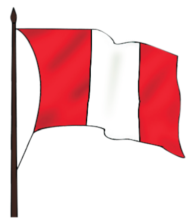
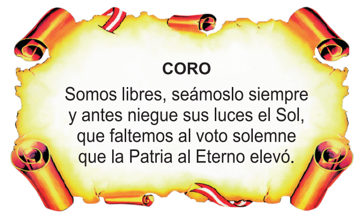
SÍMBOLOS DE LA PATRIA



Bandera Nacional



Himno Nacional

Escudo Nacional

DECLARACIÓN UNIVERSAL DE LOS DERECHOS HUMANOS

El 10 de diciembre de 1948, la Asamblea General de las Naciones Unidas aprobó y proclamó la Declaración Universal de Derechos Humanos, cuyos artículos figuran a continuación:

Artículo 1
Todos los seres humanos nacen libres e iguales en dignidad y derechos y, (...) deben comportarse fraternalmente los unos con los otros.

Artículo 2
Toda persona tiene los derechos y libertades proclamados en esta Declaración, sin distinción alguna de raza, color, sexo, idioma, religión, opinión política o de cualquier otra índole, origen nacional o social, posición económica, nacimiento o cualquier otra condición. Además, no se hará distinción alguna fundada en la condición política, jurídica o internacional del país o territorio de cuya jurisdicción dependa una persona (...).

Artículo 3
Todo individuo tiene derecho a la vida, a la libertad y a la seguridad de su persona.

Artículo 4
Nadie estará sometido a esclavitud ni a servidumbre; la esclavitud y la trata de esclavos están prohibidas en todas sus formas.

Artículo 5
Nadie será sometido a torturas ni a penas o tratos crueles, inhumanos o degradantes.

Artículo 6
Todo ser humano tiene derecho, en todas partes, al reconocimiento de su personalidad jurídica.

Artículo 7
Todos son iguales ante la ley y tienen, sin distinción, derecho a igual protección de la ley. Todos tienen derecho a igual protección contra toda discriminación que infrinja esta Declaración (...).

Artículo 8
Toda persona tiene derecho a un recurso efectivo, ante los tribunales nacionales competentes, que la ampare contra actos que violen sus derechos fundamentales (...).

Artículo 9
Nadie podrá ser arbitrariamente detenido, preso ni desterrado.

Artículo 10
Toda persona tiene derecho, en condiciones de plena igualdad, a ser oída públicamente y con justicia por un tribunal independiente e imparcial, para la determinación de sus derechos y obligaciones o para el examen de cualquier acusación contra ella en materia penal.

Artículo 11
1. Toda persona acusada de delito tiene derecho a que se presuma su inocencia mientras no se pruebe su culpabilidad (...).
2. Nadie será condenado por actos u omisiones que en el momento de cometerse no fueron delictivos según el Derecho nacional o internacional. Tampoco se impondrá pena más grave que la aplicable en el momento de la comisión del delito.

Artículo 12
Nadie será objeto de injerencias arbitrarias en su vida privada, su familia, su domicilio o su correspondencia, ni de ataques a su honra o a su reputación. Toda persona tiene derecho a la protección de la ley contra tales injerencias o ataques.

Artículo 13
1. Toda persona tiene derecho a circular libremente y a elegir su residencia en el territorio de un Estado.
2. Toda persona tiene derecho a salir de cualquier país, incluso el propio, y a regresar a su país.

Artículo 14
1. En caso de persecución, toda persona tiene derecho a buscar asilo, y a disfrutar de él, en cualquier país.
2. Este derecho no podrá ser invocado contra una acción judicial realmente originada por delitos comunes o por actos opuestos a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 15
1. Toda persona tiene derecho a una nacionalidad.
2. A nadie se privará arbitrariamente de su nacionalidad ni del derecho a cambiar de nacionalidad.

Artículo 16
1. Los hombres y las mujeres, a partir de la edad núbil, tienen derecho, sin restricción alguna por motivos de raza, nacionalidad o religión, a casarse y fundar una familia (...).
2. Sólo mediante libre y pleno consentimiento de los futuros esposos podrá contraerse el matrimonio.
3. La familia es el elemento natural y fundamental de la sociedad y tiene derecho a la protección de la sociedad y del Estado.

Artículo 17
1. Toda persona tiene derecho a la propiedad, individual y colectivamente.
2. Nadie será privado arbitrariamente de su propiedad.

Artículo 18
Toda persona tiene derecho a la libertad de pensamiento, de conciencia y de religión (...).

Artículo 19
Todo individuo tiene derecho a la libertad de opinión y de expresión (...).

Artículo 20
1. Toda persona tiene derecho a la libertad de reunión y de asociación pacíficas.
2. Nadie podrá ser obligado a pertenecer a una asociación.

Artículo 21
1. Toda persona tiene derecho a participar en el gobierno de su país, directamente o por medio de representantes libremente escogidos.
2. Toda persona tiene el derecho de acceso, en condiciones de igualdad, a las funciones públicas de su país.
3. La voluntad del pueblo es la base de la autoridad del poder público; esta voluntad se expresará mediante elecciones auténticas que habrán de celebrarse periódicamente, por sufragio universal e igual y por voto secreto u otro procedimiento equivalente que garantice la libertad del voto.

Artículo 22
Toda persona (...) tiene derecho a la seguridad social, y a obtener, (...) habida cuenta de la organización y los recursos de cada Estado, la satisfacción de los derechos económicos, sociales y culturales, indispensables a su dignidad y al libre desarrollo de su personalidad.

Artículo 23
1. Toda persona tiene derecho al trabajo, a la libre elección de su trabajo, a condiciones equitativas y satisfactorias de trabajo y a la protección contra el desempleo.
2. Toda persona tiene derecho, sin discriminación alguna, a igual salario por trabajo igual.
3. Toda persona que trabaja tiene derecho a una remuneración equitativa y satisfactoria, que le asegure, así como a su familia, una existencia conforme a la dignidad humana y que será completada, en caso necesario, por cualesquiera otros medios de protección social.
4. Toda persona tiene derecho a fundar sindicatos y a sindicarse para la defensa de sus intereses.

Artículo 24
Toda persona tiene derecho al descanso, al disfrute del tiempo libre, a una limitación razonable de la duración del trabajo y a vacaciones periódicas pagadas.

Artículo 25
1. Toda persona tiene derecho a un nivel de vida adecuado que le asegure, así como a su familia, la salud y el bienestar, y en especial la alimentación, el vestido, la vivienda, la asistencia médica y los servicios sociales necesarios; tiene asimismo derecho a los seguros en caso de desempleo, enfermedad, invalidez, viudez, vejez y otros casos de pérdida de sus medios de subsistencia por circunstancias independientes de su voluntad.
2. La maternidad y la infancia tienen derecho a cuidados y asistencia especiales. Todos los niños, nacidos de matrimonio o fuera de matrimonio, tienen derecho a igual protección social.

Artículo 26
1. Toda persona tiene derecho a la educación. La educación debe ser gratuita, al menos en lo concerniente a la instrucción elemental y fundamental. La instrucción elemental será obligatoria. La instrucción técnica y profesional habrá de ser generalizada; el acceso a los estudios superiores será igual para todos, en función de los méritos respectivos.
2. La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana y el fortalecimiento del respeto a los derechos humanos y a las libertades fundamentales; favorecerá la comprensión, la tolerancia y la amistad entre todas las naciones y todos los grupos étnicos o religiosos; y promoverá el desarrollo de las actividades de las Naciones Unidas para el mantenimiento de la paz.
3. Los padres tendrán derecho preferente a escoger el tipo de educación que habrá de darse a sus hijos.

Artículo 27
1. Toda persona tiene derecho a tomar parte libremente en la vida cultural de la comunidad, a gozar de las artes y a participar en el progreso científico y en los beneficios que de él resulten.
2. Toda persona tiene derecho a la protección de los intereses morales y materiales que le correspondan por razón de las producciones científicas, literarias o artísticas de que sea autora.

Artículo 28
Toda persona tiene derecho a que se establezca un orden social e internacional en el que los derechos y libertades proclamados en esta Declaración se hagan plenamente efectivos.

Artículo 29
1. Toda persona tiene deberes respecto a la comunidad(...).
2. En el ejercicio de sus derechos y en el disfrute de sus libertades, toda persona estará solamente sujeta a las limitaciones establecidas por la ley con el único fin de asegurar el reconocimiento y el respeto de los derechos y libertades de los demás, y de satisfacer las justas exigencias de la moral, del orden público y del bienestar general en una sociedad democrática.
3. Estos derechos y libertades no podrán en ningún caso ser ejercidos en oposición a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 30
Nada en la presente Declaración podrá interpretarse en el sentido de que confiere derecho alguno al Estado, a un grupo o a una persona, para emprender y desarrollar actividades (...) tendientes a la supresión de cualquiera de los derechos y libertades proclamados en esta Declaración.

SECUNDARIA

RESOLVAMOS PROBLEMAS - Manual para el docente

5

Resolvamos problemas

Manual para el docente

Secundaria 5

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

EL ACUERDO NACIONAL

El 22 de julio de 2002, los representantes de las organizaciones políticas, religiosas, del Gobierno y de la sociedad civil firmaron el compromiso de trabajar, todos, para conseguir el bienestar y desarrollo del país. Este compromiso es el Acuerdo Nacional.

El acuerdo persigue cuatro objetivos fundamentales. Para alcanzarlos, todos los peruanos de buena voluntad tenemos, desde el lugar que ocupemos o el rol que desempeñemos, el deber y la responsabilidad de decidir, ejecutar, vigilar o defender los compromisos asumidos. Estos son tan importantes que serán respetados como políticas permanentes para el futuro.

Por esta razón, como niños, niñas, adolescentes o adultos, ya sea como estudiantes o trabajadores, debemos promover y fortalecer acciones que garanticen el cumplimiento de esos cuatro objetivos que son los siguientes:

1. Democracia y Estado de Derecho

La justicia, la paz y el desarrollo que necesitamos los peruanos sólo se pueden dar si conseguimos una verdadera democracia. El compromiso del Acuerdo Nacional es garantizar una sociedad en la que los derechos son respetados y los ciudadanos viven seguros y expresan con libertad sus opiniones a partir del diálogo abierto y enriquecedor; decidiendo lo mejor para el país.

2. Equidad y Justicia Social

Para poder construir nuestra democracia, es necesario que cada una de las personas que conformamos esta sociedad, nos sintamos parte de ella. Con este fin, el Acuerdo promoverá el acceso a las oportunidades económicas, sociales, culturales y políticas. Todos los peruanos tenemos derecho a un empleo digno, a una educación de calidad, a una salud integral, a un lugar para vivir. Así, alcanzaremos el desarrollo pleno.

3. Competitividad del País

Para afianzar la economía, el Acuerdo se compromete a fomentar el espíritu de competitividad en las empresas, es decir, mejorar la calidad de los productos y servicios, asegurar el acceso a la formalización de las pequeñas empresas y sumar esfuerzos para fomentar la colocación de nuestros productos en los mercados internacionales.

4. Estado Eficiente, Transparente y Descentralizado

Es de vital importancia que el Estado cumpla con sus obligaciones de manera eficiente y transparente para ponerse al servicio de todos los peruanos. El Acuerdo se compromete a modernizar la administración pública, desarrollar instrumentos que eliminen la corrupción o el uso indebido del poder. Asimismo, descentralizar el poder y la economía para asegurar que el Estado sirva a todos los peruanos sin excepción.

Mediante el Acuerdo Nacional nos comprometemos a desarrollar maneras de controlar el cumplimiento de estas políticas de Estado, a brindar apoyo y difundir constantemente sus acciones a la sociedad en general.

Resolvamos problemas

Manual para el docente

Secundaria 5

REPÚBLICA DEL PERÚ

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

REPÚBLICA DEL PERÚ

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Resolvamos problemas 5
Manual para el docente

Editado por
Ministerio de Educación
Calle Del Comercio N.° 193, San Borja
Lima 41, Perú
Teléfono: 615-5800
www.minedu.gob.pe

Propuesta de contenidos:
Olber Muñoz Solís
Richard del Pino Vásquez

Revisión pedagógica:
Olber Muñoz Solís

Diseño y diagramación:
Carlos Héctor Boza Loayza

Corrección de estilo:
Mario Jhonny Ávila Rubio

Primera edición: setiembre de 2017
Tiraje: 4350 ejemplares

Impreso por
Consorcio Corporación Gráfica Navarrete S. A., Amauta Impresiones Comerciales S. A. C., Metrocolor S. A. Se terminó de imprimir en marzo de 2018, en los talleres gráficos de Metrocolor S. A., sito en Jr. Los Gorriones N.° 350, Urb. La Campiña, Chorrillos, Lima.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.° 2018-03979
Impreso en el Perú / *Printed in Peru*

Querido(a) docente:

Es de sumo agrado para nosotros poner en tus manos el manual de *Resolvamos problemas 5*, cuyo propósito es ofrecerte sesiones de aprendizaje para abordar las situaciones significativas presentadas en cada ficha del cuaderno de trabajo.

Las sesiones de aprendizaje que se proponen están estructuradas de la siguiente manera:

Inicio

Se presentan sugerencias para organizar a los equipos de trabajo, promoviendo una atención diferenciada, de manera que se brinde mayor apoyo al equipo que requiere consolidar los aprendizajes propuestos. Se presentan los propósitos por lograr y las pautas para el trabajo en equipo.

Desarrollo

Se explica cómo está organizada la sección *Aprendemos*, cuyas actividades han sido planteadas de acuerdo con las fases de *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).

Se sugiere que, para dar respuesta a las interrogantes de la sección *Aprendemos*, se realice un trabajo conjunto entre el docente y los estudiantes del equipo que requiere mayor atención. Para asegurar el logro de los aprendizajes propuestos, se presentan respuestas sugeridas a las interrogantes planteadas en las fases de *Resolución de problemas*.

En lo que respecta a la sección *Analizamos*, se abordan las tres situaciones con sus respectivas resoluciones: en las situaciones A y B, los estudiantes explicarán, reconocerán y describirán los procesos y las estrategias que se utilizaron para su resolución; y en la situación C, reconocerán el error de definiciones y de cálculo, a partir de lo cual plantearán la corrección del correspondiente proceso de resolución.

Por otro lado, se brindan indicaciones de cómo los estudiantes deberán desarrollar las situaciones de contexto propuestas en la sección *Practicamos*, las cuales se organizan por colores con relación al grado de dificultad. Así, pues, el verde identifica a las situaciones de familiarización, que serán desarrolladas por los estudiantes que se encuentran en el nivel inicio; el amarillo refiere situaciones de traducción simple, que serán desarrolladas por los que se hallan en proceso; y el azul corresponde a situaciones de traducción compleja, que serán desarrolladas por quienes se encuentran en el nivel destacado. Esta sección *Practicamos* deberá ser trabajada por cada estudiante de manera individual.

Cierre

Se promueve la reflexión del proceso de aprendizaje, mediante preguntas o indicaciones propuestas por el docente, que permiten a los estudiantes explicar sus dificultades en el desarrollo de las actividades propuestas y cómo lograron superarlas, así como describir las estrategias empleadas en este proceso.

Reforzamos en casa

Son situaciones de contextos diversos que se presentan en la sección *Practicamos*, donde se indica qué situaciones deberá desarrollar el estudiante que se ubica en cada nivel (inicio, proceso y destacado).

Finalmente, te invitamos a continuar transitando el camino de la gestión de los aprendizajes, con el fin de contribuir con tu talento al desarrollo de las competencias matemáticas en los estudiantes a tu cargo.

Contenido

Conociendo algunas estrategias

Un buen resolutor de problemas debe llegar a desarrollar la capacidad de resolver un problema con diversos métodos; además, necesita estar en capacidad de combinar estrategias creativamente. En cada etapa de desarrollo de la solución, debemos definir qué estrategia se utilizará en la siguiente fase.

1. Estrategias de comprensión

Lectura analítica

Leer analíticamente un texto es dividirlo en unidades que proporcionen algún tipo de información y establecer, luego, cómo estas partes se interrelacionan y muestran el panorama de lo que se quiere decir. Al leer un problema de manera analítica, uno puede hacerse estas preguntas: ¿quiénes participan en la historia?, ¿qué es lo que no varía a lo largo de la historia?, ¿cuántos estados se perciben en el texto?, ¿cuáles son los datos que nos proporciona?, ¿qué datos son relevantes para resolver el problema?, ¿qué debemos encontrar?, ¿qué condiciones se imponen a lo que buscamos?, entre otras interrogantes que ayudarán a que el estudiante se familiarice y le pierda temor a la situación.

La lectura analítica ayuda mucho en la comprensión lectora del texto que da origen a un problema, pero no garantiza el camino a su solución. Leer analíticamente no es identificar las palabras claves ni buscar *tips* para encontrar la variable (estos son procesos mecánicos que no ayudan a comprender cabalmente un problema). En la vida real, los problemas matemáticos pueden no contener esas palabras claves que aparecen en problemas diseñados para libros de texto, por lo que el estudiante enfocará erradamente un problema si hace uso de este mecanismo.

La lectura analítica es importante en la comprensión de problemas, pues estos textos contienen elementos matemáticos como números, diagramas, relaciones dentro de una historia o un contexto real complejo, por lo que no es lo mismo que leer un cuento o un ensayo. De hecho, hay personas que comprenden perfectamente textos humanísticos, pero no aquellos que contienen elementos matemáticos.

Parafrasear

Parafrasear es decir algo de otro modo para clarificar y comprender un texto. Explicar un problema con nuestras propias palabras ayuda mucho en el proceso de comprensión. Se debe decir que parafrasear no implica aprenderse de memoria un texto y repetirlo; es señalar lo más importante de una historia y expresarlo con palabras, evitando en lo posible particularidades como números, fechas, nombres, locaciones, etc.

Veamos un ejemplo para aclarar este enfoque:

Problema	Parafraseo
Jaime fue el organizador de la fiesta de fin de año de su colegio. Él proyectó ganar S/4800, para lo cual repartió 200 tarjetas; pero, lamentablemente, solo se vendieron 130, lo que le causó una pérdida de S/150. ¿Cuánto invirtió en la fiesta?	Una persona organiza una fiesta. Para ganar necesita vender una cantidad de tarjetas; pero vende menos y pierde. Nos piden saber cuánto invirtió en la fiesta.

Se sugiere que el docente tome todos los problemas del cuaderno y realice una lectura analítica de ellos, que produzca sus propios esquemas de comprensión y realice al menos dos parafraseos por cada problema presentado. Esos ejercicios le ayudarán a mejorar su desempeño en la conducción de las tareas en el aula.

Hacer esquemas

La capacidad de representar una situación compleja mediante esquemas es algo que se va aprendiendo desde los primeros años de escolaridad y continúa en proceso de construcción toda la vida. Hacer e interpretar esquemas son algunas de las capacidades más necesarias en nuestra vida laboral adulta. En diversas situaciones cotidianas se requiere de la esquematización de los sistemas, las situaciones, los procesos, con el fin de comprenderlos mejor. Un esquema apunta a encontrar una estrategia de solución; no existe una relación directa entre hacer un esquema y dar solución a un problema, pero ayuda mucho en este proceso.

2. Estrategias de resolución

Una estrategia importante en la búsqueda de soluciones es representar el problema mediante algún organizador visual. Aquí presentamos algunos organizadores de información que se utilizan frecuentemente en el proceso de resolver problemas matemáticos.

Diagramas de tiras

Se utilizan mayormente cuando la cantidad que interviene en el problema varía en el tiempo o es dividida en partes que se relacionan entre sí.

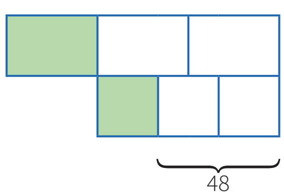
Ejemplo:

La tercera parte de las entradas para el estreno de una película se vendieron días antes de la función, y 1/3 del resto se vendió el día del estreno. Finalmente, quedaron 48 entradas sin vender. ¿Cuál era el número total de entradas previsto para la función de estreno?

Solución:

Cantidad: Número total de entradas.

Elabora un diagrama de tiras.



Diagramas tabulares (tablas)

Se emplean cuando se brinda información sobre características que relacionan dos grupos. También en problemas sobre edades o de proporcionalidad, en los que se debe buscar algún patrón o regla de formación.

Ejemplo:

Dos amigos tienen lápices, borradores y tajadores en sus cartucheras. Hay 8 borradores en total. Mónica tiene el doble de lápices que Felipe, quien tiene 5 tajadores más que lápices. Mónica tiene tantos tajadores como lápices posee Felipe. Mónica tiene 18 útiles y ningún borrador. ¿Cuántos lápices, tajadores y borradores tiene cada uno?

Solución:

Grupo 1: Mónica, Felipe.

Grupo 2: Lápices, borradores, tajadores.

	Lápices	Borradores	Tajadores	TOTAL
Mónica	$2x$	0	x	18
Felipe	x	8	$x + 5$	
TOTAL		8		

Diagramas analógicos

Se suelen utilizar en problemas geométricos. Son dibujos que representan la realidad de manera similar, pero esquemática, sin considerar los elementos irrelevantes para el problema.

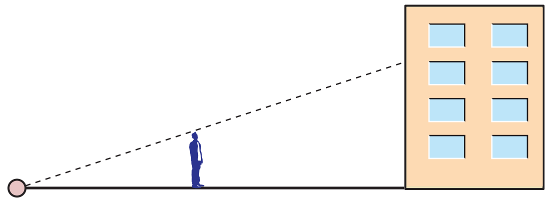
Mediante esta representación es posible visualizar las relaciones entre los datos y las incógnitas.

Ejemplo:

Un hombre de 1,8 m de estatura camina hacia un edificio a razón de 1,5 m/s. Si hay una lámpara sobre el suelo a 15 m del edificio, ¿cuánto mide la sombra del hombre sobre el edificio cuando se encuentra a 9 m de este?

Solución:

Hagamos un diagrama que represente la situación narrada.



Diagramas de flujo

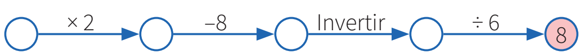
Se emplean cuando una cantidad varía a lo largo de la historia o si tenemos la situación final de esta cantidad. También cuando se dan secuencias de pasos para encontrar objetos matemáticos, entre otras aplicaciones.

Ejemplo:

Un número se duplica, luego se le resta 8 y después se invierten las cifras de este número. Finalmente, se divide por 6 y se obtiene 8. ¿Cuál era el número?

Solución:

Haremos un diagrama que indique las fases por las que pasó el número.



Diagramas conjuntistas

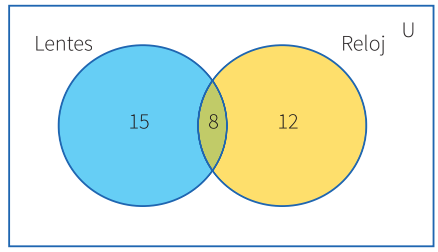
Se suele recurrir a estos cuando se trata de información acerca de dos o más grupos cuyos elementos pueden pertenecer a más de un conjunto. También cuando se deben realizar clasificaciones. Los más conocidos son los diagramas de Venn y los de Carroll.

Ejemplo:

De los 35 estudiantes de un aula, 23 usan lentes, y 20, reloj. ¿Cuántos usan ambas cosas?

Solución:

Grupo 1: Estudiantes que usan lentes.
Grupo 2: Estudiantes que usan reloj.



Diagramas cartesianos

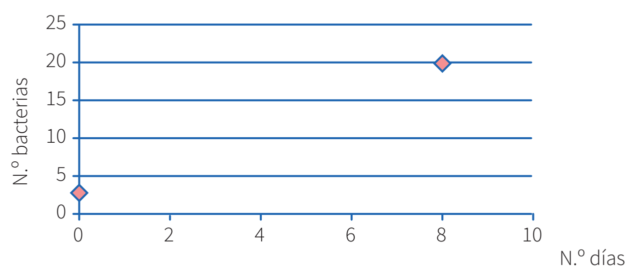
Son de gran utilidad cuando se requiere representar funciones o si tenemos pares ordenados o relaciones entre dos variables.

Ejemplo:

El crecimiento de un grupo de bacterias se da con el paso de los días de manera constante. Al inicio, había 3 bacterias, y después de 8 días llegan a 20. ¿Cuántos días transcurrirán desde el inicio para que la colonia tenga 400 bacterias?

Solución:

Cantidad:
Organizaremos los datos en un gráfico cartesiano.
Pares ordenados: (0; 3) (8; 20)



Diagramas lineales

Se usan cuando se cuenta con información acerca de una característica de un solo grupo. Generalmente se emplean para ordenar los elementos del grupo con respecto a esa característica.

Ejemplo:

Si tanto Roberto como Alfredo están más alegres que Tomás, mientras que Alberto se encuentra menos alegre que Roberto, pero más alegre que Alfredo, ¿quién está menos alegre?

Solución:

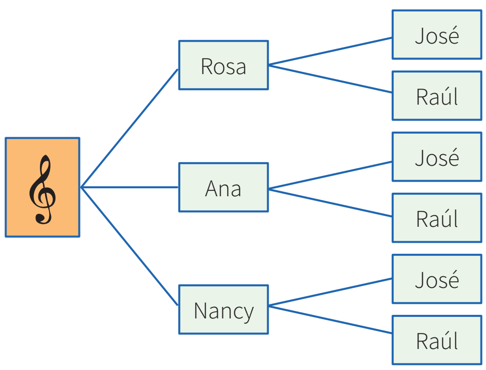
Tomás, Alfredo, Alberto, Roberto

Tomás Alfredo Alberto Roberto +

Diagramas de árbol

Se suelen utilizar en conteos de casos posibles o para hacer listas sistemáticas. Es la representación gráfica de los principios de adición y multiplicación.

Ejemplo: Un productor de cumbia quiere armar un dúo mixto (varón y mujer). Puede elegir entre 3 cantantes mujeres y 2 cantantes varones. ¿Cuántos dúos mixtos diferentes puede formar?



3. Otras estrategias

Busca patrones

En algunos problemas es necesario experimentar con varios casos con el fin de encontrar pautas o regularidades que después se podrán emplear para llegar a la solución.

Ejemplo:

El arreglo mostrado se conoce como el triángulo de Pascal.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

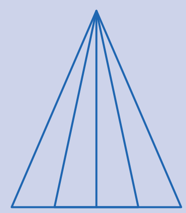
Escribe las tres filas siguientes de este arreglo. Como observas, cada fila empieza por uno. ¿Qué número sigue al 1 en la fila 75?, ¿cuál es la suma de los números que ocupan la fila número veinte?, ¿puedes encontrar un patrón en las diagonales del triángulo de Pascal?

Haz una lista sistemática

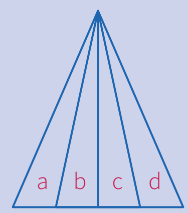
En los casos en que se requiere la enumeración de objetos matemáticos, es conveniente realizar un conteo o listado organizado, con el fin de no dejar de lado ninguna posibilidad. Esta estrategia es muy útil al buscar soluciones en una ecuación polinómica, para encontrar espacios muestrales o resolver problemas de permutaciones o combinaciones.

Ejemplo:

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Pongamos una etiqueta a cada uno de los cuatro triángulos en que se ha dividido el triángulo mayor.



Solución:

- Contemos ahora los triángulos identificándolos por el número de letras:

  Triángulos con una letra: a-b-c-d

  Triángulos con dos letras: ab-bc-cd

  Triángulos con tres letras: abc-bcd

  Triángulos con cuatro letras: abcd
- En total tenemos: 4 + 3 + 2 + 1 = 10 triángulos.

Generaliza

En algunos problemas puede ser muy útil simbolizar las expresiones o averiguar si lo que piden se refiere a un caso particular de alguna propiedad general; a esto se conoce como *la paradoja del inventor*. A veces, es conveniente investigar más de lo que piden.

Ejemplo:

Halla el valor de $(234\,756\,474)^2 - (234\,756\,473)^2$.

Solución:

Se observa que elevar al cuadrado cada número y luego realizar la resta sería demasiado laborioso, así que se trata de ver en la estructura del problema alguna particularidad. Lo primero que se observa es que consiste en una diferencia de cuadrados, lo que nos hace recordar las fórmulas algebraicas pertinentes. Además, se aprecia que los números son consecutivos.

- Al generalizar el problema, se observa que se solicita:

  $(n + 1)^2 - n^2$, cuando n vale 234 756 473

- Factorizando por diferencia de cuadrados, se tiene:

  $(n + 1 + n)\ (n + 1 - n) = (n + 1) + n$

- Luego, podemos afirmar que, para cualquier n entero positivo, se cumple:

  $(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1) + n = 2n + 1$

- Ahora el problema se ha simplificado bastante; para hallar la respuesta, solo basta duplicar el número dado y aumentarle 1.

  Entonces:

  $(234\,756\,474)^2 - (234\,756\,473)^2 = 469\,512\,947$

Particulariza

Conviene siempre utilizar casos particulares para familiarizarse con el problema; de este modo, es posible observar algún método que guíe hacia la solución de un problema genérico.

Ejemplo:

En una tienda de remates te ofrecen un descuento del 12 %, pero, al mismo tiempo, debes pagar el impuesto general a las ventas (18 %). ¿Qué preferirías que calculasen primero, el descuento o el impuesto?

Solución:

- Particularicemos para algunos casos: Si el artículo vale S/100 y elijo primero el descuento, termino pagando S/106. Pero si elijo pagar el impuesto antes, entonces termino pagando la misma cantidad.
- Podemos probar con otros precios y obtener un resultado análogo. Esta experimentación me da pie para inferir que es lo mismo elegir primero el descuento o el impuesto.
- Ahora deberé evaluar mi conjetura.

Razona lógicamente

El razonamiento lógico es muy importante al resolver problemas, pues gracias a él podemos engarzar los pasos y comprender las secuencias y cadenas de razonamientos que se producen en el desarrollo de su solución. Un ejemplo clásico es el siguiente acertijo.

Ejemplo:

José, Jaime, Tito y Rosa son guardias en un museo. Ellos hacen guardia cuatro días a la semana. Dos personas solamente hacen guardia cada día. Nadie hace tres días de guardia seguidos. ¿Cuál de los tres hombres no hace guardia con Rosa?

Solución:

- Veamos una lista parcial que muestra los días de la semana en los que cada uno hace guardia:

Dom.	Lun.	Mar.	Miér.	Juev.	Vier.	Sáb.
José	Tito	Rosa	José	Jaime	Tito	Rosa
Jaime						

Empieza por el final

La estrategia de utilizar el pensamiento regresivo se utiliza mayormente en problemas en los cuales tenemos información de una situación final; también para demostrar desigualdades. La combinación de métodos progresivos y regresivos es una potente técnica para demostrar teoremas.

La utilización del razonamiento regresivo nos evitará tener que trabajar con ecuaciones complicadas.

Ejemplo:

El nivel del agua de un pozo desciende 3 centímetros por debajo de su mitad en cada hora, hasta quedar vacío luego de 4 horas. ¿Qué profundidad tenía el agua inicialmente?

Solución:

- "3 cm debajo de su mitad" se interpreta como $\div\, 2, -3$.
- Esto ocurre en cada hora y se repite 4 veces, ya que todo el suceso ocurre en 4 horas; de modo que al final el nivel es cero (0).
- Las operaciones directas serían así:

  $x \rightarrow (\div\, 2, -3, \div\, 2, -3, \div\, 2, -3, \div\, 2, -3) \rightarrow 0$
- Ahora, operando al revés, obtenemos: $x = 90$

Plantea una ecuación

Una de las técnicas de modelación por excelencia a nivel elemental es el planteo de ecuaciones. Lo primordial para poderla aplicar con éxito es el entrenamiento que se tenga en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico. Es conveniente ponerse de acuerdo en cuanto a convenciones generales de redacción para no crear ambigüedades.

Ejemplo:

Dos velas de la misma longitud se encienden al mismo tiempo. La primera se consume en 4 horas, y la segunda, en 3. ¿Cuánto tiempo pasa, después de haberse encendido, hasta que la primera vela tenga el doble de longitud que la segunda?

Solución:

- La primera vela se consume en su cuarta parte cada hora.
- La segunda se consume en su tercera parte cada hora.

  Tiene que verificarse; por tanto:

  $L - (1/4)Lx = 2\,[L - (1/3)Lx]$; simplificando:

  $1 - (1/4)\,x = 2 - (2/3)x$; de donde $x = 2{,}4$ horas
- Es decir, pasan 2 horas 24 minutos.

Establece submetas

Muchas veces, para llegar a la solución de un problema, se deben resolver problemas más pequeños. Es como escalar una gran montaña: se sabe que se debe llegar a alturas menores para conquistar la cima. De igual manera, para resolver un problema original, se necesita de un problema auxiliar que sirva de medio.

Ejemplo:

Supongamos que la población actual del Perú es de 22 millones de habitantes y se sabe que la tasa de crecimiento es de un 5 % anual. ¿En cuánto tiempo se duplicará la población?

©Shutterstock

Solución:

- La primera meta es hallar una fórmula que modele el comportamiento de la población, y solo después de formada se igualará a 44 millones. Si bien, aquí la incógnita es el tiempo, se busca en su lugar la relación entre el tiempo y el número de habitantes.

Utiliza el ensayo y error

Tantear es una estrategia muy útil cuando se hace de forma organizada y evaluando cada vez los ensayos que se realizan. En realidad, algunos métodos específicos de solución, como el de regulación o el de aproximaciones sucesivas, se basan en el uso sistemático de numerosos ensayos y sus respectivas correcciones. La idea es que cada rectificación conduzca a un ensayo que se acerque más a la respuesta.

Ejemplo:

Un libro se abre al azar. El producto de las dos páginas observadas en ese momento es 3192. ¿Cuál es el número de las páginas en las que se abrió el libro?


©Shutterstock

Solución:

- Primero se observa que $50 \times 50 = 2500$, número que no llega; y que $60 \times 60 = 3600$, el cual se pasa. Con esto observamos que los números están en el rango entre 50 y 60.
- 55×56 no puede ser, pues el producto termina en 0. Se quiere que termine en 2 y que los números sean consecutivos.
- Al probar $53 \times 54 = 2862$, el resultado no corresponde.
- Pero, al hacer la prueba con $56 \times 57 = 3192$, se observa que cumple con el resultado que plantea el problema.
- Entonces, las páginas que se observaron fueron la 56 y la 57.

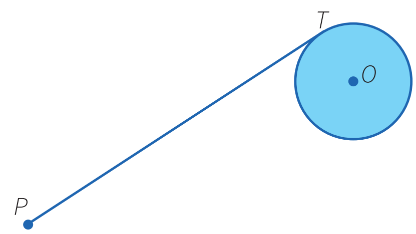
Supón el problema resuelto

Ejemplo:

Usando solo regla y compás construye una tangente a una circunferencia dada, desde un punto exterior a ella.

Solución:

Para resolver este problema, se supone que se debe hallar la tangente a una circunferencia, trazada desde un punto exterior a ella.



- El punto T es de tangencia. Entonces, ¿qué relación existe entre la tangente y algún elemento de la circunferencia? ¿Hay algún teorema que los relacione?
- Existe un teorema que nos dice que el radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia.
- Por tanto, si unimos O con T, tendremos que OT es perpendicular a PT.
- Además, como tenemos tres puntos involucrados, P, T y O, es posible hacer un triángulo uniendo el punto P con el punto O. Se observa que el triángulo es rectángulo.

Sesión 1

Duración: 2 horas pedagógicas

Usamos cantidades grandes y pequeñas

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de cantidad.	Traduce cantidades a expresiones numéricas.	Establece relaciones entre datos y las transforma a expresiones numéricas (modelos) que incluyen operaciones con notación exponencial y científica.
	Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones.	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico una cantidad muy grande o muy pequeña en notación científica. Asimismo, compara cantidades expresadas en notación científica.
	Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.	Selecciona, combina y adapta estrategias de cálculo, estimación, recursos y procedimientos diversos para realizar operaciones con cantidades en notación científica y para simplificar procesos usando las propiedades de los números y las operaciones.

II. Secuencia didáctica

Inicio (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de sus estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Se debe brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que deben establecer una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que se deben respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, lo que garantizará un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de los estudiantes y fomentar los espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica el logro previsto para la sesión:
  - Reconocer las características de una población para clasificarla según el tipo de variable cualitativa o cuantitativa, y usar tablas o modelos gráficos pertinentes al tipo de variable para producir información.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. ¿De qué datos dispones en el problema?

   Número de personas infectadas con el VIH en el Perú, Latinoamérica, África y el mundo.

2. ¿Sabes a qué quieres llegar?

   A determinar el porcentaje de infectados con el VIH en el Perú con respecto a los infectados en Latinoamérica, y en el continente africano con respecto al mundo.

3. ¿Qué conocimiento te ayudará a resolver el problema?

   La representación de un número en notación científica y notación exponencial.

4. ¿Esta situación es similar a algún otro problema que has resuelto anteriormente?

   Sí, a cantidades sobre la distancia del Sol con relación a los planetas, la medición de CO_2 a nivel mundial, etc.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Qué estrategia te sirve para resolver el problema? ¿Por qué?

   El diagrama tabular, porque facilita organizar los datos y ayuda a visualizar la relación existente entre las cantidades de la tabla.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Inicia el plan elegido. Indaga cómo escribir en forma exponencial y en notación científica. Propón ejemplos sencillos.

   Por ejemplo:

   $2000 = 200 \times 10 = 20 \times 10^2 = 2 \times 10^3$ y $520\,000 = 52\,000 \times 10 = 5200 \times 10^2 = 520 \times 10^3 = 52 \times 10^4 = 5{,}2 \times 10^5$. Todas son formas exponenciales; sin embargo, solo las que tienen una cifra entera mayor o igual que 1 pero menor que 10 están en notación científica.

   También: $0{,}0083 = 0{,}083 \times 10^{-1} = 0{,}83 \times 10^{-2} = 8{,}3 \times 10^{-3}$. En este ejemplo, solo la última expresión está en notación científica, por tener una cifra entera.

2. Expresa las cantidades del problema en notación científica.

   Mundo: $36\,900\,000 = 3{,}69 \times 10^7$; África: $25\,800\,000 = 2{,}58 \times 10^7$

   Latinoamérica: $1\,700\,000 = 1{,}7 \times 10^6$; Perú: $65\,000 = 6{,}5 \times 10^4$

3. Completa la tabla para resolver la pregunta 2 de la situación inicial.

	Número de infectados	Porcentaje
África	$2,58 \times 10^7$	x
Mundo	$3,69 \times 10^7$	100 %

4. Calcula el porcentaje desconocido. Expresa la respuesta en notación científica.

$x = \dfrac{2,58 \times 10^7 \times 100\ \%}{3,69 \times 10^7} = 69,9\ \%$; la expresión en notación científica es $6,99 \times 10^{-1}$ %.

5. Procede de manera similar para resolver la pregunta 3 de la situación inicial.

Insertar la tabla de la pregunta del cuaderno de trabajo similar al caso 2 y luego aplicar la regla de tres simple, donde $x = 3,8235$ %

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿Podrías haber resuelto la situación sin necesidad de expresar las cantidades en notación científica? ¿Presenta ventaja o desventaja?

   Sí se puede resolver directamente sin hacer uso de la notación científica; pero, cuando se trata de números grandes o pequeños, presenta dificultad por la cantidad de cifras que se usan.

2. Describe y explica la estrategia que seleccionaste para resolver la situación.

   Se representaron las cantidades en notación científica y luego se organizaron en una tabla, para de esa manera visualizar la relación que existe entre ellas.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación B, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.
- Los estudiantes leen la situación B y en equipo responden las preguntas o enunciados, lo cual les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:

1. ¿Todos los pasos del procedimiento son correctos?

   Sí, primero se encuentra la equivalencia de un nanómetro a metros, luego se calcula el diámetro del virus en metros y, finalmente, se encuentra el diámetro del poro del condón.

2. En el caso de que hubiera un error, ¿cuál sería su corrección? De ser correcta la respuesta, busca otra forma de resolver el problema.

   Se observa un error al calcular el diámetro del virus y expresarlo en metros.

   Dice: $100\ nm = 10^2\ nm \times (1 \times 10^{-9}\ m)/2 = 1 \times 10^{-7}\ m$

   Debe decir: $100\ nm = 10^2\ nm \times 1 \times 10^{-9}\ m = 1 \times 10^{-7}\ m$

- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada:

1. Utiliza tu calculadora para comprobar el resultado sin hacer uso de la notación científica. ¿Es correcto tu resultado? Si tu respuesta es sí, propón una nueva resolución. Si es no, di cuál es el error y corrígelo.

   No es correcto. El error se produjo al utilizar el tanto por ciento; porque no corresponde aplicar la ley distributiva a los factores de una multiplicación.

