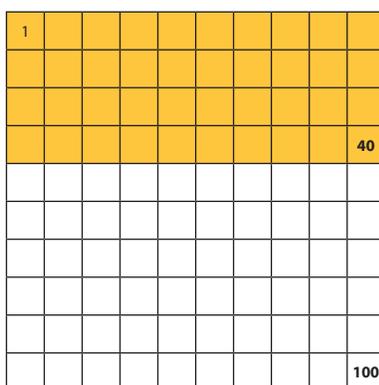
¿Qué sabemos sobre porcentaje?

Porcentaje o tanto por ciento representa la razón que indica el número de unidades que se toma por cada 100 partes.

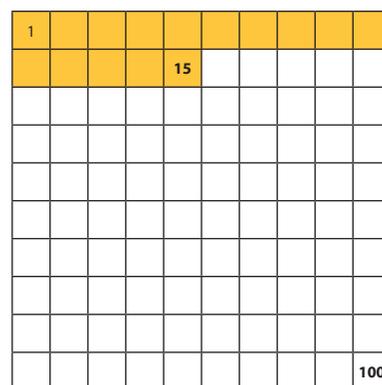
El 100 %



El 40 % = $\frac{40}{100}$



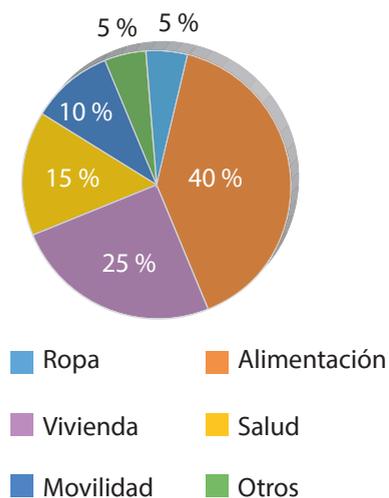
El 15 % = $\frac{15}{100}$



Observemos un ejemplo:

El papá de José tiene un presupuesto familiar de S/ 3000 y se distribuye en los porcentajes siguientes:

Presupuesto familiar



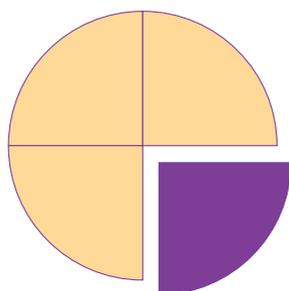
%	Fracción	El porcentaje de S/ 3000 es
5 %	$\frac{5}{100}$	$\frac{5}{100} \times 3000 = 150$
5 %	$\frac{5}{100}$	$\frac{5}{100} \times 3000 = 150$
10 %	$\frac{10}{100}$	$\frac{10}{100} \times 3000 = 300$
15 %	$\frac{15}{100}$	$\frac{15}{100} \times 3000 = 450$
40 %	$\frac{40}{100}$	$\frac{40}{100} \times 3000 = 1200$
25 %	$\frac{25}{100}$	$\frac{25}{100} \times 3000 = 750$

El mismo valor se puede expresar de la siguiente manera:



$$= \frac{1}{8}$$

Un octavo	
Como fracción	$\frac{1}{8}$
Como decimal	0,125
Como porcentaje	$0,125 \times 100 = 12,5 \%$



$$\frac{1}{4}$$

Un cuarto	
Como fracción	$\frac{1}{4}$
Como decimal	0,25
Como porcentaje	$0,25 \times 100 = 25 \%$

IMPORTANTE

- Toda cantidad representa el 100 %, por tanto:
Si a una cantidad le restamos el 15 %, nos queda el 85 % de la cantidad.
Si a una cantidad le sumamos el 20 % de sí misma, entonces tendremos el 120 % de la cantidad.

Ejemplos:

Observamos el siguiente ejemplo:

En la clase de matemática, Juanito completó correctamente el cuadro sobre los porcentajes.

Si pierdo	Queda
15 %	85 %
27 %	73 %
10 %	90 %
A %	$(100 - A) \%$

Si gano	Resulta
20 %	120 %
10 %	110 %
12,5 %	112,5 %
A %	$(100 + A) \%$

Explica con tus palabras cómo completó el cuadro _____

¿A qué llamamos descuentos sucesivos?

Son descuentos que se aplican uno a continuación del otro. De esta manera, la cantidad que resulta es considerada el nuevo 100 % hasta la aplicación del siguiente descuento.

Importante: los descuentos sucesivos de 20 % y 10 % no significan un descuento único de 30 %.

Ejemplo:

Si se aplican dos descuentos sucesivos de 20 % y 10 % a una tablet que cuesta 300 soles, ¿cuál será su nuevo precio?

Resolución	Primer descuento	Segundo descuento
El precio inicial es S/ 300.	$20\% \text{ de } 300 = \frac{20}{100} \times 300 = 60$ El nuevo precio es $300 - 60 = \text{S/ } 240$.	$10\% \text{ de } 240 = 24$ El precio final es $240 - 24 = \text{S/ } 216$.

¿A qué llamamos aumentos sucesivos?

Son los incrementos que se producen uno a continuación del otro, de manera que el nuevo 100 % es la cantidad que va resultando.

Importante: los aumentos sucesivos de 20 % y 25 % no significan un aumento único de 45 %.

Ejemplo:

Si el precio de una lavadora es 960 soles y se le asignan dos aumentos sucesivos de 20 % y 25 %, ¿cuál será su nuevo precio?

Resolución	Primer aumento	Segundo aumento
El precio inicial es S/ 960.	$20\% \text{ de } 960 = \frac{20}{100} \times 960 = 192$ El nuevo precio es $960 + 192 = \text{S/ } 1152$.	$25\% \text{ de } 1152 = \frac{25}{100} \times 1152 = 288$ El precio final es $1152 + 288 = \text{S/ } 1440$.

Observación

AUMENTO ÚNICO

$$AU = \left(A + B + \frac{AB}{100} \right) \%$$

Ejemplo:

¿A qué aumento único equivalen dos incrementos sucesivos de 15 % y 40 %?

RESOLUCIÓN

$$AU = \left(15 + 40 + \frac{15 \times 40}{100} \right) \% = 61\%$$

DESCUENTO ÚNICO

$$DU = \left(A + B - \frac{AB}{100} \right) \%$$

Ejemplo:

¿A qué descuento único equivalen dos descuentos sucesivos de 10 % y 30 %?

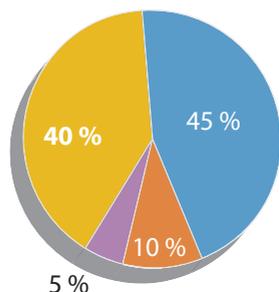
RESOLUCIÓN

$$DU = \left(10 + 30 - \frac{10 \times 30}{100} \right) \% = 37\%$$

ANALIZAMOS

- 1 Completa el siguiente cuadro para conocer los resultados de una encuesta realizada a 600 personas sobre los medios de transporte que utilizan.

Medios de transporte



■ Automóvil ■ Moto ■ Camión ■ Bicicleta

Porcentaje	Fracción	El porcentaje de S/ 600 es:
5 %	$\frac{5}{100}$	$\frac{5}{100} \times 600 = 30$
45 %		$\frac{45}{100} \times 600 =$
40 %	$\frac{40}{100}$	
10 %		$\frac{10}{100} \times 600 =$

- 2 Una colección de cuentos de Julio Cortázar cuesta S/ 833. Si en el precio está incluido el IGV, ¿cuánto será su valor original?

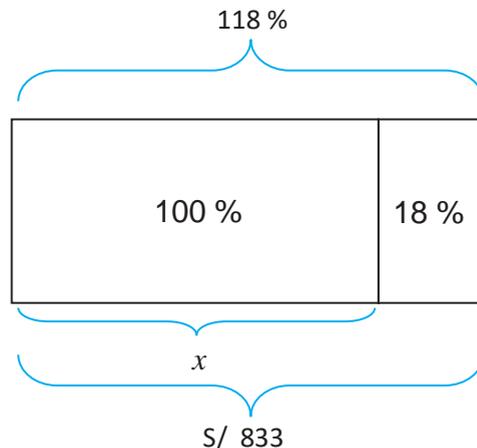
Si lo representamos gráficamente, tenemos:

El precio de la colección de cuentos con IGV (100 % + 18 %) es S/ 833.

El precio real de la colección de cuentos es x que equivale al 100 %.

Precio (S/)	Porcentaje %
833	118
x	100

$$x = \frac{100}{118}(833) = 706$$



RESPUESTA: el valor original de la colección de cuentos es de S/ 706.

- 3 Un microondas cuesta S/ 1300. Si se hacen dos descuentos sucesivos del 30 % y 10 %, ¿cuál será su nuevo precio?

Resolución	Primer descuento	Segundo descuento
El precio inicial es S/ 1300.	30 % de 1300 = 390 El nuevo precio es 1300 - 390 = S/ 910.	10 % de 910 = ----- El precio final es:

- 4 Si el precio de una moto es S/ 4800 y se le aplican dos aumentos sucesivos de 20 % y 15 %, **¿cuál será su nuevo precio?**

<p>Resolución</p> <p>El precio inicial es:</p>	<p>Primer descuento</p>	<p>Segundo descuento</p>
---	--------------------------------	---------------------------------

PRACTICAMOS

- 1 María dice que si vendiera su pulsera a 40 % menos de su valor, esta costaría S/ 12. **¿Cuál es el precio real de la pulsera?**

- a) S/ 20
- b) S/ 30
- c) S/ 50
- d) S/ 80



- 2 Gabriela quiere comprarse un vestido que cuesta S/ 260. Para adquirirlo, a ella le falta el 30 % del dinero que tiene. **¿Cuánto dinero tiene Gabriela?**

- a) S/ 100
- b) S/ 200
- c) S/ 300
- d) S/ 400

- 3 Debido a la demanda de vuelos, la aerolínea Seguros y Rápidos incrementó el costo de sus pasajes de manera sucesiva en 10 % y 40 %. **¿A qué aumento único equivalen estos dos aumentos sucesivos?**

- a) 12 %
- b) 30 %
- c) 44 %
- d) 54 %

- 4 Un automóvil cuesta \$ 20 000. Si después de un año su precio se reduce en 20 % y al año siguiente en 10 %, **¿cuál será su nuevo valor?**

- a) \$ 12 000
- b) \$ 14 400
- c) \$ 15 000
- d) \$ 16 500



- 5 De acuerdo con el problema anterior, si el automóvil recibe aumentos sucesivos de 20 % y 15 % sobre su precio original, **¿cuál será su nuevo precio?**

- a) \$ 18 000
- b) \$ 17 000
- c) \$ 23 600
- d) \$ 27 600

6 La Municipalidad de San Martín de Porres decidió construir un parque que tiene forma circular. Si se aumenta el radio del círculo en 100 %, **¿qué tanto por ciento se incrementaría el área?**

- a) 100 %
- b) 200 %
- c) 300 %
- d) 400 %

7 Joaquín quiere comprar una moto que cuesta S/ 11 900, incluido el 18 % del IGV. **¿Cuánto es el costo real de la moto?** Explica por qué razón.

- a) S/ 8900
- b) S/ 9000
- c) S/ 9500
- d) S/ 10 084,74



8 El arroz en el mercado ha bajado 20 %, pero para el próximo mes se prevé un aumento de 10 %. **¿Cuánto variará el precio con respecto al valor inicial?**

- a) 12 %
- b) 13 %
- c) 22 %
- d) 25 %

9 Anita tiene una tela de forma rectangular. Ella recorta el 10 % del ancho y 20 % del largo. La tela ahora tiene 36 m² de área. Si antes de cortarla medía 2 m de ancho, **¿cuál fue la longitud del largo antes de ser cortada?**

- a) 20 m
- b) 24 m
- c) 25 m
- d) 28 m

10 Una entidad financiera ofrece a sus clientes 6,5 % de intereses en un año. Si el señor Gómez invierte S/ 5000, **¿cuánto dinero habría ganado en intereses durante el primer año?**

- a) S/ 325
- b) S/ 435
- c) S/ 256
- d) S/ 654

Seguimos practicando.

11 Relaciona.

- a) El 20 % de 420... () 900
- b) El 25 % de 3600... () 30
- c) El 30 % de 700... () 45
- d) El 25 % del 30 % de 600... () 84
- e) 12 es el 40 % de... () 210

12 Si se compra un equipo de sonido a S/ 1500, precio que incluye el IGV, ¿cuánto es el importe que se ha pagado por este impuesto?

13 En la panadería Luchita se han preparado 160 galletitas para ser vendidas. Si después de dos horas aún quedan 116, **¿en qué porcentaje disminuyó dicha cantidad?**

- a) 35,2 %
- b) 18,7 %
- c) 4,5 %
- d) 27,5 %

14 En una tienda de ropa de moda, los precios de las prendas de vestir de algunas marcas tienen un descuento solo por hoy, pero mañana se incrementarán. **¿Cuál será el precio final en ambos casos?**

Marcas	Precio normal	Descuento por hoy día	Precio final	Aumento para mañana	Precio final
Tyfy	S/ 30	10 %		3 %	
Silve	S/ 40	5 %		2 %	
Genuino	S/ 35	10 %		3 %	
Peruano	S/ 50	15 %		5 %	
Elegante	S/ 45	20 %		4 %	
Moda	S/ 20	12 %		2 %	

15 Ayer, el costo de un Smart TV fue de S/ 3000, pero hoy su precio es de S/ 2901. **¿Cuál es el porcentaje de diferencia entre ambas cantidades?**

- a) 3,3 %
- b) 4,3 %
- c) 2,2 %
- d) 3,1 %



Matemática 2.º grado

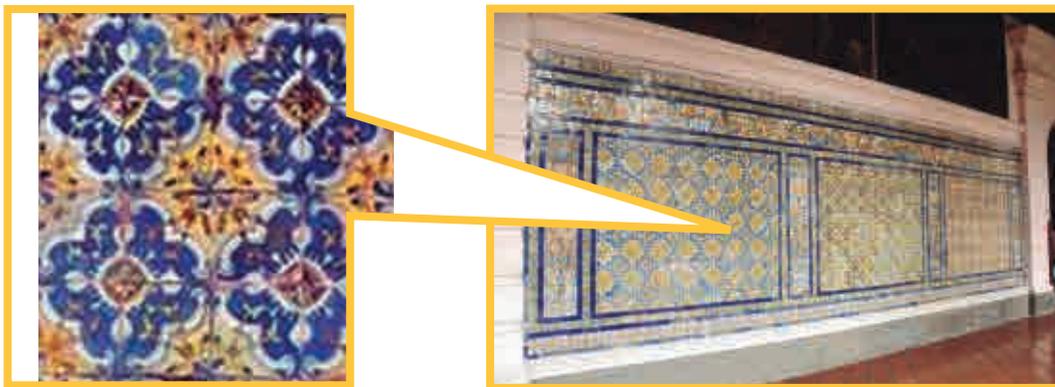
Ficha: Transformaciones geométricas con azulejos



En pleno Centro de Lima se encuentra el convento de Santo Domingo. Entre sus paredes vivieron personajes como San Martín de Porres o San Juan Macías; asimismo, en su interior se conservan los restos de Santa Rosa.

En la decoración del patio del convento se pueden observar espléndidos azulejos que fueron traídos a Lima desde Sevilla, ciudad en la que el taller de Hernando de Valladares los fabricó. Los azulejos sevillanos fueron colocados utilizando algunas transformaciones geométricas.

El enorme claustro está decorado con azulejos en todas sus paredes hasta una altura de 240 cm, que culminan en una cenefa en la que se representan los grandes personajes de la orden dominica. En los amplios paneles de azulejos sevillanos se intercalan algunos de tipo limeño, que se caracterizan por una superficie más porosa y sin el vidriado de los españoles.



Responde las siguientes preguntas:

1 ¿Cómo son las figuras que ves en los azulejos?

2 ¿Se pueden observar cambios de posición con respecto a una figura determinada en los diseños de los azulejos?

3 ¿Qué se entiende por “transformaciones geométricas”?

4 ¿Qué transformaciones geométricas se han aplicado en las paredes del convento de Santo Domingo?

5 ¿Conoces otros tipos de transformaciones geométricas?

Respecto de la situación planteada sobre los azulejos del convento de Santo Domingo en Lima, se observa que los diseños utilizados en las paredes están formados por cuatro azulejos, con los cuales, para la decoración de toda la superficie, se aplican las siguientes transformaciones geométricas: traslación, rotación y simetría.

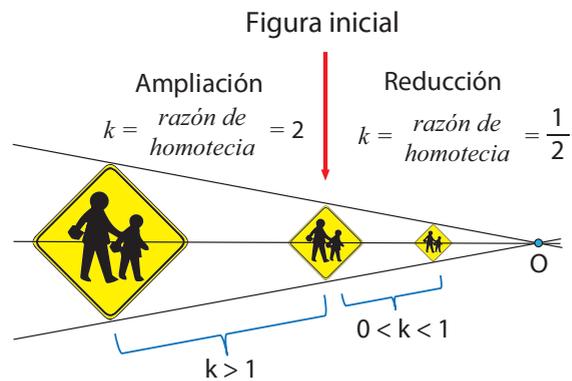
APRENDEMOS

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

<p>TRASLACIÓN</p>	<p>Es una transformación geométrica que se realiza en el plano. En ella, las figuras solo cambian su posición; es decir, solo varía el lugar. Su orientación, tamaño y formas se mantienen.</p>	
<p>ROTACIÓN O GIRO</p>	<p>Es una transformación en la que se efectúan movimientos de la figura alrededor de un punto fijo en el plano. En las rotaciones las figuras conservan su forma, tamaño y ángulos. Si el giro es en sentido antihorario, el ángulo de rotación será positivo, y el ángulo será negativo cuando el giro sea en sentido horario.</p>	<p>Rotación horario 90°</p>
<p>SIMETRÍA</p>	<p>Es aquella transformación que invierte los puntos y figuras del plano. Puede ser respecto de un punto (simetría central o puntual) o respecto de una recta (simetría axial).</p>	<p>La cancha de fútbol es simétrica.</p>

HOMOTECIA

Es la transformación geométrica que no tiene una imagen congruente, ya que, a partir de una figura dada, se obtiene una o varias figuras en tamaño mayor o menor que la figura inicial. Para ello se parte de un punto escogido arbitrariamente, el cual se llama centro de homotecia (O). Desde él se trazan tantos segmentos de recta como vértices tenga la figura que se va a transformar. Se debe considerar la razón de homotecia (k), que viene a ser la escala en la que se realiza la reproducción.



ANALIZAMOS

1 Señala el centro (O) y la razón de homotecia en los siguientes casos:

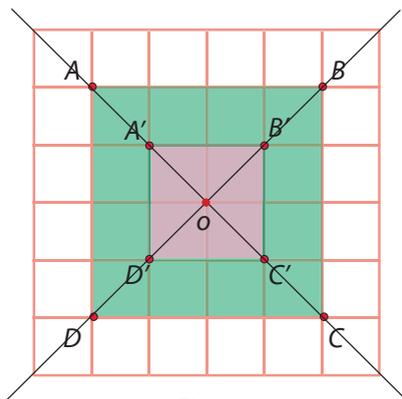


Fig. 1

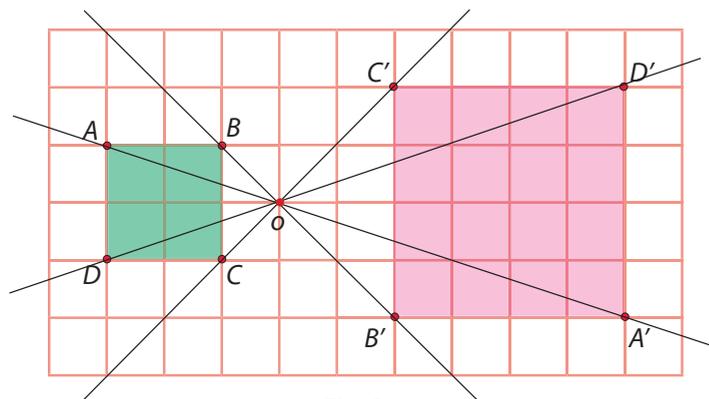


Fig. 2

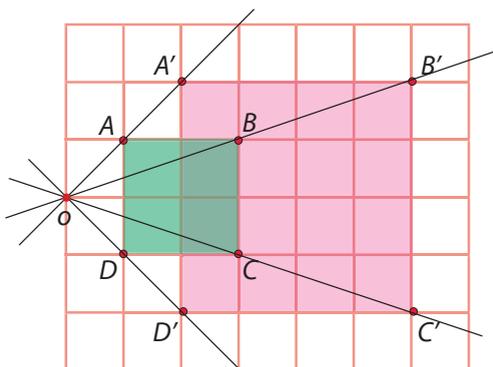


Fig. 3

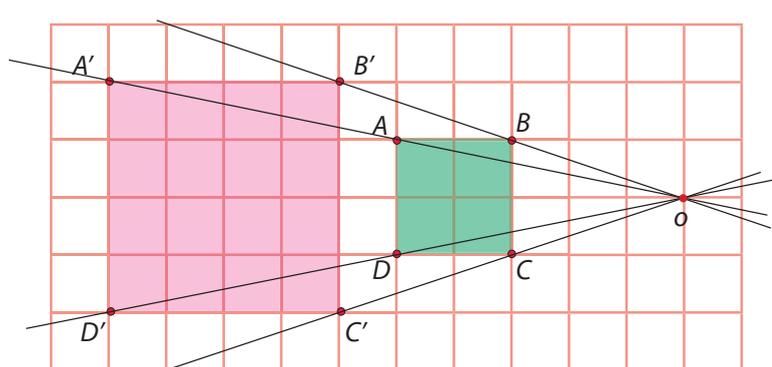


Fig. 4

RESOLUCIÓN

Se considera a los cuadrados ABCD como figura original y a los cuadrados A'B'C'D' como figura transformada, de acuerdo con una razón.

Para determinar el centro de homotecia, trazamos rectas que pasen por los vértices A y A', B y B', y así, sucesivamente; el punto de intersección será el centro de homotecia (punto O).

La razón de homotecia (k) se calcula así:

$$\frac{\text{Medida del lado transformado}}{\text{Medida del lado original}} = \frac{\overline{mA'B'}}{\overline{mAB}} = \frac{\overline{mB'C'}}{\overline{mBC}} = \frac{\overline{mC'D'}}{\overline{mCD}} = \frac{\overline{mA'D'}}{\overline{mAD}} = k$$

En la figura 1: $k = \frac{\overline{mA'B'}}{\overline{mAB}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $k = \frac{\overline{mB'C'}}{\overline{mBC}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Entonces la razón de homotecia siempre es la misma, al relacionar cualquiera de los lados homólogos.

Si los vértices están a un mismo lado del centro de homotecia (O), se dice que la homotecia es directa; por lo tanto, la razón será positiva.

Si los vértices están a distinto lado del centro de homotecia (O), se dice que la homotecia es inversa; por lo tanto, la razón será negativa.

Entonces:

En la figura 1, la razón de homotecia es $\frac{1}{2}$, entonces la homotecia es directa (positiva).

En la figura 2, la razón de homotecia es -2, entonces la homotecia es inversa (negativa).

En la figura 3, la razón de homotecia es 2, entonces la homotecia es directa (positiva).

En la figura 4, la razón de homotecia es _____, entonces _____.

2 Observa esta figura:



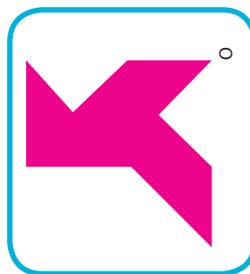
¿Cuál de las siguientes figuras se obtiene al aplicar una rotación de centro O y ángulo de giro de 90° a la figura inicial?



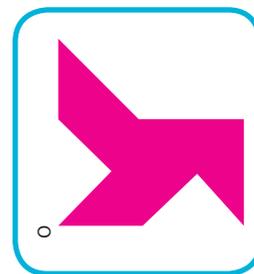
(a)



(b)



(c)



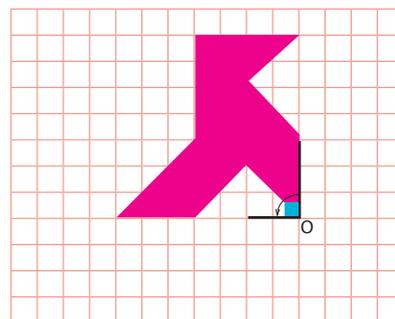
(d)

RESOLUCIÓN

Cuando no se indica el sentido de giro, se entiende que es antihorario (+).

Desde el punto O, se hace el giro de 90° con ayuda del transportador.

Por tanto, la respuesta es la figura C.



- 3 Se desea enchapar el piso del parque municipal con el siguiente diseño. ¿Podrías determinar qué tipo de transformación geométrica se realizó para ubicar las piezas desde la posición A hasta la posición F?

