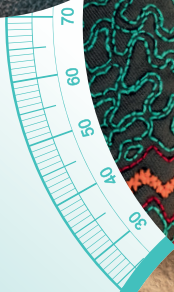
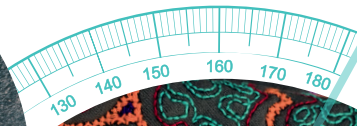
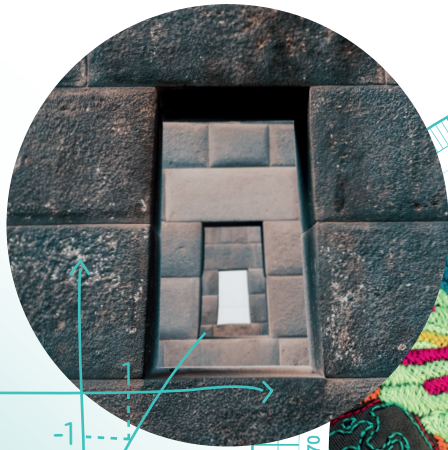
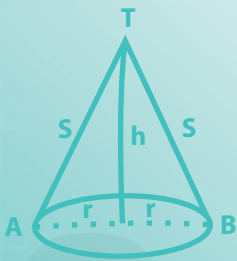


# Fichas de MATEMÁTICA



$$f^{-1}(x) = x+1$$



# 2



# La ciudadana y el ciudadano que queremos

Se **reconoce** como persona valiosa y se identifica con su cultura en diferentes contextos.

**Desarrolla** procesos autónomos de aprendizaje.

**Gestiona** proyectos de manera ética.

**Interpreta** la realidad y toma decisiones con conocimientos matemáticos.

**Propicia** la vida en democracia comprendiendo los procesos históricos y sociales.

**Indaga** y comprende el mundo natural y artificial utilizando conocimientos científicos en diálogo con saberes locales.

## Perfil de egreso

Se **comunica** en su lengua materna, en castellano como segunda lengua y en inglés como lengua extranjera.

**Aprovecha** responsablemente las tecnologías.

**Comprende** y aprecia la dimensión espiritual y religiosa.

**Aprecia** manifestaciones artístico-culturales y crea proyectos de arte.

**Practica** una vida activa y saludable.

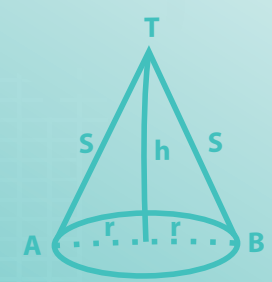
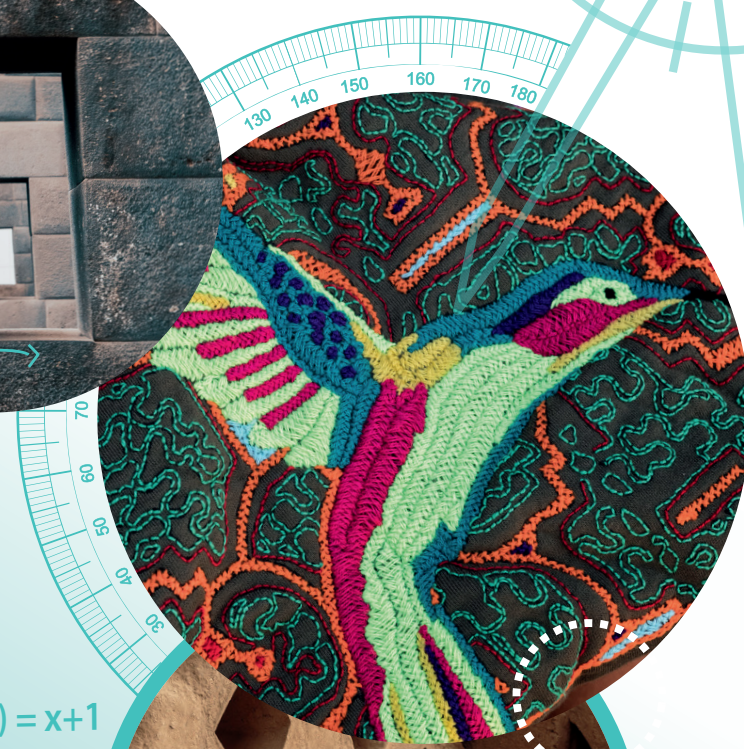
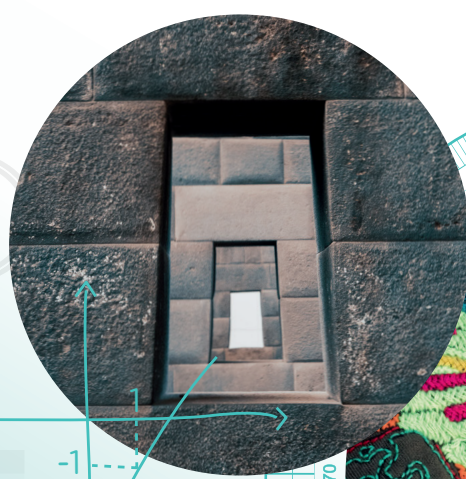


$\pi r^2$

01001010110100 01001010110100

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

# Fichas de MATEMÁTICA



$f^{-1}(x) = x+1$



2

$2x^2 = 4$

$(270, 0)$



MINISTERIO DE EDUCACIÓN

## Fichas de Matemática 2

Este material educativo, *Fichas de Matemática 2* para estudiantes de segundo grado de Educación Secundaria, ha sido elaborado por la Dirección de Educación Secundaria para promover el desarrollo de las competencias “Resuelve problemas de cantidad”, “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”, “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización” y “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” propuestas en el Currículo Nacional de Educación Básica.

### Edición

© Ministerio de Educación  
Calle Del Comercio N.º 193, San Borja  
Lima 15021, Perú  
Teléfono: 615-5800  
www.minedu.gob.pe

**Primera edición:** setiembre de 2017

**Segunda edición:** junio de 2019

**Primera reimpresión:** agosto de 2020

**Segunda reimpresión:** diciembre de 2020

**Tercera reimpresión:** agosto de 2021

**Tercera edición:** noviembre de 2022

**Cuarta edición:** octubre de 2023

### Elaboración de contenidos

Larisa Mansilla Fernández  
Olber Muñoz Solís  
Juan Carlos Chávez Espino  
Hugo Luis Támara Salazar  
Hubner Luque Cristóbal Jave  
Enrique García Manyari  
Marilú Yésica Quispe Amar

### Tiraje

537 344 ejemplares

### Impresión

Se terminó de imprimir en noviembre de 2023, en los talleres gráficos de Quad/ Graphics Perú S. R. L., sito en Av. Los Frutales 344 Urb. Los Artesanos, Ate, Lima - Perú.

RUC N.º 20371828851

### Especialista en edición

Oscar Emiliano Palomino Flores

Todos los derechos reservados. Prohibida la reproducción de este material educativo por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso del Ministerio de Educación.

### Revisión pedagógica

Larisa Mansilla Fernández

### Diseño y diagramación

Elisa del Rocío Espinoza Cerdán  
Daniel Zavala Agapito

Debido a la naturaleza dinámica de internet, las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que se hace referencia en este material educativo pueden tener modificaciones o desaparecer.

### Corrección de estilo

Sofía Yolanda Rodríguez Barrios  
Carlos Alberto Zavala Félix  
Marco Antonio Vigo Esqueche

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N.º 2023-07499



Impreso en el Perú / Printed in Peru

En este material se utilizan términos como “el docente”, “el estudiante”, “el profesor” y sus respectivos plurales, así como otras palabras equivalentes en el contexto educativo, para referirse a hombres y mujeres. Esta opción considera la diversidad y respeta el lenguaje inclusivo, y se emplea para promover una lectura fluida y facilitar la comprensión del texto.



## PRESENTACIÓN

### Estimado estudiante:

Nos complace poner en tus manos el material educativo **Fichas de Matemática 2**, que estamos seguros te ayudará a descubrir la presencia de la matemática en la vida cotidiana y a utilizarla de manera adecuada y creativa en la resolución de problemas vinculados a la realidad.

En su estructura, te proponemos algunos ejemplos de estrategias heurísticas para que las puedas emplear en cada una de las fichas, las mismas que se encuentran organizadas en tres secciones: *Construimos nuestros aprendizajes*, *Comprobamos nuestros aprendizajes* y *Evaluamos nuestros aprendizajes*.

En la primera sección, *Construimos nuestros aprendizajes*, te presentamos una situación relacionada a la vida cotidiana, que será abordada a través de interrogantes que pretenden movilizar tus capacidades y conocimientos, lo cual te ayudará a comprender el problema, diseñar o seleccionar una estrategia o plan, ejecutar la estrategia y reflexionar sobre lo desarrollado. En esta y las demás secciones vas a contar con información, datos, conocimientos, entre otros, que te ayudarán a gestionar tus aprendizajes de manera autónoma.

En la segunda sección, *Comprobamos nuestros aprendizajes*, te planteamos tres situaciones de contexto, en cuyo desarrollo podrás explicar el proceso de resolución, identificando las estrategias y describiendo los procedimientos utilizados. Este análisis te permitirá plantear otros caminos de resolución, así como identificar errores, aprender de estos y realizar tu propia corrección.

En la tercera sección, *Evaluamos nuestros aprendizajes*, te presentamos situaciones de diverso grado de complejidad en contextos variados y apoyados en gráficos. Al desarrollar las actividades que contienen, te darás cuenta de tu progreso teniendo en cuenta criterios de evaluación conocidos de antemano por ti.

Finalmente, puedes desglosar las fichas para desarrollarlas y organizarlas en tu portafolio, de manera que tu docente te brinde retroalimentación u orientación para que puedas seguir mejorando.

Esperamos que con esta experiencia sientas que hacer matemática es un reto posible de alcanzar. Disfrútalo.

Ministerio de Educación



# CONTENIDO

## • Conociendo algunas estrategias

5

### ¿Cómo ordenamos y comparamos las fracciones?

#### Ficha 1

Resuelve problemas de cantidad.

- Construimos nuestros aprendizajes 11
- Comprobamos nuestros aprendizajes 15
- Evaluamos nuestros aprendizajes 19

### ¿Cómo aplicamos los porcentajes en la vida cotidiana?

#### Ficha 5

Resuelve problemas de cantidad.

- Construimos nuestros aprendizajes 55
- Comprobamos nuestros aprendizajes 58
- Evaluamos nuestros aprendizajes 63

### ¿Cómo aplicamos las funciones en la vida cotidiana?

#### Ficha 2

Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

- Construimos nuestros aprendizajes 21
- Comprobamos nuestros aprendizajes 25
- Evaluamos nuestros aprendizajes 29

### ¿Cómo utilizamos progresiones aritméticas para resolver situaciones de la vida diaria?

#### Ficha 6

Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

- Construimos nuestros aprendizajes 65
- Comprobamos nuestros aprendizajes 69
- Evaluamos nuestros aprendizajes 73

### ¿Cómo realizamos movimientos en el plano cartesiano?

#### Ficha 3

Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

- Construimos nuestros aprendizajes 31
- Comprobamos nuestros aprendizajes 34
- Evaluamos nuestros aprendizajes 39

### ¿Cómo nos ubicamos con ayuda de un mapa?

#### Ficha 7

Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

- Construimos nuestros aprendizajes 75
- Comprobamos nuestros aprendizajes 78
- Evaluamos nuestros aprendizajes 82

### ¿Cómo organizamos la información para tomar una decisión?

#### Ficha 4

Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.

- Construimos nuestros aprendizajes 43
- Comprobamos nuestros aprendizajes 46
- Evaluamos nuestros aprendizajes 51

### ¿Cómo tomamos decisiones a partir de la ocurrencia de sucesos?

#### Ficha 8

Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.

- Construimos nuestros aprendizajes 85
- Comprobamos nuestros aprendizajes 89
- Evaluamos nuestros aprendizajes 93

## CONOCIENDO ALGUNAS ESTRATEGIAS

Un buen resolutor de problemas debe llegar a desarrollar la capacidad de resolver un problema con diversos métodos; además, necesita estar en capacidad de combinar estrategias creativamente. En cada etapa de desarrollo de la solución, debemos definir qué estrategia se utilizará en la siguiente fase.

### 1. Estrategias de comprensión

#### Lectura analítica

Leer analíticamente un texto es dividirlo en unidades que proporcionen algún tipo de información y, luego, establecer cómo estas partes se interrelacionan y muestran el panorama de lo que se quiere decir. Al leer un problema de manera analítica, uno puede hacerse estas preguntas: ¿quiénes participan en la historia?, ¿qué es lo que no varía a lo largo de la historia?, ¿cuáles son las condiciones del texto?, ¿cuáles son los datos que nos proporciona?, ¿qué datos son relevantes para resolver el problema?, ¿qué debemos encontrar?, ¿qué condiciones se imponen a lo que buscamos?, entre otras interrogantes que ayudarán a que cada estudiante se familiarice con el problema y le pierda temor a resolverlo.

La lectura analítica ayuda mucho en la comprensión lectora del problema, y aporta al proceso de solución. Leer analíticamente no es identificar las palabras claves ni buscar tips para encontrar la variable (estos son procesos mecánicos que no ayudan a comprender cabalmente un problema).

En la vida real, los problemas matemáticos pueden no contener esas palabras claves que aparecen en problemas diseñados para libros de texto, por lo que el estudiante enfocará erradamente un problema si hace uso de este mecanismo.

La lectura analítica es importante en la comprensión de problemas, pues estos textos contienen elementos matemáticos como números, diagramas, relaciones dentro de una historia o un contexto real complejo, por lo que no es lo mismo que leer un cuento o un ensayo. De hecho, hay personas que comprenden perfectamente textos humanísticos, pero no aquellos que contienen elementos matemáticos.

#### Parafrasear

Parafrasear es decir algo de otro modo para clarificar y comprender un texto. Explicar un problema con nuestras propias palabras ayuda mucho en el proceso de comprensión. Se debe decir que parafrasear no implica aprenderse de memoria un texto y repetirlo; es señalar lo más importante de una historia y expresarlo con palabras, evitando en lo posible particularidades como números, fechas, nombres, locaciones, etc.

Veamos un ejemplo:

Problema	Parafraseo
Jaime fue el organizador de la fiesta de fin de año de su colegio. Él proyectó ganar S/4800, para lo cual repartió 200 tarjetas; pero, lamentablemente, solo se vendieron 130, lo que le causó una pérdida de S/150. ¿Cuánto invirtió en la fiesta?	Una persona organiza una fiesta. Para ganar necesita vender una cantidad de tarjetas; pero vende menos y pierde.  Nos piden saber cuánto invirtió en la fiesta.

Se sugiere que se realice una lectura analítica de los problemas, que el estudiante produzca sus propios esquemas de comprensión y realice al menos dos parafraseos por cada problema presentado.

#### Hacer esquemas

La capacidad de representar una situación compleja mediante esquemas es algo que se va aprendiendo desde los primeros años de escolaridad y continúa en proceso de construcción toda la vida. Hacer e interpretar esquemas son algunas de las capacidades más necesarias en nuestra vida laboral adulta. En diversas situaciones cotidianas se requiere de la esquematización de los sistemas, las situaciones y los procesos, con el fin de comprenderlos mejor. Un esquema apunta a encontrar una estrategia de solución; no existe una relación directa entre hacer un esquema y dar solución a un problema, pero ayuda mucho en este proceso.

## 2. Estrategias de resolución

Una estrategia importante en la búsqueda de soluciones es representar el problema mediante algún organizador visual. Aquí presentamos algunos organizadores de información que se utilizan frecuentemente en el proceso de resolver problemas matemáticos.

### Diagramas de tiras

Se utilizan mayormente cuando la cantidad que interviene en el problema varía en el tiempo o es dividida en partes que se relacionan entre sí.

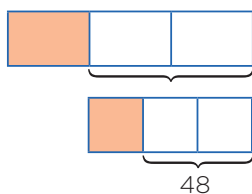
#### Ejemplo:

La tercera parte de las entradas para el estreno de una película se vendieron días antes de la función, y  $\frac{1}{3}$  del resto se vendió el día del estreno. Finalmente, quedaron 48 entradas sin vender. ¿Cuál era el número total de entradas previsto para la función de estreno?

#### Solución:

Cantidad: Número total de entradas.

Elabora un diagrama de tiras.



### Diagramas tabulares (tablas)

Se emplean cuando se brinda información sobre características que relacionan dos grupos. También en problemas sobre edades o de proporcionalidad, en los que se debe buscar algún patrón o regla de formación.

#### Ejemplo:

Dos amigos tienen lápices, borradores y tajadores en sus cartucheras. Hay 8 borradores en total. Mónica tiene el doble de lápices que Felipe, quien tiene 5 tajadores más que lápices. Mónica tiene tantos tajadores como lápices posee Felipe. Mónica tiene 18 útiles y ningún borrador. ¿Cuántos lápices, tajadores y borradores tiene cada uno?

#### Solución:

Grupo 1: Mónica, Felipe.

Grupo 2: Lápices, borradores, tajadores.

	Lápices	Borradores	Tajadores	TOTAL
Mónica	$2x$	0	$x$	18
Felipe	$x$	8	$x + 5$	
TOTAL		8		

### Diagramas analógicos

Se suelen utilizar en problemas geométricos. Son dibujos que representan la realidad de manera similar, pero esquemática, sin considerar los elementos irrelevantes para el problema.

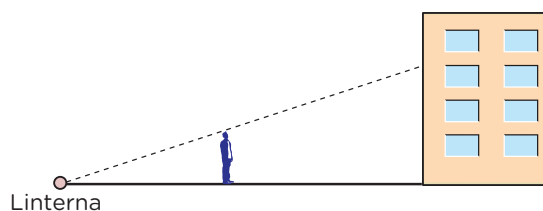
Mediante esta representación es posible visualizar las relaciones entre los datos y las incógnitas.

#### Ejemplo:

Un hombre de 1,8 m de estatura camina hacia un edificio a razón de 1,5 m/s. Si hay una linterna sobre el suelo a 15 m del edificio, ¿cuánto mide la sombra del hombre sobre el edificio cuando se encuentra a 9 m de este?

#### Resolución:

Hagamos un diagrama que represente la situación narrada.



### Diagramas de flujo

Se emplean cuando una cantidad varía a lo largo de la historia o si tenemos la situación final de esta cantidad. También cuando se dan secuencias de pasos para encontrar objetos matemáticos, entre otras aplicaciones.

#### Ejemplo:

Un número se duplica, luego se le resta 8 y después se invierten las cifras de este número. Finalmente, se divide por 6 y se obtiene 8. ¿Cuál era el número?

#### Resolución:

Haremos un diagrama que indique las fases por las que pasó el número.





### Diagramas conjuntistas

Se suele recurrir a estos cuando se trata de información acerca de dos o más grupos cuyos elementos pueden pertenecer a más de un conjunto. También cuando se deben realizar clasificaciones. Los más conocidos son los diagramas de Venn y los de Carroll.

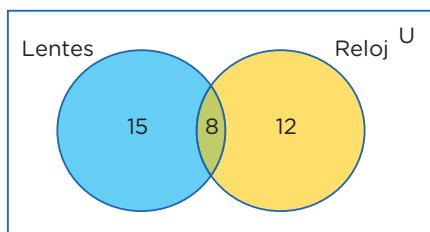
#### Ejemplo:

De los 35 estudiantes de un aula, 23 usan lentes y 20, reloj. ¿Cuántos usan ambas cosas?

#### Resolución:

Grupo 1: Estudiantes que usan lentes.

Grupo 2: Estudiantes que usan reloj.



### Diagramas cartesianos

Son de gran utilidad cuando se requiere representar funciones o si tenemos pares ordenados o relaciones entre dos variables.

#### Ejemplo:

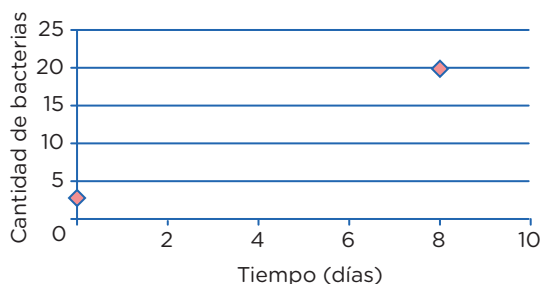
El crecimiento de un grupo de bacterias se da con el paso de los días de manera constante. Al inicio, había 3 bacterias, y después de 8 días llegan a 20. ¿Cuántos días transcurrirán desde el inicio para que la colonia tenga 400 bacterias?

#### Resolución:

Cantidad:

Organizaremos los datos en un gráfico cartesiano.

Pares ordenados: (0; 3) (8; 20)



### Diagramas lineales

Se usan cuando se cuenta con información acerca de una característica de un solo grupo. Generalmente se emplean para ordenar los elementos del grupo con respecto a esa característica.

#### Ejemplo:

Si tanto Roberto como Alfredo están más alegres que Tomás, mientras que Alberto se encuentra menos alegre que Roberto, pero más alegre que Alfredo, ¿quién está menos alegre?

#### Resolución:

Tomás, Ana, Lidia, Roberto.

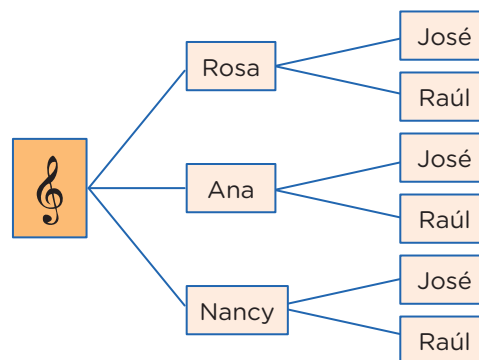


### Diagrama de árbol

Se suelen utilizar en conteos de casos posibles o para hacer listas sistemáticas. Es la representación gráfica de los principios de adición y multiplicación.

#### Ejemplo:

Un productor de cumbia quiere armar un dúo mixto (varón y mujer). Puede elegir entre 3 cantantes mujeres y 2 cantantes varones. ¿Cuántos dúos mixtos diferentes puede formar?



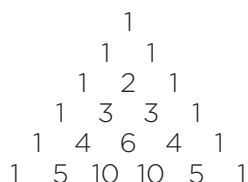
## 3. Otras estrategias

### Busca patrones

En algunos problemas es necesario experimentar con varios casos con el fin de encontrar pautas o regularidades que después se podrán emplear para llegar a la solución.

#### Ejemplo:

El arreglo mostrado se conoce como el triángulo de Pascal.



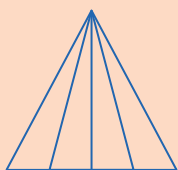
Escribe las tres filas siguientes de este arreglo. Como observas, cada fila empieza por uno. ¿Qué número sigue al 1 en la fila 75?, ¿cuál es la suma de los números que ocupan la fila número 20?, ¿puedes encontrar un patrón en las diagonales del triángulo de Pascal?

### Haz una lista sistemática

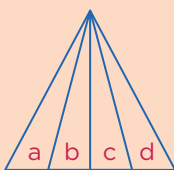
En los casos en que se requiere la enumeración de objetos matemáticos, es conveniente realizar un conteo o listado organizado, con el fin de no dejar de lado ninguna posibilidad. Esta estrategia es muy útil al buscar soluciones en una ecuación polinómica, para encontrar espacios muestrales o resolver problemas de permutaciones o combinaciones.

#### Ejemplo:

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Pongamos una etiqueta a cada uno de los cuatro triángulos en que se ha dividido el triángulo mayor.



#### Resolución:

- Contemos ahora los triángulos identificándolos por el número de letras:  
 Triángulos con una letra: a-b-c-d  
 Triángulos con dos letras: ab-bc-cd  
 Triángulos con tres letras: abc-bcd  
 Triángulos con cuatro letras: abcd
- En total tenemos:  $4 + 3 + 2 + 1 = 10$  triángulos.

#### Generaliza

En algunos problemas puede ser muy útil simbolizar las expresiones o averiguar si lo que piden se refiere a un caso particular de alguna propiedad general; a esto se conoce

como *la paradoja del inventor*. A veces, es conveniente investigar más de lo que piden.

#### Ejemplo:

Halla el valor de  $(234\,756\,474)^2 - (234\,756\,473)^2$ .

#### Solución:

Se observa que elevar al cuadrado cada número y luego realizar la resta sería demasiado laborioso, así que se trata de ver en la estructura del problema alguna particularidad. Lo primero que se observa es que consiste en una diferencia de cuadrados, lo que nos hace recordar las fórmulas algebraicas pertinentes. Además, se aprecia que los números son consecutivos.

- Al generalizar el problema, se observa que se solicita:

$$(n + 1)^2 - n^2, \text{ cuando } n \text{ vale } 234\,756\,473$$

- Factorizando por diferencia de cuadrados, se tiene:

$$(n + 1 + n)(n + 1 - n) = (n + 1) + n$$

- Luego, podemos afirmar que, para cualquier  $n$  entero positivo, se cumple:

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1) + n = 2n + 1$$

- Ahora el problema se ha simplificado bastante; para hallar la respuesta, solo basta duplicar el número dado y aumentarle 1.

Entonces:

$$(234\,756\,474)^2 - (234\,756\,473)^2 = 469\,512\,947$$

#### Particulariza

Conviene siempre utilizar casos particulares para familiarizarse con el problema; de este modo, es posible observar algún método que guíe hacia la solución de un problema genérico.

#### Ejemplo:

En una tienda de remates te ofrecen un descuento del 12 %, pero, al mismo tiempo, debes pagar el impuesto general a las ventas (18 %). ¿Qué preferirías que calculasen primero, el descuento o el impuesto?

#### Solución:

- Particularicemos para algunos casos: si el artículo vale  $S/100$  y elijo primero el descuento, termino pagando  $S/106$ . Pero si elijo pagar el impuesto antes, entonces termino pagando la misma cantidad.