   Bastaba con hacerlo para un solo factor:

   53 % de $(1,1 \times 10^7) = 0,583 \times 10^7 = 5,83 \times 10^6$

   $5,83 \times 10^6 \times 3,4 = 19,822 \times 10^6 = 1,9822 \times 10^7$ soles

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y estas serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.
- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

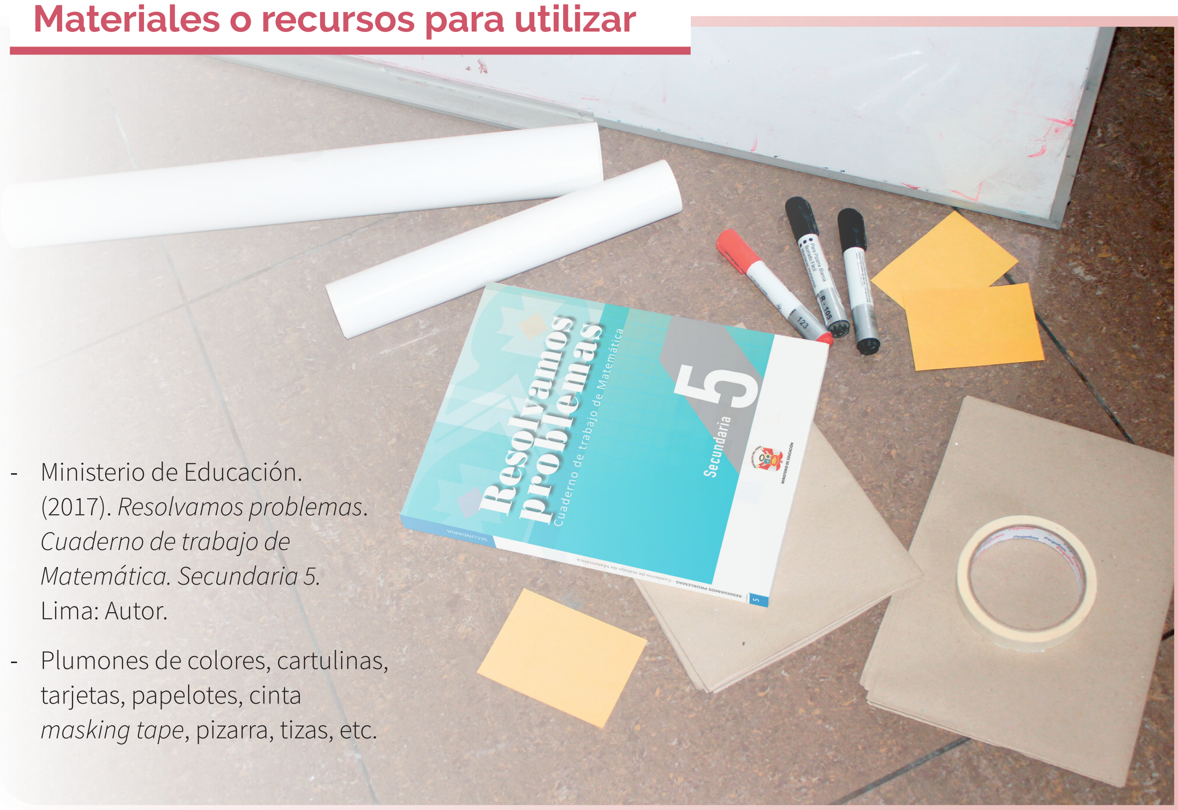
- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas:
  - ¿En qué situaciones tuviste dificultades? Explica por qué.
  - ¿Cómo superaste las dificultades presentadas?
  - Describe la estrategia empleada para desarrollar las actividades.
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación A de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar



- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

La Organización de Aviación Civil Internacional (OACI) presentó las estadísticas mundiales sobre el número de pasajeros peruanos transportados durante 14 años. La siguiente tabla tiene los datos aproximados escritos en notación científica:

Año	2001	2002	2003	2004	2005
Número de pasajeros	$2,25 \times 10^6$	$2,09 \times 10^6$	$2,23 \times 10^6$	$3,23 \times 10^6$	$4,33 \times 10^6$
Año	2006	2007	2008	2009	2010
Número de pasajeros	$4,22 \times 10^6$	$5,27 \times 10^6$	$6,18 \times 10^6$	$5,84 \times 10^6$	$7,11 \times 10^6$
Año	2011	2012	2013	2014	
Número de pasajeros	$8,61 \times 10^6$	1×10^7	$1,15 \times 10^7$	$1,23 \times 10^7$	

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. ¿Cuántos pasajeros peruanos, aproximadamente, fueron transportados en estos 14 años?

a) $8,516 \times 10^7$

b) $8,516 \times 10^6$

c) $5,474 \times 10^7$

d) $5,474 \times 10^8$

2. ¿Qué porcentaje representan los pasajeros transportados en los últimos 3 años con respecto al total de los 14 años?

a) 40 %

b) 62 %

c) 33,8 %

d) 85 %

La siguiente lista detalla las emisiones anuales de CO_2 de Latinoamérica por países, de acuerdo con estadísticas de la Organización de las Naciones Unidas monitoreadas en las Metas de Desarrollo del Milenio:

México: 471 459 toneladas	Ecuador: 29 989 toneladas	El Salvador: 6700 toneladas
Brasil: 368 317 toneladas	Bolivia: 13 190 toneladas	Uruguay: 6219 toneladas
Argentina: 183 728 toneladas	Guatemala: 12 930 toneladas	Nicaragua: 4591 toneladas
Venezuela: 165 550 toneladas	Honduras: 8834 toneladas	Paraguay: 4133 toneladas
Chile: 71 705 toneladas	Costa Rica: 8119 toneladas	
Perú: 42 988 toneladas	Panamá: 7250 toneladas	

Con la información dada, responde las preguntas 3 y 4.

3. ¿Cuántas toneladas en total de CO_2 emiten los países latinoamericanos anualmente? Expresa la respuesta en notación científica.

a) 1 405 702 toneladas de CO_2

b) $0,140\,570\,2 \times 10^7$ toneladas de CO_2

c) $1,405\,702 + 10^6$ toneladas de CO_2

d) $1,405\,702 \times 10^6$ toneladas de CO_2

4. ¿Qué porcentaje del total de las toneladas de CO_2 que emiten todos los países latinoamericanos representa la cantidad emitida por los países del Pacífico, como el Perú, Ecuador y Chile?

Respuesta adecuada
El estudiante comprende la situación, expresa las cantidades en notación científica y reconoce qué cantidad es el 100 % y cómo se halla qué tanto por ciento es una parte de este total.

Por ejemplo:
Escribimos los datos necesarios en notación científica.
Total de toneladas de CO_2 que emiten el Perú, Ecuador y Chile: 71 705 + 42 988 + 29 989 = 144 682
$144\,682 = 1{,}446\,82 \times 10^5$

Total de toneladas de CO_2 que emiten los países latinoamericanos: $1{,}405\,702 \times 10^6$

$$\frac{1{,}446\,82 \times 10^5}{1{,}405\,702 \times 10^6} = 0{,}102\,925\,086\,5 = 10{,}292\,5\ \%\ \text{aprox.}$$

Respuesta parcial
El estudiante comprende la situación, expresa las cantidades en notación científica, pero no reconoce qué cantidad es el 100 % o cómo se halla el porcentaje.

Respuesta inadecuada
El estudiante no expresa las cantidades en porcentaje.

5. Las distancias de la Tierra a la Luna y al Sol, en un momento en que están alineados, son 4×10^5 km y $1{,}5 \times 10^8$ km, respectivamente. ¿Cuántas veces es mayor la distancia de la Tierra al Sol que a la Luna, y cuál es la distancia aproximada de la Luna al Sol?

a) 1500 veces mayor; $1{,}496 \times 10^8$ km

b) 1500 veces mayor; $0{,}1496 \times 10^9$ km

c) 375 veces mayor; $1{,}496 \times 10^8$ km

d) 375 veces mayor; $0{,}1496 \times 10^9$ km

6. Si una persona tiene 5 litros de sangre y aproximadamente 4 500 000 glóbulos rojos en cada milímetro cúbico, calcula en notación científica su número aproximado de glóbulos rojos.

a) $2{,}25 \times 10^{13}$ glóbulos rojos

b) $22{,}5 \times 10^{12}$ glóbulos rojos

c) $22{,}5 \times 10^6$ glóbulos rojos

d) $2{,}25 \times 10^7$ glóbulos rojos

7. Se sabe que el crecimiento del cabello humano es muy rápido. Si su velocidad promedio es, aproximadamente, $1{,}6 \times 10^{-8}$ km/h, y si no te lo cortas por un mes (30 días), ¿cuántos centímetros habrá crecido? (Da una cantidad aproximada).

Respuesta adecuada
El estudiante evidencia que comprende el problema al usar estrategias que implican efectuar conversiones y aplicar fórmulas trabajando con expresiones en notación científica.

Por ejemplo:

Velocidad aproximada: $1{,}6 \times 10^{-8}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{10^3\ \text{m}}{1\ \text{km}} \times \frac{1\text{h}}{3{,}6 \cdot 10^3\ \text{s}}$

$v = 0{,}44 \times 10^{-8}$ m/s $\approx 4{,}4 \times 10^{-9}$ m/s

Usamos: $d = v \times t$, donde $t = 2\,592\,000$ s.

Luego: $d = (4{,}4 \times 10^{-9}\ \text{m/s})(2{,}592 \times 10^6\ \text{s}) = 11{,}4048 \times 10^{-3}$

$d = 1{,}140\,48 \times 10^{-2}$ m

Convertimos metros a centímetros:

$$1{,}140\,48 \times 10^{-2}\ \text{m} \times \frac{10^2\ \text{cm}}{1\ \text{m}} = 1{,}140\,48\ \text{cm}$$

Respuesta parcial
El estudiante comprende que debe expresar las cantidades en notación científica, pero no es capaz de realizar las conversiones necesarias para resolver el problema.

Respuesta inadecuada
El estudiante no es capaz de representar las cantidades en notación científica ni de realizar la conversión de unidades necesarias.

8. Por muchos factores, es difícil controlar las fábricas para que no contaminen el ambiente. Se ha detectado que los desperdicios echados a un río son una función cuadrática del tiempo. Si se echaron $1{,}15 \times 10^1$ toneladas en un periodo de 5 días, y $2{,}08 \times 10^1$ toneladas después de 8 días, determina un modelo algebraico en función del tiempo en notación científica.

a) $f(t) = 0{,}1 \cdot t^2 + 1{,}8 \cdot t$

b) $f(t) = 10 \cdot t^2 + 47{,}7 \cdot t$

c) $f(t) = 10 \cdot t^2 + 4{,}77 \cdot 10^1 \cdot t$

d) $f(t) = 0{,}1 \cdot t^2 + 0{,}18 \cdot 10^1 \cdot t$

9. El dióxido de carbono emitido en el mundo por uso de combustible queda atrapado en la atmósfera, lo cual causa el efecto invernadero, que se manifiesta en el calentamiento global de la Tierra. Si la cantidad promedio anual de gas que se emite en el mundo es de 5500 toneladas, ¿qué modelo algebraico en notación científica será pertinente en kilogramos para la situación presentada y cuántos kilogramos se emitirán en 30 años?

a) $f(t) = 5{,}5 \cdot 10^6 \cdot t$; $16{,}5 \cdot 10^7$ kg

b) $f(t) = 5{,}5 \cdot 10^6 \cdot t$; $1{,}65 \cdot 10^8$ kg

c) $f(t) = 5{,}5 \cdot 10^3 \cdot t$; $16{,}5 \cdot 10^4$ kg

d) $f(t) = 5{,}5 \cdot 10^3 \cdot t$; $1{,}65 \cdot 10^5$ kg

10. Las vacunas exponen a nuestro organismo a una cantidad muy pequeña y muy segura de bacterias o virus previamente debilitados o destruidos. Así, nuestro sistema inmunitario aprende a reconocer y atacar la infección si nos exponemos a ellos posteriormente en nuestras vidas. Como consecuencia, no resultaremos infectados o solo tendremos una infección leve. Esta es una forma natural de hacer frente a las enfermedades infecciosas. La dosis de una vacuna es de $0{,}05\ cm^3$. Si tiene cien millones de bacterias por centímetro cúbico, ¿cuántas bacterias habrá en una dosis? Exprésalo en notación científica.

Respuesta adecuada
El estudiante evidencia que comprende el problema, que es capaz de representar cantidades grandes en notación científica y determinar la relación entre dos variables.
Por ejemplo:
De las variables "volumen" y "número de bacterias", se tiene que en $1\ cm^3$ hay 100 000 000 de bacterias, cuya expresión en notación científica es 1×10^8 bacterias.
Entonces, en una dosis de $0{,}05\ cm^3$ habrá
$1 \times 10^8\ (0{,}05) = 1 \times 10^8\ (5 \times 10^{-2}) = 5 \times 10^6$ bacterias.

Respuesta parcial
El estudiante puede representar en notación científica, pero no encuentra la relación entre las variables.

Respuesta inadecuada
El estudiante no representa en notación científica ni encuentra la relación entre las variables.

Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 2

Las medidas de tendencia central para tomar decisiones

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.	Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.	Representa las características y el comportamiento de los datos de una muestra, mediante medidas de tendencia central, y para ello selecciona los más apropiados a las variables estudiadas.
	Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.	Adapta y combina procedimientos para determinar medidas de tendencia central y adecúa los procedimientos utilizados a otros contextos de estudio.
	Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.	Plantea y contrasta afirmaciones o conclusiones sobre las características o tendencias de una población a partir de sus observaciones o análisis de datos y reconoce errores en sus conclusiones o las de otros estudios y propone mejoras.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de los estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 1, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Representar las características de una muestra mediante las medidas de tendencia central.
  - Usar estrategias para recopilar datos, procesarlos y organizarlos en tablas.
  - Plantear y validar afirmaciones sobre las características de una muestra con base en el análisis de los datos.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. Describe la situación inicial.

   Un estudiante emplea diferentes tiempos para llegar a su colegio y la profesora quiere conocer el promedio para tomar una decisión en relación con la puntualidad que debería tener.

2. ¿Qué pretendes hallar?

   Se desea determinar las medidas de centralización y la más representativa, para poder tomar una decisión a partir de estos valores.

3. La tabla mostrada en la situación inicial, ¿será suficiente para resolverla?

   No es suficiente porque no se conocen los tiempos empleados; además, se han dado situaciones no previstas que han afectado el tiempo utilizado.

4. ¿Has resuelto o visto algún problema similar?

   Sí, cuando se pidió hallar el promedio de sus notas, la cantidad de puntos más frecuente que han hecho en partidos de básquet, etc.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Qué estrategia te sirve para resolver el problema?

   Se empleará el diagrama tabular, porque permite organizar en una tabla los tiempos empleados en llegar al colegio, tomando en cuenta todas las eventualidades que ocurrieron en el viaje. Luego se aplicarán las fórmulas para calcular las medidas de centralización.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. ¿Qué proceso realizarías primero?

   Comienzo elaborando una tabla con los tiempos empleados, considerando las eventualidades.

Hora	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Salida	5:20	5:10	6:20	5:30	5:25
Llegada	7:35	8:10	7:20	7:40	7:37
Tiempo	2 h 15 min	3 h	1 h	2 h 10 min	2 h 12 min
t (min)	135 min	180 min	60 min	130 min	132 min

2. Calcula el promedio o la media aritmética.

   Sumar los tiempos empleados y luego dividir el resultado por el número de días, donde la media de los tiempos debe ser igual a 127,4 minutos.

3. Interpreta el valor hallado.

   Considerar que la media representa al conjunto de datos, porque si reemplazamos todos los tiempos por 127,4 la suma total no cambia; pero tiene la desventaja de ser muy sensible a los valores.

4. ¿Se repite algún dato más que el resto? ¿Cómo se llamaría?

   Ningún dato se repite más que el resto. Si hubiera se llamaría moda. En este caso no existe moda, es amodal.

5. ¿Qué medida te falta calcular? ¿Qué debes hacer?

   Falta la mediana. Se debe proceder a ordenar decreciente o crecientemente los datos.

6. Calcula la medida faltante y da la interpretación al valor obtenido.

   Se ordenan los datos: 60; 130; 132; 135; 180. Observo que tiene $n = 5$ datos. En consecuencia, la mediana ocupa el lugar n/2 = 2,5. Luego redondeamos a 3. Entonces, la mediana coincide con el dato 132. Interpreto que la mediana está exactamente en el punto medio de los datos ordenados; es decir, el 50 % de los datos son mayores o igual a la mediana.

7. ¿Cuáles serían tus respuestas a las preguntas 3 y 4 de la situación inicial?

   Respuesta de la pregunta 3: El valor más representativo es la mediana.

   Respuesta de la pregunta 4: La medida que permitiría tomar una decisión al respecto es la media o promedio.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿Tu respuesta satisface lo que te pide el problema?

   Sí satisface, porque se han hallado los valores solicitados que representan al conjunto de datos dados. Además, tomando en cuenta a dos de esos datos y a los mismos datos, le permite al docente tomar una decisión.

2. ¿Puedes emplear la misma estrategia en algún otro problema? Escribe un ejemplo.

   Sí, el estudiante la puede utilizar cuando busque un valor que represente a un conjunto de datos. Por ejemplo, si quisiera tener un valor representativo del rendimiento en Matemática y los valores fueran homogéneos.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.
- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, lo cual les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:

1. ¿Qué debemos hacer primero para hallar la mediana?

   Se debe dividir el número de datos por dos para ubicar la posición de la clase mediana.

2. ¿Cómo nos damos cuenta de cuál es la clase mediana?

   Observando que el valor hallado en el paso anterior esté por primera vez incluido en una frecuencia absoluta acumulada. La clase asociada con esta frecuencia acumulada será la clase mediana.

3. ¿Qué aspecto del procedimiento realizado se podría usar en algún otro problema?

   Podremos utilizar este procedimiento siempre que deseemos hallar la mediana de una distribución.

- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada:

1. ¿Todos los pasos del procedimiento y la respuesta son correctos?

   No. En la media se ha cometido el error de no trabajar con todos los datos, que son 70; solo se promediaron las marcas de clase. En la mediana el error es creer que la posición será el punto medio de la clase mediana.

2. En el caso de que hubiera error, ¿cuál sería su corrección? De estar todo bien, busca otra forma de resolver el problema.

   Hay error en el cálculo de la media y la mediana, las fórmulas utilizadas no son las adecuadas. Se deben utilizar las siguientes fórmulas:

   Para la media,

   $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(f_i \cdot x_i)}{n}$ y se obtiene 14,47. Para la mediana se aplicaría $Me = L_i + \left(\frac{\frac{n}{2} f_{i-1}}{f_i}\right) \cdot A_i$

   Y se obtendría 15,38. La medida más representativa sería la mediana, que representa al 50 % de comensales, quienes demorarían menos de 15,38 min en ser atendidos.

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.
- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas:
  - ¿En cuál de las fases de la resolución de los problemas tuviste mayor dificultad? Explica por qué.
  - ¿Qué acciones desarrollaste para superar las dificultades que se te presentaron?
  - Describe la estrategia empleada para el desarrollo de las actividades.
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar

- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

Campaña de recolección de botellas

La sección del cuarto "A" de la I. E. "Saber" participó en una campaña de recolección de botellas de plástico con los siguientes resultados:

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cantidad de botellas (en kg)	8,1	5,2	6,7	1,5	7,3	6,2	6,7	7,3	8	6,8	6,8	3,2

Con la información dada, responde las preguntas 1; 2; 3 y 4.

1. La media de la cantidad de botellas recolectada por el cuarto "A" es 6,15 kg. Esto quiere decir que:

a) La mayoría de los estudiantes de esta sección recolectó 6,15 kg de botellas.

b) Es como si todos los estudiantes de esta sección hubiesen recolectado 6,15 kg de botellas.

c) Es la cantidad de botellas que recolectó el estudiante ubicado en la posición central, luego de ordenarlas por cantidad de botellas recolectadas.

d) Es lo que le falta recolectar al estudiante de la sección que recolectó la menor cantidad de botellas.

2. La mediana de las botellas recaudadas por el cuarto "A" es 6,75 kg. Esto quiere decir que:

a) La mayoría de los estudiantes de esta sección recolectó 6,75 kg de botellas.

b) Es como si todos los estudiantes de esta sección hubiesen recolectado 6,75 kg de botellas.

c) Es la cantidad de botellas que recolectó el estudiante ubicado en la posición central, luego de ordenarlas por cantidad de botellas recolectadas.

d) Es lo que le falta recolectar al estudiante de la sección que recolectó la menor cantidad de botellas.

3. La moda de la cantidad de botellas recolectadas por los estudiantes de cuarto "A" es 6,7 kg. Esto quiere decir que:

a) La mayoría de los estudiantes de esta sección recolectó 6,7 kg de botellas. (Es trimodal)

b) Es como si todos los estudiantes de esta sección hubiesen recolectado 6,70 kg de botellas.

c) Es la cantidad de botellas que recolectó el estudiante ubicado en la posición central, luego de ordenarlas por cantidad de botellas recolectadas.

d) Es lo que le falta recolectar al estudiante de la sección que recolectó la menor cantidad de botellas.

4. ¿Cuál es la medida más apropiada para representar la cantidad de botellas recolectadas por los estudiantes de cuarto "A"? Explica.

Respuesta adecuada
El estudiante evidencia que comprende al identificar la medida más apropiada.
Por ejemplo, como hay un dato extremo (1,5) y la media es muy sensible a los datos extremos, no la tomaremos en cuenta. Podría tomarse la moda por existir tres valores (6,7; 6,8 y 7,3).

Respuesta parcial
El estudiante comprende que en este caso es la moda, pero solo da un dato.

Respuesta inadecuada
El estudiante da otras medidas de centralización.

Matrimonios

En un municipio se registraron durante un año 1380 matrimonios. Las edades de los contrayentes se organizaron en esta tabla:

Edad	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[	TOTAL
Hombre	180	300	280	250	220	80	40	20	10	1380
Mujer	180	250	320	220	180	110	60	40	20	1380

Con la información dada, responde las preguntas 5; 6 y 7.

5. El alcalde quiere conocer el promedio de edades de las mujeres y hombres contrayentes para su informe final de cierre de año.

a) 29,6 años y 28,3 años, respectivamente.

b) 28,3 años y 29,6 años, respectivamente.

c) 29,6 años y 28,3 años, respectivamente.

d) 30,6 años y 29,6 años, respectivamente.

6. Un regidor solicitó que calculasen qué edades tenían las mujeres del 50 % de mayor edad.

a) Entre 27,5 años y 60 años

b) Entre 37,5 años y 60 años

c) Entre 32,5 años y 50 años

d) Entre 32,5 años y 60 años

7. El alcalde, luego de ver los datos que solicitó, llegó a la conclusión de que, de todos los contrayentes, las mujeres son mayores que los hombres. Da argumentos a favor o en contra de esta conclusión.

Respuesta adecuada
El estudiante comprende que no hay suficientes datos para hacer esta afirmación, porque habría que ver pareja por pareja para saber quién es mayor.

Respuesta parcial
El estudiante comprende que debe comparar, pero compara los intervalos de clase.

Respuesta inadecuada
El estudiante cree que hay la misma cantidad.

Calificaciones

Las calificaciones de los estudiantes de quinto "A" y quinto "B" en Matemática son las siguientes:

5.° "A"	5.° "B"
13; 15; 14; 16; 18; 12; 11; 09; 10; 15; 12; 18; 13; 12; 08; 15; 09; 17; 14; 16	19; 20; 05; 08; 12; 16; 14; 13; 10; 07; 06; 18; 18; 19; 17; 15; 14; 16; 10; 19; 20; 18; 15; 09

Con la información dada, responde las preguntas 8; 9 y 10.

8. ¿Cuál es el puntaje que supera a la calificación de por lo menos la mitad de los estudiantes de cada sección?

a) A: 13; B: 15 **c)** A: 14; B: 15

b) A: 14; B: 13 **d)** A: 13; B: 14

9. ¿Cuál presenta mejor rendimiento promedio? ¿Cuál es el puntaje más frecuente, considerando a todo el curso de Matemática de quinto?

a) 5.° A; 14 y 15 **c)** 5.° A; 12 y 18

b) 5.° B; 15 y 18 **d)** 5.° B; 12 y 14

10. Si desearas hacer una comparación entre las dos secciones en función de sus calificaciones, ¿qué medida de tendencia central utilizarías para realizar dicha comparación?

Respuesta adecuada
El estudiante comprende que un buen indicador sería la mediana, porque podría saber sobre qué nota se encuentra el 50 % de las notas de mejor rendimiento, así como el otro 50 % de menor rendimiento. También se puede considerar la moda, que aparece con más frecuencia.

Respuesta parcial
El estudiante considera que la mediana es un indicador, pero no sabe explicar por qué.

Respuesta inadecuada
El estudiante no sabe qué medida le sirve para hacer la comparación.

Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 3

Establecemos relaciones entre valores desconocidos

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencia, y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, con coeficientes.
	Comunica su comprensión sobre expresiones algebraicas.	Expresa con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre la solución o soluciones de un sistema de ecuaciones lineales para interpretar un problema en su contexto y estableciendo relaciones entre dichas representaciones.
	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos o procedimientos para hallar términos desconocidos sobre sistemas de ecuaciones lineales.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de los estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 2, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Relacionar datos y variables para expresarlos mediante un sistema de ecuaciones lineales.
  - Interpretar y expresar la solución de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
  - Usar estrategias heurísticas para solucionar situaciones que involucren sistemas de ecuaciones lineales.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. ¿De qué datos dispones?

   Los datos son el importe del gasto en gasolina, del valor del billete con que se pagó y del tipo de monedas que tenía el grifero para dar vuelto.

2. ¿Cuáles son las incógnitas?

   Se tienen dos incógnitas, que son la cantidad de monedas de cada tipo que podría recibir de vuelto, y un dato para que solo exista una forma de dar vuelto.

3. ¿Tienes información suficiente para responder la primera pregunta de la situación inicial? ¿Por qué?

   Sí, porque con los datos que se tienen se puede saber la cantidad que va a recibir de vuelto y buscar el número de monedas de cada tipo.

4. ¿Puedes plantear el problema con tus propias palabras?

   Respuesta libre. Ejemplo: Pagamos con un billete de 100 soles para que nos cobren 19 soles y el vuelto nos lo den con monedas de 2 y 5 soles.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Qué estrategia te sirve para resolver el problema?

   Para la primera pregunta, el ensayo y error, y para la segunda, plantear una ecuación.

2. ¿Cómo puedes proceder para implementar la estrategia elegida?

   Para la primera, ir tanteando el número de monedas de cada tipo que hace un total igual al vuelto. Para la segunda, expresaría una ecuación que relacione los datos, y buscaría definir el número total de monedas para poder proponer otra ecuación.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Aplica la estrategia elegida para resolver la primera pregunta de la situación inicial.

   Elaborar una tabla y aplicar el ensayo error para completarla. Se obtendrán ocho casos posibles.

2. ¿Cómo representarías algebraicamente el paso anterior?

   Por medio de una ecuación: $2x + 5y = 81$.

3. ¿Qué dato agregarías al problema para que solo haya una forma posible de dar el vuelto?

   Sugerir que agreguen un dato que permita formar una segunda ecuación diferente. Por ejemplo, que el número de monedas sea 27.

4. Haz la representación algebraica del nuevo dato y da solución a la pregunta 2 de la situación inicial.

   Nuevo dato: $x + y = 27$ (1)

   Por dato: $2x + 5y = 81$ (2)

   Multiplicar la ecuación (1) por –2:

   $$-2x - 2y = -54$$

   Resolviendo: $y = 9$; $x = 18$

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿Cómo extenderías tu solución de la primera pregunta de la situación inicial a un caso general?

   Tendríamos que utilizar una ecuación que relacione el tipo de monedas con el número de ellas. Igual a la del paso 2 de *Ejecutamos la estrategia o plan*.

2. ¿Hay otra forma algebraica que puedes emplear en el paso 4 de *Ejecutamos la estrategia o plan*?

   Sí, se pueden aplicar otros dos métodos: el de sustitución y el de igualación. Si lo cree necesario, el docente podrá resolver el problema aplicando uno de los métodos propuestos.

3. ¿Puedes verificar de manera gráfica la solución a la pregunta 2 de la situación inicial?

   Sí. Graficamos cada ecuación y la intersección de ambas rectas da el punto solución; sus coordenadas son el conjunto solución. Si el docente lo considera relevante, podrá resolverlo aplicando el método gráfico.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.
- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, que les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:

1. ¿Qué estrategia se utilizó para resolver la situación?

   Se eligió formar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

2. ¿En qué consistió el método para resolver las ecuaciones? ¿Cómo se llama?

   Se busca que los coeficientes de una de las variables sean iguales y de signos contrarios para que al sumar los miembros se anulen y quede una ecuación con una incógnita. Se llama método de reducción.

3. ¿Qué significan los puntos de cada recta? ¿Cómo interpretas el punto de intersección de ambas rectas?

   Todos los puntos de una recta se corresponden con todos los pares de valores que cumplen con la ecuación de dicha recta. Entonces, las coordenadas del punto de intersección corresponden a los valores que cumplen simultáneamente con ambas ecuaciones, por lo que afirmamos que representan la solución del sistema de ecuaciones.

- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada:

1. Analiza las respuestas. ¿Estos costos los podemos encontrar por separado en lugares diferentes? ¿Y en un mismo lugar se encontrarán estos precios?

   Sí se puede encontrar variedad de precios. Pero, en un mismo lugar, frecuentemente encontraremos que el sándwich es de mayor precio que el vaso de chicha, y en algunos casos, igual.

2. Utiliza otro método de resolución de ecuaciones para verificar la respuesta. Si no coincide, corrige.

   Se debe simplificar la ecuación (2): $x + y = 13$, y luego despejar y: $y = 13 - x$. Asimismo, se debe reemplazar en la ecuación (1): $4x + 8(13 - x) = 72$. Finalmente, se resuelve: $x = 8$; $y = 5$. No coinciden. El error está en que el segundo miembro de la ecuación (2) no se multiplicó por -2.

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.
- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.

- La socialización de los desarrollos será de acuerdo con el tiempo. Cada equipo puede exponer una solución (la que ellos decidan o a sugerencia del docente).

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas o indicaciones:
  - ¿Te sientes capaz de resolver un sistema de ecuaciones lineales?
  - ¿El trabajo en equipo te facilitó la resolución de las situaciones propuestas?
  - Describe la estrategia empleada para el desarrollo de las actividades.
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar

- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

1. El director de una institución educativa realizó un proyecto de presentación teatral con sus estudiantes de quinto grado, con la finalidad de reunir fondos y terminar de construir el comedor estudiantil, por lo cual recibió el apoyo de los padres de familia y el de la Municipalidad, que le brindó gratuitamente su anfiteatro.

El costo de las entradas fue de 30 soles para los adultos y 20 soles para los niños. Si el sábado pasado asistieron 248 personas y se recaudaron 5930 soles, ¿cuántos adultos y cuántos niños asistieron a esa función?

a) 151 adultos y 97 niños
c) 97 adultos y 151 niños
b) 124 adultos y 124 niños
d) 69 adultos y 179 niños

2. Escribe verdadero (V) o falso (F), según corresponda, en cada paréntesis de las siguientes proposiciones.

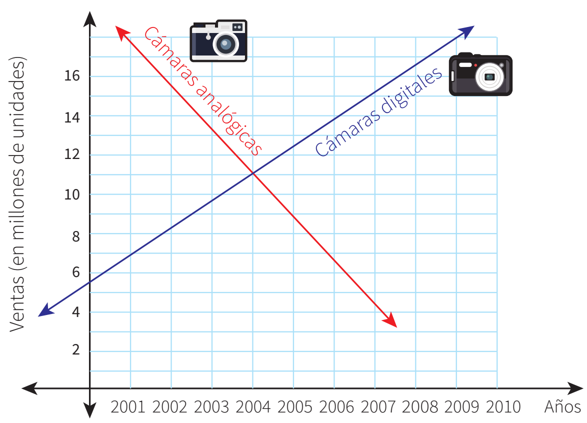
I. Cuando dos rectas se cruzan, es totalmente seguro que encontramos una solución al sistema de ecuaciones, al cual se denomina *sistema compatible determinado*. ( )

II. Cuando dos rectas son paralelas a un plano, se encuentran infinitas soluciones, al cual se denomina *indeterminado*. ( )

III. En un sistema de ecuación lineal, cuando hay más variables que ecuaciones, existe más de una solución. ( )

a) V V V **b)** V F V **c)** F F F **d)** F V F

El siguiente gráfico muestra cómo han ido bajando las ventas de cámaras analógicas desde que aparecieron las cámaras digitales en el mundo.



Con la información dada, responde las preguntas 3 y 4.

3. Del periodo 2000 a 2010, ¿en qué años las ventas de cámaras digitales fueron menores que las de cámaras analógicas, y a partir de qué año las ventas de cámaras digitales superaron a las de cámaras analógicas?

a) Del 2000 al 2003, las ventas de cámaras digitales fueron menores que las de cámaras analógicas.

b) A partir del 2005, se vendieron más cámaras digitales, y entre el 2000 y 2008, las ventas de cámaras analógicas superaron a las de cámaras digitales.

c) Del 2000 al 2003, las ventas de cámaras digitales fueron menores que las de cámaras analógicas, y a partir del 2005, las ventas de cámaras digitales superaron a las de cámaras analógicas.

d) Del 2000 al 2002, las ventas de cámaras digitales fueron menores que las de cámaras analógicas, y a partir del 2003, las ventas de cámaras digitales fueron superiores.

4. Estima el año en el cual las ventas de los dos tipos de cámaras fueron iguales y la cantidad de cámaras que, aproximadamente, se vendieron en ese año.

Respuesta adecuada
El estudiante evidencia que emplea expresiones y conceptos respecto a un sistema de ecuaciones lineales en sus diferentes representaciones. Asimismo, lee correctamente el gráfico mostrado para responder la pregunta. Ejemplo: Aproximadamente fue en el año 2004 y se vendieron 11 millones de cámaras de cada tipo.

Respuesta parcial
No se evidencia que el estudiante emplee expresiones y conceptos respecto a un sistema de ecuaciones lineales en sus diferentes representaciones. Asimismo, lee correctamente el gráfico, pero no da la respuesta de manera explícita. Ejemplo: El año en que se vendió la misma cantidad es cuando hay intersección entre las dos rectas.

Respuesta inadecuada
No logra comprender el problema y da respuestas erradas.

Ejemplo: Se vendieron igual desde el 2000 al 2010.

5. Un vaso de vidrio contiene agua y aceite; 2/3 del volumen del contenido está ocupado por aceite, y 1/3, por agua. La densidad del agua es 1 g/cm^3, y la del aceite, 3 g/cm^3, y la masa líquida total en el vaso es 1000 g. Determina el volumen de cada líquido.

a) 2000/7 cm^3 de agua y 1000/7 cm^3 de aceite

b) 1000/7 cm^3 de agua y 6000/7 cm^3 de aceite

c) 1000/6 cm^3 de agua y 2000/6 cm^3 de aceite

d) 2000/6 cm^3 de agua y 1000/6 cm^3 de aceite

6. En el puerto del Callao, un barco recorre 76 kilómetros en 1 hora con la corriente a su favor; de regreso, con la corriente en contra, tarda 4 horas para recorrer la misma distancia. ¿Cuál es la velocidad de la corriente?

a) 47,5 km/h

b) 28,5 km/h

c) 57 km/h

d) 19 km/h

7. El señor Sergio contrató dos camiones cuyas capacidades de carga son, respectivamente, de 3 y 4 toneladas, con los cuales se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de fierro de construcción. Él necesita saber cuántos viajes realizó cada camión para adicionar los gastos por combustible.

Respuesta adecuada
El estudiante evidencia que emplea expresiones y conceptos respecto a resolver un problema utilizando un sistema de ecuaciones lineales.
Ejemplo: Sea x: n.° de viajes del primer camión
y: n.° de viajes del segundo camión
Total de toneladas en el primer camión es igual a $3x$.
Total de toneladas en el segundo camión es igual a $4y$.
Por datos: $x + y = 23$ (1)
$3x + 4y = 80$ (2)
Despejando y de (1): $y = 23 - x$
Reemplazamos en (2): $3x + 4(23 - x) = 80$
Resolvemos: $x = 12$; $y = 11$.

Respuesta parcial
El estudiante evidencia que emplea expresiones y conceptos respecto a resolver un problema, planteando un sistema de ecuaciones, pero aplica con error el método elegido. Ejemplo: Al despejar el valor de una variable no respeta los cambios de operación.
De $x + y = 23$, despeja y: $y = 23 + x$, y reemplaza:
$3x + 4(23 + x) = 80$. Resolviendo: $x = 6,6$; $y = 16,4$.

Respuesta inadecuada
No logra comprender el problema y plantea incorrectamente las ecuaciones. Ejemplo: $(3 + 4)x = 23$; $x + y = 80$

Juan y Natalia, estudiantes de quinto grado de secundaria, preparan paletas de chocolate con el fin de venderlas y así juntar dinero para su viaje de promoción. La materia prima necesaria para hacer una paleta grande les cuesta 3 soles, y para una chica, 2 soles. Ellos invierten en su proyecto la suma de 50 soles.

Con la información dada, responde las preguntas 8 y 9.

8. ¿Qué dato le adicionarías a esta situación para que la cantidad de paletas grandes sea igual a la cantidad de paletas chicas, y cuántas paletas serán de cada tamaño?

a) Adicionar el dato: "Se hicieron un total de 20 paletas"; 10 paletas de cada tamaño.

b) Adicionar el dato: "Se hicieron un total de 24 paletas"; 12 paletas de cada tamaño.

c) Adicionar el dato: "Se hicieron un total de 22 paletas"; 11 paletas de cada tamaño.

d) Adicionar el dato: "Se hicieron un total de 18 paletas"; 9 paletas de cada tamaño.

9. Si las paletas chicas se vendieran más y así se obtuviera mayor ganancia, ¿qué dato faltaría para afirmar que se ha preparado mayor cantidad de paletas chicas que de paletas grandes?

a) Faltaría el dato: "Se hicieron un total de 23 paletas"; 4 grandes y 19 chicas.

b) Faltaría el dato: "Se hicieron un total de 24 paletas"; 2 grandes y 22 chicas.

c) Faltaría el dato: "Se hicieron un total de 22 paletas"; 6 grandes y 16 chicas.

d) Faltaría el dato: "Se hicieron un total de 21 paletas"; 8 grandes y 13 chicas.

10. Un empresario textil de Gamarra desea distribuir una gratificación entre sus empleados por su buen desempeño en la semana, y se percata de que si entregara a cada uno 800 soles, le sobrarían 200, y si les diera 900 soles, le faltarían 400. ¿Cuántos empleados hay en su fábrica?, ¿cuánto dinero tiene para repartir? ¿Cómo resolverías el problema sin usar ecuaciones?

Respuesta adecuada

El estudiante evidencia que emplea expresiones y conceptos para resolver un problema utilizando un sistema de ecuaciones lineales y sin ellas. Ejemplo: Plantea y resuelve correctamente las ecuaciones:

$800x + 200 = y$; $900x - 400 = y$.

Del sistema de ecuaciones obtenemos que,

$x = 6$

$y = 5000$

Entonces, el número de empleados es 6, y el dinero que tiene que repartir es S/5000.

Respuesta parcial

El estudiante evidencia que emplea expresiones y conceptos para resolver un problema con un sistema de ecuaciones, pero no lo puede hacer sin estas.

Ejemplo: Plantea las ecuaciones

$800x + 200 = y$

$900x - 400 = y$

Respuesta inadecuada

No logra comprender el problema.

Ejemplo: Mejor le paga el promedio

$\frac{800 + 900}{2} = 850$ soles.

Duración: **2** horas pedagógicas

Sesión 4

Las formas geométricas en nuestra vida diaria

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Establece relaciones entre las características y atributos medibles de objetos reales o imaginarios y representa estas relaciones con formas bidimensionales, tridimensionales o compuestas y con cuerpos de revolución.
	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Lee textos o gráficos que describen las propiedades de los cuerpos de revolución, compuestos y truncados, así como la clasificación de las formas geométricas por sus características y propiedades comunes o distintivas.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para determinar la longitud, el área y el volumen de cuerpos geométricos compuestos y de revolución.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de los estudiantes.

Sugerencias para el docente:

✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).

✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.

✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 3, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.

✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.

✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Aplicar modelos basados en cuerpos geométricos compuestos y de revolución al plantear y resolver situaciones problemáticas del contexto.
  - Representar gráficamente el desarrollo de cuerpos geométricos truncados y sus proyecciones.
  - Establecer y usar la estrategia más conveniente para resolver problemas del contexto, que exige el cálculo del volumen y áreas de troncos de formas geométricas.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. ¿Qué forma tienen los llamados conos de seguridad?

   No son estrictamente conos, sino troncos de cono, porque no tienen vértice y poseen dos bases.

2. ¿De qué datos dispones?

   Se conoce su altura, los diámetros de las bases que son círculos y el ancho de la banda reflectante.

3. ¿Cuáles son tus incógnitas directas?

   Las incógnitas son el área de la banda reflectante y el volumen del tronco de cono.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Has encontrado algún problema similar? Descríbelo.

   Respuesta libre. Probablemente hagan referencia a los problemas relacionados con los conos de revolución.

2. ¿Qué debes saber para hallar tus incógnitas directas? ¿Será necesario calcular algo antes?

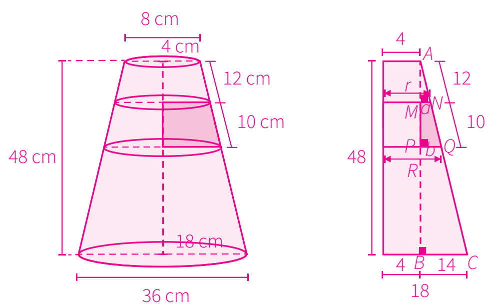
   Se necesita conocer sus fórmulas; si no se tuvieran todos los datos, los estudiantes deberían calcularlos antes.

3. ¿Qué estrategia te ayudaría a resolver el problema? ¿Por qué?

   Hacer un dibujo, porque este permite visualizar los datos y las incógnitas, así como relacionarlos para identificar las propiedades con las que resolveremos el problema.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Aplica la estrategia elegida. Recuerda que cuando trabajas con figuras geométricas es importante que los datos tengan la notación pertinente para poder identificarlas.



2. Observa e identifica las incógnitas y las propiedades relacionadas con ellas que se van a aplicar para conocer sus valores. Busca respuesta a la primera pregunta de la situación inicial.

Se calcula la generatriz "g" en el triángulo ABC, aplicando el teorema de Pitágoras: $g^2 = 48^2 + 14^2$; $g = 50$ cm. Asimismo, se puede calcular "a" por semejanza de los triángulos AMN y ABC, $\frac{12}{a} = \frac{50}{14}$. Entonces $a = 3{,}36$ cm; por tanto, el radio menor de la franja mide $r = 4 + 3{,}76 = 7{,}76$ cm.

Luego se calcula "b" aplicando semejanza entre los triángulos APQ y ABC $\frac{22}{b} = \frac{50}{14}$.

Entonces $b = 6{,}16$ cm; por tanto, el radio mayor de la franja mide $R = 4 + 6{,}16 = 10{,}16$ cm.

Para calcular el área que cubre la banda reflectante, se emplea la fórmula del área lateral del tronco de cono: $AL = \pi (R + r)\, g = \pi\,(10{,}16 + 7{,}36)(50) = 876\,\pi\ \text{cm}^2 = 2750{,}64\ \text{cm}^2$

3. Analiza los datos de la aplicación de la estrategia elegida. Reconoce aquellos que van a permitir dar respuesta a la segunda pregunta de la situación inicial. También identifica si nos falta conocer las propiedades que permitirán hallar sus valores.

Para hallar el volumen de un tronco de cono se aplica la siguiente fórmula:

$V = \frac{1}{3}\pi h[R^2 + r^2 + R \cdot r]$. Teniendo en cuenta los valores obtenidos en la pregunta 2 de *Ejecutamos la estrategia o plan*, podemos aplicarla directamente y hallar: $V \approx 12\,172{,}39\ \text{cm}^3$. Por lo tanto, el volumen del tronco de cono de seguridad es, aproximadamente, $12\,172{,}39\ \text{cm}^3$.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿Sabes que el tronco de cono es un concepto de geometría del espacio? ¿Has usado solo propiedades de este campo o has recurrido a la geometría plana?

Por lo general, las situaciones de geometría del espacio se llevan a una situación de geometría plana, tal como ha ocurrido para hallar el área. Esto ocurre cuando hay que aplicar alguna relación métrica; con frecuencia, emplearemos el teorema de Pitágoras.

