SERIE
ESTUDIOS
BREVES

Ministerio de Educación del Perú
Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes
Estudios Breves N.° 12 - 2024

¿Cómo se enseñan las fracciones en las escuelas peruanas? Creencias y conocimiento de docentes de Matemática de 2.° grado de secundaria

Responsables del estudio:
Lilian Isidro
Estefanía Urbano
Rosa Lafosse
Olimpia Castro
Giovanna Moreano

En caso de consultas sobre este artículo, escribir a:
medicion@minedu.gob.pe

Ministerio de Educación
Calle del Comercio 193, San Borja
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.° 2024-02861
Primera edición digital
Marzo, 2024

Resumen: La competencia matemática permite a los ciudadanos afrontar los retos del mundo actual. Sin embargo, las evaluaciones nacionales revelan que muy pocos estudiantes de 2.° grado de secundaria logran los aprendizajes esperados según el CNEB, y en forma particular los concernientes a fracciones. Por ello, es relevante conocer qué recursos movilizan los docentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Con este fin, la Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes (UMC) desarrolló un estudio mixto denominado *¿Cómo se enseñan las fracciones en las escuelas peruanas?*, cuyo objetivo fue caracterizar las creencias y los conocimientos de los docentes relacionados con la enseñanza de las fracciones. Para ello, se aplicó un cuestionario de preguntas cerradas a 3865 docentes del Perú. Este permitió identificar que muchos de los docentes de Matemática presentan un mayor conocimiento disciplinar que pedagógico y, en este último, sus mayores dificultades fueron identificar las causas de los errores o evaluar las acciones adecuadas para ayudar a los estudiantes a superarlos en tareas asociadas a los significados de fracción. Asimismo, mediante entrevistas semiestructuradas a 12 docentes de las regiones Apurímac, Amazonas y Piura, se profundizó en la caracterización de sus creencias y conocimientos acerca de la enseñanza de las fracciones, y se identificó que ellos consideran relevante aprenderlas porque se usan en la vida cotidiana y favorecen el desarrollo de otras competencias matemáticas. Finalmente, se examinaron 12 cuadernos de estudiantes y se identificó que la mayoría de tareas encontradas exigía principalmente la aplicación de algoritmos para operar fracciones y muy pocas tareas, la interpretación de sus significados. De manera general, se concluye que el conocimiento que poseen los docentes está centrado en una mirada instrumental de las matemáticas y no en un enfoque de resolución de problemas. Estos resultados ofrecen una alerta sobre la necesidad de fortalecer la formación pedagógica de los docentes respecto de cómo implementar acciones para favorecer el desarrollo de competencias.

Palabras claves: conocimientos del docente, creencias docentes, significados de fracción, educación secundaria, aprendizaje de la matemática.

Citar esta publicación de la siguiente manera:
Ministerio de Educación del Perú. (2024). *¿Cómo se enseñan las fracciones en las escuelas peruanas? Creencias y conocimiento de docentes de Matemática de 2.° grado de secundaria* (Estudios Breves N.° 12). Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes.

Introducción

Los constantes avances científicos y tecnológicos demandan el desarrollo de una serie de competencias matemáticas, las cuales permiten a las personas afrontar los retos del mundo actual. Las sociedades del siglo XXI exigen una ciudadanía que sea competente matemáticamente y que pueda emitir juicios no rutinarios, de modo que sea capaz de ejercer sus derechos y contribuir al desarrollo (Simeone y Pukelsheim, 2006). La escuela es la encargada de brindar las oportunidades para el desarrollo de las competencias matemáticas, las cuales pueden ser puestas en uso tanto en situaciones cotidianas del entorno inmediato como en situaciones hipotéticas y abstractas. El desarrollo de estas competencias permite el aprendizaje continuo en la sociedad de la información según señala el Consejo Nacional de Profesores de Matemática[1] (National Council of Teachers of Mathematics, 2003).

En el Perú, pese a que en los últimos años se han observado mejoras en el aprendizaje de la matemática, son aún pocos los estudiantes que logran los aprendizajes esperados para su grado según lo establecido en el Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB) aprobado por el Ministerio de Educación del Perú (Minedu) en el 2017. Así, por ejemplo, de acuerdo con la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) del año 2019, solamente el 17,7 % de los estudiantes de 2.° grado de secundaria se ubicó en el nivel Satisfactorio en Matemática; es decir, aproximadamente, 2 de cada 10 estudiantes alcanzaron los aprendizajes esperados para su grado. El porcentaje fue aún menor en los estudiantes de escuelas públicas urbanas (13,7 %) y de escuelas públicas rurales (6,5 %). En el año 2022, luego de dos años de educación remota y de un año de presencialidad, la Evaluación Muestral (EM) 2022 evidenció una caída en los logros de aprendizaje: solamente el 12,7 % de los estudiantes de 2.° grado de secundaria alcanzó el nivel Satisfactorio en esta área (Ministerio de Educación del Perú [Minedu], 2023).

Análisis más profundos del desempeño de los estudiantes en Matemática en las evaluaciones nacionales de logros de aprendizaje que implementa el Minedu dan cuenta de las dificultades que tienen para resolver situaciones que implican el uso de los distintos significados de fracción. A nivel internacional, diversas investigaciones han identificado que las fracciones son conceptos centrales para el desarrollo de la competencia matemática, pero son desafiantes de enseñar para los docentes y de aprender para los estudiantes (Barnett-Clarke, Fisher, Marks y Ross, 2010; Mohamed et al., 2021). Ello se debe, en parte, a que el conocimiento sobre los números racionales (que involucran a las fracciones) requiere expandirse a partir del manejo solvente de los números naturales (Stafylidou y Vosniadou, 2004). A su vez, la comprensión incompleta de la noción de fracción y sus significados puede afectar el aprendizaje de otras nociones matemáticas, como números decimales, porcentajes, proporciones y probabilidad e, incluso, el conocimiento algebraico (Booth et al., 2014).

[1] Consejo Nacional de Profesores de Matemática de Estados Unidos, organismo de los Estados Unidos de Norteamérica, NCTM por sus siglas en inglés.

Dada la importancia del aprendizaje de las fracciones en la consolidación de la competencia matemática de los estudiantes, el presente estudio busca aproximarse a su enseñanza a través del análisis de las creencias y del conocimiento docente acerca de las fracciones, así como de las tareas sobre fracciones encontradas en los cuadernos de los estudiantes. Estas variables han sido identificadas en la literatura como relevantes para aproximarse al análisis de los procesos de enseñanza-aprendizaje. En ese sentido, este estudio busca contribuir a la comprensión de las prácticas de enseñanza de los docentes de Matemática y así, de alguna manera, aportar a la mejora de los aprendizajes de los estudiantes peruanos en el área. La información de la presente investigación fue recogida en el marco de la EM 2022. A continuación, se revisan algunos aspectos pedagógicos de las fracciones establecidos en el CNEB (Minedu, 2017a), así como aspectos teóricos de las variables docentes mencionadas y su relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones.

La enseñanza de fracciones en el currículo escolar peruano

En el Perú, el CNEB establece que los estudiantes deben ser capaces de interpretar la realidad y tomar decisiones empleando conocimientos matemáticos a través del desarrollo de cuatro competencias: 1) "Resuelve problemas de cantidad", 2) "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio", 3) "Resuelve problemas de forma, movimiento y localización"; y 4) "Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre" (Minedu, 2017a). Ser competente en Matemática implica saber actuar de forma deliberada y reflexiva, y seleccionar y movilizar una diversidad de habilidades y conocimientos matemáticos, destrezas, actitudes y emociones, en la formulación y resolución de problemas en una variedad de contextos (Minedu, 2016b). Según Blum y Leiss (2006), las habilidades y nociones matemáticas son el cimiento para las competencias matemáticas; por ello, es necesario desarrollar actividades que permitan a los estudiantes precisar, ordenar, clasificar, definir, estructurar y generalizar ideas matemáticas al mismo tiempo que buscan soluciones a situaciones desafiantes.

Un elemento esencial del aprendizaje de la matemática se refiere a la capacidad de identificar su presencia en diversas situaciones, y expresarlas en términos matemáticos para comprenderlas y darles solución. Esta capacidad se sostiene sobre nociones y habilidades matemáticas interconectadas que juegan un rol de recursos, no como caja de herramientas sueltas, sino como una red conceptual que permite al estudiante formular una solución o expresar un problema en términos matemáticos. En este sentido, la comprensión de la noción de fracción juega un rol central, pues permite construir otras nociones matemáticas como, por ejemplo, cuantificar la probabilidad de un suceso, relacionar las áreas de figuras bidimensionales y el volumen de formas tridimensionales, así como establecer proporciones y aplicaciones en escalas, entre otras.

La enseñanza de las fracciones está comprendida en la competencia del CNEB "Resuelve problemas de cantidad", la cual expresa que "el estudiante solucione problemas o plantee nuevos problemas que le demanden construir y comprender las nociones de número, de sistemas numéricos, sus operaciones y propiedades" (Minedu, 2017a, p. 232). El CNEB señala, en los estándares de esta competencia, cómo se gradúa el desarrollo de la noción de fracción a través de la escolaridad, indicando el tratamiento de los significados de fracción correspondientes a cada ciclo. Estos significados provienen de la clasificación propuesta por Thomas Kieren (1976), quien describe el sentido de cada significado en situaciones diversas. Los significados de fracción son cinco: fracción como parte-todo, como cociente, como operador, como medida y como razón (Minedu, 2017a). En la Tabla 1, se describe la gradualidad en el aprendizaje de los significados de fracción en los diferentes ciclos de escolaridad, tal como se presenta en los estándares de aprendizaje y en algunos de los desempeños descritos en el Programa Curricular de Educación Primaria (Minedu, 2017b) y el Programa Curricular de Educación Secundaria (Minedu, 2017c).

Tabla 1

Gradualidad del aprendizaje de los significados de fracción en el CNEB

Ciclo	Significado de fracción	Descripción
Ciclo IV (3.° y 4.° grado de primaria)	Como parte-todo	Se presenta cuando se establece una relación entre las partes seleccionadas y el número total de partes equivalentes que conforman el todo.
Ciclo V (5.° y 6.° grado de primaria)	Como operador	Se presenta cuando la fracción actúa sobre una cantidad mediante relaciones de división y multiplicación, y la transforma en una nueva cantidad.
	Como cociente	Se presenta en situaciones de reparto cuando un todo se distribuye de manera equitativa entre un número de partes.
Ciclo VI (1.° y 2.° grado de secundaria)	Como medida	Se presenta cuando se comparan dos cantidades de una misma magnitud, una de las cuales es el referente para medir y otra es la que se quiere medir.
	Como razón	Se presenta en situaciones de comparación entre dos cantidades de la misma o de diferente magnitud.

Si en las clases de Matemática no se desarrollan los cinco significados de fracción presentados en el CNEB, es probable que los estudiantes no los comprendan y centren todo su trabajo solo en alguno de ellos, como el significado de fracción como parte-todo, que es el más trabajado por los docentes. Este significado es una noción introductoria e intuitiva de la fracción, que debe consolidarse en los primeros grados (Fandiño, 2009), pero que los estudiantes deberían ampliar al llegar al ciclo V de la escolaridad. Esta ampliación consiste en abordar los otros significados e interconectarlos para consolidar la noción de fracción. Por ejemplo, de manera introductoria, los docentes suelen presentar la noción de fracción como una unidad–todo dividida en partes iguales y de la que se toman algunas de ellas. Cuando el aprendizaje de la fracción se sostiene solo en este único significado, los estudiantes presentan las siguientes dificultades:

- Pensar que, en la representación gráfica de una fracción, el todo solo se divide en partes congruentes e idénticas (misma forma e igual área), y no en partes equivalentes (diferente forma, pero misma área).
- Considerar que la fracción siempre se obtiene al tomar "algunas" partes respecto de la unidad, lo cual deja sin sentido fracciones de la forma n/n, que representan toda la unidad, y las fracciones impropias, que son mayores que la unidad.
- Utilizar como única representación gráfica de las fracciones figuras elementales, como los rectángulos y los círculos, de tal manera que, al enfrentarse a otras representaciones, como la recta numérica, las consideran como extrañas y se les hace muy difícil trasladar las nociones trabajadas a estos nuevos formatos.
- Considerar, de manera reiterada, que la unidad-todo debe ser una figura geométrica elemental sobre la que se realizarán divisiones, lo cual deja de lado la fracción que representa una parte de un conjunto discreto de objetos.

Recientemente, con base en las tasas de respuesta de los estudiantes de 2.° grado de secundaria a los ítems de la prueba de Matemática de la EM 2022, se ha identificado que los estudiantes presentan dificultades para interpretar los diversos significados de fracción. Por ejemplo, el 59,66 % de estudiantes no logró interpretar el significado de fracción como razón en una tarea asociada a él. De la misma manera, el 54,94 % no logró interpretar el significado de fracción como parte-todo en una tarea donde la unidad representada geométricamente estaba dividida en partes equivalentes pero de diferentes formas. Los ítems de fracciones que resultaron más difíciles fueron los que abordaron los significados de fracción como medida y como cociente. En el caso de la fracción como medida, el 78,4 % de los estudiantes no logró expresar la medida de un objeto usando otro objeto como referente. Además, el 74,3 % no respondió correctamente el ítem que exigía emplear la noción de fracción como cociente; en este caso, los estudiantes no lograron interpretar una fracción impropia como el número que expresaba la cantidad repartida. Estos resultados ofrecen una alerta al sistema educativo de que existen nociones matemáticas de fracciones que aún no se consolidan en los estudiantes de 2.° grado de secundaria, lo que afecta aprendizajes fundamentales para el desarrollo de nociones más complejas relacionadas con fracciones en los grados posteriores del nivel secundario. En las siguientes secciones de esta introducción, se describirán algunas creencias y el conocimiento docente sobre las fracciones. Estas variables nos permitirán aproximarnos a la enseñanza de las fracciones y así comprender mejor el origen de las dificultades de los estudiantes para alcanzar los aprendizajes matemáticos esperados para su grado.

Creencias docentes sobre la enseñanza de las fracciones

Las creencias se definen como construcciones mentales que funcionan como organizadoras de la experiencia (Sigel, 1985). Se entienden como comprensiones de la realidad que se toman como verdaderas (Philipp, 2007). Se puede pensar en ellas como los lentes a través de los cuales los sujetos ven el mundo y se relacionan con él. De acuerdo con Rokeach (1986), las creencias tienen tres componentes: cognitivo, afectivo y comportamental. El componente cognitivo refiere a lo que una persona piensa acerca de un objeto, idea o fenómeno en particular. Es la parte más consciente de la creencia y alude a la información de la que dispone el sujeto acerca de algún tema. El componente afectivo alude a la carga emocional asociada con la creencia. Puede incluir agrado, desagrado, miedo u otras emociones que la persona asocia con el tema acerca del cual se construye la creencia. Por último, el componente comportamental se refiere a la influencia que pueden tener las creencias en las conductas de una persona, puesto que ellas pueden motivar acciones o decisiones específicas en relación con el objeto de la creencia.

En el ámbito educativo, se han estudiado las creencias precisamente por su relación con la conducta. El interés en la investigación de las creencias docentes se ha sostenido durante varias décadas debido a que estas pueden incidir en lo que los docentes hacen y dicen en las clases, es decir, debido a su influencia en las prácticas pedagógicas y su consecuente impacto en los aprendizajes de los estudiantes (Peterson et al., 1989; Staub y Stern, 2002). Las creencias docentes funcionan como filtros para interpretar las experiencias de los docentes; constituyen marcos referenciales para solucionar problemas y guías para sus acciones dentro de las instituciones educativas (Fives y Gill, 2015; Hill et al., 2016). Por ejemplo, las creencias docentes pueden impactar en el tipo de tareas que ellos seleccionan para sus estudiantes, en cómo organizan su conocimiento y en su toma de decisiones en el aula (Pajares, 1992).

De acuerdo con Ernest (1989), las creencias docentes acerca de la enseñanza de la matemática tienen tres componentes: creencias sobre la naturaleza de la matemática, creencias sobre el proceso de aprender matemática y creencias sobre las características de la enseñanza de la matemática. Cada uno de los componentes puede responder a tres perspectivas de la matemática: la instrumental, la platonista y la de resolución de problemas. Estos aspectos se resumen en la Tabla 2.

Tabla 2

Perspectivas y creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en Minarni et al. (2018).

Perspectiva de la matemática	Comprensión de la matemática	Enseñanza	Aprendizaje
Instrumentalista	Conjunto de procedimientos, técnicas y reglas	Centrada en resolver problemas prácticos a partir de instrucciones precisas	Recepción pasiva y con un único método de solución
Platonista	Conjunto estático de conocimientos conectados en un sistema que se descubre y no se crea	Centrada en explicaciones, pues se concibe el aprendizaje como recepción de conocimientos	Enfocada en el contenido y con un único método de solución
Resolución de problemas	Producto de la creación humana en continuo desarrollo y revisión	Centrada en la construcción activa de conocimientos y la resolución autónoma de problemas	Construcción activa del conocimiento como un todo significativamente conectado

Nota. Elaborado a partir de la propuesta de Beswick (2012).

En el contexto peruano, se han desarrollado algunos estudios cualitativos que nos aproximan a algunas creencias docentes sobre la matemática. Por ejemplo, Moreano et al. (2008) llevaron a cabo un estudio cualitativo con nueve docentes de 6.° grado de primaria de escuelas públicas de Lima. A través de entrevistas y observaciones en aula, ellos recogieron las concepciones de los docentes acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Se encontró que los docentes conciben la matemática como un conjunto de procedimientos que deben ser aprendidos. Aprender matemática, desde su perspectiva, es saber cómo resolver problemas matemáticos paso a paso. Por ello, parten de un ejercicio modelo que resuelven para los estudiantes y que explican paso a paso para asegurar que ellos lo hayan comprendido. Además, en las observaciones de clase, se encontró que los docentes no desarrollan las clases de matemática a partir de las experiencias de los estudiantes. Esta creencia respecto de la enseñanza de la matemática podría implicar prácticas de enseñanza desligadas del contexto, no significativas e incluso memorísticas. Más recientemente, López (2021) realizó un estudio cualitativo con cuatro docentes de secundaria del área de Matemática de una escuela pública de Lurín. Los docentes señalaron que los recursos didácticos como material concreto, modelos y guías favorecen la participación, la motivación y el aprendizaje de la matemática. Desde su perspectiva, estos recursos centran la enseñanza en el hacer del estudiante, el cual, a su vez, debe promoverse a partir de situaciones reales y acordes a su contexto donde puedan desarrollar sus aprendizajes sobre el área.

Cabe reiterar que el foco del presente estudio son las fracciones. Si bien en el contexto peruano no hay estudios sobre las creencias docentes acerca de las fracciones, se registran algunos antecedentes en la literatura internacional. Por ejemplo, Stols et al. (2015) llevaron a cabo un estudio con 46 profesores de Matemática de Sudáfrica en el que se recogieron sus creencias acerca de la enseñanza efectiva de las fracciones. Los profesores observaron ocho clases grabadas e indicaron, por medio de una entrevista, las fortalezas y debilidades de cada una de ellas. Al analizar sus respuestas, se encontró que consideraban que lo que caracteriza la enseñanza efectiva de las fracciones es el uso de materiales y un modo de instrucción que involucre a los estudiantes. Para los participantes, usar material concreto creado (como caramelos, tiras de papel, imágenes de pizza, etc.) y tecnología audiovisual es el factor que más contribuye a la enseñanza efectiva. Además, de acuerdo con los docentes entrevistados, es efectiva una enseñanza que involucre a los estudiantes, es decir, que haga conexiones con la vida real y que promueva el trabajo práctico individual.

Maharaj et al. (2007) llevaron a cabo un estudio cualitativo sobre las visiones de los docentes acerca del trabajo práctico para enseñar fracciones. En él, participaron cuatro profesores de Sudáfrica. Los cuatro participantes reportaron que el trabajo práctico es clave para la enseñanza de las fracciones. Ellos indicaron que los materiales adecuados para realizar actividades prácticas con fracciones son grupos de objetos, dibujos, diagramas y fichas de trabajo. Por su parte, Schmitz y Eichler (2015) realizaron una investigación cualitativa con veinte docentes de Alemania acerca de sus creencias sobre el rol de la visualización en la enseñanza de las fracciones. Se analizaron a profundidad las creencias de dos profesores de Matemática de seudónimos Alan y Claire. Se encontró que ambos usaban la visualización, pero sus creencias respecto de su importancia diferían. Por un lado, Alan consideraba que los estudiantes debían aprender primero la noción de parte-todo y que podían usar distintas formas geométricas para comprenderla. Él tenía la creencia de que la visualización es un apoyo para la comprensión de los estudiantes, para realizar explicaciones y para justificar las resoluciones. Por su parte, Claire sostenía la creencia de que la visualización de las fracciones funciona como una ayuda mnemotécnica.

Las investigaciones a nivel internacional indican que los docentes creen que el aprendizaje efectivo de las fracciones está caracterizado por la incorporación de material concreto, la vinculación con la vida diaria y el trabajo práctico. En el Perú, existen algunas investigaciones sobre las creencias de la enseñanza de la matemática que dan cuenta de cómo se enseña esta disciplina. Con el presente estudio, el cual está centrado en la enseñanza de las fracciones, se busca tener una comprensión más profunda de aquello que subyace a las prácticas pedagógicas de los docentes peruanos. Dada la relevancia de las creencias en las prácticas docentes y, consecuentemente, en el aprendizaje de los estudiantes, se consideró clave incorporar esta variable en este estudio sobre la enseñanza de las fracciones.