RESOLUCIÓN

Desde la posición A hasta la posición F, la transformación geométrica utilizada ha sido la rotación con respecto a un punto y la traslación.

Desde A y la traslación hasta B: rotación 60° , antihorario

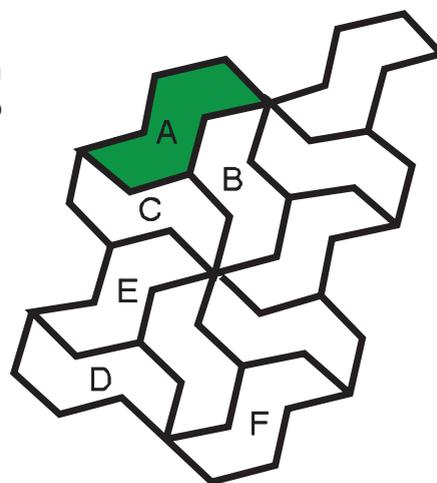
Desde B hasta C: rotación 60° , antihorario

Desde C hasta D: traslación

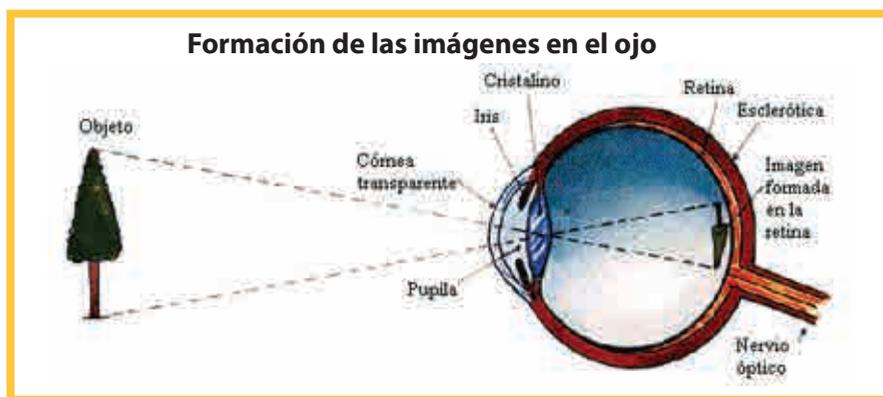
Desde C hasta E: _____

Desde E hasta D: rotación 60° , horario

Desde E hasta F: _____



- 4 Cristian investiga para la clase de CTA sobre la formación de las imágenes en el ojo, y ha encontrado la siguiente información:



A partir de la imagen, se da cuenta de que el árbol observado se refleja en nuestra retina de forma invertida. ¿Qué transformación geométrica se presenta en la formación de las imágenes en el ojo? ¿Serán semejantes los dos árboles mostrados en la imagen?

RESOLUCIÓN

La transformación geométrica es la homotecia inversa, por lo tanto, la razón de homotecia es negativa. Los objetos observados sí son semejantes porque tienen la misma forma, pero tienen diferente tamaño.

PRACTICAMOS

1 Considera la siguiente figura:



- I. Q es una traslación de P.
- II. R es una rotación en 180° de P.
- III. S es un rotación en 180° de R.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- a) Solo II.
 - b) Solo III.
 - c) Solo I y II.
 - d) Solo II y III.
- 2 Por el aniversario de la I. E. Juan Pablo II, se convocó un concurso de diseños artísticos y quedaron tres finalistas. **Relaciona los diseños finalistas con el tipo de transformación geométrica utilizado.**



Fig. 1

Traslación



Fig. 2

Rotación

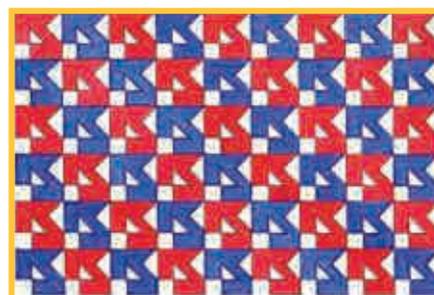


Fig. 3

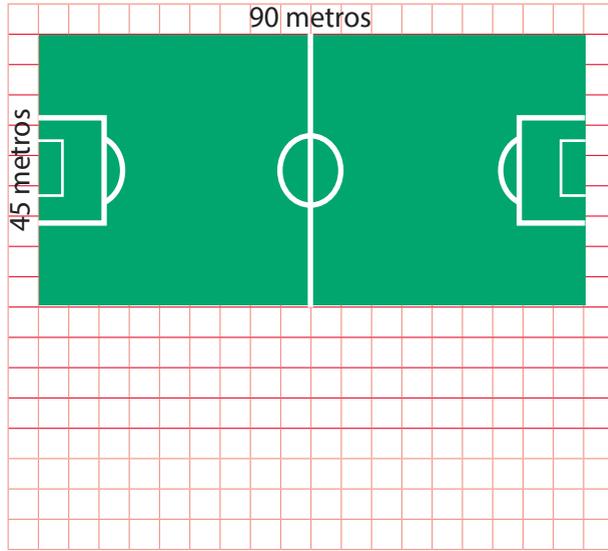
Homotecia

- I. Fig. 3 - homotecia.
- II. Fig. 1 - rotación.
- III. Fig. 3 - traslación.
- IV. Fig. 2 - homotecia.

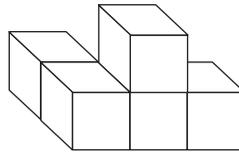
- a) Solo I.
- b) Solo I y II.
- c) Solo II, III y IV.
- d) Solo I, II y III.

3 La figura muestra las medidas del campo de fútbol de una asociación comunal. Felipe quiere realizar la representación reduciendo las medidas a su tercera parte. Grafica el campo de fútbol y responde: **¿cuánto mide el perímetro del campo reducido?**

- a) 60 m
- b) 90 m
- c) 135 m
- d) 270 m



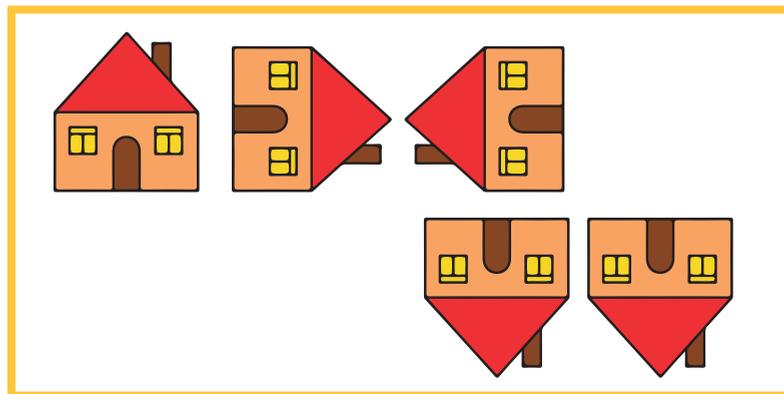
4 Observa la siguiente figura:



¿Cuál es la figura rotada de la figura anterior?

- a)
- b)
- c)
- d)

5 Encuentra el patrón con el que fueron generadas las figuras. **¿Cuál sería la figura que sigue?**



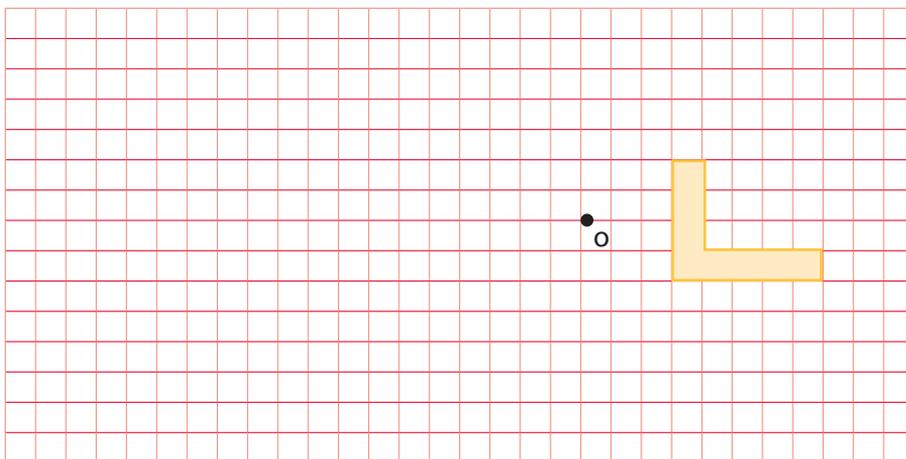
- a)
- b)
- c)
- d)

- 6 Si a la siguiente figura le haces una homotecia cuyo centro sea O y su razón sea -2 , representa la figura que obtendrías dentro de la cuadrícula y determina su perímetro.

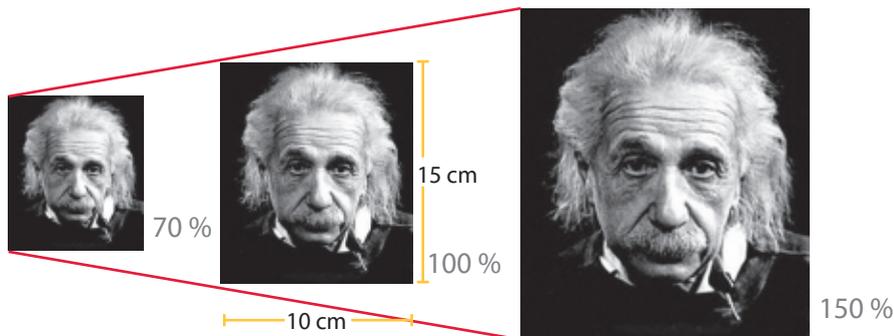
Considera lo siguiente:



- a) 100 cm
- b) 150 cm
- c) 180 cm
- d) 200 cm



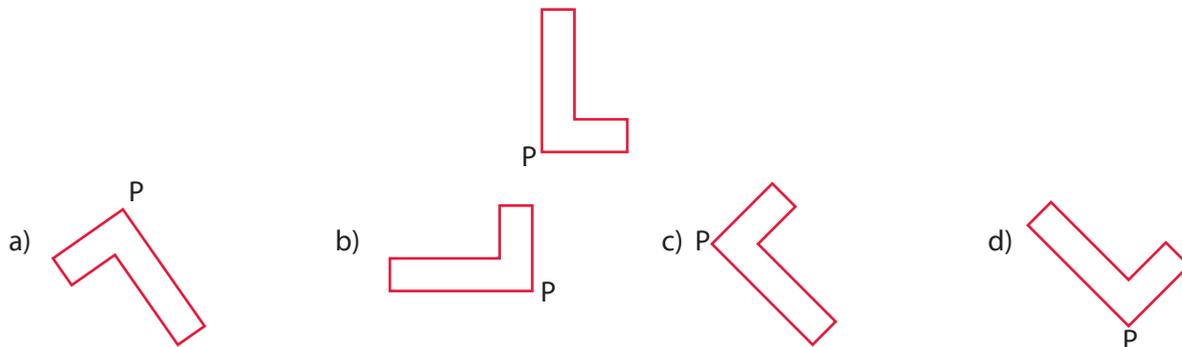
- 7 Al fotocopiar la fotografía de Albert Einstein, con la finalidad de colocarla en el periódico mural del aula de segundo grado de Secundaria, se pidió una reducción de la imagen, pero la encargada de fotocopiar dicha foto programó, por error, la fotocopiadora con un zoom de 150 %.



Con esta información, responde las preguntas 7 y 15.

¿Cuáles serían las dimensiones de la fotografía obtenida?

- a) 30 cm \times 20 cm
 - b) 25 cm \times 8 cm
 - c) 22,5 cm \times 15 cm
 - d) 20 cm \times 10 cm
- 8 **¿Cuál de las siguientes alternativas representa una rotación de la figura en 45° con centro P?**



- 9 Con el transportador, determina el ángulo de giro de las figuras mostradas. Relaciona las figuras con la medida de dicho ángulo.

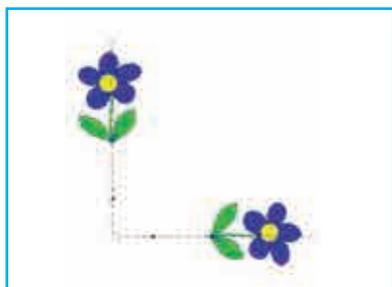


Fig. 1

45°



Fig. 2

135°

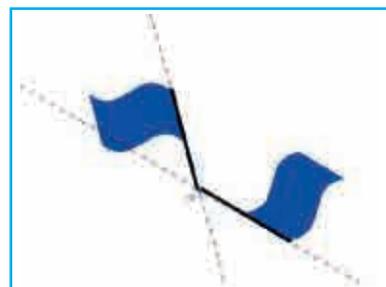


Fig. 3

90°

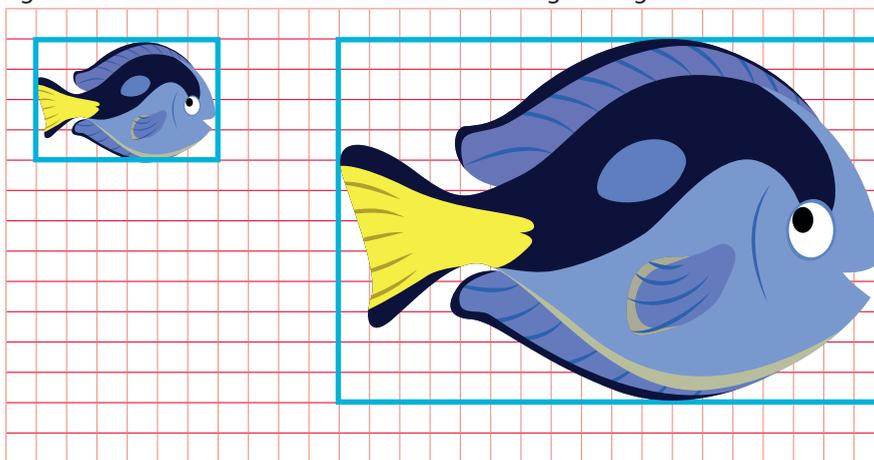
- I. Fig. 3 - 45°
- II. Fig. 1 - 90°
- III. Fig. 2 - 45°
- IV. Fig. 3 - 135°

- a) Solo I.
- b) Solo II, III y IV.
- c) Solo I y III.
- d) Solo I, II y III.

- 10 El siguiente gráfico muestra la reproducción de una imagen realizada con un pantógrafo, que es un dispositivo mecánico empleado para hacer ampliaciones o reducciones de dibujos.

Figura transformada.

Figura original.

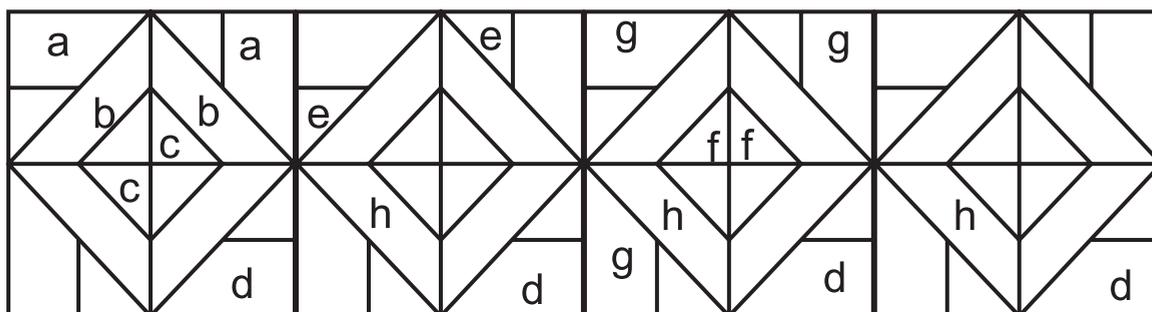


¿Cuál es la razón de homotecia?

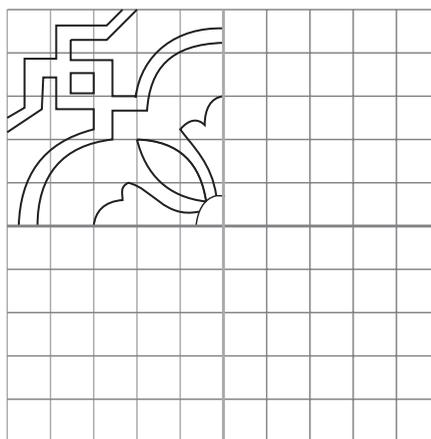
- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) 2
- d) 3

Seguimos practicando

- 11 Observa la siguiente imagen y colorea las figuras que tienen una misma letra en su parte interior, de acuerdo con la transformación geométrica correspondiente: traslación de color verde, rotación de rojo y simetría de amarillo.



- 12 Usa la siguiente cuadrícula y dibuja el mosaico mostrado. Sombrea de modo que el conjunto sombreado reproduzca la composición dada.



Sector A

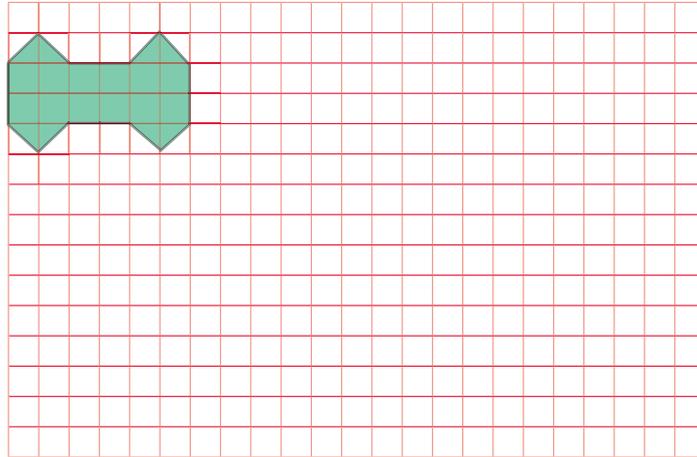
Sector C

Sector B

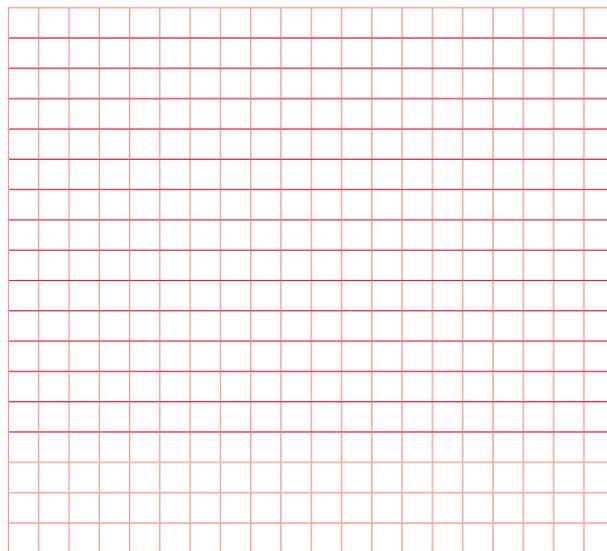
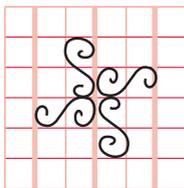
a) ¿Qué tipo de transformación geométrica has empleado en el sector A?

b) ¿Qué tipo de transformación geométrica has empleado en el sector B?

- 13 A partir del diseño mostrado, completa toda la cuadrícula utilizando las transformaciones geométricas más convenientes.



- 14 Gerardo necesita cercar su jardín, así que decide elaborar una reja utilizando las transformaciones geométricas. Diseña dos modelos diferentes de reja decorativa a partir de la figura mostrada, similares al diseño de abajo.



- 15 Si se programa la fotocopidora a 70 %, **¿cuáles serían las dimensiones de la fotografía obtenida?**

- a) 10,5 cm × 7 cm
- b) 9 cm × 6 cm
- c) 7,5 cm × 5 cm
- d) 6 cm × 5 cm

Matemática 2.º grado

Ficha: Carrera entre amigos



— 10 m —

100 m

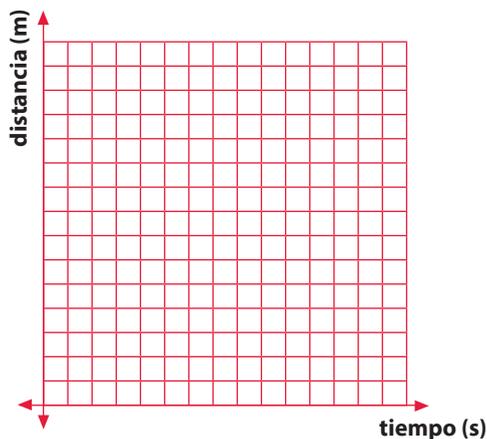
Mauricio le propone a su amigo Héctor hacer una carrera de 100 metros. Como Mauricio es atleta, le da a su amigo una ventaja de 10 metros (para calcular las medidas de las distancias, ellos aprovechan que en la pista atlética de su colegio las distancias están indicadas). Si Héctor recorre 4 metros por cada segundo y Mauricio 6 metros en el mismo tiempo, además, estas velocidades son constantes en todo el recorrido, entonces:

1 ¿En cuánto tiempo alcanzará Mauricio a su amigo Héctor?

2 Establece la expresión matemática que representa la distancia que recorre cada uno de ellos en un determinado tiempo e identifica la función lineal y la función afín.

3 ¿En cuánto tiempo terminará cada uno la carrera?

4 Grafica el recorrido de los dos amigos en un diagrama cartesiano e identifica la función lineal y la función afín.



5 ¿Durante cuánto tiempo Mauricio correrá detrás de su amigo Héctor si tomamos el tiempo a partir de la ventaja de diez metros que lleva Héctor?

6 ¿Durante cuánto tiempo Mauricio irá delante de su amigo Héctor si tomamos el tiempo a partir de la ventaja de diez metros que lleva Héctor?

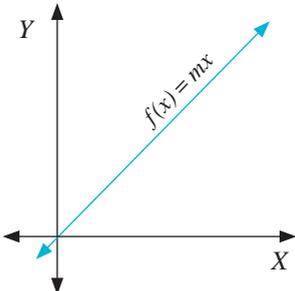
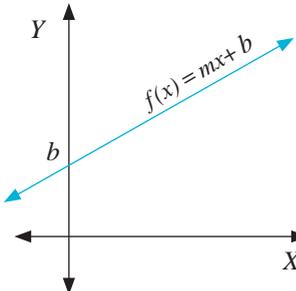
7 ¿En qué tiempo Mauricio perderá por tres metros si tomamos el tiempo a partir de la ventaja de diez metros que lleva Héctor?

8 ¿En qué tiempo Mauricio irá ganando por ocho metros si tomamos el tiempo a partir de la ventaja de diez metros que lleva Héctor?

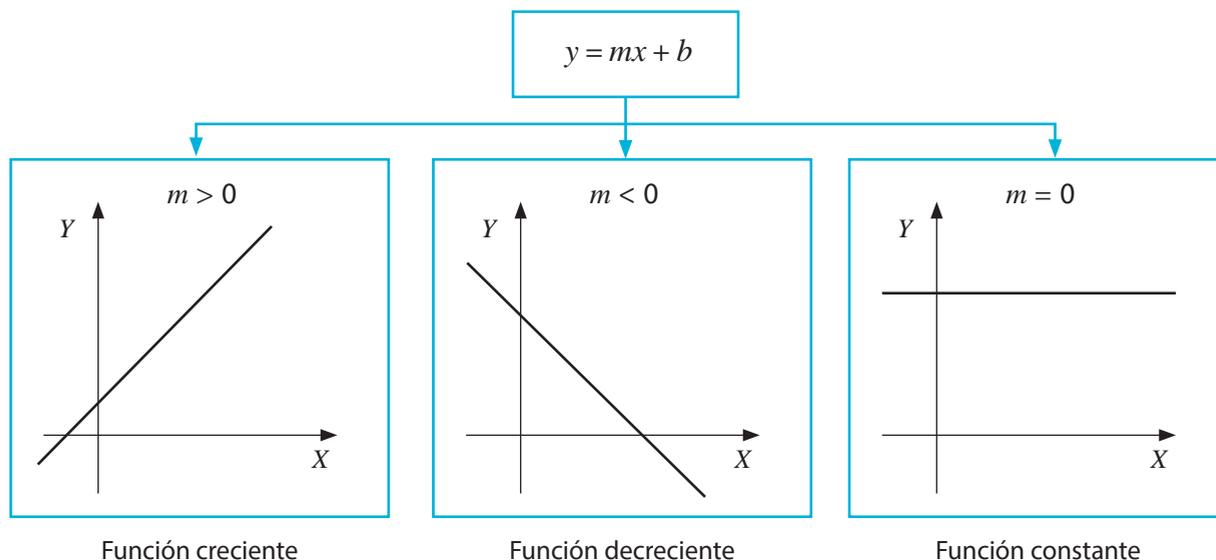
Con respecto a la situación planteada en “Carrera entre amigos”, pretendemos que modeles la situación dada y diferencies una función lineal de una función lineal afín. Asimismo, que te des cuenta de la necesidad de las ecuaciones para responder algunas interrogantes.