2. Describe y explica la estrategia que seleccionaste para resolver la situación. Resalta las ventajas que tiene.

Se representó gráficamente el sólido estudiado; luego se procedió a ubicar los datos y se reconocieron las incógnitas en la gráfica. Para hallar lo que se pedía, se tuvieron que resolver ciertas incógnitas previas. Finalmente, se aplicó la fórmula pertinente.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.
- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, lo cual les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:

1. Si hubiésemos querido hacer un dibujo a escala en una hoja A4, ¿se mantendría la escala o propondrías otra?

No, porque sobrepasa las dimensiones del cuaderno. Se podría utilizar una escala 1:10 000, la que daría las medidas siguientes:

Diámetro del cráter: 84 000/10 000 = 8,4 cm

Diámetro de la base: 180 000/10 000 = 18 cm

2. Describe el procedimiento que se ha utilizado para resolver el problema.

   Se empleó una escala para poder calcular el volumen de cada tipo de arcilla. Pero, como también debíamos conocer la altura, nos ayudamos con un dibujo para poder hallarla.

   Luego se procedió a calcular el volumen de cada tipo de arcilla. Para la arcilla marrón tuvimos que utilizar una diferencia de volúmenes. Finalmente, se dio respuesta a la pregunta planteada.

3. ¿Qué aspectos semejantes encuentras en relación con el problema de los conos de seguridad?

   En ambos hay troncos de cono y se aplica la fórmula para hallar sus volúmenes. Asimismo, hacer un dibujo nos ayudó a resolver el problema, y en el proceso se tuvo la necesidad de utilizar una propiedad métrica del triángulo rectángulo.

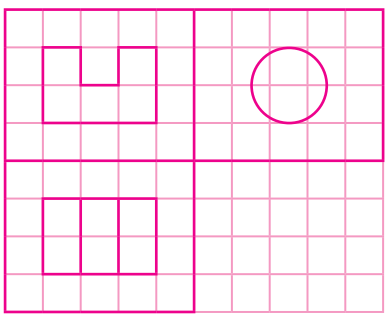
- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada:

  1. ¿Crees que si varias personas vieran solo las representaciones, harían la misma imagen mostrada en la situación C? ¿Por qué?

     Posiblemente no coincidirían, porque estarían propuestas en diferentes cuadros que no permitirían apreciar la igualdad de las medidas. También la vista de frente es la que debería mostrar más detalles que las otras.

  2. Resuelve la situación utilizando otra técnica, para verificar la solución o corregirla.

     Se puede utilizar el sistema europeo.



El error está en la representación gráfica, porque presenta líneas ocultas (discontinuas) en la vista lateral y la vista de arriba, estas líneas deben ser continuas o de contornos vistos, como se muestra en el gráfico utilizado en el sistema europeo.

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.

- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas o indicaciones:
  - ¿Te sientes capaz de resolver un sistema de ecuaciones lineales?
  - ¿El trabajo en equipo te facilitó la resolución de las situaciones propuestas?
  - Describe la estrategia empleada para el desarrollo de las actividades.
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar

- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

Después de un partido de fútbol, Andrés se tomó un vaso de chicha, que le calmó la sed y lo ayudó a hidratarse.

Al observar el vaso vacío, que tenía una forma cónica, le entró curiosidad por saber la cantidad de chicha que había consumido. Le pidió a su amigo Manuel una regla y midió las dimensiones del vaso: el diámetro del fondo era de 4 cm; el de la parte superior, de 6 cm, y el costado medía 10 cm.

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. ¿Qué volumen de chicha había bebido Andrés?

a) $187{,}82\pi$ cm^3

b) $124{,}16$ cm^3

c) 63π cm^3

d) 50π cm^3

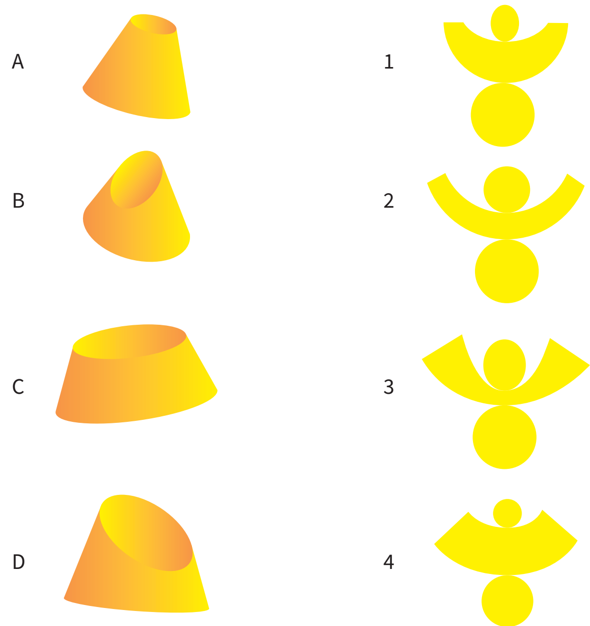
2. ¿Cuál es el área lateral del vaso?

a) 50π cm^2 **b)** 68π cm^2 **c)** 80 cm^2 **d)** 90π cm^2

3. Una banda de músicos ha adquirido tres *ashikos*, instrumentos de percusión de forma de cono truncado, cuyas dimensiones son de 40 centímetros de alto por 26 centímetros de diámetro superior y 8 centímetros de diámetro en la boca inferior. ¿Cuántos centímetros cuadrados de tela con diseños incaicos serán necesarios para cubrir el contorno de los tres *ashikos*? (Considera $\pi \approx 3{,}14$).

a) $6565{,}74$ cm^2 **b)** $6405{,}60$ cm^2 **c)** $2188{,}58$ cm^2 **d)** $248{,}06$ cm^2

4. Relaciona cada sólido con su respectivo desarrollo.



Respuesta adecuada El estudiante reconoce el desarrollo de los cuerpos geométricos truncados al relacionar cada sólido con su respectivo desarrollo. (A4; B1; C2; D3)	**Respuesta parcial** El estudiante solo reconoce el desarrollo de los conos truncados cortados por un plano horizontal paralelo a la base del cono (A4; C2). **Respuesta inadecuada** El estudiante no reconoce el desarrollo de los troncos de cono.

5. Se tienen 30 macetas en forma de tronco de cono. Los radios de las bases de estas macetas miden 9 cm y 27 cm, respectivamente, y su generatriz, 30 cm. Si se llenaran las ⅔ partes de la generatriz de la maceta con tierra preparada, ¿cuántas bolsas de 5 kg serán necesarias para habilitar todas las macetas?

a) 3 bolsas **b)** 11 bolsas **c)** 71 bolsas **d)** 72 bolsas

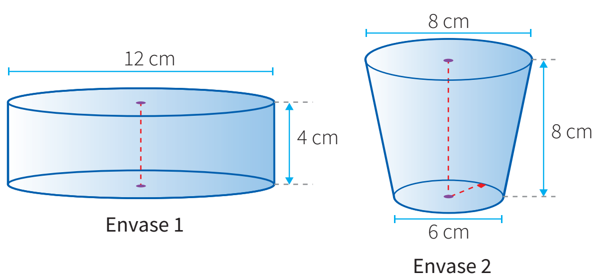
6. Los dueños de una fábrica de mermelada promocionan su producto en nuevos tamaños de recipientes con etiquetas novedosas. ¿Cuál de los dos tiene más capacidad?

a) Envase 1 ≡ 144π cm³

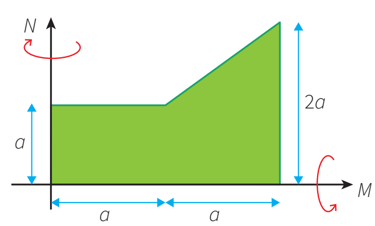
b) Envase 2 ≡ 296π cm³

c) Envase 1 ≡ 48π cm³

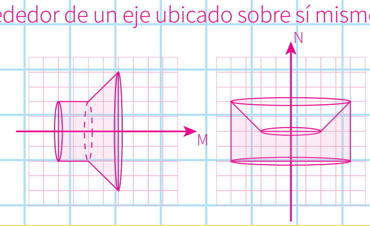
d) Envase 2 ≡ 98,67π cm³



7. Un mecánico automotriz diseña piezas que permiten la generación y transmisión del movimiento en sistemas automotrices, como se encuentran en los vehículos de tracción mecánica. En tal sentido, diseña dos piezas automotrices de acero a partir de la rotación de la región del plano alrededor de los ejes M y N, como se muestra en la figura. Representa los sólidos de revolución al rotar en cada uno de sus ejes.



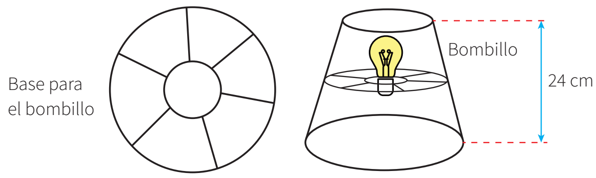
Respuesta adecuada
El estudiante representa gráficamente en el plano cómo se genera el sólido a partir de la rotación de una región plana alrededor de un eje ubicado sobre sí mismo.



Respuesta parcial
El estudiante solo representa gráficamente en el plano la región plana de los sólidos generados a partir de la rotación de una región plana alrededor de un eje.

Respuesta inadecuada
El estudiante no representa gráficamente en el plano cómo se generan los sólidos a partir de la rotación de una región plana alrededor de un eje.

Los estudiantes de la I. E. Miguel Grau en el área de Educación para el Trabajo elaboran lámparas en forma de cono truncado con papel reciclado, colocando un armazón de alambre como base para el bombillo en la mitad de la altura del cono truncado.



Con la información dada, responde las preguntas 8 y 9.

8. ¿Cuántos centímetros de papel reciclado se requieren para la confección de la pantalla si se considera una pestaña rectangular de 2 cm en uno de sus extremos, y sus radios miden 8,5 cm y 15,5 cm?

Respuesta adecuada
El estudiante comprende y calcula la superficie de papel reciclado que es de $50(12\pi + 1)$ cm^2.

Respuesta parcial
El estudiante solo logra hallar la generatriz que es de 25 cm.

Respuesta inadecuada
El estudiante no comprende la situación planteada.

9. ¿Cuántos centímetros de alambre se requieren para el armazón del bombillo si los radios están en relación de 1 a 6?

a) 28π cm **b)** 88π cm **c)** $2(14\pi - 30)$ cm **d)** $4(7\pi+15)$ cm

10. En la heladería "Sabores Naturales", los vasos de helado tienen las siguientes medidas: 6 cm de profundidad, 8 cm de diámetro superior y 6 cm de diámetro inferior. Si se colocan dentro del vaso tres porciones de helado de forma esférica, cuyo diámetro es de 6 cm, y si el helado se derrite, ¿este rebasará la capacidad del vaso? ¿Por qué?

Respuesta adecuada
El estudiante calcula correctamente los volúmenes del vaso y de los helados.
El volumen del vaso es 74π cm^3 y el volumen de las tres porciones de helado es 108π cm^3.
Al compararlos, se determina que el volumen de las porciones de helado es mayor que el volumen del vaso; por lo tanto, sí se rebasa.

Respuesta parcial
El estudiante calcula con errores los volúmenes, habiendo elegido las fórmulas correctas.

Respuesta inadecuada
No aplica ninguna fórmula ni establece comparación.

Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 5

Consideramos los porcentajes para tomar decisiones

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de cantidad.	Traduce cantidades a expresiones numéricas.	Establece relaciones entre datos y acciones de comparar e igualar cantidades y las transforma a expresiones numéricas (modelos) que incluyen operaciones con aumentos y descuentos porcentuales.
	Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.	Selecciona, combina y adapta estrategias de cálculo, estimación, recursos y procedimientos diversos para realizar operaciones con aumentos y descuentos porcentuales.
	Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.	Plantea y compara afirmaciones sobre las propiedades de las operaciones con aumentos y descuentos porcentuales u otras relaciones numéricas que descubre, y las justifica con ejemplos y contraejemplos.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de los estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 4, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Establecer relaciones entre datos para comparar cantidades empleando expresiones porcentuales, incluyendo aumentos y descuentos porcentuales sucesivos.
  - Seleccionar y emplear estrategias heurísticas para calcular aumentos y descuentos porcentuales.
  - Plantear argumentos en relación con las equivalencias entre descuentos porcentuales sucesivos.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. ¿Cuáles son los datos que te da el problema?

   El precio de lista de la *tablet* y los descuentos que ofrecen dos tiendas por la compra de artículos.

2. ¿Cuál es la incógnita que falta resolver?

   Las incógnitas son el precio final de venta de la *tablet* en cada tienda y el descuento equivalente a los descuentos sucesivos.

3. ¿Sabes qué significa la oferta del 40 % + el 30 %? ¿Está bien expresado?

   Sí, se saca primero el 40 % del precio de venta y, a lo que queda como nuevo precio de venta, se saca el 30 %.

4. ¿Es similar a alguna situación que has observado en algún lugar?

   Sí, se parece a los descuentos que se ofrecen en los centros comerciales y las grandes tiendas.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Podrías enunciar el problema de otra forma?

   Respuesta libre. Ejemplo: ¿En qué tienda me harán más descuento al comprar una *tablet* que en lista cuesta S/299 si una me ofrece descuentos sucesivos del 40 % y 30 %, y la otra, del 50 % y 20 % sucesivos?

2. ¿Qué estrategia te sirve para resolver el problema?

   La estrategia "plantear por etapas" permite aplicar cada descuento por separado, uno tras otro.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Calculamos el descuento que se otorga en la tienda “La Económica” y el precio de venta.

   Se aplica la estrategia por partes:

   Precio de lista: 299 soles

   Primer descuento: 40 % de 299 = 0,4 × 299 = 119,6 soles

   El precio se reduce a 299 – 119,6 = 179,4 soles.

   Segundo descuento: 30 % de 179,4 = 0,3 × 179,4 = 53,82 soles

   Precio final: 179,4 – 53,82 = 125,582 soles.

2. Hallamos el descuento en la tienda “Súper Oferta” y el precio de venta.

   Precio de lista: 299 soles

   Primer descuento: 50 % de 299 = 0,5 × 299 = 149,5 soles

   El precio se reduce a 299 – 149,5 = 149,5 soles.

   Segundo descuento: 20 % de 149,5 = 0,2 × 149,5 = 29,9 soles

   Precio final: 149,5 – 29,9 = 119,6 soles.

3. Da tu respuesta a las dos primeras preguntas de la situación inicial.

   El menor precio es el de la tienda “Súper Oferta”, ya que por la *tablet* se pagaría 119,60 soles.

4. Determina a qué tanto por ciento equivalen los descuentos sucesivos en “La Económica”.

   El descuento total es 119,6 + 53,82 = 173,42 soles. Luego se aplica la regla de tres simple para determinar el descuento único, que sería de 58 %.

5. De manera similar procede para resolver la pregunta 4 de la situación inicial.

   En "Súper Oferta", el descuento total es 149,5 + 29,9 = 179,4 soles. Luego se aplica la misma estrategia que en el caso anterior, y así obtendrán un descuento único de 60 %.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. Describe la estrategia empleada en la resolución del problema.

   Se trabajó con cada tienda por separado. En cada una se halló el primer descuento e inmediatamente se aplicó el segundo tanto por ciento al saldo que quedaba. Finalmente, se calculó el precio de venta.

2. Si el precio de la *tablet* hubiera sido otro, ¿qué habría ocurrido con el tanto por ciento equivalente a los descuentos sucesivos? Demuéstralo.

   Para este caso pueden suponer que el precio habría sido 100 soles.

   En la tienda “Súper Oferta”, el primer descuento es: 50 % de 100 = 50 soles.

   El precio se reduce a 100 – 50 = S/50.

   Segundo descuento: 20 % de 50 = 10 soles

   Precio final: 50 – 10 = 40 soles. Por lo tanto, el descuento total es: 50 + 10 = 60 soles ≡ 60 %.

   El porcentaje de descuento único no varía a pesar de la variación que sufre el precio de la *tablet*.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.
- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, lo cual les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:

1. ¿Qué utilidad tuvo la primera tabla en la resolución del problema?

   Proporcionó los datos necesarios para resolver el problema.

2. ¿Y la segunda tabla?

   Permitió organizar los datos; además, sirvió de guía para completar las celdas faltantes.

3. ¿Qué diferencia presenta la forma de aplicar los tantos por ciento con respecto a la situación inicial?

   En la situación inicial se aplican sobre diferentes valores; en este caso, se aplica sobre una misma cantidad.

- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada:

1. Confronta el enunciado con la resolución. ¿El procedimiento coincide con la secuencia que propone el enunciado? ¿Por qué?

   No, porque el enunciado plantea que al momento de pagar la inicial se descuenta el bono Mi Vivienda.

2. Si el procedimiento o la respuesta son correctos, busca otra forma de resolver el problema. Si son incorrectos, haz la corrección necesaria.

   Corregir el precio por pagar:
   182 003 – 54 600,90 – 17 000 = 110 402,10 soles

   Luego calcular los intereses: 110 402,10 × 120 × 0,015 = 198 723,78 soles

   El precio final del departamento sería:
   54 600,90 + 17 000 + 110 402,10 + 198 723,78 = 380 726,78 soles

   Finalmente, aplicar la regla de tres simple para establecer el porcentaje que representa el precio final con respecto al precio inicial, que sería 209,19 %.

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.
- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas o indicaciones:
  - ¿En qué situaciones del contexto podrás emplear el conocimiento que aprendiste?
  - ¿El trabajo individual que desarrollaste facilitó tu aprendizaje?
  - Describe la estrategia empleada para el desarrollo de las actividades.
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar

- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

En una tienda se venden los siguientes equipos de celulares:

©Shutterstock

Para incentivar la compra de estos productos, el establecimiento realiza la siguiente promoción:

Equipo	1	2	3
Descuento	20 %	30 %	15 %

Con la información dada, responde las preguntas 1; 2; 3 y 4.

1. Para promocionar el EQUIPO 1, se lo ofrece al precio de lista del EQUIPO 3. ¿En qué porcentaje se debe descontar el EQUIPO 1?

a) 20 % **b)** 4 % **c)** 40 % **d)** 4,2 %

2. Por efectos de la inflación, el EQUIPO 1 incrementa su precio de lista hasta costar tanto como el precio actual del EQUIPO 2. ¿Cuánto se incrementó el precio del EQUIPO 1?

a) 10,1 % **b)** 11 % **c)** 10 % **d)** 1 %

3. Si esta semana todos los productos de la tienda sufrieron un incremento del 5 %, ¿qué expresión representa el precio que se debe pagar por el EQUIPO 3* en esta semana?

a) $480 + 480\left(\frac{5}{100}\right) - 480\left(\frac{105}{100}\right)\left(\frac{30}{100}\right)$

c) $480 + 480\left(\frac{0,5}{100}\right) - 480\left(\frac{100,5}{3}\right)\left(\frac{3}{100}\right)$

b) $480 + 480\left(\frac{5}{100}\right) - 480\left(\frac{95}{100}\right)\left(\frac{30}{100}\right)$

d) $480 + 480\left(\frac{3}{100}\right) - 480\left(\frac{97}{100}\right)\left(\frac{50}{100}\right)$

* En el cuaderno de trabajo, página 68, debe decir 3.

4. Si el precio del EQUIPO 1 sufre un incremento del 10 % y luego un descuento del 15 %, ¿a qué precio se estará vendiendo este producto?

Respuesta adecuada
Se incrementa el precio del equipo en 10 %, siendo el nuevo precio de venta S/550. A este nuevo precio se hace el descuento de 15 % y se obtiene como precio de venta final S/467.50.

Respuesta parcial
Si solo logra aplicar el incremento al precio original.

Respuesta inadecuada
Cuando el incremento y el descuento los aplica considerando un descuento único del 5 %.

La octava edición de Mistura convocó a casi 400 000 visitantes durante los 10 días de la feria. La cifra significó un 20 % más de comensales que el 2014, cuando se contabilizó un total de 321 000 *tickets* vendidos. En total serían 400 000 los asistentes si contamos los visitantes de la jornada inaugural. Asimismo, fueron más de 390 los puestos que atendieron en el evento gastronómico más grande e importante de América Latina.


©Shutterstock

Con la información dada, responde las preguntas 5; 6 y 7.

5. Haciendo el recuento oficial de *tickets* vendidos en la feria Mistura 2015, se obtiene que se vendieron 405 000. ¿Cuál fue el porcentaje de incremento de los *tickets* vendidos entre el 2014 y el 2015?

a) 20 %
b) 26 %
c) 21 %
d) 8,4 %

6. Si en el 2016 se produjo un incremento del 1 % en los *tickets* vendidos (considera que en el 2015 se vendieron 405 000), ¿en cuánto varía la cantidad de *tickets* vendidos entre el 2014 y el 2016?

a) 30,48 %
b) 29,71 %
c) 25,34 %
d) 27,43 %

7. Pierina afirma que, si en el 2014 se vendieron 321 000 *tickets* de entrada, y en el 2015, se vendieron 400 000, no sería cierto que se ha incrementado en un 20 %, sino en un 24,6 %. La aproximación hecha por el medio es inexacta, ya que estaría dejando de considerar 14 766 *tickets* vendidos. ¿Estás de acuerdo con la afirmación de Pierina? Justifica tu respuesta.

Respuesta adecuada
El estudiante afirma que Pierina tiene razón, ya que el 24,6 % corresponde al incremento de la venta de *tickets* del 2014 al 2015, es decir, la diferencia entre 400 000 y 321 000 es 79 000, que es el (79/321) × 100 % = 24,61 %. Por eso, no está de acuerdo con el medio.

Respuesta parcial
El estudiante indica que está de acuerdo con lo que afirma Pierina, pero no realiza ninguna justificación.

Respuesta inadecuada
Afirma que Pierina comete un error porque su razonamiento no coincide con los datos que da el medio de información.

8. Un agricultor posee 180 hectáreas de tierras de cultivo. Decide plantar 20 % con papas; ¼ del terreno con maíz; 35,5 % con zanahorias, y el resto con tomates. ¿Cuántas hectáreas destina para cultivar tomates?

a) 63,9 hectáreas
b) 144,9 hectáreas
c) 35,1 hectáreas
d) 40,5 hectáreas

9. Tres hermanos: José, Ana y Pedro, reciben de sus padres una herencia de 199 000 soles, la cual deben repartirse considerando sus edades: 10; 18 y 22 años. El mayor opina que, como él ya está trabajando gracias a la profesión que le costearon sus padres, es el hermano menor el que más necesitará de la herencia. Por ello, propone realizar un reparto inversamente proporcional a sus edades. Ana, quien se halla terminando su carrera, está de acuerdo. ¿Qué porcentaje del total le corresponde a cada uno? ¿Cuál es la diferencia porcentual entre el hermano mayor y el menor?

a) 49,8 %; 27,6 %; 22,6 % y 27,2 %
b) 52,8 %; 32,2 %; 15 % y 37,8 %
c) 45,6 %; 28,5 %; 25,9 % y 19,7 %
d) 49 %; 28 %; 23 % y 26 %

10. Rocío paga por un par de zapatos S/94,50 soles. Sabiendo que este precio es producto de dos descuentos sucesivos del 10 % y 30 %, ¿qué precio de etiqueta tenía el par de zapatos?

Respuesta adecuada
Aplica secuencialmente los descuentos sucesivos sobre un precio supuesto de 100 soles para determinar cuál es el descuento equivalente a los dos descuentos sucesivos dados.
Saldo después del primer descuento:
100 % – 10 % = 90 %
Precio al aplicar el segundo descuento:
90 % – 30 % (90 %) = 63 %
Si el precio de etiqueta es x, entonces:
63 % x = 94,50; x = 150 soles

Respuesta parcial
Reconoce que el precio de venta es menor que el precio de etiqueta, y que sobre este se harán los descuentos sucesivos. Plantea una ecuación, pero no la resuelve.

Respuesta inadecuada
Aplica los descuentos sucesivos como aumentos progresivos sobre el precio de venta.

Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 6

El crecimiento inmobiliario y el préstamo

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de cantidad.	Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones.	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico su comprensión sobre las tasas de interés y de términos financieros para interpretar el problema en su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.
	Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.	Selecciona, combina y adapta estrategias de cálculo, estimación, recursos y procedimientos diversos para realizar operaciones con tasas de interés y simplificar procesos usando las propiedades de los números y las operaciones.
	Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.	Plantea y compara afirmaciones sobre la conveniencia o no de determinadas tasas de interés u otras relaciones numéricas que descubre, y las justifica con ejemplos y contraejemplos.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de los estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 5, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Organizar datos y expresarlos en modelos referidos a tasas de interés simple y compuesto; además, comparar porcentajes.
  - Adaptar y combinar estrategias heurísticas y otras, para resolver problemas relacionados con tasa de interés simple y compuesto.
  - Justificar la variación porcentual constante en un intervalo de tiempo empleando procedimientos diversos.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. ¿De qué datos dispones?

   Los datos de los que se dispone son los siguientes: el dinero para dar una inicial, lo que falta para comprar el departamento, las tasas de interés, el tipo de interés y el tiempo que ofrecen las dos financieras.

2. ¿Qué debes averiguar?

   Se desea conocer el monto que se pagaría año a año durante el plazo. También se busca tener una idea de a cuánto ascendería el pago mensual y determinar la opción más cómoda para la familia.

3. A simple vista, ¿cuál de las dos opciones te parece mejor? ¿Por qué?

   Respuesta libre. Algunos pensarán que en la segunda opción la tasa es menor, otros dirán que algo tiene que ver el tipo de interés, etc.

4. Parafrasea el enunciado del problema.

   Respuesta libre. Ejemplo: Una familia quiere comprar un departamento, pero no tiene lo suficiente. Quiere hacer un préstamo y le ofrecen dos opciones para analizar y decidir por la mejor.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Qué estrategia te sirve para resolver el problema? ¿Por qué?

   Elaborar una tabla, donde colocarían año a año los resultados de los intereses y montos por pagar.

2. ¿En qué consiste la estrategia elegida? ¿Con qué objetivo la usarías?

   En elaborar una tabla para poder comparar ambas opciones, año a año. Sería el criterio para decidir por la mejor opción.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Desarrolla la estrategia elegida. Ayúdate con la calculadora. Considera dos cifras decimales.

   Elaboramos una tabla para cada financiera.

Credicasa

Años	Cantidad	Interés (8,5 % anual)	Monto
1	40 000	$40\,000 \times \frac{8,5}{100} = 3400$	40 000 + 3400 = 43 400
2	40 000	$40\,000 \times \frac{8,5}{100} = 3400$	40 000 + 2(3400) = 46 800
3	40 000	$40\,000 \times \frac{8,5}{100} = 3400$	40 000 + 3(3400) = 50 200
4	40 000	$40\,000 \times \frac{8,5}{100} = 3400$	40 000 + 4(3400) = 53 600
5	40 000	$40\,000 \times \frac{8,5}{100} = 3400$	40 000 + 5(3400) = 57 000
t	C	$C \cdot r$	$C + C \cdot r \cdot t$

Davivienda

Años	Capital	Interés (7,5 % anual)	Monto
1	40 000	$40\,000 \times \frac{7,5}{100} = 3000$	40 000 + 3000 = 43 000
2	43 000	$43\,000 \times \frac{7,5}{100} = 3225$	43 000 + 3225 = 46 225
3	46 225	$46\,225 \times \frac{7,5}{100} = 3466,88$	46 225 + 3466,88 = 49 691,88
4	49 691,88	$49\,691,88 \times \frac{7,5}{100} = 3726,89$	49 691,88 + 3726,89 = 53 418,77
5	53 418,77	$53\,418,77 \times \frac{7,5}{100} = 4006,41$	53 418,77 + 4006,41 = 57 425,18

2. Haz el análisis comparativo.

   Observa en las tablas que los intereses anuales con interés simple son constantes cada año, mientras que con interés compuesto, van aumentando. También destaca que durante los cuatro primeros años el monto con interés simple es mayor que el monto con interés compuesto y que, a partir del quinto año, el monto con interés compuesto va siendo cada vez mayor que el monto con interés simple.

3. Responde la segunda pregunta de la situación inicial.

   Los cuatro primeros años conviene Davivienda; pero, a partir del quinto año, conviene Credicasa, porque sus intereses anuales no van a aumentar; se mantendrán constantes.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿Las predicciones o estimaciones que propusiste en la pregunta 3 de *Comprendemos el problema* están acordes con los resultados obtenidos?

   Respuesta libre. Motívelos a reflexionar respecto de los factores que consideraron para hacer su predicción o estimación. Notarán los factores que no tomaron en cuenta.

2. ¿Puedes verificar los montos de manera directa? Si respondes que no, fundamenta. Si respondes que sí, verifícalo.

   Sí se puede, utilizando fórmulas.

   Para la tasa de interés simple se tiene:

   $M = C + C \times r \times t$

   Por ejemplo, para 5 años: $M = 40\,000 + 40\,000 \times 0,085 \times 5 =$ S/57 000

   Para la tasa de interés compuesto:

   $M = C\,(1 + r)^t$

   Por ejemplo, para 5 años: $M = 40\,000(1 + 0,075)^5 =$ S/57 425,17

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.

- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, lo cual les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:
  1. ¿Qué palabras dan a entender que es una operación de interés simple?
     Cuando se dice: "... cada año se contabilizarán intereses correspondientes al 18 % de los S/12 500 prestados".
  2. Describe el procedimiento realizado en la resolución del problema.
     En primer lugar se reconoció el tipo de interés. Después se identificaron los datos y se eligió la fórmula por aplicar. Luego se relacionó el monto con el pago mensual y este con el tiempo transcurrido.
  3. ¿Se parece a la situación inicial? ¿Por qué?
     Sí. Es similar a la situación planteada en la primera financiera.
- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada:
  1. ¿Qué tipo de capitalización se da en este problema? ¿Cómo te das cuenta?
     Si no lo dice explícitamente, se asume que es anual. En este caso, es anual.
  2. ¿Qué capitalización se ha utilizado en la resolución planteada? ¿Es correcta?
     Se ha utilizado una capitalización mensual. No es correcta.
  3. Verifica que el procedimiento y la respuesta sean correctos. Si no lo son, realiza la corrección.
     Debemos considerar el tiempo expresado en años, porque la tasa es anual: $r = 0{,}12$; $t = \frac{6}{12} = 0{,}5$
     $M = C(1 + r)^t = 3600(1 + 0{,}12)^{0{,}5}$ = S/3809,88. Y a cada trabajador le corresponde: S/952,47.

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.
- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas o indicaciones:
  - ¿Qué dificultades tuviste para determinar el interés simple y el interés compuesto?
  - ¿En qué situaciones podrás aplicar lo que aprendiste?
  - Describe la estrategia empleada para el desarrollo de las actividades.
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar

- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

Miguel ha recibido una bonificación de S/8000 por sus 10 años de trabajo en una empresa. Decide ahorrar el dinero recibido en un banco durante un año. Tiene tres opciones: el Banco del Sur, a una tasa del 15 % convertible semestralmente; el Banco del Norte, a una tasa del 14 % convertible mensualmente, y el Banco del Centro, a una tasa de interés compuesto del 15,08 %. Sabe que para decidir lo puede hacer con la fórmula de interés compuesto o con la de la tasa anual equivalente.

$$\text{TAE} = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{r}{k \cdot 100} \right)^{k \cdot t} - 1 \right]$$

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. El banco que proporciona el mayor monto es:

a) El Banco del Centro

b) El Banco del Sur

c) El Banco del Norte

d) No se puede determinar

2. El banco que ofrece la mejor TAE es:

a) El Banco del Sur

b) El Banco del Norte

c) El Banco del Centro

d) Cualquiera de los bancos

3. Una pareja de esposos solicita a un banco un crédito vehicular por un monto de S/43 000 para comprar una miniván de 15 asientos y realizar movilidad escolar. Esta entidad le cobra una tasa de interés del 18 % anual por un periodo de 3 años. ¿Cuánto pagará de interés al finalizar el préstamo?

a) S/7740 **b)** S/27 650,38 **c)** S/23 220,00 **d)** S/66 220,10

4. En tercero de secundaria, los padres de familia están realizando actividades para el viaje y la fiesta de promoción. Hasta hoy han logrado reunir S/12 000, los cuales han decidido depositar a un plazo fijo de 2 años. Para ello, tienen dos opciones:

La caja municipal, que ofrece el 10 % trimestral de interés simple.

Un banco, el cual asegura el 36 % de interés compuesto anual, con capitalización semestral.

¿Cuál será la mejor opción? Justifica tu respuesta teniendo en cuenta la variación porcentual.

Respuesta adecuada

El estudiante justifica la variación porcentual constante en un intervalo de tiempo.

Caja Municipal:

M = 12 000 + 12 000 (0,40) (2) = 21 600

La variación porcentual es

$$\frac{21\,600 - 12\,000}{12\,000} \times 100\ \% = 0{,}8 \times 100\ \% = 80\ \%$$

Banco: $M = 12\,000\,(1 + 0{,}18)^4 =$ S/ 23 265

La variación porcentual es

$$\frac{23\,265 - 12\,000}{12\,000} \times 100\ \% = 0{,}94 \times 100\ \% = 94\ \%$$

Le conviene el banco porque el interés representa el 94 % del capital.

Respuesta parcial

El estudiante solamente realiza procedimientos diversos, pero no determina la variación porcentual.

Respuesta inadecuada

El estudiante no realiza procedimientos diversos ni justifica la variación porcentual constante en un intervalo de tiempo.

5. La empresa "Multimax", a fin de renovar sus maquinarias, requiere de S/60 000 para finales del segundo año. ¿Cuál es el capital inicial que se debe depositar hoy para obtener ese monto si se sabe que la tasa a pagar por el depósito es del 8 % anual capitalizable semestralmente?

a) S/51 288,23 **c)** S/55 473,37

b) S/51 440,32 **d)** S/57 692,31

6. Daniela se dedica a la producción y venta de joyas en oro y plata. En un tiempo determinado, invirtió S/150 000 y en 4 años ha reunido S/230 000. ¿Cuál es la tasa de interés compuesto anual que se le aplicó al dinero que invirtió?

a) 12 % **c)** 10,55 %

b) 11,28 % **d)** 53,33 %

7. Gilda acude a un prestamista con el fin de solicitar S/5000 para los gastos escolares de sus tres hijos. El préstamo lo debe cancelar dentro de tres meses, con un interés simple mensual del 20 %. Si firma un contrato en el cual una de sus cláusulas establece que, en caso de mora, le cobrarán el 1 % de interés simple diario sobre la cantidad que debía devolver, por el tiempo que exceda al plazo fijado, y Gilda paga el total del préstamo 5 días después de los tres meses, ¿cuál será el monto de la mora y cuánto pagará?

Respuesta adecuada
El estudiante aplica el monto con interés simple y con este valor halla el interés moratorio, que también es con interés simple.
$M = 5000\ (1 + 0{,}20 \times 3) = 8000$
$I = 8000 \times 0{,}01 \times 5 = 400$
De mora pagará S/400 y el pago total será S/8400.

Respuesta parcial
El estudiante halla el interés simple y luego el monto, pero no logra calcular la mora.

Respuesta inadecuada
El estudiante no responde o quiere calcular todo con respecto al capital inicial.

8. El maestro Hugo plantea a su estudiante Fernando la siguiente situación: Si se coloca un capital al 3,5 % mensual por un tiempo, genera un monto de S/2000, pero si se lo coloca al 18,5 % mensual por el mismo tiempo, produce S/6000. ¿Cuál es el tiempo al que se debe colocar el capital y a cuánto asciende este?

a) 25 meses; S/1066,67 **b)** 2,5 meses; S/1839,08 **c)** 2 años; S/1869,16 **d)** 16 meses; S/1989,46

9. Ricardo recibe una bonificación en la empresa en que labora y la deposita en una entidad financiera, en donde, por equivocación, le consideran una tasa de interés trimestral en lugar de mensual. Por este motivo, en un año deja de percibir S/240. ¿Cuánto recibiría Ricardo al cabo de tres años si la tasa de interés fuera la correcta?

a) S/3000 **b)** S/360 **c)** S/1080 **d)** S/ 540

10. Gerson reflexiona sobre la importancia del ahorro y decide abrir una cuenta con S/3500. Para ello, se le presentan tres opciones: Caxabank (3,08 % de tasa anual, capitalizable mensualmente); Bankia (3,09 % de rendimiento anual) y Kbank (3,05 %, capitalizable diariamente). ¿Cuál es la mejor opción? Justifica tu respuesta.

Respuesta adecuada
El estudiante justifica la variación porcentual constante en un intervalo de tiempo empleando procedimientos diversos.
Hallando la tasa efectiva anual en el Banco Caxabank:
$TAE = 100 \times [\,(1 + \frac{3{,}08}{12 \times 100})^{12 \times 1} - 1] = 3{,}12\ \%$
Hallando la tasa efectiva anual en el Banco Kbank:
$TAE = 100 \times [\,(1 + \frac{3{,}05}{360 \times 100})^{360 \times 1} - 1] = 3{,}10\ \%$
En el Banco Bankia la tasa es anual; no necesita ser modificada: TEA = 3,09 %
De las tres opciones bancarias, la mejor es Caxabank.

Respuesta parcial
El estudiante solo realiza procedimientos diversos, pero no determina la tasa efectiva anual.

Respuesta inadecuada
El estudiante no realiza procedimientos diversos ni determina la tasa efectiva anual.

Sesión 7

La ruta del café

Duración: 2 horas pedagógicas

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Lee mapas a diferente escala e integra la información que contienen para ubicar lugares, profundidades, alturas o determinar rutas óptimas.
	Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Describe la ubicación o los movimientos de un objeto real o imaginario, y los representa utilizando mapas y planos a escala.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para determinar la longitud y áreas irregulares expresadas en planos o mapas, empleando coordenadas cartesianas y unidades convencionales (centímetros, metros y kilómetros).

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de los estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 6, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Expresar los procedimientos empleados al resolver problemas con mapas o planos a escala.
  - Describir trayectorias en planos o mapas a escala empleando formas geométricas conocidas.
  - Usar estrategias heurísticas relacionadas con medidas, y optimizar tramos para resolver problemas con mapas o planos a escala.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. ¿Qué datos te proporciona el mapa?

   Se tiene la ubicación de las ciudades de la ruta del café, la escala que utiliza expresada en un segmento y su equivalencia en kilómetros.

2. La tabla de la situación inicial, ¿qué datos te presenta?

   En la tabla se encuentran las distancias reales recorridas, expresadas en kilómetros.

3. ¿Qué entiendes por desplazamiento?

   El desplazamiento es la distancia que hay en línea recta entre el punto de partida y el punto de llegada.

4. ¿Qué te solicita el problema?

   Comparar el desplazamiento con la distancia recorrida. Pide el cálculo de una escala.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Qué estrategia usarías para resolver la primera pregunta de la situación inicial?

   Primero usaría la escala del mapa para determinar el desplazamiento; luego, la información de la tabla para el recorrido y, finalmente, una resta para encontrar la diferencia.

2. Para la segunda pregunta de la situación inicial, ¿qué estrategia utilizarías?

   Se puede utilizar la definición de escala y cómo se calcula o representa.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Realiza los cálculos de los desplazamientos y de las distancias recorridas.

   En primer lugar, deben calcular la distancia recorrida:

   La Merced-Villa Rica-Oxapampa: 56 + 65 = 121 km, según datos de la tabla.

   Para el desplazamiento medimos en el plano las distancias entre las ciudades y aplicamos la escala gráfica mostrada.

Desplazamiento La Merced-Villa Rica: $3{,}8 \text{ cm} <> \dfrac{3{,}8 \text{ cm} \times 13 \text{ km}}{1 \text{ cm}} = 49{,}4 \text{ km}$

Desplazamiento Villa Rica-Oxapampa: $2{,}1 \text{ cm} <> \dfrac{2{,}1 \text{ cm} \times 13 \text{ km}}{1 \text{ cm}} = 27{,}3 \text{ km}$

Desplazamiento en la ruta La Merced-Villa Rica-Oxapampa: 49,4 + 27,3 = 76,7 km

2. Responde la primera pregunta de la situación inicial.

   La distancia recorrida es mayor que el desplazamiento de la ruta La Merced-Villa Rica-Oxapampa en 121 – 76,7 = 44,3 km, aproximadamente. Esto se debe a que la carretera o los caminos no son construidos en línea recta, sino atendiendo al terreno por donde se desplazan los vehículos.

3. Haz los cálculos para responder la segunda pregunta de la situación inicial.

   Se tiene la distancia real entre:

   La Merced y Mesapata, que es de 48 km.

   Este valor en un plano corresponde a 3 cm.

   Por definición, escala (E) es igual a distancia sobre el plano (d) entre distancia en la realidad (D).

   Entonces:

   $E = \dfrac{3 \text{ cm}}{48 \text{ km}} = \dfrac{1 \text{ cm}}{16 \text{ km}}$

   Expresándola en las mismas unidades, se tiene:

   $E = \dfrac{1 \text{ cm}}{1\ 600\ 000 \text{ cm}} = \dfrac{1}{1\ 600\ 000}$, que se puede expresar así: 1:1 600 000.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. Describe la estrategia que utilizaste para resolver el problema.

   Primero se hallaron las distancias reales recorridas. Luego se calcularon los desplazamientos, midiendo sobre el plano las distancias que hay entre las ciudades, para después aplicar la escala, que las convertía a distancias en el terreno.

2. ¿En qué otros casos podrías utilizar la misma estrategia?

   Podría utilizar cuando se trabaja con planos de una casa, muebles, etc.

   A veces, la escala puede ser para amplificar la realidad. Por ejemplo, si tenemos un circuito muy pequeño y lo queremos observar mejor.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.

- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, que les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:

  1. ¿Qué se ha utilizado como escala?

     Se ha utilizado el lado de cada cuadradito del plano como escala, que equivale a 1,5 m del terreno de la casa de Rocío.

  2. ¿En qué se parece a la situación inicial?

     En que también se utiliza una escala gráfica.

  3. ¿Por qué no bastaría con hallar el área del trapecio y dividirla por el área de un cerámico?

     Porque estaríamos considerando retazos del cerámico que no podrán ser empleados; por ello, se debe estimar considerando cerámicos enteros.

- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada:

  1. Verifica los valores con la nueva escala. Si son correctos, busca otra forma de resolver el problema. En caso contrario, haz las correcciones necesarias.

     El error se cometió al usar las cantidades en unidades distintas, es decir, si se realizan los cálculos en centímetros (cm), los datos deben estar en centímetros (cm).

     $E = \frac{3,2}{7200} = \frac{1}{2250}$. La escala nueva es 1: 2250.