Conocimiento docente para la enseñanza de las fracciones

El conocimiento es un componente clave de la competencia profesional de los docentes por su incidencia en su práctica pedagógica (Baumert et al., 2010). Si bien en la actualidad existen diferentes modelos que buscan aproximarse a la estructura, tipología o desarrollo del conocimiento docente, se puede identificar el trabajo de Shulman (1986), el cual resultó fundamental para comprender la complejidad del conocimiento requerido para la enseñanza. Él planteó ampliar el énfasis que hasta entonces tenía el conocimiento disciplinar. Su propuesta partía de la identificación de otras dimensiones que potenciaban la capacidad del docente para desarrollar e implementar la enseñanza de un contenido curricular de tal manera que asegurara la comprensión del estudiante. En esta línea, Shulman distinguió tres dimensiones de conocimiento docente: a) conocimiento del contenido, b) conocimiento del currículo y c) conocimiento pedagógico del contenido. El conocimiento del contenido refiere a la cantidad y a la organización del conocimiento sobre diferentes aspectos del área de enseñanza. Es decir, se trata del conocimiento disciplinar. El conocimiento del currículo es la familiaridad que tienen los docentes con los materiales y programas como herramientas para la enseñanza. Finalmente, el conocimiento pedagógico del contenido se refiere a las formas de representar y formular un tema para hacerlo comprensible a los estudiantes. Esta última dimensión del conocimiento permite al docente representar ideas, usar analogías, ilustraciones y ejemplos, y explicar y demostrar el tema que es objeto de enseñanza; e involucra aspectos como la selección de tareas para los estudiantes y la identificación e interpretación de sus errores (Castro-Rodríguez y Rico, 2021).

Posteriormente, en un intento de operacionalizar las dimensiones identificadas por Shulman (1986), se plantearon diferentes tipologías y clasificaciones sobre el conocimiento docente enfocadas en áreas curriculares específicas, como Matemática. Así, se encuentra la propuesta de Hill et al. (2008), quienes desarrollaron el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza (MKT). Este modelo examina el conocimiento matemático requerido para que los profesores puedan cumplir con las demandas de la enseñanza de la matemática y desarrollar aprendizajes. Específicamente, estos investigadores identificaron otros aspectos del conocimiento del contenido y del conocimiento pedagógico del contenido con el fin de medirlos y asociarlos al aprendizaje de los estudiantes. Su propuesta buscó, sobre todo, resaltar el conocimiento que debe tener el docente sobre el estudiante y sobre la forma en que este aprende la matemática. En la propuesta de estos autores, además, se destacó la importancia de aproximarse al conocimiento pedagógico del contenido a través de tareas, pues estas permiten recoger información más cercana acerca de lo que los docentes usan en las clases para que sus explicaciones sean comprensibles para sus estudiantes (Hill et al., 2004, 2005).

Otros estudios que resaltan la dimensión del conocimiento del contenido y del contenido pedagógico son el estudio de activación cognitiva y competencia profesional del docente de matemática (COACTIV), de Baumert et al. (2010), y el estudio de formación de docentes en Matemática (TEDS-M), de Tatto et al. (2012). Baumert et al. (2010) investigaron la relación entre estos dos dominios del conocimiento en profesores de matemática de 10.° grado en Alemania, y encontraron que ambos brindan una contribución única a la enseñanza de los profesores, pues mejoran la calidad de su enseñanza y el aprendizaje de sus estudiantes; sin embargo, identificaron que el impacto del conocimiento pedagógico del contenido fue mayor que el del brindado por el conocimiento del contenido. Ello, señalan los autores, no significa que el conocimiento del contenido o disciplinar no sea importante. De hecho, este juega un rol crucial en la definición de lo que el docente puede hacer en términos pedagógicos (por ejemplo, la activación cognitiva o el tratamiento del error). Sobre esta base, Baumert et al. concluyeron que el conocimiento pedagógico del contenido solo se puede desarrollar si el docente ha alcanzado un nivel sustancial de conocimiento del contenido. Por su parte, Tatto et al. (2012) realizaron un estudio internacional comparativo de futuros docentes de Matemática de primaria y secundaria en su último año de formación. En él, participaron 15 países. Estos autores encontraron que, a más especialización de la formación docente en Matemática, mayor es el nivel de conocimiento del contenido y de conocimiento pedagógico del contenido. Los resultados también revelaron diferencias en las oportunidades de aprendizaje de los futuros docentes según el tipo de programa que recibieron o el nivel educativo en el que enseñarían (primaria o secundaria). Estos hallazgos permiten reflexionar sobre el rol que tiene la formación docente en el conocimiento requerido para la enseñanza de la matemática.

En este marco, se han desarrollado diferentes estudios que se refieren al rol que cumple el conocimiento del docente de Matemática en la enseñanza de fracciones, un contenido que ha sido identificado por diferentes estudios como desafiante tanto para los estudiantes como para los docentes (Copur-Gencturk, 2021; Getenet y Callingham, 2017). Por ejemplo, una de las principales dificultades que surgen en el proceso de enseñanza-aprendizaje radica en la atribución de las propiedades de los números naturales a los números racionales, fenómeno conocido como sesgo del número natural (Depaepe et al., 2015). Este sesgo lleva a los estudiantes a, por ejemplo, sumar automáticamente numeradores y denominadores de manera horizontal en una operación de suma de fracciones. Trabajar estas concepciones erróneas de los estudiantes sobre los números racionales implica que los docentes tengan un conocimiento sólido no solo sobre las fracciones, sino también sobre sus significados (Behr et al., 1983) y, como se deriva de la revisión teórica previa, sobre cómo enseñarlas. Al respecto, es importante resaltar la importancia de que los estudiantes estén familiarizados con todos los significados de fracción para que puedan tener una comprensión profunda de ellas (Getenet y Callingham, 2017). A continuación, se brindan algunas evidencias que permiten tener una aproximación al conocimiento de los docentes vinculado a la enseñanza de las fracciones y sus significados.

Depaepe et al. (2015) realizaron un estudio con futuros docentes de Matemática. Tras aplicar una prueba sobre números racionales, encontraron que estos presentaban limitaciones en el conocimiento del contenido y en el conocimiento pedagógico del contenido, con mejores resultados en la primera dimensión que en la segunda, y con mayores dificultades para las fracciones que para los números decimales. Asimismo, encontraron una correlación moderada entre ambas dimensiones del conocimiento. En efecto, tener mayores conocimientos sobre las fracciones no implicaba necesariamente tener mayores conocimientos sobre cómo enseñarlas. En este punto, es importante reconocer que el conocimiento pedagógico del contenido se fortalece con la experiencia, razón por la cual podía anticiparse que los resultados de los futuros docentes serían bajos. A pesar de ello, se debe considerar la incidencia de las oportunidades de aprendizaje recibidas durante su formación en el desempeño que mostraron en la prueba que resolvieron.

Específicamente sobre el conocimiento del contenido, los estudios de López (2022), Avcu (2019) y Copur-Gencturk (2021) también encontraron que los conocimientos de los docentes en formación y en servicio en cuanto a fracciones es limitado. Estos estudios revelan falencias de los docentes en su comprensión de aspectos conceptuales, operacionales y de interpretación (por ejemplo, el significado de fracción como operador). Por otra parte, Valenzuela et al. (2022) y Escolano y Gairín (2005) encontraron que los docentes definen principalmente las fracciones como parte-todo y dejan de lado el estudio de los demás significados. Finalmente, Wijayanti y Fardah (2021) y Kutub y Wijayanti (2019) estudiaron la relación entre el conocimiento de los docentes y el de sus estudiantes, y concluyeron que el aprendizaje de los estudiantes sobre fracciones está estrechamente relacionado con el conocimiento del contenido o disciplinar de sus docentes.

Respecto del conocimiento pedagógico del contenido para la enseñanza de fracciones, se ha encontrado una serie de investigaciones que dan cuenta de algunos aspectos que revierten la dificultad de los docentes o futuros docentes para abordar este contenido. Tirosh (2000) llevó a cabo una investigación sobre la enseñanza de fracciones con docentes en formación de Israel y encontró que su conocimiento pedagógico del contenido sobre las fracciones era limitado: tuvieron dificultades para predecir errores de los estudiantes y, cuando los pudieron anticipar, sus predicciones se limitaban a aspectos procedimentales, como errores basados en un mal uso de algoritmos. Por ejemplo, anticiparon que, para dividir fracciones, los estudiantes invertirían el dividendo en lugar del divisor antes de multiplicar numeradores y denominadores. En España, Castro-Rodríguez y Rico (2021) realizaron un estudio cualitativo con nueve docentes en formación acerca de su conocimiento pedagógico del contenido de las fracciones. Los investigadores solicitaron a los participantes plantear tareas, identificar objetivos de aprendizaje de estas tareas, y anticipar errores o dificultades de los estudiantes al afrontarlas. Todos los participantes lograron plantear tareas apropiadas para la enseñanza de las fracciones. Estas tareas fueron presentadas en forma de problemas matemáticos. Además, la mayoría pudo vincular coherentemente las tareas sobre fracciones con objetivos de aprendizaje. Sin embargo, muchos tuvieron complicaciones para anticipar posibles errores de los estudiantes y vincularlos con las dificultades que los originaban.

Preguntas de investigación

A la luz de todo lo anterior, la presente investigación se propuso como objetivo general caracterizar las creencias y conocimiento de los docentes de 2.° grado de secundaria relacionados con la enseñanza de las fracciones. Específicamente, se plantearon las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son las creencias de los docentes de Matemática de 2.° grado de secundaria respecto de la enseñanza de las fracciones?
2. ¿Cuál es el conocimiento del contenido que tienen los docentes de Matemática de 2.° grado de secundaria para la enseñanza de fracciones?
3. ¿Cuál es el conocimiento pedagógico del contenido que tienen los docentes de Matemática de 2.° grado de secundaria para la enseñanza de fracciones? ¿Cómo se refleja este conocimiento en las tareas que proponen a los estudiantes?

Pese a la importancia que tienen las fracciones en el aprendizaje de la matemática, no existen estudios sobre este tema en el contexto peruano. El presente trabajo busca aportar en la construcción de conocimiento sobre algunas variables que permitan entender de manera más profunda las prácticas pedagógicas de los docentes para la enseñanza de la matemática. De este modo, busca contribuir a la mejora de los aprendizajes de los estudiantes peruanos.

Método

El abordaje de la presente investigación fue mixto. Se usaron técnicas cuantitativas y cualitativas para recoger información con la finalidad de tener una aproximación más completa al fenómeno de estudio (Hernández et al., 2015). Cabe señalar que esta investigación se realizó luego de un año escolar en modalidad presencial precedido de dos años escolares en modalidad remota a consecuencia de la pandemia. A continuación, se describe de manera detallada cómo fue el recojo de información de este estudio.

Información cualitativa

Participantes. Para el recojo de la información cualitativa, se seleccionaron 12 escuelas urbanas y rurales que participaron en la prueba de Matemática de 2.° grado de secundaria de la EM 2022 (Minedu, 2023). Las escuelas se eligieron a partir de una serie de criterios de inclusión que permitieran tener una muestra diversa. Así, se seleccionaron escuelas de las tres regiones del Perú (costa, sierra y selva) y, al interior de estas regiones, se seleccionaron escuelas urbanas y rurales que, dado su nivel socioeconómico, tuvieran un rendimiento promedio por encima y por debajo de lo esperado en las pruebas de Matemática de 2.° grado de secundaria de las ECE 2016, 2018 y 2019. La tabla 5 detalla las características de las escuelas participantes.

Tabla 3

Características de las escuelas participantes en el recojo de información cualitativa (n = 12)

Área y región	Costa (Piura)	Sierra (Apurímac)	Selva (Amazonas)	Resultados ECE de la escuela
Rural	1	1	1	Por encima del promedio
Urbano	1	1	1	
Rural	1	1	1	Por debajo del promedio
Urbano	1	1	1	

En cada una de las escuelas seleccionadas, se eligió a un docente de Matemática de 2.° grado de secundaria para que participe en una entrevista. Así, en total, 12 docentes del área fueron entrevistados. Las características de los docentes de Matemática entrevistados se detallan en la tabla 6.

Tabla 4

Características de los docentes participantes

Docentes	Región	Área	Sexo	Formación	Años como docente de Matemática
P1	Amazonas	Urbana	Mujer	Educación	18
P2		Urbana	Mujer	Educación	26
P3		Rural	Mujer	Estadística	4
P4		Rural	Mujer	Educación	19
P5	Piura	Urbana	Mujer	Educación	26
P6		Urbana	Hombre	Educación	17
P7		Rural	Mujer	Ingeniería de Sistemas	5
P8		Rural	Hombre	Educación	19
P9	Apurímac	Urbana	Mujer	Educación	15
P10		Urbana	Mujer	Educación	16
P11		Rural	Hombre	Educación	16
P12		Rural	Mujer	Educación	33

Instrumentos. Para recoger la información cualitativa, se aplicaron entrevistas a docentes y se fotografiaron todas las tareas de fracciones encontradas en los cuadernos de los estudiantes. A continuación, se describe detalladamente cada instrumento cualitativo.

- **Entrevistas a docentes.** Se construyó una guía de entrevista semiestructurada para docentes de Matemática que buscó indagar sobre sus creencias acerca de la utilidad, la importancia y las formas de enseñar las fracciones. Asismismo, se indagó sobre aspectos del conocimiento pedagógico del contenido referidos al análisis de tareas que movilizaban los significados de fracción. Para ello, se incluyeron en la entrevista cinco estímulos visuales con una situación problemática vinculada a fracciones. Durante la entrevista, se presentaron a los docentes los cinco estímulos impresos, los cuales abordaban alguno de los cinco significados de fracción (ver tabla 7). Se consultó a los docentes por los conocimientos matemáticos que los estudiantes movilizaban en la solución de cada tarea, la capacidad del CNEB que estaba involucrada, los posibles errores de los estudiantes y las acciones que, como docentes, implementarían para ayudarlos a superar estas dificultades.

- **Registro fotográfico de los cuadernos de los estudiantes.** Por cada escuela, se solicitó un cuaderno de Matemática de 2.° grado de secundaria a los docentes entrevistados. Se les pidió que seleccionaran el más completo, según su criterio, con la finalidad de obtener la mayor cantidad de evidencias de aprendizaje. En los cuadernos elegidos, se fotografiaron las tareas vinculadas a fracciones. Se analizó un total de doce cuadernos.

Estrategia analítica. Se utilizó un análisis de tipo temático para toda la información cualitativa (Braun y Clarke, 2012). Para las entrevistas, el análisis fue más inductivo, en tanto se generaron códigos, temas y subtemas a partir del discurso de los participantes. En cambio, para las evidencias de aprendizaje obtenidas de los cuadernos, el análisis fue más deductivo: a priori, se establecieron categorías asociadas a los cinco significados de fracción, y luego se indicó si se presentaban o no en cada una de las fotografías de las tareas.

Información cuantitativa

Participantes. La muestra estuvo conformada por 3865 docentes de Matemática que enseñaban a estudiantes de 2.° grado de secundaria participantes de la EM 2022. El 66,8 % de los docentes fueron hombres y el 33,2 % fueron mujeres. Respecto de las características de las escuelas de procedencia de los docentes encuestados, 43,2 % fueron de escuelas públicas urbanas, 40,6 % fueron de escuelas públicas rurales, y 16,2 % fueron de escuelas privadas.

Cabe señalar que la muestra incluyó a los docentes que tuvieron a cargo una o más secciones de estudiantes evaluados en la EM. Por ello, no es una muestra representativa de docentes de Matemática.

Instrumentos. Cada docente participante completó un cuestionario de preguntas cerradas por un tiempo aproximado de 60 minutos. Este cuestionario recogió información sobre sus características sociodemográficas, y sobre su conocimiento del contenido y su conocimiento pedagógico del contenido relacionados con la enseñanza de fracciones y, específicamente, con sus cinco significados. La aproximación al conocimiento del contenido por parte de los docentes fue a través de 18 preguntas en las que debían resolver situaciones problemáticas relacionadas con las fracciones. Por su parte, el recojo de información sobre el conocimiento pedagógico del contenido se realizó a través de 24 preguntas en las que cada docente debía identificar los propósitos de las tareas presentadas, las causas de los errores que podrían cometer los estudiantes y la posible retroalimentación que ellos darían, entre otros aspectos pedagógicos que pudieran surgir al plantear a los estudiantes situaciones problemáticas sobre fracciones.

Estrategia analítica. Se realizaron análisis descriptivos de las tasas de acierto de los docentes en las escalas de conocimiento del contenido y de conocimiento pedagógico del contenido de las fracciones. Se analizaron las distribuciones de respuesta de todos los ítems que componen las escalas. Asimismo, se identificaron los ítems en los que se encontraba la menor tasa de acierto de los docentes para su posterior análisis pedagógico.

Resultados y discusión

En esta sección, se presentarán los resultados del estudio, el cual tuvo como objetivo general caracterizar las creencias y conocimiento de los docentes de 2.° grado de secundaria relacionados con la enseñanza de las fracciones. En el primer apartado, se describirán las creencias reportadas por los docentes respecto de la enseñanza de las fracciones. En el segundo, se reportará el análisis del conocimiento del contenido y del conocimiento pedagógico del contenido sobre fracciones que muestran los docentes.

Creencias docentes sobre la enseñanza de las fracciones

A través de entrevistas, se indagó sobre las creencias de los docentes de Matemática de 2.° grado de secundaria acerca del aprendizaje de las fracciones. Por lo tanto, en este apartado, se presentarán los resultados cualitativos de este tema. Las creencias identificadas en el análisis han sido agrupadas en cinco temas: 1) "están en todo": presencia y usos cotidianos de las fracciones, 2) importancia de las fracciones para otras competencias matemáticas, 3) material concreto en el aprendizaje de las fracciones, 4) situaciones contextualizadas para aprender fracciones y 5) lo que necesita saber un docente para enseñar fracciones. Estos cinco temas se detallarán a continuación.

"Están en todo": presencia y usos cotidianos de las fracciones. En algunos de los docentes entrevistados, destaca la creencia de que las fracciones están en todo. La mayoría señala que se usan en la vida diaria y que, por ello, es importante aprenderlas.

> *Bueno, para mí es sumamente importante enseñar el tema de fracciones o números racionales en los estudiantes, ¿no?, porque es algo que está con nosotros día a día. No siempre nos vamos a encontrar con partes enteras en todo. Los números naturales son muy importantes, los números enteros también, ¿no? Los números fraccionarios mucho más* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área urbana).

Si bien en la vida cotidiana es posible encontrar fracciones, hay que considerar que estas son, generalmente, fracciones usuales, como medios, cuartos, quintos u octavos ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ o $\frac{1}{8}$). Estas fracciones aparecen cuando hacemos compras ("me da medio kilo de azúcar"), cuando decimos la hora ("son las siete y cuarto"), cuando repartimos algo (si partimos un molde de queso en cinco partes, a cada uno le toca un quinto), entre otras actividades. Las fracciones no usuales, como $\frac{2}{7}$ o $\frac{1}{9}$, no están presentes en la cotidianidad, pero son igual de importantes para entender esta noción matemática. Por lo tanto, la creencia de los docentes de que es importante aprender fracciones por su presencia en la vida diaria evidencia una visión limitada de este aprendizaje, pues, en la cotidianidad, los estudiantes se ven expuestos solamente a un grupo reducido de fracciones.

Ahora bien, los docentes entrevistados señalan algunos usos cotidianos que se dan a las fracciones. Explican que estas se usan para compartir, repartir o dividir alimentos o terrenos. También indican que las fracciones son útiles para el manejo del dinero: comprar, vender, hacer un presupuesto, estimar pérdidas, manejar un negocio o calcular descuentos.

> *Fracciones puede usar en su vida diaria, por ejemplo, en un terreno que puede fraccionar o puede fraccionar en partes iguales un pan o puede utilizar la torta, a ver, para vender por decir. Entonces yo voy a hacer un negocio, entonces yo tengo que fraccionar en partes iguales esta torta, cuánto me ha costado todo mi presupuesto, todo. Eso ya en cuánto cada pedacito voy a vender* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Apurímac, área rural).

Este hallazgo dista –al menos a nivel discursivo– del estudio de Moreano et al. (2008), en el que se encontró que los docentes no relacionaban la matemática con la realidad cotidiana de los estudiantes. En las creencias de los docentes participantes, está presente la importancia de las fracciones por su conexión con la vida diaria. Esta creencia, a su vez, coincide con las percepciones de enseñanza efectiva de las fracciones de la investigación de Stols et al. (2015). Según los docentes que participaron en ese estudio, una enseñanza efectiva de las fracciones es aquella que hace conexiones con la vida real.

También es importante señalar que este hallazgo está alineado a una de las características del enfoque de resolución de problemas propuesto en el CNEB, el cual plantea promover el uso real de los aprendizajes matemáticos. Sin embargo, el énfasis que los docentes dan al uso funcional de las fracciones y los ejemplos que indican evidencian una comprensión incipiente de este aprendizaje matemático y un uso de las fracciones que se limita a su significado como parte-todo, el cual se aprende desde primaria. Se esperaría que un docente de secundaria especialista en el área identifique también usos no funcionales de las fracciones e indique que ellas son útiles para el aprendizaje de conceptos matemáticos más complejos, como probabilidad o números racionales, o para la realización de conexiones con otras áreas, como ciencias o humanidades. Es decir, si bien los docentes identifican adecuadamente que las fracciones son importantes por los usos cotidianos que se les da, deberían también indicar funciones más complejas de este aprendizaje matemático.