APRENDEMOS

FUNCIÓN LINEAL Y FUNCIÓN LINEAL AFÍN

Función lineal	Función afín
$f(x) = mx$ (notación de función) $y = mx$ (notación de ecuación)	$f(x) = mx + b$ (notación de función) $y = mx + b$ (notación de ecuación)
<ul style="list-style-type: none"> › Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas (0; 0). › m es la pendiente de la recta e indica la inclinación de la recta con respecto al eje X. 	<ul style="list-style-type: none"> › Su gráfica es una recta que no pasa por el origen de coordenadas. › m es la pendiente de la recta e indica la inclinación de la recta con respecto al eje X. › b es la ordenada en el origen. Es decir, la recta corta al eje de ordenadas en el punto (0; b).
<ul style="list-style-type: none"> › El conjunto de valores que toma x se llama dominio. › El conjunto de valores que toma y se llama conjunto imagen o rango. 	
› Su gráfico es el siguiente: 	› Su gráfico es el siguiente: 

Continuemos analizando la pendiente de una recta.

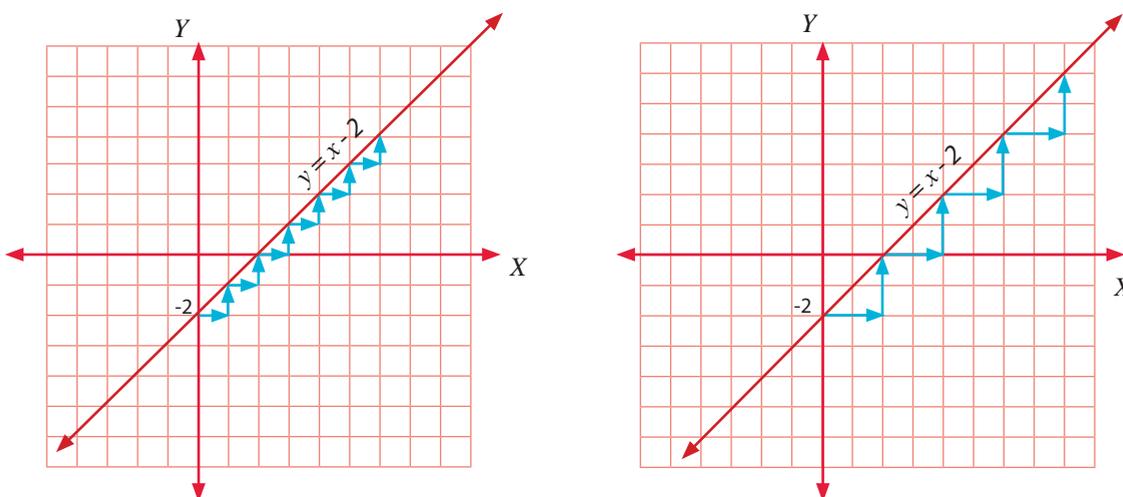


Podemos distinguir que la pendiente indica el número de unidades que incrementa o disminuye y cuando x aumenta. La ordenada al origen es la distancia del origen al punto $(0; b)$, este punto se encuentra sobre el eje Y , además, es la intersección con la recta.

Ejemplos:

a) $y = x - 2$

En este ejemplo la recta interseca el eje de ordenada en -2 y su pendiente es 1 , lo cual nos indica que cuando la abscisa aumenta 1 unidad, la ordenada también aumenta 1 unidad; luego, cuando la abscisa aumenta 2 unidades, la ordenada aumenta 2 unidades; etc.

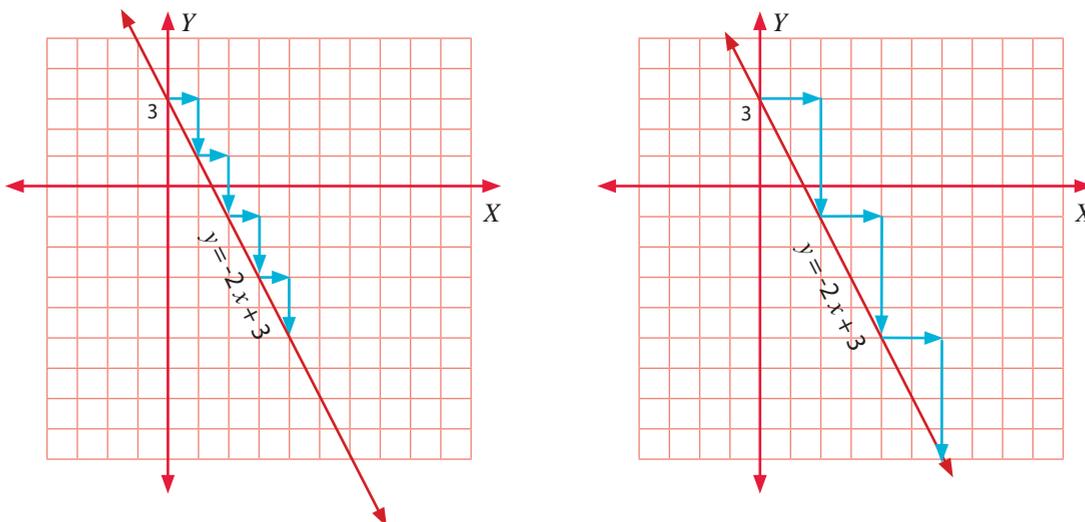


$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \dots = 1 = m$$

Observamos que los cocientes entre la variación de la ordenada y la variación de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente.

b) $y = -2x + 3$

En este ejemplo, la recta intersecta el eje de ordenada en 3 y su pendiente es -2, la cual nos indica que cuando la abscisa aumenta 1 unidad, la ordenada disminuye 2 unidades; luego, cuando la abscisa aumenta 2 unidades, la ordenada disminuye 4 unidades, etc.



$$\frac{-2}{1} = \frac{-4}{2} = \frac{-6}{3} = \dots = -2 = m$$

Observamos que los cocientes entre la variación de la ordenada y la variación de la abscisa son constantes e iguales al valor de la pendiente.

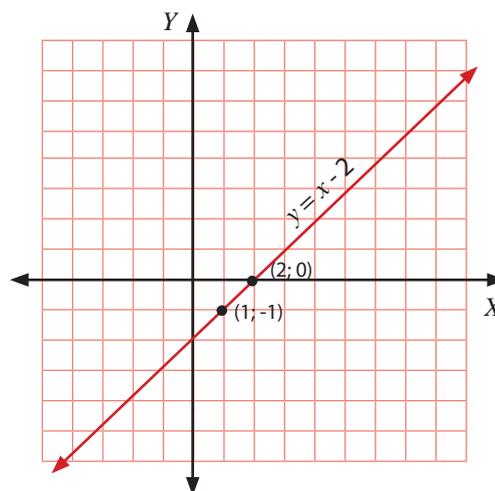
Para graficar una función lineal, es suficiente conocer la ordenada en el origen y la pendiente. Además, podemos graficarla de otra forma, empleando representaciones tabulares, como se aprecia en el siguiente ejemplo:

$y = x - 2$

x	y
1	-1
2	0

Dom (f) = R

Ran (f) = R



ANALIZAMOS

1 Un automóvil tiene 8 años de antigüedad y su valor actual es de S/ 20 000, pero hace 4 años su valor era de S/ 45 000. Si el valor del sistema varía de forma lineal con el tiempo, determina:

- ¿Cuál es el modelo matemático que expresa el valor del automóvil con respecto al tiempo transcurrido?
- ¿Cuál fue el costo inicial del automóvil?
- ¿Cuál será su valor después de diez años de antigüedad?
- ¿Cuál es la depreciación del sistema por año?
- ¿Dentro de cuántos años aproximadamente el valor del sistema será nulo, considerándolo contablemente?

Grafica en el plano cartesiano el modelo matemático encontrado.

RESOLUCIÓN

a) Para hallar el modelo matemático, antes completamos la siguiente tabla, teniendo en cuenta que varía linealmente.

		25 000					
Valor (S/)	20 000	26 250	32 500	38 750	45 000	...	70 000
Tiempo	8	7	6	5	4	...	0
		4					

Si al valor en soles del automóvil le asignamos la letra v y al tiempo t .

El modelo matemático es: $v = -6250 \cdot t + 70\,000$

- Del modelo matemático, su costo inicial fue de 70 000 soles.
- Si reemplazamos en el modelo matemático el valor de 10 en t , obtenemos: $v = 7500$
Su valor será de 7500 soles.
- La depreciación del sistema por año es de 6250 soles.
- Hacemos $v = 0$ y obtenemos la ecuación: $-6250 \cdot t + 70\,000 = 0$

$$t = 11,2$$

Luego, el tiempo aproximado será de 12 años.

f. Su gráfico es:



- 2 El gimnasio Power Gym cobra un derecho de inscripción de 260 soles y una mensualidad de 120 soles, mientras que el gimnasio Gym Extreme cobra 140 soles por derecho de inscripción y 160 soles de mensualidad. Ambos gimnasios se ubican en la misma avenida y tienen instalaciones semejantes y las mismas máquinas. **¿Por cuántos meses se paga la misma cantidad en ambos gimnasios?**

RESOLUCIÓN

- a) Determinamos la función de lo que se paga en Power Gym en t meses.

$$P(t) = 260 + 120t$$

- b) Determinamos la función de lo que se paga en Gym Extreme en t meses.

$$P(t) = 140 + 160t$$

- c) Igualamos ambas funciones para averiguar por cuántos meses se paga lo mismo en los dos gimnasios.

$$260 + 120t = 140 + 160t$$

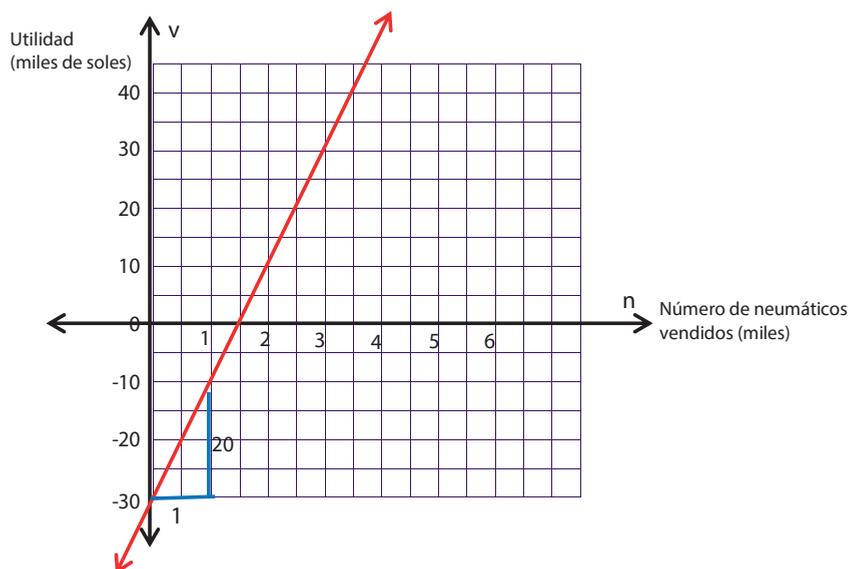
Luego: $t = 3$ meses.

- 3 La utilidad anual en soles de un almacén de neumáticos está representada por u y puede estimarse por medio de la función $u(n) = 20n - 30\,000$, en la que n es el número de neumáticos vendidos por año.

- a) Dibuja una gráfica de la utilidad, en relación con los neumáticos vendidos anualmente.
 b) Estima el número de neumáticos que se deben vender para que la compañía no pierda ni gane.
 c) Estima el número de neumáticos vendidos, si la compañía tuvo una utilidad de 70 000 soles.

RESOLUCIÓN

- a) Comprendemos el problema: el número de neumáticos vendidos representa la variable independiente, la cual ponemos en el eje horizontal, mientras que en el eje vertical ubicamos la utilidad que representa la variable dependiente. Si 30 000 representa la ordenada en el origen y 20 la pendiente, entonces el gráfico será el siguiente:



b) Para estimar el número de neumáticos que se deben vender para que la compañía no gane ni pierda hacemos $v = 0$

$$0 = 20n - 30\,000$$

$$n = 1500$$

RESPUESTA: se deben vender 1500 neumáticos.

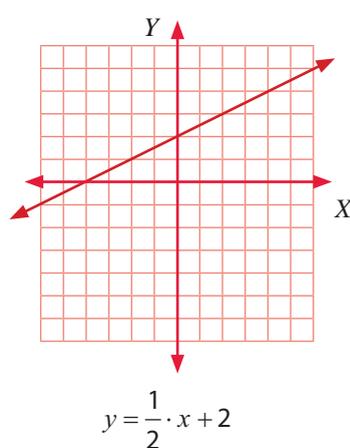
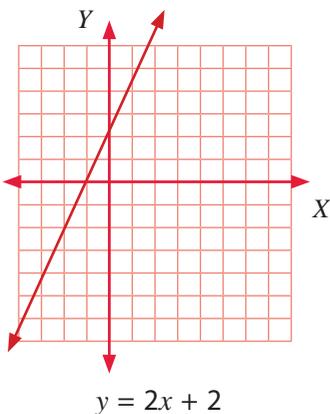
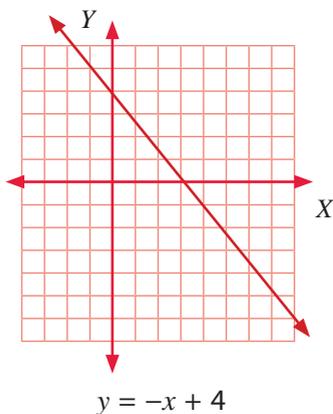
c) En este caso reemplazamos $v = 70\,000$

$$70\,000 = 20n - 30\,000$$

$$n = 5000$$

RESPUESTA: se han vendido 5000 neumáticos.

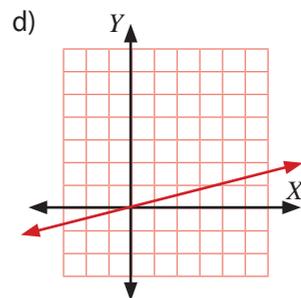
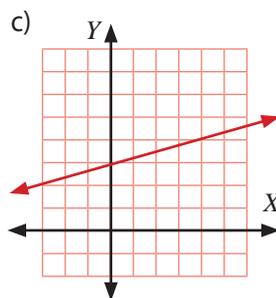
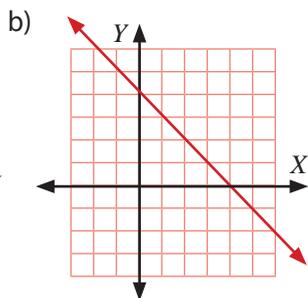
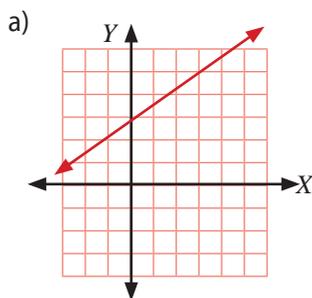
4 Determina la función de cada gráfico, usando la pendiente y la ordenada en el origen.



PRACTICAMOS

1 Una empresa vende un producto en S/ 65 la unidad. Los costos por unidad son de S/ 20 por materiales y S/ 27,50 por trabajo. Los costos fijos anuales son de S/ 100 000. **¿Cuál es la función de la utilidad de la empresa y cuánta utilidad se obtuvo si la venta anual fue de 20 000 unidades?**

2 **¿Cuál de los siguientes gráficos representa la función afín: $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$?**



- 3 Jorge consigue un trabajo en telefonía móvil, en el que le pagan diariamente. Por día, recibe 15 soles; adicionalmente le dan 2 soles por cada chip de celular que vende. **¿Cuál es el modelo matemático que representa dicha situación? ¿Cuántos chips de celular vendió si recibió ese día la suma de 43 soles?**
- a) $f(x) = 15x + 2$; 8 chips.
 b) $f(x) = 15 + 2x$; 14 chips.
 c) $f(x) = 15 + 2x$; 29 chips.
 d) $f(x) = 2x$; 21 chips.
- 4 Un técnico en computación pone un negocio de reparación de computadoras y asesoría en cómputo. Después de formular cálculos, estima que el costo mensual para mantener el negocio se describe con la siguiente ecuación: $y = 20x + 460$, donde x es el número de clientes. Asimismo, concluye que sus ingresos mensuales son representados con la siguiente ecuación: $y = 65x - 1700$. **¿Cuántos clientes necesita para no ganar ni perder dinero y cuánto ganaría si tuviera 74 clientes?**
- a) 48 clientes; 1170 soles.
 b) 28 clientes; 1170 soles.
 c) 26 clientes; 1170 soles.
 d) 84 clientes; 1170 soles.

El delfín mular o pico de botella

El delfín mular mide 1,5 m al nacer y pesa alrededor de 30 kg. Durante su juventud es amamantado por un periodo de 15 meses, al final del cual mide 2,7 m y pesa 375 kg.



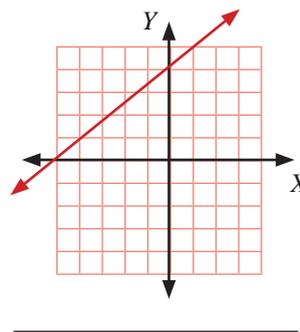
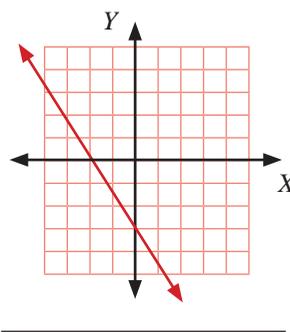
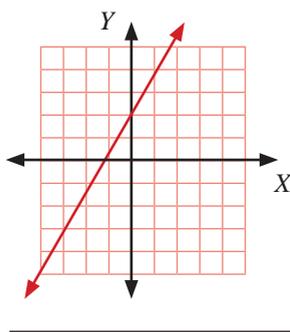
- 5 Siendo L la longitud en metros y P el peso en kilogramos de un delfín mular de t meses, expresa L en términos de t , si la relación entre L y t es lineal.
- a) $L = \frac{2}{25} \cdot t + \frac{3}{2}$ b) $L = \frac{1}{25} \cdot t + \frac{3}{2}$ c) $L = \frac{25}{2} \cdot t + \frac{2}{3}$ d) $L = \frac{2}{25} \cdot t + \frac{1}{2}$
- 6 De acuerdo con la información brindada acerca del delfín mular, **¿cuál es el aumento diario de la longitud para un delfín joven?**
- a) 0,0267 m
 b) 0,00267 m
 c) 0,00276 m
 d) 0,0276 m

- 7 El precio de una radio es de S/ 200 al contado, pero si se cancela en cuotas, deberá pagarse un interés mensual fijo de S/ 11. **¿Cuál es la expresión matemática que representa la relación del costo de la radio con el número de cuotas? ¿Cuánto debe pagarse en 12 cuotas?**
- a) $y = 11x$; 132 soles.
 - b) $y = 200 + 11x$; 200 soles.
 - c) $y = 200 + 11x$; 332 soles.
 - d) $y = 200 + 11x$; 211 soles.
- 8 Una empresa en la que se fabrican computadoras debe cancelar, por concepto de luz, agua y renta del local, una cantidad mensual fija de S/ 2500. Por otro lado, cada computadora que se produce genera un gasto de S/ 900 en materia prima y S/ 350 en mano de obra. Si la empresa vende cada computadora a S/ 1500, **¿cuál será la utilidad que resulte de vender 300 computadoras al final del mes?**
- a) S/ 102 500
 - b) S/ 72 500
 - c) S/ 267 500
 - d) S/ 75 200
- 9 La entrada para un parque de diversiones cuesta S/ 50 por adulto y S/ 25 por niño. Durante un día ingresaron 300 personas y pagaron en total S/ 12 250. **¿Cuántos niños y adultos ingresaron al parque?**
- a) 190 adultos y 110 niños.
 - b) 110 adultos y 190 niños.
 - c) 50 adultos y 25 niños.
 - d) 245 adultos y 490 niños.
- 10 En un torneo deportivo 38 personas están jugando 13 partidos de tenis de mesa. Mientras que algunos partidos son individuales, es decir, dos personas participan en él, otros son dobles, por lo que cuatro personas lo practican. **¿Cuántos partidos individuales y dobles se están jugando?**
- a) 24 partidos individuales y 14 dobles.
 - b) 14 partidos individuales y 24 dobles.
 - c) 7 partidos individuales y 6 partidos dobles.
 - d) 6 partidos individuales y 7 partidos dobles.

Seguimos practicando

11 Un autobús sale de la ciudad de Lima y se dirige a Huancayo a una velocidad promedio de 80 km/h. Una hora después, parte otro autobús, también de la ciudad de Lima y con la misma dirección y destino que el anterior, a una velocidad promedio de 90 km/h. **¿En cuánto tiempo y a qué distancia de la ciudad de Lima alcanzará el segundo autobús al primero?**

12 Determina la función de cada gráfico usando la pendiente y la ordenada en el origen.



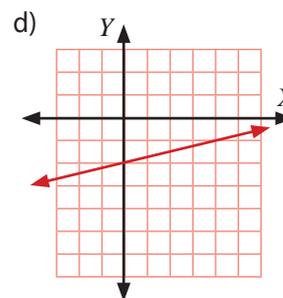
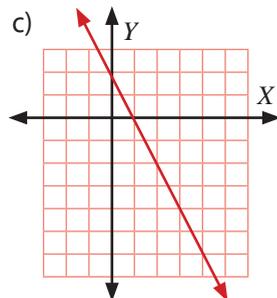
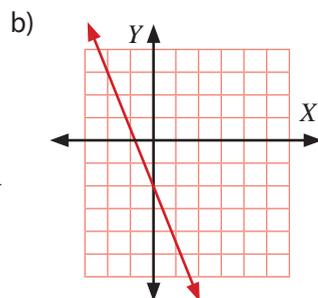
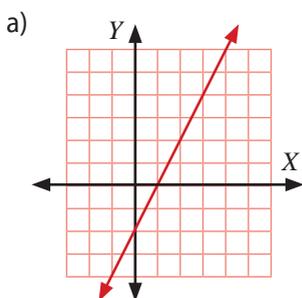
13 Si a los lados de un cuadrado de 3 centímetros de longitud se le aumentan x centímetros a cada lado, responde:

- a) ¿Cuál es la función que relaciona el perímetro con el lado del cuadrado original?
- b) Si el perímetro del nuevo cuadrado fue de 104 cm, ¿cuántos centímetros se le aumentó a cada lado del cuadrado original?
- c) Representa el gráfico de la función.

14 La renta de dos casas en un año es de S/ 7360. **¿Cuál fue la renta mensual de cada casa si entre ellas hubo una diferencia de 120 soles, además, la casa con la renta más alta estuvo desocupada dos meses?**

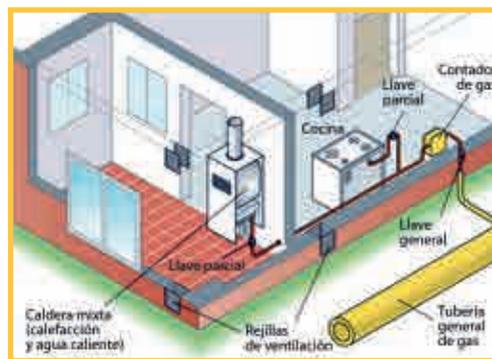
- a) 280 y 400 soles.
- b) 120 y 240 soles.
- c) 380 y 500 soles.
- d) 61 y 181 soles.

15 ¿Cuál de los siguientes gráficos representa la función lineal afín $y = -3x - 2$?



Matemática 2.º grado

Ficha: Economizamos con el gas natural



Cada vez serán más los peruanos que empiecen a disfrutar de las ventajas de contar con gas natural (GN) en sus hogares. La compañía encargada tiene un plan de expansión, el cual consiste en ampliar la cobertura en 25 distritos de Lima. Por ello, el primer día de noviembre empezaron las instalaciones en 24 viviendas; al segundo día, en 50 viviendas; el tercer día, en 76 viviendas; al cuarto día, en 102 viviendas; y así sucesivamente.

Responde las siguientes preguntas:

- 1 Anota en el siguiente cuadro la cantidad de viviendas en las que se instaló gas natural desde el primer hasta el décimo día.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º de viviendas con gas										

- 2 Encuentra un patrón para averiguar la cantidad de viviendas que ya tienen gas natural relacionada con los días transcurridos.

- 3 ¿Cuántas viviendas ya tienen gas natural desde el 1 hasta el 25 de noviembre?