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.
- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas o indicaciones:
  - Enumera algunas dificultades que tuviste al aplicar las escalas.
  - ¿En qué situaciones podrás aplicar el nuevo conocimiento?
  - Describe la estrategia empleada para el desarrollo de las actividades.
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar

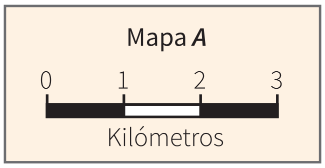
- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

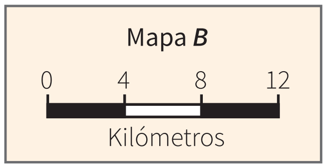
Practicamos

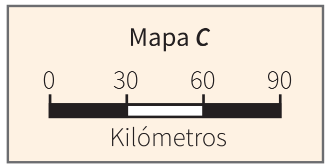
1. En un mapa, dos poblados aparecen separados 12,8 cm. ¿Cuál será la escala de ese mapa si la distancia real entre ambas poblaciones es de 80 km?

a) 4:25 **b)** 2:312 500 **c)** 1:625 000 **d)** 1:5000

2. Un arquitecto realiza el estudio de unos planos de un proyecto inmobiliario. En los planos se olvidaron indicar la escala utilizada, pero en su oficina técnica trabajan con tres escalas diferentes, como se muestra a continuación:





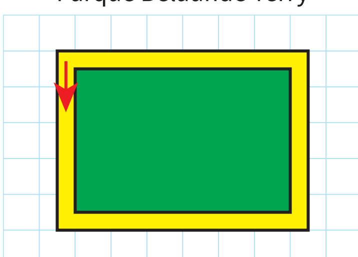


Ayuda al arquitecto a determinar cuántos kilómetros en la realidad representan 5 cm en el plano utilizando cada una de las escalas mostradas.

a) Mapa A: 6,82 km; mapa B: 27,27 km; mapa C: 204,55 km
b) Mapa A: 15 km; mapa B: 60 km; mapa C: 450 km
c) Mapa A: 13,6 km; mapa B: 54,54 km; mapa C: 3681,81 km
d) Mapa A: 3,67 km; mapa B: 8,92 km; mapa C: 0,06 km

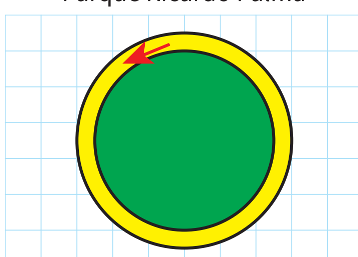
3. Marianela, Pamela y Rocío salen todos los días a correr por el perímetro del parque ubicado cerca de su casa. Pamela dice que ella corre más porque su parque es de forma rectangular. Rocío afirma lo mismo, pero debido a que su parque es circular. Marianela, la más sensata, pide que construyan un plano del parque donde van a correr. Cada una presenta los siguientes planos:

Parque Belaunde Terry



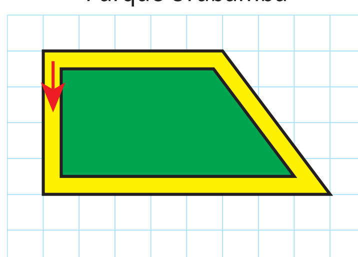
1:80
Pamela

Parque Ricardo Palma



1:90
Rocío

Parque Urubamba



1:80
Marianela

Según la información obtenida, ¿quién o quiénes de ellas recorren la mayor distancia?

a) Pamela **b)** Rocío **c)** Marianela **d)** Rocío y Pamela

4. Christian está muy entusiasmado por haber recibido su primera tarjeta inteligente del Metropolitano, la que le permitirá desplazarse desde su casa hasta su centro de estudios universitarios. Dicha tarjeta tiene forma rectangular (aunque con esquinas redondeadas) con medidas de 8,5 cm por 5,5 cm. Desea una copia ampliada en una hoja tamaño A4 (21 cm por 29,7 cm). ¿Logrará Christian su objetivo si emplea para la ampliación una escala de 7:2?

Respuesta adecuada

El estudiante es capaz de describir la ampliación de una figura geométrica conocida empleando escala.

Calculamos x e y:

$x = \frac{7(5,5)}{2} = 19,25$ cm $\qquad y = \frac{7(8,5)}{2} = 29,75$ cm

Como la hoja A4 mide 21 × 29,7 cm, entonces Christian no logrará ampliar la tarjeta en la escala de 7 a 2, porque le estaría faltando al largo de la hoja 0,05 cm (29,75 – 29,7 = 0,05 cm).

Respuesta parcial

El estudiante solamente es capaz de describir una figura geométrica conocida, pero sin emplear escala.

Respuesta inadecuada

El estudiante no es capaz de describir una figura geométrica conocida, ni empleando escala.

La Reserva Nacional de Pacaya Samiria y el Área de Conservación Regional Comunal Tamshiyacu Tahuayo destacan entre las áreas protegidas del Perú. Localizadas en la región Loreto, son consideradas unas de las mayores de Sudamérica, con una espectacular diversidad de flora y fauna. Actualmente tienen seis áreas de turismo: Nauta-Caño, Yanayacu-Pucate y Tibilo-Pastococha, que son las más visitadas por su cercanía a las ciudades de Iquitos (las dos primeras) y Yurimaguas (la tercera).

Con la información dada, responde las preguntas 5 y 6.

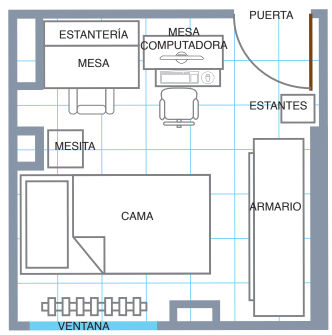
5. Según el mapa, ¿cuál es la extensión territorial aproximada de la Reserva Nacional de Pacaya Samiria si 1 cm equivale a 32 km?

a) 18 432 km^2 **b)** 20 480 km^2 **c)** 22 528 km^2 **d)** 18 000 km^2

6. ¿Cuál es la extensión territorial aproximada del Área de Conservación Regional Comunal Tamshiyacu Tahuayo?

a) 3072 km^2 **b)** 1024 km^2 **c)** 2048 km^2 **d)** 6144 km^2

7. Juan ha diseñado un plano de su habitación con escala 1:60, incluyendo algunos muebles. A partir del plano mostrado, completa la tabla.



Muebles	Medida aprox. en el plano (cm)		Medida aprox. en la realidad (cm)	
	Largo	Ancho	Largo	Ancho
Cama				
Mesa de la computadora				
Armario				

Respuesta adecuada

El estudiante logra usar un mapa o plano en problemas de medida empleando escalas.

Muebles	Medida aprox. en el plano (cm)		Medida aprox. en la realidad (cm)	
	Largo	Ancho	Largo	Ancho
Cama	5,1	2,8	306	168
Mesa de la computadora	2	1	120	60
Armario	5,2	1,4	312	84

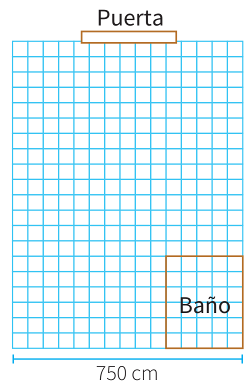
Respuesta parcial

El estudiante solo usa el plano para obtener las medidas, pero no aplica escalas.

Respuesta inadecuada

El estudiante no logra usar el plano para obtener las medidas ni aplica escalas.

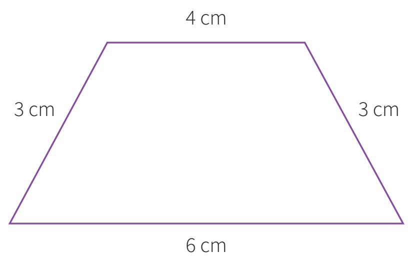
8. La señora Felícita necesita alquilar un local para abrir una panadería. Su amiga le comenta que tiene uno en la avenida principal de la ciudad y le muestra el plano del local. Felícita quiere saber el área del local para dividirlo en dos ambientes, en relación de 5 a 4. Los ambientes estarán destinados uno para la atención al público y otro para la elaboración de los panes; ¿cuál es el área real destinada para el público?



Nota:
Para la resolución de la situación, considerar 20 filas de cuadrículas en el largo del local.

a) 67,60 m² **b)** 337,5 m² **c)** 37,5 m² **d)** 54 m²

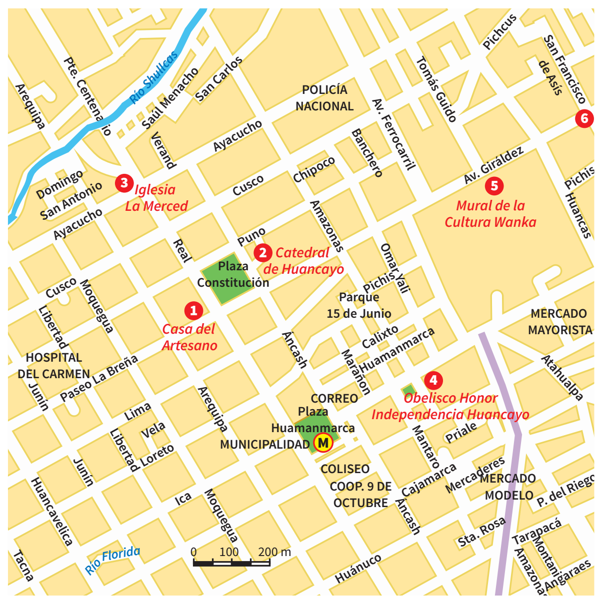
9. Un hombre compra una finca y quiere conocer la superficie de ella. Acude al catastro y pide el plano donde se encuentra la finca, y le facilitan una fotocopia con una reducción (lineal) al 80 %. La escala numérica que aparece en el plano es de 1/5000. Las medidas de la finca en la copia son como se muestra en el gráfico. ¿Cuál es el perímetro aproximado de la finca?



a) 100 m **b)** 20 km **c)** 8 km **d)** 1 km

10. Observa el plano de la ciudad de Huancayo. Es una localidad con muchos atractivos turísticos situada en el centro del país.

Considerando que la distancia entre dos lugares turísticos se medirá tomando como referencia los centros de los círculos correspondientes, ¿cuál será la mínima distancia que puede recorrer un turista si va de la iglesia La Merced al Obelisco Honor Independiente de Huancayo? Describe la trayectoria en el plano.



Respuesta adecuada
El estudiante es capaz de describir trayectorias de formas geométricas conocidas en un mapa o plano. Elabora una tabla en la que consigna el recorrido, la medida en el plano, para luego calcular el recorrido real.

Respuesta parcial
El estudiante solamente es capaz de describir trayectorias de formas geométricas conocidas en un mapa o plano, pero no las escalas.

Respuesta inadecuada
El estudiante no es capaz de describir trayectorias de formas geométricas conocidas en un mapa o plano, ni aplica las escalas convenientes.

Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 8 La rampa y las razones trigonométricas

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Lee textos o gráficos que describen las propiedades de semejanza y congruencia entre formas geométricas, razones trigonométricas y ángulos de elevación o depresión.
	Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Describe la ubicación o los movimientos de un objeto real o imaginario, y los representa utilizando razones trigonométricas en mapas y planos a escala.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos y procedimientos más convenientes para determinar la longitud de cuerpos compuestos y distancias inaccesibles empleando razones trigonométricas.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de los estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✓ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados, equipos B: estudiantes que se hallan en proceso, equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✓ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✓ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 7, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✓ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✓ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✓ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Reconocer las razones trigonométricas de ángulos agudos, notables, complementarios y suplementarios en situaciones del contexto.
  - Examinar propuestas de modelos referidos a razones trigonométricas de ángulos agudos, notables, complementarios y suplementarios al plantear y resolver problemas.
  - Aplicar estrategias heurísticas para resolver problemas que involucran razones trigonométricas de ángulos agudos, notables, complementarios y suplementarios.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. ¿Qué polígono es de importancia en la situación planteada? ¿Qué elementos de este polígono se relacionan?

   El polígono que se indica en la situación es el triángulo rectángulo. Se relacionan lados con ángulos del triángulo.

2. ¿Cuáles son los datos?

   Los datos son: la longitud de la rampa, la altura y varios de los ángulos de inclinación de la rampa.

3. ¿Cómo se relacionan los elementos de la rampa con el polígono ya citado en la pregunta 1 de *Comprendemos el problema*?

   La longitud de la rampa se relaciona con la hipotenusa del triángulo rectángulo, y el ángulo de inclinación de la rampa con el ángulo agudo (en relación con el cateto correspondiente al piso del terreno).

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Qué estrategia te conviene elegir? ¿Por qué?

   Conviene hacer un dibujo que permita visualizar los elementos para ayudar a establecer las relaciones entre estos.

2. ¿Qué conocimiento trigonométrico te facilitará la resolución de la situación dada?

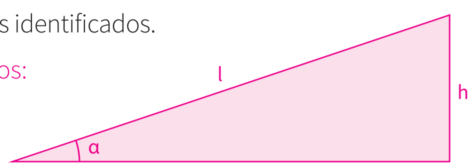
   Para la resolución de la situación inicial, te ayudarán las razones trigonométricas, porque relacionan los lados de un triángulo rectángulo con un ángulo agudo de dicho triángulo.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Comienza aplicando la estrategia elegida, utilizando los datos identificados.

   Elaborar un triángulo rectángulo y ubicar los siguientes datos:

   l: longitud de la rampa, α: ángulo de inclinación y
   h: altura de la rampa.



2. Continúa dando respuesta a la pregunta 1 de la situación inicial.

   Se deben utilizar las razones trigonométricas:

   Como sen$\alpha = \frac{h}{l}$, entonces: $l = \frac{1,5}{\text{sen}\alpha}$

   También: csc$\alpha = \frac{l}{h}$, entonces: l = 1,5x cscα

3. Completa la tabla.

Ángulo	5°	10°	15°	30°	45°	60°
Longitud de la superficie de la rampa	$\frac{1,5}{\text{sen } 5°}$ $\frac{1,5}{0,0872}$ 17,20	$\frac{1,5}{\text{sen } 10°}$ $\frac{1,5}{0,1736}$ 8,64	$\frac{1,5}{\text{sen } 15°}$ $\frac{1,5}{0,2588}$ 5,80	$\frac{1,5}{\text{sen } 30°}$ $\frac{1,5}{0,5}$ 3	$\frac{1,5}{\text{sen } 45°}$ $\frac{1,5}{0,7071}$ 2,12	$\frac{1,5}{\text{sen } 50°}$ $\frac{1,5}{0,8660}$ 1,73

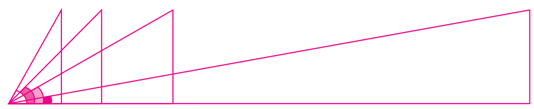
Proponga que desarrollen los procesos algorítmicos apoyándose en su calculadora científica; sugiera que aproximen los resultados a las centésimas.

4. Analiza la tabla anterior y responde la pregunta 3 de la situación inicial.

   Si la medida del ángulo de inclinación va aumentando, la longitud de la rampa va disminuyendo.

5. Representa gráficamente la variación de la longitud de la rampa.

   Los estudiantes deben plantear una figura similar a la que se muestra:



★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿La estrategia que has aplicado se puede utilizar en otras situaciones? Plantea una como ejemplo.

   Sí. Por ejemplo, cuando queremos hallar la longitud de la pendiente que sube un carro o la altura hasta la que sube. Si deseamos saber la longitud del plano inclinado de una pista para *skate*, etc.

2. ¿Qué habría pasado si hubieras utilizado la segunda forma de representar la longitud de la rampa? ¿Habría habido alguna dificultad?

   En cuanto a su valor, saldría la misma cantidad (tal vez con alguna diferencia en aproximación). La dificultad se presenta en calcular la función cosecante, ya que las calculadoras tienen, por lo general, los valores del seno, coseno y tangente.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.
- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, lo cual les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:

1. Describe la estrategia utilizada.

   Primero dibujaron un modelo cuya forma se parece al cerro. Luego anotaron todos los datos y las incógnitas. Posteriormente, buscaron triángulos rectángulos para que pudieran aplicar las razones trigonométricas y calcular los valores desconocidos.

2. ¿Qué ventajas presenta hacer el dibujo?

   Nos permite identificar los triángulos rectángulos para aplicar las razones trigonométricas.

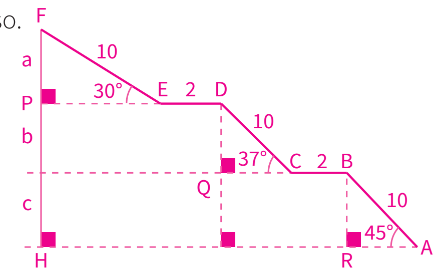
3. ¿Qué condiciones habría que considerar para resolver el problema gráficamente?

   El dibujo que realicen deberá ser hecho a escala.

- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada:

1. Verifica con otro procedimiento o corrige según sea el caso.

   Pida que ubiquen en el gráfico los datos y determinen los valores de a, b y c, así como de la altura correspondiente:



   En el triángulo *FPE*, calcula "*a*": Sen 30° $= \frac{a}{10} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{10}$; por tanto, $a = 5$

   En el triángulo *DQC*, calcula "*b*": Sen 37 °$= \frac{b}{10} \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{b}{10}$; por tanto, $b = 6$

   En el triángulo *BRA*, calcula "*c*": Sen 45° $= \frac{c}{10} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{10}$; por tanto, $c = 5\sqrt{2}$

   La altura es 5 + 6 + 5(1,41) = 18,5 m.

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.
- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- La socialización de los desarrollos será de acuerdo con el tiempo. Cada equipo puede exponer una solución (la que ellos decidan o a sugerencia del docente).

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas o indicaciones:
  - ¿En cuál de las fases de la resolución de problemas tuviste mayor dificultad?
  - ¿Qué estrategia te fue útil para resolver los problemas?
  - Describe la estrategia empleada para el desarrollo de las actividades.
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar

- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

Las escaleras mecánicas se usan para transportar con comodidad y rápidamente un gran número de personas entre los pisos de un edificio, especialmente en centros comerciales, aeropuertos, transporte público, etc.

Para la construcción de un nuevo centro comercial de dos niveles, de 6 m de altura cada uno, se están acondicionando dos escaleras mecánicas (subida y bajada). El ingeniero encargado de la obra sugiere que deben tener una pendiente $m = 1/\sqrt{3}$ como máximo.

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

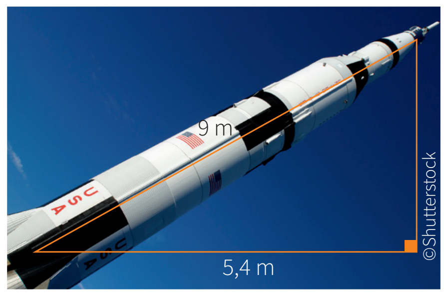
1. ¿Cuál será la longitud de la escalera eléctrica?

a) $46\sqrt{3}$ m **b)** 8 m **c)** 10 m **d)** 12 m

2. Si la altura de cada peldaño es de 300 mm, ¿cuántos peldaños tiene la escalera?

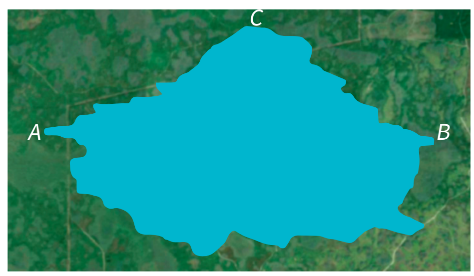
a) 25 **b)** 24 **c)** 20 m **d)** 18 m

3. La Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio, más conocida como NASA (National Aeronautics and Space Administration), que es la agencia del gobierno estadounidense responsable del programa espacial civil, así como de la investigación aeronáutica y aeroespacial, está a punto de lanzar un cohete para poner en órbita un satélite. ¿Cuál será la inclinación para iniciar su despegue? Observa la figura.



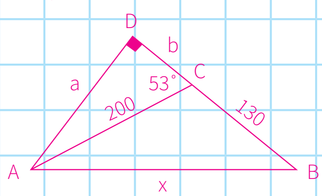
a) 31° **b)** 37° **c)** 53° **d)** 58°

4. Para aproximar el ancho de un pantano, los topógrafos Raúl y David se ubican en el punto *B*. Desde allí, ambos caminan 130 metros al punto *C*. Raúl gira 53° y camina 200 metros al punto *A*. David continúa caminando en línea recta, ubicándose perpendicularmente a Raúl, quien se encuentra en el punto *C*. Utilizando esta estrategia, los topógrafos podrían determinar, aproximadamente, el ancho del pantano entre los puntos *A* y *B*. Realiza tu procedimiento.



Respuesta adecuada: El estudiante reconoce las razones trigonométricas de ángulos agudos notables a partir de la construcción del gráfico, al calcular distancias inaccesibles.

Construimos el gráfico con la información dada.



En el ◺ ADC, calcula "*a*": $\text{Sen } 53° = \dfrac{a}{200}$

$\dfrac{4}{5} = \dfrac{a}{200}$

$a = 160$

En el ◺ ADC, calcula "*b*": $\text{Cos } 53° = \dfrac{b}{200}$

$\dfrac{3}{5} = \dfrac{b}{200}$

$b = 120$

En el ◺ ADB, calcula "*x*", por teorema de Pitágoras:

$x^2 = 250^2 + 160^2$ $\quad x = 296{,}8164$ m

Aproximadamente el ancho de pantano es 296,82 m.

Respuesta parcial: El estudiante solamente reconoce una de las razones trigonométricas de ángulos agudos notables a partir de la construcción del gráfico, al calcular distancias inaccesibles.

Respuesta inadecuada: El estudiante no reconoce las razones trigonométricas ni representa gráficamente la situación presentada.

De acuerdo con las estadísticas, los accidentes por atropello son los segundos más frecuentes, y entre las causas figura el cruce indebido por parte del peatón.

Una de las soluciones frecuentemente planteadas para mejorar la seguridad de los peatones es la colocación de puentes peatonales, especialmente en las vías de tránsito rápido. Por ello, se construyó un puente de 56 m de altura, para lo cual se han acondicionado rampas cuyas inclinaciones son α y β ($\alpha < \beta$) si se sabe que Sen α = 0,28 y Sen β = 0,5.

Con la información dada, responde las preguntas 5 y 6.

5. ¿Cuáles son los ángulos de inclinación de las rampas mostradas en la imagen?

a) 60° y 74° **c)** 30° y 30°

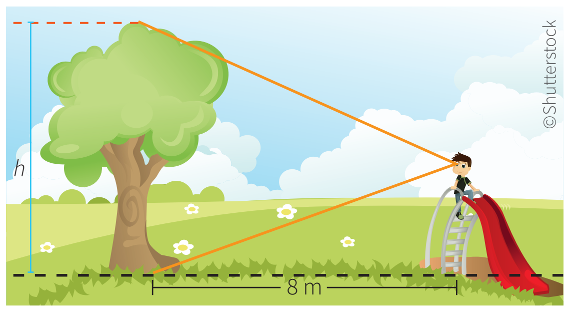
b) 16° y 30° **d)** 74° y 30°

6. ¿Cuál es la longitud total de las rampas dadas?

a) 156 m **c)** 128 m

b) 152 m **d)** 140,40 m

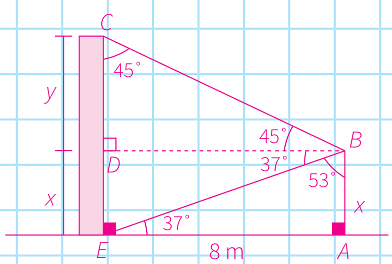
7. Jairo acude con su familia al centro de esparcimiento de Chosica. Él se sube a un tobogán y desde allí observa un árbol. Para ver la base de este, necesita bajar la vista 37° respecto a la horizontal, y para observar la punta de la copa del árbol, debe levantar su mirada 45° respecto a la horizontal. El tobogán está ubicado a 8 m del árbol. Con esta información, será posible calcular la altura del árbol. Realiza tu procedimiento.



Respuesta adecuada

El estudiante examina propuestas de modelos referidos a razones trigonométricas de ángulos agudos notables al plantear y resolver problemas.

Construimos el gráfico, ubicamos los datos y diferenciamos los triángulos rectángulos notables.



En el $\triangle$ *BAE*, calcula "*x*": Tg 37° = $\frac{x}{8} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 6$

En el $\triangle$ *BDC*, calcula "*y*": Tg 45° = $\frac{y}{8} \Rightarrow 1 = \frac{y}{8} \Rightarrow y = 8$

La altura del árbol es (x + y): 6 + 8 = 14 m

Respuesta parcial

El estudiante solamente reconoce los modelos referidos a las razones trigonométricas de ángulos agudos notables, pero no los aplica al plantear y resolver problemas.

Por ejemplo, reconoce el modelo del triángulo de 30° y 60°, 45° y 45°.

Respuesta inadecuada

El estudiante no reconoce los modelos referidos a las razones trigonométricas de ángulos agudos notables.

8. Una empresa dedicada a la publicidad ha iniciado una campaña para la introducción de una marca de refresco. Para ello, emprende un viaje de promoción en una avioneta entre las playas más concurridas de Lima.

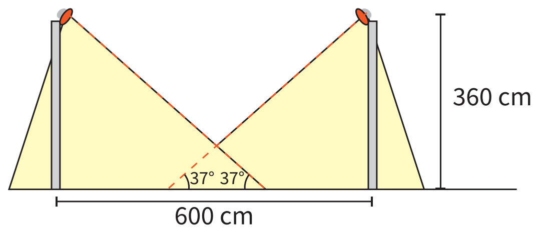
Dos salvavidas, Carla y Miguel, están ubicados en una misma línea recta y la misma dirección, separados por 153 m de distancia. En un determinado momento, ambos ven la avioneta, que sobrevuela a una altura constante, con ángulos de elevación de 82° y 53°, respectivamente. Diez segundos más tarde, Carla la observa con un ángulo de elevación de 106°.

¿A qué altura, aproximadamente, vuela la avioneta?

a) 36 m **b)** 144 m **c)** 252 m **d)** 288 m

9. Un poste es uno de los elementos que se utilizan para la construcción de tendidos eléctricos que se utilizan para iluminar calles, plazas, etc.

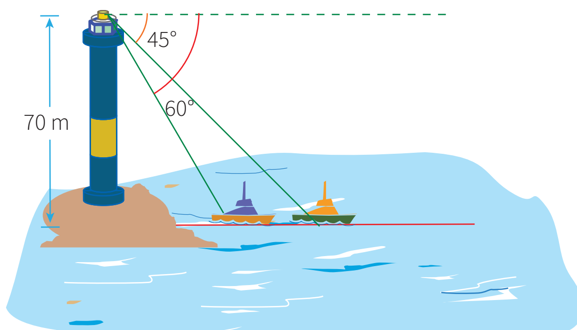
Se observa que dos postes de luz de 360 cm de altura, ubicados a una distancia de 600 cm, iluminan una calle, como lo muestra la figura. Determina la longitud del segmento que queda iluminado por los dos postes.



a) 1,2 m **b)** 2,4 m **c)** 3,6 m **d)** 4,8 m

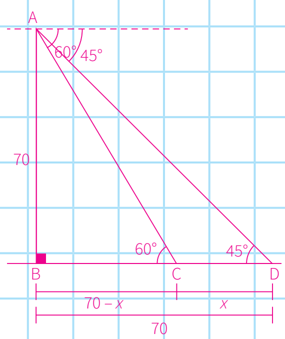
10. Un faro es una torre de señalización luminosa situada cerca de la costa. Se ubica en los lugares donde transcurren las rutas de navegación de los barcos. Dispone en su parte superior de una lámpara potente, cuya luz se utiliza como guía.

Juan es el encargado del faro Salaverry, en Barranca, el cual tiene una altura de 70 m. Desde el balcón observa dos barcos situados al oeste del faro con ángulos de depresión de 60° y 45°. Según la información dada, Juan puede hallar la distancia que separa los barcos.



Respuesta adecuada

El estudiante reconoce las razones trigonométricas de ángulos agudos, notables y complementarios en situaciones de distancias inaccesibles y ubicación de cuerpos.



En el ◺ABD, por triángulo notable de 45°: AB = BD = 70

En el ◺ABC, calcula "x":

$\tan 60° = \dfrac{70}{70 - x} \Rightarrow x = 29{,}59$

La distancia que separa a los barcos es 29,59 m.

Respuesta parcial

El estudiante solamente reconoce las razones trigonométricas de ángulos agudos en situaciones de distancias inaccesibles y ubicación de cuerpos.

Por ejemplo, $\tan 60° = \cot 30° = \dfrac{70}{70 - x}$

Respuesta inadecuada

El estudiante no reconoce las razones trigonométricas de ángulos agudos en situaciones de distancias inaccesibles y ubicación de cuerpos.

Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 9

Maximizamos o minimizamos situaciones

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencia o de variación entre magnitudes, y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen funciones cuadráticas con coeficientes racionales.
	Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.	Expresa con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre las intersecciones con los ejes de una función cuadrática.
	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos, procedimientos y propiedades algebraicas para determinar términos desconocidos y solucionar funciones cuadráticas usando propiedades de las igualdades.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de los estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 8, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Identificar un modelo referido a funciones cuadráticas al resolver un problema.
  - Reconocer las funciones cuadráticas a partir de sus descripciones verbales, sus tablas, sus gráficas o sus representaciones simbólicas.
  - Emplear estrategias heurísticas, recursos gráficos y otros para resolver problemas relacionados con funciones cuadráticas.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. ¿Qué datos te da el problema? ¿Cuál es la variable y cómo está representada?

   Los datos son las dimensiones de la plancha.

   La variable es la medida de la plancha que se puede doblar hacia arriba y está representada por x.

2. ¿Qué debes averiguar?

   Se debe establecer cómo se expresa la función que relaciona las dimensiones de la variable con las dimensiones de la plancha. También, algunos valores de la variable.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Es importante la forma geométrica que tomaría cuando se doblen los extremos de la canaleta? ¿Cómo es posible relacionar las dimensiones de la plancha con la variable?

   Sí es importante, porque piden hallar la capacidad o el volumen del paralelepípedo que se forma.

   Las dimensiones de la plancha se relacionan con la variable a través de la fórmula del volumen del nuevo cuerpo formado.

2. ¿Cuál sería el plan de resolución? Indica en qué te apoyarías en cada paso.

   1.° Para hallar las posibles medidas tomaría en cuenta el ancho dado ($16 - 2x$).

   2.° Para determinar la función consideraría la fórmula del volumen.

   3.° Establecida la función, sabremos sus características y podremos calcular sus valores.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Calcula los valores posibles de la variable que respondan la pregunta 1 de la situación inicial.

   Como el ancho es de la forma $16 - 2x$, entonces la variable podrá tomar infinitos valores. Si consideramos algunos valores enteros, obtendremos los siguientes pares de valores: (altura; ancho); (1; 14), (2; 12), (3; 10), etc.

2. Considerando el tipo de figura geométrica de la canaleta, determina la función referida que la modela.

   Para averiguar la capacidad que tendrá la canaleta, es necesario calcular su volumen. Por ello, la situación se modela considerando que el volumen es igual a la multiplicación de sus tres dimensiones: largo, ancho y altura.

Es decir: $V(x) = (300)(x)(16 - 2x)$

$V(x) = -600x^2 + 4800x$

3. En la pregunta anterior, planteaste la expresión algebraica que representa a la función; ¿qué características tiene?, ¿por qué?

   La expresión dada es una función cuadrática (su máximo exponente es 2) y su gráfica es una parábola que se abre hacia abajo ($a < 0$).

4. Para dar solución a la pregunta 4 de la situación inicial, ¿qué implica, con respecto a la función hallada, que la canaleta tenga la capacidad máxima?

   Implica que también la función debe tomar el máximo valor.

5. Según tu anterior respuesta, haz el cálculo de la capacidad máxima de la canaleta.

   Para calcular la medida en que debe doblarse para obtener la capacidad máxima, basta con hallar el punto máximo de la parábola, es decir, hallando la abscisa del vértice de la función modelada.

   $V(x) = -600x^2 + 4800x$, donde $a = -600$ y $b = 4800$, de vértice $V(x; y)$

   $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4800}{2(-600)} = 4$

   Respuesta: Debe doblarse 4 cm para que la canaleta tenga la mayor capacidad.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿Cuál sería el procedimiento para determinar el valor máximo de una función del tipo visto en esta sesión?

   El procedimiento consistió en determinar la expresión algebraica de la función cuadrática.

   Después, sugiera identificar los coeficientes de esta expresión para reemplazar en la abscisa correspondiente al vértice de la parábola.

2. ¿Puedes hallar el máximo valor de esta función de otra forma? Hazlo y verifica con lo que ya habías obtenido.

   Se puede hacer la gráfica y directamente observar el máximo valor. En este caso, los valores son $x = 4$ cm cuando el máximo valor de la función es 9600 cm^3.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.
- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, lo cual les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:

1. Describe el procedimiento para determinar la expresión algebraica de una función cuadrática.

   Se parte de su expresión general:

   $f(x) = ax^2 + bx + c$. Luego, con los datos se calculan los valores numéricos de los coeficientes a, b y c.

   Finalmente, se reemplazan los valores hallados en la expresión general.

2. ¿Qué estrategias se han utilizado en las tres situaciones planteadas?

   En *a* y *b* se ha utilizado el valor numérico de una expresión.

   En *b* y *c* se ha empleado el procedimiento de cómo resolver una ecuación de segundo grado por factorización.

- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada:

1. ¿Qué significan la abscisa y la ordenada del vértice?

   La ordenada: valor máximo de la función.

   La abscisa: valor asociado al valor máximo.

2. Si tu procedimiento es correcto, busca otra forma de solución. Si no lo es, corrígelo.

   En la solución solo hemos hallado las abscisas; nos faltaría calcular las ordenadas, que son los valores máximos.

   Reemplazando $x = 4$ en cada función:

   $y = 0{,}4(4) - 0{,}05(4)^2 = 1{,}6 - 0{,}8 = 0{,}8$ m

   $y = 1{,}6(4) - 0{,}2(4)^2 = 6{,}4 - 3{,}2 = 3{,}2$ m

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.
- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas o indicaciones:
  - ¿Qué debes tener en cuenta al modelar una función cuadrática?
  - ¿Qué pasos debes mejorar? ¿Por qué?
  - ¿El trabajo en equipo te fue útil? ¿Por qué?
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar

- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

1. Escribe verdadero (V) o falso (F) en el paréntesis, según corresponda, en las siguientes proposiciones.

I. La gráfica de una función cuadrática es una parábola que se abre hacia arriba si el coeficiente del término cuadrático es mayor que cero, y se abre hacia abajo si es menor que cero. ( )

II. La función cuadrática está bien determinada cuando se escribe en su forma simbólica: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ( )

III. En la función cuadrática de la forma $f(x) = -x^2$, siendo $x \neq 0$, su vértice se encuentra en el origen de las coordenadas y la parábola se abre hacia abajo. ( )

a) V V V　　**b)** F V F　　**c)** V F V　　**d)** F F F

Un delfín realiza saltos cuya trayectoria es una parábola que está dada por la función cuadrática $f(t) = -t^2 + 6t$, siendo $0 \leq t \leq 6$, donde t es el tiempo en segundos y $f(t)$ es la altura en metros que alcanza el delfín en determinado instante.

Con la información dada, responde las preguntas 2 y 3.

2. Calcula la altura máxima que alcanza el delfín y en qué instante.

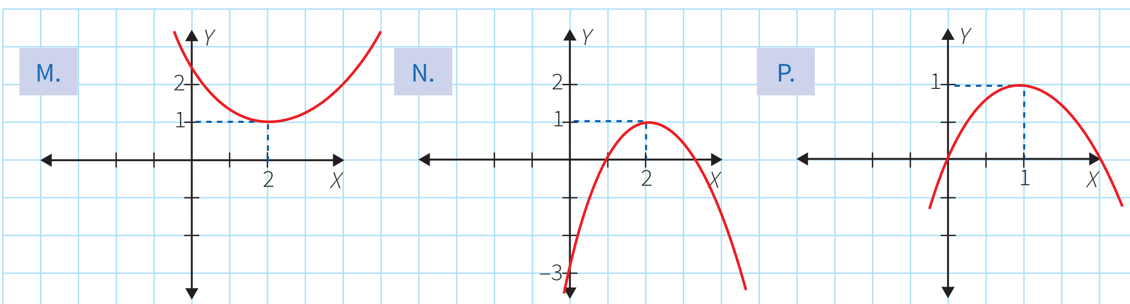
a) La altura máxima fue 3 m a los 9 s.
b) La altura máxima fue 9 m a los 3 s.
c) La altura máxima fue 27 m a los 3 s.
d) La altura máxima fue 12 m a los 3 s.

3. Averigua cuánto demora en caer el delfín desde que alcanza la altura máxima.

a) 6 s　　**b)** 9 s　　**c)** 3 s　　**d)** 12 s

4. Relaciona cada función representada simbólicamente con su respectiva gráfica, teniendo en cuenta el vértice de la parábola.

a) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$　　**b)** $f(x) = 2x - x^2$　　**c)** $f(x) = x^2 - 4x + 2$



Respuesta adecuada
El estudiante evidencia que reconoce las funciones cuadráticas a partir de sus descripciones verbales, sus tablas, sus gráficas o sus representaciones simbólicas. Asimismo, relaciona correctamente todas las funciones con sus respectivas gráficas.
Ejemplo: Respondería así: (*a* con *N*), (*b* con *P*), (*c* con *M*).

Respuesta parcial
El estudiante evidencia que reconoce las funciones cuadráticas a partir de sus descripciones verbales, sus tablas, sus gráficas o sus representaciones simbólicas, pero solamente logra relacionar correctamente dos funciones con sus respectivas gráficas; la tercera la omite.

Respuesta inadecuada
El estudiante evidencia que no reconoce las funciones cuadráticas a partir de sus descripciones verbales, sus tablas, sus gráficas o sus representaciones simbólicas. Da respuestas erradas.

En un partido de fútbol del torneo descentralizado, un jugador patea un tiro libre de modo que la trayectoria de la pelota forma una parábola correspondiente a la función $y = -0{,}05x^2 + 0{,}7x$; donde y es la altura en metros de la pelota, y x, la distancia horizontal que hay desde el punto en el que fue lanzada la pelota.

Con la información dada, responde las preguntas 5 y 6.

5. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota y a cuántos metros del punto de lanzamiento?

a) La altura máxima es 2,45 m y a una distancia de 7 m del punto de lanzamiento.

b) La altura máxima es 7,35 m y a una distancia de 7 m del punto de lanzamiento.

c) La altura máxima es 4,2 m y a una distancia de 7 m del punto de lanzamiento.

d) La altura máxima es 5,6 m y a una distancia de 7 m del punto de lanzamiento.

6. Si la barrera que forman los jugadores del equipo contrario está a 9,15 m del punto en que se lanzará la pelota, y los jugadores, saltando, pueden alcanzar una altura de 2,3 m, ¿pasa el balón por encima de la barrera? ¿Por qué?

a) Sí pasa el balón por encima de la barrera a 8,3 m.

b) Sí pasa el balón por encima de la barrera a 0,08 m.

c) No pasa el balón por encima de la barrera, porque el salto de los jugadores supera en 0,08 metros la altura que alcanza la pelota.

d) No pasa el balón por encima de la barrera, porque el salto de los jugadores supera en 0,8 m la altura que alcanza la pelota.

7. Una empresa de televisión por cable HD de un año de funcionamiento, actualmente, cuenta con 8000 clientes, a quienes les cobra 50 soles mensuales. Un funcionario de la compañía manifestó su interés por incrementar el número de usuarios, para lo cual en una reunión de directorio planteó que, si se redujera en 5 soles el cobro mensual, tendrían 1000 clientes nuevos.

Determina un modelo matemático para los ingresos mensuales de la empresa si dicho modelo es una función cuadrática sin término independiente.

Respuesta adecuada
El estudiante evidencia que reconoce la pertinencia de un modelo referido a funciones cuadráticas al resolver la situación planteada.
Ejemplo: Como el modelo matemático está referido a una función cuadrática, entonces tiene la forma
$f(x) = ax^2 + bx$

Del dato del problema tenemos:
$8000 = a(50)^2 + b(50)$
$9000 = a(45)^2 + b(45)$

Operando, simplificando y resolviendo, tenemos:
$a = -8$ y $b = 560$
Luego, el modelo mátematico queda:
$f(x) = -8x^2 + 560x$

Respuesta parcial
El estudiante evidencia que reconoce la pertinencia de un modelo referido a funciones cuadráticas al identificar la forma de la función cuadrática, pero no llega a definir el modelo específico.

Respuesta inadecuada
No evidencia que reconoce la pertinencia de un modelo referido a funciones cuadráticas al resolver la situación planteada y da respuestas erradas.

Ejemplo:
$f(x) = 50x$
$g(x) = 45x$

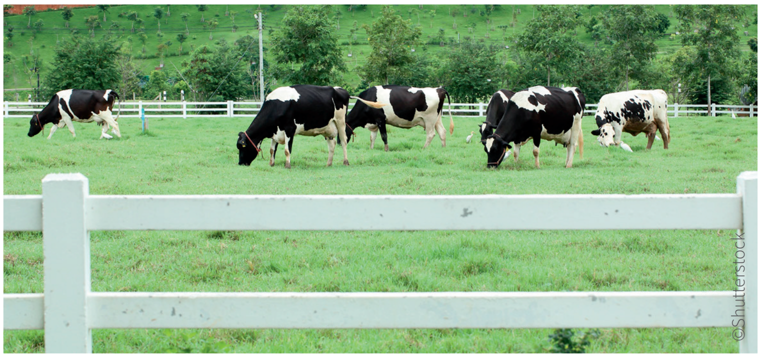
8. Para economizar malla metálica, el señor García desea construir un corral rectangular utilizando uno de sus muros. Si emplea 18 metros de malla metálica para cercar el corral y desea tener el área máxima, determina un modelo matemático para calcular el área del corral. ¿Cuántos m^2 tiene el corral si se obtiene el área máxima?

a) 121,5 m^2 **b)** 40,5 m^2 **c)** 63 m^2 **d)** 99 m^2

9. Al proyectarse una imagen sobre una pantalla, su tamaño dependerá de la distancia del proyector con respecto a ella. Así, cuando el proyector está a 0,5 metros de la pantalla, la imagen proyectada de forma cuadrada tiene un área de 0,0625 m^2; cuando se encuentra a un metro, el área es de 0,25 m^2; y cuando se halla a 1,5 metros, el área es de 0,5625 m^2, y así sucesivamente. Determina un modelo matemático respecto al área de la imagen proyectada (y) en función de la distancia entre el proyector y la imagen (x), siendo este modelo una función cuadrática.

a) $y = 0{,}25x^2$ **b)** $y = 0{,}75x^2$ **c)** $y = 25x^2$ **d)** $y = 75x^2$

10. Un granjero tiene listones de madera que suman 80 metros, con los que desea levantar un cerco rectangular para sus vacas frente a su granero. Desea que el cerco que construirá tenga el área máxima. ¿Cuál es el modelo matemático para esta situación y cuáles son las dimensiones del cerco para que tenga el área máxima?