Importancia de las fracciones para otras competencias matemáticas. Algunos de los docentes entrevistados consideran que es importante aprender fracciones porque esto consolida otras competencias matemáticas. Es decir, el aprendizaje de las fracciones permite preparar a los estudiantes para resolver situaciones más allá de la competencia “Resuelve problemas de cantidad”. Estos participantes explican que su aprendizaje los habilita para afrontar situaciones que requieran entender el sistema numérico en general.

> *Es importantísimo porque sirve de base para las siguientes actividades que vienen, como complemento, ¿no? Es una base con la cual los estudiantes pueden*

> *continuar avanzando en las demás competencias. Digamos que las cuatro competencias son importantes. Pero si no manejan la que corresponde a "Problemas de cantidad", que es la que corresponde a fracciones, van a tener dificultad con las otras (competencias). A lo largo de toda la, su estadía en, en el sistema educativo, van a necesitar de las fracciones, los decimales y sus diferentes formas de expresarlo en porcentajes* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Piura, área urbana).

Esta creencia está presente en algunos docentes, no en la gran mayoría. A diferencia de la que dice "está en todo", da cuenta de una comprensión más compleja de la importancia de aprender fracciones más allá de la cotidianidad, pues evidencia la importancia de la progresión de los aprendizajes, presente en el CNEB. Sin embargo, al analizar los ejemplos que el docente citado ofrece sobre otros aprendizajes matemáticos, se puede observar que estos se limitan a la competencia "Resuelve problemas de cantidad". No menciona que las fracciones también son la base para poder aprender acerca de regularidad, ecuaciones, manejo de datos estadísticos o probabilidades. Esta creencia, nuevamente, da cuenta de una comprensión limitada de la importancia de aprender fracciones.

Material concreto en el aprendizaje de las fracciones. Otra creencia de los docentes entrevistados es que el material concreto facilita la comprensión de las fracciones. Algunos explicaron que, en primaria, el uso del material concreto es muy importante y que, en secundaria, aún debería usarse para que los estudiantes puedan aprender. Los docentes consideran que las explicaciones verbales o meramente retóricas dificultan la comprensión de las fracciones.

> *Porque me permiten contextualizar y los chicos en esa edad están en el tránsito de dejar lo concreto para entrar a [lo] abstracto. Entonces, si de frente voy a lo abstracto, se crea ese conflicto. Entonces, los voy, este, en término medio. Hasta que ya en un momento determinado, ya dejamos lo concreto y pasamos ya a los algoritmos propiamente* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Piura, área urbana).

Entre los ejemplos de materiales concretos, los docentes mencionan cuadrículas, cartulinas, tarjetas, regletas, cintas, alimentos, chapitas y taps, y la gran mayoría señala sobre todo que la hoja de papel es un material útil para enseñar fracciones.

> *Material didáctico. Así sea una hoja de papel que la va a partir delante del estudiante... Entonces él va a saber qué es una hoja entera y que a esa hoja la va partir en los pedazos que, de repente, en ese momento se tome la decisión, ¿no? Si me dicen que la partimos en cuatro pedazos, los partimos en cuatro, entonces les*

digo: "Esta unidad entera se partió en 3 o en 4 pedazos. Ahora, ¿este pedazo que yo tengo acá o esta parte de esta hoja de papel bond es la unidad completa del papel bond que yo tenía? Es una parte de la hoja entera que yo tenía". Entonces, a esa parte fraccionada yo ya le doy un nombre. Si está partida en 3, como está en 3, lógicamente, una sola parte es $\frac{1}{3}$, pero si acojo dos partes, ya son $\frac{2}{3}$. Y si cojo 3 partes... (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área urbana).

Este hallazgo coincide con lo encontrado en los estudios previos de Maharaj et al. (2007) y de Stols et al. (2015), en donde los docentes explican que el uso de objetos como material concreto (caramelos, tiras de papel, etc.) es una estrategia efectiva para enseñar fracciones. Si bien el material concreto es un apoyo importante para empezar a entender la noción de fracción, este recurso funciona para representar gráficamente fracciones usuales, pero no fracciones que expresan cantidades muy pequeñas, como $\frac{2}{17}$, o muy grandes, como $\frac{512}{19}$, porque su representación se haría compleja y dificultaría el proceso de aprendizaje.

Asimismo, es importante señalar que los ejemplos señalados por los docentes, y específicamente la hoja de papel, se centran en el significado de fracción como parte-todo y restringen la representación de la fracción a un área, es decir, a una cantidad continua. Cabe reiterar que las fracciones tienen cinco significados y que pueden representarse en cantidades continuas o discretas. Los docentes podrían emplear material concreto en donde se trabaje con cantidades continuas y predomine el área (una hoja de papel, un terreno, una pizza, un pastel, etc.); también podría trabajar con situaciones y objetos que permitan representar cantidades discretas (monedas, chapitas, caramelos, etc.); de igual modo, podrían usar modelos de recta numérica. En secundaria, se espera que los docentes trabajen con la recta numérica justamente para que los estudiantes puedan comprender que las fracciones son parte del conjunto más amplio de los números racionales. En ese sentido, podrían usar regletas, material base 10 o las regletas de Cuisenaire.

Situaciones contextualizadas para aprender fracciones. En las entrevistas, se evidenció que otra creencia de los docentes es la necesidad de enseñar fracciones por medio de situaciones en donde los estudiantes den un uso "real" a este aprendizaje a través de problemas contextualizados.

Si nosotros lo inducimos al estudiante desde este punto de vista le va a tomar interés al tema. Pero si solamente yo le enseño como un número que tiene un numerador y un denominador porque se parte la unidad, no le toma interés. Claro que le voy a enseñar que una unidad se fracciona, ¿no? Que si yo traigo de repente un pan y lo quiero compartir en dos, entre dos compañeros, lo parto por la mitad y estoy compartiendo, le estoy invitando. Porque es diferente que venga en la pizarra y le ponga "hay una barra" y lo parta por la mitad. Como está partido por la mitad o *en partes iguales... este es un medio, este es un medio, tengo dos medios, igual la unidad. Pero si comenzamos por ahí... pues ellos no van a coger un poco más de interés* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área urbana).

Este hallazgo es congruente con lo propuesto por el enfoque de resolución de problemas del CNEB, puesto que se enfatiza el uso real de las fracciones como un indicador del aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, se observa que los contextos de aplicación son bastante cotidianos y no se mencionan usos de este aprendizaje matemático más acordes a la edad y al grado de escolaridad de los estudiantes. Particularmente, las situaciones reales señaladas por los docentes nuevamente se limitan a lo cotidiano (por ejemplo, el mercado), un contexto en donde se usan fracciones usuales ($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{5}$), las cuales solo son adecuadas para aportar al desarrollo de los niveles más elementales de la noción de fracción (como parte-todo).

Lo que necesita saber un docente para enseñar fracciones. Se preguntó a los participantes qué necesita saber un docente para enseñar fracciones. Los profesores entrevistados pusieron el énfasis en el dominio de aspectos tales como los elementos de la representación simbólica de la fracción (numerador y denominador), la noción de fracción, sus propiedades y su clasificación (homogéneas y heterogéneas, propias e impropias).

Dominar la parte disciplinar, colega, ¿no? Si no, terminas improvisando, forzando, o hay duda, por ejemplo, ¿no?, por ejemplo. En una fracción, el numerador, ¿qué representa el denominador?, ¿qué significado tiene? Entonces, numera… o sea, conocer la parte disciplinar, porque, ¿qué pasaría si yo me equivoco en la parte de disciplinar?, ya malogré ¿cuántos cerebros?, ya malogré (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Apurímac, área rural).

Estas características corresponden a aspectos formales de la representación simbólica de las fracciones. La gran mayoría de docentes no reporta los significados de fracción, pese a que este es un aspecto clave y presente en los estándares nacionales de la competencia "Resuelve problemas de cantidad" (Minedu, 2017a). Solamente una docente de Amazonas los reportó, lo cual indica que, en general, los docentes creen que la enseñanza de las fracciones debe centrarse en el dominio de conceptos y procedimientos para operar con fracciones, pero no reconocen la importancia de abordar la comprensión de sus cinco significados.

Asimismo, algunos docentes explicaron que deben buscar estrategias adecuadas para enseñar fracciones; es decir, destacan la importancia de la didáctica de la matemática para que los estudiantes logren aprender fracciones.

Bueno, nosotros los docentes del área estamos, este, creo que yo capacitados en todos, en todos los temas, ¿no? Nosotros, este, conocemos muy bien los temas, pero sí sería bueno, eh, las estrategias, ¿no?, en todo caso. Las estrategias de *cómo hacerles, eh, trabajar diferentes recursos. Utilizar diferentes recursos para que los chicos puedan aprenderlo de una manera más didáctica, más práctica y así también a ellos no se les haga, no se les haga muy difícil el área, ¿no?* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Piura, área urbana).

En esta cita, el docente manifiesta que domina los conocimientos de contenido. Además, reconoce que las estrategias de enseñanza son importantes para favorecer el aprendizaje, pero que requiere un mayor conocimiento sobre ellas. Esta cita es sugerente respecto de las creencias, pero también de las necesidades de capacitación de los docentes en didáctica de la matemática. A nivel de creencias, este docente identifica que es importante usar estrategias pedagógicas que permitan a los estudiantes comprender las fracciones e incluso la matemática en general. Al mismo tiempo, precisamente por el rol clave que da a este aspecto, demanda ser capacitado en didáctica de la matemática para poder enseñar fracciones a sus estudiantes. Este docente sugiere que tiene algunos vacíos respecto del conocimiento pedagógico del contenido, aunque señala dominar el conocimiento del contenido matemático. Estos aspectos del conocimiento docente serán analizados en el siguiente apartado.

Conocimiento docente para la enseñanza de fracciones

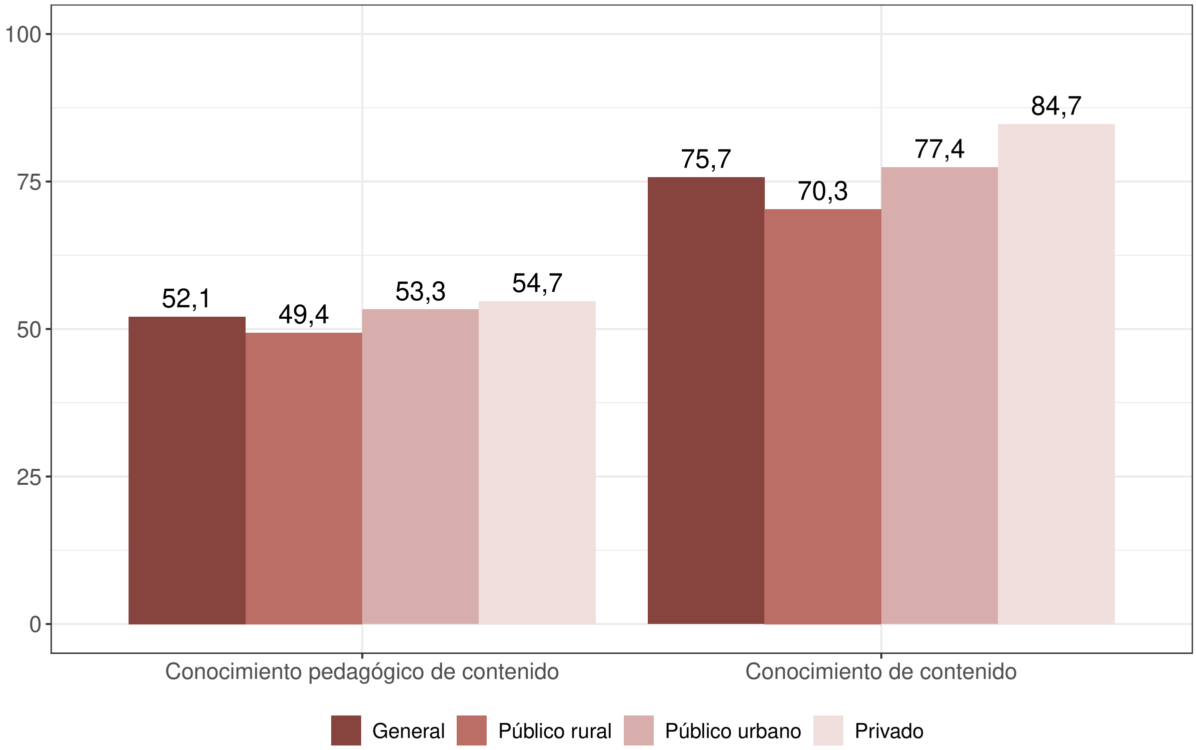
Como se señaló anteriormente, en este estudio, se examinó el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido de los docentes de Matemática de 2.° grado de secundaria en relación con la enseñanza de fracciones. Ambos aspectos se abordaron a través de la aplicación de un cuestionario de preguntas cerradas que permitieron tener una aproximación cuantitativa a este dominio. Además, se recogió información más detallada sobre la forma en que los docentes despliegan su conocimiento pedagógico del contenido para la enseñanza de fracciones a través de la aplicación de metodologías cualitativas. Específicamente, se realizaron entrevistas en las que se solicitó a los docentes el análisis de tareas con los cinco significados de fracción. Además, se analizaron las actividades asociadas a los significados de fracción que se encontraron en los cuadernos de los estudiantes.

En primer lugar, se realizó un análisis descriptivo y comparativo de las tasas de acierto de los 3865 docentes participantes en los dos tipos de conocimiento docente mencionados: el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido de la enseñanza de fracciones. Cabe reiterar que la primera dimensión del conocimiento fue medida a través de 18 preguntas en las que los docentes debían resolver situaciones problemáticas vinculadas a fracciones. La segunda dimensión del conocimiento se midió a través de 24 preguntas en las que los docentes debían identificar los propósitos de las tareas, las causas de los errores y las posibles formas de retroalimentación, entre otros aspectos pedagógicos sobre situaciones de aprendizaje relacionadas con fracciones.

La Figura 1 muestra el promedio de las tasas de acierto de los docentes en ambos tipos de conocimiento, así como su desagregación por área y gestión. Se observa que los docentes presentaron mejores tasas de acierto en conocimiento del contenido que en conocimiento pedagógico del contenido. Específicamente, los docentes alcanzaron una tasa de acierto de 75,7 % en las preguntas sobre conocimiento del contenido y una de 52,1 % en las preguntas sobre conocimiento pedagógico del contenido. Al comparar estos resultados por estratos, las diferencias entre ambos tipos de conocimiento se mantienen a favor del conocimiento del contenido.

Figura 1

Porcentaje promedio de acierto de los docentes según tipo de conocimiento (n = 3865)



Los análisis cuantitativos de estos dos tipos de conocimiento de los docentes revelan que ellos tendrían un mayor dominio del conocimiento del contenido de las fracciones. Es decir, la mayoría de docentes participantes es capaz de resolver situaciones problemáticas vinculadas a fracciones. Existe, sin embargo, un 25 % de docentes del área que no logra resolver exitosamente problemas sobre fracciones apropiados para estudiantes de 2.° grado de secundaria, lo cual ofrece una alerta respecto de la solidez de su dominio de conocimientos matemáticos elementales. Ahora bien, los docentes presentaron mayores dificultades en las situaciones que requerían de su conocimiento pedagógico del contenido sobre la enseñanza de fracciones: alrededor de la mitad de los docentes entrevistados (47,9 %) no pudo identificar los propósitos de las tareas, las causas de los errores de los estudiantes y las posibles formas de brindar retroalimentación. Este resultado coincide con lo encontrado en investigaciones previas sobre el tema en las que los docentes presentan mayor conocimiento del contenido que conocimiento pedagógico del contenido en la enseñanza de la matemática (Castro-Rodríguez y Rico, 2021; Depaepe et al., 2015; Tirosh, 2000). En las siguientes secciones, se analizará de manera más profunda el desempeño de los docentes en cada uno de estos tipos de conocimiento, considerando los cinco significados de fracción.

Resultados de conocimiento del contenido para la enseñanza de fracciones. Para indagar en este aspecto del conocimiento docente, se analizaron las respuestas de los docentes a 18 preguntas referidas a problemas sobre fracciones apropiados para estudiantes de 2.° grado de secundaria. En la tabla 5, se detalla la tasa de acierto de los docentes en cada uno de los ítems, considerando los cinco significados de fracción. Posteriormente, se analizan detalladamente dos ítems que tuvieron una baja tasa de acierto.

Tabla 5

Tasa de acierto por ítem de las preguntas sobre conocimiento del contenido asociado a los significados de fracción

Significado de fracción	Descripción del ítem	Ítem	Tasa de acierto
Como operador	Interpreta el significado de fracción como el valor que transforma a una cantidad.	p07	75,9 %
Como parte-todo	Interpreta el significado de fracción como parte-todo en cantidades continuas y discretas donde la unidad se ha dividido en partes equivalentes.	p08_01	85,9 %
		p08_02	92,4 %
		p08_03	93,5 %
		p08_04	80,6 %
		p17_01	78,7 %
		p17_02	89,3 %
		p17_03	84,8 %
		p17_04	76,2 %
Como cociente	Interpreta el significado de fracción como cociente en situaciones de contexto donde se deben realizar repartos que no dan como resultado un número entero.	p09	**58,0 %**
Como medida	Interpreta el significado de fracción como medida al comparar las longitudes de dos objetos usando uno de ellos como referente.	p10_01	92,1 %
		p10_02	70,5 %
		p10_03	84,5 %
		p10_04	92,9 %
Como razón	Interpreta el significado de fracción como razón al establecer una relación de comparación entre dos cantidades o magnitudes (parte-parte).	p11_01	**33,3 %**
		p11_02	**40,3 %**
		p11_03	78,3 %
		p11_04	**56,0 %**

Como se puede apreciar en la tabla, los docentes presentaron mayores dificultades al resolver situaciones problemáticas que abordan dos significados de fracción: como cociente y como razón. Por ello, se analizarán con mayor profundidad las preguntas correspondientes a estos significados, es decir, los ítems 9 y 11 del cuestionario.

En el ítem 9, relacionado al significado de fracción como cociente, se pide identificar la alternativa en la que no se cumplen las condiciones de cómo se realizó la distribución de 5 tabletas de chocolate en total. Cabe señalar que, según el CNEB, el significado de fracción como cociente es desarrollado desde el ciclo V (5.° y 6.° grados de primaria) de la Educación Básica Regular. En la figura 2, se muestra la tarea indicada.

Figura 2

Tarea presentada a los docentes de Matemática de 2.°grado de secundaria sobre el conocimiento del contenido referido a la fracción como cociente

9. Un grupo de 4 amigos se reparten equitativamente 5 tabletas iguales de chocolates. Cada uno de ellos presenta su propuesta de reparto. ¿Cuál de las siguientes propuestas de reparto no considera las cinco tabletas de chocolate?

(Marque solo una respuesta).

A Cada uno recibe $\frac{5}{4}$ de tabletas de chocolate.

B Cada uno recibe 1 tableta de chocolate y sobra 1 tableta de chocolate entera.

C Cada uno recibe $\frac{4}{5}$ de tableta de chocolate.

D Cada uno recibe 1 tableta de chocolate y $\frac{1}{4}$ de otra tableta.

A partir de las respuestas de los docentes, se elaboró la tabla 6, con las tasas de acierto. En ella, se muestra que el 58,0 % de los docentes marcó la alternativa correcta: “Cada uno recibe $\frac{4}{5}$ de tableta de chocolate”. Este grupo de docentes logra comprobar que 4 veces $\frac{4}{5}$ de tabletas de chocolate no completa las 5 tabletas mencionadas en el reparto.

Tabla 6

Tasas de respuesta de los docentes al evaluar las alternativas de la tarea asociada al significado de fracción como cociente

	Enunciados	Tasa de respuesta
A.	Cada uno recibe $\frac{5}{4}$ de tabletas de chocolate.	12,5 %
B.	Cada uno recibe 1 tableta de chocolate y sobra 1 tableta de chocolate entera.	12,1 %
C.	Cada uno recibe $\frac{4}{5}$ de tableta de chocolate.	**58,0 %**
D.	Cada uno recibe 1 tableta de chocolate 1 $\frac{1}{4}$ de otra tableta.	17,4 %

Nota. El porcentaje resaltado en negrita corresponde a las respuesta correcta.

En esta tarea, se evidencia que el reparto mencionado puede ser realizado de diferentes formas según la estrategia de reparto que se elija. Así, es posible expresar de distintas maneras cómo se haría el reparto total y la cantidad de tableta que recibiría cada uno. Solo una de las alternativas no da cuenta de las 5 tabletas de chocolate en la distribución.

Una manera de representar el reparto consiste en indicar que cada tableta se divide en 4 partes iguales y lo que recibe cada amigo es una porción de tableta. Esto se expresaría como fracción impropia: cada uno recibe $\frac{5}{4}$ de tableta de chocolate (alternativa A). También se puede expresar la distribución considerando únicamente las tabletas enteras. Así, cada amigo podría recibir una tableta y quedaría una tableta sin repartir (alternativa B). De la misma manera, se podrían repartir cuatro tabletas enteras y distribuir en cuatro partes iguales solo una. En este caso, cada amigo recibiría $1\,\frac{1}{4}$ de tableta (alternativa D). La tarea planteada pide identificar la propuesta de reparto que no considera las 5 tabletas, es decir, la alternativa C. Como se ha señalado, solo el 58,0 % de los docentes respondió correctamente, frente a un 42,0 % que marcó alguna de las otras alternativas. Esto evidencia dificultades de los docentes en el dominio del conocimiento del contenido asociado al significado de fracción como cociente. Este 42,0 % no logra interpretar diferentes expresiones de fracción asociadas a una misma situación de reparto o interpretar las distintas representaciones de una misma fracción (como número mixto, como fracción impropia, o como entero y residuo).