- 4 Si este año la empresa trabajará hasta el 20 de diciembre, ¿en cuántas viviendas instalará gas natural?

APRENDEMOS

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una sucesión de números es una progresión aritmética cuando cada término se obtiene al sumar al anterior un número fijo llamado diferencia de la progresión. Por lo tanto, en una progresión aritmética, la diferencia entre dos términos consecutivos siempre es la misma.

El n -ésimo término de una progresión es la regla que determina cómo se calculan los términos de la progresión.

En los siguientes ejemplos deduciremos el término n -ésimo de una progresión aritmética.

Sea la Progresión Aritmética: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n$

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_1 + d + d + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_1 + d + d + d + d = a_1 + 4d$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Fórmula para hallar el n -ésimo término.

Ejemplo 1:

Halla el décimo término de la siguiente progresión aritmética: 26, 30, 34, 38, 42,...

Resolución:

$$a_1 = 26 \text{ y } d = 4$$

$$a_{10} = a_1 + 9 \cdot d = 26 + 9(4), \text{ luego, } a_{10} = 26 + 36$$

$$a_{10} = 62$$

Ejemplo 2:

Halla el octavo término de la siguiente P. A.: 42, 37, 32, 27,...

Resolución:

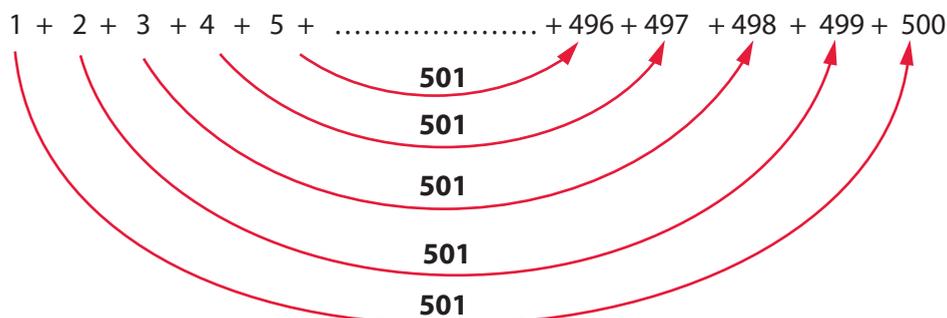
$$a_1 = 42 \text{ y } d = -5$$

$$a_8 = 42 + 7(-5), \text{ luego, } a_8 = 42 - 35$$

$$a_8 = 7$$

Suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética

Para obtener la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética, basta con observar en un ejemplo que las sumas de los términos, primero + último, segundo + penúltimo... siempre dan el mismo resultado. Por ejemplo:



Como cada par de números suma 501 y hay 250 parejas (la mitad de los términos que se suman), la suma total es $(501) \cdot (250) = 125\,250$.

La fórmula general para obtener la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es la siguiente:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) \cdot n$$

Donde:

a_1 : primer término

a_n : término n

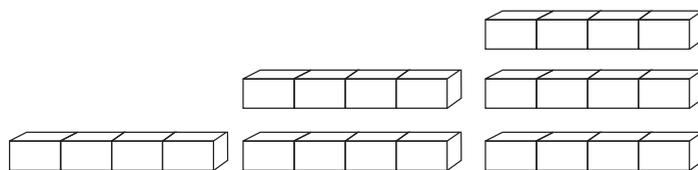
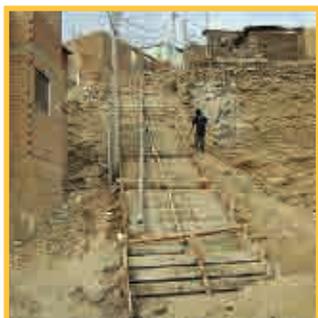
n : número de términos

Ahora, calculamos la suma del ejemplo anterior, pero utilizando la fórmula:

$$S_{500} = \left(\frac{1 + 500}{2} \right) \cdot 500 = 125\,250$$

ANALIZAMOS

- 1 El alcalde de Lima va a construir escaleras con bloques de cemento, como se muestra en la ilustración. **¿Cuántos bloques de cemento se necesitarán para construir una escalera de 240 escalones?**



RESOLUCIÓN

Usando una lista ordenada como estrategia heurística para encontrar un patrón tenemos:

Para 1 escalón: 4.

Para 2 escalones: 8.

Para 3 escalones: 12.

Para 4 escalones: 16.

Notamos que: $a_1 = 4$ y $d = 4$

Calculando a_{240}

$$a_{240} = 4 + 239 \cdot d$$

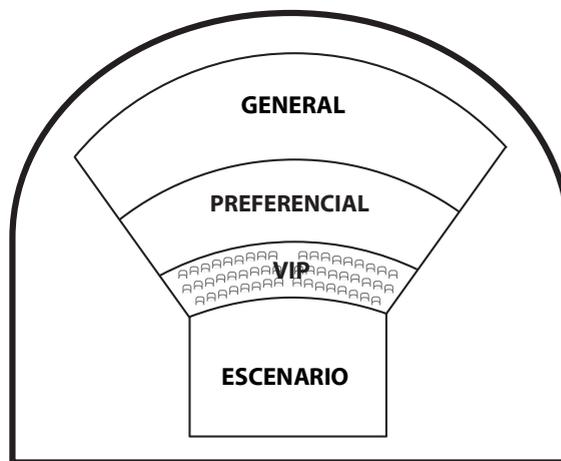
$$a_{240} = 4 + 239(4)$$

$$a_{240} = 960$$

RESPUESTA: se necesitarán 960 bloques de cemento.

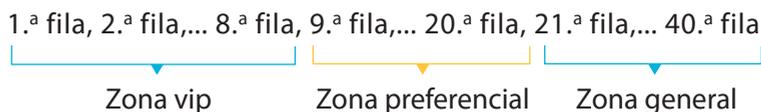
- 2 Un anfiteatro tiene las características como la figura inferior. Sus 40 filas están distribuidas de la siguiente manera: las primeras 8 filas conforman la zona vip; las siguientes 12 filas, la zona preferencial, y en las últimas 20 filas, la zona general. Si la primera fila cuenta con 20 asientos, la segunda con 22, la tercera con 24, y así sucesivamente, entonces:

- a) ¿Cuántos asientos hay en la zona vip y cuántos en la zona preferencial?
 b) ¿Cuál es la capacidad total del anfiteatro?



RESOLUCIÓN

Organizando los datos en una lista como estrategia heurística tenemos:



Calculando el total de asientos en la zona vip.

20, 22, 24, a_8

$$a_8 = 20 + 7(2) = 34$$

$$S_8 = \left(\frac{20 + 34}{2} \right) \cdot 8 = 216$$

RESPUESTA: hay 216 asientos en la zona vip.

Calculando el total de asientos en la zona preferencial.

36, 38, 40, a_{12}

$$a_{12} = 36 + (11)(2) = 58$$

$$S_{12} = \left(\frac{36 + 58}{2} \right) \cdot 12 = 564$$

RESPUESTA: hay 564 asientos en la zona preferencial.

Calculando el total de asientos del anfiteatro.

20, 22, 24, a_{40}

$$a_{40} = 20 + 39(2) = 98$$

$$S_{40} = \left(\frac{20 + 98}{2} \right) \cdot 40 = 2360$$

RESPUESTA: la capacidad total del anfiteatro es de 2360 asientos.

- 3 Un ciclista baja por una pendiente con su bicicleta. En el primer segundo recorre 3 metros; en el segundo, 6 metros; en el tercero, 9 metros; en el cuarto, 12 metros; y así sucesivamente. Si llega hasta la parte baja de la pendiente en 10 segundos, encuentra la distancia total recorrida.

RESOLUCIÓN

Según los datos, después del 2.º segundo recorre tres metros por cada segundo que pasa, entonces la progresión quedaría así:

- 1.º segundo: 3 metros
- 2.º segundo: 6 metros
- 3.º segundo: 9 metros
- 4.º segundo: 12 metros

...

10.º segundo...

Ordenando los datos tenemos: $a_1 = 3, d = 3, a_{10} = ?, S_{10} = ?$

En el décimo segundo habrá recorrido:

$$a_{10} = 3 + 9(3) = 30 \text{ m}$$

Distancia total recorrida por el ciclista:

$$S_{10} = \left(\frac{3 + 30}{2} \right) \cdot 10 = 165 \text{ m}$$



RESPUESTA: recorre una distancia total de 165 metros.

- 4 Una empresa premia con bonos a sus diez mejores vendedores, para lo cual dispone de S/ 46 000. El décimo vendedor de la lista recibirá S/ 1000 y la diferencia en bonos entre los vendedores sucesivamente clasificados debe ser constante. Encuentra el bono para cada vendedor.

RESOLUCIÓN

Ordenamos los datos $a_1 =$ décimo vendedor; $a_2 =$ noveno vendedor; $a_3 =$ octavo vendedor; ...; $a_{10} =$ primer vendedor.

Luego: $a_1 = 1000; S_{10} = 46\ 000$

$$S_{10} = \left(\frac{a_1 + a_{10}}{2} \right) \cdot 10, \text{ resolviendo la ecuación como estrategia heurística:}$$

$$46\ 000 = \left(\frac{1000 + a_{10}}{2} \right) \times 10$$

$$9200 = a_{10} + 1000 \longrightarrow a_{10} = 8200$$

Calculamos d usando la fórmula $a_{10} = a_1 + 9 \cdot d$

$$8200 = a_1 + 9 \cdot d$$

$$8200 = 1000 + 9 \cdot d$$

$$7200 = 9 \cdot d \longrightarrow d = 800$$

Finalmente el bono para cada vendedor será:

Vendedor 10 = 1000 soles

Vendedor 9 = $a_1 + d = 1000 + 800 = 1800$

- Vendedor 8 = $a_1 + 2d = 1000 + 1600 = 2600$
- Vendedor 7 = $a_1 + 3d = 1000 + 2400 = 3400$
- Vendedor 6 = $a_1 + 4d = 1000 + 3200 = 4200$
- Vendedor 5 = $a_1 + 5d = 1000 + 4000 = 5000$
- Vendedor 4 = $a_1 + 6d = 1000 + 4800 = 5800$
- Vendedor 3 = $a_1 + 7d = 1000 + 5600 = 6600$
- Vendedor 2 = $a_1 + 8d = 1000 + 6400 = 7400$
- Vendedor 1 = 8200

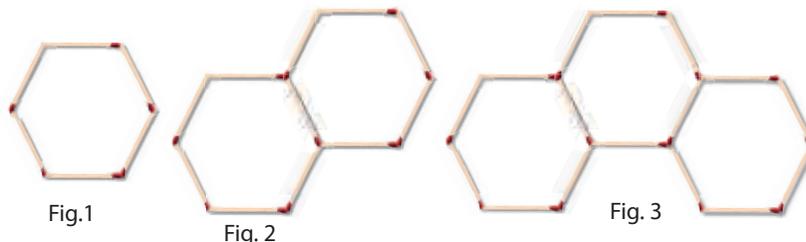
PRACTICAMOS

1 Un objeto cae de un globo aerostático que se encuentra a una altura de 2304 metros. Si se desprecia la resistencia del aire y, además, sabemos que se desplaza 16 metros en el primer segundo, 48 metros en el siguiente segundo, 80 metros en el tercer segundo, 112 metros en el cuarto, y así sucesivamente, **¿a los cuántos segundos llegará a tierra?**



2 Las siguientes figuras han sido construidas con palitos de fósforo:

¿Cuántos palitos de fósforo se necesitan para formar una figura con 24 hexágonos?



3 Completa los cuadrados vacíos de la tabla, de manera que los números de cada fila, de cada columna y de las dos diagonales formen progresiones aritméticas. **¿Cuál será el valor de x?**

				21
16				
	27			
				x

4 Relaciona mediante flechas la ley de formación que corresponde al desarrollo de una progresión aritmética.

Ley de formación

- $a_n = 3n + 4$
- $a_n = 8 - 2n$
- $a_n = 4n + 7$
- $a_n = 2n + 7$

Desarrollo de una P. A.

- 9, 11, 13, 15, 17, ...
- 11, 15, 19, 23, 27, ...
- 6, 4, 2, ...
- 7, 10, 13, 16, ...

Matemática 2.º grado

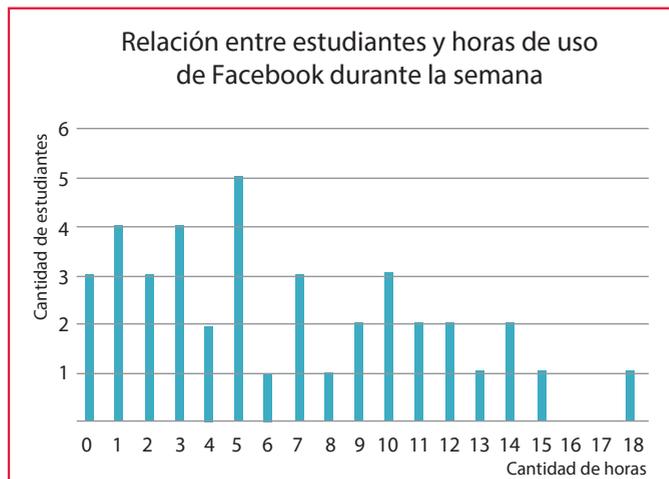
Ficha: Histogramas y polígonos de frecuencias para representar el uso del tiempo libre



Leticia y Margarita son estudiantes del segundo grado A. Ellas realizaron una encuesta entre sus compañeros para identificar la cantidad de horas que hacen uso de Facebook durante una semana. Estas fueron las respuestas de sus compañeros: 2, 3, 1, 5, 4, 0, 2, 3, 5, 8, 7, 12, 14, 3, 5, 7, 11, 14, 10, 9, 3, 0, 1, 0, 5, 1, 1, 6, 7, 11, 10, 9, 12, 15, 18, 5, 4, 2, 13, 10.

Organizaron esta información en una tabla y un gráfico de barras como el siguiente:

Cantidad de horas de uso de Facebook	Cantidad de estudiantes
0	3
1	4
2	3
3	4
4	2
5	5
6	1
7	3
8	1
9	2
10	3
11	2
12	2
13	1
14	2
15	1
16	0
17	0
18	1



Con respecto a esta información, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos estudiantes fueron encuestados?

b) ¿Cuántos estudiantes usan Facebook menos de 5 horas a la semana?

c) ¿Cuántos estudiantes usan Facebook más de 15 horas a la semana?

d) ¿Cuántos estudiantes usan Facebook más de 5 horas y menos de 10 horas a la semana?

El profesor observa la tabla y el gráfico hecho por Leticia y Margarita. Las felicita por la iniciativa; sin embargo, les dice que pudieron haber elegido otras formas de representar esa información, más acordes con su naturaleza.

APRENDEMOS

TABLA DE FRECUENCIA PARA DATOS DE VARIABLES CUANTITATIVAS CONTINUAS

Si observamos el trabajo realizado por Leticia y Margarita, vemos que se trata de una variable con 19 ocurrencias diferentes del 0 al 18. Esto hace que la tabla y el gráfico sean muy amplios y engorrosos de leer.

Variable
De a a b
De b a c
De c a d
...
De x a y

Intervalos de clase

Los datos de esta variable se pueden agrupar de distintos modos; por ejemplo: de 0 a 5, de más de 5 hasta 10, etc. A estos grupos se les denomina intervalos de clase.

La **marca de clase** es el punto medio de cada intervalo y se denota por X_i . La marca de clase se obtiene calculando el promedio de los valores extremos del intervalo.

Variable	Marca de clase (X_i)
De a a b	$\frac{(a + b)}{2}$
De b a c	$\frac{(b + c)}{2}$
De c a d	$\frac{(c + d)}{2}$
...	...
De x a y	$\frac{(x + y)}{2}$

Las frecuencias absolutas son el recuento de los datos cuyos valores corresponden al intervalo de clase.

Ejemplo:

Los sueldos de los empleados de una empresa son los siguientes: S/ 1250; S/ 800; S/ 750; S/ 1300; S/ 1500; S/ 1450; S/ 1280; S/ 1345; S/ 990; S/ 1100; S/ 920; S/ 810; S/ 1400; S/ 1050; S/ 1320; S/ 850; S/ 1480; S/ 1000; S/ 790; S/ 900.

Elabora una tabla de frecuencias con intervalos de clase de S/ 200 de amplitud.

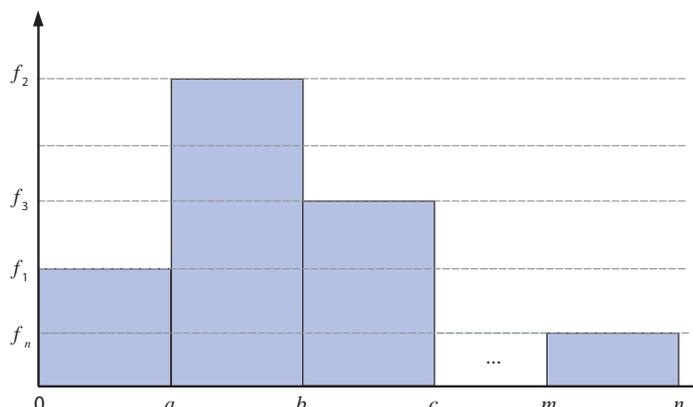
RESOLUCIÓN

Sueldo de los empleados (S/)	Marca de clase (X_i)	Cantidad de trabajadores
De 700 a 900	800	6
De más de 900 a 1100	1000	5
De más de 1100 a 1300	1200	3
De más de 1300 a 1500	1400	6
Total		20

Nota: se tuvo que delimitar el intervalo con la finalidad de que un mismo dato no se encuentre en dos intervalos a la vez.

HISTOGRAMA

El histograma es un gráfico estadístico para variables cuantitativas continuas que consiste en unas barras distribuidas en un eje horizontal. A diferencia del gráfico de barras, estas deben ir juntas y comprender el ancho de cada intervalo de clase. En el eje vertical van las frecuencias absolutas o relativas simples. Cada barra se levanta hasta la altura que indica su frecuencia.



Ejemplo:

Elabora un histograma para mostrar la información de la siguiente tabla de frecuencias:

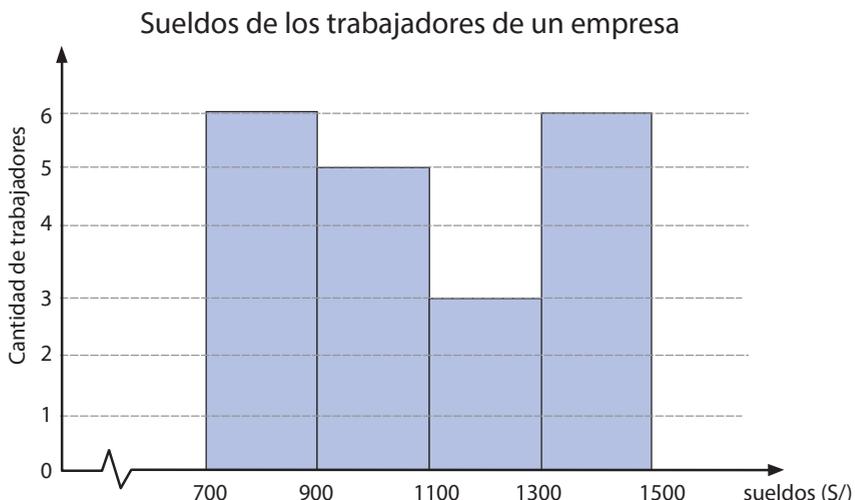
Sueldo de empleados (S/)	Cantidad de trabajadores
De 700 a 900	6
De más de 900 a 1100	5
De más de 1100 a 1300	3
De más de 1300 a 1500	6
Total	20

RESOLUCIÓN

En el eje horizontal ubicamos los sueldos. Como el sueldo va desde S/ 700 hasta S/ 1500, hacemos un corte al inicio del eje para omitir el señalar los valores menores que S/ 700.

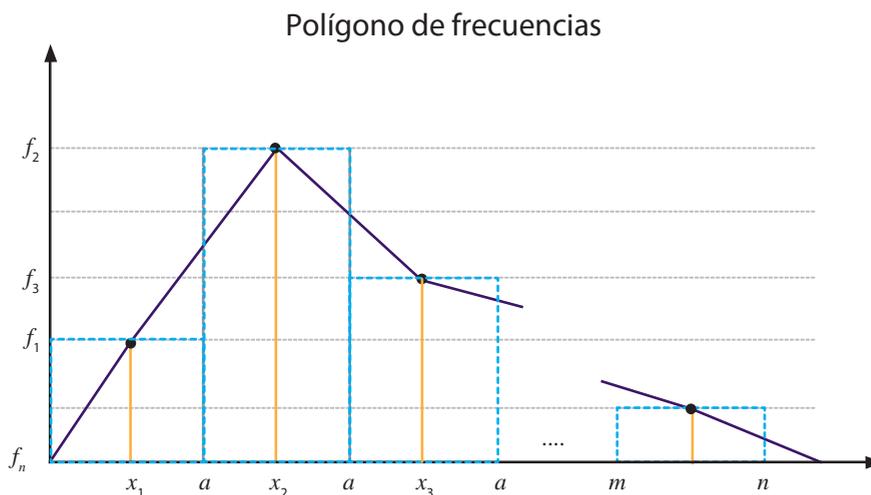
En el eje vertical señalamos las frecuencias desde 0 hasta la máxima frecuencia absoluta de la tabla: 6.

De 700 a 900 levantamos la columna hasta la altura de la frecuencia que le corresponde, que es 6; de 901 a 1100, hasta la altura de 5; de 1101 a 1300, hasta la altura de 3, y finalmente, de 1301 a 1500, hasta la altura de 6. De esa forma, el histograma queda de la siguiente manera:



POLÍGONO DE FRECUENCIA

Es un gráfico estadístico para variables cuantitativas continuas. El polígono consiste en un eje horizontal, sobre el que se ubica la marca de clase (X_i), y en un eje vertical, en el que se localizan las frecuencias absolutas o relativas. Se trazan líneas desde ambos ejes y se unen los puntos resultantes de las intersecciones que se forman. Se finaliza los extremos del polígono uniendo con puntos de marcas de clase ficticias anterior y posterior con frecuencia cero.



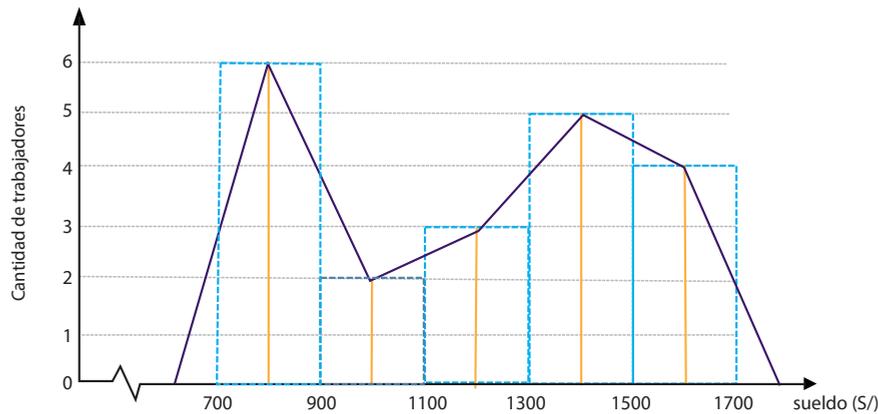
Ejemplo:

Elabora un polígono de frecuencias para mostrar la información de la siguiente tabla de frecuencias:

Sueldo de empleados (S/)	Marca de clase (X_i)	Cantidad de trabajadores
De 700 a 900	800	6
De más de 900 a 1100	1000	2
De más de 1100 a 1300	1200	3
De más de 1300 a 1500	1400	5
De más de 1500 a 1700	1600	4
Total		20

RESOLUCIÓN

Sueldo de los trabajadores de una empresa



ANALIZAMOS

Con los datos presentados en la situación de contexto, **¿cómo podrían Leticia y Margarita organizar la información y representarla gráficamente?**

RESOLUCIÓN

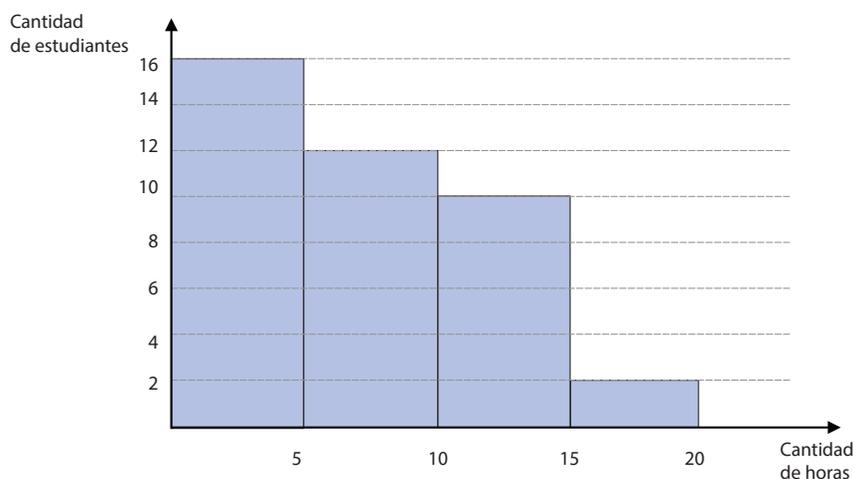
Esta información recolectada se puede organizar en una tabla de frecuencia con intervalos de clase de 5 horas de amplitud.