Respuesta adecuada

El estudiante evidencia que reconoce la pertinencia de un modelo referido a funciones cuadráticas al resolver la situación planteada y responde correctamente las preguntas del problema.

Ejemplo:

En el gráfico, asignamos las variables de las dimensiones.

Determinamos un modelo matemático referido al área:

$A(x) = x(40 - x) = 40x - x^2 = -x^2 + 40x$

$A(x) = -x^2 + 40x$

Como se desea que tenga el área máxima, entonces bastará con hallar el vértice:

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{2(-1)} = \frac{40}{2} = 20$

Respuesta: El modelo matemático es $A(x) = -x^2 + 40x$, y las dimensiones para que tenga el área máxima son 20 m y 20 m.

Respuesta parcial

El estudiante evidencia que reconoce la pertinencia de un modelo referido a funciones cuadráticas al resolver la situación planteada, pero no responde en su totalidad las preguntas.

Por ejemplo, halla el modelo, pero no identifica el vértice como relacionado con el valor máximo.

Respuesta inadecuada

No evidencia que reconoce la pertinencia de un modelo referido a funciones cuadráticas al resolver la situación planteada y da respuestas erradas.

Ejemplo:

Las dimensiones son 25 por 15.

Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 10 Feria escolar para recaudar fondos

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.	Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.	Determina las condiciones y restricciones de una situación aleatoria, analiza la ocurrencia de sucesos simples y compuestos, y la representa con el valor de su probabilidad expresada como racional de 0 a 1.
	Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.	Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre el valor de la probabilidad de sucesos simples y compuestos de una situación aleatoria.
	Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.	Adapta y combina procedimientos para determinar la probabilidad de eventos simples o compuestos de una situación aleatoria.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de los estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 9, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Analizar la ocurrencia de una situación aleatoria y establecer su probabilidad.
  - Expresar el valor de la probabilidad de sucesos simples y compuestos de una situación aleatoria.
  - Adaptar y combinar estrategias heurísticas para resolver problemas de probabilidad.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
    - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
    - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. Replantea el problema con tus propias palabras.

   Respuesta libre. Un jugador lanza cinco monedas. Determinar la probabilidad de que al lanzar cinco monedas estas salgan solo cara o solo sello.

2. Identifica los datos y los valores que necesitarías calcular para que te ayuden a resolver el problema.

   Se tiene el costo del juego, el número de monedas que se lanzan, el número de personas que juega, el costo del premio y los resultados favorables. Se necesitaría saber cuántos son los resultados posibles.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿En qué consiste el diagrama de árbol? Ejemplifica.

   Es un organizador que nos permite determinar los posibles resultados de un experimento aleatorio. Ejemplo: si un suceso puede ocurrir de cuatro formas: a, b, c y d, ¿cuántos casos son posibles de un evento formado por dos de estos?

2. ¿Cómo estimarías la ganancia obtenida?

   La ganancia esperada sería la recaudación total menos la inversión esperada en premios.

3. ¿Qué pasos seguirías para resolver el problema?

   Primero deben determinar los casos posibles y los casos favorables. En segundo lugar, deben hallar las probabilidades utilizando la regla de Laplace.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Elabora un diagrama de árbol para las cinco monedas.

   Para elaborar el diagrama de árbol deben empezar colocando una rama para cada una de las posibilidades. En este caso, debe iniciarse con dos ramas (cara y sello), que se conocen como ramas de primera generación. Luego, en el final de cada rama de primera generación, se constituye, a su vez, un nudo del cual parten nuevas ramas, conocidas como ramas de segunda generación.

De esta manera, se debe seguir hasta la quinta moneda, que será el nudo final. Para este caso, se dividen las ramas en dos partes. Se deben obtener 32 posibilidades.

2. Responde la pregunta 2 de la situación inicial.

   Para que un jugador gane deben determinar el diagrama de árbol:

   Número de casos posibles: 32

   Número de casos favorables: 2

   $P(\text{gane}) = \frac{2}{32} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

   Para que un jugador pierda:

   Número de casos totales: 32

   Número de casos favorables: 30

   $P(\text{pierda}) = \frac{30}{32} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$

3. Calcula la ganancia obtenida o la recaudación neta.

   Indique que el número de personas que participan en el juego son 800; asimismo, el costo por la participación es S/5.

   En consecuencia, la recaudación total es 5 × 800 = S/4000

   Número de participantes que se espera que ganen: $E(G) = 800 \times \frac{1}{16} = 50$

   Inversión total esperada en premios: 50 × (S/35) = S/1750

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿Cómo podrías hallar el número de casos posibles sin utilizar un diagrama de árbol? Verifica para la situación dada.

   Se puede hallar el número de casos utilizando el principio multiplicativo de las coordinaciones: Si el número de casos posibles de un evento es *a* y el de otro es *b*, entonces ambos casos se presentarán simultáneamente de a x b formas. Para el problema, cada moneda tiene 2 posibilidades, entonces para las 5 monedas será: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$.

2. Propón un problema en el que puedas aplicar una estrategia semejante.

   Respuesta libre. Oriente para que el estudiante utilice otras situaciones, como con dígitos, dados, etc.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.
- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, lo cual les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:

1. Si te preguntaran cuál es el suceso más difícil que puede ocurrir, ¿qué responderías sin hacer ningún cálculo? ¿Por qué?

Que la mosca tenga un tamaño normal de alas y sus ojos sean bermellón, porque, para una misma población, le corresponde el menor número de casos posibles.

2. ¿Qué conclusión sacarías si la probabilidad hubiera sido 1? ¿Y si fuera 0?

   El primer caso es un suceso seguro; siempre va a ocurrir.

   En el segundo caso, el suceso nunca va a ocurrir, es imposible.

- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada:

1. ¿Qué diferencia encuentras entre los dos eventos planteados en *a* y *b*?

   La diferencia es que en la situación *a*, ya ocurrió el primer evento, y que el segundo evento ya no depende de todos los casos posibles iniciales; mientras que en el caso *b*, los dos eventos se dan simultáneamente y sí tienen que ver con todos los casos posibles iniciales.

2. Verifica la corrección de los procedimientos de las dos situaciones. Utiliza la ley de Laplace. Si hubiera error, realiza las correcciones.

   Se encuentra error al aplicar la regla de Laplace al primer suceso:

   $\frac{\text{sucesos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{15}{40} = 0{,}375$. Esto nos dice que el procedimiento realizado en el punto a) no ha sido correcto, porque no se tomó en cuenta la cantidad correcta de casos posibles.

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.
- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas o indicaciones:
  - ¿En qué medida te fue útil hacer el diagrama de árbol para resolver las situaciones problemáticas?
  - ¿Qué te gusto más de la actividad? ¿Por qué?
  - ¿El trabajo individual te facilitó la comprensión de la actividad?
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar

- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

1. El proyecto de una compañía procesadora de té es efectuar un experimento para comparar su marca con las de tres empresas de la competencia. Con este fin, contrata a un catador para probar y clasificar cada una de las cuatro marcas de té, sin sus nombres verdaderos, sino solo rotuladas por símbolos de identificación A, B, C y D.

Si el catador no tiene la capacidad de identificar ninguna de las marcas, ¿cuál es la probabilidad de que clasifique el té tipo A como el más deseable?

a) 0,25 **b)** 0,33 **c)** 0,50 **d)** 0,75

2. Para promover la visita al museo Señor de Sipán, sus directivos han lanzado una campaña: por la compra de una entrada, se recibe una cajita sellada que contiene un *souvenir* que es la réplica de una de las joyas encontradas en las tumbas reales. Los modelos son los mostrados en la imagen.

Si el museo distribuyó de manera uniforme estos recuerdos en las cajas, ¿cuál es la probabilidad clásica de que al entrar al museo me toque una caja en la cual no haya un venado?

a) 0,25 **c)** 0,75

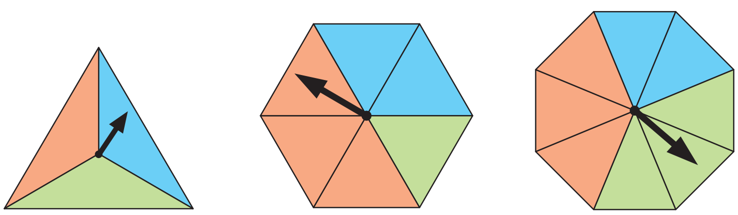
b) 0,50 **d)** 1,00

Nota: En la página 125 del cuaderno de trabajo, la alternativa b) debe decir 0,50.

3. Un salón de belleza atiende en dos turnos. Se sabe que cierto día en la mañana llegó a realizar 12 cortes de cabello, 5 ondulaciones y 9 laciados; mientras que por la tarde realizó 4 cortes de cabello, 10 ondulaciones y 3 laciados. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona llegue a atenderse en la tarde?

a) 0,39 **b)** 0,40 **c)** 1,52 **d)** 0,65

4. ¿En cuál de las siguientes ruletas es más probable obtener el color azul?



Respuesta adecuada

El estudiante afirma que en las situaciones I y II, reconociendo las condiciones de probabilidad.

Por ejemplo:

P(triángulo) = $\frac{1}{3}$

P(hexágono) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

P(octógono) = $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Respuesta parcial

El estudiante afirma que en las situaciones I o II, reconociendo las condiciones de probabilidad, o puede reconocer la situación I y III o II y III de forma intuitiva.

Respuesta inadecuada

El estudiante afirma que en la situación III, debido a que reconoce como probabilidad el 0,25, o no reconoce las condiciones del espacio muestral.

5. En la ciudad de Huancayo se venden tres periódicos: *Correo*, *La Voz* y *Amanecer*.

Se sabe que el 40 % de la población lee *Amanecer*; el 22 %, *Correo*, y el 19 %, *La Voz*. Además, se sabe que el 8 % lee *Amanecer* y *Correo*; el 6 %, *Amanecer* y *La Voz*, y el 4 %, *La Voz* y *Correo*.

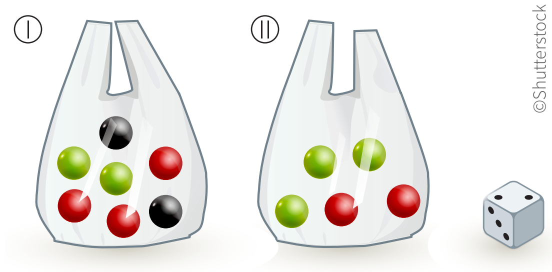
Si elegimos un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que lea *Amanecer* y *La Voz*?

a) 0,12 **b)** 0,06 **c)** 0,11 **d)** 0,28

6. Pedro y Luis cuentan con dos bolsas con bolas y un dado. El juego está ligado a las siguientes condiciones:

- Se lanza el dado, y si resulta 1 o 2, se extrae una bola de la bolsa I.
- Se lanza el dado, y si resulta 3; 4; 5 o 6, se extrae una bola de la bolsa II.

Determina cuál es la probabilidad de que al tirar el dado resulte 2 y se extraiga una bola verde.



©Shutterstock

a) 0,011 **b)** 0,285 **c)** 0,166 **d)** 0,047

7. Fernanda asiste a la Casa de la Cultura de su municipio, en donde le presentan el afiche que se observa en la imagen.

Ella ha decidido realizar en sus vacaciones actividades relacionadas con el movimiento artístico corporal. ¿Cuál es la probabilidad de que su elección sea la danza árabe?

Respuesta adecuada

El estudiante reconoce el número de casos favorables y totales.

Posible operación que realiza:

Número de casos favorables: 1

Número de casos totales: 4

(baile moderno, marinera norteña y festejo, danza árabe, ballet)

$P(DA) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Respuesta parcial

El estudiante reconoce que los casos totales están relacionados con las danzas. Sin embargo, no los identifica adecuadamente; por ejemplo, considera el tae kwon do y la capoeira.

Respuesta inadecuada

El estudiante no reconoce el número de casos favorables y totales; por ejemplo, reconoce como casos totales todas las actividades del afiche (15 casos totales).

8. La I. E. N.° 2055 del distrito de Comas tiene dispuestos varios libros en una estantería de su biblioteca. De estos, 45 son de Comunicación y 30, de Matemática. Hoy ingresó el estudiante Hugo y extrajo un libro al azar y se lo llevó. A continuación, entró Luis y sacó otro libro al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el libro extraído por Luis haya sido de Comunicación?

a) 0,12 **b)** 0,24 **c)** 0,66 **d)** 0,60

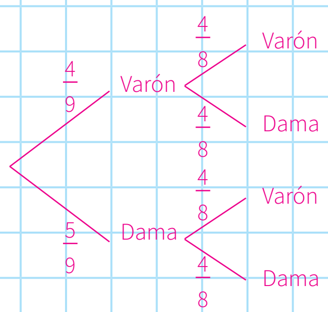
9. En el asentamiento humano José Carlos Mariátegui se llegó a ver que el 5 % de la población padece de una enfermedad. Para poder detectarla, se realizó una prueba diagnóstica. En esta, se observó que, en pacientes que sufren ese mal, en un 90 % da positivo. En cambio, un 94 % de los individuos que no la padecen dan negativo. Si tomamos un poblador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el poblador dé positivo y sufra la enfermedad?

a) 0,045 **b)** 0,090 **c)** 0,144 **d)** 0,090

10. Un aula de quinto grado necesita elegir un comité de deportes, el cual consta de un presidente y un secretario. Si se sabe que en el grupo hay 4 hombres y 5 mujeres, halla la probabilidad de seleccionar un hombre y una mujer.

Respuesta adecuada

El estudiante reconoce el suceso compuesto y calcula la probabilidad de que ocurra.
Ejemplo:
La probabilidad de seleccionar un hombre y una mujer será:



P(1 hombre y 1 mujer) = $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{16}{72} + \frac{20}{72} = \frac{36}{72} = 0{,}5$

Respuesta parcial

El estudiante reconoce el suceso compuesto, pero no calcula la probabilidad de que ocurra. También puede que haga el diagrama de árbol, pero sin poder hallar la probabilidad.

Respuesta inadecuada

El estudiante no reconoce el suceso compuesto.

Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 11 Cigarras en Quillabamba

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencia o de variación entre magnitudes, y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen sucesiones crecientes o decrecientes.
	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos o procedimientos para hallar términos desconocidos de una sucesión creciente o decreciente.
	Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	Plantea afirmaciones sobre características de una sucesión creciente y decreciente u otras relaciones de cambio que descubren y justifican la validez de una afirmación opuesta a otra, o de un caso especial mediante ejemplos y contraejemplos.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de los estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 10, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Determinar la regla de formación de una sucesión convergente y divergente.
  - Calcular el valor de un término de una sucesión convergente y divergente, así como de una progresión geométrica.
  - Aplicar estrategias heurísticas para solucionar problemas referidos a progresiones geométricas con recursos gráficos u otros.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. ¿De qué datos disponemos?

   Disponemos de una fórmula para hallar la población de insectos al día siguiente de n, así como el coeficiente de reproductividad y el número actual de insectos hembras.

2. ¿Qué debemos hallar?

   Se debe determinar si la población de insectos hembras va aumentando o disminuyendo.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Qué estrategia o estrategias plantearías para resolver el problema? ¿En qué consisten?

   Se utilizará un diagrama de flujo para poder hallar algunos valores de la población en diferentes días. Luego los comparamos para poder inferir su tendencia. Con el diagrama cartesiano se puede visualizar la tendencia.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Aplicamos la fórmula, adecuando sus resultados al plan diseñado.

   Como se desea saber si la población de cigarras hembras tiende a aumentar o disminuir en los siguientes días, reemplazamos los datos del problema en la fórmula.

   Datos: $k = 0{,}75$; $n = 0{,}4$ Fórmula: $P = k\,n\,(1 - n)$

   Se tiene que, para el día $n + 1$, el número de cigarras hembras es: $P_1 = 0{,}75 \times 0{,}4\,(1 - 0{,}4) = 0{,}157\,50$

   Luego, para el día $n + 2$, se toma el resultado del día anterior y se calcula con la misma fórmula la cantidad de cigarras hembras, siendo: $P_2 = 0{,}75 \times 0{,}157\,50\,(1 - 0{,}157\,50) = 0{,}099\,52$

   Este proceso se va repitiendo sucesivamente, y los valores son los términos de una sucesión numérica que pueden representarse con $P_1, P_2, P_3, \ldots Pj$.

   Ahora vamos a calcular los primeros términos de dicha sucesión con ayuda de la calculadora o de una hoja de cálculo (Excel), obteniéndose los siguientes datos aproximados: 0,157 50; 0,099 52; 0,067 21; 0,047 02; 0,033 61; 0,024 36; 0,017 82; 0,013 13; 0,009 72

   Se observa en los resultados que la sucesión formada es una sucesión decreciente, porque sus términos cada vez son menores, pero no pasarán al campo de los números negativos.

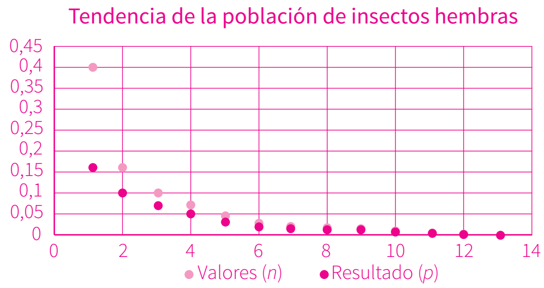
   Esto significa que es una sucesión convergente, que tiende a cero.

2. Para visualizar la tendencia, podemos representar de otro modo los valores hallados.

   Los valores hallados los llevamos a un diagrama cartesiano para visualizar la relación entre los valores de *n* y los de la población *P*. Recomiende que en el eje de las abscisas escriban los dados de los valores (*n*) y en el eje de las ordenadas, el valor de los resultados (*P*).

3. Si dispones de una hoja de cálculo Excel, puedes buscar otro gráfico que relacione los valores (*n*) con los resultados (*P*) y el orden del tiempo.

   Este gráfico confirma que la sucesión es convergente, y que su tendencia es cero.



★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿Qué criterio utilizarías para reconocer si una sucesión es convergente?

   Resalte que el procedimiento sería el siguiente:

   1. Hallar algunos valores de la variable.
   2. Compararía los valores para ver si se están acercando a algún valor. Se puede visualizar mejor si los representamos en un gráfico.
   3. Si el nuevo valor y el anterior cada vez están más cerca, entonces será una sucesión convergente.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.
- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, lo cual les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:

1. Cuando el valor de *n* aumenta, ¿qué ocurre con el valor de *P*?

   Considerando los siguientes datos realizamos un análisis:

   $P_1 = 2{,}5(0{,}35)\ (1 - 0{,}35) = 0{,}568\ 75$

   $P_2 = 2{,}5(0{,}568\ 75)\ (1 - 0{,}568\ 75) = 0{,}613\ 18$

   $P_3 = 2{,}5\ (0{,}613\ 18)\ (1 - 0{,}613\ 18) = 0{,}592\ 97$

   Si tomamos los valores del primer y segundo término, observamos que el segundo es mayor que el primero. Pero si comparamos el segundo con el tercero, este es menor que el segundo. Es decir, los valores van oscilando.

2. ¿Qué valor tendrá *n* cuando el resultado sea 0,6?

   Como ya se ha encontrado que la sucesión es convergente en 0,6, entonces es en este valor donde tanto *n* como *P* son iguales.

3. En el caso del problema de la situación inicial (cigarras), ¿cómo fue la sucesión: creciente o decreciente? Y en este caso, ¿cómo es?

   En el caso de las cigarras, la sucesión fue decreciente, hasta llegar al límite 0. En el caso del saltahojas, la sucesión es oscilante hasta llegar al límite 0,6.

- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada.

1. Confronta la resolución con el diagrama. Justifica la respuesta dada. En el caso de que no fuera correcta, corrígela.

   Observando el diagrama vemos que la tendencia es que el valor se mantenga en 0,6. Esto significa que la población de saltahojas hembras se estabilizará en 0,6; no desaparecerá ni aumentará indefinidamente.

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.
- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas **estrategias** para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas o indicaciones:
  - ¿En qué fase de la resolución de problemas tuviste más dificultad? ¿Cómo la superaste?
  - ¿Qué caracteriza a una sucesión convergente?
  - Elabora un organizador gráfico del contenido trabajado.
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

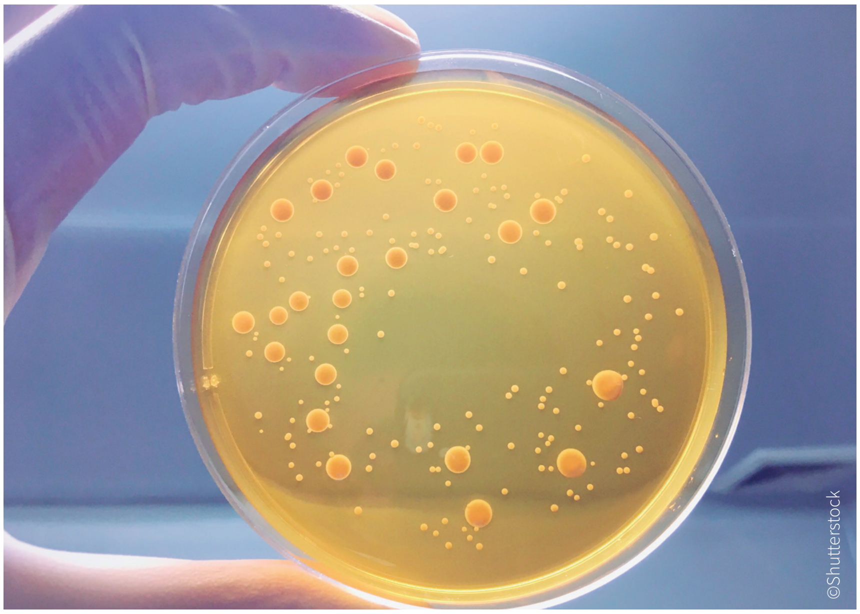
Materiales o recursos para utilizar

- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

Las bacterias son microorganismos unicelulares importantes tanto para la naturaleza como para el ser humano, pero también pueden producir problemas de salud.

En un cultivo de bacterias se empezó con 500. Se sabe que se reproducen de modo que se triplican cada 6 horas (h).



Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. Los valores de cada 6 h de la población de bacterias de esta muestra forman una sucesión:

a) Convergente **b)** Divergente **c)** Oscilante **d)** Alternante

2. ¿Cuántas bacterias habrá al término del día?

a) 2000 **b)** 12 000 **c)** 40 500 **d)** 72 000

Un investigador médico estaba haciendo un estudio sobre la eficacia de un medicamento para combatir determinada bacteria. Encontró que cuando se aplicaba la medicina, la población de bacterias se reducía según la fórmula $M = B/(n + 1)$, en donde n era el tiempo expresado en horas y B, la cantidad de bacterias en ese periodo.

Con la información dada, responde las preguntas 3 y 4.

3. Los valores que se obtienen cada hora, ¿qué clase de sucesión forman?

a) Oscilante
b) Convergente creciente
c) Convergente decreciente
d) Divergente decreciente

4. Se sabe que cuando hay 500 bacterias, las defensas del organismo se encargan de ellas. Una persona llegó a tener 60 000 bacterias, y en ese momento se le aplicó el medicamento. Para cuántos días tuvo el tratamiento.

Respuesta adecuada

El estudiante comprende que el proceso es recurrente, y la sucesión, decreciente, y que empezará paso a paso.

Por ejemplo, en la fórmula $M = B/(n + 1)$

Primer día = 60 000/(1 + 1) = 30 000

Segundo día = 30 000/(2 + 1) = 10 000

Tercer día = 10 000/(3 + 1) = 2500

Cuarto día = 2500/(4 + 1) = 500

Estas últimas están a cargo de las defensas propias. Entonces, se necesitaron 4 días.

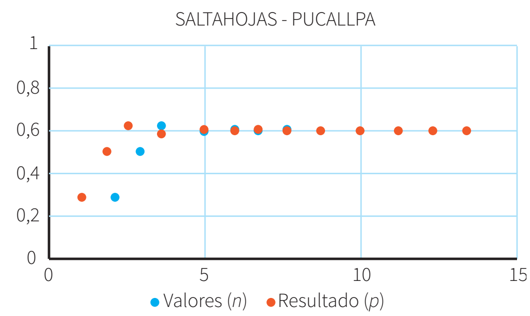
Respuesta parcial

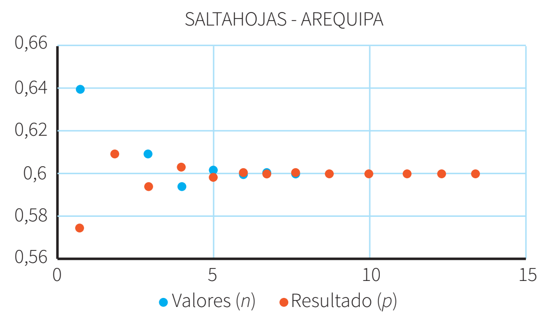
El estudiante aplica la fórmula, pero con errores, o no toma en cuenta la restricción referida a las defensas propias.

Respuesta inadecuada

El estudiante considera empezar por el final teniendo en cuenta 500 y 60 000.

En los diagramas se aprecian los resultados obtenidos en Pucallpa y Arequipa respecto al saltahojas.





Con la información dada, responde las preguntas 5; 6 y 7.

5. Con respecto al saltahojas de Pucallpa, ¿cuál de las afirmaciones es cierta con respecto a n y P?

a) En el tercer día la diferencia es, aproximadamente, de más de 2.

b) En el cuarto día la diferencia es nula.

c) Entre el primer y segundo día el resultado aumenta, aproximadamente, 0,5.

d) En el primer día la diferencia es, aproximadamente, de 0,6.

6. Con respecto al saltahojas de Arequipa, ¿cuál es la cantidad, aproximada de insectos hembras en el octavo día?

a) 6000 **b)** 0,600 **c)** 600 **d)** 60

7. A partir de las gráficas, indica el tipo de sucesión que se muestra desde el día 2 al día 5, sabiendo que ambos son convergentes.

Respuesta adecuada

El estudiante compara la posición por día: quién se encuentra más alto y qué pasa en el día siguiente.

Por ejemplo, en el día 2 n (azul), está debajo del anaranjado (resultado); pero al día siguiente es al revés, por lo que afirmamos que en el tramo indicado es oscilante.

Respuesta parcial

El estudiante reconoce que un valor es mayor que el otro, pero no indica la clase de sucesión.

Respuesta inadecuada

El estudiante no emite respuesta alguna.

Uno de los insectos más perjudiciales para la ganadería es el chinche. El daño que ocasiona a los pastos, se produce por la succión de la savia, tanto cuando se halla en etapa de ninfa como de adulto, lo que ocasiona debilitamiento de las plantas, disminución en el rendimiento, pérdida en la calidad del follaje y disminución en el contenido de nitrógeno y azufre en las hojas atacadas. Además, los adultos también inyectan saliva tóxica a las plantas, provocando así la muerte de la hoja.

En un pastizal de Ica se ha detectado la presencia de una colonia de chinches. Se sabe que el coeficiente de reproductividad de estos insectos es 3,2. Asimismo, se ha determinado que la colonia está conformada por 0,100 hembras. Por ello, los ganaderos de la zona se encuentran sumamente preocupados.

También conocen la fórmula para hallar la población de insectos hembras: $P = k\,n\,(1 - n)$. Aplica esta fórmula y completa la tabla.

Con la información dada, responde las preguntas 8; 9 y 10.

Términos	Valores (n)	Resultado
P_1	0,100 00	0,288 00
P_2	0,288 00	0,656 18
P_3	0,656 18	0,721 95
P_4	0,721 95	0,642 37
P_5	0,642 37	0,735 14
P_6	0,735 14	0,623 07
P_7	0,623 07	0,751 53
P_8	0,751 53	0,597 54
P_9	0,597 54	0,769 55
P_{10}	0,769 55	0,567 49
P_{11}	0,567 49	0,785 43
P_{12}	0,785 43	0,539 30
P_{13}	0,539 30	0,795 06
P_{14}	0,795 06	0,521 41
P_{15}	0,521 41	0,798 53
P_{16}	0,798 53	0,514 81
P_{17}	0,514 81	0,799 30
P_{18}	0,799 30	0,513 35
P_{19}	0,513 35	0,799 43
P_{20}	0,799 43	0,513 09
...	...	...

8. Analiza los datos hallados y encuentra los puntos de convergencia o límites de la sucesión en los resultados.

a) 0,200 y 0,490

b) 0,288 y 0,656

c) 0,513 y 0,800

d) 0,513 y 0,799

9. ¿Qué pasará en los próximos días con la población de chinches detectada en Ica?

a) Aumentará indefinidamente.

b) Disminuirá indefinidamente.

c) Oscilará hasta llegar a dos límites.

d) Aumentará hasta llegar a un límite.

10. Los ganaderos van a coordinar acciones para tomar una decisión respecto al problema. En la información que reciben, les muestran un cuadro donde se ve la tendencia en la reproducción de los chinches. Haz un diagrama cartesiano en el que se aprecie la relación entre los valores n y P en función del tiempo.

Respuesta adecuada
El estudiante reconoce que hay una relación entre la población del día anterior y la del día presente, elabora un gráfico para mostrar cómo se desplazan en el tiempo ambos valores.
Por ejemplo, utilizar una hoja de cálculo para luego elegir el gráfico pertinente. Considerar los valores de n y P en el eje de las ordenadas (Y) y el tiempo en el eje de las abscisas (X).

Respuesta parcial
El estudiante relaciona directamente ambas poblaciones, una en el eje X y la otra en el eje Y, pero no da una referencia temporal.

Respuesta inadecuada
El estudiante dibuja el sistema de coordenadas sin ningún elemento más.

Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 12 El osciloscopio

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencia o de variación entre magnitudes, y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen funciones.
	Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.	Expresa, con diversas representaciones gráficas y simbólicas y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre la dilatación, la contracción, los desplazamientos horizontales y verticales, y las intersecciones con los ejes de una función al variar sus coeficientes.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de los estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 11, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Representar las características de una muestra mediante las medidas de tendencia central.
  - Usar estrategias para recopilar datos, procesarlos y organizarlos en tablas.
  - Plantear y validar afirmaciones sobre las características de una muestra con base en el análisis de los datos.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. ¿Qué datos nos da el problema?

   La imagen de la pantalla es un osciloscopio, en donde se aprecia una curva en un sistema de coordenadas. Además, nos indica una unidad de medida.

2. ¿Qué nos pide hallar?

   Establecer las características de la imagen, qué tipo de función es y entre qué valores varían la función y su periodo.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Qué estrategia te ayudaría a resolver el problema?

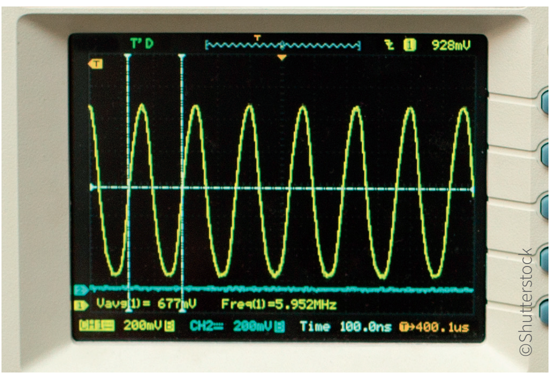
   La estrategia a utilizar es el diagrama cartesiano y buscar patrones.

2. Para este problema, ¿cómo sería el plan?

   Se pueden aplicar las características de un diagrama cartesiano para la curva mostrada y buscar patrones, que puede ser de cómo crece o decrece la función, si se repite o no, si tiene límites.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Para mejorar la visualización hemos ampliado la imagen. Obsérvala bien antes de aplicar tu plan.



2. La imagen principal, ¿es una recta o una curva?

   Es una línea curva.

3. Describe cómo se desarrolla la línea de la imagen con respecto al eje Y. ¿Varía o se mantiene constante? ¿Cómo?

   Va aumentando para luego disminuir y lo repite de manera constante.

4. Responde la primera pregunta de la situación inicial.

   Es una curva continua. Se repite cada cierto tramo y es una función periódica.

5. Calcula el menor y mayor valor de la función. Considera el sistema de coordenadas.

   Observando el eje de las abscisas, encontramos que el punto más alto está a 2 u de dicho eje, y que el punto más bajo se encuentra a – 2 u.

6. ¿Qué valores se repiten, los de las abscisas (X) o los de las ordenadas (Y)? ¿Cómo lo hacen?

   Se repiten los de las ordenadas "Y", y se observa que lo hacen cada 4,7 u aproximadamente.

7. Da respuesta a la pregunta 2 de la situación inicial.

   Según lo resuelto en la pregunta 5 de *Ejecutamos la estrategia o plan*, podemos afirmar que el valor de la función se encuentra en el intervalo [2; –2]. Y el periodo es igual a 4,7 u, que es lo que se repite en forma periódica.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿Puedes verificar de otro modo que la función es periódica o no periódica?

   Utilizamos una regla para medir las longitudes entre dos puntos más altos y dos puntos más bajos y comprobar que son iguales para mostrar que es una función periódica.

2. Describe cómo has hallado el intervalo acotado de la función.

   Calculo las distancias de los puntos más altos y más bajos con respecto al eje *X*, que corresponden a los valores extremos del intervalo correspondiente a la función.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.
- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, lo cual les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:

1. ¿Tiene alguna similitud con la situación inicial?

   Ambos problemas tienen el mismo procedimiento de resolución.

2. ¿Cómo describirías la función dada?

   Es una función periódica compuesta de tres tramos lineales con un periodo de 3 u y un intervalo de acotación igual a [–2; 3].

- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación B, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada.

  1. ¿Cómo identificas la amplitud de la función a partir de las gráficas?

     Reconozco los valores máximo y mínimo de la función. La mitad de la distancia entre estos valores es la amplitud.

     Para este caso: $\frac{|2-(-2)|}{2} = 2$

  2. Verifica que las ecuaciones de las gráficas sean ciertas.

     La situación nos indica que la forma de la función es $f(x) = a(\text{R.T.})(bx)$, entonces para la gráfica verde tendríamos:

     $f(x) = 2\cos(bx) = 2\cos(\frac{x}{4})$

     donde: $b \cdot x = \frac{x}{4}$; en consecuencia, $b = \frac{1}{4}$, y no 4 como se presentó en la resolución de la situación.

     Y para la gráfica de color anaranjado es la función $g(x) = 2\,\text{sen}(bx) = 2\text{sen}(\frac{x}{4})$

     Por lo tanto, las funciones dadas son ciertas.

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.
- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas **estrategias** para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

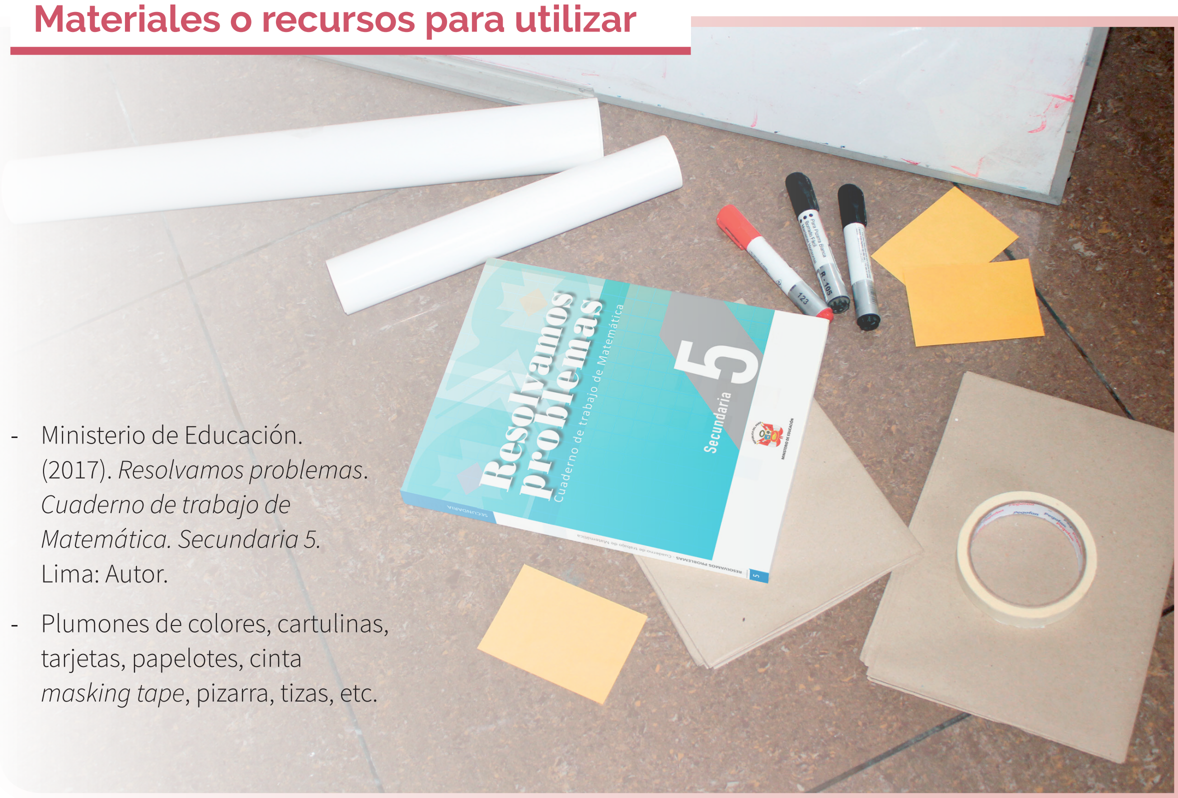
- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas o indicaciones:
  - ¿Qué dificultades tuviste para plantear la estrategia? ¿Cómo las superaste?
  - ¿Qué caracteriza a una función trigonométrica?
  - Elabora un organizador gráfico del contenido trabajado.
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación C de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

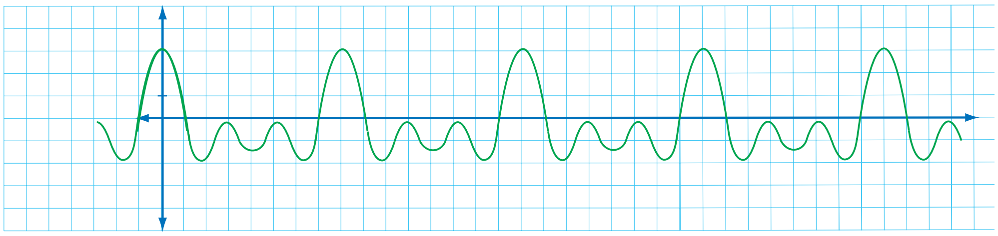
Materiales o recursos para utilizar



- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

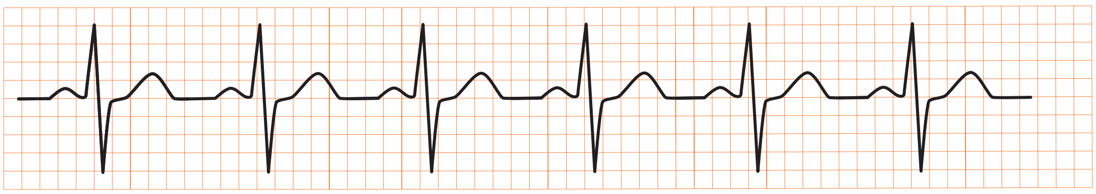
Practicamos

1. Si cada cuadrícula corresponde a 1 u, ¿aproximadamente cuál es el periodo de la siguiente función?



a) 3 u **b)** 4 u **c)** 11 u **d)** 8 u

2. En un electrocardiograma se tuvo la siguiente imagen:



¿Qué función corresponde a esta gráfica?

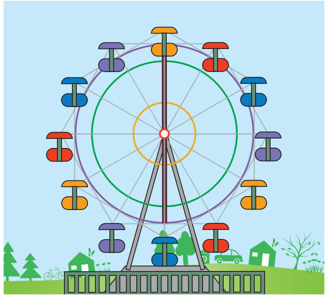
a) Función seno

b) Función coseno

c) Función periódica

d) No se podría determinar

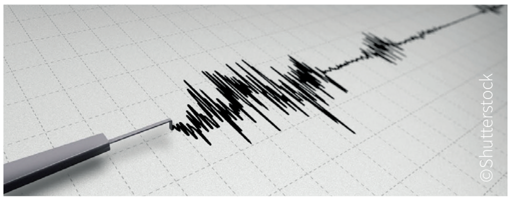
3. Se sabe que los asientos de la rueda de la feria se encuentran a 4 m del centro. Determina a qué distancia del eje vertical de color morado se halla el asiento de color rojo situado en la parte inferior.



a) 1 m **b)** 1,73 m **c)** 2 m **d)** 2,73 m

4. En la imagen mostrada, un sismógrafo grafica los movimientos de la tierra durante un terremoto.

¿A qué función pertenece?

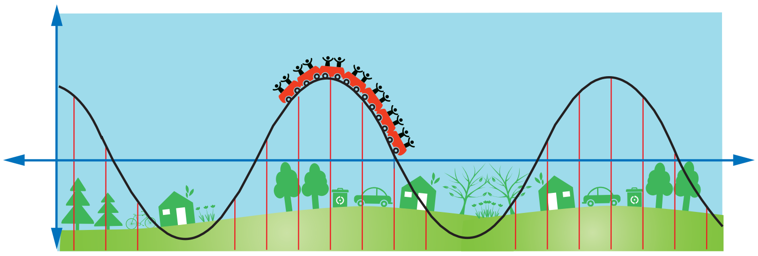


Respuesta adecuada
El estudiante comprende la situación reconociendo las características de la gráfica mostrada.
Por ejemplo, sabe que el seno y el coseno son funciones periódicas. Observa que al cambiar de posición el papel, la aguja traza un gráfico que no se repite, por lo que afirma que la función no es periódica en ese tramo.

Respuesta parcial
El estudiante reconoce que no se parece a la función seno (o coseno), pero no da una conclusión.

Respuesta inadecuada
El estudiante no compara con ninguna función. No da respuesta o da una sin sustento; por ejemplo: “Parece ser que se repite”.

La siguiente montaña rusa fue diseñada por un matemático. La diseñó con su función trigonométrica preferida, con una altura, respecto del eje horizontal, de 30 m.



Con la información dada, responde las preguntas 5 y 6.