Por otro lado, en el ítem 11, se les planteó a los docentes una tarea sobre el significado de fracción como razón. Esta establecía una relación de comparación entre las cantidades de determinadas partes (tipos de libro) que constituyen un todo (libros del estante). En la figura 3, se muestra esta tarea.

Figura 3

Tarea presentada a los docentes de Matemática de 2.°grado de secundaria sobre el conocimiento del contenido referido a la fracción como razón

11. En el estante hay cierta cantidad de libros. Se sabe que la cantidad de libros de Investigación son los $\frac{4}{5}$ de la cantidad de libros de Matemática. Con esta información, indique para cada caso si definitivamente no se cumple, podría cumplirse o definitivamente sí se cumple. ***(Marque solo una respuesta en cada fila).***

	Definitivamente no se cumple	Podría cumplirse	Definitivamente sí se cumple
11.1 Quiere decir que hay 4 libros de Investigación y 5 de Matemática.	A	B	C
11.2 Quiere decir que hay 9 libros en total.	A	B	C
11.3 Quiere decir que si hubiera 20 libros de Matemática, habría 16 libros de Investigación.	A	B	C
11.4 Si hay 40 libros en total, 32 libros son de Investigación.	A	B	C

Luego de interpretar la afirmación “la cantidad de libros de Investigación es $\frac{4}{5}$ de la cantidad de libros de Matemática”, se solicita evaluar qué afirmaciones se pueden o no cumplir según la la relación dada por la fracción $\frac{4}{5}$. Se espera que el docente identifique, de manera flexible, que hay varias posibilidades de encontrar cantidades que cumplan dicha relación. Por ejemplo, si fueran 4 libros de Investigación, serían 5 libros de Matemática, y se tuvieran 12 libros de Investigación serían 15 libros de Matemática. Estos son algunos ejemplos donde una cantidad (libros de investigación) es $\frac{4}{5}$ de la otra cantidad (libros de Matemática).

A partir de las respuestas de los docentes se elaboró la tabla 7, con las tasas de acierto de cada pregunta. En ella, se muestra que el 78,4 % de los docentes logra identificar correctamente la relación dada sí se cumple definitivamente con los datos mostrados en el enunciado 11.3 Asimismo, solo el 55,8 % logra identificar que los datos del enunciado 11.4 no cumplen con la relación dada. Finalmente, se aprecia que los enunciados 11.1 y 11.2 tienen muy bajas tasas de acierto, lo que evidencia dificultades significativas en la interpretación de las relaciones dadas.

Tabla 7

Tasas de respuesta de los docentes al evaluar los enunciados de la tarea asociada al significado de la fracción como razón

	Enunciados	Definitivamente no cumple	Podría cumplirse	Definitivamente sí cumple
11.1	Quiere decir que hay 4 libros de Investigación y 5 de Matemática.	26,7 %	**33,3 %**	40,0 %
11.2	Quiere decir que hay 9 libros en total.	34,2 %	**40,1 %**	25,5 %
11.3	Quiere decir que si hubiera 20 libros de Matemática, habría 16 libros de Investigación.	11,8 %	9,9 %	**78,3 %**
11.4	Si hay 40 libros en total, 32 libros son de Investigación	**56,0 %**	8,4 %	35,6 %

Nota. Los porcentajes resaltados en negrita corresponden a las respuestas correctas.

Según los datos mostrados en la tabla, resulta preocupante encontrar que más de la mitad del grupo de docentes encuestados evidencia no comprender la noción de fracción como razón, es decir, interpretar la razón como un valor que relaciona cantidades y que no precisa valores específicos. Esto se aprecia cuando en el enunciado 11.1 solo el 33,3 % de los docentes responde correctamente y señala que 4 libros de Investigación y 5 de Matemática podrían ser las cantidades involucradas, sin embargo, en este mismo enunciado, el 40,0 % interpreta como única posibilidad las cantidades fijas de 4 y 5 libros, lo que evidenciaría que leen la fracción como dos cantidades aisladas y no comprenden la relación dada expresada en la fracción. Además, el 26,7 % de los docentes no encuentran relación alguna entre la alternativa y la condición dada en el problema.

De la misma manera, en el enunciado 11.2 solo el 40,1 % de los docentes interpreta correctamente que 9 puede ser unos de los totales posibles en esta relación u otra cantidad múltiplo de ella. Sin embargo, el 25,5 % señala 9 como cantidad absoluta de libros, lo que indica que no comprenden la relación que expresa esta fracción en la cantidad de libros mencionada, lo mismo que el 34,2 % que probablemente no encuentra relación alguna entre en enunciado y el dato dado.

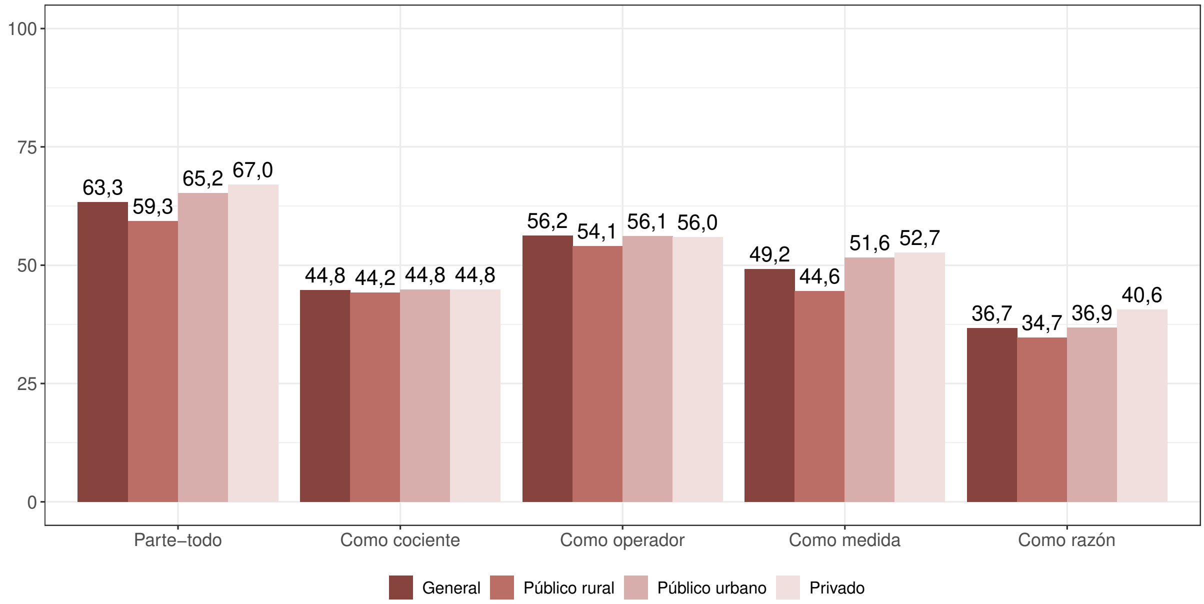
Estas evidencias muestran que más de la mitad de los docentes participantes del estudio tiene dificultad para resolver situaciones problemáticas con este significado de fracción, lo que indica la urgencia de consolidar, en etapas de formación inicial, el dominio de los conocimientos matemáticos propios de la secundaria.

Resultados del conocimiento pedagógico del contenido para la enseñanza de fracciones. En esta sección, se presentarán los análisis cuantitativos y cualitativos del conocimiento pedagógico del contenido sobre fracciones que mostraron los docentes al completar los cuestionarios y participar en las entrevistas.

Análisis cuantitativo del conocimiento pedagógico del contenido. Los resultados de los docentes en conocimiento pedagógico del contenido se obtuvieron a partir de tareas asociadas a situaciones de aula que abordaban acciones pedagógicas referidas al aprendizaje de los cinco significados de fracción (como cociente, como medida, como operador, como parte-todo y como razón). En la figura 4, se muestra la distribución de los promedios de las tasas de acierto por cada significado.

Figura 4

Porcentaje de acierto promedio en las preguntas sobre conocimiento pedagógico asociado a los significados de fracción, según tipo de gestión y área de la escuela



Según el gráfico, las tasas de acierto más altas de los docentes se presentaron en las preguntas relacionadas con el significado de fracción como parte-todo. No obstante, estas no superan el 67,0 %, siendo el estrato rural el que muestra una menor tasa de acierto (cerca de 60,0 %). Por otro lado, los docentes presentaron mayor dificultad en los aspectos pedagógicos asociados a los significados de fracción como razón, como cociente y como medida. Cabe señalar que las tareas vinculadas al significado de fracción como parte-todo fueron las que se abordaron en mayor proporción en los cuadernos de los estudiantes, lo que sugiere que los docentes proponen a los estudiantes actividades asociadas a los significados de fracción que más dominan o a los que más conocen a nivel pedagógico. Por todo lo mencionado, sería conveniente realizar investigaciones que brinden mayores evidencias sobre el real conocimiento de los docentes.

En la tabla 8, se muestran los resultados de las preguntas sobre conocimiento pedagógico del contenido asociadas a cada significado de fracción. Las tasas de acierto más bajas corresponden a las preguntas sobre fracción como razón, algunas de las cuales solo fueron respondidas correctamente por poco más de la tercera parte de los docentes. Por ejemplo, solo el 14,2 % de los docentes evaluó correctamente un enunciado del cuestionario correspondiente a una acción de retroalimentación a una tarea de fracción. También, se aprecian muy bajas tasas de acierto en una pregunta que solicitaba identificar la causa del error en una tarea asociada al significado de fracción como cociente (14,5 %). Asimismo, se encontraron bajas tasas de acierto cuando se solicitó a los docentes identificar el propósito de una tarea asociada a la fracción como operador (20,6 %). Así pues, con el fin de identificar qué podría haber generado estas bajas tasas de acierto, a continuación, se analizarán algunas de las tareas propuestas en el cuestionario aplicado a los docentes.

Tabla 8

Tasas de acierto en los ítems sobre conocimiento pedagógico del contenido

Significado de fracción	Descripción del ítem	Ítem	Tasa de acierto	Tasa promedio de acierto
Como parte-todo	Identifica los errores que pueden cometer los estudiantes al resolver situaciones que abordan el significado de fracción como parte-todo.	p12_01	84,0 %	63,3 %
		p12_02	55,6 %	
		p12_03	83,5 %	
		p12_04	68,9 %	
		p17_05	34,8 %	
		p17_06	82,1 %	
		p17_07	26,5 %	
		p17_08	71,3 %	
Como cociente	Identifica los errores que pueden cometer los estudiantes al resolver situaciones que abordan el significado de la fracción como cociente en situaciones de aprendizaje.	p13_01	80,7 %	44,8 %
		p13_02	32,5 %	
		p13_03	51,4 %	
		p13_04	**14,5 %**	
Como operador	Identifica el propósito de aprendizaje que se puede alcanzar mediante el análisis de las habilidades y conocimientos involucrados en una tarea que aborda el significado de fracción como operador.	p14_01	87,7 %	**55,2 %**
		p14_02	49,9 %	
		p14_03	62,7 %	
		p14_04	**20,6 %**	
Como medida	Evalúa acciones que favorecen que un estudiante identifique las causas del error que cometió al interpretar el significado de fracción como medida en situaciones contextualizadas.	p15_01	24,3 %	49,2 %
		p15_02	49,9 %	
		p15_03	76,2 %	
		p15_04	46,3 %	
Como razón	Evalúa acciones que favorecen que un estudiante identifique las causas del error que cometió al interpretar el significado de fracción como razón en situaciones contextualizadas.	p16_01	46,0 %	36,7 %
		p16_02	**14,2 %**	
		p16_03	65,3 %	
		p16_04	**21,4 %**	

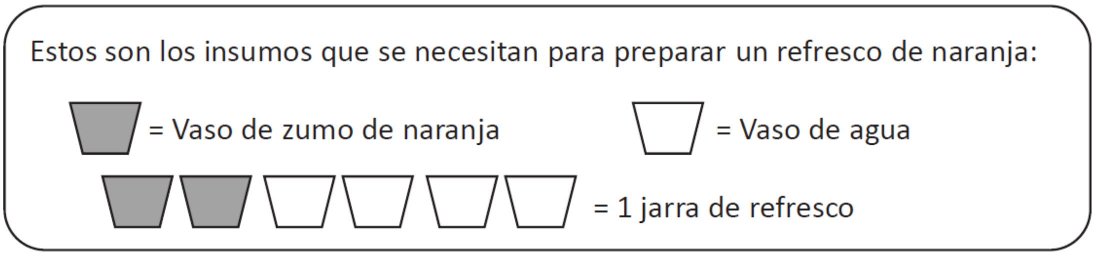
Nota. Los porcentajes resaltados en negrita corresponden a las tasas de acierto más bajas.

Como se puede apreciar en esta tabla, la menor tasa promedio de acierto corresponde a las tareas que involucran el significado de fracción como razón. Para evaluar este aspecto del conocimiento de los docentes, se les planteó una tarea que consistía en analizar una situación de aula. En ella, se proponía a un estudiante resolver un problema relacionado con la preparación de un refresco, y este daba una respuesta que reflejaba un error frecuente. A partir de este estímulo, se solicitó al docente evaluar cuatro acciones de retroalimentación que se podrían implementar. Cabe indicar que solo algunas de ellas eran efectivas para ayudar al estudiante a superar su error. La tarea descrita se muestra en la figura 5.

Figura 5

Tarea y enunciados sobre acciones adecuadas para retroalimentar a los estudiantes en una situación de aprendizaje sobre el significado de fracción como razón

16. Se presenta la siguiente situación a un grupo de estudiantes:



A partir de la preparación de esta jarra de refresco, un estudiante afirma: "La cantidad de vasos de zumo de naranja es $\frac{1}{3}$ de la cantidad de vasos de agua".

¿Qué acciones de retroalimentación implementaría para que el estudiante pueda superar este error?
Indique si cada una de las siguientes acciones es adecuada o no. *(Marque solo una respuesta en cada fila).*

	No es adecuada	Podría ser adecuada	Es adecuada
16.1 Preguntarle: "¿qué elementos estás comparando?, ¿en qué orden los estás comparando?, ¿es importante el orden en el que los comparas?".	☐ A	☐ B	☐ C
16.2 Solicitarle que establezca la razón que existe entre la cantidad de vasos de agua y la cantidad de vasos de zumo de naranja que utilizó Ricardo para hacer su refresco.	☐ A	☐ B	☐ C
16.3 Preguntarle lo siguiente: "¿qué significa $\frac{1}{3}$ en tu respuesta?, ¿qué estás comparando?, ¿por qué?"	☐ A	☐ B	☐ C
16.4 Sugerirle que analice qué cantidad de vasos de zumo de naranja y de agua se utilizaría si se prepara dos, tres o más jarras iguales de refresco.	☐ A	☐ B	☐ C

Tal como se observa en el ítem, el estudiante no establece una relación entre dos partes, sino entre una parte y el todo; es decir, relaciona la cantidad de vasos de zumo de naranja (2), no con la cantidad de vasos de agua (4), sino con la cantidad total de vasos (6). Por eso, obtiene $\frac{2}{6}$ como resultado y, luego, lo simplifica a $\frac{1}{3}$. En esta situación, el estudiante evidencia no comprender lo solicitado: establecer una relación entre las dos magnitudes (vasos de zumo de naranja y vasos de agua).

A partir de las respuestas de los docentes, se elaboró la tabla 9 con las tasas de acierto. En ella, se muestra que, en la afirmación 16.3, el 65,3 % de los docentes respondió, correctamente, que era adecuada la acción de preguntar al estudiante "¿qué significa $\frac{1}{3}$ en tu respuesta?, ¿qué estás comparando?, ¿por qué?", ya que corresponde a una retroalimentación que busca generar reflexión sobre el error e invita al estudiante a explicar qué relación ha establecido y qué razonamientos hay detrás de su respuesta.

Tabla 9

Tasas de respuesta de los docentes al evaluar las alternativas de la tarea asociada al significado de fracción como cociente

	Enunciados	No es adecuada	Podría ser adecuada	Es adecuada
16.1	Preguntarle "¿qué elementos estás comparando?, ¿en qué orden los estás comparando?, ¿es importante el orden en el que los comparas?".	**23,9 %**	30,1 %	46,0 %
16.2	Solicitarle que establezca la razón que existe entre la cantidad de vasos de agua y la cantidad de vasos de zumo de naranja que utilizó Ricardo para hacer su refresco.	**14,2 %**	24,0 %	61,8 %
16.3	Preguntarle lo siguiente "¿qué significa tu respuesta?, ¿qué estás comparando?, ¿por qué?".	9,6 %	25,1 %	**65,3 %**
16.4	Sugerirle que analice qué cantidad de vasos de zumo de naranja y de agua se utilizaría si se preparan dos, tres o más jarras iguales de refresco.	**21,4 %**	29,6 %	49,0 %

Nota. Los porcentajes resaltados en negrita corresponden a las respuestas correctas.

En esta tabla, se observa que solo el 23,9 % de los docentes considera como no adecuado preguntar: "¿qué elementos estás comparando?, ¿en qué orden los estás comparando?, ¿es importante el orden en el que los comparas?" debido a que estas preguntas no orientan al estudiante a reflexionar sobre su error: establecer una relación entre una parte (vasos de zumo de naranja) y el todo (total de vasos), y no entre una parte (vasos de zumo de naranja) y otra (vasos de agua).

Asimismo, solo un 14,2 % de los docentes reconoció como inadecuada la acción de retroalimentación del enunciado 16.2, que solicita a los estudiantes establecer una razón entre dos cantidades (la cantidad de vasos de zumo de naranja y la de vasos de agua). Ello resulta preocupante porque esta acción indica directamente a los estudiantes qué deben hacer; es decir, no implica generar reflexión alguna sobre la causa de su error. Además, se observa que el 61,8 % de los docentes consideró esta retroalimentación como correcta, lo cual revela la creencia de que el estudiante aprende cuando se le dice qué hacer.

Finalmente, solo el 21,4 % de los docentes consideró, correctamente, que era inadecuada la acción de retroalimentación del enunciado 16.4, que propone a los estudiantes explorar la relación entre dos cantidades a partir de aumentar proporcionalmente cada una de ellas. De hecho, la mitad de los docentes indicó que sí implementaría esta acción. Según esta información, la mayoría de los docentes buscaría hacer entender al estudiante que la cantidad de vasos de jugo y de vasos de agua aumenta si aumenta también la cantidad de jugo. No obstante, esta acción no ayuda al estudiante a identificar su error; este sigue sin comprender que la fracción solicitada debe expresar una relación entre ambas magnitudes.

Respecto de las tareas que abordan el significado de fracción como cociente, también se encontraron bajas tasas de acierto en las respuestas de los docentes. Este aspecto de su conocimiento de los docentes se evaluó a través de una tarea que describía una situación de aula en la cual una docente propone a sus estudiantes un problema de reparto cuya solución demanda relacionar cierta cantidad de litros de jugo (4) con cierto número de botellas (3). Así, el resultado podía expresarse como una fracción que indicara que, en cada botella, habría $\frac{4}{3}$ de litro o $1\frac{1}{3}$ de litro, su equivalente. Sin embargo, la situación propuesta indica que un estudiante da como respuesta $\frac{3}{4}$. Frente a este error, se proponen cuatro enunciados y solo algunos de ellos explican correctamente su causa. La tarea se muestra en la figura 6.

Figura 6

Tarea y enunciados referidos a la identificación de la causa del error cometido por un estudiante en una situación de aprendizaje de fracción como cociente

13. Una profesora propuso a sus estudiantes el siguiente problema:

> Juana preparó 4 litros de jugo de manzana y colocó todo el jugo en 3 botellas de igual capacidad. ¿Qué cantidad de jugo habrá en cada botella?

Uno de sus estudiantes respondió: "En cada botella habrá $\frac{3}{4}$ de litro de jugo de manzana".

De acuerdo a la respuesta del estudiante, indique, para cada afirmación, su acuerdo o desacuerdo sobre las posibles causas de este error. ***(Marque solo una respuesta en cada fila).***

	No estoy seguro	En desacuerdo	De acuerdo
13.1 Confunde la cantidad de jugo que debe repartir con las partes en que lo hará.	☐ A	☐ B	☐ C
13.2 Cometió un error de proceso porque escribió la fracción al revés.	☐ A	☐ B	☐ C
13.3 Cree que en las fracciones el numerador es siempre menor al denominador y no le otorga sentido a la fracción $\frac{4}{3}$.	☐ A	☐ B	☐ C
13.4 No distingue que el todo está representado por los 4 litros y de estos se toman 3 partes iguales.	☐ A	☐ B	☐ C

A partir de las respuestas de los docentes, se elaboró la tabla 10 con las tasas de acierto. En ella, se muestra que, en el enunciado 13.1, el 80,7 % de los docentes consideró, correctamente, que el error en la respuesta del estudiante se debió a que este confundió la cantidad de jugo que debía repartir con la cantidad de partes en que lo haría.