Horas de usos de Facebook	Marca de clase (X_i)	Cantidad de trabajadores
Menos de 5 horas	2,5	16
De 5 a menos de 10 horas	7,5	12
De 10 a menos de 15 horas	12,5	10
De 15 a 20 horas	17,5	2
Total		40

Según la naturaleza de los datos, debemos elegir entre un histograma o polígono de frecuencias.

En este caso, elegimos un histograma porque se visualiza mejor la comparación de los datos.

Relación entre estudiantes y horas de uso de Facebook durante la semana



PRACTICAMOS

Peso de los estudiantes

Para actualizar las fichas de datos de sus estudiantes, el profesor de Educación Física los pesa y luego registra las cifras en una libreta:

Abril: 45,7 kg
 Tomás P.: 51,4 kg
 Aníbal: 50,6 kg
 Luis: 69,4 kg
 Lucía: 46,8 kg
 Noemí: 40,7 kg
 Teresa: 50,5 kg
 Melquíades: 60,5 kg

Neil: 70,1 kg
 Carlos A.: 76 kg
 Carlos S.: 57 kg
 Luisa: 49,4 kg
 Luna: 56,9 kg
 Norma: 42,7 kg
 Tomás R.: 70,5 kg
 Tomás B.: 50,5 kg

Alex: 55,8 kg
 Hugo: 71,4 kg
 María: 46 kg
 Laura: 49,4 kg
 Silvia T.: 42,8 kg
 Paola: 50,7 kg
 Tito: 70,5 kg
 Jesús: 80 kg

Edgar: 65,8 kg
 Martín: 75,4 kg
 Mónica: 41 kg
 Linda: 49,4 kg
 Enrique: 66,8 kg
 Silvia A.: 40,7 kg
 Ricardo: 73,5 kg
 Mirtha: 50,3 kg

Según esta información, responde las preguntas 1, 2, 11 y 12.

- 1 **Elabora una tabla de frecuencias con intervalos de clase de 5 kg de amplitud para las estudiantes mujeres.**
- 2 **¿Qué gráfico estadístico sería el más conveniente para representar la información sobre el peso de los estudiantes de esta sección?**
 - a) Un histograma.
 - b) Un gráfico de barras simples.
 - c) Un gráfico de sectores.
 - d) Un gráfico de línea.

Sueldos de los trabajadores

En una empresa de fabricación de botellas se cuenta con 40 trabajadores, cuyos salarios son los siguientes: S/ 890; S/ 1050; S/ 1250; S/ 950; S/ 850; S/ 1320; S/ 1000; S/ 1200; S/ 1300; S/ 1320; S/ 1200; S/ 750; S/ 880; S/ 960; S/ 1400; S/ 1050; S/ 1170; S/ 1200; S/ 850; S/ 780; S/ 850; S/ 1170; S/ 1320; S/ 1400; S/ 1550; S/ 1680; S/ 850; S/ 1050; S/ 1570; S/ 990; S/ 1000; S/ 1650; S/ 1700; S/ 1650; S/ 1270; S/ 1450; S/ 880; S/ 960; S/ 1580; S/ 1350.

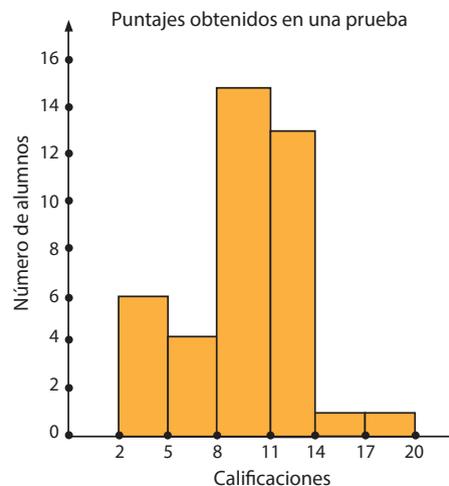
Con esta información, responde las preguntas 3, 4, 5 y 13.

- 3 **Elabora una tabla con intervalos de clase de amplitud S/ 200 para mostrar la información de los sueldos de los trabajadores de esta empresa.**
- 4 **Se desea incrementar el sueldo en S/ 300 a los trabajadores que ganan menos de S/ 1000, y en S/ 100 a los que ganen de S/ 1000 a más. ¿Cuánto dinero significa para la empresa este aumento de sueldo?**
 - a) S/ 3600
 - b) S/ 2800
 - c) S/ 6600
 - d) S/ 12 000
- 5 **Elabora un polígono de frecuencias para mostrar la información sobre el sueldo de los trabajadores de esta empresa.**

Puntaje en una prueba

Un grupo de estudiantes dio una prueba de selección. Los resultados se presentaron mediante este gráfico¹:

Con esta información, responde las preguntas 6, 7 y 14.



6 Si la puntuación mínima aprobatoria es 11, ¿cuántos estudiantes desaprobaron?

- a) Desaprobaron 15 estudiantes.
- b) Desaprobaron 25 estudiantes.
- c) Desaprobaron 13 estudiantes.
- d) Desaprobaron 2 estudiantes.

7 ¿Cuál de las siguientes tablas corresponde a los datos del histograma?

a)

Calificación	Marca de clase (X_i)	Cantidad de estudiantes
De 2 a menos de 5	3,5	6
De 5 a menos de 8	6,5	4
De 8 a menos de 11	9,5	14
De 11 a menos de 14	12,5	12
De 14 a menos de 17	15,5	1
De 17 a menos de 20	18,5	1

b)

Calificación	Marca de clase (X_i)	Cantidad de estudiantes
De 2 a menos de 5	3,5	2
De 5 a menos de 8	6,5	5
De 8 a menos de 11	9,5	8
De 11 a menos de 14	12,5	11
De 14 a menos de 17	15,5	14
De 17 a menos de 20	18,5	17

c)

Calificación	Marca de clase (X_i)	Cantidad de estudiantes
De 2 a menos de 5	3,5	6
De 5 a menos de 8	6,5	4
De 8 a menos de 11	9,5	15
De 11 a menos de 14	12,5	13
De 14 a menos de 17	15,5	1
De 17 a menos de 20	18,5	1

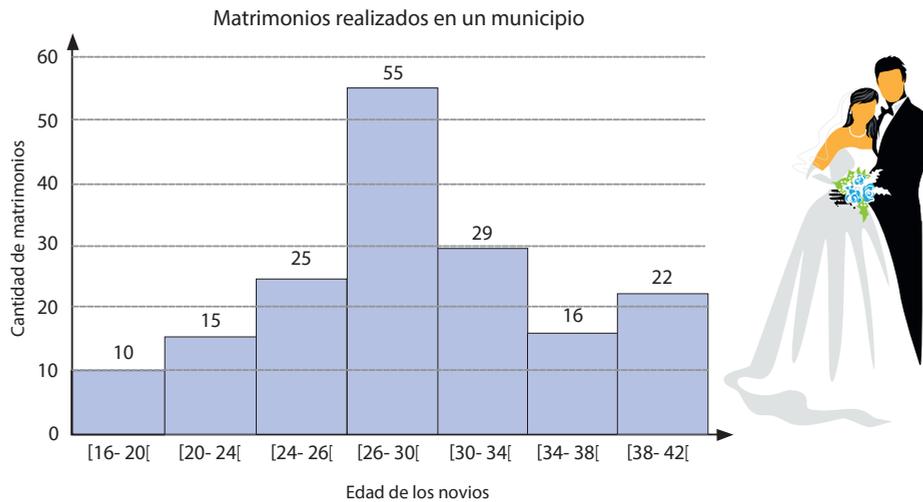
d)

Calificación	Marca de clase (X_i)	Cantidad de estudiantes
De 2 a menos de 5	3,5	7
De 5 a menos de 8	6,5	7
De 8 a menos de 11	9,5	7
De 11 a menos de 14	12,5	7
De 14 a menos de 17	15,5	6
De 17 a menos de 20	18,5	6

¹ Ceibal. (s/f). Estadística. Consulta: 15 de enero de 2016. <http://www.ceibal.edu.uy/contenidos/areas_conocimiento/mat/estadistica/histograma.html>

Matrimonio

En un municipio, el funcionario de Registro Civil debe presentar como balance de fin de año la cantidad de matrimonios celebrados según la edad de los contrayentes. Para eso elabora el siguiente gráfico²:



Con esta información, responde las preguntas 8, 9, 10 y 15.

8 ¿Es adecuado el gráfico elegido por el funcionario? ¿Por qué?

9 ¿Cuántos contrayentes tienen edades comprendidas en el intervalo de clase de 24 a menos de 34 años de edad?

a) 80
 b) 84
 c) 29
 d) 109

10 ¿Cuántos de los contrayentes tienen menos de 24 años?

a) 10
 b) 25
 c) 15
 d) 50

² Anónimo (20 de noviembre de 2011). Témpera Excel. Consulta: 15 de enero de 2015. <<https://goo.gl/wLuBpd>>

Seguimos practicando

- 11 **Elabora una tabla de frecuencias con intervalos de clase de 5 kg de amplitud para todos los estudiantes.**
- 12 **Elabora una tabla de frecuencias con intervalos de clase de 5 kg de amplitud para los estudiantes varones.**
- 13 **Se incrementa el sueldo de los trabajadores siguiendo la siguiente tabla:**

Sueldo	Incremento
De S/ 700 a menos de S/ 900	S/ 300
De S/ 900 a menos de S/ 1100	S/ 250
De S/ 1100 a menos de S/ 1300	S/ 200
De S/ 1300 a menos de S/ 1500	S/ 150
De S/ 1500 a menos de S/ 1700	S/ 100

Elabora el gráfico más conveniente para mostrar la distribución de los trabajadores según su nuevo sueldo. Utiliza una amplitud de S/ 200 para cada intervalo de clase.

- 14 **Al revisar las calificaciones, se encuentra que a tres estudiantes del intervalo de clase de 8 a menos de 11 se les debe incrementar 4 puntos, por lo que dos de ellos quedarían en el intervalo de clase de 11 a menos de 14 y uno en el intervalo de clase de 14 a menos de 17. **Dibuja el polígono de frecuencia de esta nueva distribución de los estudiantes.****
- 15 **¿Es posible saber cuántos de los contrayentes son mayores de 40 años? ¿Por qué?**

Matemática 2.º grado

Ficha: Las medidas de tendencia central en el historial medallero de los Juegos Panamericanos



Los **Juegos Panamericanos** se celebran cada cuatro años entre los países de América, nuestro continente. Miles de atletas participan en diversas disciplinas deportivas. La ciudad de **Lima** será la próxima sede de los Juegos Panamericanos 2019.

La ciudad anfitriona es elegida por la Organización Deportiva Panamericana y es responsable de organizar y financiar una celebración acorde con la Carta Olímpica y las reglas de los deportes que se disputarán. Las ceremonias de apertura y clausura dan un gran realce a esta celebración, pues abarcan muchos rituales y símbolos, como la bandera y la antorcha.

Más de 5000 atletas compiten en los Juegos Panamericanos en 36 deportes y cerca de 400 eventos. Los puestos primero, segundo y tercero en cada evento reciben medallas de oro, plata y bronce, respectivamente.

El siguiente cuadro muestra a los países que ganaron más medallas de oro en los últimos cuatro Juegos Panamericanos:

Países	Santo Domingo 2003	Río de Janeiro 2007	Guadalajara 2011	Toronto 2015
Estados Unidos	117	97	92	103
Cuba	72	59	59	36
Canadá	30	39	30	78
Brasil	29	54	48	42
México	20	18	42	15
Argentina	16	11	22	22

Responde las siguientes preguntas:

- 1 ¿Qué país ha destacado más en los cuatro últimos Juegos Panamericanos? ¿Cuánto es el promedio de sus medallas de oro?

- 2 Al ordenar de menor a mayor la cantidad de medallas de cada país, ¿cuál es el promedio de las dos cantidades que quedan al centro?

- 3 ¿Qué países tienen la misma cantidad de medallas en dos o tres Juegos Panamericanos? ¿Cuál es esa cantidad en cada caso?

- 4 ¿Qué nombre reciben los valores hallados anteriormente?

Con respecto a la situación planteada, pretendemos que, a partir de un conjunto de datos, encuentres unas medidas representativas conocidas como **medidas de tendencia central**, que son la media, la mediana y la moda. Para una mejor comprensión, es necesario que profundicemos sobre el tema.

APRENDEMOS

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

¿Qué son las medidas de tendencia central?

Son medidas cuyo objetivo es resumir la información de un conjunto de datos en un solo valor. Las medidas de tendencia central más utilizadas son: la media o promedio, la mediana y la moda.

La media o promedio (\bar{x})

La media o promedio es el valor que se obtiene sumando todos los datos y dividiendo la suma entre el número de datos. Se simboliza con \bar{x} y se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Por ejemplo, en el siguiente cuadro se muestra la cantidad de medallas de oro que Estados Unidos obtuvo en los cuatro últimos Juegos Panamericanos:

País	Santo Domingo 2003	Río de Janeiro 2007	Guadalajara 2011	Toronto 2015
Estados Unidos	117	97	92	103

El promedio o la media de dichas cantidades se hallaría de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{117 + 97 + 92 + 103}{4} = \frac{409}{4} = 102,25$$

Por lo tanto, el promedio del número de medallas obtenido por Estados Unidos en los cuatro últimos Juegos Panamericanos es 102,25 medallas.

¿Cómo se calcula la media para datos agrupados?

Para calcular la media aritmética para datos agrupados en intervalos de clase, se procede de la siguiente manera:

a) Cada intervalo se representa por su marca de clase (X_i):

$$X_i = \frac{\text{Límite inferior} + \text{Límite superior}}{2}$$

b) Cada marca de clase se multiplica por su respectiva frecuencia absoluta y luego se suman los productos obtenidos.

c) La media aritmética se obtiene al dividir la suma de los productos obtenidos entre la suma de las frecuencias absolutas.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot X_i}{n}$$

Por ejemplo, queremos obtener el promedio del peso de 100 personas registradas en la siguiente tabla de frecuencia con datos agrupados en intervalos:

Peso (kg)	Frecuencia (f_i)
[40 – 50 [10
[50 – 60 [18
[60 – 70 [32
[70 – 80 [36
[80 – 90]	4
Total	100

Entonces, para calcular la media aritmética, aplicamos los pasos señalados anteriormente y trabajamos con las marcas de clase en vez de los intervalos.

Peso (kg)	Marca de clase (X_i)	Frecuencia (f_i)	Marcas de clase x frecuencias: (X_i), (f_i)
[40 – 50 [45	10	45 · 10 = 450
[50 – 60 [55	18	55 · 18 = 990
[60 – 70 [65	32	65 · 32 = 2080
[70 – 80 [75	36	75 · 36 = 2700
[80 – 90]	85	4	85 · 4 = 340
Total	-	100	6560

Luego, aplicando la fórmula para datos agrupados, tenemos lo siguiente:

$$\bar{x} = \frac{6560}{100} = 65,6 \text{ kg}$$

Finalmente, el promedio de las medidas de los pesos de estas personas es 65,6 kg.

La mediana (M_e)

En un conjunto ordenado de datos, sea de manera creciente o decreciente, la mediana es el valor que divide al conjunto en dos subconjuntos con la misma cantidad de elementos cada uno. La mitad de los datos son menores que la mediana y la otra mitad son mayores. Para establecer la mediana, se debe considerar también lo siguiente:

- Si el número de datos es impar, la mediana es el dato que se encuentra en el centro.
- Si el número de datos es par, la mediana es la media o promedio de los dos datos que se encuentran en la mitad de dicha lista ordenada.

En los Juegos Panamericanos, la cantidad de medallas de oro que obtuvo Brasil en los cuatro últimos Juegos Panamericanos fueron estas:

Países	Santo Domingo 2003	Río de Janeiro 2007	Guadalajara 2011	Toronto 2015
Brasil	29	54	48	42

Para hallar la mediana de dichos valores, primero se ordenan de menor a mayor: 29, 42, 48, 54, y se obtiene el promedio de los dos datos del centro. Entonces, 45 es el valor de la mediana de este conjunto de datos.

¿Cómo se calcula la mediana para datos agrupados?

Para datos agrupados en intervalos de clases, se siguen los siguientes pasos:

- a) Se busca el lugar de la mediana $\frac{n}{2}$ y se reconoce la clase mediana.
- b) Se suman las frecuencias para saber en qué intervalo se encuentra la mediana del conjunto de datos.
- c) Se calcula el ancho de la clase mediana: A.
- d) Se interpolan los valores faltantes para alcanzar la mediana, utilizando para ello la frecuencia y el ancho de la clase mediana.
- e) Por último, se suma el límite inferior de la clase mediana y el valor de la interpolación.

Por ejemplo, si queremos calcular la mediana del peso de las 100 personas registradas en la tabla de la sección "¿Cómo se calcula la media para datos agrupados?", procedemos de la siguiente manera:

- a) Buscamos el lugar de la mediana: $\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$

- b) Para ubicar la clase mediana, vamos sumando las frecuencias hasta llegar a la posición 50, entonces: $10 + 18 = 28$. Vemos que faltan 22 lugares para llegar a la mediana. De este modo, nos damos cuenta de que la mediana se encuentra en el tercer intervalo.
- c) El ancho de la clase mediana o amplitud del intervalo es $A = 10$. Así, en la tabla tendremos:

Peso (kg)	Frecuencia (f_i)
[40 – 50 [10
[50 – 60 [18
[60 – 70 [32
[70 – 80 [36
[80 – 90]	4
Total	100

Clase mediana → [60 – 70 [← Frecuencia de la clase mediana: f_m

$f_1 + f_2 = 10 + 18 = 28$

- d) Luego interpolamos para los lugares faltantes utilizando una regla de tres simple y considerando la frecuencia y la amplitud. Así:

32 se corresponde con 10
 22 se corresponde con x

$$x = \frac{22 \cdot (10)}{32} = 6,875$$

- e) Finalmente la mediana se obtiene, sumando el límite inferior y el valor de la interpolación:
 $M_e = 60 + 6,875 = 66,875$

La interpretación de la situación es que el peso del 50 % de las personas está por debajo y por encima de 66,875 kg.

La moda (M_o)

Es el valor que tiene la mayor frecuencia en un conjunto de datos. Dependiendo de los datos, puede haber más de una moda. Si hay dos datos que se repiten, será bimodal. Si ninguno se repite, no hay moda y se llama amodal.

Por ejemplo, la cantidad de medallas de oro que obtuvieron Estados Unidos y Cuba en los cuatro últimos Juegos Panamericanos fue la siguiente:

Países	Santo Domingo 2003	Río de Janeiro 2007	Guadalajara 2011	Toronto 2015
Estados Unidos	117	97	92	103
Cuba	72	59	59	36

Se puede observar que Estados Unidos obtuvo en cada Juego Panamericano cantidades diferentes de medallas de oro. Como ninguna cantidad se repite, decimos que este conjunto de datos es amodal. Por otro lado, Cuba obtuvo en dos Juegos Panamericanos la misma cantidad de medallas de oro, entonces se puede afirmar que 59 medallas de oro es la moda en este conjunto de datos.

¿Cómo se calcula la moda para datos agrupados?

Para datos agrupados en intervalos de clase, el cálculo de la moda se realiza de esta manera:

- Se busca la clase modal, que es la que tiene mayor frecuencia. Se anota su límite inferior (L_i) y su frecuencia (f_{Mo}).
- Se calcula $d_1 = f_{Mo} - f_{anterior}$
- Se calcula $d_2 = f_{Mo} - f_{posterior}$
- Se aplica la fórmula:

$$M_o = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) A$$

Donde:

L_i : límite inferior de la clase modal

A: amplitud o ancho de la clase modal

$$d_1 = f_{Modal} - f_{anterior}$$

$$d_2 = f_{Modal} - f_{posterior}$$

Por ejemplo, calculamos la moda en la distribución de frecuencias del ejemplo anterior.

- La mayor frecuencia es 36, entonces la clase modal es [70 – 80 [

Donde: $L_i = 70$ y $f_{Mo} = 36$

- El ancho de la clase modal o amplitud: $A = 10$

En la tabla quedaría de este modo:

Peso (kg)	Frecuencia (f_i)
[40 – 50 [10
[50 – 60 [18
[60 – 70 [32
Clase modal → [70 – 80 [36
[80 – 90]	4
Total	100

$d_1 = 36 - 32 = 4$
Frecuencia de la clase modal: f_{Mo}
 $d_2 = 36 - 4 = 32$

- Para calcular la moda se reemplaza los datos en la fórmula:

$$M_o = 70 + \left[\frac{4}{4 + 32} \right] \times 10 = 70 + \left[\frac{4}{36} \right] \times 10$$

$$M_o = 70 + 1,11 \rightarrow M_o = 71,11 \text{ kg}$$

$$M_o = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) A$$

La interpretación de la situación es que el peso que más se presenta entre las 100 personas es 71,11 kg.

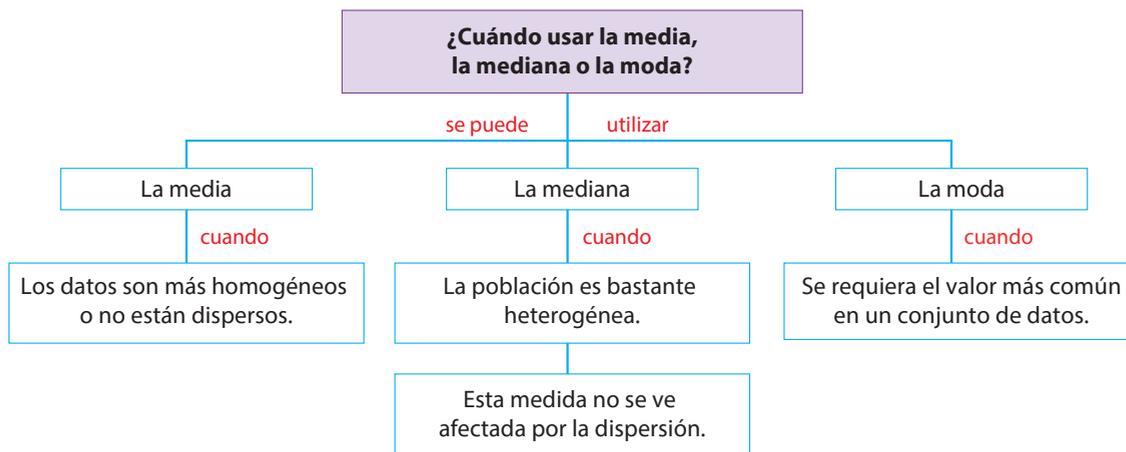
¿Qué son las medidas de dispersión?

Las medidas de dispersión miden el grado de alejamiento o separación de los datos con respecto a las medidas de tendencia central.

El rango

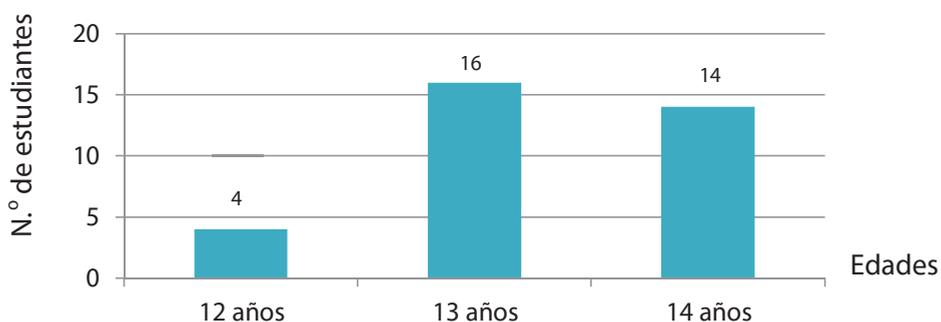
Se calcula restando el dato menor del dato mayor. El rango nos da la idea de proximidad a los datos de la media. Este dato permite obtener una idea de la dispersión de los datos. Cuanto mayor es el rango, más dispersos están los datos de un conjunto.

Si el conjunto de datos es muy numeroso o el rango es muy amplio, es conveniente agruparlos y ordenarlos en intervalos de clases.