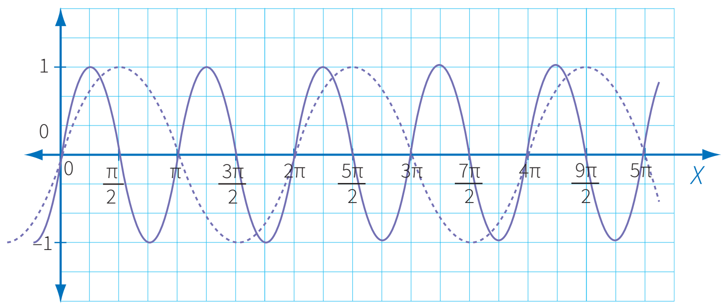
5. ¿Cuál es la función que mejor representa a la montaña rusa?

a) $f(x) = 30\text{sen}20x$ **b)** $f(x) = 15\cos 20x$ **c)** $f(x) = 30\cos\left(\frac{x}{20}\right)$ **d)** $f(x) = 15\text{sen}\left(\frac{x}{20}\right)$

6. ¿Cuál es la longitud de la columna vertical más larga que sostiene a la montaña rusa?

a) 15 m **b)** 30 m **c)** 45 m **d)** 60 m

7. En un osciloscopio la potencia de sonido de un minicomponente describía la función $f(x) = \text{sen}x$, la cual se observa en las líneas discontinuas. Luego de que un técnico movió ciertos cables, las ondas cambiaron. ¿Qué función describe?

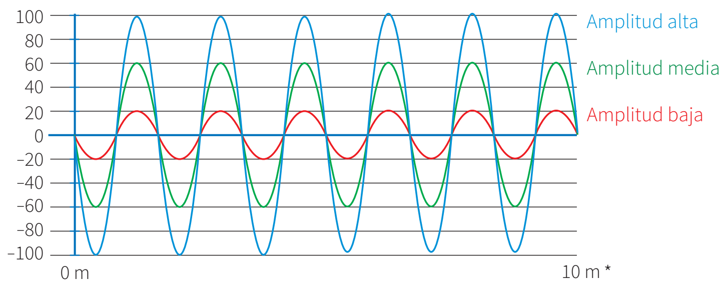


Respuesta adecuada
El estudiante comprende la situación al poder determinar la amplitud de la función y su periodo, reconociendo que las características corresponden a la función seno.
Por ejemplo, determina la amplitud, por lo que $a = 1$, y cómo su periodo disminuye a la mitad y el valor de b se duplica; es decir, $b = 2$. La función sería:
$f(x) = \text{sen}2x$

Respuesta parcial
El estudiante reconoce que también es la función seno, pero no logra determinar ni la amplitud ni el periodo.

Respuesta inadecuada
El estudiante no reconoce que es la misma función o dice que cambió a coseno.

La siguiente gráfica representa las longitudes de ondas sonoras:



* Aclarar a los estudiantes que el valor en el eje horizontal no es 10 m, sino 5,4 m.

Con la información dada, responde las preguntas 8 y 9.

8. Se puede afirmar que:

a) Tienen la misma acotación.

b) Tienen la misma amplitud.

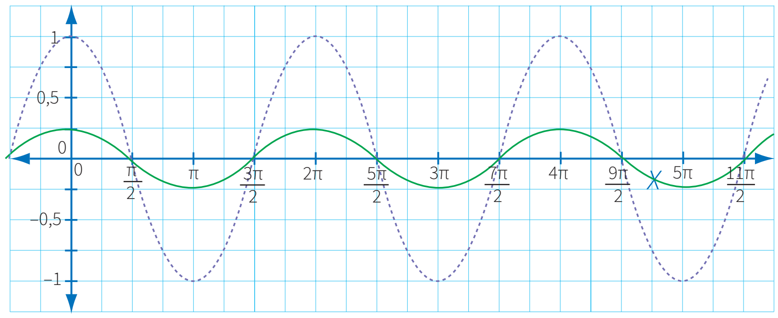
c) Tienen el mismo periodo.

d) No tienen nada en común.

9. ¿Cuál es el periodo de la amplitud media?

a) 0,6 m **b)** 0,7 m **c)** 0,8 m **d)** 0,9 m

10. El ritmo cardiaco de un paciente cambió de manera repentina de una función $f(x) = \cos x$ descrita en líneas discontinuas a otra. ¿Qué función representa el nuevo ritmo cardiaco?



Respuesta adecuada
El estudiante comprende la situación al poder comparar las características de dos funciones, estableciendo similitudes y diferencias.
Por ejemplo, determina que ambas tienen el mismo periodo y que la amplitud sí varía (se convierte en ¼), por lo que la nueva función es:

$$f(x)= \frac{1}{4} \cos x$$

Respuesta parcial
El estudiante reconoce la nueva función, que también es la función coseno, con otros parámetros, pero no la determina.

Respuesta inadecuada
El estudiante no reconoce que es la misma función o dice que cambió a seno.

Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 13 Depreciación lineal

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Describe la ubicación o los movimientos de un objeto real o imaginario en el plano y lo representa como la ecuación de la recta.
	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Expresa, con dibujos y lenguaje geométrico, su comprensión sobre la ecuación de una recta, estableciendo relaciones entre representaciones.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Combina y adapta las estrategias heurísticas, los recursos y los procedimientos para determinar la longitud y pendiente de la ecuación de una recta, y a partir de ello determina si dos rectas son perpendiculares o paralelas.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de los estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 12, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Interrelacionar representaciones gráficas, tabulares y algebraicas para expresar el comportamiento de la función lineal y sus elementos.
  - Aplicar estrategias heurísticas para calcular la pendiente, longitud de un segmento de recta.
  - Establecer conjeturas respecto a la condición de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. Identifica los datos del problema.
   - Costo de la maquinaria: 480 000 soles
   - Tiempo de vida útil: 12 años
   - Valor de desecho: cero años
2. ¿Cuáles son las variables que intervienen en este problema?

   Tiempo de vida útil en años y el valor de desecho en soles.
3. ¿Qué te piden trabajar?

   Piden organizar en una tabla la relación de depreciación anual para un tiempo de vida útil de 2; 4; 6; 8; 10 y 12 años, luego determinar el monto de depreciación anual y una fórmula para el valor depreciado después de *x* años, y elaborar una gráfica en el plano cartesiano.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Qué estrategia te sirve para organizar los datos de la pregunta 1 de la situación inicial?

   Utilizamos un diagrama tabular, la cual nos ayudaría a visualizar la relación entre las variables. Así, hallaríamos la expresión que relaciona las variables, a partir de la cual se haría la gráfica y calcularía la pendiente y la distancia pedida.
2. ¿Qué estrategia te permite evidenciar el valor depreciado después de *x* años?

   Plantear una ecuación; así hallaríamos la expresión que relaciona las variables, a partir de la cual se puede evidenciar el valor depreciado después de *x* años.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Elabora la tabla solicitada.

Tiempo de vida útil (años)	0	2	4	6	8	10	12
Valor (soles)	480 000	400 000	320 000	240 000	160 000	80 000	0

2. Expresa mediante una fórmula el valor depreciado después de *x* años y determina el valor depreciado después en 12 años.

   $V(x) = Vi - Da \cdot T$

Donde:

V(x): Valor después de x años — Da: Depreciación por año

Vi: Valor inicial — T: Número de años

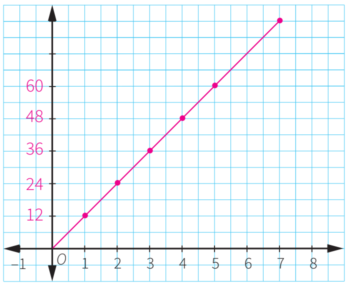
Si la depreciación por año es de S/40 000, entonces: V(x) = 480 000 – 40 000 · 12 → V(x) = 0 soles

3. Determina el valor depreciado después de 7 años.

   El valor depreciado después de siete años de la maquinaria es:
   V(x) = 480 000 – 40 000 · 7 → V(x) = 200 000 soles

4. En el plano cartesiano, elabora la gráfica pedida.

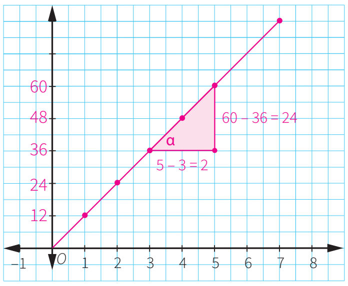
   Sugiera que en el eje X ubiquen el Tiempo útil, y en el eje de las ordenadas, los valores de depreciación de la maquinaria.



5. Plantea algunas características que observes en la gráfica.

   La recta es decreciente, va de arriba hacia la derecha de abajo.

6. Haz una gráfica para hallar la pendiente de la función lineal.



   La pendiente de la recta es igual a la tangente del ángulo a.

   Entonces: $m = \dfrac{-480\,000}{12} = -40\,000$

   La pendiente mide el grado de inclinación de la recta con respecto al eje X.

7. Calcula la distancia entre los puntos (12 ; 0) y (0 ; 480 000).

   Se emplea la figura anterior para calcular la distancia pedida, que viene a ser la hipotenusa del triángulo formado.

   $\sqrt{480\,000^2 + 12^2} = 480\,000{,}000\,15$

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿Podrías haber hallado la pendiente de otra forma? ¿Por qué?

   Sí. Para esto consideremos que la forma general de toda recta es $y = mx + b$, en donde m es la pendiente y b es el intercepto con el eje Y.

   Para nuestro caso se tiene que $y = 480\,000 - 40\,000x$; luego, por simple inspección, $m = -40\,000$.

2. ¿Cuántos puntos habrían bastado para hacer la gráfica? ¿Por qué?

   Es suficiente dos puntos, porque una recta queda determinada solo con dos puntos.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.
- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, que les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:
  1. Describe la estrategia utilizada para resolver el problema.

     Se elaboró una tabla para poder inferir el comportamiento general (se halló la expresión algebraica), y que tomando dos valores se obtuvo la gráfica.
  2. ¿Qué características tiene la gráfica obtenida?

     Es creciente y solo debemos considerar el segmento que está en el primer cuadrante, porque solamente se toman los valores positivos para este problema.
  3. ¿En qué punto o puntos intercepta la gráfica a los ejes?

     Al eje X lo intercepta en el punto (70; 0). Al eje Y, en el punto (0; 35).
- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada.
  1. Si has verificado que la solución es correcta, busca otra forma de resolver el problema. En caso contrario, haz las correcciones necesarias.

     La forma general es $y = mx + b$, en donde m es la pendiente y b es el intercepto con el eje Y. Es decir, $y - y_1 = m(x - x_1)$

     $y_c - 350 = 25(x - 10)$

     $y_c = 25x + 100$

     Elaboramos la tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	...
y_c	100	125	150	175	200	225	250	...

     Elaborar la gráfica en función de los datos de la tabla.
  2. Explica por qué la gráfica de la ecuación no es una línea recta continua.

     Es discontinua, porque los puntos en los que la función no está definida no pertenecen al dominio de la función.

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.

- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

Color de preguntas	Números de preguntas	Equipos de trabajo		
		Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas o indicaciones:
  - ¿Qué dificultades tuviste para determinar la pendiente de la recta? ¿Cómo las superaste?
  - ¿Cómo te facilitó el trabajo en equipo que desarrollaste?
  - Elabora un organizador gráfico del contenido trabajado.
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

Color de preguntas	Números de preguntas	Equipos de trabajo		
		Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar

- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

1. Se tienen dos rampas de acceso a una tienda. Las subidas corresponden a dos rectas:

$f(x) = 0{,}2 \cdot n \cdot x$

$g(x) = 0{,}15 \cdot n \cdot x$

¿Cuál tiene más pendiente?

a) $f(x)$

b) $g(x)$

c) Su gráfica tiene la misma pendiente.

d) No se sabe.

2. ¿En qué punto se cortan las gráficas de las rectas $f(x) = 1{,}3x$ y $g(x) = 0{,}8x$?

a) (0; 2) **b)** (2; 0) **c)** (0; 0) **d)** (0; –2)

3. En un plano, un ingeniero observa que hay una recta $f(x) = 5 - 2x$. Luego encuentra otras rectas y quiere saber cuál de las siguientes expresiones es una recta paralela a la recta dada.

a) $g(x) = 2x - 5$ **b)** $g(x) = \frac{-1}{2}x + 0{,}5$ **c)** $g(x) = -2x - 0{,}08$ **d)** $g(x) = \frac{1}{2}x + 0{,}08$

4. En una clase el maestro Manuel explicaba cuándo las rectas podían ser paralelas, perpendiculares o secantes, sin necesidad de hacer las gráficas. Pero Andrés estaba distraído y, cuando el maestro preguntó cómo eran las rectas L_1: $f(x) = \frac{4}{5}x$ y L_2: $f(x) = \frac{-5}{4}x$, el estudiante decidió hacer las gráficas pertinentes. ¿Qué clase de rectas resultaron?

Respuesta adecuada
El estudiante comprende la situación reconociendo que para que dos rectas sean perpendiculares es necesario que el producto de sus pendientes sea igual a –1.

Por ejemplo, primero reconoce las pendientes: $m_1 = \frac{4}{5}$ y $m_2 = \frac{-5}{4}$. Luego: $\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-5}{4}\right) = -1$. Por ello, afirma que son perpendiculares.

Respuesta parcial
El estudiante comprende que para que dos rectas sean perpendiculares se necesita que el producto de sus pendientes sea –1, pero no reconoce las pendientes. También puede ser al revés.

Respuesta inadecuada
El estudiante no reconoce el criterio de perpendicularidad o lo confunde con el de paralelismo.

5. Al reparar que Andrés, por estar distraído, había elaborado las gráficas para resolver un problema, el maestro Manuel le propuso escoger el par de rectas que son paralelas entre sí:

$f(x) = 1{,}5x - 8$; $g(x) = -1{,}5x + 8$; $h(x) = 1{,}5x + 8$

a) $f(x)$ y $g(x)$

b) $f(x)$ y $h(x)$

c) $h(x)$ y $g(x)$

d) No hay paralelas.

6. Se tiene la ecuación de la recta L_1: $f(x) = 2x + 3$.

¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la recta que es perpendicular a L_1?

a) $f(x) = 2x - 3$ **b)** $f(x) = -2x + 3$ **c)** $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ **d)** $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

7. Al trazar la gráfica de una recta, Luis vio que pasaba por los puntos (5; 18) y (–3; 2). Para hallar la pendiente, pidió ayuda a su papá y la calcularon.

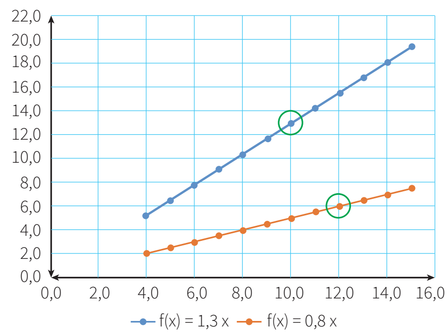
En un paseo, tuvo que subir por un cerro. Su papá, que es ingeniero, le dijo: “Este cerro tiene la misma pendiente que calculamos”. Y luego le preguntó: “¿Cómo interpretarías el valor de la pendiente en esta subida?”.

Respuesta adecuada
El estudiante comprende la situación y reconoce que para hallar la pendiente debe dividir el incremento en *Y* entre el incremento en *X*.
Por ejemplo, $m = \frac{18 - 2}{5 - (-3)} = \frac{16}{8} = 2$
Lo anterior significaría que cada 2 m que suba verticalmente corresponde al avance horizontal de 1 m.

Respuesta parcial
El estudiante comprende la situación y reconoce cómo hallar la pendiente, pero se equivoca con los signos negativos.

Respuesta inadecuada
El estudiante no reconoce cómo hallar la pendiente. Intenta formar la ecuación con errores.

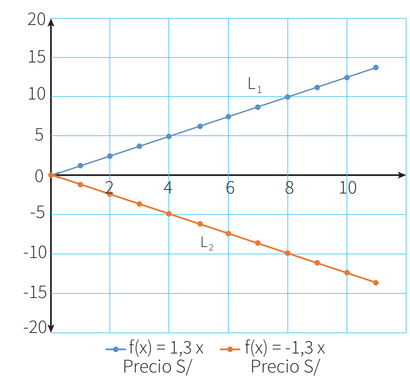
8. En el problema relacionado con la anemia, se obtuvo la siguiente gráfica:



Calcula la distancia entre los dos puntos encerrados en una circunferencia.

a) 4,24 u **b)** 5,00 u **c)** 7,28 u **d)** 9,00 u

9. Luego de escribir la expresión algebraica de las rectas L_1: $f(x) = 1{,}3x$, se probó escribir la misma ecuación con la pendiente opuesta, es decir, L_2: $f(x) = -1{,}3x$. Al graficar ambas rectas, resultó la gráfica que se muestra a continuación. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta según las rectas L_1 y L_2 mostradas?



a) Las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares.

b) Las rectas L_1 y L_2 son paralelas.

c) Los ángulos que forman L_1 y L_2 con la horizontal tienen el mismo valor absoluto.

d) Las rectas L_1 y L_2 son opuestas.

10. Ana pertenece a una familia muy numerosa. En el desayuno cada uno come dos panes. La mama de Ana acostumbra que nunca falte pan, por lo cual siempre compra cinco panes más. Cada pan tiene un costo de S/0,20. Determina la expresión algebraica que represente el gasto diario y como se lo puede graficar.

Respuesta adecuada
El estudiante comprende la situación y elabora una tabla para facilitar el reconocimiento de la relación entre el número de panes y el costo total. Usa la tabla para hacer el gráfico.
Por ejemplo:

Número panes (*x*)	1	2	3	4	5	...	*x*
Costo total (en soles)	1 × 0,2 = 0,2	2 × 0,2 = 0,4	3 × 0,2 = 0,6	4 × 0,2 = 0,8	5 × 0,2 = 1,0		0,2*x*
Costo fijo (por los diez panes, en soles)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	...	1,00
Costo final (en soles)	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	...	0,2*x* + 1

Respuesta parcial
El estudiante comprende la situación y puede hallar el gasto con cantidades concretas; no logra generalizar. Diferencia el costo variable del costo fijo.

Respuesta inadecuada
El estudiante no reconoce cómo hallar el total ni en casos concretos.

Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 14 Las cónicas y algunas construcciones

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Describe la ubicación o los movimientos de un objeto real o imaginario y los representa utilizando la ecuación de la parábola y la circunferencia.
	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Expresa, con dibujos y lenguaje geométrico, su comprensión sobre la gráfica de la ecuación de una parábola y de la circunferencia para interpretar un problema según su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de los estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 13, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que se deben respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que deben respetar las opiniones e intervenciones de los estudiantes y fomentar los espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Organizar datos y expresarlos en modelos analíticos relacionados con la circunferencia y la parábola.
  - Describir los movimientos circulares y parabólicos mediante modelos algebraicos en el plano cartesiano.
  - Hallar puntos en el plano cartesiano a partir de la ecuación de la circunferencia y la parábola.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. ¿Qué figura forman los cables que están entre los pilares?

   Forman unas curvas llamadas parábolas.

2. ¿En qué otros casos se aprecia la forma de los cables?

   Se observa la forma de la parábola cuando lanzamos un cuerpo al aire, en los chorros de agua que salen de los caños de las fuentes, etc.

3. ¿Qué elementos matemáticos conoces de la figura?

   El vértice, el foco, el lado recto y la directriz.

4. ¿Qué datos te dan? ¿Cuál es la incógnita?

   Se conoce la altura de los pilares, la distancia entre estos, un punto del cable que dista 20 m del pilar. Se nos pide que hallemos la altura a la que está dicho punto.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿A partir de qué estrategia iniciarías la solución del problema?

   Se utilizaría una estrategia analógica. Es decir, se haría un dibujo que represente la realidad en forma geométrica.

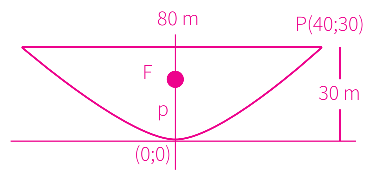
2. ¿Qué conocimiento es importante para resolver el problema?

   Es importante saber las características que tienen los elementos de la parábola y su ecuación.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Empieza a aplicar la estrategia elegida.

   Debemos hacer un dibujo parecido a lo que vemos, y escribimos los datos numéricos y los elementos de la parábola.



2. Recuerda el conocimiento que consideras importante para relacionar los datos con la incógnita y aplícalo.

   Se observa que la parte más baja del cable se encuentra en la carretera, por lo que el vértice de la parábola es el (0; 0).

   A partir de allí la ecuación de la parábola es: $(x - 0)^2 = 4\,p\,(y - 0)$, de donde: $x^2 = 4py$.

3. Resuelve para tener los elementos de la parábola y su ecuación.

   Reemplazamos en la ecuación de la parábola: $40^2 = 4p\,(30)$

   $p = \frac{40}{3}$, entonces la ecuación sería: $x^2 = 4 \times \frac{40}{3}\,y = \frac{160}{3}\,y$

4. Da respuesta a la pregunta del problema.

   Se reemplaza $x = 20$, $\rightarrow 20^2 = \frac{160}{3}y$, $y = 7{,}5$

   Es decir: a 20 m del pilar, el cable se encontrará a 7,5 m de altura.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿Puedes aplicar la estrategia en otras situaciones? ¿Por qué?

   Sí, porque cuando se trate de otras cónicas, estas también tienen una ecuación y elementos propios, que se pueden calcular de manera similar.

2. ¿Qué datos te podrían dar para deducir directamente la ecuación de la parábola?

   Si se conoce el vértice y el lado recto, se reemplaza directamente en la ecuación general.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.
- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, lo cual les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:

1. Sin hacer un dibujo y conociendo la ecuación de la parábola, ¿cómo reconocerías que se abre hacia abajo?

   Eso se logra viendo el signo de “p”; si es negativo, entonces se abre hacia abajo.

2. Supón que se va a lanzar un tiro libre y la barrera se coloca a 9,15 m de la pelota. ¿Hasta qué altura deben saltar en la barrera para impedir que la pelota pase? ¿Es posible que ocurra? ¿Por qué?

   Se debe calcular la altura que alcanza la pelota cuando ha avanzado 9,15 m horizontalmente. Es decir: $9{,}15^2 = -\,24\,(y - 6)$

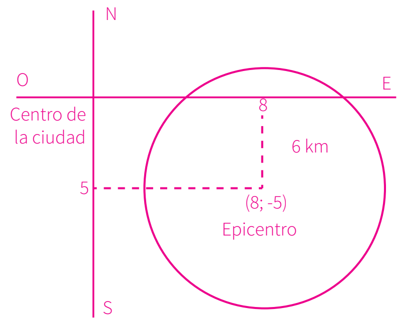
   Resolviendo $y = 2{,}51$ m

   Significa que si saltan y llegan o sobrepasan un poquito esa altura, lograrán que no pase la pelota.

- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada.

  1. Revisa el procedimiento y las operaciones realizadas. Si todo está correcto, busca otra forma de resolver el problema (solo indica la estrategia). Si hubiese error, resuélvelo correctamente.

     Se ha resuelto sin tomar en cuenta las coordenadas geográficas. Pondremos el centro de la ciudad como el origen de las coordenadas del plano cartesiano.



     La ecuación de la circunferencia con centro en (8; –5) y radio 6 es:
     $(x-8)^2+(y-(-5))^2=36$. Efectuando: $x^2+y^2-16x+10y+53=0$

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.
- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas **estrategias** para la *Resolución de problemas*.

- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas o indicaciones:
  - ¿Qué dificultades tuviste para determinar la ecuación de la parábola y la circunferencia? ¿Cómo las superaste?
  - ¿Cómo te facilitó el trabajo en equipo que desarrollaste?
  - Elabora un organizador gráfico del contenido trabajado.
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar

- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

1. Una antena parabólica tiene un diámetro de 12 m y su profundidad es de 2 m, como se muestra en la imagen.

¿A qué distancia del fondo del plato se ubica el colector de señales de la antena?

a) 2,5 m **c)** 6,5 m

b) 4,5 m **d)** 8,5 m

2. Un túnel con arco parabólico tiene una altura máxima en su centro de 8 m, y su anchura al nivel del suelo también es 8 m. ¿Cuál es la coordenada del foco de la parábola tomando como origen de coordenadas el centro de la pista?

a) (0; 1/2) **c)** (0; 13/2)

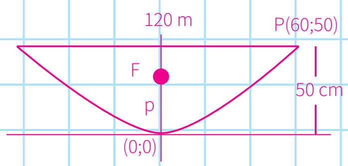
b) (0; 7/2) **d)** (0; 15/2)

3. De la pregunta 2, ¿a qué distancia del centro la altura es 4 m?

a) 1,41 m **b)** 2 m **c)** 2,82 m **d)** 4 m

4. Un horno solar tiene la forma de un paraboloide circular cuyo diámetro es de 120 cm y la profundidad del plato es de 50 cm. ¿A qué distancia del fondo del plato parabólico se encuentra el centro del soporte para calentar la comida?

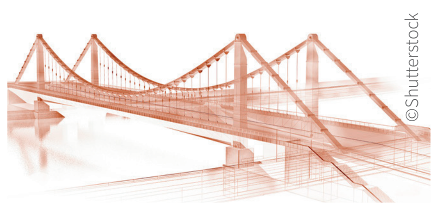
Respuesta adecuada
El estudiante comprende la situación y la expresa por medio de un dibujo y aplica las propiedades de la parábola, obteniendo así la solución correcta.
Por ejemplo, representamos a la parábola en forma vertical abierta hacia arriba.
En la ecuación de la parábola: $x^2 = 4py$
reemplazamos el punto (60;50):
$(60)^2 = 4p(50)$
$p = 18$



Respuesta parcial
El estudiante comprende la situación y plantea el dibujo adecuado, pero no es capaz de aplicar correctamente las propiedades de la parábola, o no identifica bien los elementos de la parábola.

Respuesta inadecuada
El estudiante no hace un dibujo o lo traza de manera incorrecta. No identifica los elementos de la parábola.

5. Se tiene un modelo a escala de un puente que estará sobre un río. El puente tiene un cable de sostén en forma parabólica. La longitud entre los pilares es de 60 cm, la longitud del punto más alto de los pilares hacia el asfalto es de 20 cm y la distancia que hay entre la carretera y el punto más bajo del cable es de 5 cm. La ecuación que representa la parábola tomando como vértice el centro de la carretera entre los dos pilares es:



a) $x^2 = 15y$ **b)** $x^2 = 60y$ **c)** $y^2 = 15x$ **d)** $y^2 = 60x$

6. El túnel de una carretera tiene la forma de un arco parabólico de 6 m de ancho y 6 m de altura. Para poder pasar por el túnel, la altura máxima que puede tener un vehículo de transporte de 3 m de ancho debe ser menor que la siguiente medida:

a) 2,5 m
b) 3 m
c) 3,5 m
d) 4,5 m

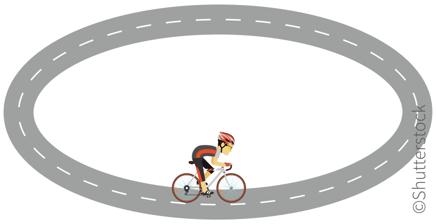
7. Halla la ecuación general de la circunferencia que se ha generado al tirar a un lago una piedra que ha producido ondas de un alcance de 4 m. Toma en cuenta el centro donde cayó la piedra.

Respuesta adecuada
El estudiante comprende la situación, es capaz de representarla con un dibujo e identifica el tipo de curva que forman las ondas y sus características y las aplica para obtener la ecuación pedida.
Por ejemplo, si se toma el centro donde cayó la piedra, entonces el centro es (0; 0). El tipo de onda que se forma son circunferencias. Sabemos que la ecuación de una circunferencia es: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
Reemplazando, se tiene que $x^2 + y^2 - 16 = 0$

Respuesta parcial
El estudiante duda en proponer que la figura formada sea una parábola o una circunferencia. No reconoce las propiedades de la circunferencia. Es capaz de representar con un dibujo la situación dada.

Respuesta inadecuada
El estudiante no es capaz de hacer un dibujo que muestre la situación. No conoce o no aplica las propiedades de una cónica.

8. Un ciclista se encuentra en una pista circular, en cuyo punto de partida coloca un banderín cada vez que da una vuelta. Si la distancia más lejana al punto de partida se encuentra a 64 m, ¿cuál es la ecuación de la circunferencia?



a) $x^2 - 64x + y^2 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 364y = 0$
c) $x^2 - 32x + y^2 = 0$
d) $x^2 - 32x + y^2 - 1024 = 0$

9. Se informó que se produjo un sismo de 4,2 grados en la escala de Richter, con epicentro en el mar a 20 km al oeste del puerto del Callao y 16 km al sur, y que se sintió a 10 km a la redonda. Halla la ecuación de la circunferencia respecto al mencionado puerto.

a) $(x - 20)^2 + (y - 16)^2 = 100$
b) $(x - 16)^2 + (y - 20)^2 = 10$
c) $(x + 20)^2 + (y + 16)^2 = 100$
d) $(x + 16)^2 + (y + 20)^2 = 10$

10. De la pregunta 9: Un barco se encontraba a 5 km al oeste y 3 km al sur del puerto del Callao. ¿Se sintió el sismo en el barco? Explica.

Respuesta adecuada
El estudiante comprende la situación y responde que no sintió el sismo, ya que al reemplazar las coordenadas del barco respecto al puerto (–5; –3), en la ecuación, este resultado resulta mayor que $10^2 = 100$; si fuera menor o igual, sí estaría en el rango del sismo.

Respuesta parcial
El estudiante comprende en forma parcial la situación y responde que no sentiría el sismo, pero no explica.

Respuesta inadecuada
El estudiante da otras respuestas.

Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 15 Polos para los estudiantes

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.	Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.	Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre el valor de terciles y quintiles de una distribución de datos, así como la pertinencia de las medidas de tendencia central en relación con la desviación estándar, según el contexto de la población en estudio.
	Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.	Adapta y combina procedimientos para determinar medidas de tendencia central, desviación estándar de datos continuos y medidas de localización.
	Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.	Plantea y contrasta afirmaciones o conclusiones sobre las características o tendencias de una población a partir de sus observaciones o análisis de datos y las justifica con ejemplos y contraejemplos, usando sus conocimientos y la información obtenida en su investigación.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de los estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 14, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Reconocer en un conjunto de datos las medidas de localización.
  - Determinar medidas de localización apropiadas a un conjunto de datos al resolver problemas.
  - Argumentar procedimientos para hallar las medidas de localización de un conjunto de datos.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta. Previamente, se pide corregir en la tabla la estatura de Noé, que debe decir 1,69.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. ¿Cuáles son los datos?

   Se tienen las estaturas de veinte estudiantes y las tres tallas de polos.

2. ¿Con qué se relacionan las tallas de los polos?

   Se relacionan con los cuartiles de la distribución.

3. ¿Qué te piden realizar?

   Hallar la cantidad de polos por cada talla, el número de estudiantes con estaturas menores o igual que el tercer decil, los valores mínimo y máximo y la mediana de la distribución.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Qué estrategia te sirve para resolver el problema? ¿Por qué?

   En estadística es muy importante organizar los datos, y esto se puede hacer mediante el uso de diagramas tabulares. Además, puede que sea necesario agrupar datos. En cualquier caso, nos facilita el trabajo.

2. ¿Qué condiciones conviene tener en la estrategia elegida? ¿Qué debes aplicar?

   Los datos deben ser ordenados de preferencia de manera creciente. Luego se aplicarán las fórmulas para hallar los cuartiles o los deciles. También se puede hacer uso de una hoja de cálculo (Excel).

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Organiza los datos de acuerdo con tu plan.

   Se organizan los datos en la tabla.

Nombres	Marco	Carla	María	Rocío	Rosy	Meche	Felicia	Juan	Ramiro	José
Sexo	H	M	M	M	M	M	M	H	H	H
Estatura	1,54	1,63	1,65	1,65	1,66	1,66	1,66	1,67	1,67	1,68

Nombres	Celia	Pedro	Noé	David	Matías	Robert	Luis	Ricky	Regina	Jesús
Sexo	M	H	H	H	H	H	H	H	M	H
Estatura	1,68	1,69	1,69	1,7	1,71	1,72	1,72	1,72	1,73	1,73

2. Calcula los cuartiles y el decil 3 apoyándote con una hoja de cálculo de Excel.

Nombres	Sexo	Estatura	Cuartil	N.° de polos
Marco	H	1,54		
Carla	M	1,63		
María	M	1,65		
Rocío	M	1,65		
Rosy	M	1,66	Cuartil 1	
Meche	M	1,66	Décil 3	
Felicia	M	1,66		7
Juan	H	1,67		
Ramiro	H	1,67		
José	H	1,68	Cuartil 2	
Celia	M	1,68		
Pedro	H	1,69		
Noé	H	1,69		
David	H	1,7		
Matías	H	1,71	Cuartil 3	8
Robert	H	1,72		
Luis	H	1,72		
Ricky	H	1,72		
Regina	M	1,73		
Jesús	H	1,73		5

3. Relaciona las tallas con los cuartiles y da respuesta a la pregunta 1 de la situación inicial.

   La talla *small* corresponde a todas las estaturas menores o iguales al primer cuartil (1,66), es decir, son 7 polos.

   De manera similar obtenemos la talla *medium*, 8 polos, y la talla *large*, 5 polos.

4. ¿Qué significa el tercer decil?

   Es el valor ubicado en el primer 30 % de la distribución.

5. Determina el número de estudiantes cuyas estaturas son menores o iguales al tercer decil.

   El decil 3 ocupa la posición 6 de la distribución, pero que, como hay valores repetidos, consideramos que hay 7 polos.

6. Determina el rango y la mediana.

   El rango se calcula: Rango es igual a la diferencia del valor máximo y el valor mínimo, es decir, 1,73 – 1,54 = 0,19. Asimismo, la mediana coincide con el cuartil 2, que es igual a 1,68.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿Cómo deben estar los datos cuando queremos calcular las medidas de localización?

   Los datos deben estar ordenados crecientemente.

2. ¿Por qué coincide la mediana con un cuartil?

   Coinciden porque ambos valores, mediana y cuartil 2, se ubican en el centro de la distribución.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.
- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, que les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:
  1. ¿Cómo calcularías la mediana por simple inspección?

     Basta con ordenar los datos crecientemente (o decrecientemente); el valor que quede en el medio será la mediana. En nuestro caso corresponde al valor que ocupa el octavo lugar.
  2. ¿En qué lugar se ubica el cuartil 3? ¿Por qué toma el valor 1,7?

     Se ubica en $\frac{3 \times 15}{4} = 11{,}25 \approx 11$.

     Es decir, ocupa el lugar 11 y algo más, pero en este caso el valor que sigue es el mismo.
  3. ¿Qué observas respecto de la talla *medium* y el número de polos?

     En esta talla el cuartil 2 corresponde al octavo dato (1,68), pero este se hallaba repetido, por lo que se debe asumir que pertenece a la misma talla.
- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada.
  1. Si se hubieran acordado de dos valores más, por ejemplo, 60 y 74 kg, ¿cómo calcularías la mediana? ¿Saldría lo mismo? ¿Qué conclusión sacas?

     Se podría pensar que la mediana está en medio de 60 y 74, es decir: $\frac{60 \times 74}{2} = 67$. Esta es una respuesta diferente de la dada, lo que no puede ser porque es la misma distribución. Si sumáramos los 4 valores y dividiéramos por 4, saldría 66. (Lo que hemos calculado está más cerca de ser la media que la mediana. En conclusión, faltarían datos).

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.

- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

Color de preguntas	Números de preguntas	Equipos de trabajo: Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas o indicaciones:
  - ¿Qué dificultades tuviste para determinar las medidas de localización? ¿Cómo las superaste?
  - ¿Cómo te ayudó la fase "Reflexionamos sobre el desarrollo" en la resolución de los problemas?
  - Elabora un organizador gráfico del contenido trabajado.
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

Color de preguntas	Números de preguntas	Equipos de trabajo: Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar

- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

Una encuesta anónima para determinar la problemática de los vendedores ambulantes en un distrito dio como resultado los datos de la tabla que se muestra a continuación. En la tabla se aprecian las edades y el sexo (F: Femenino y M: Masculino) de dichos vendedores.

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Sexo	F	F	F	M	F	F	F	M	M	M	F	F	F	M	M	F	F	M	F	M
Edad	22	22	24	26	26	28	29	30	30	30	30	31	31	32	33	33	33	35	35	35

Posición	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Sexo	M	F	F	F	F	F	M	M	F	F	M	M	F	M	M	M	M	M	F	M
Edad	35	36	36	36	37	37	38	38	38	39	40	40	41	41	45	48	49	50	50	55

Con la información dada, responde las preguntas 1; 2; 3 y 4.

Resumen de medidas	
Medidas importantes	**Valor**
Mínimo	22,00
Decil 1	26,00
Decil 2	30,00
Cuartil 1	30,00
Decil 3	31,00
Decil 4	33,00
Decil 5, cuartil 2 y mediana	35,00
Decil 6	36,40
Decil 7	38,00
Cuartil 3	39,25
Decil 8	40,20
Decil 9	48,10
Máximo	55,00

1. El alcalde del distrito ha propuesto reubicar en un mercado a la mitad de dichos vendedores ambulantes, sobre todo a los mayores según su edad. De acuerdo con esta disposición, ¿cuál de las siguientes medidas de posición permitirá determinar la mitad de trabajadores que deben ser reubicados?

a) Cuartil 3.
b) Quintil 2.
c) Decil 6.
d) Mediana.

2. Considerando las edades mostradas en la tabla de resumen, ¿cómo se explica que el decil 2 y el cuartil 1 tengan el mismo valor?

a) Son medidas equivalentes.
b) Hay un error en el cálculo.
c) Las edades de ese valor se repiten varias veces.
d) Ambas medidas se calculan de la misma manera.

3. Considerando que ya se tienen hallados los cuartiles para las edades de los vendedores de la tabla de resumen, ¿cuál de las siguientes decisiones se puede tomar sobre dichos vendedores considerando esta medida de localización?

a) Dar un plazo de 60 días para dejar la calle al 80 % de vendedores más jóvenes.
b) Hacer un préstamo al 25 % de vendedores más jóvenes para que construyan un local.
c) Capacitar a los 2/3 de vendedores con mayor edad.
d) Asignar un local para ventas al 60 % de los vendedores de mayor edad.

4. Otra propuesta ha sido reubicar solo a las vendedoras mujeres de los quintiles 4 y 5. De ser así, ¿cuántas vendedoras serían reubicadas?

Respuesta adecuada
El estudiante comprende que al decir IV y V quintiles, se hace referencia al 40 % de los vendedores, y la respuesta debe ser por el número de mujeres.
Por ejemplo, el quintil 4 para los 40 datos corresponde al dato que ocupa el lugar 25. Por lo tanto, observando la tabla, vemos que se reubicarían a 6 vendedoras.

Respuesta parcial
El estudiante comprende que se hace referencia al 40 % de los vendedores, pero no toma en cuenta que solo se habla de las vendedoras.

Respuesta inadecuada
El estudiante no reconoce el significado de quintil. Proporciona respuestas no pertinentes.

5. En un club privado conformado por 500 socios se desea conocer quiénes están dentro del 20 % de socios con mayor edad. ¿Cuál de las siguientes es la medida de posición que permitirá hallar dicho porcentaje de socios con mayor edad?

a) Mediana **b)** Cuartil **c)** Quintil **d)** a y b

6. ¿Cuántos percentiles se pueden hallar para un conjunto de un millón de datos?

a) 9 **b)** 99 **c)** 1000 **d)** 99 000

7. En la hoja de cálculo de Excel, hay una versión en la que no se pueden calcular directamente los deciles ni los quintiles. ¿Cómo harías para hallar el decil 7 y el quintil 4?

Respuesta adecuada
El estudiante reconoce que entre las medidas de localización hay equivalencias.
Por ejemplo, el decil 7 corresponde al valor ubicado en los 0,7 de la distribución, por lo que se puede también hallar el percentil 70.
Similarmente, el quintil 4 equivale al percentil 80.

Respuesta parcial
El estudiante reconoce que la mediana y el cuartil 2 son equivalentes, pero no identifica otras equivalencias.

Respuesta inadecuada
El estudiante no es capaz de establecer ninguna relación de equivalencia entre las medidas de localización.

Se ha realizado una prueba para determinar el nivel de autoestima en los estudiantes de quinto de secundaria. En la tabla 5 se presentan los resultados de autoestima hallados por cada estudiante en dicha prueba. Se sabe que la escala de puntajes va de cero (0) a cien (100) puntos.

Código	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Sexo	M	H	M	H	M	M	M	M	M	M	M	H	H	H	M	H	H	M	H	H
Autoestima	61	66	63	54	88	39	71	43	78	70	50	52	67	66	59	47	80	73	26	58

Código	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Sexo	H	H	M	H	H	H	H	M	H	M	M	H	H	H	H	M	M	M	M	H
Autoestima	78	39	42	82	54	56	68	80	54	51	52	73	69	81	58	56	55	74	59	56

Resumen de medidas	
Medidas importantes	Valor
Mínimo	22,00
Decil 1	26,00
Decil 2	30,00
Cuartil 1	30,00
Decil 3	31,00
Decil 4	33,00
Decil 5, Cuartil 2 y Mediana	35,00
Decil 6	36,40
Decil 7	38,00
Cuartil 3	39,25
Decil 8	40,20
Decil 9	48,10
Máximo	55,00

Con la información dada, responde las preguntas 8; 9 y 10.

8. A partir de los resultados de autoestima mostrados en las tablas, el director del colegio ha determinado que aquellos estudiantes cuyo puntaje pertenece al quintil I y II recibirán un Programa de Recuperación de Autoestima. Se desea saber cuántos estudiantes recibirán este programa.

a) 8 **b)** 16 **c)** 20 **d)** 32

9. Los estudiantes que obtuvieron resultados de autoestima en el quintil III y IV participarán en un "Ciclo de charlas sobre autoestima y habilidades sociales", que será dividido según el sexo. Se desea conocer cuántas mujeres y hombres respectivamente participarán en este ciclo de charlas.

a) 5 hombres y 11 mujeres.
b) 7 hombres y 9 mujeres.
c) 6 hombres y 10 mujeres.
d) 9 hombres y 7 mujeres.

10. Se ha escuchado decir al subdirector del colegio que "deberían considerarse los cuartiles en lugar de los quintiles para tomar las decisiones", ya que solo son 40 estudiantes en quinto de secundaria (ver tablas). Si fuera así, con solo una medida de posición se podría saber qué estudiantes se ubican dentro del 25 % con autoestima más baja.

¿Con cuál de los cuartiles se podría saber qué estudiantes se ubican dentro del 25 % con autoestima más baja? ¿Entre qué valores se encuentran sus resultados?

Respuesta adecuada
El estudiante comprende que el porcentaje está relacionado con el intervalo que definen las medidas de localización.
Por ejemplo, si hablamos del grupo con menores resultados, será del primer 25 % que guarda correspondencia con el cuartil 1. Como la menor medida es 26 y el cuartil 1 es 53,5, entonces el primer 25 % está en el intervalo [26; 53,5].

Respuesta parcial
El estudiante comprende que los cuartiles están relacionados con el 25 % cada uno, pero no es capaz de relacionarlos con los intervalos correspondientes.