- Podemos probar con otros precios y obtener un resultado análogo. Esta experimentación me da pie para inferir que es lo mismo elegir primero el descuento o el impuesto.
- Ahora deberé evaluar mi conjetura.

### Razona lógicamente

El razonamiento lógico es muy importante al resolver problemas, pues gracias a él podemos engarzar los pasos y comprender las secuencias y cadenas de razonamientos que se producen en el desarrollo de su solución. Un ejemplo clásico es el siguiente acertijo.

#### Ejemplo:

José, Jaime, Tito y Rosa son guardias en un museo. Ellos hacen guardia cuatro días a la semana. Dos personas solamente hacen guardia cada día. Nadie hace tres días de guardia seguidos. ¿Cuál de los tres hombres no hace guardia con Rosa?

#### Solución:

Veamos una lista parcial que muestra los días de la semana en los que cada uno hace guardia:

Dom.	Lun.	Mar.	Miér.	Juev.	Vier.	Sáb.
José	Tito	Rosa	José	Jaime	Tito	Rosa
Jaime						

### Empieza por el final

La estrategia de utilizar el pensamiento regresivo se utiliza mayormente en problemas en los cuales tenemos información de una situación final; también para demostrar desigualdades. La combinación de métodos progresivos y regresivos es una potente técnica para demostrar teoremas.

La utilización del razonamiento regresivo nos evitará tener que trabajar con ecuaciones complicadas.

#### Ejemplo:

El nivel del agua de un pozo desciende 3 centímetros por debajo de su mitad en cada hora, hasta quedar vacío luego de 4 horas. ¿Qué profundidad tenía el agua inicialmente?

#### Solución:

- “3 cm debajo de su mitad” se interpreta como  $\div 2, -3$ .
- Esto ocurre en cada hora y se repite 4 veces, ya que todo el suceso ocurre en 4 horas; de modo que al final el nivel es cero (0).
- Las operaciones directas serían así:  
 $x \rightarrow (\div 2, -3, \div 2, -3, \div 2, -3, \div 2, -3) \rightarrow 0$
- Ahora, operando al revés, obtenemos:  $x = 90$

### Plantea una ecuación

Una de las técnicas de modelación por excelencia a nivel elemental es el planteo de ecuaciones. Lo primordial para poder aplicarla con éxito es el entrenamiento que se tenga en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico. Es conveniente ponerse de acuerdo en cuanto a convenciones generales de redacción para no crear ambigüedades.

#### Ejemplo:

Dos velas de la misma longitud se encienden al mismo tiempo. La primera se consume en 4 horas y la segunda, en 3. ¿Cuánto tiempo pasa, después de haberse encendido, hasta que la primera vela tenga el doble de longitud que la segunda?

#### Solución:

- La primera vela se consume en su cuarta parte cada hora.
- La segunda se consume en su tercera parte cada hora.

Tiene que verificarse; por tanto:

$$L - (1/4)Lx = 2 [L - (1/3)Lx]; \text{ simplificando:}$$

$$1 - (1/4)x = 2 - (2/3)x; \text{ de donde } x = 2,4 \text{ horas}$$

- Es decir, pasan 2 horas 24 minutos.

### Establece submetas

Muchas veces, para llegar a la solución de un problema, se deben resolver problemas más pequeños. Es como escalar una gran montaña: se sabe que se debe llegar a alturas menores para conquistar la cima. De igual manera, para resolver un problema original, se necesita de un problema auxiliar que sirva de medio.





### Ejemplo:

Supongamos que la población actual del Perú es de 33 millones de habitantes y la tasa de crecimiento es de un 5 % anual. ¿En cuánto tiempo se duplicará la población?



Fuente: Shutterstock

### Solución:

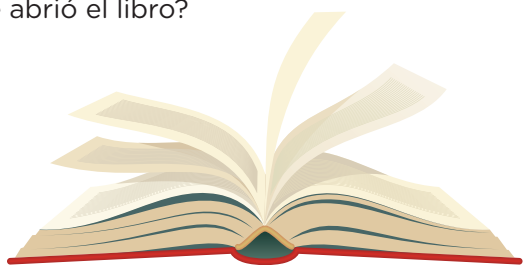
La primera meta es hallar una fórmula que modele el comportamiento de la población y, solo después de formada, se igualará a 66 millones. Si bien aquí la incógnita es el tiempo, se busca en su lugar la relación entre el tiempo y el número de habitantes.

### Utiliza el ensayo y error

Tantear es una estrategia muy útil cuando se hace de forma organizada y evaluando, cada vez, los ensayos que se realizan. En realidad, algunos métodos específicos de solución, como el de regulación o el de aproximaciones sucesivas, se basan en el uso sistemático de numerosos ensayos y sus respectivas correcciones. La idea es que cada rectificación conduzca a un ensayo que se acerque más a la respuesta.

### Ejemplo:

Un libro se abre al azar. El producto de las dos páginas observadas en ese momento es 3192. ¿Cuál es el número de las páginas en las que se abrió el libro?



Fuente: Shutterstock

### Solución:

- Primero se observa que  $50 \times 50 = 2500$ , número que no llega; y que  $60 \times 60 = 3600$ , el cual se pasa. Con esto observamos que los números están en el rango entre 50 y 60.
- $55 \times 56$  no puede ser, pues el producto termina en 0. Se quiere que termine en 2 y que los números sean consecutivos.
- Al probar  $53 \times 54 = 2862$ , el resultado no corresponde.
- Pero, al hacer la prueba con  $56 \times 57 = 3192$ , se observa que cumple con el resultado que plantea el problema.
- Entonces, las páginas que se observaron fueron la 56 y la 57.

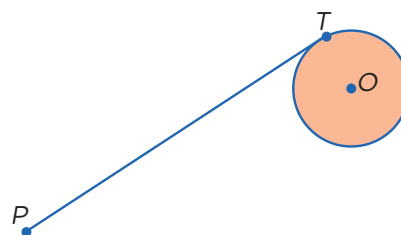
### Supón el problema resuelto

### Ejemplo:

Usando solo regla y compás, construye una tangente a una circunferencia dada, desde un punto exterior a ella.

### Solución:

Para resolver este problema, se supone que se debe hallar la tangente a una circunferencia, trazada desde un punto exterior a ella.



- El punto  $T$  es de tangencia. Entonces, ¿qué relación existe entre la tangente y algún elemento de la circunferencia? ¿Hay algún teorema que los relacione?
- Existe un teorema que nos dice que el radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia.
- Por tanto, si unimos  $O$  con  $T$ , tendremos que  $OT$  es perpendicular a  $PT$ .
- Además, como tenemos tres puntos involucrados,  $P$ ,  $T$  y  $O$ , es posible hacer un triángulo uniendo el punto  $P$  con el punto  $O$ . Se observa que el triángulo es rectángulo.

## ¿Cómo ordenamos y comparamos las fracciones?

### Construimos nuestros aprendizajes



#### Propósito

Representamos con lenguaje numérico nuestra comprensión sobre el orden y la comparación de números racionales en su expresión fraccionaria; empleamos estrategias y procedimientos diversos para realizar operaciones con expresiones fraccionarias y simplificar procesos usando propiedades de los números y las operaciones.



#### Comparamos el diámetro de las brocas

Miguel ayuda a su padre con la venta de productos en su ferretería. En estos días les ha llegado un pedido de brocas, como se muestra en la imagen, e información con las medidas de sus diámetros.

Medidas de los diámetros:

$\frac{9}{16}$  de pulgada

$\frac{3}{16}$  de pulgada

$\frac{7}{16}$  de pulgada

$\frac{5}{16}$  de pulgada

$\frac{11}{16}$  de pulgada

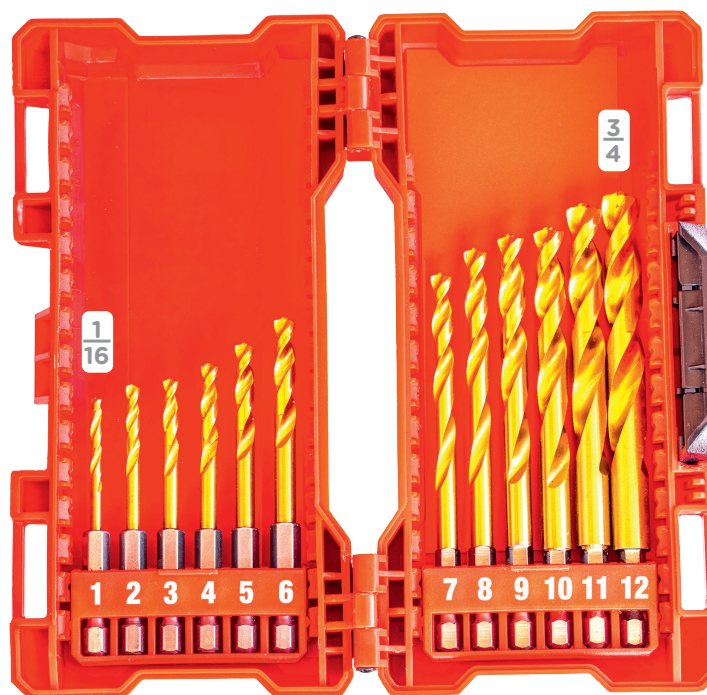
$\frac{1}{4}$  de pulgada

$\frac{3}{8}$  de pulgada

$\frac{1}{2}$  de pulgada

$\frac{5}{8}$  de pulgada

$\frac{1}{8}$  de pulgada



Fuente: Shutterstock

Para ofrecer al público este producto, su papá le ha pedido que rotule cada broca con la medida de su diámetro, puesto que los clientes están más familiarizados con esta medida. Ayuda a Miguel a realizar la actividad encargada por su padre.









## Comprobamos nuestros aprendizajes



### Propósito

Establecemos relaciones entre datos, las transformamos en expresiones numéricas que incluyen operaciones con expresiones fraccionarias y las representamos con gráficos y lenguaje numérico. Asimismo, justificamos con las propiedades de los números racionales y corregimos errores si los hubiera.



### Situación A: Participamos en los juegos interescolares

Una institución educativa cuenta con una delegación de estudiantes que la representará en diversas disciplinas en los Juegos Interescolares de Secundaria. De esta delegación,  $\frac{1}{6}$  pertenece a primer grado,  $\frac{1}{4}$  a segundo grado,  $\frac{3}{18}$  a tercer grado,  $\frac{1}{3}$  a cuarto grado y  $\frac{1}{12}$  a quinto grado.

Pedro, estudiante de segundo grado, se pregunta: ¿a qué grado pertenece la mayor parte de los estudiantes de esta delegación?



Fuente: Denise Santos

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

Ordenamos las fracciones con el fin de determinar a qué grado pertenece la mayor parte de estudiantes. Para ello, encontramos el común denominador de las fracciones; aquí resulta 12.

Luego, multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción por un mismo factor para formar su fracción equivalente de denominador 12. Completa la tabla.

Grado	Delegación que participará	Fracción equivalente
Primero	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{12}$
Segundo	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{12}$
Tercero	$\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{12}$
Cuarto	$\frac{1}{3}$	
Quinto	$\frac{1}{12}$	

Entre las fracciones que tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador:  $\frac{4}{12} > \frac{3}{12} > \frac{2}{12} > \frac{1}{12}$

**Respuesta:** La mayor parte de esta delegación de estudiantes pertenece a cuarto grado.



### Ten en cuenta

Para obtener fracciones equivalentes se multiplican por un mismo factor el numerador y el denominador.

Ejemplo:

Fracciones equivalentes a  $\frac{3}{7}$ .

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{14} = \frac{9}{21} = \frac{12}{28}$$



### ¿Sabías que...?

Para simplificar una fracción, se divide al numerador y al denominador entre sus factores comunes hasta que dichos términos sean primos entre sí.

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Los números 3 y 5 son primos entre sí.



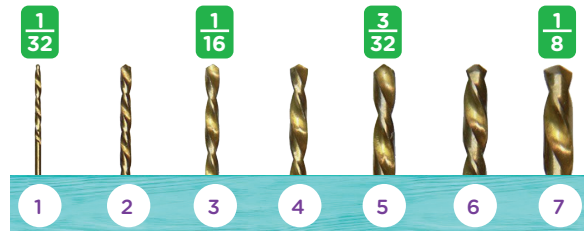




## Aprendemos a partir del error

### Situación C: Medimos el diámetro de las brocas

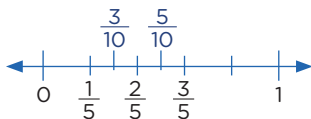
Miguel ordena las brocas colocando etiquetas en la parte superior con la medida de su diámetro en pulgadas. Si las brocas están ordenadas de menor a mayor grosor y, además, algunas tienen etiqueta, excepto la segunda, la cuarta y la sexta, determina el diámetro de estas brocas si son exactamente el promedio de los diámetros de las brocas vecinas.



### Ten en cuenta

Entre dos números racionales existen infinitos números racionales. Esta es la propiedad de densidad.

Ejemplo:



De acuerdo con el gráfico, verifica cada afirmación.

- Entre  $\frac{1}{5}$  y  $\frac{2}{5}$  se ubica  $\frac{3}{10}$ .
- Entre  $\frac{2}{5}$  y  $\frac{3}{5}$  se ubica  $\frac{5}{10}$ .

Realizamos el procedimiento:

$$a. \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{5}}{2} = \frac{\frac{3}{5}}{2} = \frac{3}{10}$$

$$b. \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{5}}{2} = \frac{\frac{5}{5}}{2} = \frac{5}{10}$$

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

### Resolución

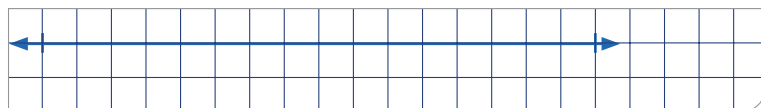
Para determinar el diámetro de la broca 2, debemos hallar un número racional comprendido entre  $\frac{1}{32}$  y  $\frac{1}{16}$ . Para ello, sumamos estas fracciones y el resultado lo dividimos entre 2. Este mismo procedimiento servirá para encontrar los diámetros de las brocas 4 y 6.

Broca 2	Broca 4	Broca 6
Promedio de brocas 1 y 3	Promedio de brocas 3 y 5	Promedio de brocas 5 y 7
$\frac{\frac{1}{32} + \frac{1}{16}}{2} = \frac{1+2}{32}$ $= \frac{3}{32} = \frac{3}{16}$	$\frac{\frac{1}{16} + \frac{3}{32}}{2} = \frac{2+3}{32}$ $= \frac{5}{32} = \frac{5}{16}$	$\frac{\frac{3}{32} + \frac{1}{8}}{2} = \frac{3+4}{32}$ $= \frac{7}{32} = \frac{7}{16}$

**Respuesta:** Las medidas de las brocas 2, 4 y 6 son  $\frac{3}{16}$ ,  $\frac{5}{16}$  y  $\frac{7}{16}$  pulgadas, respectivamente.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

- Ubica en la recta numérica las fracciones que representan los diámetros de las brocas 1, 2 y 3. Verifica si el valor de la broca 2 cumple la condición de la situación.



- ¿Son correctos los valores hallados para las brocas 2, 4 y 6? Si no son correctos, indica el error y las medidas correctas.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



### Recuerda

Al dividir dos fracciones puedes aplicar la regla de medios y extremos.

Ejemplo:

$$\frac{3}{8} \div 2 = \frac{3}{8} \times \frac{2}{1} = \frac{3 \times 2}{8 \times 1} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

## Evaluamos nuestros aprendizajes



### Propósito

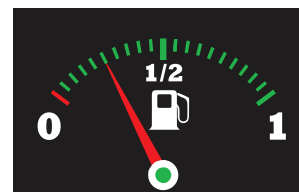
Establecemos relaciones entre datos y las transformamos en expresiones fraccionarias; expresamos nuestra comprensión mediante el uso de lenguaje numérico, así como estrategias y diversos procedimientos. Asimismo, justificamos afirmaciones usando propiedades de los números y las operaciones con expresiones fraccionarias.



Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. Jaime viajó de una ciudad a otra con su familia. Para comenzar el viaje, llenaron totalmente el tanque de gasolina. La gasolina que aún quedaba en el tanque en un tramo del viaje está representada en la escala del panel de control del auto. ¿Qué parte del tanque todavía tiene gasolina? ¿Cuántas partes faltaría echar para llenar el tanque?

a)  $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$       b)  $\frac{3}{14}, \frac{11}{14}$       c)  $\frac{7}{14}, \frac{5}{14}$       d)  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$



2. Se pesa una bolsa de cebollas en dos balanzas defectuosas. Una de ellas registra  $\frac{1}{4}$  kg; la otra registra  $\frac{1}{2}$  kg. Si la cantidad de kilogramos real de la bolsa con cebollas se encuentra entre estos dos valores, ¿cuál de las siguientes medidas podría corresponder a la cantidad de kilogramos real?

a)  $\frac{3}{4}$  kg      b)  $\frac{3}{8}$  kg      c)  $\frac{2}{3}$  kg      d)  $\frac{1}{8}$  kg

3. Laura compró  $2\frac{3}{4}$  kg de arroz y los colocó en bolsas de  $\frac{1}{4}$  kg. ¿Cuántas bolsas obtuvo con esa cantidad de arroz?

a)  $2\frac{1}{2}$  bolsas      b) 3 bolsas      c) 4 bolsas      d) 11 bolsas

4. Un agricultor planta zanahorias en  $\frac{1}{4}$  de su terreno;  $\frac{2}{5}$  lo cultiva con lechugas, y el resto, con tomates. ¿En qué fracción del terreno plantó tomates?

5. La edad de Mirian es  $\frac{3}{5}$  de la edad de Edwin y la de Liliana es  $\frac{6}{5}$  de la edad de Edwin. ¿Cuál de los tres es mayor?

- a) Mirian  
b) Edwin  
c) Liliana  
d) Todos tienen la misma edad.



### Ten en cuenta

Para dividir fracciones, se presentan los siguientes casos:

- Dividir una fracción entre un entero

$$\frac{4}{5} \div 5 = \frac{4}{5} = \frac{4 \times 1}{5 \times 5} = \frac{4}{25}$$

- Dividir un entero entre una fracción

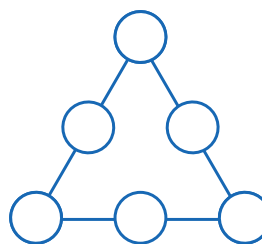
$$12 \div \frac{3}{4} = \frac{12}{\frac{3}{4}} = \frac{12 \times 4}{1 \times 3} = \frac{48}{3} = 16$$



## Recuerda

Para sumar o restar fracciones con diferente denominador (heterogéneas), se buscan fracciones equivalentes a estas, con igual denominador; luego, se suman o restan las fracciones obtenidas.

6. Durante una carrera entre amigos, Rafael recorre  $\frac{2}{5}$  de todo el trayecto; Lucio,  $\frac{3}{4}$  de todo el trayecto, y Mario recorrió  $\frac{3}{6}$  de todo el trayecto. ¿Es correcta la afirmación “Mario recorrió la mayor parte de todo el trayecto”? Justifica tu respuesta.
7. A una reunión asisten igual cantidad de hombres que de mujeres. De todas las mujeres presentes, las  $\frac{2}{5}$  partes usan lentes, y de estas la mitad tiene cabello largo. Si son 4 las mujeres que usan lentes y tienen cabello largo, ¿cuántos hombres hay en la reunión?
- a) 15      b) 18      c) 20      d) 40
8. En cada círculo, coloca una de las siguientes fracciones:  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{5}{6}$ , 1, de tal modo que la suma de las fracciones en cada lado del triángulo sea  $\frac{5}{3}$ .



## Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre datos y las transformé en expresiones numéricas que incluyen operaciones con expresiones fraccionarias.			
Expresé con gráficos y lenguaje numérico el orden y la comparación entre números fraccionarios.			
Empleé estrategias y procedimientos diversos para realizar operaciones con expresiones fraccionarias.			
Justifiqué afirmaciones con propiedades de los números y las operaciones con expresiones fraccionarias.			



## ¿Cómo aplicamos las funciones en la vida cotidiana?

### Construimos nuestros aprendizajes



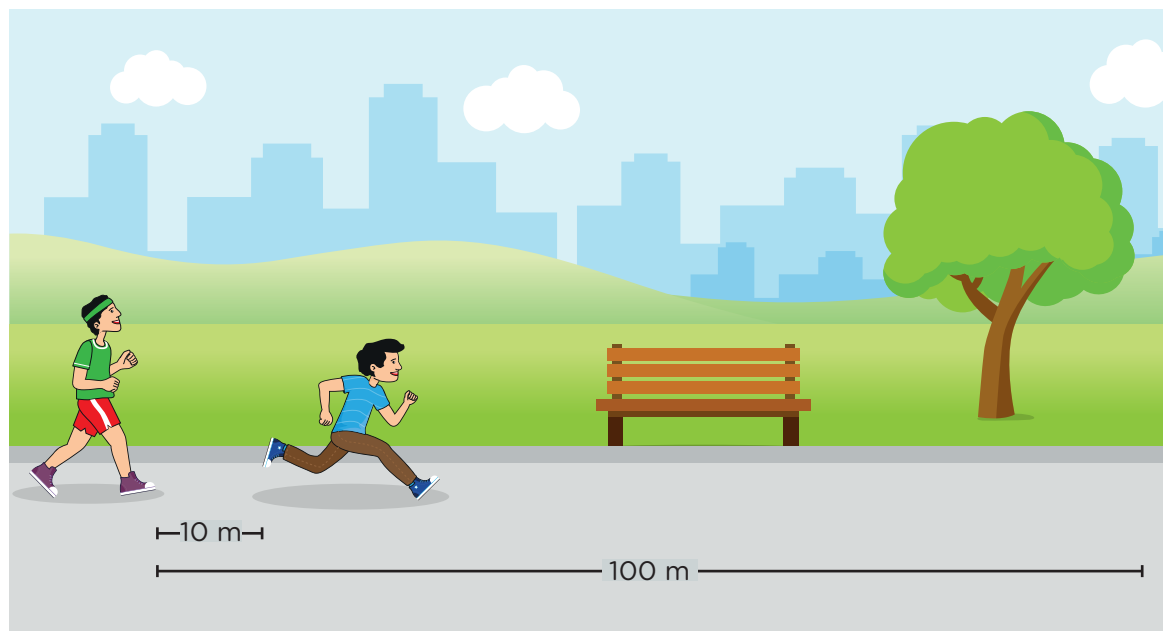
#### Propósito

Establecemos relaciones entre datos y las transformamos en expresiones algebraicas o gráficas que incluyen la función lineal y afín. También empleamos estrategias heurísticas y procedimientos diversos para resolver un problema, y evaluamos el conjunto de valores de una función lineal y afín.



#### Analizamos una carrera entre amigos

Mauricio le propone a su amigo Héctor hacer una carrera de 100 metros. Como Mauricio es atleta, le da a su amigo una ventaja de 10 metros. Se sabe que Héctor recorre 4 metros por cada segundo, y Mauricio, 6 metros en el mismo tiempo; además, la velocidad de cada uno es constante en todo el recorrido.



A partir de lo indicado, responde las siguientes preguntas:

- ¿En cuánto tiempo alcanzará Mauricio a su amigo Héctor?
- ¿Cuál es la expresión matemática que representa la distancia que recorre cada uno de ellos en un determinado tiempo?
- ¿En cuánto tiempo llegará cada uno a la meta?









## Comprobamos nuestros aprendizajes



### Propósito

Representamos nuestra comprensión de la relación de correspondencia de una función lineal mediante lenguaje matemático, gráficas, tablas y símbolos, y evaluamos el conjunto de valores de una función lineal. Asimismo, justificamos con nuestros conocimientos y corregimos errores si los hubiera.



### Situación A: Analizamos el valor de un automóvil

Un automóvil tiene 8 años de antigüedad y su valor actual es S/20 000, pero hace 4 años su valor era S/45 000. Si una empresa importadora considera que el valor del auto cambia en función del tiempo y siguiendo un modelo matemático, determina:

- ¿Cuál fue el precio inicial del automóvil?
- ¿Cuál es el modelo matemático que expresa el valor del automóvil con respecto al tiempo transcurrido?
- ¿Cuál será su valor cuando tenga 10 años de antigüedad?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

- Para calcular el precio inicial del automóvil, completamos la tabla tomando los datos del problema.

Tiempo (años)	0				4				8
Valor (S/)					45 000				20 000

Diagrama de anotaciones: Una flecha roja va de 4 a 8 con '+4' encima. Una flecha roja va de 45 000 a 20 000 con '-25 000' debajo. Una flecha roja va de 45 000 a 4 con '-6250' debajo. Una flecha roja va de 4 a 5 con '+1' encima.

De los datos se sabe que en 4 años el automóvil se ha devaluado 25 000 soles. Por ello, se cumple la relación "a más años, menos valor".

Con esta información, completamos la tabla:

Tiempo (años)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Valor (S/)	70 000	63 750	57 500	51 250	45 000	38 750	32 500	26 250	20 000

Por lo tanto, en la tabla se observa que el valor inicial del auto fue 70 000 soles.

- Para encontrar el modelo matemático que expresa el valor del automóvil con respecto al tiempo transcurrido:
  - Recordamos que una función lineal tiene la siguiente expresión:  $f(x) = ax + b$ ;  $a$  y  $b \neq 0$



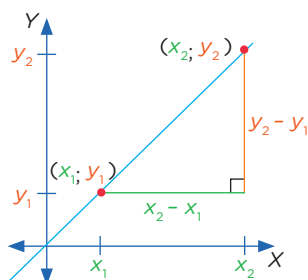
### Recuerda

Luego de organizar los datos en una tabla, puedes analizarlos y establecer relaciones entre ellos para obtener una expresión o modelo matemático.



### Ten en cuenta

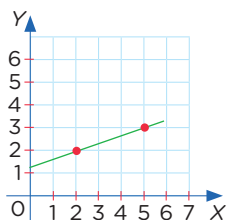
Observa cómo se obtiene la fórmula general para la pendiente.