ANALIZAMOS

- En el gráfico siguiente se muestran las edades de un grupo de estudiantes de segundo grado de Secundaria. Determina la media aritmética, la mediana y la moda.



RESOLUCIÓN

Según el gráfico, podemos afirmar que hay un total de _____ estudiantes.

a) Para determinar la **media aritmética**, reemplazamos los datos en la fórmula:

$$\bar{x} = \frac{4(12) + \quad + (14)}{\quad} = \quad = \quad$$

Respuesta: _____

b) Para determinar **la mediana**:

- > Se busca el lugar de la mediana: $\frac{n}{2} = \frac{34}{2} =$
- > Se suman las frecuencias $f_1 + f_2 = + = 20$. Esto nos indica que el dato de lugar 17 se encuentra dentro de la segunda frecuencia; entonces, la mediana es ____.
- c) Para determinar la **moda**, se observa que el dato que tiene mayor frecuencia es _____. Entonces dicho valor es la moda.

2 En una encuesta realizada a 20 estudiantes de segundo grado de Secundaria sobre el número de hermanos que tiene cada uno, se obtuvieron los siguientes datos.

Número de hermanos	1	2	3	4
Frecuencia absoluta (f_i)	4	6	8	2

Determina: el rango y el valor de la medida de tendencia central más representativa.

RESOLUCIÓN

- a) Determinamos el rango: restamos $4 - 1 = 3$. Como el valor no es tan grande, podemos afirmar que los datos no están dispersos.
- b) Por lo tanto, la medida más representativa es **la media**. Para hallar su valor completamos la columna $X_i \cdot f_i$

Número de hermanos (X_i)	Frecuencia (f_i)	$X_i \cdot f_i$
1	4	4
2	6	
3	8	
4	2	
Total	20	

$$\bar{x} = \frac{\text{Suma de los productos } X_i \cdot f_i}{20} = \frac{\quad}{20} = \boxed{\quad}$$

Respuesta: _____

3 Los siguientes datos son los minutos de tardanza que tuvo Edgard a la hora de ingreso a su centro de labores durante el mes de febrero: **1, 2, 1, 2, 2, 1, 9, 1, 20, 6, 2**. Calcula la cantidad de minutos que represente mejor el tiempo de tardanza que tuvo Edgard durante ese mes.

RESOLUCIÓN

- a) Se determina el rango para saber si los datos están muy dispersos o no: restamos $20 - 1 = 19$, el valor hallado nos indica que los datos están _____.

› Por lo tanto, la medida más representativa es _____. Para hallar su valor hay que _____ en forma creciente: 1, 1, 1, 1, 2, ____, 2, 2, 6, 9, 20, y se ubica al valor que está _____. Entonces la **mediana es** _____.

b) La interpretación de la situación es que 2 es la cantidad de minutos que mejor representa las tardanzas de Edgard durante el mes de febrero.

4 Se realizó una encuesta a 80 estudiantes de 5.º de Secundaria para conocer sus expectativas de educación al egresar del colegio. El siguiente cuadro muestra los resultados:

Expectativas de educación	Número de estudiantes
Universidad	12
Institutos superiores	21
Senati	32
Escuelas militares	7
Otros	8
Total	80

¿Debemos utilizar la media, mediana o moda para alcanzar el propósito que tiene la encuesta? ¿Por qué?

RESOLUCIÓN

Debemos utilizar _____ porque esta medida nos indica qué expectativa tienen la mayoría de nuestros estudiantes. Vemos que la mayoría prefieren seguir estudios en _____

5 José, Luis y Manuel miden 1,65 m; 1,72 m y 1,68 m, respectivamente. ¿Cuánto es la estatura de Miguel si la estatura promedio de los 4 amigos es 1,70 m?

RESOLUCIÓN

Utilizamos la estrategia heurística: planteo de ecuaciones para hallar la estatura de Miguel. Sea x la estatura de Miguel, entonces:

$$\frac{\text{Suma de las estaturas conocidas} + x}{4} = 1,70. \text{ Entonces: } \underline{\hspace{2cm}} + x = 4 (1,70)$$

$$\underline{\hspace{2cm}} + x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ Luego: } x = \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}} \text{ Finalmente: } x = \boxed{\hspace{2cm}}$$

Respuesta: _____

PRACTICAMOS

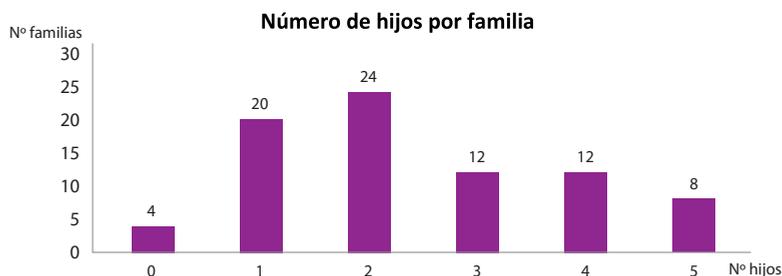
- Los siguientes datos son las edades de los integrantes del coro que representará a la institución educativa en un concurso de canto: 5, 7, 8, 8, 10, 10, 11, 11, 12, 13, 14, 17. Calcula el valor que representa la edad de los integrantes de dicho coro. **¿Qué medida de tendencia central es?**

 - 10, media aritmética.
 - 11, mediana.
 - 10, moda.
 - 10,5; media o mediana.
- Según el gráfico, **determina el rango y la cantidad promedio de clientes que tuvo una empresa en los últimos cuatro años.**



- Rango: 80 y Promedio: 140 clientes.
 - Rango: 82 y Promedio: 140,5 clientes.
 - Rango: 80 y Promedio: 562 clientes.
 - Rango: 8,2 y Promedio: 1405 clientes.
- El peso promedio de un grupo de tres amigas es de 54,5 kg. Si se incorpora al grupo una amiga de 52,5 kg de peso, **¿en cuánto varía el peso promedio del nuevo grupo?**

 - Aumentó 0,5 kg.
 - Disminuyó 0,5 kg.
 - Aumentó 1 kg.
 - No varía.
 - Según el gráfico, determina la cantidad de familias encuestadas y responde **¿qué cantidad representa al número de hijos que tienen la mayoría de las familias?**



Respuesta: _____

5 La siguiente tabla muestra los sueldos (en soles) de los empleados de una empresa. **¿Qué afirmación es correcta?**

- a) La moda se ubica en la tercera clase.
- b) La media aritmética es S/ 4450,00.
- c) La mediana y la moda son iguales.
- d) Las tres medidas de tendencia central se ubican en la segunda clase.

Sueldo (S/)	f_i
[2200; 3700[8
[3700; 5200[16
[5200; 6700[12
[6700; 8200]	4

6 A este conjunto de datos (13, 14, 14, 15, 18) se le agregan dos datos más, de modo que después su mediana es igual a 15; su promedio, 16; y su moda, 14. **¿Qué datos se habrán agregado?**

- a) Se le agregó 14 y 24.
- b) Se le agregó 17 y 21.
- c) Se le agregó 18 y 20.
- d) Se le agregó 16 y 20.

7 Durante el cuarto bimestre, Marco ha tenido las siguientes notas en Matemática: 08, 10, 10, 11, 13, 13, 14, 14, 14, 15. **¿Qué afirmación de las siguientes es correcta?**

- a) La nota de Marco en el cuarto bimestre será 14.
- b) La nota promedio de Marco es 13.
- c) En el cuarto bimestre, Marco obtuvo 11 en la libreta.
- d) El rango de dichas notas es 7.

8 Luisa tiene de promedio 15,5 en los dos trimestres anteriores. Le han informado que para postular a una beca debe tener como mínimo 16 de promedio final. **¿Qué nota mínima debe obtener Luisa en el promedio del tercer trimestre para que pueda postular a dicha beca?**

- a) 16,5
- b) 16
- c) 17
- d) 18

9 La siguiente distribución de frecuencias representa el tiempo de servicio de los docentes de una institución educativa. **Según el valor de la moda para datos agrupados, se puede determinar una de las siguientes afirmaciones:**

- a) La clase modal es [10 – 15 [.
- b) La mayoría de los maestros tienen 17 años de servicio.
- c) Los maestros tienen entre 14 y 16 años de servicio.
- d) La mayoría de los maestros tienen 15 años de servicio.

Tiempo de servicio (en años)	Número de docentes (f_i)
[00 – 05 [6
[05 – 10 [10
[10 – 15 [14
[15 – 20 [16
[20 – 25 [13
[25 – 30]	1
Total	60

- 10 Para elegir al estudiante que represente a la institución educativa en un campeonato de natación de 100 metros estilo libre, el profesor de Educación Física convoca a los tres mejores nadadores en esta disciplina, los hace competir 5 veces y les registra el tiempo en la siguiente tabla.

Estudiantes	Tiempo en segundos				
	1. ^a	2. ^a	3. ^a	4. ^a	5. ^a
Julio	61,7	61,7	62,3	62,9	63,1
Luis	61,5	62,9	62,9	63,7	63,7
Alfredo	60,7	62,4	62,7	62,7	61,2

¿Qué estudiante representará mejor a la institución educativa?

Seguimos practicando

- 11 Una empresa de equipos deportivos está evaluando el efecto de dos planes publicitarios sobre las ventas de 4 meses. Dadas las ventas que se han registrado en la tabla, **¿qué plan de publicidad es conveniente para dicha empresa?**

Mes	Plan 1	Plan 2
Julio	S/ 16 570	S/ 47 350
Agosto	S/ 19 980	S/ 50 120
Setiembre	S/ 22 670	S/ 54 790
Octubre	S/ 34 320	S/ 55 890

- 12 La siguiente tabla indica el número de trabajadores de un fábrica con sus respectivos sueldos. **¿Qué cantidad representa mejor el sueldo de los trabajadores y qué medida de tendencia central es?**

- a) S/ 1100, promedio.
 b) S/ 1580, mediana.
 c) S/ 1640, moda.
 d) S/ 1722, media.

N.º de trabajadores	Sueldo (S/)
2	1100
3	1520
4	1640
1	3900

- 13** La siguiente distribución de frecuencias representa los puntajes obtenidos por un grupo de estudiantes en una prueba de comprensión lectora. **Halla la mediana en este conjunto de datos y argumenta tus procedimientos.**

Respuesta: _____

Interpretación: _____

Puntajes	Número de estudiantes (f_j)
[00 – 04 [2
[04 – 08 [13
[08 – 12 [14
[12 – 16 [12
[16 – 20]	9
Total	50

- 14** **Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:**

- I. La media aritmética es siempre menor que la moda.
- II. La moda siempre se encuentra en el centro de un conjunto ordenado de datos.
- III. Puede haber más de una moda en un conjunto de datos.
- IV. La mediana y la media aritmética son siempre iguales.

- a) Solo I.
- b) II y III.
- c) Solo III.
- d) III y I.

- 15** El peso de los trabajadores de una fábrica se representó en la siguiente distribución de frecuencias. **Indica qué afirmación es incorrecta.**

- a) El peso promedio de todos los trabajadores es 65,3 kg.
- b) El 50 % de los trabajadores pesan menos de 66,6 kg y el otro 50 % pesan más de 66,6 kg.
- c) La mayoría de los trabajadores pesan más de 71 kg.
- d) El 50 % de los trabajadores pesan menos de 60 kg.

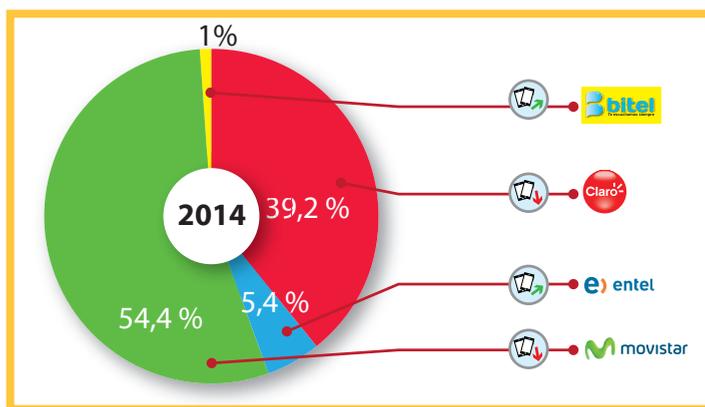
Intervalos	Frecuencia
[40; 50[12
[50; 60[20
[60; 70[35
[70; 80[39
[80; 90]	4
Total	110

Matemática 2.º grado

Ficha: Conocemos el uso de las probabilidades



A fines del 2014, Osiptel publicó un informe sobre el estado actual de participación de los operadores móviles en el Perú, a causa de la aparición de dos nuevas operadoras: Entel (que reemplazó a Nextel) y Bitel. Tampoco hay que olvidar la entrada de Tuenti, un *subcarrier* que nos ofrece planes económicos y apunta exclusivamente al mercado prepago. Todos estos procesos implicaban un gran movimiento en el mercado móvil, sin embargo, los datos revelados por Osiptel nos muestran un panorama diferente, como podemos apreciar a continuación:



Responde las siguientes preguntas:

1 ¿Posibilidad es igual a probabilidad?

2 ¿Qué determinan las probabilidades?

3 En una reunión, ¿cuál es la probabilidad de que un asistente tenga un celular con operador Claro?

4 Si a una reunión asisten 250 personas, ¿cuántas personas posiblemente usen el operador móvil Claro?

Con respecto a la situación planteada anteriormente, se observa que se tienen varias posibilidades de un total y se quiere conocer qué tan probable es encontrar un cierto suceso. Para esto será necesario conocer algunas definiciones, tales como probabilidades, sucesos y otros.

APRENDEMOS

PROBABILIDADES

¿Qué es un experimento aleatorio?

Es un experimento en el que no se puede predecir el resultado, por lo que el experimento está sujeto al azar. Estos son algunos ejemplos:

- Al tirar un dado.
- Al lanzar una moneda.
- En una rifa, al extraer un boleto.

Si se pudiera predecir, el experimento sería determinista, por ejemplo:

- Predecir la fecha de las próximas elecciones.
- Al tirar piedras hacia arriba todas caen.

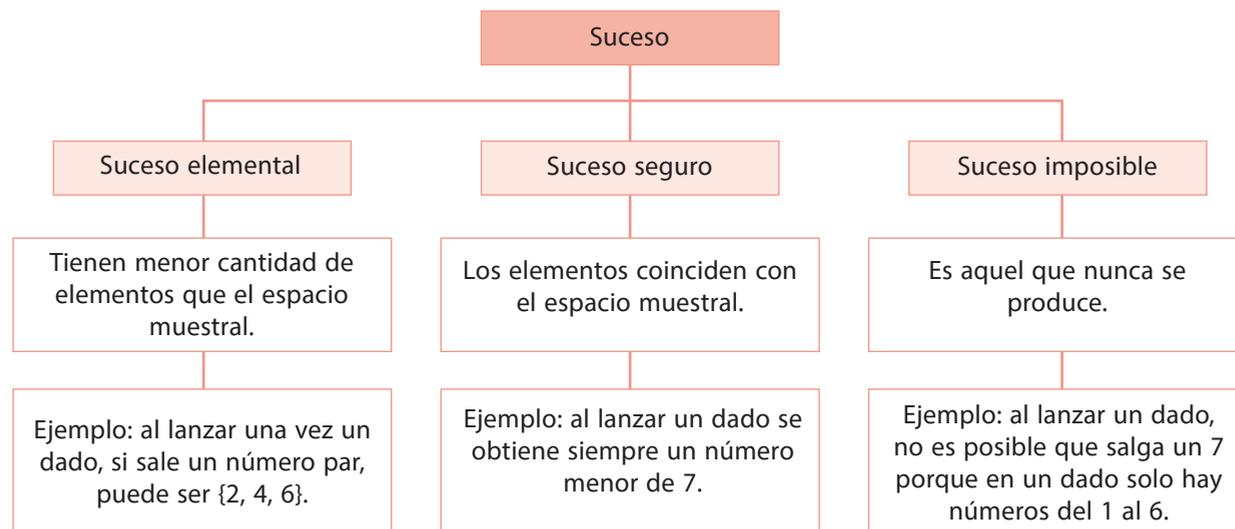
¿Qué es un espacio muestral?

Es el conjunto de todos los posibles resultados que se pueden obtener al realizar un experimento. Se pueden usar E, S, U, Ω para denominarlo.

Por ejemplo, al tirar un dado el espacio muestral es 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

¿Qué es un suceso?

Es un subconjunto del espacio muestral. Son los posibles resultados que se pueden dar en un experimento aleatorio. Pueden clasificarse de la siguiente forma:



Ejemplo:

Experimento aleatorio	Espacio muestral	Suceso
Lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior.	$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	A: que salga un número múltiplo de 3. $A = \{3; 6\}$

Se dirá que un suceso es equiprobable cuando todos sus elementos tengan la misma probabilidad de que resulten parte del suceso.

¿Qué es una probabilidad?

Mide la mayor o menor posibilidad de que se dé un determinado suceso cuando se realiza un experimento aleatorio. La probabilidad toma valores entre 0 y 1, y también se puede expresar en porcentajes al multiplicarlos por 100.

La probabilidad de que ocurra un suceso seguro es 1 o 100 %, y la probabilidad de que ocurra un suceso imposible es 0 o 0 %.

Propiedades de la probabilidad

- Para un suceso A, $0 \leq P(A) \leq 1$
- La probabilidad de un suceso seguro es 1: $P(\Omega) = 1$
- La probabilidad de un suceso imposible es 0: $P(\phi) = 0$

Ley de Laplace

Para medir la probabilidad de un suceso A, se halla el cociente entre el número de casos favorables en A y el número de casos posibles (elementos del espacio muestral). La fórmula es como sigue:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables en } A}{\text{Número de casos posibles}}$$

Rango de valores de la probabilidad

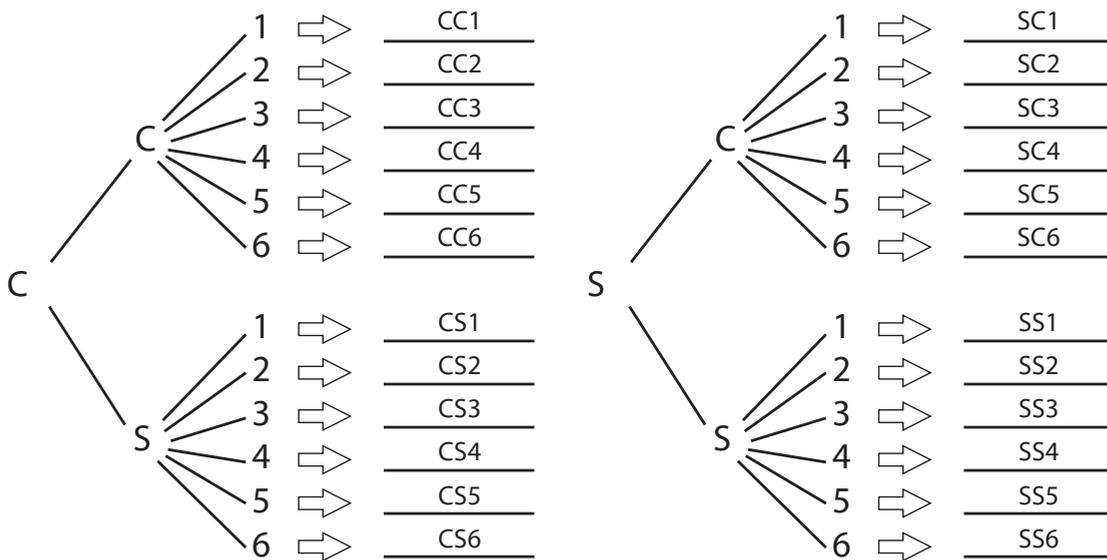


ANALIZAMOS

1 Al lanzar dos monedas y un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener una cara y un número impar?

RESOLUCIÓN

Primero hallaremos el espacio muestral, usando un diagrama del árbol.



Por lo que el espacio muestral está dado por:

$$\Omega = \{CC1, CC2, CC3, CC4, CC5, CC6, CS1, CS2, CS3, CS4, CS5, CS6, SC1, SC2, SC3, SC4, SC5, SC6, SS1, SS2, SS3, SS4, SS5, SS6\}$$

$$n(\Omega) = 24$$

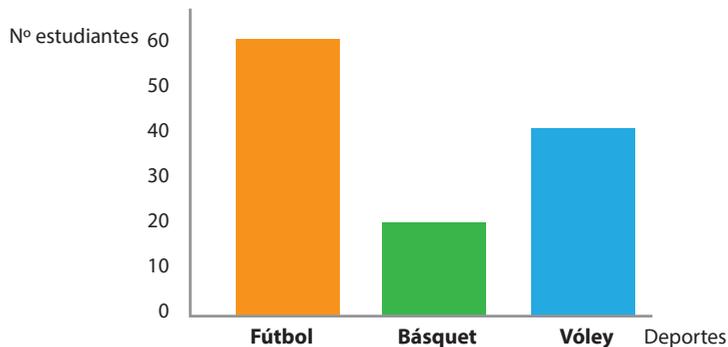
$$A = \{CS1, CS3, CS5, SC1, SC3, SC5\}$$

$$n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{24} = 0,25$$

La probabilidad de que salga una cara y un número impar en el experimento aleatorio es 0,25 o 25 %.

2 Se realizó una encuesta sobre el deporte que más practican los estudiantes de las cuatro secciones del segundo grado de Secundaria. Los resultados se colocaron en el siguiente gráfico:



Al conversar con uno de ellos, **¿cuál es la probabilidad de que practique vóley?**

RESOLUCIÓN

El total de estudiantes de las cuatro secciones resulta al sumar ____+____+____, y esto da un valor de _____.

Por lo que $n(\Omega) = \text{_____}$.

El suceso favorable, en este caso, son los estudiantes que practican vóley.

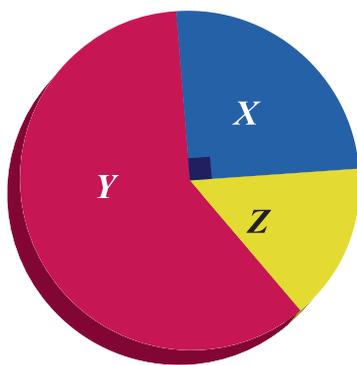
Sea el suceso A: estudiantes del segundo de Secundaria que practican vóley

Por lo que $n(A) = \text{_____}$.

Entonces, $P(A) = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = _ _ _ .$

La probabilidad de que practique vóley es _____.

3 Al lanzar un dado sobre un tablero, **¿cuál es la probabilidad de que caiga en la zona X?**



RESOLUCIÓN

La cantidad de grados en una circunferencia es _____.

Entonces, $n(\Omega) = \text{_____}$.

La zona X tiene como ángulo central a _____.

Sea el suceso A: el dado que cae en la región de color azul.

Entonces $n(A) = \text{_____}$.

Luego, $P(A) = \text{_____} = \text{_____}$.

La probabilidad de que el dado caiga en la zona X es _____.

4 En la siguiente caja, ¿cuál es la probabilidad de sacar, sin ver, una pelota verde o blanca?



RESOLUCIÓN

Contando la cantidad de pelotas que hay en la caja tenemos lo siguiente:

- | | |
|----------------------------|-------------------------|
| _____ pelotas blancas. | _____ pelotas rojas. |
| _____ pelotas moradas. | _____ pelotas verdes. |
| _____ pelotas amarillas. | _____ pelotas rosadas. |
| _____ pelotas anaranjadas. | _____ pelotas celestes. |

Luego de hacer el conteo, se tiene un total de _____ pelotas, por lo que $n(\Omega) = \underline{\hspace{2cm}}$.

Se tiene el suceso A: sacar una pelota verde o blanca, donde $n(A) = \underline{\hspace{2cm}}$, que indica el total de casos favorables.

Luego, $P(A) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

La probabilidad de sacar de la caja una pelota verde o blanca, sin ver, es _____.

5 En el siguiente gráfico se muestra a Ana con 10 pelotas en una bolsa, a Beto con 15 pelotas y a Celia con 12 pelotas. **Completa el cuadro y responde cuál de los tres tiene mayor probabilidad de sacar una bola roja.**

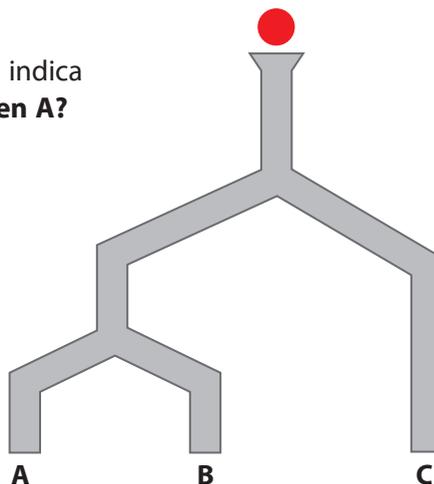


6 De la pregunta anterior, **¿cuál es la probabilidad de que el estudiante sea varón?**

- a) 5 %
- b) 28,5 %
- c) 50 %
- d) 66,6 %

7 Se suelta una pelota sobre unas tuberías tal como indica el gráfico, **¿cuál es la probabilidad de que caiga en A?**

- a) 25 %
- b) 33,3 %
- c) 50 %
- d) 66,7 %



8 Pedro se tiene que realizar una operación en el seguro de salud y le han dicho que, de 300 operaciones, 18 pacientes no la han resistido. Al someterse a la operación, **¿cuál es el rango de probabilidad de que salga bien?**

- a) Poco probable.
- b) Menos probable.
- c) Más probable.
- d) Muy probable.