Respuesta inadecuada
El estudiante no es capaz de establecer ninguna relación entre los porcentajes y las medidas de localización.

Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 16
El dinero

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de cantidad.	Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones.	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico su comprensión sobre las operaciones con números racionales e irracionales usando redondeos o aproximaciones y usa este entendimiento para interpretar las condiciones de un problema en su contexto.
	Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.	Selecciona, combina y adapta estrategias de cálculo, estimación, recursos y procedimientos diversos para realizar operaciones con racionales y raíces inexactas aproximadas e intervalos, y para simplificar procesos usando las propiedades de los números y las operaciones.
	Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.	Plantea y compara afirmaciones sobre las propiedades de las operaciones con raíces inexactas aproximadas u otras relaciones numéricas que descubre, y las justifica con ejemplos, contraejemplos y propiedades de los números y las operaciones.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de sus estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 15, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Expresar de forma gráfica y simbólica los números racionales, los intervalos y los irracionales.
  - Adaptar y combinar estrategias heurísticas, recursos gráficos y otros para resolver problemas relacionados con números racionales e irracionales.
  - Emplear las propiedades de las operaciones y relaciones de orden en $\mathbb{Q}$ en la resolución de problemas.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. ¿Qué datos te dan?

   El tipo de cambio, el importe de la deuda y lo que posee Ricardo para pagar la deuda.

2. ¿Qué te piden hallar?

   Calcular la deuda en dólares, la cantidad de dólares que puede comprar con cierta cantidad de soles y de euros, y si será suficiente con eso.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Qué estrategia te sirve para resolver el problema? ¿Por qué?

   Para resolver la última pregunta se tienen que ir resolviendo una por una las preguntas planteadas, por lo que se elige la estrategia de establecer submetas: hacer las conversiones a dólares.

2. ¿Qué conocimiento aplicarías conjuntamente con la estrategia elegida?

   Se necesita saber cómo hacer las conversiones y que también se puede utilizar la regla de tres simple.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Aplica tu plan para responder la primera pregunta de la situación inicial.

   Para la compra de dólares:

   1 dólar $\leftrightarrow$ S/3,38
   500 dólares $\leftrightarrow$ x

   Entonces, Ricardo necesita, para pagar su deuda, como mínimo:
   $x = 500 \cdot 3{,}38 = 1690$ soles

2. ¿Qué tipo de cambio usará Ricardo para comprar dólares?

   Tendrá que usar el que corresponde a cómo le van a vender, es decir, el tipo de venta (S/3,38).

3. Calcula la cantidad de dólares que inicialmente compra Ricardo.

   Se emplea la regla de tres simple para calcular.

   Si 1 dólar ⟷ S/3,38

   x ⟷ S/1500

   Comprará 1500/3,38 = 443,78 dólares.

4. ¿Qué calcularías a continuación? Hazlo.

   Se debe calcular lo que faltaría pagar.

   Entonces, Ricardo todavía debería: 500 – 443,78 = 56,22 dólares.

5. ¿Qué te falta averiguar?

   Falta comprobar si con los 40 euros puede cubrir lo que le falta pagar.

6. Responde la pregunta 3 de la situación inicial. Da un orden a tus cálculos.

   Primero se debe saber a qué tipo de cambio venderá los euros. Resulta que debe ser a S/3,35 por euro.

   Ricardo obtendrá 3,35 × 40 = 134 soles.

   Luego, con los 134 soles podrá comprar $\frac{134}{3,38}$ = 39,64 dólares.

   Finalmente, como Ricardo debía 56,22 dólares, aun cambiando sus 40 euros, no le alcanzaría para pagar toda su deuda.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿Por qué en el punto 1 de *Ejecutamos la estrategia o plan* se utilizó ese tipo de cambio?

   Los tipos de cambio se denominan desde el punto de vista de la casa de cambio. Lo que para esta es tipo de compra, para nosotros es tipo de venta.

2. ¿Podrías establecer un tipo de cambio entre dólares y euros? ¿Cuál sería?

   S/3,22 ⟷ 1 dólar

   por S/3,35 ⟷ x

   x = 3,35 / 3,22 = 1,04. Es decir, por tipo de compra: por cada euro me pagan 1,04 dólar.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.

- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, que les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:

  1. ¿Habrá otros valores de temperatura entre las 8 y 10 a. m.? ¿Qué pasaría con el promedio? Propón dos medidas más en ese intervalo y observa qué pasa con el promedio.

     Sí. El promedio de temperaturas variaría. Esta variación estaría en relación con los valores que tuviera.

     Por ejemplo, si medimos 28 °C y 29 °C, el promedio sería $\frac{26{,}6 + 28 + 29 + 32}{4} = 28{,}9$ °C.

  2. Por lo general, ¿qué esperamos que ocurra con la temperatura entre las 6 a. m. y el mediodía? Para este problema, propón algunas temperaturas que no serían probables de presentarse en el intervalo de 6 a. m. a 10 a. m.

     Explique que se espera que vaya aumentando. Por ejemplo, no es probable que la temperatura sea 12 °C o 36 °C en ese intervalo de tiempo.

- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada.

  1. Con el radio hallado, calcula el área del lente mayor. ¿Es lo esperado? ¿Tienes alguna sugerencia? Realízala.

     El área sería $A_2 = 3{,}14 \times 29^2 = 2640$ cm². Se espera que sea el doble que el área menor, es decir, $A_2 = 2\,(3{,}14 \times 14{,}5^2) = 1320$ cm². Se observa que no es así. Entonces, para hallar el radio del lente mayor: $A_2 = \pi \cdot R^2 = 1320$ cm².

     Resolviendo, se obtiene R = 20,5 cm.

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.
- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas o indicaciones:
  - ¿Qué utilidad tiene lo que aprendiste? ¿En qué situación lo puedes aplicar?
  - ¿Qué recursos o estrategias empleaste para resolver los problemas?
  - ¿Podrías crear algún problema similar?
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar

- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

1. La receta para un pastel requiere 2/5 de taza de chocolate. Margarita hará 5 pasteles. ¿Cuánto de chocolate necesita?

a) 7/5 de taza **b)** 2 tazas **c)** 2,5 tazas **d)** 10,5 tazas

2. Elena va de compras con S/180. Gasta 2/3 de esa cantidad en ropa. ¿Cuánto de dinero le queda?

a) S/40 **b)** S/60 **c)** S/90 **d)** S/120

3. El tiempo de funcionamiento de un foco de la marca "Luz Vital" es de 1600 horas, con un intervalo de confianza de ± 4,25 horas. ¿Cuál de los siguientes intervalos representa de manera correcta el intervalo de confianza para el tiempo de funcionamiento del foco "Luz Vital" según los datos?

a) [1542,5; 1642,5] horas
b) [1595,75; 1604,25] horas
c) [–1595,75; –1604,25] horas
d) [1425; –1625] horas

4. Raúl está aprendiendo las propiedades de las operaciones con números racionales. En una de las tareas que le dejaron le pedían lo siguiente:

"Expresa con tus propias palabras la propiedad de densidad en los números racionales y escribe un ejemplo que ilustre dicha propiedad".

Respuesta adecuada
El estudiante expresa la propiedad de densidad en los números racionales o alguna de sus otras variantes. Algunas de ellas son: "Entre dos números racionales siempre existe otro número racional", "Dados dos números racionales a y b, existe c, tal que (a + b)/2 = c", "Dados cualquier par de números racionales a y b, donde a ≠ b, existe c, tal que c está entre a y b".
Escribe un ejemplo utilizando cualquier par de números racionales.
Sean 4 y 8 números racionales. Entonces existe (4 + 8)/2 = 6, que pertenece a los números racionales.
Sean 0,5 y 3 números racionales. Entonces existe (0,5 + 3)/2 = 1,75, que pertenece a los números racionales.

Respuesta parcial
El estudiante expresa la propiedad de densidad en los números racionales, pero no escribe ejemplos.
El estudiante escribe algún ejemplo de la propiedad de densidad de números racionales, pero no expresa en sus propias palabras la propiedad.

Respuesta inadecuada
El estudiante no expresa la propiedad de densidad de números racionales ni escribe algún ejemplo.
Deja en blanco la pregunta.

5. Marcos gana S/18,5 por hora, y se le descuenta S/6,20 por tardanza. Si un día trabajó 5 horas, pero llegó tarde, ¿cuánto ganó ese día?

a) S/86,3
b) S/92,3
c) S/92,5
d) S/94,0

6. La medida estándar ($\overline{X}$) para el diámetro de los neumáticos nuevos de un automóvil es 13 pulgadas. Por ello, antes de salir al mercado pasan por un control de medidas cuya tolerancia es de 0,2 % por encima y debajo de la medida estándar. ¿Cuál es el intervalo de tolerancia para las medidas del diámetro de los neumáticos nuevos?

a) [11 ; 15] **b)** [12,98 ; 13,02] **c)** [12,74 ; 13,26] **d)** [11,02 ; 13,02]

7. En la siguiente gráfica se muestra una autopista que va de norte a sur, en la cual hay un puente peatonal A. Se construyó otro puente B, tal que el puente A está a 600 m al norte del puente B. ¿A la altura de qué km se encuentra el puente peatonal "B"?

Respuesta adecuada

Es estudiante comprende la situación. Relaciona las cantidades correctamente y realiza conversiones.
Por ejemplo, convierte los 600 m en kilómetros:
600/1000 = 0,6 km
Ubica correctamente el punto donde se encuentra el puente B: 13,5 + 0,6 = 14,1 km. Esto significa que el puente B está en el km 14,1.

Respuesta parcial

El estudiante comprende que el puente B está a la derecha del puente A , pero no realiza la conversión de unidades.
Otra forma parcial es que realiza la conversión, pero ubica mal el puente B.

Respuesta inadecuada

Hace mal la conversión y ubica en otro lugar al puente B.

8. Se sabe que los metales y otros materiales se dilatan con el calor.

Una varilla de hierro de 43 cm de longitud ha sido calentada desde 45 °C hasta 90 °C. ¿Cuál es su longitud final?

Se sabe que la expresión que permite calcular la longitud final debido a la dilatación es:

$L_f = L_i(1 + \alpha\,\Delta t)$

Donde:

L_f: Longitud final

L_i: Longitud inicial

α: Coeficiente de dilatación ($\alpha = 1{,}2 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$)

Δt: Temperatura final – Temperatura inicial

a) 43,200 22 **b)** 43,023 22 **c)** 44,200 22 **d)** 44,023 22

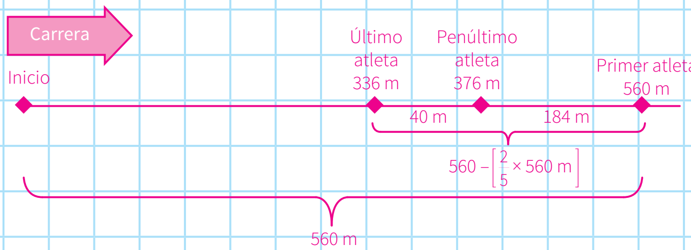
9. Con los datos del problema anterior, ¿cuál es la longitud final de la varilla de hierro si la temperatura disminuye desde 40 °C hasta 0 °C?

a) 41,649 36 **b)** 42,480 36 **c)** 42,979 36 **d)** 42,999 36

10. En una competencia de velocidad, el atleta que va delante ha recorrido 560 m desde el inicio; el último se encuentra 2/5 más atrás, y el penúltimo está 40 metros por delante del último. Elabora una gráfica en la que señales la distancia del penúltimo atleta en relación con el último y el primero.

Respuesta adecuada

El estudiante muestra un esquema gráfico en el que indica la distancia del penúltimo atleta en relación con el último y el primero.

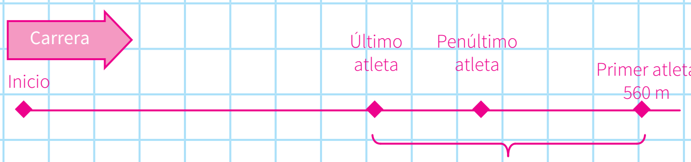


Respuesta parcial

El estudiante elabora un gráfico en el cual indica las posiciones de los atletas, pero no señala las distancias solicitadas o solo las indica parcialmente.

Respuesta inadecuada

El estudiante no elabora ningún gráfico o elabora alguno que no muestra las características o condiciones señaladas en el problema o las muestra de manera incorrecta.



Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 17 Colonia de bacterias

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencia o variación entre magnitudes, y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen a ecuaciones cuadráticas ($ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ y $a \in \mathbb{Q}$).
	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos o procedimientos para hallar términos desconocidos de ecuaciones cuadráticas.
	Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	Justifica la naturaleza de las soluciones de una ecuación cuadrática reconociendo el discriminante.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de sus estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 16, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Comparar y contrastar modelos referidos a ecuaciones cuadráticas en problemas afines.
  - Aplicar los diferentes métodos de resolución de las ecuaciones cuadráticas, incluida la fórmula general, al resolver problemas.
  - Justificar la naturaleza de las soluciones de una ecuación cuadrática reconociendo el discriminante.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. ¿Qué datos te da el problema?

   Se tiene la gráfica de una función cuadrática que relaciona la cantidad de bacterias con el tiempo transcurrido.

2. ¿Cuáles son las incógnitas del problema?

   Pide determinar la ecuación de la gráfica, el tiempo en que llega a su población máxima, y el tiempo que se emplea en destruir toda la colonia.

3. ¿Qué valores destacan en la gráfica?

   Hay dos puntos denominados A y B con sus coordenadas. También destacan los puntos en que la curva corta los ejes.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Cuál de las curvas corresponde a la gráfica?

   La curva que corresponde a la gráfica es una parábola.

2. Las propiedades de la curva elegida, ¿cómo te ayudan a resolver el problema?

   Hallando la ecuación de la parábola y determinando los valores de x a partir de esta ecuación.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Relaciona la ecuación de la curva que has elegido con los datos del problema. Responde la pregunta 1 de la situación inicial.

   La ecuación de la parábola con eje vertical es de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, y que $V(h; k)$ es el vértice de la parábola.

   Como tenemos dos puntos conocidos: $V(h; k) = (3; 5000)$ y $(0; 2000)$, los reemplazamos en la ecuación: $2000 = a(0 - 3)^2 + 5000$. Luego: $a = -\frac{1000}{3}$.

   Entonces, volviendo a la ecuación: $f(x) = -\frac{1000}{3}x^2 + 2000x + 2000$.

2. Observa bien la curva. ¿Es creciente o decreciente?

   La función empezará a decrecer cuando haya alcanzado su máximo valor, que es 5000, lo que ocurre cuando han pasado 3 horas, tal como se aprecia en el gráfico de la situación inicial.

3. Determina la hora en que la colonia deja de seguir creciendo.

   La función empezará a decrecer cuando haya alcanzado su máximo valor, que es 5000, lo que ocurre cuando han pasado 3 horas, tal como se aprecia en el gráfico de la situación inicial.

4. Después de la hora encontrada en el paso anterior, ¿qué ocurrirá con la población de bacterias? ¿Qué implica con los valores de *Y* (la ordenada)?

   La cantidad de bacterias irá disminuyendo hasta extinguirse. Implica que los valores de *Y* no podrán ser negativos porque corresponden al número de elementos de una población.

5. ¿Qué punto de la gráfica está asociado con la eliminación de todas las bacterias? ¿Qué tiempo demora en desaparecer la población de bacterias?

   Cuando no haya bacterias, significará que la ordenada es 0. Es decir, es el intercepto de la parábola con el eje *X*.

   Para conocer la abscisa (tiempo buscado), utilizamos la ecuación formada.

   $-\frac{1000}{3}x^2 + 2000x + 2000 = 0$

   La resolvemos con la fórmula general; para $a = -\frac{1000}{3}$; $b = 2000$; $c = 2000$

   Resolviendo: $x_1 = 3 + \sqrt{15}$, $x_2 = 3 - \sqrt{15}$

   Comparando las raíces con el gráfico, vemos que x_1 es el valor pertinente, por lo que el tiempo es aproximadamente 6,87 h.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿En esta función hay valores máximos y mínimos? ¿En la misma gráfica?

   Según como se abra, la parábola tendrá un valor máximo o un valor mínimo.

   En la parábola no se pueden presentar estos valores para una misma gráfica.

2. ¿Qué conocimientos han sido importantes para resolver este problema? ¿Podrán aplicarse en otras situaciones?

   Para situaciones en las que intervengan parábolas, es importante conocer la forma general de la parábola, si su eje es vertical o es horizontal, y saber las coordenadas del vértice.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.

- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, lo cual les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:

  1. ¿Entre qué valores enteros fluctúa el ancho del andén?

     El mínimo valor entero es 1 m; pero si queremos el andén para que los habitantes del conjunto corran o caminen, entonces será necesario por lo menos 2 m.

  2. ¿Entre qué valores enteros fluctúa el ancho del andén, cumpliendo todas las condiciones del problema?

     Al resolver la ecuación observamos que los valores solo son dos: 10 m y 60 m, pero que solamente 10 m es compatible con la realidad.

- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada.

  1. Comprueba si los dos valores hallados cumplen con el volumen dado.

     Al hallar el ancho: $x - 6 = 4 - 6 = -2$, observamos que las dimensiones no pueden ser valores negativos, por lo que se debe buscar el error.

  2. Si todo está conforme, emplea otra estrategia para resolver el problema. Si hubiera algún error, es tiempo de corregirlo.

     Al analizar la resolución, encontramos que el error se produce cuando factorizamos, pero la expresión no es factorizable. Por ello, debemos aplicar la fórmula de la ecuación de segundo grado. Así obtenemos que $x = 3 \pm \sqrt{17}$.

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.
- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas o indicaciones:
  - ¿Te fue fácil entender los problemas?
  - ¿Qué recursos o estrategias empleaste para resolver los problemas?
  - ¿En qué otras situaciones podrás aplicar lo aprendido?
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar

- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

En el estudio del lanzamiento de proyectiles o movimiento parabólico, las funciones cuadráticas tienen un papel fundamental, ya que permiten describir la velocidad, la altura o el alcance, entre otros elementos, todo en razón del tiempo.

Un movimiento que se asemeja al tiro parabólico es el del lanzamiento de una pelota de básquet.

En cierto lanzamiento, se analizó que la altura H, en metros, que alcanzaba la pelota en función del tiempo t, medido en segundos, estaba dada por la función:

$$H(t) = -5t^2 + 4t$$

Con la información dada, responde las preguntas 1; 2 y 3.

1. El tiempo total t que el balón permaneció en el aire hasta pasar por la canasta, se puede calcular resolviendo la ecuación:

a) $-5t^2 + 4t = 5$, porque el balón alcanza una altura de 5 cm.

b) $-5t^2 + 4t = 20$, porque el balón toca la canasta a 20 m de distancia del lanzamiento.

c) $-5t^2 + 4t = 0$, porque es el tiempo en el cual el balón toca la canasta.

d) $-5t^2 + 4t = 4/5$, porque el balón alcanza su altura máxima.

2. Al resolver la ecuación seleccionada en la pregunta 1, se obtiene que el tiempo total que permaneció el balón en el aire es:

a) 2 segundos **b)** $\frac{4}{5}$ segundos **c)** 10 segundos **d)** $\frac{5}{4}$ segundos

3. La altura máxima ($H_{máx}$) que alcanza el balón desde el suelo hasta el punto más alto del movimiento es:

a) $\frac{2}{5}$ m **b)** $\frac{4}{5}$ m **c)** $\frac{5}{2}$ m **d)** $\frac{8}{5}$ m

4. El movimiento de cierta pelota puede expresarse mediante la función $f(x) = -5x^2 + 20x + 10$, donde x representa el tiempo en segundos y $f(x)$, la altura en metros.

¿Qué altura alcanza la pelota al cabo de dos segundos?

Respuesta adecuada	Respuesta parcial
El estudiante comprende la situación y es capaz de hallar el valor numérico de la expresión $f(x)$ para $x = 2$. Por ejemplo: Reemplaza $x = 2$ en $f(x) = -5x^2 + 20x + 10$ $f(2) = -5(2)^2 + 20(2) + 10$ $f(2) = -20 + 40 + 10 = 30$ Entonces, la pelota alcanza una altura de 30 m en 2 segundos.	El estudiante comprende la situación y hace el reemplazo para hallar el valor numérico, pero no respeta el orden de las operaciones y realiza incorrectamente los cálculos. **Respuesta parcial** El estudiante iguala a cero la expresión para resolverla como una ecuación cuadrática o no propone ninguna solución.

5. Jairo encuentra el voltaje de un circuito eléctrico que puede representarse mediante la siguiente ecuación:

$$x^2 - 2x + 10 = 0$$

Sabe que, si la ecuación tiene soluciones reales, el voltaje del circuito es directo; pero si las soluciones son números complejos, es alterno.

¿Qué clase de voltaje tiene el circuito diseñado por Jairo?

a) No tiene voltaje **b)** Voltaje complejo **c)** Voltaje directo **d)** Voltaje alterno

6. Un proyectil, que lanzamos verticalmente con una velocidad inicial de 200 m/s, se mueve cumpliendo con la ecuación $h = f(t) = 200t - 5t^2$, en donde h es la altura a la que se encuentra en cada instante (t).

¿Cuál es su tiempo de vuelo?

a) 30 s **b)** 40 s **c)** 20 s **d)** 50 s

Nota: En el cuaderno de trabajo, página 209, debe decir: a) 30 s b) 40 s c) 20 s d) 50 s

7. El profesor de Matemática pide a sus estudiantes que resuelvan la ecuación $3x^2 + 7x - 6 = 0$. Uno de ellos obtuvo como solución $x_1 = -3$ y $x_2 = \frac{2}{3}$; en cambio, otro de los estudiantes dijo $x_1 = 3$ y $x_2 = -\frac{2}{3}$. ¿Quién tiene la razón?

Respuesta adecuada

El estudiante comprende la situación al justificar a través del aspa simple u otra estrategia que la respuesta correcta es la primera.

Por ejemplo, para ver cuál de los estudiantes tiene razón, resuelve el problema hallando las raíces de la ecuación cuadrática por aspa simple o por cualquier otra estrategia.

$3x^2 + 7x - 6 = 0$

$3x \quad -2$

$x \quad 3$

$(3x - 2)(x + 3) = 0 \quad ; x + 3 = 0 \ \vee \ 3x - 2 = 0 \quad x_1 = -3 \ \text{ y } \ x_2 = \frac{2}{3}$

Por lo tanto, observa que el primer estudiante tiene la razón.

Respuesta parcial

El estudiante identifica la estrategia, pero se equivoca al aplicar los algoritmos.

Respuesta inadecuada

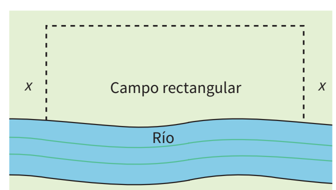
El estudiante opta por una respuesta, pero no justifica su respuesta.

El estudiante no identifica la estrategia para utilizar.

8. José y Pedro son dueños de una empresa de alquiler de autos. La utilidad en soles que tienen por alquilar un auto durante un tiempo t (en horas) está dada por $U(t) = -t^2 + 8t$. A partir de la información, podemos decir que la empresa genera utilidades cuando:

a) $t > 8$ **b)** $t > 0$ **c)** $t < 8$ **d)** $t < -8$

9. Un granjero cercará un campo rectangular, como se muestra en la figura, pero no será necesario cercar a lo largo del río. Si se sabe que el perímetro que se cercará es de 3400 m, expresa el área del campo en función del ancho x de este.



a) $A(x) = 3400x - 2x^2$ **b)** $A(x) = 2x^2 + 3400$ **c)** $A(x) = 3400x^2$ **d)** $A(x) = x^2 + 3400$

10. Determina el valor que debe tener K en la siguiente ecuación:

$(K + 2)x^2 + (5K + 2)x + 3K + 1 = 0$, para que la suma de sus raíces sea 6.

Respuesta adecuada

El estudiante comprende la situación y es capaz de hallar el valor de k aplicando las propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado.

Por ejemplo, reconoce que la suma de raíces en una ecuación cuadrática es $ax^2 + bx + c = 0$. La suma de raíces se expresa como $\frac{-b}{a}$, entonces

$\frac{-(5k + 2)}{k + 2} = 6,$

$-(5k + 2) = (6k + 12)$

$-5k - 2 = 6k + 12$

$-14 = 11k$

$\frac{-14}{11} = k$

Respuesta parcial

El estudiante identifica la estrategia, pero se equivoca al aplicar los algoritmos.

Respuesta inadecuada

El estudiante no identifica la aplicación de la suma de raíces en una ecuación cuadrática.

Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 18 La prueba de Comunicación

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.	Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.	Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático la pertinencia de las medidas de tendencia central en relación con la desviación estándar, según el contexto de la población en estudio.
	Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.	Adapta y combina procedimientos para determinar medidas de tendencia central, desviación estándar de datos continuos y medidas de localización.
	Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.	Plantea y contrasta afirmaciones o conclusiones sobre las características o tendencias de una población a partir de sus observaciones o análisis de datos. Las justifica con ejemplos y contraejemplos, usando sus conocimientos y la información obtenida en su investigación.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de sus estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 17, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Expresar relaciones entre las medidas de tendencia central y las medidas de dispersión (varianza, desviación típica, coeficiente de variación, rango).
  - Establecer la ecuación de la gráfica de dispersión para hacer predicciones, e interpretar la pendiente de la línea en el contexto del problema.
  - Justificar si el diagrama de dispersión sugiere tendencias lineales y trazar la línea de mejor ajuste.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. ¿Qué datos te dan?

   Las notas de una prueba de Comunicación de una muestra de estudiantes, la media y el número de estudiantes.
2. ¿Qué otra información de importancia se te proporciona en este problema?

   Los valores de medidas de dispersión para ser usados como criterio de decisión.
3. ¿Qué te piden hallar?

   Tomar una decisión sobre el rendimiento y si se toma o no una nueva prueba.
4. ¿Qué finalidad tienen algunas de las medidas de tendencia central que vas a calcular?

   Sirven como puntos de referencia para interpretar los puntajes que se obtienen en una prueba.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Qué plan propones para resolver el problema?

   Organizar los datos en una tabla de frecuencias con las columnas para hallar las medidas pedidas.
2. ¿Qué conocimiento necesitas aplicar en la solución?

   Se necesita saber cómo calcular cada medida de dispersión.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Organiza tus datos en la tabla. Completa la frecuencia absoluta y la frecuencia acumulada.

   Completa la siguiente tabla.

X_i	n_i	N_i	$[\lvert X_i - X\rvert] \times n_i$	$[X_i - X]^2 \times n_i$
10	1	1		
12	2	3		
14	2	5		
16	2	7		
17	3	10		

2. Determina el rango. En tu opinión, ¿crees que es grande?

   Se sabe que el rango (R) es igual a la diferencia del valor máximo ($V_{máx.}$) con el valor mínimo ($V_{mín.}$), es decir, $R = V_{máx.} - V_{mín.}$

   Observando la distribución de notas: Máximo: 17; Mínimo: 10

Entonces: R = 17 – 10 = 7
Opinión: Respuesta libre.

3. Calcula la desviación media. Para esto, completa la columna correspondiente:

Completar la tabla y utilizar el valor de la media ($X = 14{,}5$)

X_i	n_i	N_i	$[\lvert X_i - X \rvert] \times n_i$	$[X_i - X]^2 \times n_i$
10	1	1	4,50	
12	2	3	5,00	
14	2	5	1,00	
16	2	7	3,00	
17	3	10	7,50	

Se suman los valores $[\lvert X_i - X \rvert] \cdot n_i$; en este caso: $\Sigma\ [\lvert X_i - X \rvert] \cdot n_i = 21$

Se divide el valor hallado por el total de datos; en este caso "$n = 10$"

$$DM = \frac{\Sigma \lvert X_i - X \rvert n_i}{n} = \frac{1}{10} = 2{,}1$$

4. Da respuesta a la pregunta 2 de la situación inicial.

Comparen la DM con el criterio dado.

Como 2,1 > 2, entonces el profesor deberá tomar otra prueba.

5. Calcula la varianza. Completa la tabla.

Completar la tabla y utilizar el valor de la media ($X = 14{,}5$)

X_i	n_i	N_i	$[\lvert X_i - X \rvert] \times n_i$	$[X_i - X]^2 \times n_i$
10	1	1	4,50	20,25
12	2	3	5,00	12,5
14	2	5	1,00	0,5
16	2	7	3,00	4,5
17	3	10	7,50	18,75

Se suman los valores $[X_i - X]^2 \cdot n_i$; en este caso: $\Sigma\ [X_i - X] \cdot n_i = 56{,}50$

Se divide el valor hallado por el total de datos; en este caso "$n = 10$"

$$S^2 = \frac{\Sigma \lvert X_i - X \rvert^2 n_i}{n} = \frac{56{,}50}{10} = 5{,}65$$

6. Interpreta el valor de la varianza.

La varianza es 5,65.

7. Calcula la desviación estándar y responde lo solicitado.

Se sabe que la desviación estándar es: $DS = \sqrt{5{,}65} = 2{,}38$

Aplicando el criterio del profesor:

2 × 2,38 = 4,76 > 4,5. Entonces, se aplicará otra prueba.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿Hay suficientes argumentos como para aplicar otra prueba?

Considerando las medidas de dispersión, observamos que todas apuntan a afirmar que los datos tienen mucha variabilidad, por lo que conviene tomar otra prueba.

2. Propón otras situaciones donde es conveniente ver el grado de variabilidad de los datos.

También se puede emplear para ver los pesos de los artículos que venden empaquetados, el tiempo de duración de artefactos, autos, etc.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.
- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, lo cual les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:
  1. ¿Cuál es el nivel de colesterol que tienen más personas? ¿Se encuentra dentro del intervalo hallado?

     El nivel de colesterol que tienen más personas es 230.

     Como el intervalo hallado es [229,68; 299,12], observamos que 230 está comprendido en este intervalo.
  2. ¿Qué crees que les ocurrirá después de medicarse? Argumenta tu respuesta.

     El rango debe disminuir.

     Para comprobar calculamos el rango de la distribución “Después del tratamiento”.

     Máximo es 176;   mínimo es 153

     Rango es igual a 176 – 153 = 23
  3. Plantea dos ventajas que te ofrece la estadística.

     La estadística nos ayuda a tomar decisiones y también a realizar algunas predicciones.
- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada.
  1. ¿Cómo interpretas la varianza?

     La varianza mide el grado de variabilidad de los datos de una distribución. Se expresa en el cuadrado de las unidades originales de los datos.
  2. ¿Qué otra medida podríamos hallar a partir de la varianza y cómo se calcularía?

     Se podría hallar la desviación estándar, cuyo valor es la raíz cuadrada de la varianza. Desviación estándar es 44,9.

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.

- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

Color de preguntas	Números de preguntas	Equipos de trabajo: Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas o indicaciones:
  - ¿Cómo resolviste las dificultades que se te presentaron?
  - ¿Qué recursos o estrategias te fueron útiles para resolver los problemas?
  - ¿Te fue útil trabajar en equipo? ¿Por qué?
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

Color de preguntas	Números de preguntas	Equipos de trabajo: Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar

- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

Una encuesta anónima para determinar los niveles de agresividad e inteligencia emocional se llevó a cabo en un grupo de estudiantes de quinto de secundaria de un colegio. En la tabla de la derecha, se muestran los puntajes obtenidos en cada variable. Asimismo, se conoce el sexo (M: Mujer y H: Hombre) de dichos estudiantes. También, se sabe que las medias de las variables son:

$$\bar{x}_{\text{agresividad}} = 0{,}65; \bar{x}_{\text{int. emoc}} = 41{,}95$$

Se recomienda utilizar una hoja de cálculo (Excel) para facilitar las operaciones.

Con la información dada, responde las preguntas 1; 2; 3 y 4 .

N.º	Nombres	Sexo	Agresividad	Inteligencia emocional
1	José	H	0,68	38
2	Marco	H	0,54	53
3	David	H	0,70	35
4	Robert	H	0,30	66
5	María	M	0,54	54
6	Rosy	M	0,66	50
7	Luis	H	0,83	28
8	Carla	M	0,63	47
9	Regina	M	0,73	31
10	Meche	M	0,66	45
11	Pedro	H	0,43	50
12	Juan	H	0,67	44
13	Celia	M	0,74	26
14	Matías	H	0,71	33
15	Jesús	H	0,73	27
16	Ramiro	H	0,67	42
17	Noé	H	0,69	39
18	Ricky	H	0,72	36
19	Rocío	M	0,65	48
20	Felicia	M	0,64	47

1. ¿Cuál es el rango del nivel de agresividad de los estudiantes de quinto de secundaria?

a) 0,04 **c)** 0,50

b) 0,40 **d)** 0,53

2. Con la finalidad de establecer la amplitud de puntajes en inteligencia emocional, se desea calcular el rango de los valores de la tabla para el grupo de estudiantes. ¿Cuál es el rango de los puntajes mostrados en la tabla?

a) 30 **b)** 40 **c)** 42 **d)** 45

3. Con la finalidad de establecer diferencias por sexo para la variable "agresividad", los responsables de la encuesta desean saber si el rango presenta diferencias cuando se agrupa por sexo a los estudiantes. Determina si el rango de los puntajes de agresividad mostrados en la tabla es mayor en los hombres o en las mujeres.

a) El rango es mayor en los hombres. **c)** Es igual en ambos.

b) El rango es mayor en las mujeres. **d)** No se puede determinar.

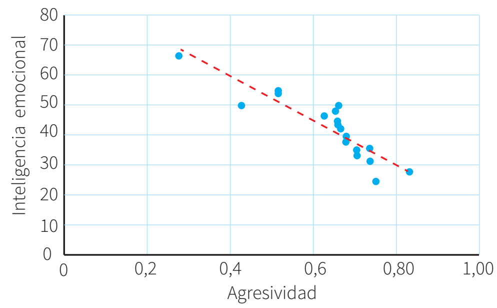
4. Con la finalidad de establecer diferencias por sexo para la variable "inteligencia emocional", los responsables de la encuesta desean saber si el rango presenta diferencias cuando se agrupa por sexo a los estudiantes. Determina si el rango de los puntajes de inteligencia emocional es mayor en los hombres o en las mujeres.

Respuesta adecuada
El estudiante reconoce el rango (R), que es igual a la diferencia del valor máximo ($V_{máx.}$) con el valor mínimo ($V_{mín.}$), de dos grupos diferentes y los compara.
Por ejemplo:
Se sabe que $R = V_{máx.} - V_{mín.}$
Hallando los rangos:
$R_{HOMBRE} = 66 - 27 = 39$
$R_{MUJER} = 54 - 26 = 28$
Comparando: $R_{HOMBRE} > R_{MUJER}$

Respuesta parcial
El estudiante reconoce el rango, pero no los compara.

Respuesta inadecuada
El estudiante no reconoce el rango de los grupos.

Considerando los valores de agresividad e inteligencia emocional, se ha elaborado una gráfica de dispersión de puntos de dichos valores en el plano cartesiano.



Con la información dada, responde las preguntas 5 y 6.

5. ¿Qué características tiene la recta de tendencia?

a) Es creciente y relaciona la agresividad con los hombres.

b) Es decreciente y relaciona la inteligencia emocional de las mujeres con la agresividad de los hombres.

c) Es decreciente y relaciona la agresividad de los estudiantes con su inteligencia emocional.

d) Es creciente la agresividad de los hombres en relación con la inteligencia emocional de las mujeres.

6. ¿Qué se puede concluir de la gráfica anterior, en relación con la agresividad y la inteligencia emocional de los estudiantes?

a) Existe relación inversa entre la agresividad y la inteligencia emocional.

b) Existe relación directa entre la agresividad y la inteligencia emocional.

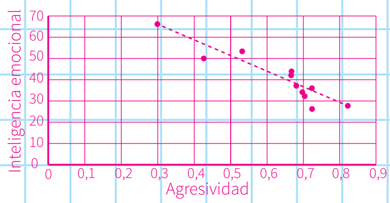
c) No existe relación entre la agresividad y la inteligencia emocional.

d) No se puede llegar a ninguna conclusión.

7. Considerando los valores, mostrados en la tabla, de agresividad e inteligencia emocional de los varones, elabora una gráfica de dispersión de puntos de dichos valores y la línea de tendencia en el siguiente plano cartesiano:

N.°	Nombres	Sexo	Agresividad	Inteligencia emocional
1	José	H	0,68	38
2	Marco	H	0,54	53
3	David	H	0,70	35
4	Robert	H	0,30	66
5	María	M	0,54	54
6	Rosy	M	0,66	50
7	Luis	H	0,83	28
8	Carla	M	0,63	47
9	Regina	M	0,73	31
10	Meche	M	0,66	45
11	Pedro	H	0,43	50
12	Juan	H	0,67	44
13	Celia	M	0,74	26
14	Matías	H	0,71	33
15	Jesús	H	0,73	27
16	Ramiro	H	0,67	42
17	Noé	H	0,69	39
18	Ricky	H	0,72	36
19	Rocío	M	0,65	48
20	Felicia	M	0,64	47

Respuesta adecuada
El estudiante identifica los valores necesarios, los ubica en el plano y propone la línea de tendencia.
Por ejemplo:



Respuesta parcial
El estudiante logra identificar los valores, pero no los ubica en el plano cartesiano.

Respuesta inadecuada
El estudiante no identifica los valores del grupo de varones.

8. Los responsables de la encuesta han señalado que, si la desviación media de los niveles de agresividad es menor o igual a 0,05 (DM ≤ 0,05), puede considerarse que la agresividad en dicho grupo de estudiantes requiere ser atendida por un psicólogo, mientras que si es superior, bastaría con que su tutor conversara con ellos.

Completa la tabla, calcula la desviación media y responde: ¿Cuál de las dos decisiones deberá tomarse con los estudiantes encuestados de quinto de secundaria?

a) Deberán ser atendidos por un psicólogo.

b) El tutor deberá conversar con los estudiantes.

c) No se puede determinar la DM de agresividad.

d) Debería intervenir el director.

X_i	n_i	N_i	$[X_i - X]^2 \times n_i$
0,3	1	1	0,119 37
0,43	1	2	0,046 44
0,54	2	4	0,022 26
0,63	2	6	0,000 48
0,65	1	7	0,000 02
0,66	3	10	0,000 63
0,67	1	11	0,000 60
0,68	2	13	0,002 38
0,71	2	15	0,008 32
0,73	3	18	0,021 42
0,74	1	19	0,008 93
0,83	1	20	0,034 04

9. Con la finalidad de determinar la dispersión de los niveles de agresividad, los responsables de la encuesta deciden tomar en cuenta la varianza. ¿Cuál es el valor de la varianza del nivel de agresividad en los estudiantes de quinto de secundaria? (Considera como dato la respuesta de la pregunta 8).

a) 0,01 **b)** 0,10 **c)** 0,26 **d)** 2,60

10. Con la finalidad de precisar la dispersión de datos entre las variables "agresividad" e "inteligencia emocional", se ha dispuesto hallar las desviaciones estándar de ambas y determinar cuál de las dos tiene mayor desviación.

En la tabla adjunta se muestra una ayuda para que halles la desviación estándar de la variable "inteligencia emocional".

X_i	n_i	N_i	$[X_i - X]^2 \times n_i$
27	3	3	670,507 50
31	1	4	119,902 50
33	1	5	80,102 50
36	2	7	70,805 00
38	2	9	31,205 00
45	3	12	27,907 50
48	3	15	109,807 50
50	3	18	194,407 50
53	1	19	122,102 50
66	1	20	578,402 50

Respuesta adecuada
El estudiante comprende que para hallar la desviación estándar (S) debe calcular la varianza (S^2) y luego extraer la raíz cuadrada. Hace los cálculos y realiza la comparación entre las desviaciones estándar de ambas variables.
Por ejemplo:

$S_{\text{AGRESIVIDAD}} = \sqrt{0,01} = 0,12$

$S^2_{\text{INT. EMOCIONAL}} = s^2 = \frac{\sum(x_i - x)^2 \times n_i}{n} = \frac{2005,15}{20} = 100,26$

$S_{\text{INT. EMOCIONAL}} = \sqrt{100,26} = 10,01$

La agresividad tiene mayor desviación estándar que la inteligencia emocional.

Respuesta parcial
El estudiante sabe la relación entre la varianza y la desviación estándar, pero no puede calcular la varianza.

Respuesta inadecuada
El estudiante no reconoce la desviación estándar; la puede confundir con la desviación media.

Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 19

¿Quién saca?

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.	Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.	Determina las condiciones y restricciones de una situación aleatoria, analiza la ocurrencia de sucesos simples y compuestos, y la representa con el valor de su probabilidad expresada como racional de 0 a 1.
	Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.	Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre el valor de la probabilidad de sucesos simples y compuestos de una situación aleatoria, y cómo se distinguen los sucesos simples de los compuestos.
	Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.	Adapta y combina procedimientos para determinar la probabilidad de eventos simples o compuestos de una situación aleatoria. Adecúa los procedimientos utilizados a otros contextos de estudio.
	Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.	Plantea y contrasta afirmaciones o conclusiones sobre las características o tendencias de una población o de eventos aleatorios a partir de sus observaciones. Reconoce errores en sus conclusiones o las de otros estudios y propone mejoras.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de sus estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 18, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Organizar datos para la determinación de su espacio muestral y plantear un modelo referido a la probabilidad condicional.
  - Expresar operaciones con eventos y organizar datos y sucesos en diagrama de Venn, árboles y otros.
  - Determinar el espacio muestral de eventos compuestos e independientes al resolver problemas.
  - Plantear conjeturas relacionadas con el estudio de muestras probabilísticas.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. Identifica los eventos que presenta el problema.

   Presenta tres eventos: el lanzamiento de un dado y el de una moneda, así como el lanzamiento de un segundo dado de otra forma.

2. ¿Cuáles son los datos del problema?

   El primer dado tiene 6 caras, y la moneda, 2. El segundo dado tiene 4 caras.

3. ¿Qué te piden determinar?

   Hallar los espacios muestrales (número de casos posibles) y representarlos mediante un diagrama de árbol.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

1. ¿Qué forma tiene un dado de cuatro caras?

   Tiene la forma de un tetraedro. Debería ser regular, para que todas las caras tengan la misma opción de salir (cuatro triángulos equiláteros).

2. Propón un plan para dar respuesta a las preguntas de la situación inicial.

   Deben observar las caras de los dados y de la moneda para determinar cuáles y cuántos son los resultados posibles al lanzar cada dado y la moneda. Luego lo deben representar con un diagrama de árbol.

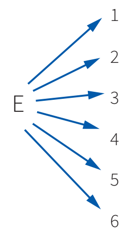
★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Representa con un número cada cara del dado y expresa el espacio muestral.