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo:

Calcula la pendiente de la recta que aparece en el siguiente gráfico.



Del gráfico podemos observar que la recta pasa por los puntos (2; 2) y (5; 3).

Reemplazamos los valores en esta expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{3 - 2}{5 - 2}$$

$$m = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la pendiente es  $\frac{1}{3}$ .

- Para encontrar el modelo de devaluación del valor del auto, consideramos la expresión  $v(t) = at + b$ .  
Donde:  
 $v(t)$ : valor del auto en función del tiempo  
 $a$ : pendiente de la función lineal  
 $t$ : tiempo  
 $b$ : valor inicial del auto

- Para hallar la pendiente ( $a$ ), se toman dos valores cualesquiera de la tabla, por ejemplo:

Cuando  $t = 0$ ,  $v(t) = 70\ 000$

Cuando  $t = 1$ ,  $v(t) = 63\ 750$

Luego, calculamos:  $\frac{\text{diferencia de los valores de la variable } v(t)}{\text{diferencia de los valores de la variable } t}$ ; es decir:

$$a = \frac{70\ 000 - 63\ 750}{0 - 1} = \frac{6250}{-1}. \text{ Entonces, } a = -6250.$$

Interpretación: Esto nos indica que el valor del auto disminuye 6250 soles cada año.

- Reemplazamos estos datos en el modelo de devaluación del auto:  $v(t) = -6250 \cdot t + 70\ 000$   
 $\therefore$  El modelo matemático es  $v(t) = -6250 \cdot t + 70\ 000$ .

- Para conocer el valor del auto después de 10 años, reemplazamos en el modelo matemático el valor de  $t = 10$ . Entonces,  $v(10) = -6250(10) + 70\ 000 = 7500$ . Su valor será de S/7500.

### Respuestas:

- El precio inicial del auto fue 70 000 soles.
- El modelo matemático es  $v(t) = -6250 \cdot t + 70\ 000$ .
- El valor después de 10 años será 7500 soles.

### Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

- Describe el procedimiento que se realizó para dar respuesta a las preguntas de la situación.


- ¿Cuánto valdrá el auto dentro de 14 años? Explica si el valor calculado tiene sentido en la práctica.




### Situación B: Evaluamos el precio más conveniente

El gimnasio Super Fit cobra un derecho de inscripción de 260 soles y una mensualidad de 120 soles, mientras que el gimnasio Gym Extreme cobra 140 soles por derecho de inscripción y 160 soles de mensualidad. Ambos gimnasios se ubican en la misma avenida, tienen instalaciones similares y las mismas máquinas. ¿En cuántos meses, a partir de la matrícula, el pago de los dos gimnasios resulta igual?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

- Determinamos la función que representa el pago para los gimnasios Super Fit y Gym Extreme en  $t$  meses:

Super Fit	Gym Extreme
$P(t) = 260 + 120t$	$P(t) = 140 + 160t$

- Igualamos ambas funciones para averiguar en cuántos meses se paga lo mismo en los dos gimnasios:

$$260 + 120t = 140 + 160t \qquad \text{Luego: } t = 3 \text{ meses}$$

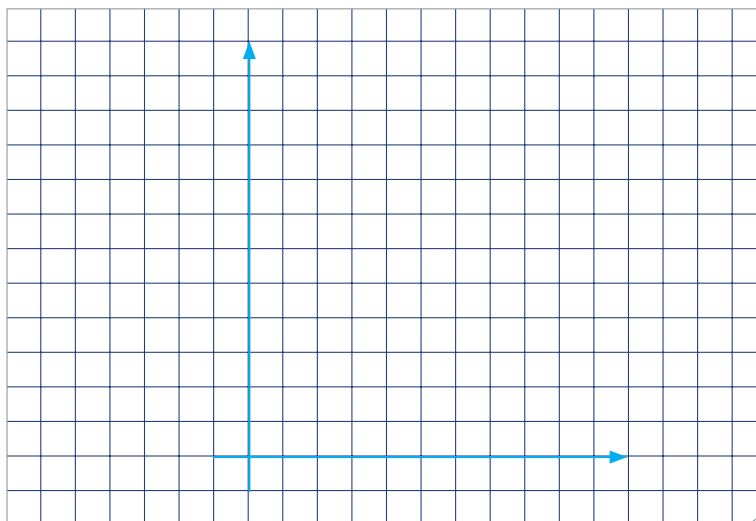
**Respuesta:** En tres meses, en ambos gimnasios se paga lo mismo.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Por qué se igualan ambas funciones?


- Grafica las funciones y luego responde.

- ¿Cuál es el punto de intersección de ambas gráficas?
- ¿Qué significa este valor?



### Recuerda

Para graficar una función se deben seguir los siguientes pasos:

- Completar una tabla de la función.
- Ubicar en el plano cartesiano los pares ordenados de la función.
- Unir con una línea recta los puntos que se graficaron.

## Aprendemos a partir del error

### Situación C: Visitamos una feria gastronómica

Para ingresar a una feria gastronómica, se paga \$15. Dentro de la feria, cualquier plato de comida cuesta \$8.

- ¿Cuál es el modelo matemático que representa el gasto total en la visita a la feria?
- Si se sabe que Lila acudió a la feria y compró 7 platos, ¿cuánto gastó Lila?



#### Ten en cuenta

Para hallar el modelo matemático, puedes comenzar encontrando en los datos de la tabla cantidades que relacionen el pago de la entrada con el consumo de los primeros platos.

Ejemplo:

Cantidad de platos	Gasto total (S/)
1	$15 + 8(1) = 23$
2	$15 + 8(2) = 31$

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

#### Resolución

- Para hallar el modelo matemático, completamos la siguiente tabla:

Cantidad de platos	1	2	3	4
Gasto total (S/)	8	16	24	32

Entonces, se deduce que el gasto en total avanza de 8 en 8.

Considerando que  $x$  representa la cantidad de platos, la función que representa el gasto total será la siguiente:

$$f(x) = 8x$$

- Para hallar el gasto que realizó Lila, usamos este modelo:

$$f(x) = 8x \rightarrow f(7) = 8(7) \rightarrow f(7) = 56$$

**Respuestas:**

- El modelo es  $f(x) = 8x$ .
- Lila gastó \$56.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

- Si Lila hubiera comprado un plato de comida, ¿cuánto habría gastado en total por la visita a la feria?

Precio de entrada (S/)

Precio de un plato de comida (S/)

Gasto total (S/) ..... + ..... = .....

- Completa la tabla, corrige el error y responde las preguntas.

Cantidad de platos	Gasto total (S/)
1	$15 + 1(8) = 23$
2	$15 + 2(8) =$
3	
⋮	
7	

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



## Evaluamos nuestros aprendizajes



### Propósito

Establecemos relaciones entre datos, los transformamos en expresiones algebraicas que incluyen la regla de formación de una función lineal y representamos nuestra comprensión. Empleamos estrategias y procedimientos diversos, y justificamos nuestras afirmaciones con conocimientos matemáticos.



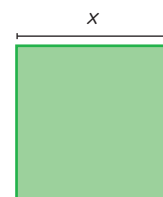
Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

- Lucía emprende en la producción de chocolates. Sus costos fijos son de S/2000 y el costo de producir cada caja de chocolates es de S/25. ¿Cómo podrías expresar el costo total de producción de los chocolates en función del número de cajas producidas?
  - $f(x) = 2025x$
  - $f(x) = 25x + 2000$
  - $f(x) = 2000x + 25$
  - $f(x) = 2000x + 25x$
- Jorge trabaja en una empresa de telefonía móvil. Al día recibe 15 soles y, adicionalmente, 2 soles por cada chip de celular que vende. ¿Cuál es el modelo matemático que representa dicha situación? ¿Cuántos chips de celular vendió un día si recibió la suma de 43 soles? (Considera que  $x$  es el número de chips vendidos).
  - $f(x) = 15x + 2$ ; 8 chips
  - $f(x) = 15 + 2x$ ; 14 chips
  - $f(x) = 15 + 2x$ ; 29 chips
  - $f(x) = 2x$ ; 21 chips
- El precio de una radio es de S/200 al contado, pero si se compra en cuotas deberá pagarse un interés mensual fijo de S/11. ¿Cuál es la expresión matemática que representa la relación del precio de la radio con el número de cuotas? ¿Cuánto debe pagarse en 12 cuotas? (Considera que  $c$  es el número de cuotas a pagar).
  - $f(c) = 11c$ ; 132 soles
  - $f(c) = 200 + 11c$ ; 200 soles
  - $f(c) = 200 + 11c$ ; 332 soles
  - $f(c) = 200 + 11c$ ; 211 soles
- Antonio afirma que, si a cada lado de un cuadrado de 3 centímetros de longitud se le aumentan  $x$  centímetros, la función que relaciona el perímetro con el aumento efectuado al lado del cuadrado original es  $p(x) = 4x + 12$ . ¿Es correcta la afirmación de Antonio? Justifica tu respuesta.
- José es un profesional electricista y cobra 30 soles por la visita a domicilio y 45 soles por cada hora de trabajo (si hay una fracción de hora trabajada, será considerada como 1 hora completa). ¿Cuál es el modelo matemático que representa la situación? ¿Cuánto cobrará José si llega a un domicilio a las 11:00 a. m. y se retira a las 3 p. m.?



### Recuerda

El perímetro de un cuadrado está en función de la longitud de su lado, es decir, depende de esta. A cada valor de la longitud del lado, le corresponde un único valor del perímetro.



Perímetro ( $P$ )

$$P = x + x + x + x$$

$$P = 4x$$



## Ten en cuenta

El **precio de costo**, en contabilidad, hace referencia al valor monetario de las materias, equipos, servicios, etc.; es decir, todo aquello que se utilizó para la creación del producto.

Para fijar el precio de venta se debe agregar la ganancia al precio de costo. De esta manera se obtiene:

$$P. \text{ de venta} = P. \text{ de costo} + \text{Ganancia}$$

Por ejemplo, si producir una camisa cuesta 30 soles y se espera ganar 20 soles, entonces la camisa se debe vender en 50 soles.

6. Un recipiente de 60 L de capacidad, que contiene 6 L de agua, se ubica debajo de una llave que surte 3 L de agua por minuto. ¿Cuál es la expresión matemática que representa el volumen total de agua en el recipiente después de  $x$  minutos? ¿Cuántos minutos se requieren para llenar el recipiente?
- a)  $V(x) = 3x + 6$ ; 18 minutos      c)  $V(x) = 3x + 6$ ; 22 minutos  
 b)  $V(x) = 6x + 3$ ; 8 minutos      d)  $V(x) = 3x$ ; 20 minutos
7. Una empresa fabricante de computadoras, por concepto de luz, agua y renta del local, paga una cantidad mensual fija de S/2500. Por otro lado, cada computadora que produce le cuesta S/900 en materia prima y S/350 en mano de obra. Si la empresa vende cada computadora a S/1500, ¿cuál será la utilidad que resulta de vender 300 computadoras al final del mes?
- a) S/75 200  
 b) S/72 500  
 c) S/67 500  
 d) S/65 200
8. Una empresa vende un producto en S/65 la unidad. Los costos por unidad son de S/20 por materiales y S/27,50 por trabajo. Los costos fijos anuales son de S/100 000. ¿Cuál es la función de la utilidad de la empresa y cuánta utilidad obtuvo si la venta anual fue de 20 000 unidades?

## Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre datos y las transformé en expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen la regla de formación de una función lineal.			
Expresé la relación de correspondencia de una función lineal mediante lenguaje matemático, gráficas y tablas.			
Empleé estrategias heurísticas y procedimientos diversos para resolver un problema.			
Justifiqué afirmaciones con conocimientos matemáticos.			

## ¿Cómo realizamos movimientos en el plano cartesiano?

### Construimos nuestros aprendizajes



#### Propósito

Describimos las transformaciones geométricas de un objeto, las representamos utilizando coordenadas cartesianas y expresamos nuestra comprensión sobre las características de una traslación. Asimismo, empleamos estrategias o procedimientos para describir el movimiento a partir de una traslación.



#### Describimos el movimiento de los azulejos



Fuente: Azulejos Iturry / Vía: Cylex

Figura 1

Durante la remodelación de un palacio municipal, se programó restaurar un antiguo mosaico con azulejos que se encontraba en el patio principal; la imagen inicial se observa en la figura 1. Para ello, se desmontaron los componentes del mural y, luego del proceso de restauración, se volvieron a colocar los azulejos, tal como se muestra en la figura 2.

Pilar observa el mural y se da cuenta de que la persona encargada de la restauración ha cometido errores en la colocación de algunos azulejos.

Ayuda a Pilar a redactar una nota, dirigida al encargado de restaurar el mural, en la que se indique con precisión la ubicación de los azulejos mal colocados y los movimientos que se deberían realizar para corregir el error.



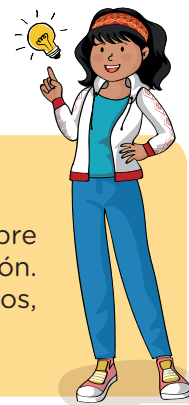
Figura 2







## Comprobamos nuestros aprendizajes

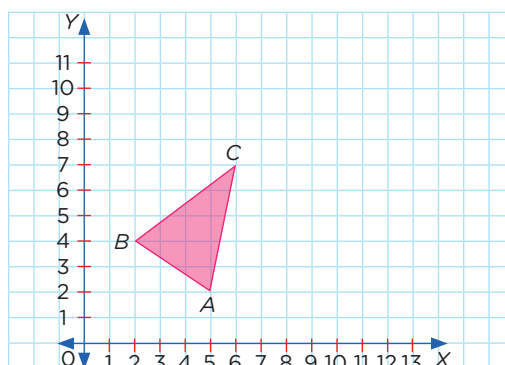


### Propósito

Expresamos con dibujos y con lenguaje geométrico nuestra comprensión sobre las características que distinguen una rotación, una traslación y una reflexión. Asimismo, justificamos afirmaciones con ejemplos y conocimientos matemáticos, y corregimos errores si los hubiera.

### Situación A: Trasladamos un triángulo

Juana desea trasladar el triángulo  $ABC$  según el vector de traslación  $(8; 2)$ . ¿Qué pasos debe seguir para conseguirlo?

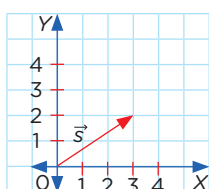


### Ten en cuenta

El **vector de traslación** indica cuántas unidades se desplaza cada punto, así como la dirección que debe tomar.

A las coordenadas de un vértice de la forma  $V(x; y)$  se les denomina así:  
x: abscisa  
y: ordenada

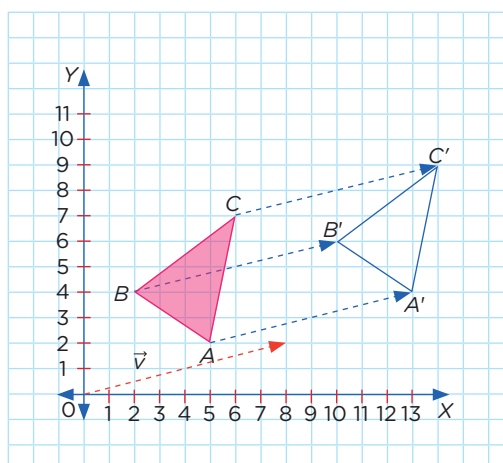
Por ejemplo, el vector  $\vec{s}(3; 2)$  indica que el valor de la **abscisa** aumenta en 3 y el de la **ordenada** aumenta en 2.



A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

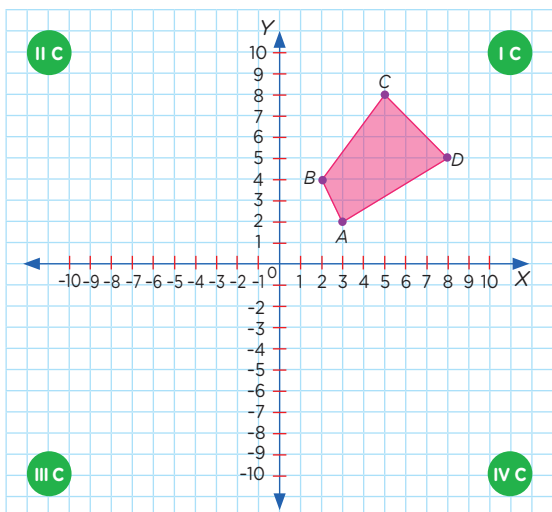
- Representamos en el plano el vector de traslación  $(8; 2)$ .
- Trasladamos cada vértice del triángulo  $ABC$  8 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba.





## Situación B: Realizamos movimientos en el plano cartesiano

La siguiente figura muestra un polígono irregular ubicado en el primer cuadrante del plano cartesiano.



¿Cómo quedará finalmente la figura luego de realizar los siguientes movimientos sucesivos?

- Una reflexión con respecto al eje  $Y$
- Una reflexión con respecto al eje  $X$
- Una reflexión con respecto al eje  $Y$



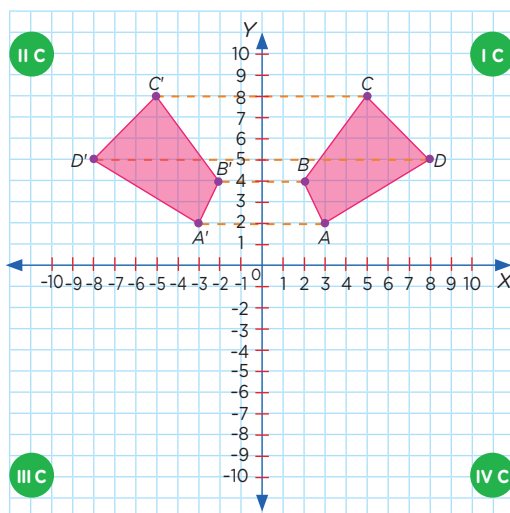
### Recuerda

Para determinar una reflexión, es necesario conocer el eje de simetría.

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

- Para realizar una reflexión con respecto al eje  $Y$  (del cuadrante I al cuadrante II), consideramos al eje  $Y$  (eje vertical) como un espejo y trasladamos cada vértice del polígono al otro lado del eje  $Y$  en forma horizontal. Al escribir las coordenadas de ambas figuras, notamos que en la figura obtenida los valores en el eje  $X$  cambian a negativo y los valores del eje  $Y$  se mantienen.



Posición inicial

Vértice	Coordenada
A	(3; 2)
B	(2; 4)
C	(5; 8)
D	(8; 5)

Reflejo con respecto al eje  $Y$

Vértice	Coordenada
A'	(-3; 2)
B'	(-2; 4)
C'	(-5; 8)
D'	(-8; 5)



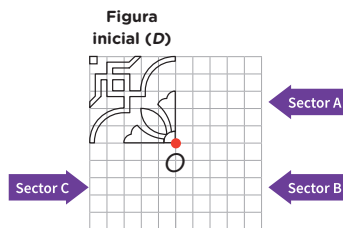


## Aprendemos a partir del error

### Situación C: Completamos el mosaico

En la cuadrícula mostrada, completa el mosaico aplicando transformaciones geométricas al azulejo  $D$  (considera como centro el punto  $O$ ).

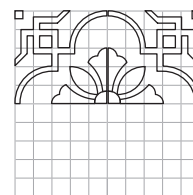
- ¿Qué transformación geométrica se aplica a  $D$  para obtener la imagen en el sector A?
- ¿Qué transformación geométrica se aplica a  $D$  para obtener la imagen en el sector B?
- ¿Qué transformación geométrica se aplica a  $D$  para obtener la imagen en el sector C?



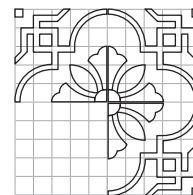
Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

### Resolución

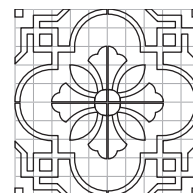
- Para el sector A, giramos  $90^\circ$  en sentido horario la figura inicial ( $D$ ), tal como se muestra en la figura adyacente.



- Para el sector B, la figura rotada anteriormente la hacemos rotar nuevamente en  $90^\circ$  en sentido horario.

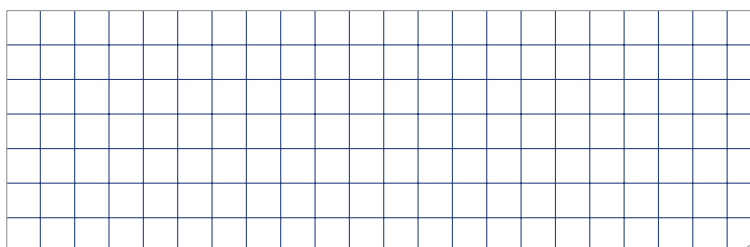


- Para el sector C, la figura inicial rota  $90^\circ$  en sentido horario.



Ahora, respondemos la pregunta para corregir el error:

- Revisa cada transformación aplicada al azulejo  $D$  para obtener la imagen en los sectores A, B y C. Corrige si hay errores.

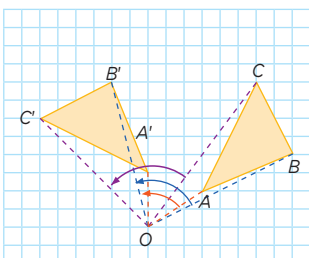


### Recuerda

Las **rotaciones** o giros son movimientos en el plano que realizan las figuras alrededor de un punto fijo. En las rotaciones, las figuras conservan su forma, tamaño y ángulos.

Si el giro es en sentido horario, se dice que es negativo; si es en sentido antihorario, es positivo.

Por ejemplo, observa la rotación de  $90^\circ$  del triángulo  $ABC$ , en sentido antihorario, con centro en  $O$ .





## Evaluamos nuestros aprendizajes



### Propósito

Describimos un objeto a partir de transformaciones geométricas y representamos sus características; empleamos estrategias o procedimientos para describir el movimiento y la localización de los objetos. Asimismo, planteamos afirmaciones y comprobamos su validez mediante propiedades geométricas.



Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. Con el transportador, determina el ángulo de giro de las figuras mostradas. Marca la alternativa que relaciona incorrectamente la figura con la medida del ángulo.

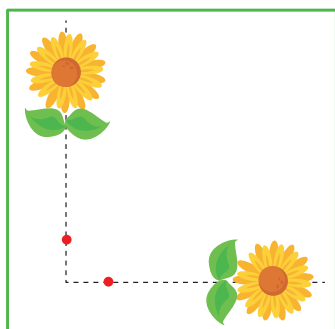


Figura 1

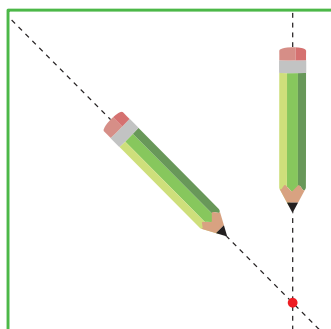


Figura 2

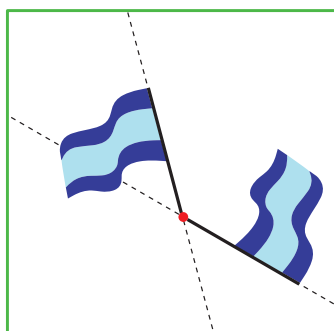


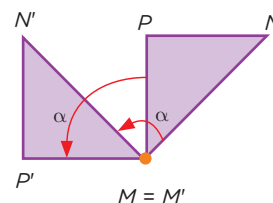
Figura 3

- a) Figura 2:  $45^\circ$                       c) Figura 3:  $45^\circ$   
b) Figura 1:  $90^\circ$                       d) Figura 3:  $135^\circ$



### Recuerda

Si el triángulo  $MNP$  estuviese hecho de cartón y se le aplicara una rotación o un giro con un chinche por el vértice  $M$ , se obtendría el triángulo  $M'N'P'$  con un ángulo de giro  $\alpha$  en sentido antihorario.





2. Observa las figuras del saxofón y analiza los enunciados siguientes:

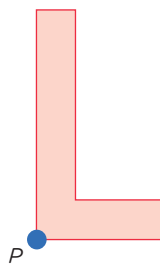
- I. Q es una traslación de P.
- II. R es una rotación de  $180^\circ$  de P.
- III. S es una rotación de  $180^\circ$  de R.



¿Cuál de las afirmaciones es verdadera?

- a) II y III
- b) Solo III
- c) I y II
- d) Solo II

3. Indica cuál es la alternativa que representa una rotación de  $45^\circ$  de la figura mostrada, en sentido antihorario, con centro en P.