Tabla 10

Tasas de respuesta de los docentes al evaluar las alternativas de la tarea asociada al significado de fracción como cociente

	Enunciados	No estoy seguro	En desacuerdo	De acuerdo
13.1	Confunde la cantidad de jugo que debe repartir con las partes en que lo hará.	4,8 %	14,5 %	**80,7 %**
13.2	Cometió un error de proceso porque escribió la fracción al revés.	8,6 %	**32,5 %**	58,9 %
13.3	Cree que en las fracciones el numerador es siempre menor al denominador y no le otorga sentido a la fracción $\frac{4}{3}$.	11,6 %	37,0 %	**51,4 %**
13.4	No distingue que el todo está representado por los 4 litros y de estos se toman 3 partes iguales.	3,1 %	**14,4 %**	82,5 %

Nota. Los porcentajes resaltados en negrita corresponden a las respuestas correctas.

Además, según la tabla, en el enunciado 13.3, solo el 51,4 % de los docentes mostró estar de acuerdo con que una posible causa del error es que el estudiante “cree que en las fracciones el numerador es siempre menor al denominador y no le otorga sentido a la fracción $\frac{4}{3}$”. Es decir, casi la mitad de los docentes no reconoce como correcta esta afirmación que explica de forma muy completa la causa del error. Como se observa, el enunciado manifiesta una comprensión restringida de la fracción en la cual se relaciona una parte (pequeña) con un todo (grande). En esta situación, eso no se cumple, pues, en cada botella, habrá 1 litro y $\frac{1}{3}$, es decir, una fracción mayor que la unidad. Este resultado evidencia que los docentes tienen poco conocimiento de cómo los estudiantes aprenden las fracciones y de cómo, en el aula, las oportunidades de aprendizaje se restringen a la noción parte-todo. Por otro lado, en el enunciado 13.2, solo el 32,5 % de los docentes estuvo en desacuerdo con que “escribir la fracción al revés” sea un error de proceso. Según este grupo, lo que realmente se evidencia en este caso es un error conceptual, pues el estudiante podría haber considerado que una fracción siempre ubica una cantidad menor sobre una mayor.

También, resulta preocupante que, en el enunciado 13.4, solo el 14,4 % de los docentes estuvo en desacuerdo con que el estudiante “no distingue que el todo está representado por los 4 litros y de estos se toman 3 partes iguales”. Esta alternativa no se ajusta a las condiciones del problema presentado. Si bien 4 es el total de litros de jugo a repartir, también hay un total de 3 botellas para realizar el reparto; por tanto, es imposible hablar de parte y todo en esta situación. Esto evidencia que la mayoría de los docentes usa el significado de fracción como parte-todo para interpretar una situación en la que este significado no aplica.

Asimismo, se observan dificultades en los docentes al identificar el propósito de una tarea asociada al significado de fracción como operador, donde la fracción actúa como un valor que transforma una cantidad. La tarea se muestra en la figura 7.

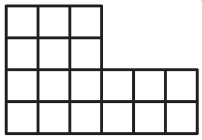
Figura 7

Tarea y enunciados referidos a la identificación de la causa del error cometido por un estudiante en una situación de aprendizaje sobre el significado de fracción como operador.

14. Un profesor propone el siguiente problema a un grupo de estudiantes:

El siguiente gráfico muestra los $\frac{3}{5}$ de una figura rectangular.

Halla el número de $\square$ que se deben agregar para reconstruir la figura rectangular completa.



¿Cuáles de los siguientes podrían ser los propósitos de esta tarea? Indique su acuerdo o desacuerdo con lo señalado en las siguientes afirmaciones. ***(Marque solo una respuesta en cada fila).***

	No estoy seguro	En desacuerdo	De acuerdo
14.1 Interpretar la unidad a partir de una de las partes.	A	B	C
14.2 Abordar el significado de la fracción como operador.	A	B	C
14.3 Calcular los $\frac{3}{5}$ de la figura dada.	A	B	C
14.4 Interpretar que, gráficamente, cada quinto de la unidad son partes congruentes.	A	B	C

La tarea buscaba reconstruir una unidad representada con cuadraditos a partir del dato de que una cantidad de estos cuadraditos (18) corresponde a $\frac{2}{5}$ de la unidad.

A partir de las respuestas de los docentes, se elaboró la tabla 11 con las tasas de acierto. En ella, se muestra que, en el enunciado 14.1, la mayoría de los docentes (87,7 %) reconoció como propósito de la tarea “interpretar la unidad a partir de una de las partes”. A su vez, en el enunciado 14.2, solo la mitad de los docentes reconoció, correctamente, el significado de fracción como operador detrás de la tarea. Además, preocupa que, en el enunciado 14.3, el 62,7 % de los docentes haya mostrado su desacuerdo con la idea de que el propósito de la tarea era “calcular los $\frac{3}{5}$ de la figura dada”, es decir, que no reconocieran que lo mostrado representaba los $\frac{3}{5}$ de una unidad. Debe considerarse que este es un error de interpretación muy común entre los estudiantes.

Tabla 11

Tasas de respuesta de los docentes al evaluar las alternativas de la tarea asociada al significado de fracción como cociente

	Enunciados	No estoy seguro	En desacuerdo	De acuerdo
14.1	Interpretar la unidad a partir de una de las partes.	3,8 %	8,5 %	**87,7 %**
14.2	Abordar el significado de fracción como operador.	11,3 %	38,8 %	**49,9 %**
14.3	Calcular los $\frac{3}{5}$ de la figura dada.	6,0 %	**62,7 %**	31,3 %
14.4	Interpretar que, gráficamente, los quintos de la unidad son partes congruentes.	7,7 %	**20,6 %**	71,7 %

Nota. Los porcentajes resaltados en negrita corresponden a las respuestas correctas.

Finalmente, la tabla 11 muestra que, en el enunciado 14.4, solo el 20,6 % de los docentes logró identificar, correctamente, que la tarea no buscaba "interpretar a la unidad dividida en partes congruentes", es decir, que la tarea no se resolvía agregando a la figura dos rectángulos de 3 x 2 unidades, pues, de ese modo, no se cumpliría la condición de que la figura resultante fuera un rectángulo. Estos resultados evidencian que entre los docentes predomina el significado de fracción como parte-todo asociado a partes de igual forma y tamaño.

Considerando estos resultados, se optó por indagar de manera más profunda sobre los conocimientos pedagógicos de los docentes respecto de los significados de fracción. Específicamente, se desarrollaron entrevistas para identificar por qué los docentes asocian algunas tareas a algún significado de fracción en vez de a otro, y para conocer cómo describen e interpretan las capacidades y conocimientos matemáticos involucrados en la solución de las tareas y en los errores más frecuentes que cometen sus estudiantes, así como las formas más adecuadas de brindarles retroalimentación. Estos aspectos cualitativos del estudio se describen a continuación.

Análisis cualitativo del conocimiento pedagógico del contenido a través de tareas sobre fracciones

Para profundizar en los conocimientos pedagógicos de los docentes de Matemática de 2.° grado de secundaria vinculados a la enseñanza y el aprendizaje de los significados de fracción, se tomó una muestra de doce docentes de Matemática de tres regiones del Perú. A ellos se les aplicó una entrevista semiestructurada que buscó explorar su capacidad para reconocer la complejidad de un conjunto de tareas matemáticas mediante la identificación de las capacidades y los conocimientos que los estudiantes movilizaban en su solución. Asimismo, se buscó evaluar su capacidad para anticipar las dificultades o errores más frecuentes que tendrían sus estudiantes al resolver estas tareas, así como las acciones que ellos implementarían para ayudarlos a superar estos problemas. El conjunto de tareas analizadas por los docentes abordaba la interpretación de los cinco significados de fracción: como parte-todo, como operador, como razón, como medida y como cociente. Además, cada una de estas tareas se correspondía con una capacidad y conocimiento de la competencia "Resuelve problemas de cantidad" que jugaba un rol protagónico en su solución.

Los resultados de la entrevista se describen a partir de dos aspectos. En primer lugar, se analiza la pertinencia de las tareas presentadas para 2.° grado de secundaria y el nivel de desafío que estas tareas tendrían para sus estudiantes. En segundo lugar, se identifica el conocimiento pedagógico de los docentes en torno a los significados de fracción vinculados al propósito de aprendizaje de cada tarea, a la capacidad matemática que se despliega con mayor énfasis en ella, a los conocimientos matemáticos involucrados en su solución, a los errores más frecuentes de los estudiantes y a las formas de retroalimentación más adecuadas frente a cada error. Además de ello, se presenta el análisis de las tareas encontradas en los cuadernos de los estudiantes.

Pertinencia y nivel de desafío de las tareas. En la primera parte de la entrevista, los docentes recibieron cinco tareas que se correspondían con los significados de fracción que deberían haberse abordado hasta 2.° grado de secundaria según el CNEB. Luego de revisarlas, ellos respondieron tres preguntas: ¿qué tareas son pertinentes para 2.° grado de secundaria?, ¿por qué las consideran pertinentes?, y ¿por qué algunas tareas serían más desafiantes para sus estudiantes? Cabe señalar que la mayoría de los docentes consideró todas las tareas pertinentes para 2.° grado de secundaria y que muy pocos encontraron no pertinentes las tareas referidas a los significados de fracción como operador, fracción como medida y fracción como parte-todo. Estos resultados se presentan en la tabla 12.

Tabla 12

Respuestas sobre la pertinencia y el grado de desafío percibido por los docentes en el análisis de las tareas mostradas en la entrevista

Tareas	Significado de fracción	Pertinente		Desafiante	
		Sí	No	Sí	No
Tarea 1: Bandera	Como parte-todo	**10**	2	3	**8**
Tarea 2: Consumo de gasolina	Como operador	9	3	8	4
Tarea 3: Jugo de naranja	Como razón	**12**	-	2	**10**
Tarea 4: Longitud de cintas	Como medida	9	3	6	5
Tarea 5: Pastel navideño	Como cociente	**12**	-	3	**9**

Nota. Las cifras resaltadas en negrita corresponden a las tareas con la mayor cantidad de respuestas.

Como se puede apreciar en la tabla, las tareas consideradas como pertinentes por la mayoría de docentes se corresponden con los significados de fracción como parte–todo, fracción como razón y fracción como cociente. Cabe resaltar que el primero de estos significados corresponde a aprendizajes exigidos desde 4.° grado de primaria y que el último corresponde a aprendizajes propios de 6.° grado de primaria. Solo el significado de fracción como razón se trabaja exclusivamente en el nivel secundaria. Resulta llamativo que estas mismas tareas hayan sido consideradas por la mayoría de docentes como no desafiantes para los estudiantes de 2.° grado de secundaria, lo que podría revelar la creencia de que una actividad es pertinente para los estudiantes de un grado determinado siempre que esta les sea fácil de resolver.

Particularmente, la tarea 3, “Jugo de naranja”, asociada al significado de fracción como razón, fue considerada por los docentes como pertinente para 2.° grado de secundaria. Ellos señalaron que los estudiantes podrían entender y resolver esta tarea, pues se trata de una situación de contexto real que expresa cómo se usan las fracciones en su vida diaria. A continuación, se muestran algunas declaraciones que ilustran estas creencias, es decir, que consideran pertinentes las tareas a partir de su sencillez y de su vínculo con la cotidianidad de los estudiantes, pero no a partir de su intención pedagógica.

Sí es apropiado porque lo hacen… sí, es apropiado porque poco a poco van a entender eso (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Apurímac, área rural).

…aquí los estudiantes [deben] determinar, eh, la cantidad de vasos de naranja, qué cantidad de… o cómo se expresa la fracción y la cantidad de…, de vasos de agua, cómo se expresan en fracción. Entonces, este, creo que también les ayudaría mucho a ellos porque lo van a utilizar en, en su casa (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Piura, área rural).

Por otro lado, los docentes consideraron la tarea “Jugo de naranja” como desafiante para los estudiantes porque brindaba poca información, pero no fueron muy precisos al describir el desafío que observaban en la tarea. Un ejemplo de ello puede encontrarse en el siguiente diálogo.

Entrevistador: La [tarea] 3... ¿por qué considera que sería más desafiante?
Docente: Eh, porque van a tener que, que utilizar en este caso más de sus conocimientos. Acá, ellos, se les está dando casi la información.
Entrevistador: En la [tarea] 5.
Docente: Sí, en la [tarea] 5, por ejemplo. Se les está brindando más información de la que se les da en la, en la tarea 3. Ya. Y acá en la [tarea] 3, utilizar, para ellos sería más.
Entrevistador: O sea, quiere decir que en esta tenderían a equivocarse más.
Docente: Sí.
(Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Piura, área rural).

Asimismo, respecto de la tarea 4, “Longitud de cintas”, asociada al significado de fracción como medida, esta fue elegida como pertinente para el grado por un grupo menor de docentes. Uno de ellos sustentó esta idea señalando que los estudiantes tienen que usar las cuadrículas para tener una unidad de medida. Sin embargo, ninguno mencionó la relación que deben establecer los estudiantes entre las longitudes de las cintas y la de la varilla. Esta declaración se cita a continuación.

La tarea 4, “Longitud de cintas”. En el caso de la varilla de medición, ¿no? Para medir o para cortar, supongamos los manden a cortar una madera, los manden a cortar una... Si les dan, por ejemplo, aquí les hablan de una varilla. Entonces, están representando a través de diferentes, de diferentes temas están representando las fracciones y, al mismo tiempo, ellos pueden aprender a hacer la repartición correcta, ¿no?, en partes iguales. En caso se les envíe a hacer lo mismo. Y les están preguntando la cinta roja cuánto mide. Y como espacio aquí tiene su cuadrícula, cada espacio es una unidad, por decir. Ya ellos sabrán, este, del total, qué cantidad es, ¿no? Qué cantidad se toma. Eso creo que… (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Piura, área urbana).

Como se puede observar, en esta respuesta, se evidencia una comprensión limitada del requerimiento de la tarea y, por tanto, del significado de fracción como medida porque el docente interpreta que el estudiante debe representar la parte de un todo dividido en partes iguales, lo que corresponde al significado de fracción como parte-todo. Con este entendimiento, probablemente resolvería la comparación entre la varilla y la cinta roja, que es más corta que la varilla, pero no la comparación entre la varilla y la cinta verde, que es más larga que la varilla.

Cuando se les preguntó qué era lo desafiante de esta tarea, algunos docentes respondieron que no se indica cuánto mide la cuadrícula ni está explícita la unidad de medida, tal vez porque no comprenden que la unidad de medida es la varilla y no hacen falta unidades de medida convencionales como el centímetro o el metro para llegar a la solución. Un docente de una escuela urbana de Amazonas justificó así por qué esta tarea era desafiante: "Creo que, bueno, por la cuadrícula que no dice qué cantidad es, podría ser difícil". Otro docente, también de una escuela urbana de Amazonas, dijo al respecto: "Porque también ya no tiene una unidad".

Por otro lado, un grupo de docentes consideró que la tarea era desafiante porque la cinta verde es mayor que la unidad de medida (la varilla). Esto evidencia una descripción correcta de algunos procesos involucrados en la comparación de las cintas con la varilla, pero a la vez podría evidenciar que, en las prácticas docentes de este grupo, no es frecuente emplear números mixtos para expresar la medida de una cinta que supera en longitud a la unidad de medida (la varilla). Esto podría implicar que los estudiantes tengan poco acceso a tareas similares. Algunas respuestas se muestran a continuación.

> *Ajá, la varilla verde y ahí es donde a veces se... este... entra un conflicto el estudiante ¿no? [...]. Profesora, si la varilla era de este tamaño, este ya más grande... Muchos ahí ya se equivocan* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área urbana).
>
> *Bueno, acá quizás en esta un poco. Quiere medir la longitud de las cintas rojo y verde teniendo como unidad de medida la varilla mostrada. Acá también dirían porque se supone que la varilla es esto, ¿cierto? Acá no habría problema porque va a decir que es la mitad, un medio de la varilla. Pero acá vuelta pasa. O sea, no lo entenderían* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área rural).

A continuación, se presenta el análisis de los conocimientos pedagógicos de los docentes referidos al aprendizaje de los cinco significados de fracción. Además, se muestran ejemplos de las declaraciones de los docentes y de las tareas encontradas en los cuadernos de sus estudiantes.

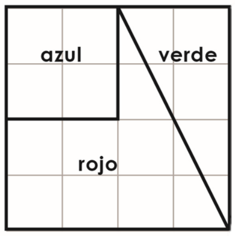
Significado de fracción como parte-todo. La primera tarea que se presentó en la entrevista a los docentes fue "Bandera", la cual aborda el significado de fracción como parte-todo, en este caso, en una cantidad continua. En esta tarea, se muestra una unidad que consiste en una bandera formada por tres partes de distinto color, como se observa en la figura 8.

Figura 8

Tarea 1 del cuestionario al docente: "Bandera"

Tarea 1: Bandera

Se dibujó la siguiente bandera sobre papel cuadriculado.



¿Qué parte de la bandera es de color **rojo**?

Capacidad: Comunica su comprensión de los números y operaciones.

Desempeño esperado: Interpreta la fracción como parte-todo en situaciones diversas y la representa de manera simbólica.

Conocimiento matemático: Fracción como parte-todo.

Otras nociones: Figuras de igual área, pero de diferente forma; y noción de área de cuadriláteros y triángulos empleando las cuadrículas.

Para resolver esta tarea, el estudiante debe interpretar que el gráfico representa un todo y, luego, debe relacionar ese todo con cada una de las partes dadas, que en este caso corresponden a los diferentes colores de la bandera, tomando en cuenta el espacio que ocupan en la cuadrícula. Es así que, explícitamente, se ve que la parte azul corresponde a la cuarta parte del todo. Esto puede llevar a pensar en un todo dividido en cuatro partes iguales y, luego de algunos análisis, a determinar que la parte verde corresponde a otra cuarta parte. Por lo tanto, la parte roja corresponde necesariamente a las otras dos cuartas partes, es decir, a la mitad de la bandera. Este análisis permite expresar la respuesta a la pregunta en forma de fracción, señalando que $\frac{2}{4}$ o $\frac{1}{2}$ de la bandera es de color rojo.

El significado de fracción como parte-todo se aborda desde 4.° grado de primaria a través de sus distintas representaciones, pasando de lo gráfico a lo simbólico y viceversa. En los grados de primaria, suelen presentarse tareas en las que se representa gráficamente la unidad y se la divide en partes congruentes, es decir, en figuras de igual forma y medidas. Luego de ello, se divide la unidad en partes equivalentes, en otras palabras, en figuras de igual área pero de forma diferente. En la tarea analizada por los docentes, todas las partes de la bandera no son congruentes ni equivalentes entre sí, lo que aumenta su dificultad y la hace una tarea pertinente para estudiantes de 2.° grado de secundaria. Se debe mencionar que esta misma tarea fue aplicada en la ECE 2018 a los estudiantes peruanos de 2.° grado de secundaria y solo un poco más de la cuarta parte de los estudiantes logró responderla correctamente, lo que evidencia la necesidad de consolidar este significado de fracción.

Por otro lado, fueron muy pocos los docentes entrevistados que lograron identificar que la capacidad de mayor énfasis en la resolución de esta tarea es "Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones". La mitad de los docentes eligieron la capacidad "Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo", y sustentó su elección señalando que, en el proceso de solución de esta tarea, se despliegan estrategias de composición y descomposición de áreas. Si bien esta última afirmación es cierta, al realizarla, estos docentes desconocen que lo central para resolver la situación planteada es la representación simbólica de la fracción que ocupa la parte roja en la bandera. La siguiente respuesta muestra la identificación correcta de la capacidad que se moviliza con mayor énfasis para resolver la tarea.

> *Sería "Comunica"… Diría porque él tiene que especificar qué parte de la bandera es rojo. Y para decir qué parte de la bandera es rojo, entonces, él va a utilizar, va a graficar, va a trasladar incluso áreas y va a decidir cuáles, o sea, tiene que comprender, comprender primero para poder comunicar cuál es rojo y de ahí…* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área urbana).

Respecto de la identificación del significado de fracción abordado en esta tarea, solo algunos docentes reconocieron que se trata de la fracción como parte–todo, posiblemente porque ellos mismos asocian esta noción solo a representaciones de la unidad dividida en partes congruentes y no en partes de áreas equivalentes. Los demás docentes no hicieron alusión a ningún significado de fracción, sino que mencionaron otros aspectos de las fracciones, que tal vez ellos enfatizan en su trabajo diario con los estudiantes, como la identificación de fracciones equivalentes, operaciones o, incluso, el cálculo de área y perímetro. Esto evidenciaría el énfasis que hacen los docentes en algunas estrategias matemáticas relacionadas con la solución de tareas y su dificultad para identificar el conocimiento específico que está detrás de ellas, en este caso, reconocer qué significado de fracción se aborda y con qué nivel de complejidad. La siguiente respuesta muestra la dificultad de un docente para expresar que el significado de fracción detrás de la tarea es fracción como parte-todo.

> *Y… y acá, por ejemplo, en la [tarea] 1 de la bandera, eh…, ¿qué parte de la bandera es de color rojo?, o sea del total, lo rojo, en fracciones, representa, ¿no? Entonces acá, al menos pienso yo que ha sacado, o sea, cómo llegar a tener una fracción o representar el color rojo en fracciones. Entonces, pienso que debe saber el todo, cuántos cuadraditos hay, porque ahí está el fondo en cuadraditos, y la parte de acá de rojo es la parte que se está tomando, ¿no?, del todo de la bandera. Ahí es, digamos, reconocer el conocimiento, ¿no? Las partes de una fracción, ¿no?, de la unidad, parte, ¿no? Y, por ejemplo, el numerador representa…, ah… las partes que…, y el denominador es el…, ¿no?…, el todo, en cuántas partes se ha dividido* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Apurímac, área rural).

Al preguntar sobre los errores más frecuentes de los estudiantes, varios docentes hicieron referencia a una inadecuada interpretación del gráfico. Sin embargo, emplearon descripciones poco claras, tal como se muestra en la siguiente respuesta.