   El experimento que van a hacer Daniel y Micaela se da en el siguiente espacio muestral $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

2. Representa este espacio muestral con un diagrama de árbol.

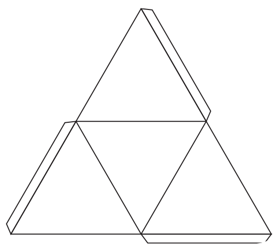
   Considerar un punto de partida para el evento y, por medio de flechas (como "ramas"), vincular los casos posibles.



3. Construye un dado de cuatro caras. Determina el espacio muestral del dado.

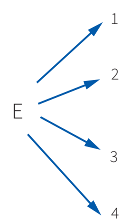
   Se forma un tetraedro regular.

   El espacio muestral será: $E = \{1; 2; 3; 4\}$



4. Represента el espacio muestral del dado de cuatro caras con un diagrama de árbol.

   Se procede de manera similar a como se trabajó en el primer dado:

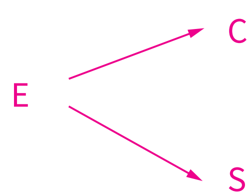


5. ¿Cómo representarías cada posibilidad y como escribirías el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de la moneda por parte de Daniel y Micaela?

   Se acostumbra a que cada lado de una moneda se llame "cara"(C) y "sello" (S).

6. Utiliza un diagrama de árbol para representar el espacio muestral al lanzar una moneda.

   En este caso el diagrama del árbol tendrá solo dos ramas.



★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. ¿Cuáles son las formas de representar el espacio muestral de un evento?

   Son dos formas las que se han trabajado:

   a) Con un conjunto por extensión.

   b) Con un diagrama de árbol.

2. Si hubieran lanzado el dado simultáneamente, ¿cuál sería el espacio muestral?

   Los espacios serían:

   $E_{moneda} = \{C; S\}$, $E_{dado} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

   Entonces, el espacio muestral de los dos será:

   E(moneda, dado) = {(C;1),(C;2),(C;3),(C;4),(C;5),(C;6),(S;1),(S;2),(S;3),(S;4),(S;5),(S;6)}

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.
- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, lo cual les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:

1. ¿De cuántos eventos simples se compone el evento analizado? ¿Cuáles son?

   Son tres eventos simples. Tres lanzamientos: de un dado y dos monedas, no simultáneamente.

2. ¿Cuántos casos son posibles?

   Son 12 posibles casos.

3. ¿En qué casos sale cara en ambas monedas? ¿Cuántos son?

   Esto ocurre en (2,C,C); (4,C,C) y (6,C,C). Son 3.

- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada.

1. Verifica mediante la regla de Laplace. Si no coincide, identifica el error y corrige.

   Otra forma de llegar a la respuesta es razonar con el espacio muestral: E = {(1,C) ; (1,S) ; (2,C,C) ; (2,S,S) ; (3,C) (3,S) ; (4,C,C) ; (4,S,S) ; (5,C) ; (5,S) ; (6,C,C) ; (6,S,S)}

   Se observa que el espacio muestral registra 12 resultados posibles, de los cuales la condición del problema indica lo siguiente: "que salga un número impar y, además, no salga ninguna cara".

   En el espacio muestral se observa que hay tres casos favorables que cumplen la condición de un total de 12.

   Luego, según la regla de Laplace:

   $$P = \frac{\text{n.° de casos favorables}}{\text{n.° de casos posibles}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Ha habido dos errores: en lugar de sumar se debió multiplicar las probabilidades y luego multiplicar por 3 casos. $P = \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot 3 = \frac{1}{4}$.

Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.
- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

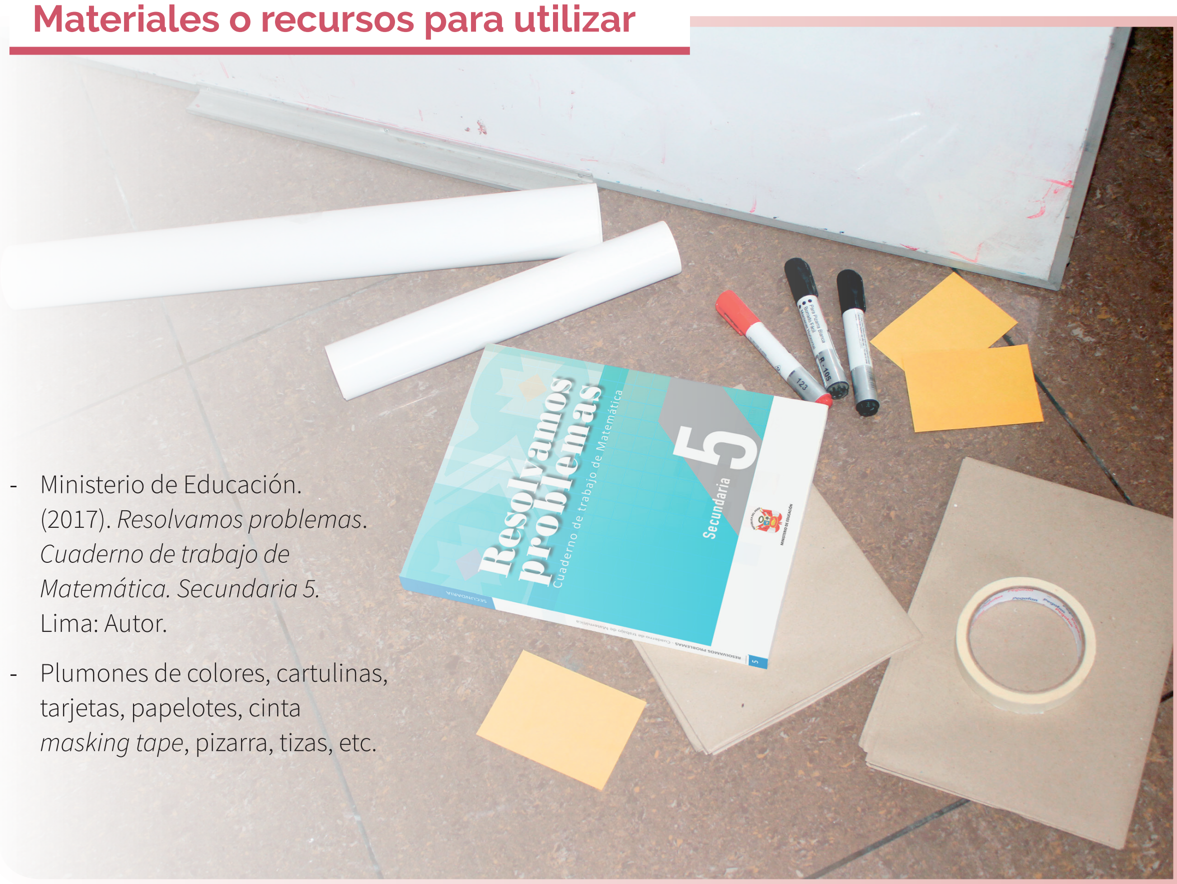
- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas:
  - ¿En qué situaciones de la vida diaria podrás aplicar lo que aprendiste?
  - ¿En qué fase del desarrollo del problema tuviste más dificultad? ¿Cómo la superaste?
  - ¿Qué debes considerar para elaborar un diagrama de árbol?
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar



- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

En un grupo de amigos, el 80 % están casados. Entre los casados, el 75 % tienen trabajo. Finalmente, un 5 % no están casados y se encuentran desempleados.

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. Uno de ellos postula a un trabajo. ¿Qué probabilidad hay de que sea de los que están desempleados?

a) 0,15 **b)** 0,20 **c)** 0,25 **d)** 0,40

2. Si uno tiene trabajo, ¿qué probabilidad hay de que esté casado?

a) 0,50 **b)** 0,75 **c)** 0,80 **d)** 0,95

Un grupo de 120 turistas participa en un viaje por varias ciudades de Europa; 48 de ellos hablan inglés; 36, francés, y 12, los dos idiomas.

Con la información dada, responde las preguntas 3 y 4.

3. Si se escoge un turista al azar del grupo en mención, ¿cuál es la probabilidad de que hable francés, sabiendo que habla inglés?

a) 0,15 **b)** 0,25 **c)** 0,45 **d)** 0,55

4. ¿Y cuál es la probabilidad de que ese turista hable alguno de los dos idiomas?

Respuesta adecuada

El estudiante evidencia comprender la probabilidad y elabora una estrategia de solución al problema. Puede utilizar un cuadro o un diagrama de Venn.

Por ejemplo:

Vamos a organizar los datos en una tabla, completando los que faltan:

	Habla francés	No habla francés
Habla inglés	12	36
No habla inglés	24	48
	36	84

Llamamos I = "Habla inglés"; F = "Habla francés".

Tenemos que hallar $P[I \cup F]$

$$P[I \cup F] = P[I] + P[F] - p[I \cap F] = \frac{48 + 36 - 12}{120} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Respuesta parcial

El estudiante logra calcular las probabilidades de que ese turista hable determinado idioma, pero no consigue hallar la probabilidad cuando hay una condición extra.

Respuesta inadecuada

El estudiante plantea estrategias que no se relacionan con los datos del problema.

5. En una caja de 100 artículos hay 10 con defectos. Se toman al azar tres artículos, uno tras otro. Halla la probabilidad de que los tres no sean defectuosos. (P: Probabilidad).

a) 0,73 b) 0,53 c) 0,40 d) 0,28

6. Sean A y B dos sucesos aleatorios con $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Determina $P\left(\frac{A}{B}\right)$.

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{3}$

7. Se tienen 20 botellas de gaseosa para la venta, y se sabe que existen 10 botellas que traen la palabra “PREMIO” en su tapa.

¿Cuál es la probabilidad de que la tercera botella que se venda sea la primera que tenga la palabra “PREMIO” en su tapa?

Respuesta adecuada

El estudiante reconoce que es un evento compuesto y desarrolla paso a paso cada evento para luego aplicar la regla multiplicativa.

Por ejemplo:

Si la tercera botella es la premiada, entonces las dos primeras no lo son.

P(1.ª sin premio) = $\frac{10}{20}$; P(2.ª sin premio) = $\frac{9}{19}$;

P(3.ª con premio) = $\frac{10}{18}$

Entonces: P(1.ª, sin/2.ª, sin/3.ª, con) = $\frac{10}{20} \times \frac{9}{19} \times \frac{10}{18} = 0{,}132$

Respuesta parcial

El estudiante reconoce el evento compuesto; halla la primera probabilidad, pero comete errores en las siguientes.

Respuesta inadecuada

El estudiante halla la probabilidad como si fuese la primera botella la premiada o realiza apuntes que no son pertinentes al problema.

8. En un grupo de 120 personas se hace una encuesta en la que se les pregunta si les gusta leer y ver televisión. Los resultados son los siguientes:

- A 32 personas les gusta leer y ver televisión.
- A 92 personas les gusta leer.
- A 47 personas les gusta ver televisión.

Si elegimos al azar a una de esas personas, ¿cuál es la probabilidad de que le guste leer, sabiendo que le gusta ver televisión?

a) 2,13 **b)** 2,46 **c)** 0,55 **d)** 0,68

9. En una ciudad, el 40 % de la población tienen cabellos castaños; el 25 %, ojos castaños, y el 15 %, cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar. Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también ojos castaños?

a) 0,225 **b)** 0,375 **c)** 0,450 **d)** 2,650

10. Una urna *A* contiene 7 bolas numeradas del 1 al 7. En otra urna *B*, hay 5 bolas numeradas del 1 al 5. Lanzamos una moneda equilibrada, de forma que, si sale cara, extraemos una bola de la urna *A* y, si sale sello, la extraemos de la urna *B*.

Sabiendo que salió una bola con número par, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de la urna *A*?

Respuesta adecuada

El estudiante plantea una estrategia de solución; puede ser un gráfico, un árbol o un esquema que facilita la comprensión y solución del problema; asimismo, aplica la fórmula de probabilidad condicional.

Hacemos un diagrama de árbol:

$\frac{1}{2}$ → A → $\frac{3}{7}$ Par → $P[A \text{ y } P\text{AR}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

A → $\frac{4}{7}$ Impar

$\frac{1}{2}$ → B → $\frac{2}{5}$ Par → $P[B \text{ y } P\text{AR}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

B → $\frac{3}{5}$ Impar

$$P[P\text{AR}] = \frac{3}{14} + \frac{1}{5} = \frac{29}{70} \qquad P[P\text{AR}] = \frac{P[A \text{ y } P\text{AR}]}{P[P\text{AR}]} = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{29}{70}} = \frac{15}{29}$$

Respuesta parcial

El estudiante elabora un esquema o gráfico con las variables o datos del problema, pero no llega a encaminarse en la solución del problema. (No aplica la fórmula de probabilidad condicional).

Respuesta inadecuada

El estudiante no llega a plantear una estrategia definida de solución al problema; hace algunos apuntes, pero no se relacionan con los datos ni la situación del problema.

Deja la pregunta en blanco.

Duración: 2 horas pedagógicas

Sesión 20

Teselaciones en un plano

I. Propósitos de aprendizaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.	Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Describe la ubicación o los movimientos de un objeto real o imaginario y los representa utilizando gráficos y planos cartesianos. Asimismo, describe las posibles secuencias de transformaciones sucesivas que dieron origen a una forma bidimensional.
	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Expresa, con dibujos, material concreto y lenguaje geométrico, su comprensión sobre las transformaciones geométricas y la clasificación de las formas geométricas, según sus características y propiedades, para interpretar un problema de acuerdo con su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para determinar las transformaciones geométricas y la composición de transformaciones empleando coordenadas cartesianas.
	Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas.	Plantea y contrasta afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que descubre entre los objetos y entre estos y las formas geométricas, así como entre las formas geométricas mismas, sobre la base de experiencias directas o simulaciones.

II. Secuencia didáctica

Inicio: (10 minutos)

- El docente da la bienvenida a los estudiantes y los organiza en equipos de trabajo teniendo en cuenta los ritmos de aprendizaje; para ello, es conveniente que conozca las características de aprendizaje de sus estudiantes.

Sugerencias para el docente:

- ✔ Los equipos de trabajo deben estar formados de acuerdo con los logros de aprendizaje de los estudiantes (equipos A: estudiantes destacados; equipos B: estudiantes que se hallan en proceso; equipos C: estudiantes que se encuentran en inicio).
- ✔ Se deben formar seis equipos de trabajo como máximo.
- ✔ Es necesario brindar mayor apoyo a los estudiantes de los equipos C.

- El docente revisa las actividades de refuerzo propuestas en la ficha 19, y escoge indistintamente a tres estudiantes para verificar los resultados y las dificultades que tuvieron.
- El docente plantea las siguientes pautas de trabajo:

- ✔ Recuerda a los equipos de trabajo que acuerden una forma o estrategia de comunicar los resultados.
- ✔ Comunica que es necesario respetar los acuerdos y los tiempos estipulados para cada actividad, garantizando así un trabajo efectivo.
- ✔ Indica que se deben respetar las opiniones e intervenciones de todos y fomentar espacios de diálogo y reflexión.

- El docente comunica los propósitos de la sesión:
  - Reconocer relaciones geométricas y modelos que combinan traslación, rotación y reflexión de figuras geométricas.
  - Describir empleando transformaciones geométricas en sistemas articulados de mecanismos.
  - Realizar proyecciones y composición de transformaciones de traslación, rotación, reflexión y homotecia al resolver problemas relacionados con sistemas dinámicos y mosaicos.
  - Justificar el efecto de transformaciones respecto a líneas verticales u horizontales o un punto empleando puntos de coordenadas y expresiones simbólicas.

Desarrollo (70 minutos)

Aprendemos

- El docente explica cómo está estructurada la primera sección de la ficha.
  - Se presenta una situación de contexto con preguntas retadoras.
  - Se organizan actividades por cada fase de la *Resolución de problemas* (*Comprendemos el problema*, *Diseñamos o seleccionamos una estrategia*, *Ejecutamos la estrategia o plan* y *Reflexionamos sobre el desarrollo*).
- El docente presenta la situación planteada en la sección **Aprendemos** y pide a un estudiante que la lea en voz alta.
- Luego cada integrante del equipo C ayudará al docente a responder las preguntas formuladas en las fases de *Resolución de problemas*. Los estudiantes de los equipos A y B van reforzando las respuestas dadas por sus compañeros del equipo C.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Comprendemos el problema**:

1. Identifica la figura que predomina en el grabado de Escher.

   Resalte la imagen de los peces de colores. También se observan formas pentagonales (las aletas de los peces) y triangulares.

2. ¿Qué figura predomina en la teselación de Coexter?

   Haga ver que está formada por formas triangulares rojas y blancas. Para algunos, resaltan los rojos.

3. ¿Qué te piden hallar?

   Las transformaciones que experimentan algunas figuras o imágenes de los grabados.

4. ¿Qué conceptos conoces alrededor de lo que te piden?

   Que las transformaciones pueden ser traslaciones, rotaciones y reflexiones.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan**:

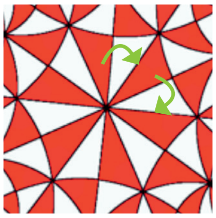
1. ¿Cómo resolverías las preguntas de la situación inicial? ¿Cuál es tu plan?

   Mediante la observación detallada de las imágenes.

   Tomaría dos imágenes similares: una sería el punto de partida y la otra el punto de llegada. Así podría observar si se ha trasladado o rotado o si es una combinación o una simetría.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Ejecutamos la estrategia o plan**:

1. Determina la transformación que experimentan los triángulos grandes de Coexter.



Indique que elijan uno de los triángulos como punto de partida y lo comparen con otro. Señale que ha experimentado una rotación y mantiene sus dimensiones.

2. Elige dos triángulos grandes: rojo y blanco, que sean contiguos, y hallen la transformación geométrica que experimenta el triángulo.

   Por dato deben trazar una línea recta.

   Luego, observar qué sucede con los puntos de ambos triángulos respecto a la recta.

   Si nos ayudamos con una regla, determinamos que cada punto del rojo tiene su punto simétrico en el blanco. Por lo tanto, es una simetría axial o reflexiva.

3. En el tallado de Escher determina, con respecto al centro, la transformación que hay entre los dos peces amarillos.

Observando se encontrará que cada punto de un pez amarillo dista la misma distancia que otro punto del otro pez amarillo. Por ello, afirmamos que hay simetría central.

4. Ahora observa todos los peces de un solo color en el tallado de Escher. ¿Qué transformaciones se evidencian?

   Pueden elegir los peces amarillos.

   Respecto a los grandes, ya hemos mostrado que experimentan una simetría central.

   Respecto a uno grande y otro pequeño, hay rotación, lo cual se evidencia en la curva que existe entre ellos, así como una homotecia, por el cambio de tamaño.

★ Con la mediación del docente, los estudiantes del equipo C dan respuesta a las preguntas que se presentan en la fase **Reflexionamos sobre el desarrollo**:

1. En la rotación, ¿qué cambió?, ¿qué se mantuvo?

   Cambió la posición por el ángulo que giró, pero mantuvo su forma y tamaño.

2. ¿Has observado alguna traslación en las imágenes? ¿Por qué?

   No se observa, porque no hay uno que mantenga la orientación.

- El docente sintetiza los procesos realizados y enfatiza la importancia de formularse preguntas adecuadas en cada una de las fases de *Resolución de problemas*, planteando ejemplos de cómo alguna pregunta inadecuada podría afectar el resultado.

Analizamos

- El docente indica que la sección **Analizamos** de la ficha será resuelta por cada equipo, y a través de preguntas los estudiantes realizarán el análisis de la resolución de las situaciones planteadas.
- El docente explica la forma de abordar esta sección de la ficha:
  - Se lee la situación A, se revisa el proceso de resolución y se responden preguntas.
  - Se lee la situación C, se revisa el proceso de resolución, se encuentran errores y se responden preguntas.

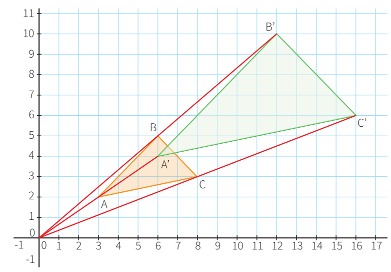
- Los estudiantes leen la situación A y en equipo responden las preguntas o enunciados, que les permite reflexionar sobre la resolución de la situación dada:
    1. ¿Qué tienen en común la traslación y la rotación? ¿En qué se diferencian?

       En ambas se mantiene la misma forma y tamaño.

       En la traslación se mantiene la orientación, mientras que en la rotación cambia la orientación.
    2. ¿A qué transformación geométrica es equivalente la simetría central?

       En la simetría central se conserva el tamaño y forma de la figura, pero no su orientación, al igual que en una rotación de 180°.
- Luego los estudiantes leen de forma individual la situación C, encuentran el error y responden las preguntas o enunciados a partir del análisis de la resolución de la situación dada.
    1. Verifica si el procedimiento para hacer una homotecia es correcto. Revisa la teoría al respecto. De ser correcto, ¿de qué otro modo se podría hacer una homotecia? Si fuera incorrecto, identifica el error y obtén el nuevo resultado.

       Al ver la teoría nos daremos cuenta de que el procedimiento está errado. Luego graficamos el triángulo *ABC*. Como k = 2, simplemente se duplica la distancia que hay entre el centro y cada vértice para obtener el nuevo triángulo.



Retroalimentación

Si los estudiantes encuentran dificultad para comprender el problema e identificar los errores en la resolución de la situación C, el docente sugiere a los estudiantes, para dar respuesta a la situación planteada, actividades como las que se mencionan a continuación:

- Revisa la situación planteada e identifica los datos, conceptos, propiedades y fórmulas que te pueden servir para verificar la resolución.
- Revisa detenidamente el procedimiento realizado e identifica en cuál de los pasos se cometió el error. Luego desarrolla el procedimiento de la manera correcta.
- Después del análisis de las situaciones por parte de cada equipo de trabajo y de forma individual, el docente sugiere las respuestas de cada una de las situaciones planteadas, promoviendo la reflexión sobre los procesos y el uso de las estrategias para la *Resolución de problemas*.

Practicamos

- El docente indica que las situaciones planteadas en la sección **Practicamos** se organizan por colores (verde, amarillo y azul) y serán resueltas por cada estudiante considerando su ritmo de aprendizaje.
- Los equipos de trabajo desarrollarán las actividades de la siguiente manera:

		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4		4	1 2 3 4
Amarillo	5 6 7	6 7	5 6 7	5
Azul	8 9 10	8 9 10	8	

- Los estudiantes desarrollarán las situaciones de la sección **Practicamos** haciendo uso de diversas estrategias para la *Resolución de problemas*.
- El docente monitorea el desarrollo y absuelve las dudas que puedan tener los estudiantes.
- Los estudiantes socializan la resolución de una situación (la que ellos decidan o a sugerencia del docente). A partir de ello, el docente refuerza sobre los procedimientos y estrategias utilizados en dicha resolución.

Cierre: (10 minutos)

- El docente promueve la reflexión en los estudiantes a través de las siguientes preguntas:
  - ¿Qué dificultades tuviste? ¿Cómo las superaste?
  - ¿En qué otras situaciones podrás aplicar lo que has aprendido?
  - ¿Qué debes considerar para aplicar una homotecia?
- A partir de las respuestas de los estudiantes, el docente consolida los procesos realizados para la resolución de las situaciones planteadas.

Reforzamos en casa

- El docente invita a los estudiantes de cada equipo a dar respuesta a las preguntas propuestas en la situación B de la sección **Analizamos**.
- Solicita a los estudiantes de cada equipo que desarrollen las actividades propuestas en la sección **Practicamos** de la siguiente manera:

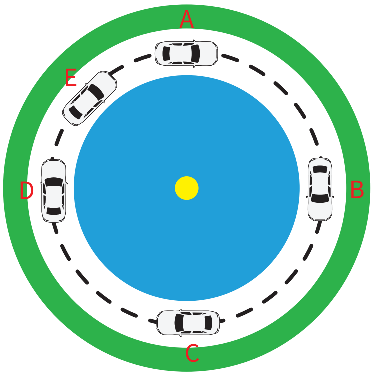
		Equipos de trabajo		
Color de preguntas	Números de preguntas	Equipo A	Equipo B	Equipo C
Verde	1 2 3 4	2 3 4	1 2	
Amarillo	5 6 7	5		6 7
Azul	8 9 10		9 10	8

Materiales o recursos para utilizar

- Ministerio de Educación. (2017). *Resolvamos problemas. Cuaderno de trabajo de Matemática. Secundaria 5.* Lima: Autor.
- Plumones de colores, cartulinas, tarjetas, papelotes, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

Practicamos

En la siguiente figura, se muestra una pista circular y la imagen de un automóvil en diferentes puntos de la pista.



Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. Cuando el auto se encuentra entre los puntos *B* y *D*, es incorrecto decir que hay:

a) Una rotación respecto al centro.

b) Una simetría central.

c) Una homotecia k = –1.

d) Una simetría axial.

2. En los puntos *A* y *E* de la figura anterior, con respecto al centro, existe:

a) Una rotación.

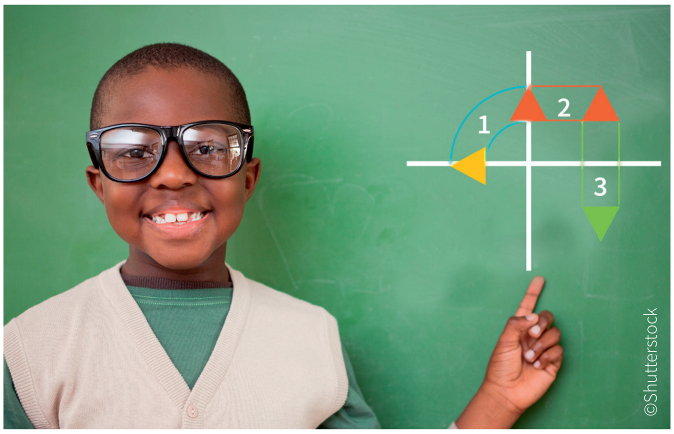
b) Una traslación.

c) Una simetría axial.

d) Una simetría central.

3. La profesora pone en la pizarra un triángulo en diversas posiciones, y los estudiantes indican qué transformación geométrica está ocurriendo.

Para dar su respuesta, consideran este orden: lo que ocurre en el paso 1, en el paso 2 y en el paso 3.



a) Traslación, simetría axial, rotación.

b) Simetría central, rotación, homotecia.

c) Rotación, traslación, simetría axial.

d) Rotación, simetria axial, simetría central.

4. Dadas dos figuras geométricas semejantes, ¿cómo hallarías el centro de la homotecia?

Respuesta adecuada
El estudiante comprende que el centro de homotecia se ubica en un punto tal que las distancias de los vértices al centro son proporcionales.
Ejemplo:
Se trazarían líneas rectas por cada vértice, donde la intersección de ellas sería el centro.

Respuesta parcial
El estudiante reconoce que las distancias deben ser proporcionales, pero no realiza los trazos pertinentes.

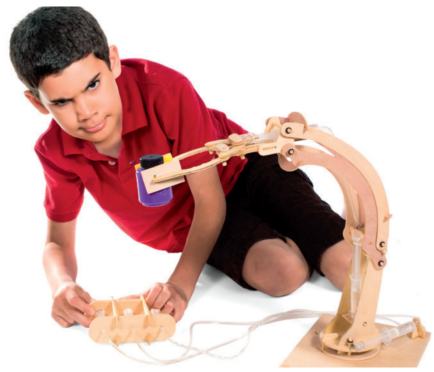
Respuesta inadecuada
El estudiante da respuestas no pertinentes.

5. En una feria de ciencias los estudiantes de un colegio fabricaron un brazo hidráulico, el cual estaba hecho con maderas, pernos y jeringas con agua.

Al ser un mecanismo articulado, ¿qué clase de movimiento o movimientos realiza?

a) Rotación **c)** Rotación y traslación

b) Traslación **d)** Simetría



©Shutterstock

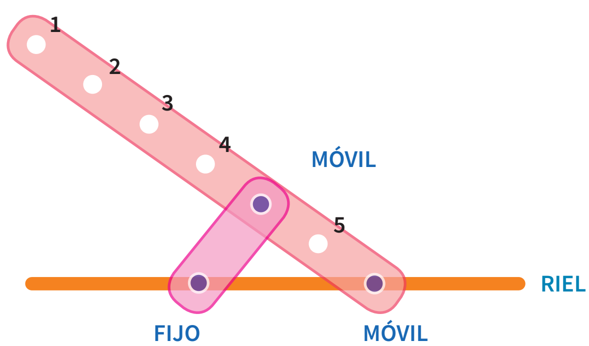
6. Un mecanismo similar que tienen los telares es el que se presenta en la figura. Si se coloca un lápiz en el orificio número 1, ¿qué figura describirá?

a) Una semicircunferencia

b) Una parábola

c) Una curva que se aleja y se acerca

d) Una recta



7. Del mecanismo anterior, realiza el gráfico que se obtendría si se colocara un lápiz en el orificio número 5.

Respuesta adecuada
El estudiante escoge el modelo para formar por combinación de transformaciones y dibuja un ovoide.

Respuesta parcial
El estudiante dibuja una circunferencia.

Respuesta inadecuada
El estudiante dibuja una parábola.

8. Del gráfico siguiente se tienen las siguientes afirmaciones:

M: Entre las figuras I y III hay simetría central.

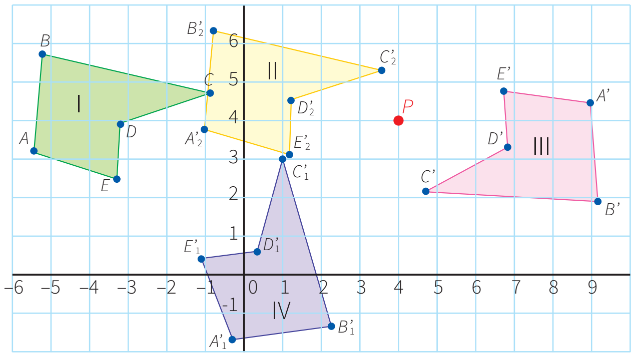
N: Entre las figuras I y II hay traslación.

O: Entre las figuras II y III hay simetría central con centro en P.

P: Entre las figuras I y IV hay simetría axial.

Son falsas:

a) Solo N **b)** N y P **c)** M y O **d)** O y P



9. Se tiene una alfombra rectangular y se aplica homotecia con centro en una de las esquinas y la razón de la homotecia $k = \frac{1}{6}$. Se puede decir que:

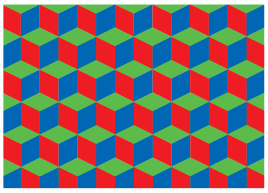
a) El área disminuye a $\frac{1}{3}$ del original.

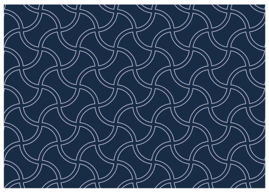
b) El área disminuye a $\frac{1}{18}$ del original.

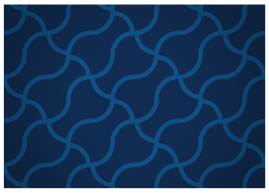
c) El área disminuye a $\frac{1}{36}$ del original.

d) El área disminuye a $\frac{1}{72}$ del original.

10. ¿En cuál de los siguientes teselados existe una simetría central entre sus figuras de colores diferentes?


I


II


III


IV

Respuesta adecuada
El estudiante es capaz de reconocer las transformaciones geométricas y diferenciar una de otra.
Por ejemplo:
Reconoce que en la figura I hay traslación; en la figura II, una traslación y rotación; en la figura III, rotación y traslación; y en la figura IV, traslación, rotación 180° y simetría central.

Respuesta parcial
El estudiante reconoce algunas transformaciones, pero no la que le solicitan.

Respuesta inadecuada
El estudiante no reconoce ninguna transformación geométrica.

CARTA DEMOCRÁTICA INTERAMERICANA

I

La democracia y el sistema interamericano

Artículo 1

Los pueblos de América tienen derecho a la democracia y sus gobiernos la obligación de promoverla y defenderla.

La democracia es esencial para el desarrollo social, político y económico de los pueblos de las Américas.

Artículo 2

El ejercicio efectivo de la democracia representativa es la base delestado de derecho y los regímenes constitucionales de los Estados Miembros de la Organización de los Estados Americanos. La democracia representativa se refuerza y profundiza con la participación permanente, ética y responsable de la ciudadanía en un marco de legalidad conforme al respectivo orden constitucional.

Artículo 3

Son elementos esenciales de la democracia representativa, entre otros, el respeto a los derechos humanos y las libertades fundamentales; el acceso al poder y su ejercicio con sujeción al estado de derecho; la celebración de elecciones periódicas, libres, justas y basadas en el sufragio universal y secreto como expresión de la soberanía del pueblo; el régimen plural de partidos y organizaciones políticas; y la separación e independencia de los poderes públicos.

Artículo 4

Son componentes fundamentales del ejercicio de la democracia la transparencia de las actividades gubernamentales, la probidad, la responsabilidad de los gobiernos en la gestión pública, el respeto por los derechos sociales y la libertad de expresión y de prensa.

La subordinación constitucional de todas las instituciones del Estado a la autoridad civil legalmente constituida y el respeto al estado de derecho de todas las entidades y sectores de la sociedad son igualmente fundamentales para la democracia.

Artículo 5

El fortalecimiento de los partidos y de otras organizaciones políticas es prioritario para la democracia. Se deberá prestar atención especial a la problemática derivada de los altos costos de las campañas electorales y al establecimiento de un régimen equilibrado y transparente de financiación de sus actividades.

Artículo 6

La participación de la ciudadanía en las decisiones relativas a su propio desarrollo es un derecho y una responsabilidad. Es también una condición necesaria para el pleno y efectivo ejercicio de la democracia. Promover y fomentar diversas formas de participación fortalece la democracia.

II

La democracia y los derechos humanos

Artículo 7

La democracia es indispensable para el ejercicio efectivo de las libertades fundamentales y los derechos humanos, en su carácter universal, indivisible e interdependiente, consagrados en las respectivas constituciones de los Estados y en los instrumentos interamericanos e internacionales de derechos humanos.

Artículo 8

Cualquier persona o grupo de personas que consideren que sus derechos humanos han sido violados pueden interponer denuncias o peticiones ante el sistema interamericano de promoción y protección de los derechos humanos conforme a los procedimientos establecidos en el mismo.

Los Estados Miembros reafirman su intención de fortalecer el sistema interamericano de protección de los derechos humanos para la consolidación de la democracia en el Hemisferio.

Artículo 9

La eliminación de toda forma de discriminación, especialmente la discriminación de género, étnica y racial, y de las diversas formas de intolerancia, así como la promoción y protección de los derechos humanos de los pueblos indígenas y los migrantes y el respeto a la diversidad étnica, cultural y religiosa en las Américas, contribuyen al fortalecimiento de la democracia y la participación ciudadana.

Artículo 10

La promoción y el fortalecimiento de la democracia requieren el ejercicio pleno y eficaz de los derechos de los trabajadores y la aplicación de normas laborales básicas, tal como están consagradas en la Declaración de la Organización Internacional del Trabajo (OIT) relativa a los Principios y Derechos Fundamentales en el Trabajo y su Seguimiento, adoptada en 1998, así como en otras convenciones básicas afines de la OIT. La democracia se fortalece con el mejoramiento de las condiciones laborales y la calidad de vida de los trabajadores del Hemisferio.

III

Democracia, desarrollo integral y combate a la pobreza

Artículo 11

La democracia y el desarrollo económico y social son interdependientes y se refuerzan mutuamente.

Artículo 12

La pobreza, el analfabetismo y los bajos niveles de desarrollo humano son factores que inciden negativamente en la consolidación de la democracia. Los Estados Miembros de la OEA se comprometen a adoptar y ejecutar todas las acciones necesarias para la creación de empleo productivo, la reducción de la pobreza y la erradicación de la pobreza extrema, teniendo en cuenta las diferentes realidades y condiciones económicas de los países del Hemisferio. Este compromiso común frente a los problemas del desarrollo y la pobreza también destaca la importancia de mantener los equilibrios macroeconómicos y el imperativo de fortalecer la cohesión social y la democracia.

Artículo 13

La promoción y observancia de los derechos económicos, sociales y culturales son consustanciales al desarrollo integral, al crecimiento económico con equidad y a la consolidación de la democracia en los Estados del Hemisferio.

Artículo 14

Los Estados Miembros acuerdan examinar periódicamente las acciones adoptadas y ejecutadas por la Organización encaminadas a fomentar el diálogo, la cooperación para el desarrollo integral y el combate a la pobreza en el Hemisferio, y tomar las medidas oportunas para promover estos objetivos.

Artículo 15

El ejercicio de la democracia facilita la preservación y el manejo adecuado del medio ambiente. Es esencial que los Estados del Hemisferio implementen políticas y estrategias de protección del medio ambiente, respetando los diversos tratados y convenciones, para lograr un desarrollo sostenible en beneficio de las futuras generaciones.

Artículo 16

La educación es clave para fortalecer las instituciones democráticas, promover el desarrollo del potencial humano y el alivio de la pobreza y fomentar un mayor entendimiento entre los pueblos. Para lograr estas metas, es esencial que una educación de calidad esté al alcance de todos, incluyendo a las niñas y las mujeres, los habitantes de las zonas rurales y las personas que pertenecen a las minorías.

IV

Fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática

Artículo 17

Cuando el gobierno de un Estado Miembro considere que está en riesgo su proceso político institucional democrático o su legítimo ejercicio del poder, podrá recurrir al Secretario General o al Consejo Permanente a fin de solicitar asistencia para el fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática.

Artículo 18

Cuando en un Estado Miembro se produzcan situaciones que pudieran afectar el desarrollo del proceso político institucional democrático o el legítimo ejercicio del poder, el Secretario General o el Consejo Permanente podrá, con el consentimiento previo del gobierno afectado, disponer visitas y otras gestiones con la finalidad de hacer un análisis de la situación. El Secretario General elevará un informe al Consejo Permanente, y éste realizará una apreciación colectiva de la situación y, en caso necesario, podrá adoptar decisiones dirigidas a la preservación de la institucionalidad democrática y su fortalecimiento.

Artículo 19

Basado en los principios de la Carta de la OEA y con sujeción a sus normas, y en concordancia con la cláusula democrática contenida en la Declaración de la ciudad de Quebec, la ruptura del orden democrático o una alteración del orden constitucional que afecte gravemente el orden democrático en un Estado Miembro constituye, mientras persista, un obstáculo insuperable para la participación de su gobierno en las sesiones de la Asamblea General, de la Reunión de Consulta, de los Consejos de la Organización y de las conferencias especializadas, de las comisiones, grupos de trabajo y demás órganos de la Organización.

Artículo 20

En caso de que en un Estado Miembro se produzca una alteración del orden constitucional que afecte gravemente su orden democrático, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá solicitar la convocatoria inmediata del Consejo Permanente para realizar una apreciación colectiva de la situación y adoptar las decisiones que estime conveniente.

El Consejo Permanente, según la situación, podrá disponer la realización de las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

Si las gestiones diplomáticas resultaren infructuosas o si la urgencia del caso lo aconsejare, el Consejo Permanente convocará de inmediato un período extraordinario de sesiones de la Asamblea General para que ésta adopte las decisiones que estime apropiadas, incluyendo gestiones diplomáticas, conforme a la Carta de la Organización, el derecho internacional y las disposiciones de la presente Carta Democrática.

Durante el proceso se realizarán las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

Artículo 21

Cuando la Asamblea General, convocada a un período extraordinario de sesiones, constate que se ha producido la ruptura del orden democrático en un Estado Miembro y que las gestiones diplomáticas han sido infructuosas, conforme a la Carta de la OEA tomará la decisión de suspender a dicho Estado Miembro del ejercicio de su derecho de participación en la OEA con el voto afirmativo de los dos tercios de los Estados Miembros. La suspensión entrará en vigor de inmediato.

El Estado Miembro que hubiera sido objeto de suspensión deberá continuar observando el cumplimiento de sus obligaciones como miembro de la Organización, en particular en materia de derechos humanos.

Adoptada la decisión de suspender a un gobierno, la Organización mantendrá sus gestiones diplomáticas para el restablecimiento de la democracia en el Estado Miembro afectado.

Artículo 22

Una vez superada la situación que motivó la suspensión, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá proponer a la Asamblea General el levantamiento de la suspensión. Esta decisión se adoptará por el voto de los dos tercios de los Estados Miembros, de acuerdo con la Carta de la OEA.

V

La democracia y las misiones de observación electoral

Artículo 23

Los Estados Miembros son los responsables de organizar, llevar a cabo y garantizar procesos electorales libres y justos.

Los Estados Miembros, en ejercicio de su soberanía, podrán solicitar a la OEA asesoramiento o asistencia para el fortalecimiento y desarrollo de sus instituciones y procesos electorales, incluido el envío de misiones preliminares para ese propósito.

Artículo 24

Las misiones de observación electoral se llevarán a cabo por solicitud del Estado Miembro interesado. Con tal finalidad, el gobierno de dicho Estado y el Secretario General celebrarán un convenio que determine el alcance y la cobertura de la misión de observación electoral de que se trate. El Estado Miembro deberá garantizar las condiciones de seguridad, libre acceso a la información y amplia cooperación con la misión de observación electoral.

Las misiones de observación electoral se realizarán de conformidad con los principios y normas de la OEA. La Organización deberá asegurar la eficacia e independencia de estas misiones, para lo cual se las dotará de los recursos necesarios. Las mismas se realizarán de forma objetiva, imparcial y transparente, y con la capacidad técnica apropiada.

Las misiones de observación electoral presentarán oportunamente al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, los informes sobre sus actividades.

Artículo 25

Las misiones de observación electoral deberán informar al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, si no existiesen las condiciones necesarias para la realización de elecciones libres y justas.

La OEA podrá enviar, con el acuerdo del Estado interesado, misiones especiales a fin de contribuir a crear o mejorar dichas condiciones.

VI

Promoción de la cultura democrática

Artículo 26

La OEA continuará desarrollando programas y actividades dirigidos a promover los principios y prácticas democráticas y fortalecer la cultura democrática en el Hemisferio, considerando que la democracia es un sistema de vida fundado en la libertad y el mejoramiento económico, social y cultural de los pueblos. La OEA mantendrá consultas y cooperación continua con los Estados Miembros, tomando en cuenta los aportes de organizaciones de la sociedad civil que trabajen en esos ámbitos.

Artículo 27

Los programas y actividades se dirigirán a promover la gobernabilidad, la buena gestión, los valores democráticos y el fortalecimiento de la institucionalidad política y de las organizaciones de la sociedad civil. Se prestará atención especial al desarrollo de programas y actividades para la educación de la niñez y la juventud como forma de asegurar la permanencia de los valores democráticos, incluidas la libertad y la justicia social.

Artículo 28

Los Estados promoverán la plena e igualitaria participación de la mujer en las estructuras políticas de sus respectivos países como elemento fundamental para la promoción y ejercicio de la cultura democrática.