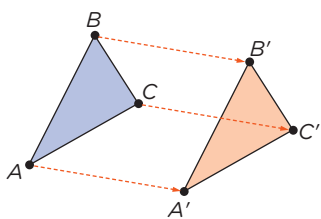


- a)
- b)
- c)
- d)

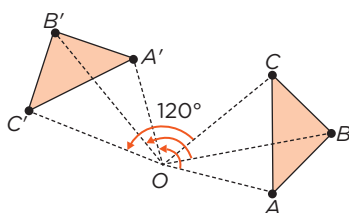


### Recuerda

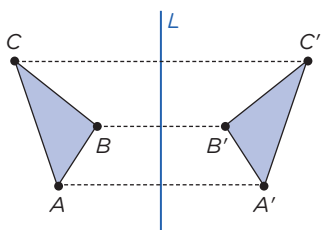
#### Traslación



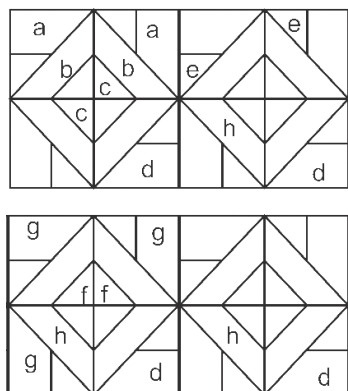
#### Rotación



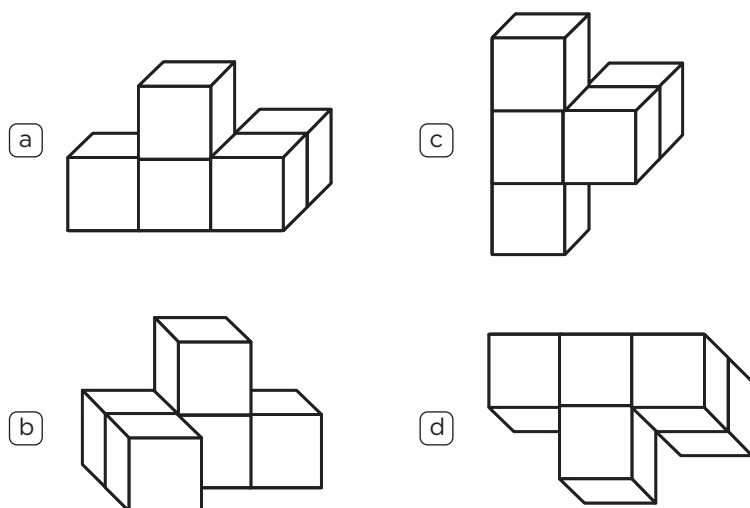
#### Reflexión



4. Observa las figuras que tienen la misma letra. Elige una transformación para ellas y colorea según esta clave: traslación (verde), rotación (rojo) y reflexión (amarillo).

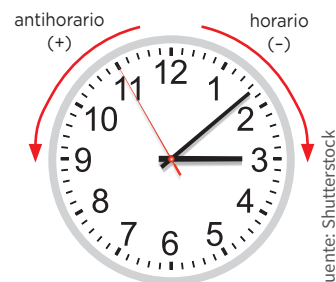


5. Observa la figura del margen. ¿Qué figura representa la misma construcción de cubos? Justifica tu respuesta.



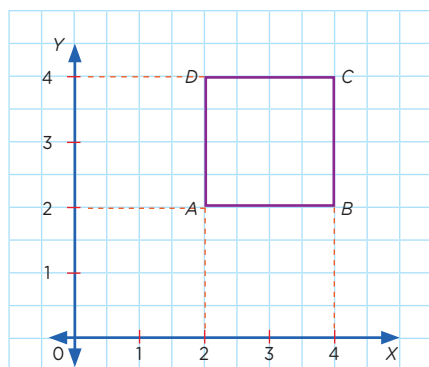
### Recuerda

El sentido del giro siempre está en relación con el sentido en el que se mueven las agujas del reloj.



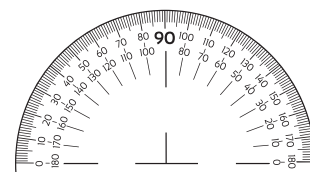
Fuente: Shutterstock

6. Emilia afirma que la nueva coordenada del punto C luego de aplicarle al cuadrado ABCD una rotación de  $180^\circ$  en sentido horario, con centro en A, es (2; 2), mientras que José menciona que la coordenada es (0; 0). ¿Quién de los dos está en lo correcto? Justifica tu respuesta.



### Ten en cuenta

Para obtener de manera más precisa y correcta la imagen del objeto por rotación, puedes utilizar un transportador para medir el ángulo de giro.



Fuente: Shutterstock



7. La figura 2 es imagen de la figura 1 en el espejo.

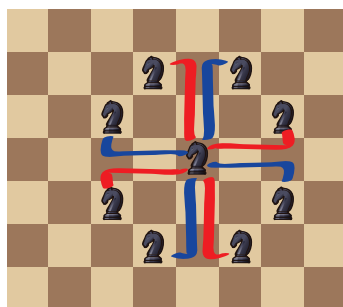
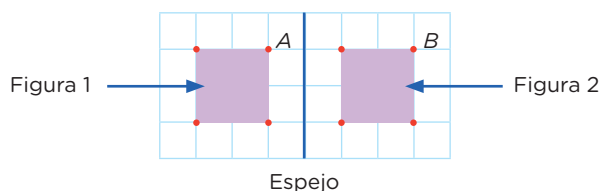


Figura 1

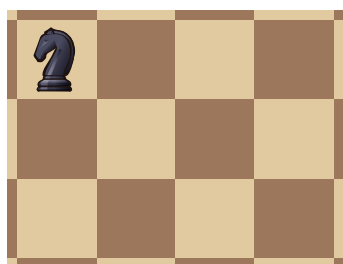


Figura 2

¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- I. Los perímetros de las dos figuras son iguales.
- II. Las áreas de las dos figuras son iguales.
- III. La imagen del punto A es el punto B.

- a) Solo I
- b) Solo II
- c) I y II
- d) II y III

8. El tablero de ajedrez y cada una de sus piezas presentan diferentes curiosidades matemáticas. Por ejemplo, el caballo, cuyos movimientos se describen en la figura 1, puede llegar a cubrir todas las casillas del tablero de ajedrez.

Determina cuántos movimientos como mínimo debe realizar el caballo para cubrir cada una de las casillas de la cuadrícula  $3 \times 4$  que se muestra en la figura 2; describe y justifica el tipo de movimientos realizados.

## Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Describí un objeto a partir de transformaciones geométricas, traslaciones, rotaciones o reflexiones.			
Expresé con lenguaje geométrico mi comprensión sobre las características que distinguen una rotación de una traslación y una traslación de una reflexión de formas bidimensionales.			
Empleé estrategias o procedimientos para describir las transformaciones geométricas de traslación, rotación y reflexión.			
Justifiqué afirmaciones y comprobé su validez con propiedades geométricas.			

## ¿Cómo organizamos la información para tomar una decisión?

### Construimos nuestros aprendizajes



#### Propósito

Leemos tablas y diversos textos que contienen valores de medidas de tendencia central; empleamos estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos y determinar sus medidas. Asimismo, justificamos con nuestros conocimientos estadísticos las características de una muestra de la población.



#### Tomamos una buena decisión

El entrenador de básquet de una institución educativa debe elegir a uno de los dos deportistas que son suplentes para que ingrese al campo en un partido decisivo durante los Juegos Deportivos Escolares Nacionales. Para tomar la decisión, consulta una tabla con la puntuación de cada uno de ellos en los partidos anteriores.



Fuente: Shutterstock

Los puntos anotados por cada deportista en los cinco últimos partidos figuran en la siguiente tabla:

Deportista	Partido				
	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º
Pablo	14	14	10	6	20
Claudio	12	16	13	15	14

Ayuda al entrenador a tomar la decisión de elegir al deportista que debería ingresar al campo deportivo.





## Ejecutamos la estrategia o plan

6. Determina la moda y la mediana de las puntuaciones que obtuvo cada deportista.

Deportista	Moda (Mo)	Mediana (Me)
Pablo		
Claudio		

Puede ocurrir que ningún valor se repita; en ese caso, el conjunto de datos es llamado amodal (no tiene moda).

7. Calcula la media aritmética o promedio de las puntuaciones que obtuvo cada deportista.

Promedio de Pablo	Promedio de Claudio

8. ¿La mediana y la moda le permitirán al entrenador elegir entre los dos jugadores? Justifica tu respuesta.


9. Describe lo que observas en los resultados del promedio de las puntuaciones que obtuvo cada deportista.


10. ¿Qué medida le permitirá al entrenador elegir entre los dos deportistas? ¿A qué deportista elegirá? Justifica tu respuesta.


## Reflexionamos sobre el desarrollo

11. ¿Por qué ni la mediana ni la moda ayudaron a tomar la decisión?




## Ten en cuenta

La **moda** (Mo) se define como el dato con mayor frecuencia en el conjunto de datos.

Ejemplo: Las edades de seis amigos son 14; 12; 14; 13; 12; 12.

Determina la moda.

14	12	14	13	12	12
----	----	----	----	----	----

$$Mo = 12$$

Interpretación:

La edad con más frecuencia es 12 años.

La **mediana** (Me) es el valor correspondiente a la posición central del conjunto de datos ordenados de manera creciente o decreciente.

Para un número impar

10	12	13	14	15
----	----	----	----	----

$$Me = 13$$

Para un número par

10	11	12	14	15	16
----	----	----	----	----	----

$$Me = \frac{12 + 14}{2} = 13$$

Ejemplo: Las edades de seis amigos son 12; 12; 12; 13; 14; 14. Determina la mediana.

$$Me = \frac{12 + 13}{2} = 12,5$$

Interpretación:

El 50 % de los amigos tiene una edad que es mayor o igual que 12,5 años.

La **media aritmética** ( $\bar{x}$ ) es el valor promedio de los datos. Se obtiene al dividir la suma de todos los datos entre la cantidad total de datos.

Ejemplo: Las edades de un grupo de amigos son 14; 15; 14; 13; 15. Calcula la media.

$$\bar{x} = \frac{14 + 15 + 14 + 13 + 15}{5} = \frac{71}{5} = 14,2$$

Interpretación:

El promedio de las edades de este grupo de amigos es 14,2 años.

## Comprobamos nuestros aprendizajes



### Propósito

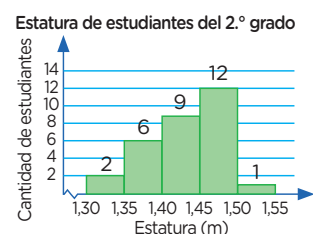
Representamos las características de una población asociándolas a variables cuantitativas discretas y continuas, y expresamos el comportamiento de los datos de la población mediante histogramas y medidas de tendencia central. Leemos tablas de frecuencias y gráficos para interpretar la información que contienen.



### Situación A: Analizamos la estatura de los estudiantes de 2.º grado

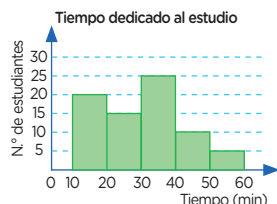
Luego de medir la estatura de los estudiantes del 2.º grado, los datos se agruparon en cinco intervalos y se representaron mediante un histograma.

- ¿A cuántos estudiantes se les midió la estatura?
- ¿Cuántos estudiantes tienen estatura mayor o igual que 1,40 m?
- ¿Qué porcentaje de los estudiantes tiene estatura mayor o igual que 1,40 m, pero menor que 1,50 m?
- Calcula el promedio de estaturas.



### Ten en cuenta

Un histograma es un tipo de gráfico estadístico útil para representar resultados organizados en intervalos numéricos, es decir, cuando la variable es continua. Para construir un histograma, se levantan tantas barras juntas como intervalos existan en la tabla, considerando que la altura de cada barra sea igual o proporcional a su frecuencia absoluta.



A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

- Para saber a cuántos estudiantes se les midió la estatura, elaboramos una tabla a partir de la lectura del histograma.

Estatura (m) [L <sub>i</sub> ; L <sub>s</sub> [	f <sub>i</sub>
[1,30; 1,35[	2
[1,35; 1,40[	6
[1,40; 1,45[	9
[1,45; 1,50[	12
[1,50; 1,55]	1

Por tanto, la cantidad de estudiantes es  $2 + 6 + 9 + 12 + 1 = 30$ .

- Cantidad de estudiantes que tienen mayor o igual estatura que 1,40 m:  $9 + 12 + 1 = 22$
- Hallamos el porcentaje de estudiantes que tienen una estatura mayor o igual que 1,40 m, pero menor que 1,50 m.

Primero sumamos:  $9 + 12 = 21$

Operamos para calcular el porcentaje:  $\frac{21}{30} \times 100\% = 70\%$

- d. Para calcular el promedio de la estatura de los estudiantes, elaboramos una tabla de frecuencias, considerando intervalos de clase ( $[L_i; L_s[$ ), marcas de clase ( $X_i$ ) y frecuencias absolutas.

La marca de clase ( $X_i$ ) es la semisuma de los límites del intervalo de clase, es decir, para el primer intervalo:

$$X_1 = \frac{1,30 + 1,35}{2} = 1,325$$

Se multiplica cada marca de clase por su frecuencia para calcular el aporte de la clase al total. Por ejemplo:  $X_1 \cdot f_1 = 1,325 \times 2 = 2,65$

La tabla de frecuencias queda así:

Estatura (m) $[L_i; L_s[$	$X_i$	$f_i$	$X_i \cdot f_i$
[1,30; 1,35[	1,325	2	2,65
[1,35; 1,40[	1,375	6	8,25
[1,40; 1,45[	1,425	9	12,83
[1,45; 1,50[	1,475	12	17,70
[1,50; 1,55]	1,525	1	1,53
<b>Total</b>		<b>30</b>	<b>42,95</b>

Calculamos la media aritmética ( $\bar{x}$ ) para datos agrupados:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k (X_i \cdot f_i)}{n}, \text{ donde } n = 30 \text{ y } k = 5$$

$$\bar{x} = \frac{42,95}{30} \approx 1,43$$

**Respuesta:**

El promedio de las estaturas es aproximadamente 1,43 m.

**Ahora, respondemos las siguientes preguntas:**

1. ¿Cómo interpretas el intervalo [1,45; 1,50[?


2. ¿Por qué es importante elaborar una tabla de frecuencias cuando se trabaja con datos agrupados?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3. ¿Cómo se interpreta el resultado del promedio de estaturas encontrado?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



**Recuerda**

Para calcular el promedio de datos agrupados, debes organizarlos en una tabla de frecuencias teniendo en cuenta lo siguiente:

Intervalos de clase:  $[L_i; L_s[$   
 Marca de clase:  $X_i$   
 Frecuencia absoluta:  $f_i$

donde

$L_i$ : Límite inferior  
 $L_s$ : Límite superior

Además, se cumple que:

$$L_s = L_i + A$$

Siendo  $A$  la amplitud del intervalo.



**Ten en cuenta**

La media aritmética ( $\bar{x}$ ) para datos agrupados se calcula dividiendo la suma de los productos  $X_i \cdot f_i$  entre el número de datos  $n$ .

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k (X_i \cdot f_i)}{n},$$

donde

$$\sum_{i=1}^k (X_i \cdot f_i)$$

expresa la suma de los productos  $X_i \cdot f_i$ .

Ejemplo:

Las tallas de un grupo de estudiantes están expresadas en la tabla. Calcula el promedio.

Intervalo	$f_i$	$X_i \cdot f_i$
[1,30; 1,35[	2	1,325 × 2
[1,35; 1,40[	4	1,375 × 4
[1,40; 1,45]	5	1,425 × 5

$$\bar{x} = \frac{2,65 + 5,5 + 7,125}{11} \approx 1,38$$

El promedio de tallas es aproximadamente 1,38 m.



### Situación B: Las tallas de zapatos más vendidas

Una empresa de calzado anotó las tallas de zapatos de treinta de sus clientes para conocer qué tallas tienen mayor demanda.

38	42	35	23	24	43
22	36	37	20	32	35
40	21	41	42	24	38
40	38	30	34	42	28
42	36	38	24	30	28

Según los datos, ¿qué tallas son las más compradas por los clientes?

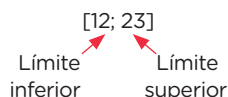


#### Recuerda

##### Intervalos

Son agrupaciones de datos numéricos comprendidos entre dos límites.

Ejemplo:



Para agrupar los datos en intervalos, realizamos los siguientes pasos:

1. Se determina el número de intervalos ( $K$ ), que se obtiene calculando la raíz cuadrada del número de datos y redondeando el resultado.

$K = \sqrt{n}$ , donde  $n$  es el número de datos.

2. Se determina el rango o recorrido ( $R$ ).

$R = \text{Dato mayor} - \text{Dato menor}$

3. Se determina la amplitud de los intervalos ( $A$ ).

$$A = \frac{R}{K}$$

Los intervalos deben ser siempre de la misma amplitud.

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

#### Resolución

Realizamos los siguientes pasos:

Determinamos el número de intervalos ( $K$ ) con la ecuación  $K = \sqrt{n}$ , donde  $n$  es el número de datos:

$$K = \sqrt{30} \approx 5,48, \text{ entonces } K = 5$$

Encontramos el rango o recorrido  $R$ :

$$R = \text{Dato mayor} - \text{Dato menor} \rightarrow R = 43 - 20 = 23$$

Determinamos la amplitud del intervalo  $A$ :  $A = \frac{R}{K} = \frac{23}{5} = 4,6$

Redondeando al entero, la amplitud será  $A = 5$ .

Formamos el primer intervalo:

Límite inferior:  $L_i = 20$

Límite superior:  $L_s = 20 + 5 = 25$

Primer intervalo: [20; 25[

Elaboramos la tabla de frecuencias para datos agrupados:

$[L_i; L_s [$	$f_i$
[20; 25[	7
[25; 30[	2
[30; 35[	4
[35; 40[	9
[40; 45]	8
Total	30

Intervalo modal  $\rightarrow$

**Respuesta:**

La mayor cantidad de clientes se encuentra en el cuarto intervalo de la tabla. Decimos que [35; 40[ es el intervalo modal.

**Ahora, respondemos las siguientes preguntas:**

1. ¿Cómo se obtuvieron los valores de la frecuencia absoluta ( $f_i$ )?

2. ¿Qué tallas incluye el intervalo [35; 40[?



#### Ten en cuenta

A partir de los intervalos y las frecuencias registradas en la tabla, se puede determinar la moda observando en qué intervalo se encuentra la mayor frecuencia.



## Aprendemos a partir del error

### Situación C: Temperaturas máximas

En la siguiente tabla se muestran las temperaturas máximas, en grados Celsius, registradas durante el mes de febrero en una ciudad de la costa norte del país.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Temperatura (°C)	31	30	30	30	29	29	29	28	28	29	32	30	29	30	31	30	30	29	31	28	27	30	31	30	31	32	32	30

Elabora la tabla de frecuencias para datos no agrupados y determina:

- el promedio ( $\bar{x}$ ).
- la mediana ( $Me$ ).
- la moda ( $Mo$ ).

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

### Resolución

Elaboramos la tabla de frecuencias para datos no agrupados. Para ello, realizamos el conteo de las temperaturas que se repiten de menor a mayor:

Temperatura máxima (°C)	$f_i$	$F_i$
27	1	1
28	3	4
29	6	10
30	10	20
31	5	25
32	3	28
<b>Total</b>	<b>28</b>	

- Determinamos el promedio de las temperaturas máximas:

$$\bar{x} = \frac{27(1) + 28(4) + 29(10) + 30(20) + 31(25) + 32(28)}{28}$$

$$\bar{x} = \frac{27 + 112 + 290 + 600 + 775 + 896}{28} \approx 96,43$$

- Son 28 datos, la mitad de la muestra es 14 datos. Para saber cuándo estamos en la mitad de la muestra, buscamos en la tabla para qué temperatura se han acumulado 14 datos. Para  $T = 29$  °C,  $F_3 = 10$ ; faltan. Para  $T = 30$  °C,  $F_4 = 20$ ; ya se acumuló la mitad de los datos. Que la mediana sea 30 °C significa que la mitad de los días la temperatura será menor o igual que 30 °C y la otra mitad será mayor o igual que esa temperatura.

- Ahora determinamos el valor de la moda. Para ello, observamos en la tabla de frecuencias que la temperatura con mayor frecuencia absoluta es 30 °C. Por lo tanto, la moda de las temperaturas es  $Mo = 30$  °C.



### Ten en cuenta

En la tabla se distingue la frecuencia absoluta ( $f_i$ ), que indica cuántas veces durante el mes de febrero se registra el valor de la temperatura, y la frecuencia absoluta acumulada ( $F_i$ ), que es igual a la suma de las frecuencias absolutas de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado.



### Recuerda

En una tabla podemos identificar directamente la moda ( $Mo$ ). Por ejemplo:

Tipo de libro	Votos	Frecuencia
De aventuras		6
De misterio		8
De humor		4
De ciencias		2

El libro de misterio es la moda porque tiene mayor frecuencia.



### Ten en cuenta

Las medidas de tendencia central para datos agrupados se determinan de la siguiente manera:

La **media** se calcula sumando todos los productos de la marca de clase con la frecuencia absoluta respectiva, y su resultado se divide entre el número de datos.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k (X_i \cdot f_i)}{n}$$

Ejemplo:

$[L_i; L_{i+1}[$	$X_i$	$f_i$	$X_i \cdot f_i$
[22; 30[	26	5	130
[30; 38[	34	6	204
[38; 46[	42	11	462
[46; 54[	50	12	600
[54; 62[	58	4	232
[62; 70]	66	2	132
			1760

$$\bar{x} = \frac{1760}{40} = 44$$

La **mediana** se encuentra en el intervalo donde la frecuencia acumulada llega hasta la mitad de la suma de las frecuencias absolutas.

$[L_i; L_{i+1}[$	$f_i$	$F_i$
[22; 30[	5	5
[30; 38[	6	11
[38; 46[	11	22
[46; 54[	12	34
[54; 62[	4	38
[62; 70]	2	40

Clase mediana

La **moda** es el valor que representa la mayor frecuencia absoluta. Se encuentra en el intervalo modal.

$[L_i; L_{i+1}[$	$f_i$
[22; 30[	5
[30; 38[	6
[38; 46[	11
[46; 54[	12
[54; 62[	4
[62; 70]	2

Clase modal

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

- ¿Qué diferencia hay entre la frecuencia absoluta ( $f_i$ ) y la frecuencia acumulada ( $F_i$ )?

- Para encontrar la media aritmética, ¿con cuál de las frecuencias se debió realizar el cálculo? Calcula y corrige la información.

- Para el cálculo de la mediana, ¿el procedimiento y la interpretación fueron adecuados? Justifica tu respuesta.

- Ordena los valores de la temperatura máxima de forma creciente. Comprueba que la mediana es un valor central.

- Para el cálculo de la moda, ¿el procedimiento y la interpretación fueron adecuados? Justifica tu respuesta.

## Evaluamos nuestros aprendizajes



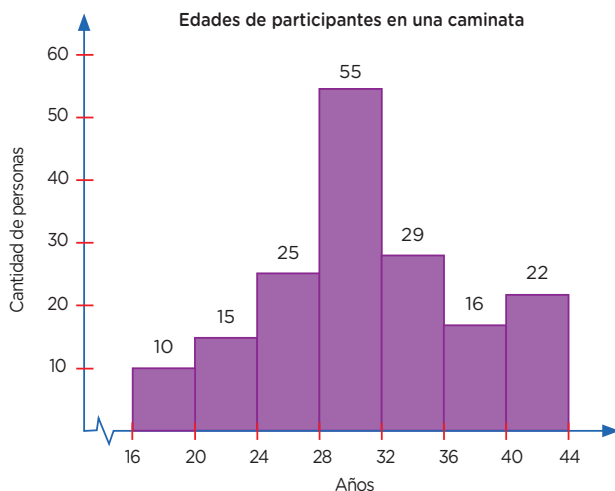
### Propósito

Representamos las características de una población mediante el estudio de variables cuantitativas y cualitativas. Seleccionamos procedimientos para determinar la media, la mediana y la moda. Expresamos nuestra comprensión de las medidas de tendencia central y justificamos afirmaciones con conocimientos estadísticos.



Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. El histograma de frecuencias muestra las edades de los participantes en una caminata organizada por la municipalidad de un distrito. Según el gráfico, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta?



### Recuerda

Los intervalos se forman teniendo en cuenta que el límite inferior de una clase pertenece al intervalo, pero el límite superior no pertenece a él. El límite superior se cuenta en el siguiente intervalo. Así tenemos:

$$[L_i; L_s[$$

$L_i$ : Límite inferior

$L_s$ : Límite superior

Ejemplo:

En el intervalo  $[60; 65[$  se tiene lo siguiente:

$$L_i: 60$$

$$L_s: 65$$

- a) Más de la mitad de los participantes de la caminata tienen más de 24 años y menos de 36 años.
- b) Los participantes de la caminata que tienen la mayor edad registrada son 55.
- c) Menos del 10 % de los participantes de la caminata tienen más de 16 años y menos de 20 años.
- d) El histograma registra las edades de 172 participantes de la caminata en ese distrito.



## Recuerda

Para determinar la mediana, se ordenan los datos de forma ascendente. Si el número de datos es impar, la mediana es el valor central. Si el número de datos es par, la mediana es la semisuma de los términos centrales.

Ejemplo:

Para un número impar

12	13	15	16	17
----	----	----	----	----

$$Me = 15$$

Para un número par

12	13	15	17	17	18
----	----	----	----	----	----

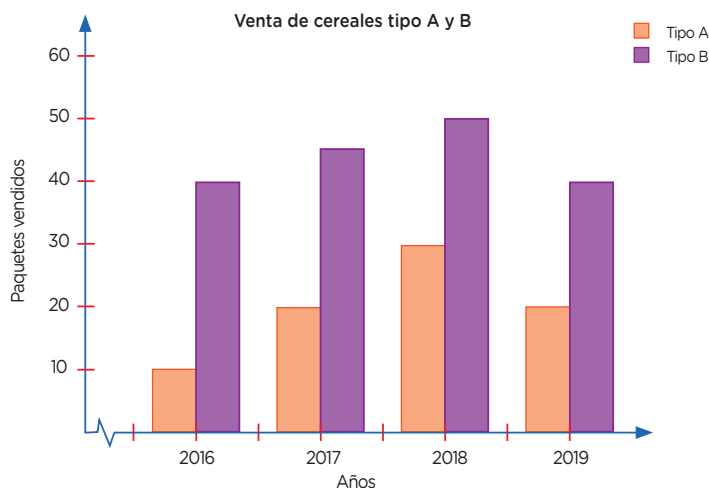
$$Me = \frac{15 + 17}{2} = 16$$

2. Para saber si la nota obtenida por un estudiante en un examen de matemática se encuentra entre la mitad de las notas más altas del aula o entre la mitad más baja, debemos tomar como referencia una calificación que marque la separación entre las mitades. Las notas obtenidas son:

08	14	15	18	10	10	09	11	13
14	15	08	09	10	14	12	15	18
20	16	10	11	16	18	08	13	18

¿Cuál es esa calificación que servirá como referencia?