> *Los errores. Eh, por ejemplo, ahí tenemos en el…, en el rojo, eh, partes que no son la mitad del cuadrado, ¿no? Y que, posiblemente, ellos lo puedan mirar como…, como si fuera la mitad del cuadrado. Eso le puede, eh, llevar a confusión…* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Piura, área rural).

Otros docentes mencionaron dificultades de los estudiantes en la observación y el cálculo de las áreas. En general, este grupo no pudo expresar de manera clara cómo se manifestaría la dificultad de los estudiantes para identificar las partes y el todo en el gráfico presentado, y, luego, para representar simbólicamente la parte de color rojo.

En relación con el apoyo y la retroalimentación que se podría brindar a los estudiantes que cometieron este tipo de errores, los docentes mencionaron la necesidad de explicar la solución a partir de una situación parecida. Asimismo, se refirieron al uso de material concreto, pero no pudieron explicarlo claramente. La respuesta de un docente que remarcó este último aspecto se muestra a continuación.

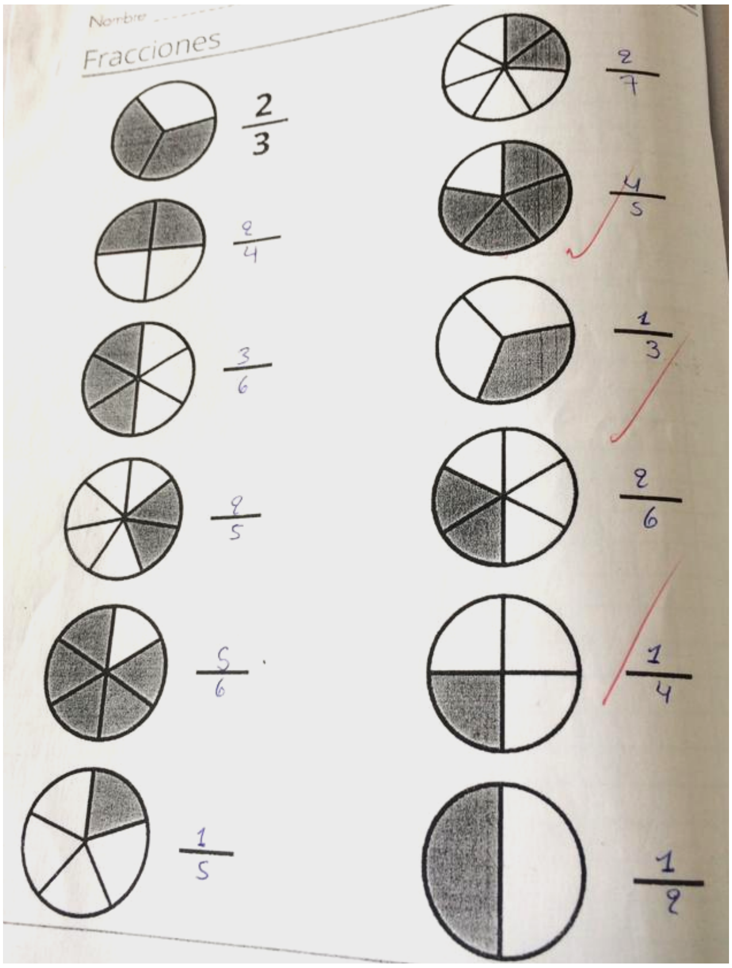
> *Tomar, por ejemplo, como referencia una figura o, mejor dicho, las unidades menores (cuadraditos). La unidad menor y el cuadrante menor y, este, hacer los recortes. Y, en los recortes, vamos observando, a ver este, vamos formando la... Si con esas partes que no tienen forma completa, ¿no?, este, a ver si, con dos partes, ya formamos el cuadrado menor o hay que adicionar otro, ¿no? Eso sería uno y el otro, sería con el traslado de, de las figuras, ¿no?... El traslado significa pintar, por ejemplo, dos partes, ¿no? Eh, por decir, ¿esta parte aquí con qué otra parte va? Este, va a tomar de referencia, ¿no? Entonces, esto viene en esta partecita, pues, ¿no? A eso… En Matemática le llamamos ahí, traslado de…, de las formas* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Piura, área rural).

Este docente menciona el empleo de material concreto como una estrategia para dar solución a la tarea “Bandera”. En general, los docentes entrevistados mencionan formas de retroalimentación que implican abordar la representación de fracciones mediante áreas equivalentes a través de tareas graduadas; por ejemplo, tareas donde las partes tengan, en primer lugar, igual forma, todas a partir de cuadraditos iguales; luego, tareas donde las partes estén formadas por cuadraditos completos y partes de cuadraditos que se completan; y, finalmente, tareas en las que sean necesarias la descomposición y recomposición de las partes para establecer las equivalencias entre ellas, y entre las partes y el todo.

Por último, al analizar los cuadernos de los estudiantes, se encontró que el significado de fracción como parte-todo fue el que predominó en las tareas provistas por los docentes, lo cual representa, en algunos casos, la mitad del total de las tareas sobre fracciones. De igual modo, en la mayoría de cuadernos, más de la mitad de las actividades con fracciones no se planteaban mediante situaciones significativas, sino que se centraban en ejercicios descontextualizados y mecánicos referidos, principalmente, a comparaciones, equivalencias y operaciones con fracciones. Entre estos ejercicios, encontramos algunos de contexto intramatemático, en los cuales se pedía pasar de una representación gráfica de la fracción a una representación simbólica y viceversa. Sin embargo, en este tipo de ejercicios, se enfatizaba la idea de que la fracción es una parte de un todo y, en todos los casos, que esa parte es menor que la unidad; además, las partes en que se dividía la unidad siempre eran iguales en forma y tamaño. Algunos ejercicios como los mencionados se muestran en la figura 9.

Figura 9

Ejercicios sobre representación de fracciones encontrado en el cuaderno de un estudiante

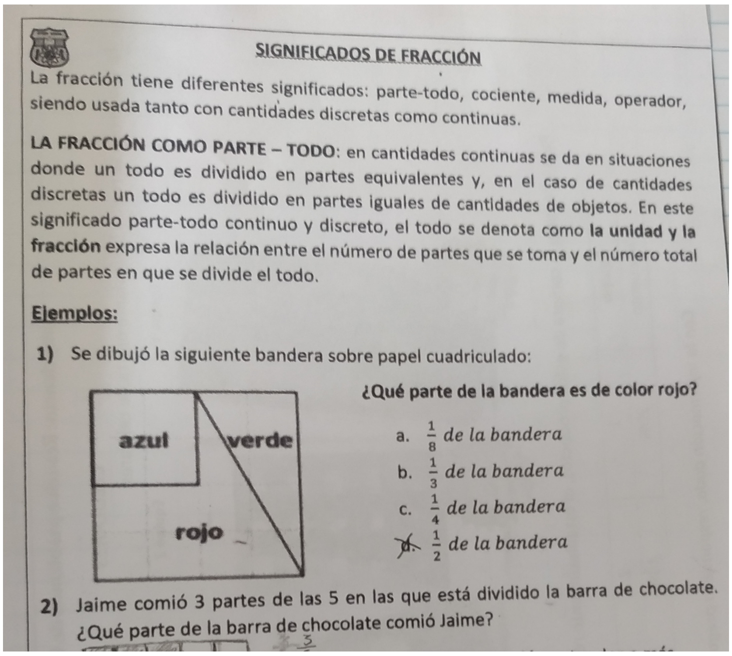


Es habitual encontrar este tipo de ejercicios repetitivos a partir del 4.° grado de primaria, cuando recién se empieza a abordar la noción de fracción. En este caso, a partir de la representación de un círculo dividido en “partes iguales”, con algunas partes coloreadas y otras sin colorear, se pide a los estudiantes expresar el área coloreada mediante una representación simbólica de la fracción. El NCTM del 2019 resaltó la importancia de plantear tareas que impliquen la transición entre dos o más representaciones para profundizar la comprensión matemática. No obstante, según indica, también es necesario brindar a los estudiantes oportunidades para investigar, dar sentido a lo que aprenden, usar diversas estrategias de solución y estimular su razonamiento, ya que eso permite que desarrollen un pensamiento superior. Tareas como la encontrada en el cuaderno resultan poco desafiantes para estudiantes de 2.° grado de secundaria, pues solo se enfocan en la identificación de una representación gráfica repetitiva de un “todo”, sin que se busque una gradualidad hacia situaciones más complejas.

Solo en uno de los cuadernos de los estudiantes, se encontró la misma tarea (Bandera) analizada por los docentes en la entrevista. Esta estaba acompañada por otras tareas contextualizadas, pero que carecían de soporte gráfico, lo cual aumentaba su nivel de exigencia. Estas tareas se muestran en la figura 10.

Figura 10

Tareas encontradas en un cuaderno sobre el significado de fracción como parte-todo



SIGNIFICADOS DE FRACCIÓN

La fracción tiene diferentes significados: parte-todo, cociente, medida, operador, siendo usada tanto con cantidades discretas como continuas.

LA FRACCIÓN COMO PARTE – TODO: en cantidades continuas se da en situaciones donde un todo es dividido en partes equivalentes y, en el caso de cantidades discretas un todo es dividido en partes iguales de cantidades de objetos. En este significado parte-todo continuo y discreto, el todo se denota como **la unidad y la fracción** expresa la relación entre el número de partes que se toma y el número total de partes en que se divide el todo.

Ejemplos:

1) Se dibujó la siguiente bandera sobre papel cuadriculado:

¿Qué parte de la bandera es de color rojo?

a. $\frac{1}{8}$ *de la bandera*

b. $\frac{1}{3}$ *de la bandera*

c. $\frac{1}{4}$ *de la bandera*

d. $\frac{1}{2}$ *de la bandera*

2) Jaime comió 3 partes de las 5 en las que está dividido la barra de chocolate. ¿Qué parte de la barra de chocolate comió Jaime?

Estas dos tareas presentan situaciones contextualizadas acordes al enfoque del área. La primera tarea es una situación en la que el “todo” es la superficie de una bandera que está dividida en partes equivalentes con formas diferentes. Para dar respuesta a esta tarea, el estudiante puede usar estrategias variadas, como aplicar la noción de equivalencia, realizar traslación de superficies, entre otras. La segunda tarea se presenta en un contexto vinculado al consumo de una barra de chocolate y, al no contar con soporte gráfico, permite identificar si el estudiante comprendió el significado de fracción y puede realizar correctamente su representación gráfica y simbólica. Ya se ha mencionado que la tarea “Banderaçorresponde a un ítem de la ECE y fue liberado en el *Informe de Matemática para docentes de 2.° grado de secundaria 2018* (Minedu, 2018). Por ello, su formato es de opción múltiple. Sin embargo, al trabajar esta tarea en el aula, se esperaría que el docente plantee, además, algunas preguntas de reflexión que motiven a los estudiantes a comunicar sus ideas y pensamientos matemáticos relacionados con la tarea. En realidad, no se sabe si, en el proceso de solución, el docente propició ese intercambio reflexivo con sus estudiantes. Solo se tiene la evidencia de lo que quedó registrado en el cuaderno de uno de ellos.

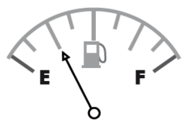
Significado de fracción como operador. La segunda tarea analizada por los docentes fue "Consumo de gasolina". Esta tarea muestra una situación en la que un tanque de gasolina se llena con 16 galones. Luego de un viaje, queda en el tanque cierta cantidad de gasolina que se muestra en una imagen. A partir de ello, se debe evaluar una afirmación relacionada con esa cantidad, tal como se muestra en la figura 11.

Figura 11

Tarea 2 del cuestionario al docente: "Consumo de gasolina"

Tarea 2: Consumo de gasolina

Una persona llena completamente el tanque de su auto con 16 galones de gasolina y realiza un viaje con dicho auto a una velocidad constante. Después de concluir el viaje, el marcador de gasolina indica lo que se muestra en la figura siguiente:



Considerar que **E** (empty en inglés) significa vacío y **F** (full en inglés) significa lleno.

A partir de esta situación, Mario afirma: "Luego de concluir el viaje, el auto consumió 4 galones de gasolina"

¿Es correcta esta afirmación? ¿Por qué? Justifica tu respuesta

Capacidad: Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.

Desempeño esperado: Justifica su postura respecto de una afirmación relacionada con la comprensión de la fracción como operador.

Conocimiento matemático: Fracción como operador.

Otras nociones: Fracción como parte-todo para leer el marcador de gasolina.

Para resolver esta tarea, el estudiante debe interpretar el gráfico del tanque como el todo. Además, debe reconocer dos partes en el gráfico: cantidad de gasolina consumida y cantidad de gasolina que queda en el tanque. Finalmente, debe expresar esas partes como fracción y relacionarlas con la cantidad de gasolina que representan para poder evaluar la afirmación a partir del resultado obtenido. En esta tarea, se emplea el significado de fracción como operador: la fracción interviene como un valor que transforma una cantidad inicial en una nueva cantidad mediante operaciones de división y multiplicación. A partir del gráfico, se debe interpretar que se consumen $\frac{3}{4}$ (o $\frac{6}{8}$) de los 16 galones de gasolina que contenía el tanque al estar lleno. Como $\frac{3}{4}$ de 16 es 12, se puede concluir que se consumieron 12 galones de gasolina. Por tanto, es falsa la afirmación.

El CNEB propone desempeños relacionados con este significado de fracción desde 5.° grado de primaria, y se lo enfatiza de manera explícita en 2.° grado de secundaria. Así, en este grado, debe consolidarse su comprensión, más aún porque se relaciona con otros aprendizajes importantes, como el porcentaje (Minedu, 2017a).

En el presente estudio, muy pocos docentes identificaron correctamente que la capacidad con mayor énfasis en la tarea "Consumo de gasolina" era "Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones", pues debido a que la pregunta exige justificar el acuerdo o desacuerdo con una afirmación dada a partir de relaciones que se pueden establecer entre los elementos de la situación. Esto se evidencia en la siguiente declaración de uno de los docentes.

¿Es correcta la afirmación?, ahí será, pues, argumenta… Porque dice: ¿es correcta esta afirmación? ¿Por qué? Explica tu respuesta. Tiene que ser, ahí ya está la respuesta, ese muchacho dice está bien o no está bien y por qué. Argumenta (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área urbana).

Sin embargo, se debe mencionar que casi la mitad de los docentes afirmaron que la capacidad con mayor énfasis era “Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo”. Ellos justificaron esta afirmación señalando que no es suficiente con que el estudiante comprenda el problema, sino que las estrategias le permitirán encontrar la respuesta solicitada; además, la tarea implica una estimación de la cantidad de combustible que queda. Esto se evidencia en las siguientes declaraciones de un docente entrevistado.

Aquí, aparte de la traducción porque tendría que, este, entenderlo, lo que está diciendo el texto. Tendría que usar estrategias y procedimientos para poder relacionar esta fracción. Esta parte, esta partecita de este todo, luego, a través de la estrategia de compararlo con este todo. Ver qué parte es… Tendría que usar estrategias y procedimientos de estimación y cálculo. Ahí sí, enfatizo la tercera [capacidad], es que la debería manejarse porque si se queda con la simple traducción, no, no va a llegar a la respuesta (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Piura, área urbana).

Respecto de los conocimientos matemáticos involucrados en la solución de la tarea, ninguno de los docentes logró interpretar que estaba involucrado el significado de fracción como operador y, en su lugar, muchos de ellos mencionaron el significado de fracción como parte-todo. Algunos docentes describieron los procesos operativos de dividir dos cantidades y luego multiplicar para dar con la solución, y otros mencionaron el uso de porcentajes. Estos procesos están vinculados al significado de fracción como operador. En general, sus respuestas evidencian desconocimiento de las propuestas del CNEB en relación con el aprendizaje de las fracciones y de los significados descritos en el desarrollo de la competencia “Resuelve problemas de cantidad”. Además, se observan indicios de una enseñanza centrada en procedimientos rutinarios y aplicación de algoritmos más que en el razonamiento y la interpretación de situaciones usando nociones matemáticas. La siguiente respuesta de uno de los docentes respalda esta afirmación.

Aquí es, el recurso que utiliza es parte-todo. El todo cuánto es y, este, qué parte de ese todo es. Qué fracción se ha formado y eso comparado con…, con el número 16, que es el todo. Parte-todo, aquí es parte-todo. Se les haría sencillo en el sentido de que yo chanco bastante en parte-todo. O sea, aquí relacionarían el tanque como el todo y, este, la parte. Allá el 16 el todo y esa parte se le aplican el todo (Docente de Matemática del 2.° grado de secundaria, Piura, área urbana).

Sobre los errores más frecuentes que podrían cometer los estudiantes, más de la mitad de los docentes mencionó aspectos relacionados con la interpretación correcta de las partes en el gráfico. Algunos señalaron la dificultad de entender el significado de las letras “E” y “F” en el tablero. Si bien ningún docente mencionó expresamente el hecho de que el gráfico no estaba pintado para diferenciar la parte con gasolina, ese detalle podría corroborar estas afirmaciones. A continuación, se muestra la respuesta de uno de los docentes.

> *Ah, ellos van a decir que sí, que sí solo consumió solo 4 galones de gasolina porque lo van a ver que está marcando la aguja ahí, entonces no se van a dar cuenta que es la gasolina que está quedando en el automóvil, ¿no? Si no, como ven que la flecha está indicando acá, ellos van a creer que esto es lo que consumió y van a decir que sí está correcto, porque no han llegado a abstraer ni transferir conocimiento* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas área urbana).

También se debe mencionar que algunos docentes dieron una respuesta muy confusa sobre los posibles errores de los estudiantes, tal vez porque ellos mismos no comprendieron la tarea por resolver. Esto se aprecia en la siguiente respuesta de uno de los docentes.

> *O sea, no conocen muy bien el…, cuando lo hemos puesto este ejercicio, por ejemplo, algunos lo han confundido porque, de repente…, no, no recuerda que en una regla…, o siempre hay entre centímetro y centímetro, siempre hay espacios, ¿no? Hay números infinitos también dentro de... y ellos no lo ha conocido así. Mas bien, lo han puesto como si fuera 1, 2, 3, 4 y de corrido. O sea, no han determinado. No se han detenido a analizarlo bien. Solamente lo miran así de repente, por resolverlo rápido y empiezan a contar: 1, 2, 3, 4, y no han analizado que entre cada centímetro hay más milímetros dentro, ¿no? Entonces, eso no lo han analizado. De frente se han ido a contar: 1, 2, 3. Ya está, ya* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Piura, área urbana).

En cuanto al apoyo y la retroalimentación que se podría brindar a los estudiantes con dificultades para resolver la tarea, fueron muy pocos los docentes que explicaron adecuadamente cómo podrían ayudar a los estudiantes, por ejemplo, a comprender el significado de cada una de las partes del gráfico, o cómo podrían proponer otras tareas parecidas, pero más sencillas, para que sus estudiantes puedan resolverlas. La siguiente es la respuesta de uno de los docentes.

> *Sí, mi estrategia es poner, es poner situaciones similares. O sea, casos concretos similares. Eh, y de repente, más sencillos. De manera más sencilla. A ver, en este gráfico, ya no se lo pongo con tantas [partes] sino con tres o con cuatro, por ejemplo, más chiquito... O con dos nomás. Un tanquecito dividido en dos o tres partes, así. Y ya, la hace ahí… Cuando lo veo así amplio, les pongo un ejemplo pequeño… Para que relacionen y luego ya, lo relacionan con el otro. Y ahí ya se*

les hace más fácil relacionarlo (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Piura, área urbana).

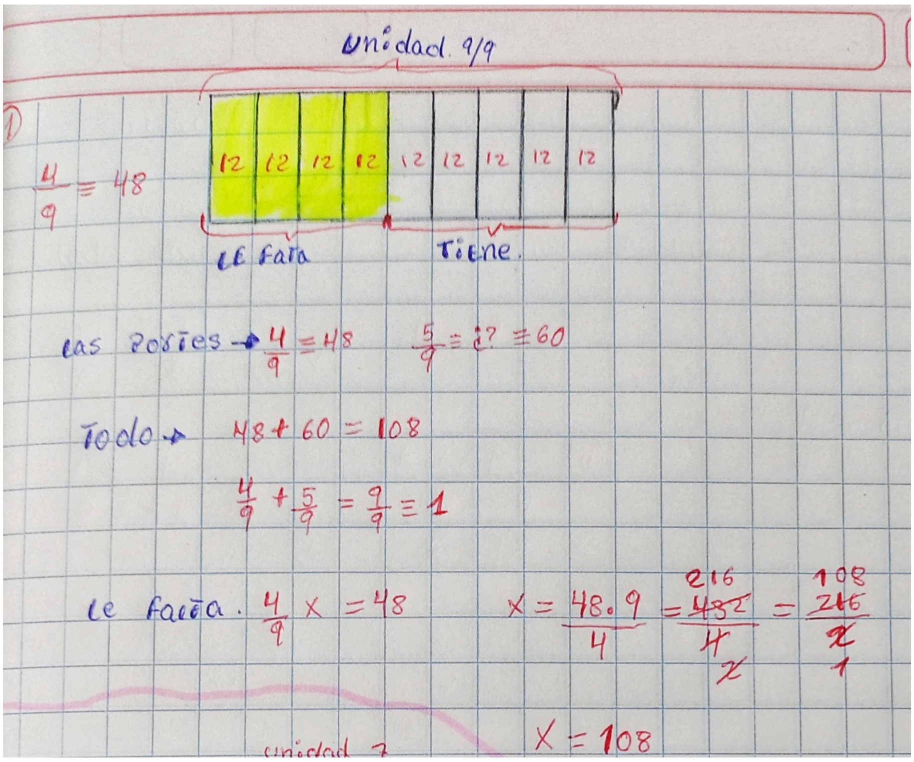
Muchos de los docentes entrevistados dieron respuestas muy vagas. Algunos mencionaron expresiones que tal vez consideraban eran las respuestas esperadas, como "modelar una situación", "leer el texto completo", "tener clara la pregunta", "usar material concreto", entre otras, pero no las vinculaban a alguna estrategia específica de retroalimentación, ni a la situación mostrada en la tarea. Otros mencionaron acciones que no tenían relación con la solución del problema o que, incluso, podían generar mayor desconcierto en los estudiantes, como incluir "equivalencia entre litros y galones", agregar "el precio de un galón", etc. Esto evidenciaría lo poco encaminado que se encontraba el docente para la resolución de la situación y, por tanto, para ayudar a sus estudiantes. La siguiente es la respuesta de uno de estos docentes.