9 Daniela irá a pasear con sus amigas y escogerá una combinación entre las prendas mostradas. **¿Cuál es la probabilidad de que vaya con las tres prendas del mismo color?**

- a) 50 %
- b) 30 %
- c) 25 %
- d) 16,7 %



- 10 De la pregunta anterior, **¿cuál es la probabilidad de que vaya con dos prendas del mismo color?**
- a) 83,3 %
 - b) 66,7 %
 - c) 60 %
 - d) 28,5 %

Seguimos practicando

- 11 En un salón de clases de 36 estudiantes, la mitad son mujeres, 26 estudiantes no usan lentes y 4 varones usan lentes.
El director escoge un apellido de esa lista; **¿cuál es la probabilidad de que el estudiante de la lista sea una mujer con lentes?**
- a) 6 %
 - b) 16,67 %
 - c) 50 %
 - d) 60 %

- 13 De una baraja de 52 cartas, **¿cuál es la probabilidad de sacar una carta con el número 3?**
- a) 0,071
 - b) 0,076
 - c) 0,25
 - d) 0,019

- 12 Juan tiene una baraja de 52 cartas, **¿cuál es la probabilidad de que saque una carta de diamante con un valor menor que seis o mayor que once?**
-

- 14 Al lanzar dos dados del mismo tamaño, pero de distinto color, **¿cuál es la probabilidad de obtener como suma 7?**

- a) 6 %
- b) 8,3 %
- c) 16,6 %
- d) 19,4 %



- 15 En una bolsa hay cuatro bolas blancas y ocho rojas; **¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída no sea ni blanca ni roja?**

- a) 0
- b) 0,5
- c) 0,33
- d) 0,67

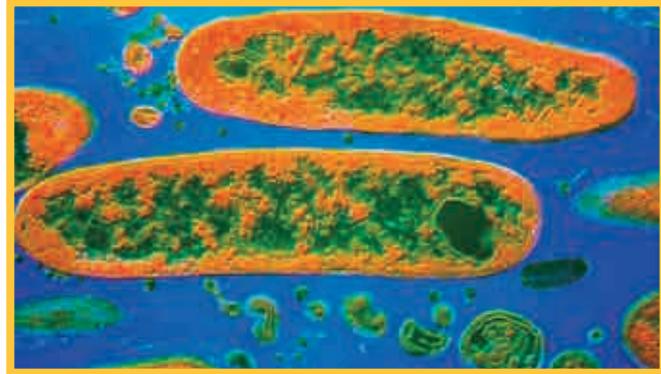
Matemática 2.º grado

Ficha: Crecimiento de las bacterias



Las bacterias crecen exponencialmente, de modo que son capaces de colonizar de forma rápida un medio, normalmente vacío.

Sin embargo, luego de alcanzar grandes densidades poblacionales, experimentan reducción en su número e incluso la extinción total. Esto ocurre debido a, por ejemplo, la falta de alimento o a la acumulación de residuos tóxicos. Tal disminución del número de bacterias, producto de la sobrepoblación, también puede ser exponencial y expresarse como una potencia de base fraccionaria menor que 1.



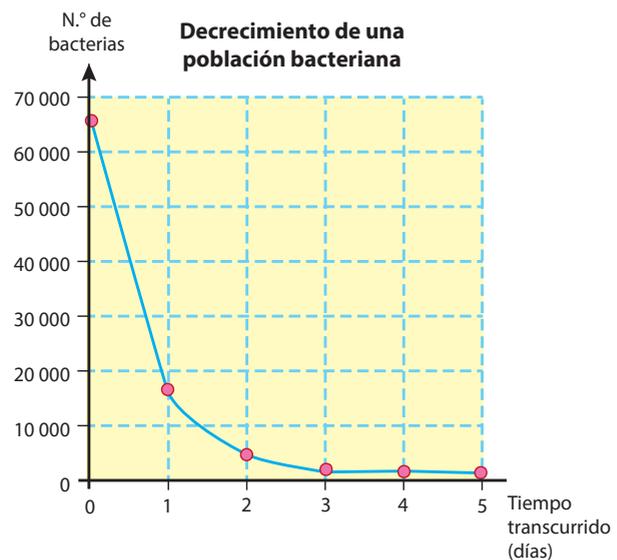
Responde las siguientes preguntas:

- 1 ¿Qué significa que las bacterias crezcan exponencialmente?

- 2 ¿Por qué crees que una colonia de bacterias puede reducirse o extinguirse?

- 3 ¿Qué es una potencia de base fraccionaria menor que 1?

En un laboratorio se observa que un grupo de bacterias disminuye cada día, de forma exponencial, a $\frac{3}{4}$ de su población cada día. En un principio, las bacterias eran 65 536, aproximadamente.



Entonces podemos deducir que la cantidad de bacterias disminuye en un cuarto de su población inicial. Ahora completa la siguiente tabla, que relaciona los días transcurridos con la reducción en la cantidad de bacterias.

Días transcurridos	Factor de decrecimiento	Cantidad de bacterias
0	1	65 536
1	$\left(\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}\right) \times 65\,536$
2	$\left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times 65\,536$
3	$\left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times 65\,536$
4	$\left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times 65\,536$
5	$\left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times 65\,536$

1 ¿Cuántas bacterias han muerto el primer día y el tercer día?

APRENDEMOS

POTENCIACIÓN EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES Q

La situación planteada conlleva multiplicaciones sucesivas de fracciones que son iguales.

$$\left(\frac{1}{4}\right); \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right); \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right); \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right); \dots$$

Veamos y repasemos algunos conceptos que nos ayudarán a comprender mejor este tema.

¿Existe otra forma de escribir la multiplicación sucesiva de factores iguales?

Observemos si es posible en el siguiente ejemplo:

Multiplicación de factores iguales	Se puede escribir así:
$\left(\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}\right)^1$
$\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2$
$\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$
$\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}\right)^4$

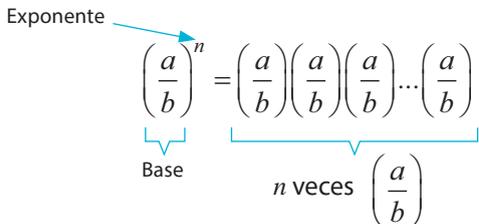
Multiplicación de factores iguales	Se puede escribir así:
$\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}\right)^5$
$\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}\right)^6$

En la tabla podemos apreciar que una multiplicación de factores iguales puede abreviarse con una operación llamada **potenciación**.

¿Qué entendemos por la operación de potenciación?

La potenciación es una multiplicación de varios factores que son iguales, de la misma forma que la multiplicación es una suma de varios sumandos iguales. Por tanto:

La potenciación es la forma abreviada de una multiplicación de factores.



En la nomenclatura de la potenciación se diferencian dos partes, la base y el exponente. El exponente se escribe en forma de superíndice y determina la cantidad de veces que la base se multiplica por sí misma.

Por ejemplo:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3^5}{4^5} = \frac{243}{1024}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

¿Cuáles son los signos en la potenciación de números fraccionarios?

1. Si la base es positiva y el exponente es par o impar, entonces la potencia será positiva.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

2. Si la base es negativa y el exponente es par, entonces la potencia será positiva.

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

3. Si la base es negativa y el exponente es impar, entonces la potencia será negativa.

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$$

Por tanto:

$$n \text{ es par; } \left(+\frac{a}{b}\right)^n = +\frac{a^n}{b^n}$$

$$n \text{ es par; } \left(-\frac{a}{b}\right)^n = +\frac{a^n}{b^n}$$

$$n \text{ es impar; } \left(-\frac{a}{b}\right)^n = -\frac{a^n}{b^n}$$

¿Qué es la notación científica?

La notación científica resulta de un acuerdo que se estableció entre los científicos para estandarizar de forma práctica la escritura de números muy grandes o muy pequeños mediante la potencia de base 10.

Veamos un ejemplo:

Según la teoría de Bin Bang, el origen del universo fue de 0,000...01 segundos (43 cifras decimales). En notación científica se expresa así:

$$1 \times 10^{-43} \text{ segundos}$$



Un número está expresado en notación científica cuando está escrito como un producto de una potencia de 10 y un número mayor o igual a 1 y menor que 10.

$$\text{Con, } 1 \leq m < 10$$

$$m \times 10^n$$

Completa la tabla teniendo en cuenta la notación científica:

Expresión	Notación científica
30 000 000	3×10^7
	5×10^{14}
7 000 000 000 000 000 000 000	
0,0002	2×10^{-4}
	1×10^{-8}
0,00000000000000000006	
	6×10^{-12}

¿Qué propiedades se cumplen en la potenciación?

Son las que se describen a continuación. Estas permiten resolver, por diferentes métodos, una potencia. Para todo $a, b, m, n \in \mathbb{Q}, b \neq 0$.

Potencia de exponente 0

Toda potencia de exponente 0 y base distinta de 0 es igual a 1.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1, \quad b \neq 0$$

Por ejemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$, porque la base $\frac{2}{3}$ está afectada por el exponente 0.

Potencia de exponente 1

Toda potencia de exponente 1 es igual a la base.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b} \quad \text{Por ejemplo: } \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$$

Multiplicación de potencias de igual base

Para el producto de dos o más potencias de igual base, se coloca la misma base y se suman los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$$

Por ejemplo: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^{2+3} = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{3^5}{4^5}\right) = \frac{243}{1024}$

División de potencias de igual base

Para la división de dos potencias de igual base, se coloca la misma base y se restan los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$$

Por ejemplo: $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \div \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^{5-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3^2}{4^2}\right) = \frac{9}{16}$

Potencia de exponente negativo

La potencia de exponente negativo es la inversa de la base de la misma potencia de exponente positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Por ejemplo: 1. $\left(\frac{7}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$ 2. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{1}\right)^2 = 9$

Potencia de otra potencia

Para elevar una potencia a otra potencia, se multiplican los exponentes.

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$$

Por ejemplo: $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^6 = \frac{2^6}{5^6} = \frac{64}{15625}$

Potencia de un producto

Para hallar la potencia de un producto se halla la potencia de cada uno de sus factores.

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Por ejemplo: $(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3 = 8 \times 125 = 1000$

ANALIZAMOS

- 1 La masa del Sol es, aproximadamente, 330 000 veces la masa de la Tierra. Si la masa de la Tierra es 6×10^{24} kg, **¿cuál será la masa del Sol?**



RESOLUCIÓN

Debemos comprender la situación. Nos piden la masa del Sol. Para calcularla, debemos multiplicar. Pero antes convertimos 330 000 a notación científica: $330\ 000 = 3,3 \times 10^5$.

A continuación, hallamos la masa del Sol: $3,3 \times 10^5 \times 6 \times 10^{24} = 19,8 \times 10^{29}$

- 2 Diego afirma que $\left(-\frac{1}{-3}\right)^2 = -$ pero Cinthya le respondió que no es cierto. **¿Estás de acuerdo con ella?** Desarrolla un procedimiento para comprobar si la afirmación es correcta.

RESOLUCIÓN

- a) Analizamos la suposición de Diego.
b) Hallamos los resultados para cada potencia y obtenemos:

$$\left(-\frac{1}{-3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{-3}\right)\left(-\frac{1}{-3}\right) = \frac{1}{9}$$

$$-\left(\frac{1}{-3}\right)^2 = -\left(\frac{1}{-3}\right)\left(\frac{1}{-3}\right) = -\frac{1}{9}$$

Entonces, podemos concluir que Cinthya_____

- 3 Alicia y Lucía participan en un juego, en el que cada participante empieza con cierta cantidad de puntos. Cada vez que el jugador gana, su puntaje se duplica; en cambio, si pierde, su puntaje disminuye hasta la mitad de lo que tenía antes. Alicia empezó con 1 punto, jugó 6 veces y ganó las 6 veces. Lucía tenía 64 puntos, jugó 5 veces y perdió las 5 veces. **¿Cuántos puntos obtuvo Alicia? ¿Con cuántos puntos se quedó Lucía luego de las 5 jugadas? Expresa cada resultado como una sola potencia.**

Representamos gráficamente los datos.

Alicia jugó 6 veces y ganó todas, por lo tanto, sus puntos se duplican:

JUGADA	0	1	2	3	4	5	6
N.º de puntos	1	$1 \times 2 = 2$	4	8	16	32	64
Expresado como potencia	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6

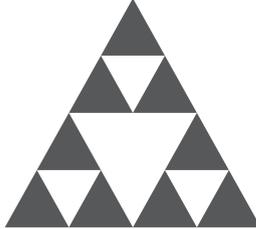
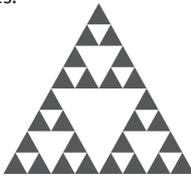
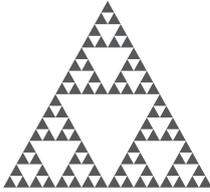
Lucía jugó 5 veces y perdió todas, por lo tanto, su puntaje disminuye hasta la mitad de lo que tenía antes.

JUGADA	0	1	2	3	4	5
N.º de puntos	$64 = 2^6$	$\frac{1}{2} \times 64 = 32$	$\frac{1}{2} \times 32 = 16$	$\frac{1}{2} \times 16 = 8$	$\frac{1}{2} \times 8 = 4$	$\frac{1}{2} \times 4 = 2$
Expresado como potencia	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1

RESPUESTA: Alicia obtuvo 64 puntos $\rightarrow 64 = 2^6$
 Lucía se quedó con 2 puntos $\rightarrow 2 = 2^1$

- 4 El triángulo de Sierpinski es una figura geométrica de un tipo especial denominado fractal. Se construye en forma recursiva a partir de un triángulo equilátero.



<p>El triángulo de Sierpinski de nivel 1 se obtiene al quitar el triángulo equilátero que resulta de unir los puntos medios de cada lado del triángulo inicial.</p> <div style="text-align: center;">  </div>	<p>El de nivel 2 se obtiene repitiendo el proceso sobre los tres triángulos que forman el triángulo de Sierpinski de nivel 1.</p> <div style="text-align: center;">  </div>
<p>El de nivel 3 resulta de aplicar el mismo procedimiento usado en el nivel 2. De esta manera, el proceso continúa de forma indefinida. De hecho, el auténtico triángulo de Sierpinski es la figura geométrica que resulta de aplicar este proceso infinitas veces.</p> <div style="text-align: center;">  </div>	<p>Si el área del triángulo inicial es de 1 m^2, ¿cuál es el área del triángulo de Sierpinski de nivel 4?</p> <div style="text-align: center;">  </div>

RESOLUCIÓN

Como podemos observar, el área sombreada de cada nivel es igual a las $\left(\frac{3}{4}\right)$ partes del área sombreada del nivel anterior. En consecuencia:

El área sombreada del nivel 1 es: $\left(\frac{3}{4}\right) \text{ m}^2$

El área sombreada del nivel 2 es: $\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \text{ m}^2$

El área sombreada del nivel 3 es: $\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{27}{64}\right) \text{ m}^2$

El área sombreada del nivel 4 es: $\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{81}{256}\right) \text{ m}^2$

8 Observa la tabla:

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-5}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-6}$
4	16	64	256	1024	4096

Usa la tabla para expresar el valor 256×4096 como potencia de 4.

- a) 4^{10}
- b) 4^{20}
- c) 4^{30}
- d) 4^{40}

Topo o tupu

En el Imperio incaico todas las tierras pertenecían al Sol, al inca y al Estado. Estas eran distribuidas de forma que cada habitante contaba con una parcela de tierra fecunda para trabajar. Los varones recibían un topo o tupu (2700 m², 0,27 ha, 0,67 acres) al nacer, mientras que las mujeres recibían tan solo medio topo. No podían venderlos ni heredarlos, ya que no era posesión de ellos, sino del Estado incaico; por ello, cuando una persona moría, sus tierras eran destinadas a un nuevo habitante. A cada persona se le daba tierra para que pudiera alimentar bien a su familia. Esta porción asignada de tierra fue denominada topo. El campesino tenía como propios la casa, el establo, los pequeños animales domésticos (perro, cobayos, patos y gallinas sin cola) y el granero, además de los útiles de labranza.

Tomado de <<http://historiaenaccion3052.blogspot.pe/2010/05/tyema-8-economia-inca.html>>

A partir de esta información, responde las preguntas 9, 10 y 11.

9 Juan Cristóbal tiene un terreno de forma cuadrada de 450 m de lado. **¿Cuántos topos comprende este terreno?**

- a) 45 topos.
- b) 55 topos.
- c) 75 topos.
- d) 6 topos.

10 Juan hereda a su hija $\frac{1}{2}$ topo de su terreno, el cual es de forma cuadrada. **¿Cuánto mide, aproximadamente, el lado del terreno que ha recibido su hija?**

- a) 1300 m
- b) 135 m
- c) 51,96 m
- d) 36,74 m

Seguimos practicando

11 El vecino de Juan tiene un terreno cuadrado de 200 m de lado. Si él amplía los lados (pero sin que el lugar pierda la forma), de modo que el espacio comprende 25 topos, **¿cuánto medirá el lado del terreno?**

- a) 325,30 m
- b) 67 500 m
- c) 107 500 m
- d) 327,87 m



12 ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $\frac{n^3}{n^{-4}}$?

a) $n^{\frac{3}{4}}$

b) n^{-1}

c) $\frac{n^{-3}}{n^{-4}}$

d) n^7

13 Una máquina gasta $\left(\frac{3}{4}\right)$ de galón de gasolina por cada 30 horas de funcionamiento. **¿Cuántos galones de gasolina empleará durante 400 horas?**

a) 10 galones.

c) 15 galones.

b) 11 galones.

d) 20 galones.

14 Una rueda avanza $\frac{1}{4}$ de metro al dar una vuelta. **¿Cuántas vueltas debe dar para avanzar 10 metros?**

a) 10 vueltas.

c) 30 vueltas.

b) 20 vueltas.

d) 40 vueltas.

12 Una población de 810 000 insectos disminuye cada año por acción de un depredador natural. Completa la siguiente tabla y luego responde las preguntas.

Años transcurridos	Factor de decrecimiento	Tamaño de la población
0	$\left(\frac{2}{3}\right)^0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^0 \times 810\,000 = 810\,000$
1	$\left(\frac{2}{3}\right)^1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^1 \times 810\,000 = 540\,000$
2		
3		

a) **¿En qué año la población es de 240 000 insectos?**

b) **¿Cuántos insectos han disminuido entre el segundo y tercer año?**

Matemática 2.º grado

Ficha: Las figuras geométricas en nuestro uso cotidiano



Los diseños de nuestras ropas y vestidos tienen en sus moldes figuras geométricas, algo que viene desde nuestros antepasados. En la visita al Museo de Arte de Lima (MALI), observamos este unku con diseños escalonados y lineales que fue elaborado entre los años 500 y 700 de nuestra era. El diseño, según los historiadores, corresponde a las culturas Nazca y Wari.



El unku, que es la prenda anterior al poncho, se ha ido modernizando hasta la actualidad, pero sin olvidar los diseños que se encuentran en la vestimenta.

Responde las siguientes preguntas:

1 ¿En qué regiones se desarrollaron las culturas Nazca y Wari?

2 ¿Qué diseños tienen en común los ponchos actuales y los unkus?

3 ¿Cuántos lados tienen las figuras del unku?

4 En un poncho, se desea realizar un diseño por el ancho de manera horizontal, de modo que los lados de las figuras sean de la misma medida. ¿Cuál será la medida del ancho del poncho, si se sabe que hay diez figuras de 4 cm de lado?



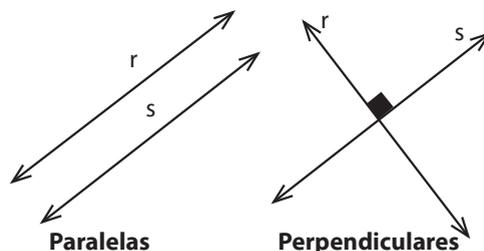
Con respecto a la situación planteada anteriormente, se observa que los diseños son figuras geométricas con algunas similitudes y con ciertas diferencias. Todas las formas geométricas similares a las de la imagen son llamadas polígonos, los cuales tienen muchas características. Para su mejor comprensión, se brindarán a continuación unos conceptos previos.

APRENDEMOS

RECTAS PARALELAS, PERPENDICULARES Y OBLICUAS

¿Cuándo dos rectas son paralelas?

Cuando tienen la misma dirección; es decir, cuando nunca se intersectan.

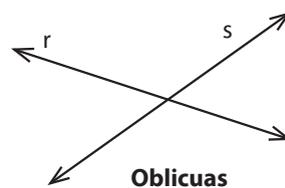


¿Cuándo dos rectas son perpendiculares?

Cuando se intersectan y forman 90° entre ellas.

¿Cuándo dos rectas son oblicuas?

Cuando se intersectan y forman un ángulo diferente de 90° .

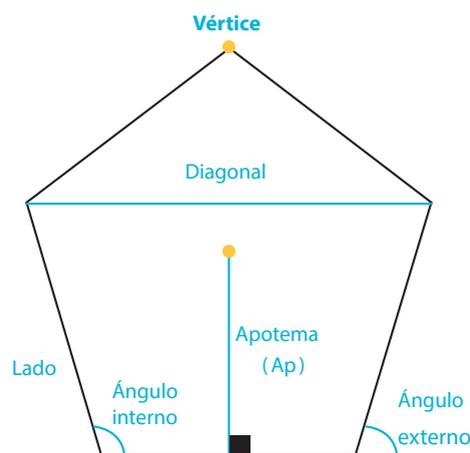


¿Qué es un polígono?

Es una figura geométrica plana cerrada compuesta por una secuencia limitada de segmentos. El interior de un polígono es llamado área poligonal.

Sus elementos son los siguientes:

1. Lado: es el segmento que une dos vértices consecutivos. Limita al polígono.
2. Vértice: es el punto de intersección de dos lados consecutivos.
3. Ángulo interno: es la porción de espacio que forman dos lados consecutivos del polígono.
4. Ángulo externo: es la porción de espacio que forma la prolongación de un lado con un lado consecutivo.
5. Diagonal: es el segmento que une dos vértices no consecutivos.
6. Apotema: solo para polígonos regulares, es la distancia del centro del polígono al punto medio de cada lado.



Clasificación

Se clasifican según tres criterios: cantidad de lados, convexidad y medida de lados y ángulos.

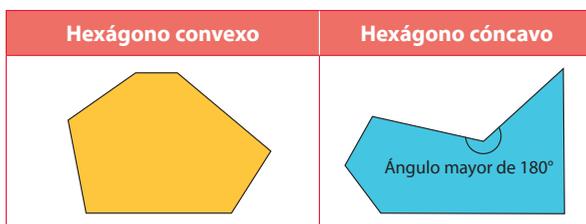
a) Según su cantidad de lados, pueden ser los siguientes:

Triángulo (3 lados)	Cuadrilátero (4 lados)	Pentágono (5 lados)

Así, sucesivamente, como el hexágono (6 lados), el heptágono (7 lados), el octágono u octógono (8 lados), el nonágono o eneágono (9 lados), el decágono (10 lados), el undecágono o endecágono (11 lados), el dodecágono (12 lados), el pentadecágono (15 lados), el icoságono (20 lados), el triacontágono (30 lados) y el tetracontágono (40 lados).

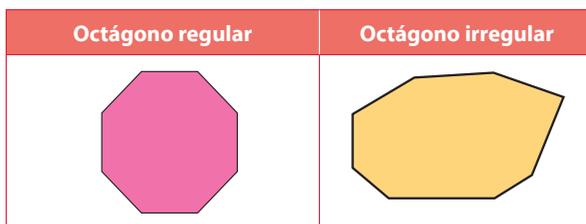
b) Según su convexidad, pueden ser los siguientes:

- Convexo: cuando todos sus ángulos internos son menores que 180°.
- Cóncavo: llamado también no convexo, es cuando por lo menos un ángulo interno es mayor que 180°.



c) Según las medidas de sus lados y ángulos, pueden ser regulares e irregulares.

- Regulares: cuando las medidas de sus lados y de sus ángulos son iguales. Los polígonos que tienen lados iguales son llamados equiláteros (por ejemplo, el rombo), y los que tienen ángulos de igual medida son llamados equiángulos (como el rectángulo). Esto quiere decir que para ser un polígono regular debe ser equilátero y equiángulo a la vez.
- Irregulares: cuando un lado o uno de sus ángulos tiene diferente medida.