- (a) 14 (b) 8 (c) 11 (d) 13
3. El gráfico muestra la venta de dos tipos de cereales, A y B, durante cuatro años. Determina la cantidad promedio de paquetes de cereales del tipo A y B vendidos durante los cuatro años.



- (a) Tipo A: 50 (b) Tipo A: 45 (c) Tipo A: 20 (d) Tipo A: 30  
 Tipo B: 30 Tipo B: 20 Tipo B: 45 Tipo B: 40



## Ten en cuenta

Una buena interpretación de las medidas de tendencia central permitirá tomar las mejores decisiones.

4. La Municipalidad de Ambo organizó una charla sobre el cuidado del ambiente a la que asistieron estudiantes de distintas edades, según se muestra en la tabla adjunta. Determina el valor de la mediana y de la moda, y luego interpreta el significado de los resultados.

Edad (años)	Cantidad de jóvenes
11	12
12	15
13	13
14	16
15	8

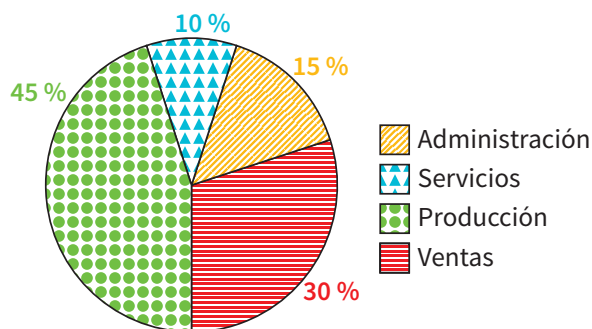
5. La posta médica registró las edades de 30 de sus pacientes. Con estos datos construyeron una tabla de frecuencias.

Completa la tabla y determina el porcentaje de pacientes que tienen menos de 72 años.

Edad (años) [L <sub>i</sub> ; L <sub>s</sub> [	X <sub>i</sub>	f <sub>i</sub>	h <sub>i</sub>	h <sub>i</sub> %
[54; 60[	57	9	0,3	30 %
[60; 66[	63			
[66; 72[	69	5	0,17	
[72; 78[	75	4	0,13	13 %
[78; 84]	81	6		
<b>Total</b>		<b>30</b>	<b>1</b>	<b>100 %</b>

- a) 50 %  
 b) 33 %  
 c) 13 %  
 d) 67 %
6. En una empresa de embutidos, los trabajadores se distribuyen en diferentes áreas de trabajo, tal como muestra el siguiente gráfico:

Porcentaje de trabajadores por áreas



Ana afirma que, si en la empresa hay un total de 120 trabajadores, en el área de ventas hay el doble de la cantidad de trabajadores que en administración. ¿Es cierto lo que afirma Ana? Justifica tu respuesta.



## Recuerda

La suma de las **frecuencias absolutas** ( $f_i$ ) es igual al número total de datos ( $n$ ).

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_k = n$$

La **frecuencia relativa** ( $h_i$ ) es el cociente entre la frecuencia absoluta de un determinado valor y el número total de datos.

$$h_i = \frac{f_i}{n}$$

Por ejemplo:

$$h_1 = \frac{9}{30} = 0,3$$

La suma de las frecuencias relativas es igual a 1.

La frecuencia relativa también se puede expresar en forma de porcentaje:

$$h_i \% = 100 \times h_i$$

Por ejemplo:

$$h_1 \% = 100 \times 0,3 = 30 \%$$





## ¿Cómo aplicamos los porcentajes en la vida cotidiana?

### Construimos nuestros aprendizajes



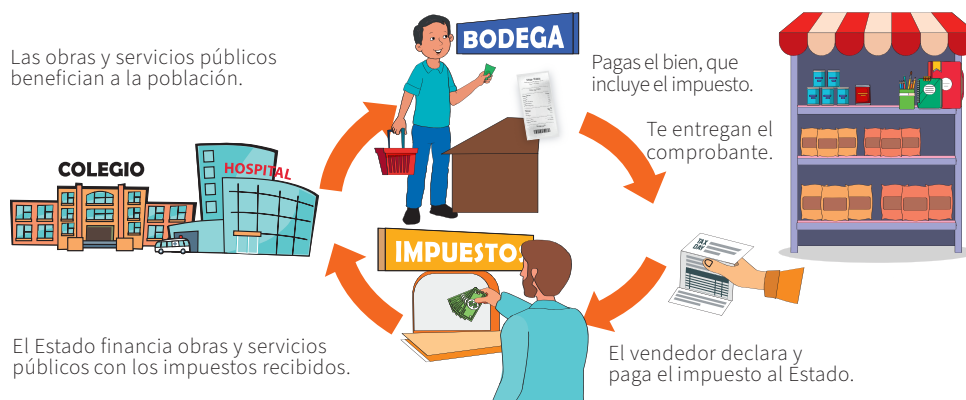
#### Propósito

Representamos con lenguaje numérico el significado del impuesto general a las ventas (IGV) en transacciones financieras y comerciales. Empleamos estrategias de cálculo y procedimientos para realizar operaciones con porcentajes usando propiedades de los números y las operaciones.



#### Promovemos el pago de impuestos

Mario reconoce la importancia de pedir comprobantes de pago (factura o boleta de pago) y también de emitirlos, con el fin de evitar la evasión del IGV, el cual equivale al 18 % que se paga al comprar un producto o servicio. Con este dinero, el Estado puede obtener recursos para brindar educación, salud, seguridad, justicia, obras públicas, entre otros.



Ayuda a Mario. Él desea informar sobre su gasto en esa compra, pero su factura sufrió un deterioro. Mario recuerda que pagó el importe de cada producto más el IGV.

- ¿Cuánto pagó por IGV en esta compra?
- ¿Cuál fue el importe total que pagó Mario en la factura?

BODEGA DON LUCHO PSJE. LAS BRISAS - HUARAL TLF: 246-1117		FACTURA ELECTRÓNICA RUC: 12347654454 E001-471	
Caja Predeterminada			
Cliente: PÚBLICO EN GENERAL		11/06/2023	
Usuario: ADMINISTRADOR		11:04:17 a. m.	
CANT.	DESCRIPCIÓN	IMPORTE	
1	ACEITE PREMIUM ENVASE x 1 L	12,50	
1	ACEITE DE OLIVA EXTRA VIRGEN ENVASE x 500 mL	19,80	
SUBTOTAL		S/	32,30
IGV		S/	
IMPORTE TOTAL			
SON:			



Muy bien, ya estamos listos para iniciar el desarrollo de la ficha 5.



## Comprendemos el problema

1. Según la factura de la situación inicial, ¿qué productos compró Mario y cuál fue el importe de cada uno?


2. ¿Qué se le debe agregar al subtotal de la venta para obtener el importe total de la compra?


3. ¿Qué te piden determinar las preguntas de esta situación?




## Recuerda

El **tanto por ciento** es el número de partes que se toma de una cantidad que se ha dividido en 100 partes iguales.

Por ejemplo, 40% se representa gráficamente así:

Representación gráfica	Expresión simbólica %
	40 %

También se puede expresar como fracción o decimal.

Fracción	Decimal
$\frac{40}{100}$	0,4

El **porcentaje** es el resultado de aplicar el tanto por ciento a una cantidad.

Ejemplo:

Halla el 15 % de 400.

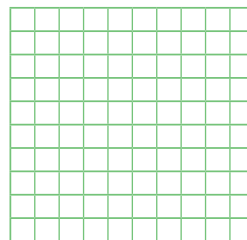
$$\frac{15}{100} \times 400 = 60$$

## Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

4. Describe los procedimientos que realizarás para calcular el IGV y el importe total.


## Ejecutamos la estrategia o plan

5. Observa la factura y expresa lo que se indica.
- Valor del IGV:
  - Subtotal venta:
6. Pinta la representación gráfica del 18 %.



7. Realiza la operación que permite calcular el valor del IGV. Recuerda que debes utilizar el dato del subtotal de la venta de la factura.

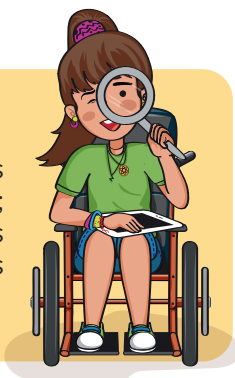



## Comprobamos nuestros aprendizajes



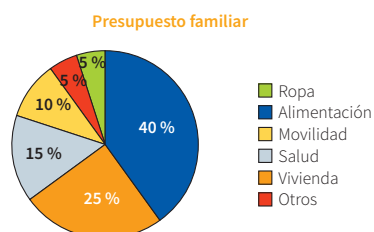
### Propósito

Establecemos relaciones entre datos y los transformamos en expresiones numéricas que incluyen aumentos y descuentos porcentuales sucesivos; además, representamos nuestra comprensión sobre aumentos o descuentos porcentuales. Asimismo, justificamos con conocimientos y corregimos errores si los hubiera.



### Situación A: Analizamos el presupuesto familiar

La mamá y el papá de José tienen un presupuesto familiar de S/3000 para diferentes gastos en bienes y servicios del hogar, distribuidos como se muestra en el siguiente diagrama:



Al respecto, determina:

- La cantidad de dinero presupuestado para cada uno de los bienes y servicios.
- El dinero que se gasta en desayuno, almuerzo y cena. Se sabe que estos gastos representan el 30 %, 50 % y 20 %, respectivamente, del monto presupuestado para alimentos.
- El pago por el alquiler de casa, si se sabe que representa el 80 % del presupuesto destinado para vivienda y que el resto es para los servicios de luz y agua.
- El importe que se paga por el servicio mensual de luz y agua.

A continuación, analizamos los procedimientos planteados y completamos.

### Resolución

- Para determinar la cantidad de dinero presupuestado para cada bien o servicio, cambiamos la representación

Rubro	Porcentaje	Fracción	Pago por rubro (S/)
Ropa	5 %	$\frac{5}{100}$	$\frac{5}{100} \times 3000 = 150$
Movilidad	10 %	$\frac{10}{100}$	$\frac{10}{100} \times 3000 = 300$
Salud	15 %	$\frac{15}{100}$	$\frac{15}{100} \times 3000 = 450$
Vivienda	25 %	$\frac{25}{100}$	$\frac{25}{100} \times 3000 =$ <input type="text"/>
Alimentación	40 %	$\frac{40}{100}$	$\frac{40}{100} \times 3000 =$ <input type="text"/>
Otros	5 %	$\frac{5}{100}$	$\frac{5}{100} \times 3000 =$ <input type="text"/>



### Ten en cuenta

Una forma visual de mostrar información en porcentajes es a través de sectores (secciones) en los gráficos circulares. El círculo representa el 100 %; cada sección representa una parte de 100.



### Recuerda

Puedes usar tablas o **diagramas tabulares** como estrategia para organizar la información.

porcentual a fraccionaria.

- b. Calculamos el gasto en desayuno (D), almuerzo (A) y cena (C):

$$D = \frac{30}{100} \times S/1200 = S/360$$

$$A = \frac{50}{100} \times S/1200 = S/600$$

$$C = \frac{20}{100} \times S/1200 = S/240$$

Por lo tanto, en el desayuno se gasta  $S/360$ ; en el almuerzo,  $S/600$ , y en la cena,  $S/240$ .

- c. Calculamos el pago por el alquiler de la casa (P).  
Se sabe que para vivienda se tiene  $S/750$  de presupuesto. De acuerdo con ello, determinaremos el pago del alquiler.

$$P = \frac{80}{100} \times 750 = 600$$

El pago por el alquiler de la casa es  $S/600$ .

- d. Calculamos el importe que se paga por los servicios (S) de luz y agua en un mes.

$$S = \frac{20}{100} \times 750 = 150$$

El importe por los servicios de agua y luz es  $S/150$ .

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

- Describe el procedimiento realizado.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- ¿Por qué 5 % es equivalente a la fracción  $\frac{5}{100}$ ? Representa con un gráfico y pinta la parte que corresponde.


- ¿Por qué para calcular el 40 % de 3000 se realiza la operación  $\frac{40}{100} \times 3000$ ?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



### Recuerda

Para obtener el porcentaje de una cantidad, puedes desarrollar estrategias como la de **expresar como fracción y luego simplificar**.

Por ejemplo:

Calcula el 43 % de 800.

$$\frac{43}{100} \times 800 = 43 \times 8 = 344$$



Para obtener porcentajes de cantidades usuales, observa el ejemplo.

Calcula el 25 % de 240.

$$\begin{aligned} &\times \frac{1}{2} \left. \begin{array}{l} 100 \% \text{ ---- } S/240 \\ 50 \% \text{ ---- } S/120 \end{array} \right\} \times \frac{1}{2} \\ &\times \frac{1}{2} \left. \begin{array}{l} 25 \% \text{ ---- } S/60 \end{array} \right\} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$



### Ten en cuenta

Toda cantidad en su totalidad representa la unidad (1). En ocasiones, necesitamos representar partes de una unidad; en esos casos, lo hacemos de modo gráfico.



**Situación B: Compramos artefactos con servicio técnico**

Una tienda de artefactos vende lavadoras cuyo precio es S/2000 cada una. Adicionalmente, el cliente puede contratar el servicio técnico hasta por dos años. El servicio técnico del primer año incrementa el costo de la lavadora en 20 % de su precio, y el servicio técnico del segundo año genera un aumento del 25 % del precio con servicio técnico del primer año.



**Lavadora S/2000**

- a. ¿Cuánto cuesta la lavadora con el servicio técnico del primer año?
- b. ¿Cuánto cuesta el servicio técnico del segundo año? ¿Y cuánto cuesta la lavadora con servicio técnico hasta el segundo año?
- c. ¿Qué porcentaje del precio de la lavadora representa el pago por los dos primeros años de servicio técnico?



**Ten en cuenta**

Para calcular el porcentaje, puedes utilizar estas equivalencias:

$$5 \% \leftrightarrow \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

$$10 \% \leftrightarrow \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

$$20 \% \leftrightarrow \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$25 \% \leftrightarrow \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Por ejemplo, para encontrar el 5 % de 450, podemos dividir entre 20:

$$450 \times \frac{1}{20} = \frac{450}{20} = 22,5$$



**Recuerda**

Las palabras “de”, “del” y “de los” indican en forma práctica la multiplicación. Ejemplo:

$$25 \% \text{ de } 100 = 25 \% \times 100$$

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

**Resolución**

- a. Calculamos cuál es el costo del servicio técnico por el primer año y cuánto se debería pagar en total.

Precio	1 año de servicio técnico (ST)	Lavadora más 1 año de ST
S/2000	20 % de 2000 = $\frac{20}{100} \times 2000 = 400$	2000 + 400 = S/2400

- b. Calculamos cuánto es el servicio técnico del segundo año y cuánto cuesta la lavadora con servicio técnico hasta el segundo año.

Lavadora más 1 año de ST	Precio del segundo año de ST	Lavadora más 2 años de ST
S/2400	25 % de 2400 = $\frac{25}{100} \times 2400 = 600$	2400 + 600 = S/3000

- c. Determinamos qué porcentaje del precio de la lavadora representa el servicio técnico por dos años.

Precio total del ST	Porcentaje del ST respecto al precio de la lavadora
400 + 600 = S/1000	$\frac{1000}{2000} \times 100 \% = 50 \%$

Ahora, respondemos la siguiente pregunta:

- 1. ¿Aumentar en forma sucesiva 20% y 25% de 2000 es lo mismo que aumentar 45% de 2000? Justifica tu respuesta con un ejemplo.




## Aprendemos a partir del error

### Situación C: Visitamos un centro comercial

Durante la semana de la moda, las prendas de vestir se venden con un descuento del 20 %; además, si se compran al por mayor (a partir de un cuarto de docena), hay un descuento adicional del 20 % sobre el precio rebajado.

Prenda de vestir	Precio (S/)
Pantalón <i>jean</i> hombres	90
Pantalón <i>jean</i> mujeres	80
Polo de mujer manga corta	25
Polo de mujer manga larga	35
Polo de hombre manga larga	40
Polo de hombre manga corta	30
Casaca de hombre	160

Ana compra para ella 3 pantalones *jean*, 3 polos manga corta y 3 polos manga larga. Juan compra para él 3 pantalones, 3 polos manga larga, 3 polos manga corta y una casaca. ¿Cuánto gasta cada uno en ropa?

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

### Resolución

Determinamos los gastos realizados por Ana y por Juan, y completamos los datos en la tabla.

Cantidad de prendas	Importe de la compra (S/)	1.º dscto. (S/)	Importe con el 1.º dscto. (S/)	2.º dscto. (S/)	Importe de compra final (S/)
3 pantalones <i>jean</i>	240	48	192	48	144
3 polos manga larga	105	21	84	21	63
3 polos manga corta	75	15	60	12	48
<b>Total</b>	<b>420</b>				<b>255</b>

Ana ha gastado S/255.

Cantidad de prendas	Importe de la compra (S/)	1.º dscto. (S/)	Importe con el 1.º dscto. (S/)	2.º dscto. (S/)	Importe de compra final (S/)
3 pantalones <i>jean</i>	270	54	216	54	162
3 polos manga larga	120	24	96	24	72
3 polos manga corta	90	18	72	18	54
1 casaca	160	32	128	-	128
<b>Total</b>	<b>570</b>				<b>416</b>

Juan ha gastado S/416.



### Ten en cuenta

Para calcular el valor total de las prendas compradas, se multiplica la cantidad de prendas compradas por el precio unitario.

Por ejemplo, si se compran 4 poleras y el precio unitario es 54 soles, el valor de la compra se calcula así:

- Cantidad de poleras: 4
- Precio por unidad: S/54
- Valor de compra =  $4 \times 54$

Valor de compra = S/216

Por lo tanto, el valor de la compra es 216 soles.



## Recuerda

Los **descuentos sucesivos** son descuentos que se efectúan uno a continuación de otro; se considera el nuevo 100 % la cantidad que va quedando.

Por ejemplo, en una tienda ofrecen dos descuentos sucesivos del 20 % y 20 % por la compra de una cocina cuyo precio es 1200 soles. ¿Cuánto se pagará por la cocina?

### Primer descuento:

20 % de 1200

$$\frac{20}{100} \times 1200 = 240$$

$$1200 - 240 = 960$$

### Segundo descuento:

20 % de 960

$$\frac{20}{100} \times 960 = 192$$

$$960 - 192 = 768$$

Entonces, por la compra de la cocina se pagará 768 soles.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. ¿Cuántas veces se hace el descuento en el valor de la compra de tres pantalones?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. ¿Qué significa descontar el 20 % adicional sobre el precio ya rebajado?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3. Calcula el valor final de los tres pantalones que ha comprado Ana. ¿Coincide con los datos de la tabla?


4. Según la actividad 3, si no coincide, verifica los valores finales. Completa los datos en las siguientes tablas y determina cuánto gastaron Ana y Juan.

Cantidad de prendas (Ana)	Importe de la compra (S/)	1.º dscto. (S/)	Importe con el 1.º dscto. (S/)	2.º dscto. (S/)	Importe de compra final (S/)
3 pantalones <i>jean</i>	240				
3 polos manga larga	105				
3 polos manga corta	75				
<b>Total</b>	<b>420</b>				

Cantidad de prendas (Juan)	Importe de la compra (S/)	1.º dscto. (S/)	Importe con el 1.º dscto. (S/)	2.º dscto. (S/)	Importe de compra final (S/)
3 pantalones	270				
3 polos manga larga	120				
3 polos manga corta	90				
1 casaca	160				
<b>Total</b>	<b>640</b>				

La tabla considera los descuentos sucesivos cuando la compra es de, por lo menos, tres prendas. Por lo tanto:

Ana gasta . Juan gasta .



## Ten en cuenta

Al aplicar el tanto por ciento a una determinada cantidad, el resultado no siempre será un valor entero.

Ejemplo:

$$20\% \text{ de } 84 = \frac{20}{100} \times 84 = 16,8$$

## Evaluamos nuestros aprendizajes



### Propósito

Establecemos relaciones entre datos y los transformamos en expresiones que incluyen aumentos y descuentos porcentuales sucesivos; además, expresamos con lenguaje numérico nuestra comprensión del IGV y usamos procedimientos diversos para realizar operaciones con porcentajes. Asimismo, justificamos afirmaciones con conocimientos sobre aumentos o descuentos porcentuales.



Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. Celia dice que, si su pulsera la vende a 40 % menos de su valor, esta costaría S/12. ¿Cuál es el precio real de la pulsera?
 

(a) S/80      (b) S/30      (c) S/50      (d) S/20
2. Joaquín quiere comprar una moto que cuesta S/15 222, incluido el 18 % del IGV. ¿Cuál es el costo de la moto sin IGV?
 

(a) S/12 900      (b) S/13 900      (c) S/10 900      (d) S/11 900
3. Un automóvil cuesta \$20 000. Si después de un año su precio se reduce en 20 % y al año siguiente en 10 %, ¿cuál será su nuevo valor?
 

(a) \$12 000      (b) \$14 400      (c) \$15 000      (d) \$16 500
4. En una tienda de ropa de moda, los precios de polos de algunas marcas tienen un descuento solo por hoy. Mañana se incrementarán en los porcentajes que se indican en la siguiente tabla:

Marca	Precio (S/)	Descuento por hoy	Precio final hoy	Aumento mañana	Valor final mañana
Tyfy	30	10 %		3 %	
Silve	40	5 %		2 %	
Genuino	35	10 %		3 %	
Peruano	50	15 %		5 %	
Elegante	45	20 %		4 %	
Moda	20	12 %		2 %	
<b>Total</b>					

- a. ¿Cuál será el precio final de cada producto hoy y mañana?
- b. Bety afirma que, si compra hoy un polo Silve y otro de marca Peruano, el descuento que le harán por el total es del 20 %. ¿Es correcta su afirmación? Justifica tu respuesta.



### Recuerda

Para calcular mentalmente el 20 % de 240:

- Primero, puedes calcular el 10 % de 240 = 24.

- Luego, duplicas el resultado:

$$24 \times 2 = 48$$

Por lo tanto, el 20 % de 240 es 48.



### Ten en cuenta

Para **calcular porcentajes** también se puede dividir la unidad en 10 partes iguales y a cada parte asignarle un décimo de la cantidad dada, y a partir de ese dato encontrar los porcentajes.

Ejemplo:  
Obtén el 40 % de 750.

75 75 75 75 75 75 75 75 75 75

El 40 % es 300

5. Gabriela quiere comprarse un vestido que cuesta S/260. Sin embargo, le falta el 30 % del dinero. ¿Cuánto dinero tiene Gabriela?
  - a) S/140
  - b) S/178
  - c) S/182
  - d) S/200
6. En una tienda A, se vende un televisor a S/1230,50 con un descuento de 20 %. La tienda B vende un televisor de iguales características al mismo precio, pero con dos descuentos, uno de 10 % seguido de otro también de 10 %. ¿Cuál de las dos tiendas lo vende más barato?
7. Santiago aprovecha la liquidación de una tienda de deportes para comprar un par de zapatillas con un 30 % de descuento. Si Santiago pagó S/140, ¿cuál es el descuento recibido?
  - a) S/60
  - b) S/84
  - c) S/42
  - d) S/98
8. Iván afirma que, si se reduce el precio de un artículo en 20 % y después se aumenta en 20 %, volvemos al precio inicial. ¿Es correcta su afirmación? Justifica con un ejemplo.



Fuente: Shutterstock

## Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre datos y las transformé en expresiones numéricas que incluyen aumentos y descuentos porcentuales sucesivos.			
Expresé con lenguaje numérico el significado del IGV en transacciones financieras y comerciales.			
Empleé estrategias de cálculo y procedimientos diversos para realizar operaciones con porcentajes.			
Justifiqué con mis conocimientos matemáticos afirmaciones sobre aumentos y descuentos porcentuales.			

## ¿Cómo utilizamos progresiones aritméticas para resolver situaciones de la vida diaria?

### Construimos nuestros aprendizajes



#### Propósito

Establecemos relaciones entre datos y valores desconocidos, y transformamos esas relaciones en expresiones algebraicas que incluyen la regla de formación de progresiones aritméticas. Asimismo, empleamos estrategias heurísticas y procedimientos diversos para resolver problemas de progresión aritmética.



#### Sembramos más árboles

Un recurso indispensable para tener salud sostenible en zonas urbanas es la generación de espacios verdes. Por ello, Fabián y sus amigos de la brigada ecológica de la escuela sembrarán árboles en diversos lugares de la comunidad durante 12 jornadas de trabajo. De acuerdo con su planificación, el primer día sembrarán 13 árboles; el segundo día, 17; el tercer día, 21, y así sucesivamente se incrementará la cantidad de árboles.



Fuente: Shutterstock

Ayuda a Fabián a responder las siguientes preguntas:

- ¿Qué cantidad de árboles se sembrará el último día de la campaña?
- ¿Cuántos árboles sembrará en total la brigada ecológica?





Muy bien, ya estamos listos para iniciar el desarrollo de la ficha 6.



## Comprendemos el problema

1. ¿Qué datos te ayudarán a responder las preguntas de la situación?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. ¿Qué te pide resolver la situación?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3. ¿En cuánto aumenta el número de árboles sembrados cada día?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

4. Observa y analiza la siguiente situación:

Miluzka se prepara para entrenar todos los días para una carrera solidaria que se celebrará dentro de 9 semanas. Si la primera semana de su entrenamiento lo hizo durante 30 minutos, y cada semana entrena 15 minutos más que la semana anterior, ¿cuánto tiempo entrenará la semana previa a la carrera?

### Resolución

Para averiguar el tiempo que entrenará Miluzka la semana previa a la carrera, realizamos lo siguiente:

- Organizamos la información en una tabla.

Semana	1	2	3	4	5	...
Tiempo de entrenamiento (min)	30	45	60	75	90	...

Razón de la P. A.    +15   +15   +15   +15

- Observamos la relación que existe entre los términos.