Siempre relacionándolo así, ah, haciéndolo que la situación sea de uno… de uno de los estudiantes, una experiencia que dan los estudiantes, ¿no?… A ver, ese galoncito, ¿cuántos litros tiene?, ¿no? Y así sucesivamente llegar al estudiante, ¿no? A ver, ya… a ver… "profesora, entran tanto"… ya, al galón, ¿cuántos litros entra? Y entonces el estudiante mismo empieza… a ver si esto… ¿cuánto?, a ver si utiliza, digamos, ¿no? 16 galones… ah, por ejemplo, acá nos dice a este auto le entra 16 galones, hagámosle cuenta que has pagado tanto, ya con eso ya lo metemos ya una cantidad de dinero, ¿no? Has pagado tanto y ha consumido tanto, ¿cuánto entonces? Entonces, de repente, ya tratándolos de relacionar con las actividades que ellos realizan más, con baldes de agua, ¿no?, con baldes de agua, con las mismas tazas de las medidas de arroz, ¿no? Todo eso (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Apurímac, área urbana).

En poco más de la mitad de los cuadernos analizados, se encontraron tareas que abordaban el significado de fracción como operador. Estas representaban, aproximadamente la tercera parte del total de las tareas con fracciones de todo el cuaderno. En la figura 12 se muestra una de las tareas encontradas en uno de los cuadernos de los estudiantes.

Figura 12

Tarea encontrada en un cuaderno sobre el significado de fracción como operador



Aun cuando no se ve la situación de partida, el desarrollo permite deducir que esta es una tarea contextualizada, donde el significado de fracción como operador se aplica para hallar el valor de una de las partes en las que está dividido un todo y, luego, para calcular el valor de ese todo. No obstante, no se tiene evidencia de si este proceso lo desarrolló el estudiante de forma individual o grupal, o si solo copió la solución dada en la pizarra. En este caso, se debe resaltar el uso de estrategias gráficas que evidencian la intención de promover la comprensión del estudiante y facilitar el cálculo del valor de cada una de las partes y el valor del todo. Este proceso de solución se complementa con el desarrollo de operaciones, como adición de fracciones, multiplicación de una fracción por un número natural, simplificación de fracciones, etc.

Significado de fracción como razón. La tercera tarea analizada por los docentes fue “Jugo de naranja”, que busca establecer relaciones entre la cantidad de vasos de los dos insumos necesarios para preparar un refresco. La tarea tiene el propósito de evaluar la capacidad del estudiante de emplear el significado de fracción como razón para comparar dos cantidades de la misma o de diferente magnitud, en este caso los vasos de zumo de naranja y los vasos de agua en la preparación de un refresco de naranja, como se observa en la figura 13.

Figura 13

Tarea 3 del cuestionario al docente: "Jugo de naranja"

Tarea 3: Jugo de naranja

Estos son los insumos que se necesita para preparar un refresco de naranja:

= Vaso de zumo de naranja = Vaso de agua

Ricardo prepara una jarra de refresco de naranja de esta manera:

= 1 jarra de refresco

De acuerdo a la preparación que hizo Ricardo, se puede afirmar que:

La cantidad de vasos de agua utilizados equivale a _______ de la cantidad de vasos de zumo de naranja.

Capacidad: Comunica su comprensión de los números y las operaciones.

Desempeño esperado: Interpreta la razón entre dos magnitudes y la expresa simbólicamente como fracción (vinculando a la mitad o al doble).

Conocimiento matemático: Fracción como razón, es decir parte-parte (cantidad de vasos de agua respecto de la cantidad de vasos de zumo de naranja).

Otras nociones: Fracciones equivalentes.

El CNEB recién propone el significado de fracción como razón dentro de los desempeños que corresponden a 2.° grado de secundaria (Minedu, 2017a). Por ello, es importante trabajarlo en ese nivel asociándolo a la comprensión de la noción de proporcionalidad.

Solo la cuarta parte de los docentes entrevistados señaló, correctamente, que esta tarea movilizaba la capacidad "Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones". Las razones que justificaron sus respuestas fueron que el estudiante debía interpretar un gráfico y, luego, establecer una equivalencia entre los datos mediante una fracción. Esto se demuestra en la siguiente respuesta. "Ahí, Comunica… porque, de acuerdo a lo que observa, va. Puede juntar, encontrar este, entonces, puede ir indicando la…, la forma de representación, las significaciones de…, en cada caso" (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Piura, área rural).

Sin embargo, la mitad de los docentes entrevistados señaló, en forma equivocada y poco clara, que esta tarea movilizaba con mayor énfasis la capacidad "Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo". Para justificar su respuesta, señalaron que el estudiante debía comparar, medir o repartir empleando equivalencias y operaciones para resolver la tarea. Con ello, evidenciaron desconocimiento de los procesos necesarios para la resolución de esta tarea, lo cual se muestra en la siguiente respuesta.

> *Ah, aquí fue las estrategias. O sea, a ver... Ya, ya tengo el material concreto, ahora busco la estrategia de qué es lo que voy a…, qué estrategia o de qué manera lo voy a resolver. Por eso, es que solo le he puesto: "Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo", nada más. O sea, van directo a la…, a la respuesta porque están ya este... Si traemos, como le comenté el material concreto, ya está visualizado todo. Solo necesitan buscar la estrategia, nada más. O sea, cómo hago la medición, cómo hago la repartición y dar la respuesta* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área urbana).

Respecto del conocimiento matemático vinculado a esta tarea, muy pocos docentes lograron identificar el significado de fracción como razón, lo cual era básico para llegar a la solución. Algunos identificaron la noción de razón, pero solo como una relación entre dos cantidades, sin reconocer la fracción. La siguiente es la respuesta de uno de los docentes entrevistados, que resultó ser correcta.

> *Acá hay fracción como razón, porque cuando hablamos de razón siempre se relaciona con el cociente, con equivalencia, o sea, decir va a haber una de plano, una fracción, su parte de... ¿no? Y dice la cantidad de vasos de agua utilizadas equivale a de la cantidad de zumos de naranja. Una relación… equivale, sí* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área urbana).

Por otro lado, muchos docentes declararon que la tarea se resolvía mediante el cálculo de fracciones equivalentes, lo cual evidencia una estrategia de identificación de cantidades que guardan una proporción entre sí y que pueden expresarse en forma fraccionaria. Sin embargo, este no es el proceso central requerido para resolver la tarea. A continuación, se muestra la respuesta de uno de los docentes, en la que se aprecia que, de forma incorrecta, vincula la tarea al significado de fracción como parte-todo al relacionar la cantidad de vasos con jugo de naranja con la cantidad total de vasos.

> *Ah ya, porque acá me habla de equivalencias. ¿Cuántos vasos equivale a la cantidad para llenar una jarra? Entonces, ahí es donde tienen que aplicar: uno el razonamiento y dos las equivalencias, cantidad de vasos utilizados. O sea, cuántos… ¿qué dice? Ricardo prepara una jarra de refresco de naranja, ¿no? Estos son los vasos que van a utilizar. Luego me dice [lee]: Ricardo prepara una jarra de refresco de esta manera. Entonces, dos vasos llenos equivalen… Todos estos vasos equivalen… Primero acá se representa, ¿no? ¿Cómo representarías esta cantidad? Los vasos de zumo de naranja. ¿Cómo lo representarías para que llenes una jarra de refresco?... ¿Qué fracción? Por ejemplo, dos sextos. Entonces, una jarra de refresco equivale…, bueno, acá me van a representar dos sextos, por ejemplo. Luego, me dice la cantidad de vasos de agua utilizados equivale a dos sextos de la cantidad de vasos de zumo de naranja, o sea, los que están llenos prácticamente. Dos sextos* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área rural).

Respecto de los errores más comunes que cometen los estudiantes al resolver tareas como la mostrada, algunos docentes mencionaron, en forma errada, algunos procesos algorítmicos, como la división o la simplificación, los cuales no se requieren para resolver la tarea, en lugar de enfocarse en la representación solicitada, que era establecer una relación entre la cantidad de vasos de agua y de vasos de zumo de naranja. Al respecto, uno de los docentes entrevistados señaló lo siguiente: "Eh, al momento de, ¿cómo se llama?, de ver equivalencias. Al momento de…, de dividir o de…, por ejemplo... Este, ¿cuánto contiene cada uno de ellos?, ¿no? Para poder nosotros saber a cuánto equivale la cantidad de vasos" (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Piura, área rural).

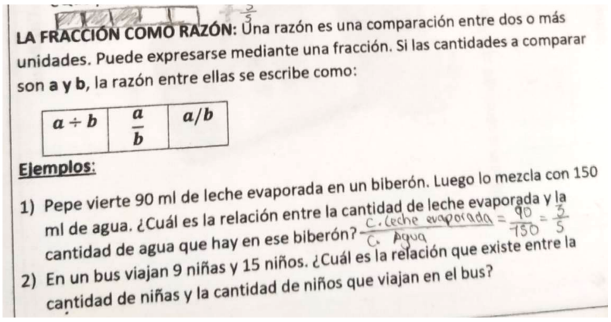
En relación con el apoyo que se podría brindar a los estudiantes para superar las dificultades en la comprensión de estas situaciones, algunos docentes solo mencionaron la presentación de una mayor cantidad de ejemplos, lo que podría indicar que ellos mismos presentan dificultades para comprender el requerimiento de la tarea. A continuación, se muestra una de estas respuestas.

> *Esas dificultades, mmm… En este caso, mediante, eh, ejemplos planteados. Mediante los…, mediante ejemplos o quizás temas tratados sobre…, eh... Teniendo en cuenta el área, ¿no? Creo que sería lo que me ayudaría a mí a resolver la situación o a explicar, a ser más clara con ellos* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Piura, área rural).

Es importante señalar que, pese a que el significado de fracción como razón es un conocimiento matemático propio de 2.° grado de secundaria, como ya se ha mencionado, solo en una pequeña parte de los cuadernos analizados se han encontrado tareas relacionadas con este significado. En la figura 14, se observan dos ejemplos. El primero se refiere a la cantidad de leche y la cantidad de agua necesarios para una preparación; el segundo, a la relación entre la cantidad de niñas respecto de la cantidad de niños en un viaje en bus.

Figura 14

Tareas encontradas en un cuaderno sobre el significado de fracción como razón



LA FRACCIÓN COMO RAZÓN: Una razón es una comparación entre dos o más unidades. Puede expresarse mediante una fracción. Si las cantidades a comparar son **a y b**, la razón entre ellas se escribe como:

$a \div b$	$\frac{a}{b}$	a/b

Ejemplos:

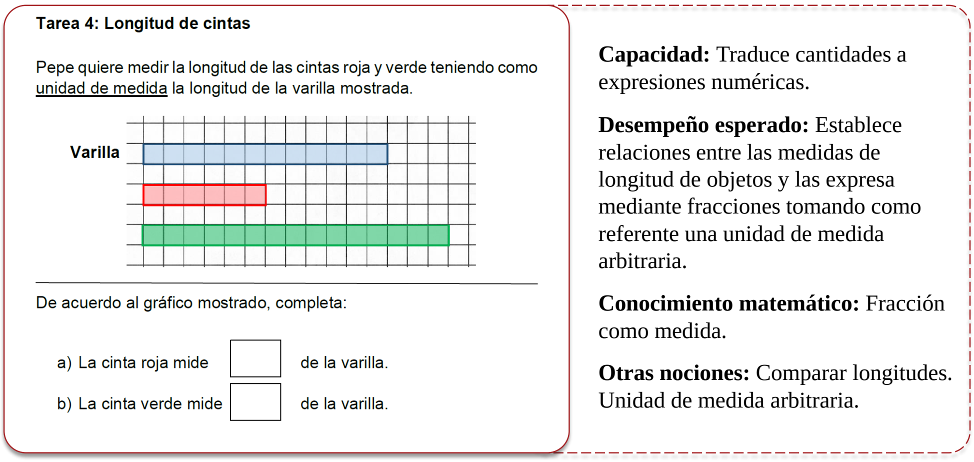
1) Pepe vierte 90 ml de leche evaporada en un biberón. Luego lo mezcla con 150 ml de agua. ¿Cuál es la relación entre la cantidad de leche evaporada y la cantidad de agua que hay en ese biberón? $\frac{\text{C. leche evaporada}}{\text{C. Agua}} = \frac{90}{150} = \frac{3}{5}$
2) En un bus viajan 9 niñas y 15 niños. ¿Cuál es la relación que existe entre la cantidad de niñas y la cantidad de niños que viajan en el bus?

Estas tareas sí corresponden a la exigencia del grado y se presentan en contextos adecuados de comparación. Sin embargo, ambas tareas provienen del *Informe de evaluación de Matemática en sexto grado - 2013. ¿Qué logros de aprendizaje en Matemática muestran los estudiantes al finalizar la primaria?* (Minedu, 2016a) y no se han encontrado en los cuadernos de los estudiantes otras tareas similares que aborden este significado. En estos cuadernos, tampoco se han encontrado preguntas que promuevan la interpretación de la fracción, a partir de tareas que motiven un pensamiento razonado que permita a los estudiantes comunicar sus ideas matemáticas. Esto pone en evidencia que los docentes tienen dificultades en el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido sobre fracciones.

Significado de fracción como medida. La cuarta tarea analizada por los docentes se denominó “Longitud de cintas”. Esta demandaba expresar la longitud de dos cintas de distinto color tomando como unidad de medida la longitud de una varilla. El propósito de esta tarea consistía en evaluar la capacidad del estudiante para emplear el significado de fracción como medida al comparar dos cantidades diferentes, de una misma magnitud, una de las cuales es el referente para medir a la otra. Esto se observa en la figura 15.

Figura 15

Tarea 4 del cuestionario al docente: “Longitud de cintas”



Esta tarea es pertinente para el grupo de estudio, pues el CNEB propone iniciar el desarrollo de este significado en los desempeños propios de 1.° grado de secundaria (Minedu, 2017a) y debería consolidarlo en 2.° grado de secundaria. Este significado de fracción se asocia con la comprensión de la noción de medida y con el uso de los números racionales para expresar cantidades no enteras.

En el estudio, se identificó que muy pocos docentes señalaron correctamente que esta tarea movilizaba, principalmente, la capacidad “Traduce cantidades a expresiones numéricas”; además, ninguno de ellos pudo señalar por qué, ni mencionó la necesidad de relacionar los datos del problema (longitud de las cintas y de la varilla) y expresarlos luego como fracción en su forma simbólica para llegar a la solución. En la siguiente respuesta, se muestra la postura de un docente sobre la capacidad involucrada que no incluye una justificación adecuada: “En la [tarea] 4 sería Traduce… porque el gráfico le dan listo y solamente piden cuánto mide la cinta, ¿no?, la cinta roja mide…, la cinta verde mide… Y pienso que va a traducir” (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área urbana).

Asimismo, la mitad de los docentes señaló incorrectamente que esta tarea movilizaba con mayor énfasis la capacidad “Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo”, y mencionaron que, para su solución, se podía usar una regla, cortar las cintas y, comparar las longitudes, por lo que puede inferirse que pusieron su atención en procedimientos que podría seguir el estudiante (aun cuando no lo llevarán a la solución de la tarea) y no en la interpretación del significado, que era la respuesta esperada. Esto brinda indicios del desconocimiento de los docentes sobre los procesos más importantes que deberían desarrollar los estudiantes para resolver la tarea propuesta. La siguiente respuesta de un docente evidencia este hallazgo: “Y la [cinta] verde, ya, ya, también se excede, en cuánto se excede ¿no?, tendrá que ahí también usar estrategias y también va a argumentar sus afirmaciones. Esa sería la intención de la situación, ¿no?, de la 4” (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Apurímac, área rural).

Por otro lado, la mayoría de docentes tuvo dificultad para reconocer el significado de fracción en esta tarea. Al responder, algunos docentes mencionaron la acción de medir (explícita en la situación matemática presentada). Sin embargo, la vinculaban con el conteo de los cuadraditos. De ese modo, asumían que se llegaba a la respuesta sin reconocer que la unidad de medida era la varilla. La siguiente respuesta de un docente es un ejemplo: “Ya. Bueno, acá tiene que contar. Tiene que contar en cuánto se ha dividido cada varilla. Luego, después de contar, bueno, va a ubicar acá cuánto mide la cinta roja y la cinta verde, ¿no?” (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área rural).

Otros docentes declararon que la tarea se resolvía comparando fracciones. Aunque esta acción forma parte del proceso de solución, no mencionaron a la varilla como unidad de medida. Es más, tuvieron dificultades para expresar la medida de la cinta verde en función de la varilla, tal vez porque les era difícil interpretar que la cinta fuera mayor que la unidad y, para evitar esta situación, invirtieron el orden del referente y el objeto a medir. Esto los llevó al error, pues dieron como respuesta $\frac{12}{15}$ en lugar de $\frac{15}{12}$.

En relación con los errores más frecuentes que podrían cometer los estudiantes al resolver esta tarea, algunos docentes hicieron referencia a la dificultad de expresar la medida en función a un referente, pero se limitaron a mencionar acciones de los estudiantes relacionadas con el conteo de los cuadraditos del gráfico. El siguiente diálogo muestra la descripción del error que podría cometer un estudiante al solucionar la tarea solo contando los cuadraditos.

> *Entrevistador(a): Para usted, ¿un estudiante qué podría dar como respuesta con error?*
> *Docente: El conteo, por ejemplo, para el rojo, el conteo de los cuadritos, mas no representarlo en función a la varilla que me dan.*
> *Entrevistador(a): O sea, ¿poner solo 6?*
> *Docente: Sí.*
> *Entrevistador(a): ¿Y en el verde?*
> *Docente: Igual. Poner el número de cuadraditos. O sea, optar por el conteo y no tener la referencia* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área rural).

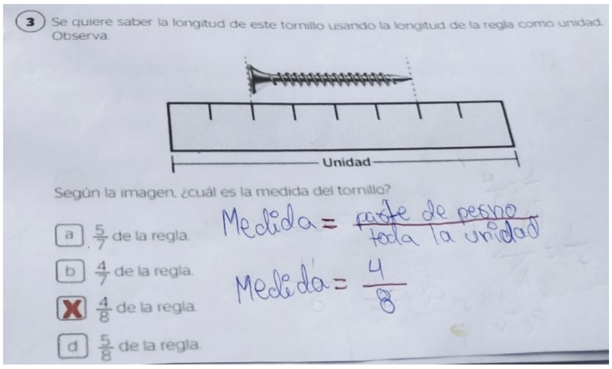
Con respecto a la retroalimentación y al apoyo que se podría ofrecer a los estudiantes que cometieran errores en este tipo de tareas, los docentes reconocían que ellos no debían darles directamente la solución y más bien debían esperar que los estudiantes expliquen sus procedimientos. Además, mencionaron algunas de las estrategias esperadas al resolver la tarea, como el modelado en situaciones de su entorno y el uso de material concreto. Sin embargo, no explicaron concretamente cómo lo harían, como se aprecia en la siguiente respuesta de uno de los docentes.

> *Demostrarles con el material, en ese caso como les decía con las cintas, ¿no? Hasta acá yo tengo la unidad completa tal como me han dado. Ahora yo tengo que ver estas otras 3 partes [de la cinta verde]... ¿qué parte de la unidad que me han dado representa? Ahí vamos a ir viendo, ¿no? Si son 12, pero acá tengo 3, ¿qué parte del total son estas 3? Lo van a tener que dividir, pues, ¿no? Ahí van a ver a cuánto equivale, ¿no? Si a la mitad o a la cuarta parte del total. También lo van a poder decir así...a ver...este, si tengo 12 entre 3, son 4. O sea, esto viene a ser la cuarta parte del total. Quiere decir que acá hay una unidad más $\frac{1}{4}$. Agarro la cinta y digo: a ver, si ustedes dicen que se ha partido en 4, lo partimos en 4 partes iguales, entonces estos 3 [cuadraditos] representan la cuarta parte de la unidad que nos dieron. Por lo tanto, aquí hay una varilla más $\frac{1}{4}$* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área urbana).

Finalmente, al analizar los cuadernos seleccionados, se encontró que el significado de fracción como medida solo estaba presente en la tercera parte de ellos. En la figura 16, se muestra una de estas tareas.