Propiedades de los polígonos

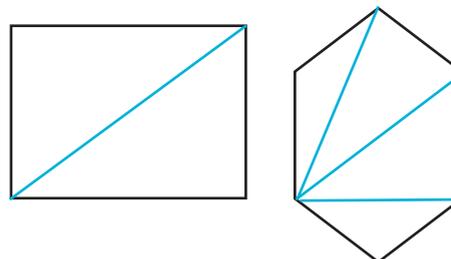
Un polígono de n lados tiene igual cantidad de vértices, de ángulos internos y de ángulos externos.

1. ¿Cómo se calcula el total de diagonales en un polígono convexo?

Las diagonales trazadas desde un vértice de un polígono convexo de n lados está dado por $(n - 3)$; esto es, si el polígono tiene cuatro lados, desde un vértice solo se podrá trazar una diagonal. Si es un hexágono, sería $n = 6$; se podrán trazar tres diagonales desde un solo vértice.

Para calcular el total de diagonales que se pueden trazar en un polígono convexo de n lados, se usará la siguiente fórmula mostrada a continuación:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$



Al reemplazar en la fórmula tenemos que:

Cuando

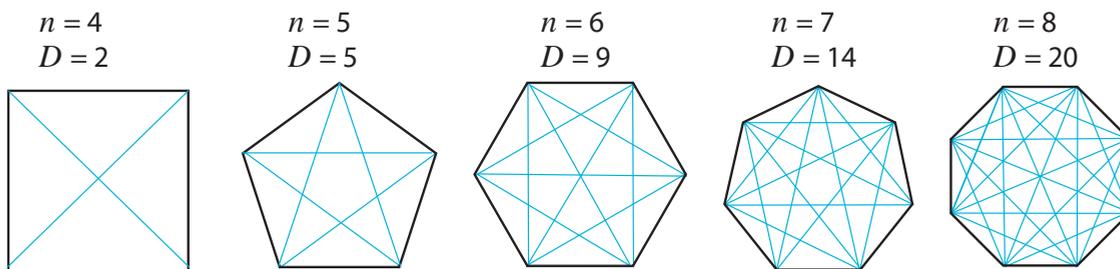
$$n = 4: D = \frac{4(4-3)}{2} = 2$$

$$n = 5: D = \frac{5(5-3)}{2} = 5$$

$$n = 6: D = \frac{6(6-3)}{2} = 9$$

$$n = 7: D = \frac{7(7-3)}{2} = 14$$

$$n = 8: D = \frac{8(8-3)}{2} = 20$$



2. ¿Cómo se calcula la suma de ángulos internos de un polígono?

La suma de los ángulos internos de cualquier polígono se justifica por la descomposición de este polígono en triángulos. Se sabe que la suma de ángulos internos de un triángulo es 180° .

Cuadrilátero (4 lados)	Pentágono (5 lados)	Hexágono (6 lados)
Suman $180^\circ(2) = 180^\circ(4 - 2)$	Suman $180^\circ(3) = 180^\circ(5 - 2)$	Suman $180^\circ(4) = 180^\circ(6 - 2)$

Generalizando $S_i = 180^\circ(n - 2)$

Para conocer la medida de cada ángulo interno, si el polígono es regular, solo se dividirá entre el número total de ángulos; es decir, entre n .

$$i = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

Por ejemplo, si queremos saber cuál es la suma de todas las medidas de los ángulos internos de un decágono, y cuánto mide un solo ángulo interno, haremos lo siguiente:

$$n = 10$$

$$S_i = 180^\circ(10 - 2) = 180^\circ(8) = 1440^\circ$$

Luego, para el caso de un decágono regular, si se desea saber la medida del ángulo interno, se divide entre 10.

$$i = \frac{1440^\circ}{10} = 144^\circ$$

3. ¿Cómo se calcula la suma de ángulos externos de un polígono convexo?

Como el ángulo interno y el ángulo externo son suplementarios (es decir, suman 180°), se efectúa como sigue:

$$\begin{aligned}
 i + e &= 180^\circ \\
 \frac{180^\circ(n-2)}{n} + e &= 180^\circ \\
 e &= 180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n} = \frac{180^\circ n - 180^\circ(n-2)}{n} = \frac{180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ}{n}
 \end{aligned}$$

Por lo que la medida de un ángulo externo está dado por
Esto es siempre y cuando el polígono sea regular.

$$e = \frac{360^\circ}{n}$$

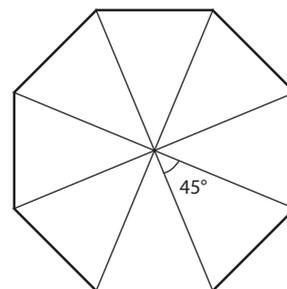
Por ejemplo, para calcular la medida de un ángulo externo o exterior de un decágono regular, se realiza esta ecuación: $n = 10$

$$e = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

Para el caso de la suma de los ángulos externos de cualquier polígono convexo, es así $S_e = 360^\circ$.

4. ¿Cómo se calcula la medida de un ángulo central?

En un polígono regular, se trazan segmentos desde el centro hacia los vértices (estos segmentos son llamados radios, y cada ángulo que forman los radios se conoce como ángulo central). Al formarse tantos ángulos centrales como lados tiene el polígono, cada ángulo central estará dado por: $\frac{360^\circ}{n}$



Por ejemplo, para calcular cuál es la medida del ángulo central de un octágono regular, si sabemos que en el octágono la cantidad de lados es ocho, entonces: $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

Por tanto, el ángulo central de un octágono regular mide 45° .

5. ¿Cómo se calcula el perímetro de un polígono?

El perímetro de un polígono regular es igual a la cantidad de lados por la longitud del lado.

$$\text{Perímetro} = n \times \text{lado}$$

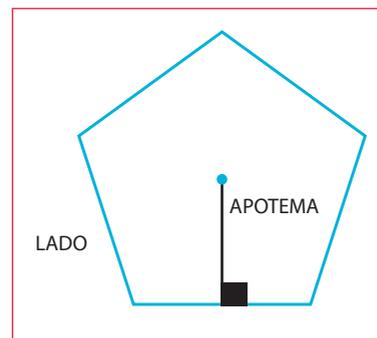
El perímetro de los polígonos irregulares es la suma de las medidas de todos los lados del polígono.

6. ¿Cómo se calcula el área de un polígono?

El área de un polígono regular se halla aplicando la siguiente fórmula:

$$\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

El área de un polígono irregular se calcula dividiéndolo en figuras conocidas.



ANALIZAMOS

1 Observa las calles y responde.

- > ¿Cuál es la medida del mayor ángulo entre la Av. La Historia y la Av. Perseverancia? 130° .
- > ¿Cuál es la medida del menor ángulo que hay entre las avenidas Las Letras y Disciplina? 50° .
- > Las avenidas Perseverancia y Disciplina representan a rectas paralelas.
- > La Av. Perseverancia y la Av. Ciencias representan a rectas perpendiculares.
- > La Av. Las Letras y la Av. Ciencias representan a rectas oblicuas.



- 2 En la naturaleza tenemos a la Ipomoea o Morning glory. Ese es el nombre que reciben cientos de plantas herbáceas trepadoras cuyas flores nacen y mueren cada día.
- › La flor de esta planta tiene 5 lados y presenta la forma de un polígono regular.
 - › Se observa que cada lado tiene la misma medida, y también sus ángulos internos, por lo que el polígono es un pentágono regular.



- 3 ¿Cuál es la medida de un ángulo interior de un polígono regular en el que, desde un vértice, se pueden trazar tres diagonales?

$n - 3 = 3$; de aquí, $n = 6$. Reemplazando en la fórmula de ángulo interior,

$$\text{tenemos lo siguiente: } \frac{180^\circ(n-2)}{n} = \frac{180^\circ(6-2)}{6} = 30^\circ(4) = 120^\circ$$

- 4 A continuación se muestra una sombrilla vista desde arriba, y se desea saber la medida de los ángulos de cada paño triangular.



RESOLUCIÓN

La figura es un decágono regular, por lo que el valor de n es 10.

Observamos que se divide en 10 paños triangulares iguales, por lo que el ángulo central está dado por $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$. Cada ángulo

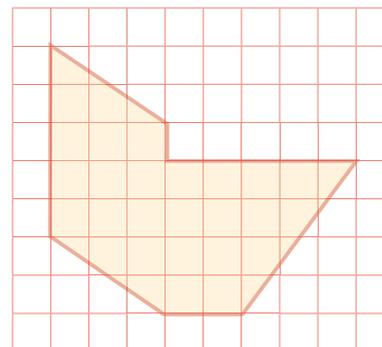
interno está dado por $\frac{180^\circ(10-2)}{10} = 144^\circ$. Esta medida se divide entre

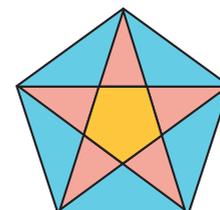
dos para obtener la otra medida del ángulo del triángulo, que es 72° .

Así, las medidas de los ángulos de cada paño son 36° , 72° y 72° .

PRACTICAMOS

- 1 Calcula el área sombreada, si se sabe que cada cuadrícula es de 1 cm de lado.





2 Se tiene un cometa con el diseño que aquí se muestra. **¿Cuáles son las medidas de los tres ángulos del triángulo obtuso más pequeño?**

3 Una porción de papel tiene forma de hexágono regular de 15 cm de lado. Al cortarse por una de sus diagonales se obtienen dos pedazos en forma de cuadriláteros. **¿Cuál es el perímetro de cada cuadrilátero?**

- a) 75 cm
- b) 65 cm
- c) 60 cm
- d) 45 cm

4 **¿Cuál es el polígono que tiene la misma cantidad de lados y de diagonales?**

- a) Cuadrilátero.
- b) Pentágono.
- c) Octágono.
- d) Eneágono.

5 **Indica si es verdadera (V) o falsa (F) cada una de las siguientes afirmaciones:**

- I. La Av. Tacna y la Av. Wilson son perpendiculares. ()
- II. El menor ángulo formado por las avenidas Wilson y Nicolás de Piérola es 50° . ()
- III. El Jr. Cañete y la Av. Tacna son vías paralelas. ()
- IV. Las avenidas Wilson y Nicolás de Piérola son oblicuas. ()



- a) FFVF.
- b) FFVV.
- c) VFFF.
- d) VVFV.

6 Del mapa anterior, **¿cuál es la medida del ángulo obtuso que forman las avenidas Nicolás de Piérola y Wilson?**

- a) 40°
- b) 50°
- c) 130°
- d) 140°

7 **¿Cuál de los polígonos mencionados tiene lados paralelos y perpendiculares?**

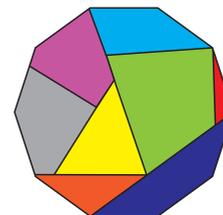
- a) Romboide.
- b) Rombo.
- c) Trapecio.
- d) Rectángulo.

8 Se desea hacer una réplica de la ventana presentada. Si se sabe que tiene los lados iguales, **¿cuál es la medida del ángulo interior que forman dos lados consecutivos?**

- a) 120°
- b) $128,6^\circ$
- c) 252°
- d) $102,9^\circ$



9 Dentro del presente decágono regular se muestran ocho polígonos de diferente tamaño. **¿Qué medida tiene el menor ángulo formado entre el lado del decágono y la diagonal trazada?**



- a) 144°
- b) 136°
- c) 44°
- d) 36°

10 La cantidad total de diagonales de un polígono regular es igual al triple de la cantidad de vértices. **Calcula la medida de un ángulo central.**

- a) 10°
- b) 20°
- c) 30°
- d) 40°

Seguimos practicando

11 Relaciona ambas columnas mediante flechas.

Tiene once lados.	Eneágono
No tiene diagonales.	Hexágono
Su ángulo externo es la mitad de su ángulo interno.	Cuadrado
Su ángulo central es recto.	Endecágono
Se puede dividir en nueve triángulos congruentes desde su centro.	Triángulo

12 En la siguiente figura se puede observar una estrella de mar disecada, la cual se desea poner en una vitrina circular del menor radio posible. **¿Cada punta de la estrella rozará la vitrina? Explica.**



13 **¿Cuál es la suma de ángulos internos del cuerpo de la guitarra que tiene forma de estrella?**



14 **¿Qué polígono representan los adoquines que se han puesto en un estacionamiento?**

- a) Hexágono regular.
- b) Hexágono convexo.
- c) Hexágono cóncavo.
- d) Heptágono cóncavo.



15 Si un decágono regular tiene 15 cm de lado y la distancia del centro a uno de sus lados es 23,08 cm, **¿cuál es el área del decágono?**

- a) $173,1 \text{ cm}^2$
- b) $346,2 \text{ cm}^2$
- c) 1731 cm^2
- d) 3462 cm^2

Matemática 2.º grado

Ficha: Un paseo por el Parque de las Leyendas



Antonio y su familia fueron de paseo al Parque de las Leyendas. Al ingresar, les dieron un pequeño mapa de todo el parque.



Fuente de imagen: < <https://goo.gl/fzBOSw>>

- | | | |
|------------------------------|------------------------------------|-----------------------|
| A. Ingreso y estacionamiento | G. Acuario de peces | M. Sallqa Yachay Wasi |
| B. Mesa de partes | H. Museo Kalinowski | N. Boletería de botes |
| C. Boleterías | I. Museo de sitio Ernst Middendorf | O. Zona de juegos |
| D. Garita de control | J. Felinario | P. Caballero Carmelo |
| E. Mina modelo | K. Museo del Petróleo | Q. Auditorio central |
| F. Auditorio Chabuca Granda | L. Espejo de agua | |

Responde las siguientes preguntas:

- 1 ¿Qué utilidad se le puede dar al mapa? _____
- 2 ¿Qué es un plano cartesiano? _____
- 3 ¿Qué es una escala? _____
- 4 ¿Qué indica el origen de coordenadas? _____
- 5 En el mapa que le entregaron a Antonio al ingresar al parque, cada cuadrícula que se forma equivale a 20 m por lado. ¿A qué distancia se encuentra el auditorio central de la entrada?

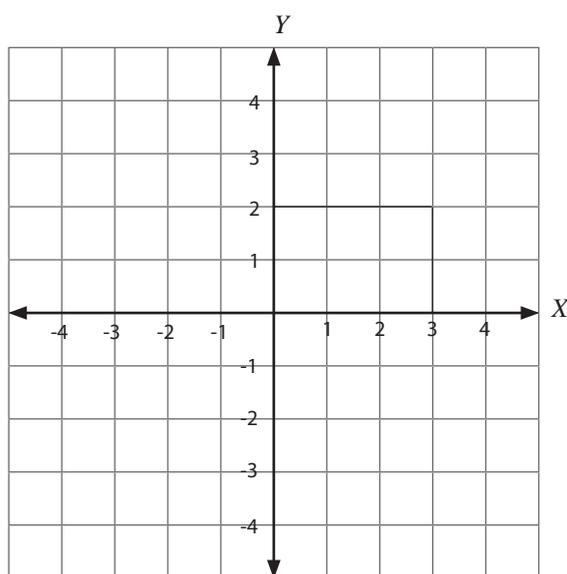
La situación planteada involucra interpretar la escala de un mapa mediante la proporcionalidad, así como también conocer un punto de referencia para calcular distancias y ubicarnos dentro de un plano en nuestra vida real. Para esto reconozcamos algunos conceptos, los cuales nos ayudarán a comprender mejor la situación.

APRENDEMOS

PLANO CARTESIANO

El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas perpendiculares que se cortan en un punto llamado origen. La recta horizontal (que es el eje X) tiene el nombre de abscisa y la recta vertical (que es el eje Y) tiene el nombre de ordenada. La finalidad del plano cartesiano es describir la posición de los puntos (que son expresados con letras mayúsculas del alfabeto), los cuales se representan por coordenadas o pares ordenados. Por ejemplo: un par ordenado está dado por $P(x;y)$.

El plano cartesiano tiene cuatro cuadrantes: en el primer cuadrante se ubican los x positivos y los y positivos; en el segundo cuadrante se ubican los x negativos y los y positivos; en el tercer cuadrante ambos son negativos; y en el cuarto cuadrante se ubican los x positivos y los y negativos.



¿Qué es un punto de referencia?

La idea que se tiene de punto de referencia es asociada al lugar que ocupa un observador dentro de un cierto espacio, lo que permite conocer una posición.

¿Qué es un mapa?

Es un dibujo o esquema que representa a un territorio sobre una determinada superficie en dos dimensiones, la cual tradicionalmente es plana como un papel, aunque también puede ser esférica tal como un globo terráqueo. Por ejemplo, nuestro planeta puede ser dibujado en un plano (como el mapamundi). Los mapas ayudan a medir superficies y distancias con gran exactitud, y permiten que una persona se ubique en un territorio y pueda saber qué caminos son los mejores para llegar a un destino específico. El territorio representado en el mapa y el territorio real guardan una semejanza, por lo que sus medidas son proporcionales a una escala particular.



¿Qué es una escala?

Es la relación entre la realidad y un dibujo que la representa; por ejemplo: como es imposible hacer mapas con las mismas dimensiones que la realidad, se utilizan las escalas, que son una relación matemática entre su dimensión real y la representación en el mapa. Con la escala se puede saber cuánto se redujo la representación de un lugar para mostrarlo en un mapa, y permite calcular las distancias verdaderas.

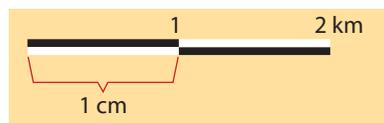
La escala puede representarse de dos maneras, de forma numérica y de forma gráfica.

Escala numérica

Indica la cantidad de veces que tendría que aumentar el mapa para que tuviese el tamaño real. Se expresa con un número o una fracción. Por ejemplo la escala 1:100 se lee: "uno a cien" y señala una reducción de la longitud de la realidad en cien veces en el mapa.

Escala gráfica

Es una línea recta dividida en unidades iguales (que pueden ser centímetros, pulgadas u otra medida). Cada unidad de la escala gráfica equivale a determinada distancia del lugar real.



Según esta escala, cada centímetro del mapa será equivalente a 1 km de la realidad.

ANALIZAMOS

- 1 Se desea poner flores alrededor de toda la plaza de armas de la ciudad del Cusco. Según el siguiente mapa, **¿cuál es el perímetro de la plaza?**



RESOLUCIÓN

En la parte inferior derecha del mapa se indica una escala. Ese segmento mide _____, lo que equivale a _____ en la realidad.

Se sabe que 1 m = _____ cm.

Por lo que 50 m = _____ cm.

Entonces 1 cm en el mapa equivale a _____ en la realidad.

De tal modo, la escala es _____ : _____.

Midiendo el perímetro del parque en el mapa, resulta _____, por lo que en la realidad será _____ cm. Para convertir a metros se divide entre _____ y se obtiene: _____.

- 2 La distancia que hay entre la Tierra y el Sol es 149 600 000 km y la distancia de la Tierra a la Luna es 384 400 km. Se desea realizar un dibujo con las distancias proporcionales. Para ello, se ubica a la Luna en un punto L y a la Tierra en un punto T separados por 1 mm. **¿A qué distancia en centímetros se colocará la Tierra del Sol (punto S), sabiendo que la Luna se encuentra entre ambos ?**

RESOLUCIÓN

La escala es una proporción entre las distancias reales y las hechas en el dibujo, por lo que:

$$\frac{\text{[]}}{\text{[]}} = \frac{ST}{\text{[]}}$$

Se eliminan las unidades de km y $ST = \text{[]}$ mm, como 1 cm = _____ mm.

Entonces, se dividirá entre _____; así, $ST = \text{[]}$ cm.

$$\frac{\boxed{}}{20 \text{ cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{Y} \quad \frac{\boxed{}}{15 \text{ cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

De estos resultados, se escogerá convenientemente el menor número entero, que sería 4.

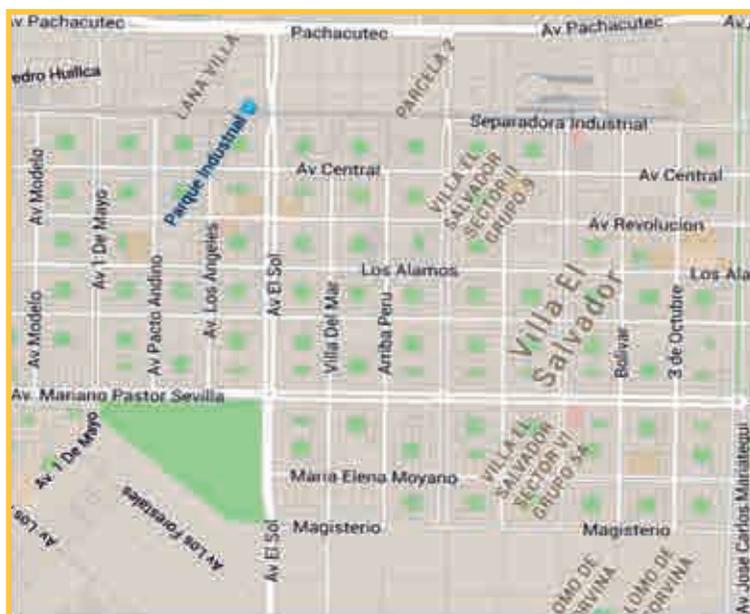
Así, la escala sería de 1: _____

Entonces, la altura del dibujo será de $20 \times \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

Por lo tanto, tendrá un espacio de $100 \text{ cm} - \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ cm para el título.

PRACTICAMOS

- 1 En el siguiente mapa se presenta un pequeño territorio del distrito de Villa El Salvador, provincia de Lima. Si se toma como punto de referencia el cruce de la Av. Mariano Pastor Sevilla y la Av. El Sol. **¿En qué cuadrante se encuentra el Parque Industrial y cuál sería la coordenada del cruce de la Av. Separadora Industrial con la Av. José Carlos Mariátegui?**



- a) I cuadrante – (8; 5) c) I cuadrante – (5; 8)
b) II cuadrante – (8; 5) d) II cuadrante – (5; 8)

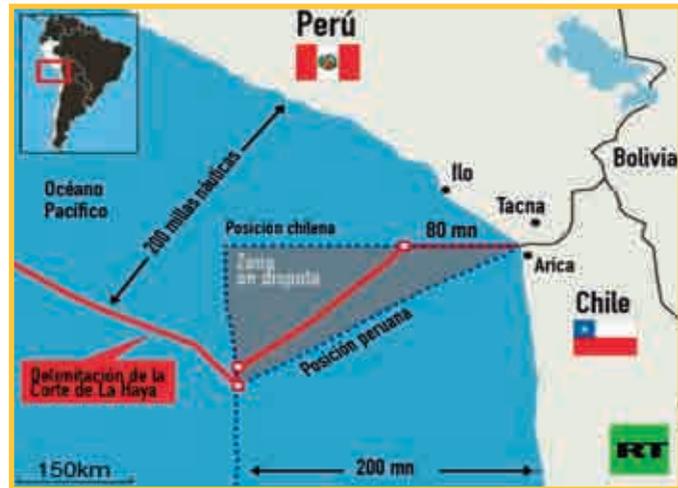
- 2 Si los números correspondientes a un par ordenado son negativos, **¿en qué cuadrante del plano cartesiano se encuentran?**

- 3 De la pregunta anterior, si la distancia entre dos pueblos es de 3 km, **¿a qué distancia se encontrarán en el mapa?**

- a) 3 cm c) 5 cm
b) 4 cm d) 6 cm

10 Haciendo uso de una regla, ¿cuál es la escala que corresponde al mapa?

- a) 1:100 000
- b) 1:1 000 000
- c) 1:10 000 000
- d) 1:100 000 000



Seguimos practicando

11 En un mapa a escala 1:60 000, la distancia entre dos pueblos es de 12 cm. ¿Cuál será la distancia en la realidad?

12 Una célula humana mide cuatro millonésimas de metro de diámetro, y en la pantalla de un microscopio electrónico se ve con un diámetro de 2 cm. ¿Qué escala se ha empleado?

13 Determina la escala que se aplica cuando se hace una fotocopia reducida al 25 %.

- a) 1:4
- b) 1:5
- c) 1:25
- d) 1:100

14 En el mapa del Perú durante el Virreinato, tomando como punto de referencia la ciudad de Tarma, ¿cuántas ciudades se muestran en el cuarto cuadrante?

- a) 1
- b) 4
- c) 5
- d) 8



15 Haciendo uso de una regla, ¿cuál es la escala utilizada en la siguiente imagen, sabiendo que el ancho de la casa es de 8 m?



- a) 1:100
- b) 1:150
- c) 1:200
- d) 1:250