Día	Tiempo de entrenamiento (min)	Expresión matemática	Expresión equivalente
$a_1$	30	$30 + 15(0)$	$30 + 15(1 - 1)$
$a_2$	45	$30 + 15(1)$	$30 + 15(2 - 1)$
$a_3$	60	$30 + 15(2)$	$30 + 15(3 - 1)$
$a_4$	75	$30 + 15(3)$	$30 + 15(4 - 1)$
$a_5$	90	$30 + 15(4)$	$30 + 15(5 - 1)$
⋮	⋮	⋮	⋮
$a_n$			



### Ten en cuenta

Una **progresión aritmética** (P. A.) es una sucesión de números tales que la diferencia de cualquier par de términos sucesivos de la secuencia es constante; dicho valor constante es llamado diferencia o razón aritmética de la progresión.

3; 5; 7; 9; ...  
+2   +2   +2

La razón de la P. A. es 2.

45; 40; 35; 30; ...  
-5   -5   -5

La razón de la P. A. es -5.



- La tabla anterior determina la expresión matemática que relaciona los días con el tiempo de entrenamiento.

$$a_n = 30 + 15(n - 1)$$

Tiempo que entrenará la semana previa a la carrera:

$$a_8 = 30 + 15(8 - 1) = 30 + 15(7) = 135$$

Por tanto, la semana previa a la carrera entrena 135 min.

5. Describe el procedimiento que realizarías para responder las preguntas de la situación.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## Ejecutamos la estrategia o plan

6. Completa la información en la tabla y responde.

Día	1	2	3	4	5	6	...
	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	...
N.º de árboles sembrados							...

- ¿Cuántos árboles sembraron los brigadistas en el primer día?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- Según la tabla anterior, ¿cuál es la razón o diferencia de la progresión aritmética? Justifica tu respuesta.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

7. En la siguiente tabla, completa los datos que faltan para encontrar la relación que existe entre los términos.

Día	Número de árboles sembrados	Expresión matemática	Expresión equivalente
$a_1$	13	$13 + 4(0)$	$13 + 4(1 - 1)$
$a_2$	17	$13 + 4(1)$	$13 + 4(2 - 1)$
$a_3$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_n$			

8. De la tabla anterior, determina la expresión matemática que relaciona los días con el número de árboles sembrados, para cualquier cantidad de días.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



### Ten en cuenta

Si se conoce la razón aritmética,  $r$ , y el primer término,  $a_1$ , el término general de una progresión aritmética se calcula con esta expresión:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Donde

$a_n$ :  $n$ -ésimo término (puede ser el último o uno cualquiera)

$a_1$ : primer término

$r$ : razón aritmética

$n$ : número de términos

Ejemplo:

Sea la progresión aritmética:

$a_1$   $a_2$   $a_3$   $a_4$   $a_5$   $a_6$   
 2; 6; 10; 14; 18; 22  
 $\swarrow$   $\swarrow$   $\swarrow$   $\swarrow$   $\swarrow$   
 $+4$   $+4$   $+4$   $+4$   $+4$

$$a_1 = 2; r = +4; n = 6;$$

$$a_6 = 2 + (6 - 1) \times 4 = 22$$



## Comprobamos nuestros aprendizajes



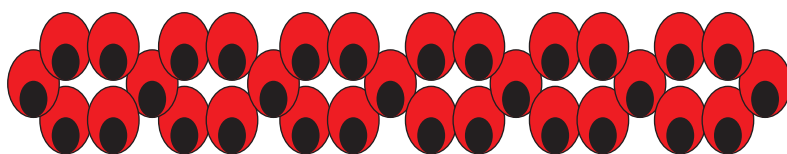
### Propósito

Representamos nuestra comprensión sobre la regla de formación de progresiones aritméticas. Empleamos estrategias y procedimientos para determinar los términos desconocidos y la suma de términos de una progresión aritmética. Asimismo, justificamos nuestras afirmaciones con conocimientos y corregimos errores si los hubiera.



### Situación A: Elaboramos pulseras con semillas

Ana hace pulseras de huayruro. Para elaborarlas, primero realiza pequeños eslabones con las semillas.



Ella analiza la cantidad de semillas de la siguiente manera:

- En un eslabón hay 6 semillas.
- En dos eslabones hay 11 semillas.
- Y, si se juntan tres eslabones, se observa que hay 16 semillas.

Ana elabora una pulsera con 12 eslabones. ¿Cuántas semillas necesitará para hacerla?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

Ana ha realizado el siguiente análisis: 1 eslabón de la pulsera tiene 6 semillas, 2 eslabones tienen 11 semillas, 3 eslabones tienen 16 semillas, y así sucesivamente. Completamos la información en la tabla según los datos que tenemos.

N.º de eslabones	1	2	3	4	5	...
Cantidad de semillas	6	11	16			...

Debemos determinar la cantidad de semillas necesarias para elaborar una pulsera. Para ello, calculamos la distancia entre dos términos, que es igual a la razón:  $r = 11 - 6 = 5$ . Observamos que la razón de la P. A. es 5.



### Ten en cuenta

La **razón** o **diferencia** se halla restando un término cualquiera con su antecesor.

Por ejemplo:

75; 68; 61; 54; 47; 40

Observa cómo se obtiene la razón aritmética:

$$r = 40 - 47 = -7$$

$$r = 47 - 54 = -7$$

$$r = 54 - 61 = -7$$

$$r = 61 - 68 = -7$$

$$r = 68 - 75 = -7$$



## Recuerda

La **diferencia** entre cualquier término y su anterior es constante.

Sean los términos:

$$a_1; a_2; a_3; a_4; \dots; a_n \dots$$

Se cumple:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= a_3 - a_2 \\ &= a_4 - a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

En la tabla, completamos los datos que faltan para observar la relación que existe entre los términos.

N.º de eslabones	N.º de semillas	Expresión matemática	Expresión equivalente
1	6	$6 + 5(0)$	$6 + 5(1 - 1)$
2	11	$6 + 5(1)$	$6 + 5(2 - 1)$
3	16	$6 + 5(2)$	$6 + 5(3 - 1)$
4	21		
5	26		
⋮	⋮	⋮	⋮
$n$			

- Determinamos la expresión matemática que relaciona la cantidad de semillas que se necesitará.
- Para elaborar 5 eslabones tenemos:  $a_5 = 6 + 5(5 - 1)$
- Para  $n$  eslabones tenemos:  $a_n = 6 + 5(n - 1)$

La cantidad de semillas necesarias está determinada por  $a_n = 6 + 5(n - 1)$ .

Dado que  $n = 12$ , tenemos que:

$$a_{12} = 6 + 5(12 - 1) = 61$$

**Respuesta:** Ana necesita 61 semillas para formar una pulsera.

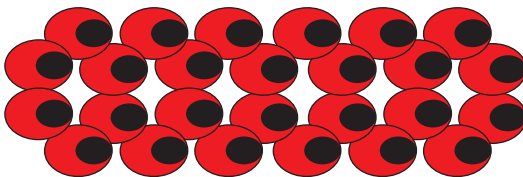
**Ahora, respondemos las siguientes preguntas:**

1. ¿Cómo se determina la diferencia o razón de una progresión aritmética? Justifica con un ejemplo.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. Ana utilizó 151 semillas para elaborar un collar. ¿Cuántos eslabones tenía el collar?


3. Si Ana quiere diseñar la pulsera con una forma diferente, ¿usará la misma cantidad de semillas?, ¿por qué?



...




## Ten en cuenta

Sea la progresión aritmética de  $n$  términos y de razón  $r$ .

$$a_1; a_2; a_3; a_4; \dots; a_n$$

Para obtener la cantidad de términos de una progresión aritmética, usamos esta expresión:

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

Comprobamos en la siguiente P. A. de cinco términos:

$$5; 8; 11; 14; 17$$

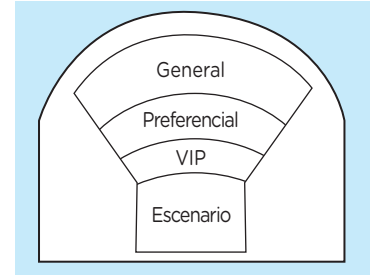
De acuerdo con lo señalado, se cumple esta relación:

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

$$n = \frac{a_5 - a_1}{r} + 1 = \frac{17 - 5}{3} + 1 = 5$$

### Situación B: Contamos los asientos en el anfiteatro

Un anfiteatro tiene las características de la figura adjunta. Sus 40 filas están distribuidas de la siguiente manera: las primeras 8 filas conforman la zona VIP; las siguientes 12 filas, la zona preferencial, y las últimas 20 filas, la zona general. Si la primera fila cuenta con 20 asientos; la segunda, con 22; la tercera, con 24, y así sucesivamente, ¿cuántos asientos hay en la zona VIP y cuántos hay en la zona preferencial?



A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

#### Resolución

Organizamos los datos:

1. <sup>a</sup> fila; 2. <sup>a</sup> fila; 3. <sup>a</sup> fila; ... ; 8. <sup>a</sup> fila	9. <sup>a</sup> fila; ... ; 20. <sup>a</sup> fila	21. <sup>a</sup> fila; ... ; 40. <sup>a</sup> fila
<b>Zona VIP</b>	<b>Zona preferencial</b>	<b>Zona general</b>
Hay 8 términos	Hay 12 términos	Hay 20 términos

Primero, calculamos la cantidad de asientos de la fila 8:

$$20; 22; 24; \dots ; a_8$$

$$a_8 = 20 + 7(2) = 34$$

Luego, calculamos el total de asientos en la zona VIP:

$$S_8 = \left( \frac{a_1 + a_8}{2} \right) \times 8 = \left( \frac{20 + 34}{2} \right) \times 8 = 216$$

Por lo tanto, hay 216 asientos en la zona VIP.

El primer término en la zona preferencial es 36 (asientos), que corresponde a la 9.<sup>a</sup> fila.

$$36; 38; 40; \dots ; b_{12}$$

En la fila 12 tenemos:  $b_{12} = 36 + (11)(2) = 58$

Luego, calculamos el total de asientos en la zona preferencial:

$$S_{12} = \left( \frac{b_1 + b_{12}}{2} \right) \times 12 = \left( \frac{36 + 58}{2} \right) \times 12 = 564$$

Por lo tanto, hay 564 asientos en la zona preferencial.

**Respuesta:**

En la zona VIP hay 216 asientos, y en la zona preferencial, 564.

**Ahora, respondemos las siguientes preguntas:**

- ¿Agrupar la cantidad de asientos según la zona resulta una estrategia práctica? Sustenta tu respuesta.


- ¿Cómo podrías hallar la cantidad de asientos que hay en la zona general? Explica.




#### Ten en cuenta

En una P. A., si conoces el valor de dos términos, puedes conocer el valor de los otros.

Por ejemplo, en una P. A. se sabe que  $a_5 = 32$  y  $a_{12} = 74$ .

Calcula  $a_1$ .

Por una propiedad anterior:

$$a_{12} - a_5 = 7r$$

$$74 - 32 = 7r \rightarrow r = 6$$

$$a_5 = a_1 + 4(6) = 32$$

$$a_1 = 8$$



#### Recuerda

Para sumar los términos de una P. A., se utiliza la siguiente fórmula:

$$S_n = \left( \frac{a_1 + a_n}{2} \right) n$$

Donde

$S_n$ : Suma de  $n$  términos

$a_1$ : primer término

$a_n$ : último término

$n$ : número de términos

Ejemplo:

Calcula la suma de términos de esta P. A.:

13; 17; 21; 25; 29

Identificamos los datos:

$$n = 5; a_1 = 13; a_5 = 29$$

$$S_5 = \left( \frac{13 + 29}{2} \right) \times 5 = 105$$



## Aprendemos a partir del error

### Situación C: Analizamos la distancia recorrida por un ciclista

Un ciclista baja por una pendiente aumentando cada vez más su velocidad. En el primer segundo recorre 3 m; en el siguiente segundo, 6 m; en el tercero, 9 m; en el cuarto, 12 m; y así sucesivamente. Si llega hasta la parte baja de la pendiente en 10 segundos, encuentra la distancia total recorrida.



Fuente: Shutterstock



### Recuerda

Para hallar el término  $n$ -ésimo de una P. A., usamos esta expresión:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Para sumar los  $n$  primeros términos de una P. A., usamos esta expresión:

$$S_n = \left( \frac{a_1 + a_n}{2} \right) n$$

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

### Resolución

Según los datos, esto es lo que recorre en cada segundo:

En el segundo 1	En el segundo 2	En el segundo 3	En el segundo 4
3 m	6 m	9 m	12 m

Y así sucesivamente.

Por lo tanto, en el segundo 10, habrá recorrido

$$a_{10} = 3 + 11(3) = 36 \text{ m}$$

Determinamos la distancia total recorrida:

$$S_{10} = \left( \frac{3 + 36}{2} \right) \times 10 = 195$$

**Respuesta:** La distancia total recorrida fue 195 m.

**Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:**

1. Completa la tabla y comprueba tu resultado.

Segundo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Distancia (m)	3	6								

2. ¿Cuál es el valor del décimo término? ¿Coincide con la respuesta propuesta en la solución? Si no es así, corrige el error y responde a la situación.




## Evaluamos nuestros aprendizajes



### Propósito

Establecemos relaciones entre datos y valores desconocidos y las transformamos en expresiones algebraicas que incluyen la regla de formación de progresiones aritméticas, y expresamos nuestra comprensión sobre la regla de formación. Asimismo, empleamos estrategias y procedimientos para determinar los términos desconocidos y la suma de términos de una progresión aritmética, y justificamos afirmaciones con conocimientos matemáticos.



Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

- Con el fin de prepararse para una carrera, un deportista comienza corriendo 3 km y aumenta 1,5 km su recorrido cada día. ¿Cuántos días tiene que entrenar para llegar a un recorrido de 15 km?
 

(a) 5 días      (b) 7 días      (c) 8 días      (d) 9 días
- Una ONG tiene la finalidad de mejorar las condiciones de salud de una comunidad. Si todos los meses se incorporan 5 personas y al final del primer mes hay 125 voluntarios, ¿cuántos voluntarios habrá en la ONG al cabo de dos años y medio?
 

(a) 130 personas      (c) 270 personas  
(b) 150 personas      (d) 345 personas
- El alquiler de una cuatrimoto durante la primera hora cuesta S/10, y S/6 más cada nueva hora. ¿Cuánto se debe pagar en total si el alquiler fue por 12 horas?
 

(a) S/76      (c) S/82  
(b) S/78      (d) S/92
- Las figuras mostradas representan las estructuras químicas de derivados del benceno.

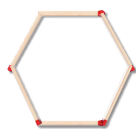


Fig. 1  
Benceno

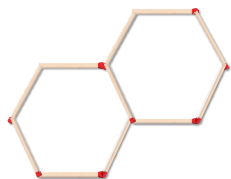


Fig. 2  
Naftaleno

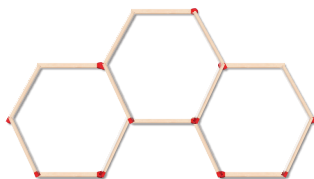


Fig. 3  
Fenantreno

¿Cuántos palitos de fósforo se necesitan para formar una figura con 24 hexágonos?



### Ten en cuenta

Observa cómo se han organizado las carpetas para realizar grupos en el aula. Indica cuántos estudiantes se pueden sentar en cada arreglo y expresa un modelo matemático.



$$3 + 3 = 2(3) + 2^0$$



$$3 + 2 + 3 = 2(3) + 2^1$$



$$3 + 2 + 2 + 3 = 2(3) + 2^2$$

Para  $n$  carpetas:  $2(3) + 2^{n-2}$



## Ten en cuenta

Si  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$  es la suma de los  $n$  primeros términos de una progresión aritmética, entonces:

$$S_n = \left( \frac{a_1 + a_n}{2} \right) n$$

También puedes utilizar:

$$S_n = \left( \frac{\text{suma de términos equidistantes extremos}}{2} \right) n$$

Por ejemplo, la suma de los términos de la sucesión

3; 7; 11; 15; 19; 23

está dada por

$$S_n = \left( \frac{a_1 + a_n}{2} \right) n$$

$$S_n = \left( \frac{3 + 23}{2} \right) \times 6 = 78$$

También:

$$S_n = \left( \frac{7 + 19}{2} \right) \times 6 = 78$$

5. En un teatro, la primera fila dista 4,5 m del escenario, mientras que la octava fila se encuentra a 9,75 m de dicho lugar. ¿A cuántos metros del escenario estará la fila 16 si la distancia entre fila y fila es la misma?
- a) 14,75 m      b) 15,75 m      c) 17,35 m      d) 18,35 m
6. Juan decide ahorrar para comprar una tableta y afirma que, si en enero deposita  $S/30$  en su alcancía y si cada mes introduce la misma cantidad del mes anterior más  $S/4$ , entonces al finalizar el año habrá ahorrado  $S/624$ . ¿Será cierta la afirmación de Juan? Justifica tu respuesta.
7. Un objeto cae de un globo aerostático que se encuentra a una altura de 2304 m. Si se despreja la resistencia del aire y, además, se sabe que se desplaza 16 m en el primer segundo, 48 m en el siguiente segundo, 80 m en el tercer segundo, 112 m en el cuarto, y así sucesivamente, ¿a los cuántos segundos llegará a tierra?
- a) 17 segundos  
b) 15 segundos  
c) 13 segundos  
d) 12 segundos
8. Una empresa premia con bonos a sus 10 mejores vendedores, para lo cual dispone de  $S/46\ 000$ . Se sabe que el décimo vendedor de la lista recibirá  $S/1000$  y que, además, la diferencia de los bonos entre los vendedores sucesivamente clasificados es constante. Halla el bono para cada vendedor.

## Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre datos y valores desconocidos, y transformé esas relaciones en expresiones algebraicas que incluyen la regla de formación de progresiones aritméticas.			
Expresé mi comprensión sobre la regla de formación de progresiones aritméticas.			
Empleé estrategias para resolver problemas de suma de términos de una progresión aritmética.			
Justifiqué con mis conocimientos matemáticos afirmaciones sobre progresiones aritméticas.			

## ¿Cómo nos ubicamos con ayuda de un mapa?

### Construimos nuestros aprendizajes



#### Propósito

Describimos la ubicación o el recorrido de un objeto real o imaginario y lo representamos utilizando planos o mapas a escala. Asimismo, empleamos estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para describir la localización de los objetos en planos a escala usando unidades convencionales.



#### Realizamos un viaje familiar

Antonio y su familia fueron de paseo a la ciudad de Huancavelica.

Ellos decidieron visitar los lugares más conocidos de aquella ciudad:

- A** catedral
- B** mirador natural Cerro de Oropesa
- C** piscina de aguas termales San Cristóbal
- D** plaza de Armas
- E** plaza de Toros



Fuente: Google Maps

Ayuda a Antonio a orientarse en el mapa.

- a. Describe la ubicación de los lugares A, B, C y E usando los puntos cardinales. Toma como lugar de referencia la plaza de Armas.
- b. Determina el recorrido más corto del punto D al B y del punto B al E. Describe el recorrido usando los puntos cardinales y el nombre de las calles.
- c. Calcula las **distancias geométricas** reales desde la plaza de Armas hasta A, B, C y E.



## Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

6. Relaciona cada situación con una forma de solución.

Describir la ubicación de lugares en un plano o mapa.

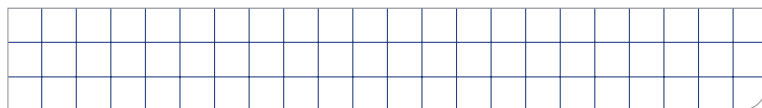
Interpretar la escala

Calcular distancias geométricas reales.

Usar los puntos cardinales

## Ejecutamos la estrategia o plan

7. Describe la ubicación de los lugares A, B, C y E usando los puntos cardinales. Considera como lugar de referencia la plaza de Armas.



8. Utiliza las cuadras, los nombres de las calles y los puntos cardinales para describir el recorrido más corto.

De B a E	De D a B

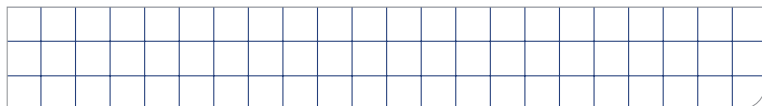
9. Usa una regla y mide las distancias geométricas. Luego, determina las distancias reales usando la escala gráfica que aparece en el plano de la situación. Observa el ejemplo.

Escala gráfica: 0 100 m

Ubicación	Distancia geométrica en el plano	Distancia real
Desde D hacia A	1 cm	100 m
Desde D hacia B		
Desde D hacia C		
Desde D hacia E		

## Reflexionamos sobre el desarrollo

10. Si quisieras describir cómo llegar de tu escuela a tu casa, ¿cómo lo harías?



## Ten en cuenta

La **rosa náutica** o rosa de los vientos es un símbolo en forma de círculo que se encuentra en los planos o cartas de navegación.



En ella se señalan los puntos cardinales, norte (N), sur (S), este (E) y oeste (O), y los puntos equidistantes entre estos: noreste (NE), noroeste (NO), sureste (SE) y suroeste (SO).



## Recuerda

La **escala** se expresa como la **razón geométrica** de la longitud que tiene un objeto representado en un plano o mapa y la longitud del objeto en la realidad.

La **razón geométrica** es la relación entre dos cantidades a través de una división. Por ejemplo, la razón geométrica de 3 y 6 es

$$\frac{3}{6} \text{ o } \frac{1}{2}$$



## Comprobamos nuestros aprendizajes

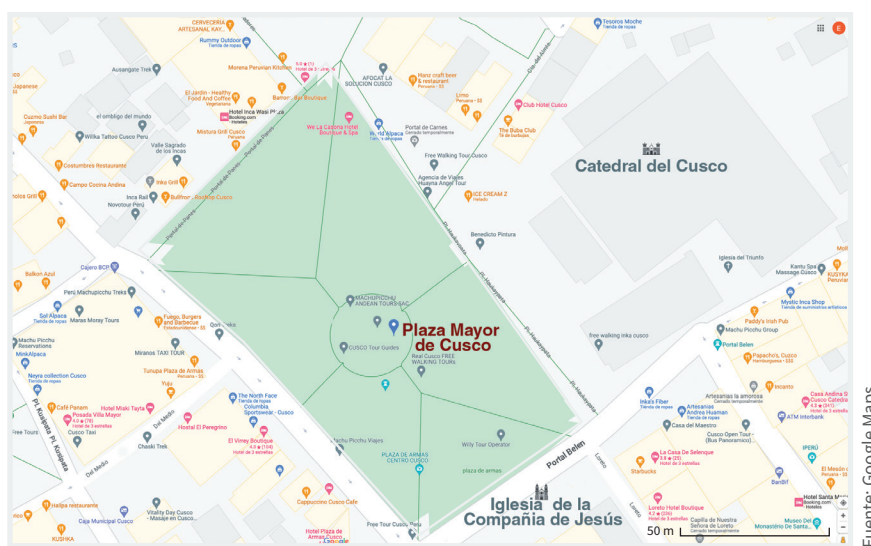


### Propósito

Leemos planos o mapas a escala y los usamos para ubicarnos en el espacio y determinar rutas empleando coordenadas cartesianas. Asimismo, planteamos afirmaciones y las justificamos con ejemplos y conocimientos geométricos sobre perímetros y propiedades de los objetos, y corregimos errores si los hubiera.

### Situación A: Medimos el perímetro de la plaza

Se desea pintar de amarillo el borde de toda la plaza de Armas de la ciudad del Cusco para evitar que se estacionen los autos. Según el siguiente plano, ¿cuál es el perímetro de la plaza?

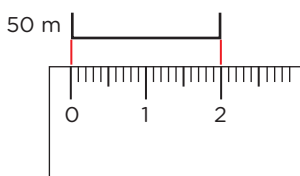


Fuente: Google Maps



### Ten en cuenta

En la parte inferior derecha del plano, se indica la siguiente escala:



A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

Del plano observamos que la escala mide 2 cm, que equivalen a 50 m en la medida real.

Distancia en el plano	2 cm
Distancia real	50 m

Sabemos que  $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ , por lo que  $50 \text{ m} = 5000 \text{ cm}$ .

Como 2 cm en el plano equivalen a 5000 cm en la medida real, deducimos que 1 cm en el plano equivale a 2500 cm.



También, podemos organizar la información en una tabla.

Distancia en el plano	2 cm	2 cm	1 cm
Distancia real	50 m	5000 cm	2500 cm

De este modo, tenemos que la escala es 1:2500.

Al medir con una regla, el perímetro de la plaza de Armas resulta 17,2 cm.

La distancia real será  $17,2 \times 2500 = 43\ 000$  cm.

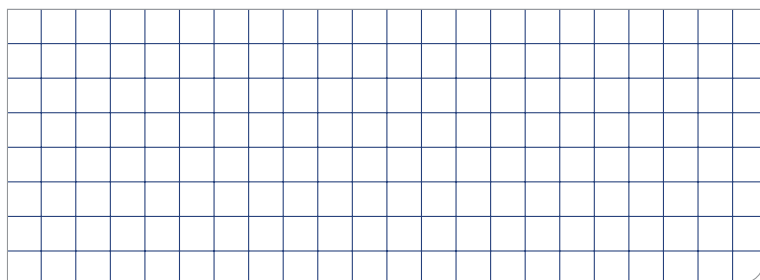
Luego, convertimos de centímetros a metros dividiendo entre 100:

$$\frac{43\ 000}{100} = 430\text{ m}$$

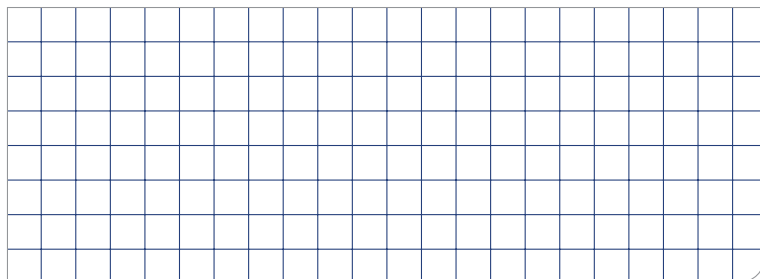
**Respuesta:** El perímetro de la plaza mide 430 metros.

**Ahora, respondemos las siguientes preguntas:**

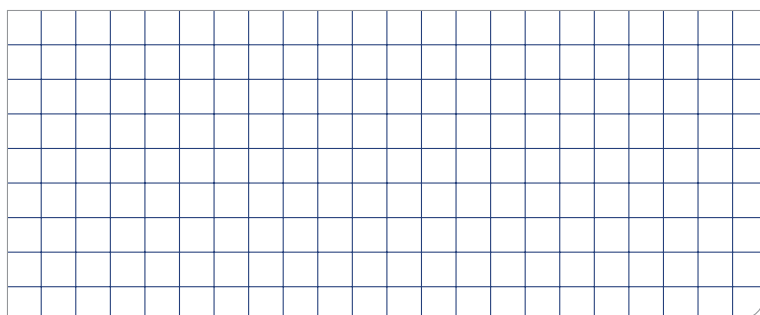
- ¿Por qué es importante considerar el valor de la escala?



- ¿Por qué se dice que 2 cm en el plano equivalen a 5000 cm?



- ¿Qué otros procedimientos puedes seguir para realizar las conversiones de unidades?



### Recuerda

Puedes usar la **regla de tres simple** para hacer los cálculos. Por ejemplo:

Si 2 cm equivalen a 50 m, ¿a cuántos metros equivale 1 cm?

$$\begin{array}{l} 2\text{ cm} \longrightarrow 50\text{ m} \\ 1\text{ cm} \longrightarrow x \end{array}$$

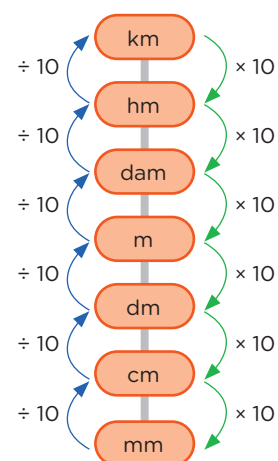
$$x = \frac{1 \times 50}{2} = 25$$

∴ 1 cm equivale a 25 m.



### Ten en cuenta

Para **convertir de una unidad de medida a otra**, puedes usar el siguiente esquema:



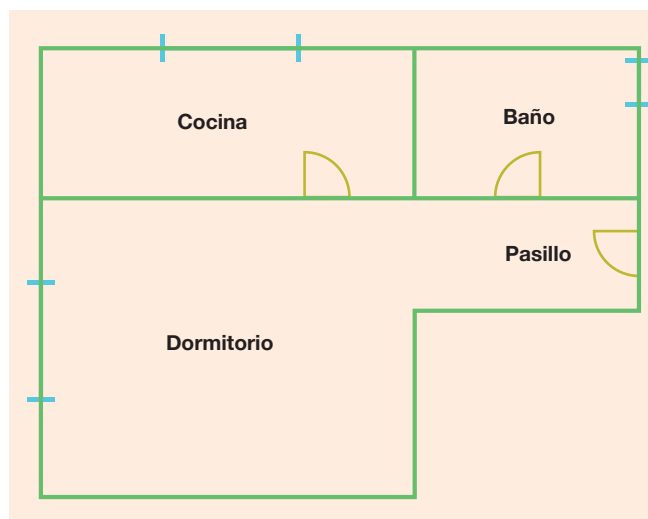
Por ejemplo, convierte 1400 cm a metros.

Según el esquema, para pasar de centímetros a metros, sube 2 espacios, es decir, divide entre  $10^2$  o 100.

$$\frac{1400}{100} = 14\text{ m}$$

## Situación B: Calculamos el perímetro en un plano

Luciana tiene la imagen que representa el plano de su casa de campo. Ella sabe que cada centímetro del plano representa 1,5 metros de la realidad. ¿Cuál es el perímetro del baño en la realidad y el perímetro real de la casa?



### Recuerda

El **perímetro** de una figura plana es igual a la medida de su contorno.



### Ten en cuenta

Si 1 cm en el plano representa en la realidad 1,5 m, ¿a cuántos metros equivalen 16 cm?

$$\begin{array}{l} 1 \text{ cm} \longrightarrow 1,5 \text{ m} \\ 16 \text{ cm} \longrightarrow x \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1 \text{ cm}}{16 \text{ cm}} = \frac{1,5 \text{ m}}{x}$$

$$x = 24 \text{ m}$$

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

- Luego de medir con una regla, el perímetro del baño es  $2 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$ .
- 1 cm en el plano representa en la realidad 1,5 m. Entonces, 10 cm equivalen a 15 m.
- Para calcular el perímetro de la casa, sumamos las longitudes de los lados del plano; así, obtenemos 28 cm. Planteamos una relación de proporcionalidad directa:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ cm} \longrightarrow 1,5 \text{ m} \\ 28 \text{ cm} \longrightarrow x \end{array} \Rightarrow \frac{1 \text{ cm}}{28 \text{ cm}} = \frac{1,5 \text{ m}}{x} \Rightarrow x \cdot 1 = 28 \times 1,5 \text{ m} \Rightarrow x = 42 \text{ m}$$

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué 10 cm equivalen a 15 m? Justifica tu respuesta.


2. ¿De qué otra forma se puede resolver la situación?






## Evaluamos nuestros aprendizajes



### Propósito

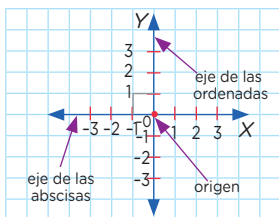
Describimos la ubicación de un objeto y lo representamos en planos o mapas a escala, los cuales leemos y usamos para ubicarnos en el espacio y determinar rutas. Asimismo, empleamos estrategias o procedimientos para describir la localización de objetos en planos a escala usando unidades convencionales; planteamos afirmaciones y las justificamos con conocimientos geométricos.

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.



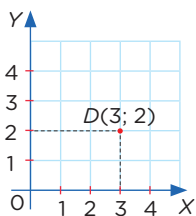
### Ten en cuenta

El plano cartesiano está determinado por dos rectas numéricas (una horizontal y otra vertical) perpendiculares en sus ceros respectivos.



El objetivo de un plano cartesiano es ubicar la posición de un punto mediante dos números.

Por ejemplo, indica la posición del punto D.



Observa que su posición está fijada por los números 3 y 2, y no existe en el plano otro punto que ocupe esa posición.

1. ¿Qué escala se usó para reproducir el mapa pequeño a partir del mapa grande?



Fuente: ASXLAB



- a) 1:1      b) 1:2      c) 1:4      d) 1:8

2. En el mapa del virreinato del Perú (1810), se superpuso un plano cartesiano con origen en el punto O. ¿Cuántas ciudades se muestran en el cuarto cuadrante?



- a) 4      b) 3      c) 5      d) 6

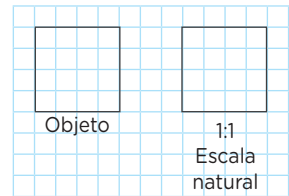
3. El siguiente plano muestra una parte del distrito de Villa El Salvador, provincia de Lima. Si se toma como punto de referencia el cruce de la av. Micaela Bastidas con la av. El Sol, ¿en qué cuadrante se ubica el Parque Industrial? ¿Cuál será la coordenada del cruce de la av. Separadora Industrial con la av. José Carlos Mariátegui?



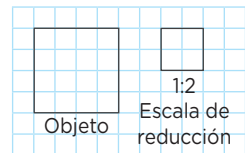
### Ten en cuenta

Los **tipos de escala** son los siguientes:

La **escala natural** se presenta cuando la medida del dibujo coincide con la real. La escala es 1:1.



La **escala de reducción** se presenta cuando la medida del dibujo es menor que la real. Las escalas pueden ser 1:2, 1:10, etc.



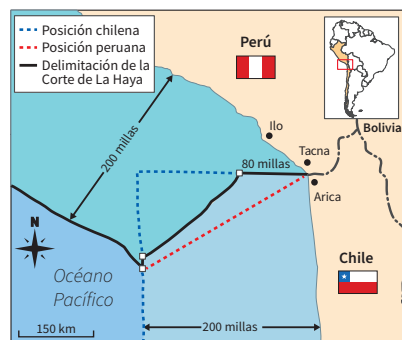
La **escala de ampliación** se presenta cuando la medida del dibujo es mayor que la medida real. Las escalas pueden ser 2:1, 100:1, etc.



- a) I cuadrante, (8; 5)                      c) I cuadrante, (5; 8)  
 b) II cuadrante, (8; 4)                      d) II cuadrante, (5; 8)
4. La distancia entre dos pueblos es 3 km. ¿A qué distancia se encontrarán en un mapa cuya escala es 1:60 000?
- a) 3 cm                      b) 5 cm                      c) 4 cm                      d) 6 cm
5. En un mapa a escala 1:60 000, la distancia entre dos pueblos es 12 cm. ¿Cuál será la distancia geométrica en la realidad?
- a) 1,2 km                      b) 2,8 km                      c) 7,2 km                      d) 8,2 km
6. El área de una cama grande es de 2 m × 2 m. ¿Cuál es el área de un departamento, si se sabe que su largo equivale al de 5,5 camas, y su ancho, al de 3,5 camas? Soledad, estudiante del segundo grado, afirma que el área del departamento es 19,25 m<sup>2</sup>. ¿Es correcta su afirmación? Justifica tu respuesta.

7. Luis ha encontrado un mapa y desea saber cuál es la escala con la que ha sido elaborado. Ayuda a Luis a determinarla.

- a) 1:1 500 000  
 b) 1:15 000 000  
 c) 1:150 000 000  
 d) 1:1 500 000 000



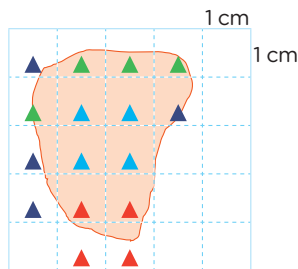
Fuente: Shutterstock





### Ten en cuenta

El método de la cuadrícula consiste en contar la cantidad de cuadrados completos y buscar la manera de agrupar los demás para obtener otros cuadraditos. El valor obtenido no es exacto, pero sí aproximado. Ejemplo:



Cuadrados completos: 4

Cuadraditos completados: 2

Cuadraditos completados: 2

Cuadraditos completados: 1

Total: 9

El área de la superficie es aproximadamente  $9 \text{ cm}^2$ .

8. Describe el procedimiento que seguirías para hallar la superficie en un mapa por el método de la cuadrícula.

- ¿Cuántos cuadraditos aproximadamente puedes contar en la zona marcada?
- Mide el lado del cuadradito. Usando la escala en el mapa, calcula el área que representa en la realidad cada cuadradito.
- Determina el área aproximada del siguiente mapa.



Fuente: Google Maps

## Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Describí la ubicación o el recorrido de un objeto real o imaginario y lo representé utilizando planos o mapas a escala.			
Expresé mi comprensión sobre planos o mapas a escala y los usé para ubicarme en el espacio y determinar rutas.			
Empleé estrategias, recursos o procedimientos para describir la localización de los objetos en planos a escala usando unidades convencionales.			
Justifiqué afirmaciones con conocimientos geométricos.			



## ¿Cómo tomamos decisiones a partir de la ocurrencia de sucesos?

### Construimos nuestros aprendizajes



#### Propósito

Empleamos procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace. Asimismo, expresamos con lenguaje matemático nuestra comprensión sobre el valor de la probabilidad en una situación aleatoria.



#### Evaluamos la demanda de pasajes

Una empresa de buses tiene salidas a Huaraz los fines de semana. Después de revisar el flujo de viajeros en el último año, ha podido estimar la probabilidad de tener determinadas cantidades de pasajeros los fines de semana.



Fuente: Shutterstock

Mediante la siguiente tabla, el gerente de la empresa plantea tener buses operativos en cantidad suficiente para atender la demanda de los fines de semana.

Escenario	Cantidad de pasajeros	Probabilidad del escenario
Extraordinario (feriado largo)	600	0,1
Optimista (verano, fin de mes, vacaciones, etc.)	200	0,3
Regular (trabajo)	100	0,4
Pesimista (días de neblina, manifestaciones)	50	0,2

A partir de la información anterior, ayuda al gerente. Para ello, responde esta pregunta: ¿cuál es el número de pasajeros que espera tener la empresa?



Muy bien, ya estamos listos para iniciar el desarrollo de la ficha 8.



## Comprendemos el problema

1. ¿Cuándo tiene salidas la empresa de buses?


2. ¿Qué escenario es más probable que ocurra para esta empresa? ¿Cómo lo sabes?


3. ¿Es alta la probabilidad de que lleguen 600 pasajeros un fin de semana cualquiera? Explica.


4. ¿Debe esta empresa mantener ómnibus disponibles para 600 pasajeros cada fin de semana?, ¿por qué sí o por qué no?




### Recuerda

Para calcular el número de eventos empleando su probabilidad, bastará con multiplicar el valor de la probabilidad por el tamaño del espacio muestral, es decir, su cardinal.

Por ejemplo, se sabe que la probabilidad de que una persona que asiste al teatro sea varón es de 0,6 y de que sea mujer es de 0,4. Si al teatro asistieron 100 personas, ¿cuántos varones y mujeres fueron al teatro?

$$\text{Varón} = 0,6 \times 100 = 60$$

$$\text{Mujer} = 0,4 \times 100 = 40$$

Por lo tanto, asistieron al teatro 60 varones y 40 mujeres.

## Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

5. Imaginamos 10 fines de semana de acuerdo con los escenarios de la tabla de la situación. De ellos, intenta estimar:
  - a. ¿Cuántos fines de semana serían feriados?
  - b. ¿Cuántos fines de semana esperarías una demanda de 200 pasajeros?
  - c. ¿Cuántas veces te prepararías para recibir 800 pasajeros?
  - d. ¿Habrá algún fin de semana en que no lleguen pasajeros?






**Recuerda**

Conocer el promedio permite conocer los valores representativos de calificaciones, encuestas, censos, salarios, velocidades, entre otros. De esta manera, podrás tomar mejores decisiones.

Por ejemplo, si el promedio de panes que se venden en una panadería es 500, entonces sería una decisión equivocada preparar más del promedio, porque se corre el riesgo de no venderlos.

- 10. Según la tabla, ¿cuántos pasajeros se espera tener en uno, dos, tres y cuatro fines de semana?


- 11. ¿Cuántos pasajeros se esperaría tener por cada fin de semana?


**Reflexionamos sobre el desarrollo**

- 12. Para explicar la probabilidad usando una tabla de frecuencias, ¿qué datos son necesarios? Justifica tu respuesta.


- 13. Considerando la media o promedio para describir la demanda de pasajeros por fin de semana, responde lo siguiente:

¿Puedes asegurar que sea la misma cantidad de pasajeros todos los fines de semana?




## Comprobamos nuestros aprendizajes



### Propósito

Determinamos el espacio muestral de una situación aleatoria y su probabilidad mediante la regla de Laplace, y a partir de este valor identificamos si un suceso es seguro, probable o imposible. Asimismo, justificamos con nuestros conocimientos estadísticos la probabilidad de que ocurra un suceso y corregimos errores si los hubiera.

### Situación A: Lanzamos un dado y dos monedas

La profesora Tania reta a los estudiantes de 2.º grado de secundaria a realizar un experimento aleatorio que consiste en lanzar al aire dos monedas y un dado. Luego, pregunta lo siguiente: ¿cuál es la probabilidad de obtener solo una cara y un número impar?

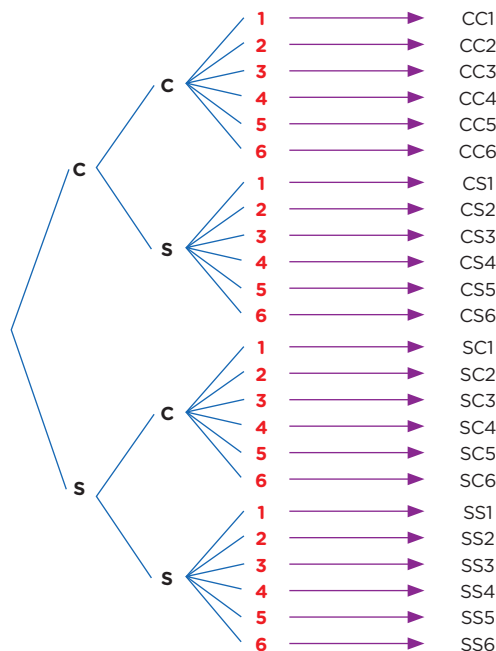


Fuente: Carlos Boza

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

Primero, determinamos el espacio muestral, aplicando la estrategia del diagrama del árbol, para conocer los posibles resultados del experimento.



### Ten en cuenta

Un **experimento aleatorio** es toda prueba o ensayo cuyo resultado no puede predecirse antes de realizar la prueba.

Por ejemplo, se lanza un dado y se anota el número que sale en la cara superior.



### Recuerda

El **espacio muestral** son todos los posibles resultados del experimento aleatorio.

Por ejemplo, Marcos lanza un dado y una moneda a la vez. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

$\Omega = \{1C, 1S, 2C, 2S, 3C, 3S, 4C, 4S, 5C, 5S, 6C, 6S\}$

Hay 12 posibilidades; por lo tanto:

$$n(\Omega) = 12$$



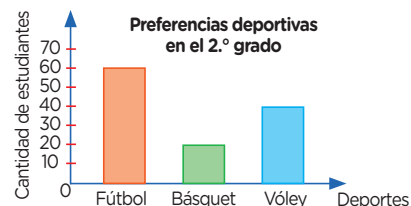


## Situación B: Conocemos las preferencias deportivas

Se realizó una encuesta sobre el deporte que practica cada estudiante de las cuatro secciones de 2.º grado de secundaria. Los resultados se organizaron y representaron en el siguiente gráfico:

Al encontrarnos con un estudiante de 2.º grado:

- ¿Cuál es la probabilidad de que practique natación?
- ¿Cuál es la probabilidad de que practique algún deporte?
- ¿Cuál es la probabilidad de que practique vóley?



A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

### Resolución

Luego de analizar el diagrama de barras, podemos determinar el espacio muestral o los estudiantes de las cuatro secciones. El número de elementos del espacio muestral resulta de sumar 60; 20 y 40; es decir:

$$n(\Omega) = 60 + 20 + 40 = 120$$

Para responder las preguntas, debemos definir los sucesos y la cantidad de elementos que tienen para aplicar la regla de Laplace. Calculamos la probabilidad...

... de los que practican natación	... de los que practican algún deporte	... de los que practican vóley
Ningún estudiante practica natación; es decir: $n(N) = 0$	Todos los estudiantes <sup>1</sup> practican algún deporte; es decir: $n(T) = 120$	Se puede constatar que, de la población, 40 estudiantes practican vóley, cada uno de los cuales es un caso favorable o elemento del suceso $V$ ; entonces $n(V) = 40$ .
$P(N) = \frac{n(N)}{n(\Omega)} = \frac{0}{120} = 0$	$P(T) = \frac{n(T)}{n(\Omega)} = \frac{120}{120}$	Por lo tanto: $n(V) = 40$ .
Por lo tanto, es imposible encontrar aquí un estudiante que practique natación.	Por lo tanto, es seguro que, al encontrarnos con algún estudiante, este practique un deporte.	Por lo tanto: $P(V) = \frac{n(V)}{n(\Omega)} = \frac{40}{120} = 0,33\dots$
		Por lo tanto, es probable que, al encontrarnos con un estudiante, este practique vóley.

Ahora, respondemos la siguiente pregunta:

- Describe el procedimiento que se realizó para dar respuesta a las preguntas de la situación.




### Recuerda

Si  $A$  es un conjunto, entonces  $n(A)$  es el **cardinal de  $A$**  y nos indica el número o cantidad de elementos que tiene.

Por ejemplo, al lanzar un dado, obtener un número par.

Espacio muestral:  
 $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$   
 $n(\Omega) = 6$

$A$ : obtener un número par  
 $A = \{2; 4; 6\} \rightarrow n(A) = 3$



### Ten en cuenta

Si  $A$  es un suceso, entonces la probabilidad de  $A$  está definida así:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Donde

$n(A)$ : N.º de casos favorables  
 $n(\Omega)$ : N.º de casos posibles

Por ejemplo, al lanzar un dado, obtener un número primo.

Determinamos los casos posibles:

Espacio muestral:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$n(\Omega) = 6$

Determinamos los casos favorables:

$A$ : obtener un número primo

$A = \{2; 3; 5\} \rightarrow n(A) = 3$

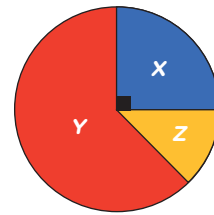
Calculamos la probabilidad de  $A$ :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

## Aprendemos a partir del error

### Situación C: Jugamos a lanzar dardos

Gabriel está jugando a lanzar dardos sobre un tablero circular como el mostrado en la imagen. Si lanza un dardo, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en la zona X?



Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

### Resolución

La cantidad de sectores circulares es 3.

Entonces:  $n(\Omega) = 3$

La zona X representaría un caso favorable, es decir, 1.

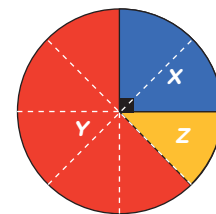
Aplicamos la regla de Laplace:  $P(A) = \frac{1}{3} \approx 0,333\dots$

Redondeamos al centésimo:  $P(A) \approx 0,33 \cdot 100 \% = 33 \%$

**Respuesta:** La probabilidad de que el dardo caiga en la zona X es aproximadamente 0,33 o 33 %.

### Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

Para que exista la misma probabilidad en cada zona, dividimos el círculo en partes iguales.



1. Responde lo siguiente:

- ¿En cuántas partes iguales se ha dividido el tablero circular? .....
- Escribe cuántas regiones de cada color hay.

Región X: ..... Región Y: ..... Región Z: .....

2. Calcula la probabilidad de que al lanzar el dardo caiga en cada zona.

Probabilidad de la zona X:  $P(X) = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

Probabilidad de la zona Y:  $P(Y) = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

Probabilidad de la zona Z:  $P(Z) = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

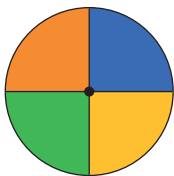
3. ¿Tu resultado es el mismo que el propuesto en el procedimiento?, ¿por qué?



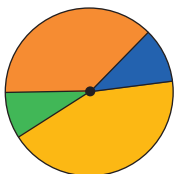

### Recuerda

Un experimento aleatorio es llamado **equiprobable** si todos sus sucesos tienen la misma probabilidad de suceder. Es decir, dos o más sucesos del experimento son equiprobables si la probabilidad de que ocurran es exactamente igual.

Por ejemplo, si en una ruleta hay cuatro posibles resultados, y las probabilidades de todos los resultados son idénticas, se dice que es equiprobable.



Pero, si los posibles resultados no son idénticos, no es equiprobable.



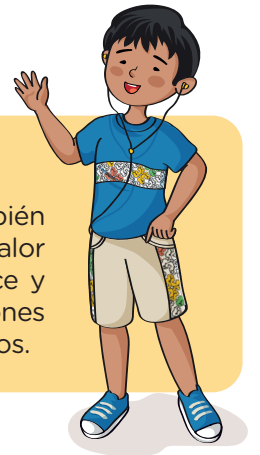
Solo en el primer caso puedes aplicar la regla de Laplace.

## Evaluamos nuestros aprendizajes



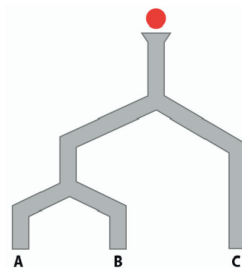
### Propósito

Determinamos el espacio muestral de una situación aleatoria. También expresamos con lenguaje matemático nuestra comprensión sobre el valor de la probabilidad de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace y empleamos procedimientos para calcularlo. Asimismo, justificamos afirmaciones usando nuestros conocimientos sobre la probabilidad de que ocurran sucesos.



Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

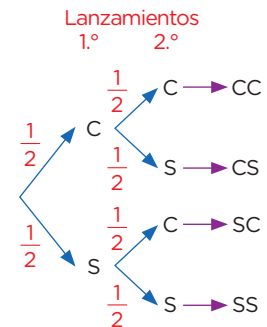
- Una baraja se conforma por 52 cartas de 4 figuras diferentes (corazón, trébol, diamante, espada) numeradas del 1 al 13. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta con el número 3?
  - 0,071
  - 0,077
  - 0,25
  - 0,019
- Carolina lanza al aire una moneda y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un sello y un número mayor que cuatro?
  - $\frac{1}{12}$
  - $\frac{3}{4}$
  - $\frac{1}{6}$
  - $\frac{1}{4}$
- En una bolsa hay 4 bolas blancas y 8 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída no sea ni blanca ni roja? Justifica tu respuesta.
  - 0
  - 0,5
  - 0,33
  - 0,67
- Julia le dice a Carlos que la probabilidad de que saque una carta de diamante con un valor menor que 6 o mayor que 11 en una baraja de 52 cartas es  $\frac{2}{13}$ ; a lo que Carlos responde que la probabilidad es  $\frac{7}{12}$ . ¿Cuál de las afirmaciones es correcta? Justifica tu respuesta.
- Al lanzar dos dados del mismo tamaño, ¿cuál es la probabilidad de obtener como suma 7?
  - $\frac{1}{12}$
  - $\frac{7}{36}$
  - $\frac{1}{6}$
  - $\frac{1}{18}$
- Se suelta una pelota sobre una tubería, tal como indica la imagen. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en A si la pelota, al llegar a una bifurcación, tiene la misma probabilidad de irse a la izquierda o a la derecha?
  - 25 %
  - 33,3 %
  - 50 %
  - 66,7 %



### Recuerda

Para calcular la probabilidad en un **diagrama del árbol**, debes multiplicar las probabilidades de todas las ramas contiguas. Si la situación lo requiere, puedes sumar estos resultados.

Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de sacar cara o sello al lanzar una moneda dos veces? Elabora el diagrama del árbol.



Las probabilidades son

$$P(CS) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(SC) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Sumamos las probabilidades halladas:

$$P(C \text{ o } S) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

La probabilidad de obtener cara o sello es del 0,5.

7. Luego de realizar una encuesta a estudiantes de una institución educativa sobre el uso de las redes sociales, Alexis construyó parte de la siguiente tabla de distribución de frecuencias.

Redes sociales	$f_i$	$h_i$	$h_i\%$
A	25		
B	40		
C			
D	20		
<b>Total</b>	<b>100</b>		

Si Alexis sortea una licencia de antivirus como incentivo entre los estudiantes encuestados, ¿qué probabilidad hay de que el estudiante ganador use la red social A?

8. En una empresa hay 200 trabajadores, de los cuales 100 son hombres y 100 son mujeres. Además, los que leen la revista *La Estación* son 30 hombres y 35 mujeres.

Si se elige a un empleado al azar, calcula la probabilidad de que...

- sea hombre y no lea la revista *La Estación*.
- lea la revista *La Estación*.

## Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Determiné las condiciones y el espacio muestral de una situación aleatoria.			
Expresé con lenguaje matemático mi comprensión sobre el valor de la probabilidad de una situación aleatoria.			
Empleé procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace.			
Justifiqué afirmaciones usando mis conocimientos estadísticos sobre la probabilidad de que ocurra un suceso.			

# Enfoques

## transversales

### Enfoque Ambiental



Busca formar personas conscientes del cuidado del ambiente, que promuevan el desarrollo de estilos de vida saludables y sostenibles.

### Enfoque Inclusivo o de Atención a la Diversidad



Busca reconocer y valorar a todas las personas por igual, con el fin de erradicar la exclusión, discriminación y desigualdad de oportunidades.

### Enfoque de Derechos



Fomenta el reconocimiento de los derechos y deberes; asimismo, promueve el diálogo, la participación y la democracia.

### Enfoque Igualdad de Género



Busca brindar las mismas oportunidades a hombres y mujeres, eliminando situaciones que generan desigualdades entre ellos.

Son los valores y actitudes que tenemos al relacionarnos con otras personas y con nuestro entorno, con el fin de generar una sociedad más justa, inclusiva y equitativa para todos.

### Enfoque Intercultural



Promueve el intercambio de ideas y experiencias entre las distintas formas de ver el mundo.

### Enfoque Búsqueda de la Excelencia



Incentiva a los estudiantes a dar lo mejor de sí mismos para alcanzar sus metas y contribuir con su comunidad.

### Enfoque Orientación al Bien Común



Busca que el conocimiento, los valores y la educación sean bienes que todos compartimos, promoviendo relaciones solidarias en comunidad.



# CARTA DEMOCRÁTICA INTERAMERICANA

## I La democracia y el sistema interamericano

### Artículo 1

Los pueblos de América tienen derecho a la democracia y sus gobiernos la obligación de promoverla y defenderla.

La democracia es esencial para el desarrollo social, político y económico de los pueblos de las Américas.

### Artículo 2

El ejercicio efectivo de la democracia representativa es la base del estado de derecho y los regímenes constitucionales de los Estados Miembros de la Organización de los Estados Americanos. La democracia representativa se refuerza y profundiza con la participación permanente, ética y responsable de la ciudadanía en un marco de legalidad conforme al respectivo orden constitucional.

### Artículo 3

Son elementos esenciales de la democracia representativa, entre otros, el respeto a los derechos humanos y las libertades fundamentales; el acceso al poder y su ejercicio con sujeción al estado de derecho; la celebración de elecciones periódicas, libres, justas y basadas en el sufragio universal y secreto como expresión de la soberanía del pueblo; el régimen plural de partidos y organizaciones políticas; y la separación e independencia de los poderes públicos.

### Artículo 4

Son componentes fundamentales del ejercicio de la democracia la transparencia de las actividades gubernamentales, la probidad, la responsabilidad de los gobiernos en la gestión pública, el respeto por los derechos sociales y la libertad de expresión y de prensa.

La subordinación constitucional de todas las instituciones del Estado a la autoridad civil legalmente constituida y el respeto al estado de derecho de todas las entidades y sectores de la sociedad son igualmente fundamentales para la democracia.

### Artículo 5

El fortalecimiento de los partidos y de otras organizaciones políticas es prioritario para la democracia. Se deberá prestar atención especial a la problemática derivada de los altos costos de las campañas electorales y al establecimiento de un régimen equilibrado y transparente de sus actividades.

### Artículo 6

La participación de la ciudadanía en las decisiones relativas a su propio desarrollo es un derecho y una responsabilidad. Es también una condición necesaria para el pleno y efectivo ejercicio de la democracia. Promover y fomentar diversas formas de participación fortalece la democracia.

## II

### La democracia y los derechos humanos

### Artículo 7

La democracia es indispensable para el ejercicio efectivo de las libertades fundamentales y los derechos humanos, en su carácter universal, indivisible e interdependiente, consagrados en las respectivas constituciones de los Estados y en los instrumentos interamericanos e internacionales de derechos humanos.

### Artículo 8

Cualquier persona o grupo de personas que consideren que sus derechos humanos han sido violados pueden interponer denuncias o peticiones ante el sistema interamericano de promoción y protección de los derechos humanos conforme a los procedimientos establecidos en el mismo.

Los Estados Miembros reafirman su intención de fortalecer el sistema interamericano de protección de los derechos humanos para la consolidación de la democracia en el Hemisferio.

### Artículo 9

La eliminación de toda forma de discriminación, especialmente la discriminación de género, étnica y racial, y de las diversas formas de intolerancia, así como la promoción y protección de los derechos humanos de los pueblos indígenas y los migrantes y el respeto a la diversidad étnica, cultural y religiosa en las Américas, contribuyen al fortalecimiento de la democracia y la participación ciudadana.

### Artículo 10

La promoción y el fortalecimiento de la democracia requieren el ejercicio pleno y eficaz de los derechos de los trabajadores y la aplicación de normas laborales básicas, tal como están consagradas en la Declaración de la Organización Internacional del Trabajo (OIT) relativa a los Principios y Derechos Fundamentales en el Trabajo y su Seguimiento, adoptada en 1998, así como en otras convenciones básicas afines de la OIT. La democracia se fortalece con el mejoramiento de las condiciones laborales y la calidad de vida de los trabajadores del Hemisferio.

## III

### Democracia, desarrollo integral y combate a la pobreza

### Artículo 11

La democracia y el desarrollo económico y social son interdependientes y se refuerzan mutuamente.

### Artículo 12

La pobreza, el analfabetismo y los bajos niveles de desarrollo humano son factores que inciden negativamente en la consolidación de la democracia. Los Estados Miembros de la OEA se comprometen a adoptar y ejecutar todas las acciones necesarias para la creación de empleo productivo, la reducción de la pobreza y la erradicación de la pobreza extrema, teniendo en cuenta las diferentes realidades y condiciones económicas de los países del Hemisferio. Este compromiso común frente a los problemas del desarrollo y la pobreza también destaca la importancia de mantener los equilibrios macroeconómicos y el imperativo de fortalecer la cohesión social y la democracia.

### Artículo 13

La promoción y observancia de los derechos económicos, sociales y culturales son consustanciales al desarrollo integral, al crecimiento económico con equidad y a la consolidación de la democracia en los Estados del Hemisferio.

### Artículo 14

Los Estados Miembros acuerdan examinar periódicamente las acciones adoptadas y ejecutadas por la Organización encaminadas a fomentar el diálogo, la cooperación para el desarrollo integral y el combate a la pobreza en el Hemisferio, y tomar las medidas oportunas para promover estos objetivos.

### Artículo 15

El ejercicio de la democracia facilita la preservación y el manejo adecuado del medio ambiente. Es esencial que los Estados del Hemisferio implementen políticas y estrategias de protección del medio ambiente, respetando los diversos tratados y convenciones, para lograr un desarrollo sostenible en beneficio de las futuras generaciones.

### Artículo 16

La educación es clave para fortalecer las instituciones democráticas, promover el desarrollo del potencial humano y el alivio de la pobreza y fomentar un mayor entendimiento entre los pueblos. Para lograr estas metas, es esencial que una educación de calidad esté al alcance de todos, incluyendo a las niñas y las mujeres, los habitantes de las zonas rurales y las personas que pertenecen a las minorías.

## IV

### Fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática

### Artículo 17

Cuando el gobierno de un Estado Miembro considere que está en riesgo su proceso político institucional

democrático o su legítimo ejercicio del poder, podrá recurrir al Secretario General o al Consejo Permanente a fin de solicitar asistencia para el fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática.

### Artículo 18

Cuando en un Estado Miembro se produzcan situaciones que pudieran afectar el desarrollo del proceso político institucional democrático o el legítimo ejercicio del poder, el Secretario General o el Consejo Permanente podrá, con el consentimiento previo del gobierno afectado, disponer visitas y otras gestiones con la finalidad de hacer un análisis de la situación. El Secretario General elevará un informe al Consejo Permanente, y éste realizará una apreciación colectiva de la situación y, en caso necesario, podrá adoptar decisiones dirigidas a la preservación de la institucionalidad democrática y su fortalecimiento.

### Artículo 19

Basado en los principios de la Carta de la OEA y con sujeción a sus normas, y en concordancia con la cláusula democrática contenida en la Declaración de la ciudad de Quebec, la ruptura del orden democrático o una alteración del orden constitucional que afecte gravemente el orden democrático en un Estado Miembro constituye, mientras persista, un obstáculo insuperable para la participación de su gobierno en las sesiones de la Asamblea General, de la Reunión de Consulta, de los Consejos de la Organización y de las conferencias especializadas, de las comisiones, grupos de trabajo y demás órganos de la Organización.

### Artículo 20

En caso de que en un Estado Miembro se produzca una alteración del orden constitucional que afecte gravemente su orden democrático, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá solicitar la convocatoria inmediata del Consejo Permanente para realizar una apreciación colectiva de la situación y adoptar las decisiones que estime conveniente.

El Consejo Permanente, según la situación, podrá disponer la realización de las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

Si las gestiones diplomáticas resultaren infructuosas o si la urgencia del caso lo aconsejare, el Consejo Permanente convocará de inmediato un período extraordinario de sesiones de la Asamblea General para que ésta adopte las decisiones que estime apropiadas, incluyendo gestiones diplomáticas, conforme a la Carta de la Organización, el derecho internacional y las disposiciones de la presente Carta Democrática.

Durante el proceso se realizarán las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

### Artículo 21

Cuando la Asamblea General, convocada a un período extraordinario de sesiones, constate que se ha producido la ruptura del orden democrático en un Estado Miembro y que las gestiones diplomáticas han sido infructuosas, conforme a la Carta de la OEA tomará la decisión de suspender a dicho Estado Miembro del ejercicio de su derecho de participación en la OEA con el voto afirmativo de los dos tercios de los Estados Miembros. La suspensión entrará en vigor de inmediato.

El Estado Miembro que hubiera sido objeto de suspensión deberá continuar observando el cumplimiento de sus obligaciones como miembro de la Organización, en particular en materia de derechos humanos.

Adoptada la decisión de suspender a un gobierno, la Organización mantendrá sus gestiones diplomáticas para el restablecimiento de la democracia en el Estado Miembro afectado.

### Artículo 22

Una vez superada la situación que motivó la suspensión, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá proponer a la Asamblea General el levantamiento de la suspensión. Esta decisión se adoptará por el voto de los dos tercios de los Estados Miembros, de acuerdo con la Carta de la OEA.

## V

### La democracia y las misiones de observación electoral

### Artículo 23

Los Estados Miembros son los responsables de organizar, llevar a cabo y garantizar procesos electorales libres y justos.

Los Estados Miembros, en ejercicio de su soberanía, podrán solicitar a la OEA asesoramiento o asistencia para el fortalecimiento y desarrollo de sus instituciones y procesos electorales, incluido el envío de misiones preliminares para ese propósito.

### Artículo 24

Las misiones de observación electoral se llevarán a cabo por solicitud del Estado Miembro interesado. Con tal finalidad, el gobierno de dicho Estado y el Secretario General celebrarán un convenio que determine el alcance y la cobertura de la misión de observación electoral de que se trate. El Estado Miembro deberá garantizar las condiciones de seguridad, libre acceso a la información y amplia cooperación con la misión de observación electoral.

Las misiones de observación electoral se realizarán de conformidad con los principios y normas de la OEA. La Organización deberá asegurar la eficacia e independencia de estas misiones, para lo cual se las dotará de los recursos necesarios. Las mismas se realizarán de forma objetiva, imparcial y transparente, y con la capacidad técnica apropiada.

Las misiones de observación electoral presentarán oportunamente al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, los informes sobre sus actividades.

### Artículo 25

Las misiones de observación electoral deberán informar al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, si no existiesen las condiciones necesarias para la realización de elecciones libres y justas.

La OEA podrá enviar, con el acuerdo del Estado interesado, misiones especiales a fin de contribuir a crear o mejorar dichas condiciones.

## VI

### Promoción de la cultura democrática

### Artículo 26

La OEA continuará desarrollando programas y actividades dirigidos a promover los principios y prácticas democráticas y fortalecer la cultura democrática en el Hemisferio, considerando que la democracia es un sistema de vida fundado en la libertad y el mejoramiento económico, social y cultural de los pueblos. La OEA mantendrá consultas y cooperación continua con los Estados Miembros, tomando en cuenta los aportes de organizaciones de la sociedad civil que trabajen en esos ámbitos.

### Artículo 27

Los programas y actividades se dirigirán a promover la gobernabilidad, la buena gestión, los valores democráticos y el fortalecimiento de la institucionalidad política y de las organizaciones de la sociedad civil. Se prestará atención especial al desarrollo de programas y actividades para la educación de la niñez y la juventud como forma de asegurar la permanencia de los valores democráticos, incluidas la libertad y la justicia social.

### Artículo 28

Los Estados promoverán la plena e igualitaria participación de la mujer en las estructuras políticas de sus respectivos países como elemento fundamental para la promoción y ejercicio de la cultura democrática.



## EL ACUERDO NACIONAL

El 22 de julio de 2002, los representantes de las organizaciones políticas, religiosas, del Gobierno y de la sociedad civil firmaron el compromiso de trabajar, todos, para conseguir el bienestar y desarrollo del país. Este compromiso es el Acuerdo Nacional.

El acuerdo persigue cuatro objetivos fundamentales. Para alcanzarlos, todos los peruanos de buena voluntad tenemos, desde el lugar que ocupemos o el rol que desempeñemos, el deber y la responsabilidad de decidir, ejecutar, vigilar o defender los compromisos asumidos. Estos son tan importantes que serán respetados como políticas permanentes para el futuro.

Por esta razón, como niños, niñas, adolescentes o adultos, ya sea como estudiantes o trabajadores, debemos promover y fortalecer acciones que garanticen el cumplimiento de esos cuatro objetivos que son los siguientes:

### **1. Democracia y Estado de Derecho**

La justicia, la paz y el desarrollo que necesitamos los peruanos sólo se pueden dar si conseguimos una verdadera democracia. El compromiso del Acuerdo Nacional es garantizar una sociedad en la que los derechos son respetados y los ciudadanos viven seguros y expresan con libertad sus opiniones a partir del diálogo abierto y enriquecedor; decidiendo lo mejor para el país.

### **2. Equidad y Justicia Social**

Para poder construir nuestra democracia, es necesario que cada una de las

personas que conformamos esta sociedad, nos sintamos parte de ella. Con este fin, el Acuerdo promoverá el acceso a las oportunidades económicas, sociales, culturales y políticas. Todos los peruanos tenemos derecho a un empleo digno, a una educación de calidad, a una salud integral, a un lugar para vivir. Así, alcanzaremos el desarrollo pleno.

### **3. Competitividad del País**

Para afianzar la economía, el Acuerdo se compromete a fomentar el espíritu de competitividad en las empresas, es decir, mejorar la calidad de los productos y servicios, asegurar el acceso a la formalización de las pequeñas empresas y sumar esfuerzos para fomentar la colocación de nuestros productos en los mercados internacionales.

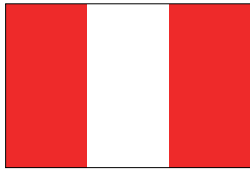
### **4. Estado Eficiente, Transparente y Descentralizado**

Es de vital importancia que el Estado cumpla con sus obligaciones de manera eficiente y transparente para ponerse al servicio de todos los peruanos. El Acuerdo se compromete a modernizar la administración pública, desarrollar instrumentos que eliminen la corrupción o el uso indebido del poder. Asimismo, descentralizar el poder y la economía para asegurar que el Estado sirva a todos los peruanos sin excepción.

Mediante el Acuerdo Nacional nos comprometemos a desarrollar maneras de controlar el cumplimiento de estas políticas de Estado, a brindar apoyo y difundir constantemente sus acciones a la sociedad en general.

# SÍMBOLOS DE LA PATRIA

## Artículo 49 de la Constitución Política del Perú



BANDERA NACIONAL



ESCUDO NACIONAL

### HIMNO NACIONAL DEL PERÚ

#### CORO

Somos libres, seámoslo siempre,  
y antes niegue sus luces el sol,  
que faltemos al voto solemne  
que la patria al Eterno elevó.

HIMNO NACIONAL

## Declaración Universal de los Derechos Humanos

El 10 de diciembre de 1948, la Asamblea General de las Naciones Unidas aprobó y proclamó la Declaración Universal de Derechos Humanos, cuyos artículos figuran a continuación:

### Artículo 1

Todos los seres humanos nacen libres e iguales en dignidad y derechos y, (...) deben comportarse fraternalmente los unos con los otros.

### Artículo 2

Toda persona tiene los derechos y libertades proclamados en esta Declaración, sin distinción alguna de raza, color, sexo, idioma, religión, opinión política o de cualquier otra índole, origen nacional o social, posición económica, nacimiento o cualquier otra condición. Además, no se hará distinción alguna fundada en la condición política, jurídica o internacional del país o territorio de cuya jurisdicción dependa una persona (...).

### Artículo 3

Todo individuo tiene derecho a la vida, a la libertad y a la seguridad de su persona.

### Artículo 4

Nadie estará sometido a esclavitud ni a servidumbre; la esclavitud y la trata de esclavos están prohibidas en todas sus formas.

### Artículo 5

Nadie será sometido a torturas ni a penas o tratos crueles, inhumanos o degradantes.

### Artículo 6

Todo ser humano tiene derecho, en todas partes, al reconocimiento de su personalidad jurídica.

### Artículo 7

Todos son iguales ante la ley y tienen, sin distinción, derecho a igual protección de la ley. Todos tienen derecho a igual protección contra toda discriminación que infrinja esta Declaración (...).

### Artículo 8

Toda persona tiene derecho a un recurso efectivo, ante los tribunales nacionales competentes, que la ampare contra actos que violen sus derechos fundamentales (...).

### Artículo 9

Nadie podrá ser arbitrariamente detenido, preso ni desterrado.

### Artículo 10

Toda persona tiene derecho, en condiciones de plena igualdad, a ser oída públicamente y con justicia por un tribunal independiente e imparcial, para la determinación de sus derechos y obligaciones o para el examen de cualquier acusación contra ella en materia penal.

### Artículo 11

1. Toda persona acusada de delito tiene derecho a que se presuma su inocencia mientras no se pruebe su culpabilidad (...).
2. Nadie será condenado por actos u omisiones que en el momento de cometerse no fueron delictivos según el Derecho nacional o internacional. Tampoco se impondrá pena más grave que la aplicable en el momento de la comisión del delito.

### Artículo 12

Nadie será objeto de injerencias arbitrarias en su vida privada, su familia, su domicilio o su correspondencia, ni de ataques a su honra o a su reputación. Toda persona tiene derecho a la protección de la ley contra tales injerencias o ataques.

### Artículo 13

1. Toda persona tiene derecho a circular libremente y a elegir su residencia en el territorio de un Estado.
2. Toda persona tiene derecho a salir de cualquier país, incluso el propio, y a regresar a su país.

### Artículo 14

1. En caso de persecución, toda persona tiene derecho a buscar asilo, y a disfrutar de él, en cualquier país.
2. Este derecho no podrá ser invocado contra una acción judicial realmente originada por delitos comunes o por actos opuestos a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

### Artículo 15

1. Toda persona tiene derecho a una nacionalidad.
2. A nadie se privará arbitrariamente de su nacionalidad ni del derecho a cambiar de nacionalidad.

### Artículo 16

1. Los hombres y las mujeres, a partir de la edad núbil, tienen derecho, sin restricción alguna por motivos de raza, nacionalidad o religión, a casarse y fundar una familia (...).
2. Sólo mediante libre y pleno consentimiento de los futuros esposos podrá contraerse el matrimonio.
3. La familia es el elemento natural y fundamental de la sociedad y tiene derecho a la protección de la sociedad y del Estado.

### Artículo 17

1. Toda persona tiene derecho a la propiedad, individual y colectivamente.
2. Nadie será privado arbitrariamente de su propiedad.

### Artículo 18

Toda persona tiene derecho a la libertad de pensamiento, de conciencia y de religión (...).

### Artículo 19

Todo individuo tiene derecho a la libertad de opinión y de expresión (...).

### Artículo 20

1. Toda persona tiene derecho a la libertad de reunión y de asociación pacíficas.
2. Nadie podrá ser obligado a pertenecer a una asociación.

### Artículo 21

1. Toda persona tiene derecho a participar en el gobierno de su país, directamente o por medio de representantes libremente escogidos.
2. Toda persona tiene el derecho de acceso, en condiciones de igualdad, a las funciones públicas de su país.
3. La voluntad del pueblo es la base de la autoridad del poder público; esta voluntad se expresará mediante elecciones auténticas que habrán de celebrarse periódicamente, por sufragio universal e igual y por voto secreto u otro procedimiento equivalente que garantice la libertad del voto.

### Artículo 22

Toda persona (...) tiene derecho a la seguridad social, y a obtener, (...) habida cuenta de la organización y los recursos de cada Estado, la satisfacción de los derechos económicos, sociales y culturales, indispensables a su dignidad y al libre desarrollo de su personalidad.

### Artículo 23

1. Toda persona tiene derecho al trabajo, a la libre elección de su trabajo, a condiciones equitativas y satisfactorias de trabajo y a la protección contra el desempleo.
2. Toda persona tiene derecho, sin discriminación alguna, a igual salario por trabajo igual.
3. Toda persona que trabaja tiene derecho a una remuneración equitativa y satisfactoria, que le asegure, así como a su familia, una existencia conforme a la dignidad humana y que será completada, en caso necesario, por cualesquiera otros medios de protección social.
4. Toda persona tiene derecho a fundar sindicatos y a sindicarse para la defensa de sus intereses.

### Artículo 24

Toda persona tiene derecho al descanso, al disfrute del tiempo libre, a una limitación razonable de la duración del trabajo y a vacaciones periódicas pagadas.

### Artículo 25

1. Toda persona tiene derecho a un nivel de vida adecuado que le asegure, así como a su familia, la salud y el bienestar, y en especial la alimentación, el vestido, la vivienda, la asistencia médica y los servicios sociales necesarios; tiene asimismo derecho a los seguros en caso de desempleo, enfermedad, invalidez, vejez y otros casos de pérdida de sus medios de subsistencia por circunstancias independientes de su voluntad.
2. La maternidad y la infancia tienen derecho a cuidados y asistencia especiales. Todos los niños, nacidos de matrimonio o fuera de matrimonio, tienen derecho a igual protección social.

### Artículo 26

1. Toda persona tiene derecho a la educación. La educación debe ser gratuita, al menos en lo concerniente a la instrucción elemental y fundamental. La instrucción elemental será obligatoria. La instrucción técnica y profesional habrá de ser generalizada; el acceso a los estudios superiores será igual para todos, en función de los méritos respectivos.
2. La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana y el fortalecimiento del respeto a los derechos humanos y a las libertades fundamentales; favorecerá la comprensión, la tolerancia y la amistad entre todas las naciones y todos los grupos étnicos o religiosos; y promoverá el desarrollo de las actividades de las Naciones Unidas para el mantenimiento de la paz.
3. Los padres tendrán derecho preferente a escoger el tipo de educación que habrá de darse a sus hijos.

### Artículo 27

1. Toda persona tiene derecho a tomar parte libremente en la vida cultural de la comunidad, a gozar de las artes y a participar en el progreso científico y en los beneficios que de él resulten.
2. Toda persona tiene derecho a la protección de los intereses morales y materiales que le correspondan por razón de las producciones científicas, literarias o artísticas de que sea autora.

### Artículo 28

Toda persona tiene derecho a que se establezca un orden social e internacional en el que los derechos y libertades proclamados en esta Declaración se hagan plenamente efectivos.

### Artículo 29

1. Toda persona tiene deberes respecto a la comunidad (...).
2. En el ejercicio de sus derechos y en el disfrute de sus libertades, toda persona estará solamente sujeta a las limitaciones establecidas por la ley con el único fin de asegurar el reconocimiento y el respeto de los derechos y libertades de los demás, y de satisfacer las justas exigencias de la moral, del orden público y del bienestar general en una sociedad democrática.
3. Estos derechos y libertades no podrán en ningún caso ser ejercidos en oposición a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

### Artículo 30

Nada en la presente Declaración podrá interpretarse en el sentido de que confiere derecho alguno al Estado, a un grupo o a una persona, para emprender y desarrollar actividades (...) tendientes a la supresión de cualquiera de los derechos y libertades proclamados en esta Declaración.