Figura 16

Tarea encontrada en un cuaderno sobre el significado de fracción como medida



Esta misma tarea está presente en todos los cuadernos analizados que abordaron el significado de fracción como medida. Por ello, es importante mencionar que la tarea proviene del *Kit de evaluación diagnóstica* (Minedu, 2021) y que ha sido reproducida de manera exacta, manteniendo incluso el formato de opción múltiple. Además, no se han encontrado en los cuadernos otras tareas relacionadas con este significado de fracción. Esto podría indicar, por un lado, que los docentes desconocen las expectativas curriculares relacionadas con el aprendizaje de las fracciones para 2.° grado de secundaria, las cuales se expresan en el CNEB (Minedu, 2017a). Por otro lado, esto podría evidenciar que los docentes no cuentan con suficientes fuentes para proveerse de ejemplos de actividades u otras estrategias pedagógicas para desarrollar la comprensión de este significado de fracción y, por ello, no han podido proponer a sus estudiantes otras tareas relacionadas. Estos dos aspectos mencionados forman parte del conocimiento pedagógico necesario para enseñar matemática.

Significado de fracción como cociente. La quinta tarea analizada por los docentes en la entrevista se denominó "Pastel navideño". Esta tarea muestra una situación de reparto en la que 4 pasteles iguales deben distribuirse, equitativamente, entre 12 niños. En la tarea, se pide determinar la cantidad de pastel que recibe cada niño, tal como se muestra en la figura 17.

Figura 17

Tarea 5 del cuestionario al docente: "Pastel navideño"

Tarea 5: Pastel navideño

Lucía preparó 4 pasteles iguales en un desayuno navideño. Ella repartió equitativamente estos pasteles entre 12 niños. ¿Qué cantidad de pastel habrá recibido cada niño?

Capacidad: Traduce cantidades a expresiones numéricas.

Desempeño esperado: Establece relaciones entre datos y condiciones de situaciones, y las expresa mediante fracción como cociente.

Conocimiento matemático: Fracción como cociente.

Otras nociones: Fracción propia. Cantidades menores a la unidad. Simplificación de fracciones.

Para resolver esta tarea, el estudiante debe establecer relaciones entre los datos propuestos, según una situación de reparto, donde el total de pasteles (4) será repartido equitativamente entre la cantidad de niños (12). Este reparto se asocia a un modelo de división de cantidades expresado como una fracción, donde 4 entre 12 significa que cada uno recibe $\frac{4}{12}$ o $\frac{3}{4}$ de pastel.

El CNEB propone el significado de fracción como cociente en desempeños de 6.° grado de primaria y, por lo tanto, debe ser consolidado en la secundaria (Minedu, 2017a). Este significado se emplea para expresar repartos cuyo resultado puede ser una fracción propia, como en este ejemplo, o una fracción impropia, cuando la cantidad recibida es mayor a la unidad.

Sobre la base de las respuestas de los docentes, se identificó que solo la tercera parte afirmó, correctamente, que la capacidad con mayor énfasis era "Traduce cantidades a expresiones numéricas", porque el estudiante debe relacionar los datos y, luego, expresar la división como una fracción, con lo cual obtiene $\frac{4}{12}$ o alguna de sus expresiones equivalentes como respuesta. Sin embargo, los argumentos de los docentes no se centraron en describir los procesos que se despliegan en esta capacidad, sino solo en el proceso de resolver la situación mediante algoritmos. Esto se evidencia en la siguiente declaración de uno de los docentes.

A ver, los pasteles. ¿Qué cantidad de pasteles recibirá cada niño? Traduce… Porque digo: los pasteles son 4 y son 12 niños. El muchacho va a decir: ah ya, *hago mis pasteles, los divido. ¿Y qué va a ser? Dice cantidades numéricas, dice cantidades a expresiones numéricas. ¿Qué cantidad de pastel habrá recibido cada niño? Pienso que es Traduce* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área urbana).

Por otro lado, cinco docentes señalaron, de forma incorrecta e inexacta, que la capacidad “Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones”, establecida en el CNEB, era la capacidad de mayor énfasis. Ellos justifcaron su postura señalando que el estudiante debe argumentar su solución luego de resolver el problema. De ese modo, dejaron entrever que asocian esta capacidad al proceso de explicar procedimientos de solución, mas no porque la tarea en sí misma demande la justificación o descripción de argumentos que validen una afirmación. Esto evidencia poco conocimiento de los procesos implicados en esta capacidad. La siguiente declaración de uno de los docentes entrevistados así lo demuestra.

Ese me parece, argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones. Al finalizar todo este proceso, él tiene que argumentar, por qué, con un objeto claro, con algo en concreto. Para dar resolución a este problema, de hecho que tiene que agarrar un objeto y plantear la resolución, traducir, va a comunicar, va a usar estrategias para poder desarrollar y al final va a argumentar esa afirmación mediante el objeto concreto que el alumno tenga, ¿no? (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Apurímac, área urbana).

Respecto de los conocimientos matemáticos involucrados en la solución de la tarea, ninguno de los docentes describió el significado de fracción como cociente. Solo la cuarta parte de ellos señaló que la tarea implicaba dividir las cantidades dadas, pero sin hacer ninguna alusión a alguno de los significados de fracción. Esto puede observarse, por ejemplo, en la siguiente cita de uno de los docentes: “Lucía preparó 4 pasteles en un desayuno, ella repartió equitativamente. Bueno, esta es una división, ¿no? Los 12 niños entre los 4 pasteles. Sí, ¿qué cantidad de pastel habrá recibido cada niño? Sería 3; 3 pedacitos” (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área rural). En este caso, el docente cometió un error que suelen tener los estudiantes: dividir la cantidad mayor entre la menor en lugar de dividir la cantidad de pasteles entre la cantidad de niños, con lo que llegaría a una fracción propia: 4 pasteles entre 12 niños = $\frac{4}{12}$ de pastel.

Además, llama la atención que casi la tercera parte de los docentes señalara que la solución de la tarea requería establecer equivalencias entre fracciones, posiblemente porque, al dividir las cantidades y expresarlas como fracción sabían que se obtenía $\frac{4}{12}$ y esta fracción debía simplificarse. Sin embargo, se les hizo difícil explicar su respuesta. Esto se evidencia en la siguiente declaración de un docente: “En la [tarea] 5, acá hay equivalencia también, dice equitativamente, pasteles entre 12 niños. Sí, el tema de fracción, aquí hay de todo un poco…

Aquí hay equivalencia" (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área urbana). En general, respuestas como esta evidencian un conocimiento incompleto de los distintos significados de fracción y de los aprendizajes descritos en el CNEB.

Sobre los errores más frecuentes que podrían cometer los estudiantes, muy pocos docentes mencionaron, correctamente, que los estudiantes podrían invertir el orden del reparto, como se muestra en la siguiente respuesta de un docente.

> *La tarea 5. Yo les pongo como modelo y, a veces, me responde: profe este, ahí es donde vienen algunos errores, 12 entre 4, 3. 3 pasteles. Jovencito, a ver, lee. ¿Cuántos pasteles son? 4. ¿Y le puede tocar 3 pasteles a cada uno? Ah. Tiene razón. Pero, ¿al contrario? Ah, sí, al contrario, pues le digo: verifícalo. A ver, un tercio por 12 te da 4. Ah sí, ya. Ya, con la verificación* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Piura ,área urbana).

Otro de los errores frecuentes entre los estudiantes sería el de dividir solo un pastel. Así lo señala un docente en la siguiente respuesta.

> *Uhmm... solamente partir un pastel… Es lo primero que van a hacer ellos... Ajá, y como ellos saben partir la unidad en partes iguales y como dice 12, van a decir que cada niño se comió un doceavo del pastel… Se quedan solo en uno, porque no transfieren conocimiento* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área urbana).

En relación con el apoyo y la retroalimentación que se podría dar a los estudiantes con dificultades para resolver la tarea, fueron muy pocos los docentes que expresaron con claridad alguna estrategia, como el uso de material concreto. Esto se puede ver, por ejemplo, en la siguiente respuesta de un docente.

> *Mostrarles material. Hacerles ver que ahí hay 4 pasteles. Estamos hablando de 4 unidades y si son 12 niños, ¿en cuántas partes debo partir yo cada pastel para obtener 12 porciones similares? ¿Cuántos pedazos voy a sacar de cada pastel si son 4, ¿no? Debería partirlo en 2 partes, debería partirlo en 3 partes, en 4 partes o ¿en cuántas partes debo yo partir ese pastel? Entonces, si lo parto en 2, ¿cuántas raciones voy a tener? Son 4 pasteles. Si lo partimos en 2, 4 por 2 son 8. ¿Me alcanza o no me alcanza? Definitivamente no me alcanza. Si partimos en 3, digo 4 por 3, 4 pasteles, cada pastel dividido en 3 partes iguales son 12. Ahora, ¿me alcanza o no me alcanza? Sí me alcanza, ¿no?... Por lo tanto, cada pastel se parte en 3 partes iguales, quiere decir que cada niño se va a comer un tercio de cada pastel* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área urbana).

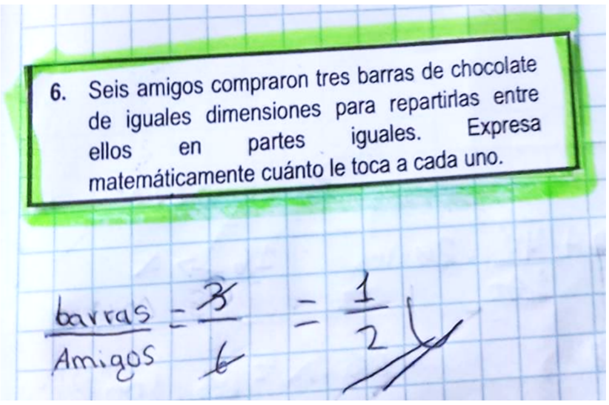
Como otra forma de retroalimentar o brindar apoyo, un docente mencionó la lectura reflexiva con el estudiante. Esta práctica dirigiría al estudiante a la solución, lo que no garantizaría que este reflexione sobre su error. La siguiente respuesta respalda lo mencionado.

> *Yo le diría, aquí si tú lo partes en 12 partes, [solo] un pastel... claro, le vas a dar a cada niño. ¿Cuánto le vas a dar? Un doceavo, pero acá no te dice que un pastel nomás lo van a repartir entre los 12, sino 4 [pasteles]. ¿Crees que has hecho lo correcto? Sí va a alcanzar, pero si acá, si son 4 y a los 4 los parto en 12; 12; 12, ¿cuántas raciones voy a tener? 48, ¿no es cierto? Pero son 12 niños nada más. Entonces, lo ideal ¿qué sería? ¿Que yo lo parta en 12 partes y darle así tajadas pequeñas y repartirlo equitativamente? ¿O de frente yo ver qué parte de los 4 pasteles va a llevar cada uno?* (Docente de Matemática, 2.° grado de secundaria, Amazonas, área urbana).

Solo en un pequeño grupo de los cuadernos analizados se encontró alguna tarea relacionada con el significado de fracción como cociente. La figura 18 muestra una de las tareas encontradas en uno de los cuadernos de los estudiantes.

Figura 18

Tarea encontrada en un cuaderno sobre el significado de fracción como cociente



Esta tarea está contextualizada en una situación de reparto de una cantidad de chocolates que es menor a la cantidad de personas que los recibirá. Esto da como resultado una fracción propia, es decir, una cantidad menor que la unidad. Se trata de una tarea sencilla, pero adecuada para evidenciar la comprensión del significado de fracción que involucra.

Conclusiones y recomendaciones

La presente investigación tuvo como objetivo caracterizar las creencias y conocimientos de los docentes de 2.° grado de secundaria relacionados con la enseñanza de las fracciones. A continuación, se describen las conclusiones y algunas recomendaciones que podrían contribuir a la formación de los docentes en servicio.

La información cualitativa revela que los docentes de Matemática que participaron del estudio consideran que es relevante aprender fracciones porque se usan en la vida cotidiana y porque favorecen el desarrollo de otras competencias matemáticas.

Los docentes entrevistados tienen creencias respecto de la importancia de aprender fracciones principalmente porque se relacionan con el uso cotidiano (repartir, comprar, organizar dinero, entre otras actividades). Además, ellos consideran que las fracciones deben enseñarse mediante situaciones contextualizadas y empleando material concreto, conforme al enfoque de resolución de problemas. Para ellos, también es importante que los estudiantes puedan usar lo aprendido sobre fracciones en su vida cotidiana. Este tipo de creencias sugieren una visión instrumental de la matemática por parte de los docentes entrevistados. Una perspectiva así de la matemática entiende esta disciplina como un conjunto arbitrario de reglas y procedimientos que los estudiantes deben memorizar para resolver problemas cotidianos como cálculos, mediciones o problemas concretos. Entender la matemática y su aprendizaje de esta manera puede ser limitante para docentes y estudiantes, pues, de ese modo, se pierde de vista que la matemática es una creación humana en continuo desarrollo y revisión y, por tanto, que la solución de problemas debe ser autónoma y creativa.

Si bien algunos docentes señalaron que las fracciones son importantes porque permiten el desarrollo de otras competencias matemáticas, muy pocos lograron especificar los vínculos entre las fracciones y otras nociones matemáticas, como las razones y las proporciones, el estudio de escalas, la interpretación del valor de la probabilidad, entre otras, que son propias del nivel secundaria.

Aunque algunos docentes participantes del estudio habrían tenido algunas creencias sobre el aprendizaje de las fracciones que se acercaban a las características del enfoque de resolución de problemas propuesto en el CNEB, al destacar sus usos cotidianos, predomina en ellos una visión instrumental acerca del aprendizaje de las fracciones. Esta enfatiza que los estudiantes logren el dominio de procedimientos algorítmicos para luego resolver problemas de aplicación (ejercicios algorítmicos situados en un contexto cercano al estudiante). De ese modo, se dejan de lado la interpretación y la relación entre de los significados de fracción involucrados en la resolución de un problema, dado que la conceptualización se logra mediante situaciones, representaciones e invariantes (Vergnaud, 1990). Esto no favorece el desarrollo de las competencias matemáticas, pues, cotidianamente, los estudiantes suelen encontrar fracciones como mitades, cuartos y octavos, y no otra clase de fracciones que son igual de importantes para consolidar este aprendizaje matemático. Las situaciones cotidianas y el el uso de material concreto son de mucha ayuda para que los estudiantes entiendan la noción básica de fracciones, como se ha encontrado en estudios previos. Sin embargo, cuando los estudiantes están en secundaria, es importante brindarles oportunidades de aprendizaje más allá de lo concreto y cotidiano que les permitan progresar en sus aprendizajes matemáticos.

Las evidencias cualitativas y cuantitativas revelan un mayor dominio de conocimiento del contenido que de conocimiento pedagógico del contenido asociado al aprendizaje de los significados de fracción entre los docentes participantes.

Los docentes que respondieron el cuestionario tuvieron mayores tasas de acierto en las tareas referidas al conocimiento del contenido frente a aquellas referidas al conocimiento pedagógico del contenido. Este resultado coincide con los hallazgos de estudios previos acerca del conocimiento de los docentes de Matemática. La literatura da cuenta de un mayor dominio del contenido matemático por parte de los docentes en formación y en servicio que del manejo del conocimiento pedagógico necesario para enseñarlo.

Respecto del conocimiento del contenido para la enseñanza de las fracciones según el CNEB, los docentes del estudio resolvieron con éxito tareas que requerían interpretar el significado de fracción como parte-todo, como medida y como operador en situaciones problemáticas contextualizadas. Sin embargo, evidenciaron algunas dificultades en interpretación de afirmaciones que expresaban la solución de una tarea referida a la fracción como cociente y como razón. Estos dos últimos significados son propios del nivel secundario.

Respecto del conocimiento pedagógico del contenido, los docentes evidenciaron dificultades en las tareas que exigían identificar posibles errores de los estudiantes al resolver problemas sobre los cinco significados de fracción, así como en tareas que requerían identificar la acción pedagógica más adecuada para ayudarlos a superar sus errores. Esta limitación se evidencia también en los cuadernos analizados porque, en ellos, no se encontraron comentarios de retroalimentación o sugerencias concretas de mejora que dieran cuenta de la evaluación formativa necesaria para el desarrollo de competencias. Los hallazgos a nivel de conocimiento docente alertan sobre la necesidad de fortalecer la formación docente en servicio con especial atención en didáctica de la matemática. Este resultado es coherente con lo encontrado en la literatura sobre el tema, en donde se evidencia que los docentes tienen mayores dificultades anticipando errores de estudiantes y planteando estrategias pedagógicas para que los superen.

Durante las entrevistas, los docentes presentaron dificultades para identificar la capacidad curricular que se movilizaba con mayor énfasis en un conjunto de tareas, y casi ninguno logró identificar los significados de fracción como razón, fracción como medida y fracción como cociente, los cuales son necesarios para interpretar diversas situaciones matemáticas y resolverlas satisfactoriamente. Sin embargo, sí lograron describir algunos procesos operativos que intervenían en su solución. Por ejemplo, en el caso del significado de fracción como cociente mencionaron la división. Los hallazgos del presente estudio revelan la división teórica de la propuesta de Shulman (1986) respecto de los tres tipos de conocimiento: de contenido, pedagógico del contenido y curricular. Los docentes participantes tendrían mayor dominio del conocimiento de contenido y menor dominio del conocimiento pedagógico del contenido y del conocimiento curricular. Estudios previos han encontrado que, si bien los tres tipos de conocimiento son claves, el tipo de conocimiento que tiene mayor impacto en los aprendizajes de los estudiantes es el pedagógico del contenido.

Según lo descrito, se hace necesario reforzar especialmente el conocimiento pedagógico del contenido sobre fracciones entre los docentes mediante acciones de capacitación que les brinden estrategias pedagógicas para plantear tareas, usar material, anticipar e identificar errores de estudiantes, retroalimentar, entre otras actividades.

Las evidencias cualitativas revelan que los estudiantes tienen poco acceso a oportunidades de aprendizaje enfocadas en la interpretación de los cinco significados de fracción, porque la mayoría de las tareas aborda la noción de fracción como parte-todo, así como ejercicios que buscan asegurar el dominio de procedimientos para operar con fracciones.

En el análisis de los cuadernos, se identificó que la mayoría de tareas aborda principalmente el significado de fracción como parte-todo y que los demás significados se trabajan de manera muy limitada, lo cual es sugerente respecto de las pocas oportunidades de aprendizaje que tienen los estudiantes de 2.° grado de secundaria para comprender los cinco significados de fracción. Esta situación podría explicar las bajas tasas de acierto que alcanzan los estudiantes en tareas relacionadas con estos significados en los resultados de las evaluaciones nacionales de logros de aprendizajes.

A nivel discursivo, los docentes parecen tener clara la importancia de la didáctica para enseñar fracciones, por ejemplo, cuando destacan el rol del material concreto y de las situaciones de aprendizaje contextualizadas. Sin embargo, ellos muestran dificultades al llevar estas ideas a la práctica dado que las tareas que se proveen en los cuadernos son rutinarias y se centran principalmente en el dominio de procedimientos para operar con fracciones. Esto podría ser indicio de dificultad o desconocimiento de los docentes sobre cómo formular situaciones de aprendizaje relacionadas con los significados de fracción que sean desafiantes para sus estudiantes, es decir, situaciones que impliquen movilizar diversos recursos sin perder de vista su pertinencia respecto del nivel de avance de sus estudiantes. Otra posible razón es la necesidad de los docentes de cubrir la mayor parte de los aprendizajes que se han previsto en la planificación anual, con lo cual se dejaría de lado la consolidación de nociones fundamentales como las fracciones y sus significados.

El significado de fracción como parte-todo es clave para entender la noción de fracción y es, además, el más cercano a lo que los estudiantes observan cotidianamente en relación con las fracciones. No obstante, en secundaria, resulta fundamental que estos que tengan oportunidades de aprender el resto de los significados de las fracciones (operador, medida, cociente y razón).

Es importante que, a nivel de sistema educativo, se brinde a los docentes oportunidades de formación que les permitan desarrollar sus conocimientos pedagógicos del contenido y contar con las herramientas didácticas necesarias para brindar mejores oportunidades de aprendizaje a sus estudiantes a fin de que consoliden sus aprendizajes sobre las fracciones.

Limitaciones del estudio

Como se señaló en la sección Método, el recojo de datos se realizó durante el primer año de retorno a la presencialidad en las instituciones educativas. En ese sentido, es posible que el abordaje de conceptos básicos referidos a las fracciones propios del nivel primaria encontrados en los cuadernos de los estudiantes de 2.° grado de secundaria se haya debido a la decisión de los docentes de nivelar a los estudiantes, tal como señalaron en las entrevistas. De este modo, se habría postergado el aprendizaje de nociones propias del grado, como la consolidación de la comprensión de la fracción a través del tratamiento de sus cinco significados en situaciones significativas de aprendizaje.

Recomendaciones para futuros estudios

Se recomienda continuar realizando investigaciones de enfoque mixto que permitan explorar las condiciones en que los estudiantes del 2.° grado de secundaria aprenden y cómo se relaciona esto con los niveles de conocimiento del contenido y de conocimiento pedagógico de sus docentes en otros conocimientos de la competencia “Resuelve problemas de cantidad” y en las otras competencias matemáticas establecidas en el CNEB. Además, es necesario explorar a partir de grupos focales las percepciones de los estudiantes sobre las formas en que aprenden nociones matemáticas esenciales. Esto permitirá identificar sus necesidades de aprendizaje y, sobre la base a ellas, diseñar programas de formación que tengan un mayor impacto en los logros de aprendizaje en Matemática.

biblio

Referencias

Avcu, R. (2019). Turkish pre-service middle level mathematics teachers' knowledge for teaching fractions. *Research in Middle Level Education Online*, *42*(9), 1-20. https://doi.org/10.1080/19404476.2019.1681624

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., y Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grades 3-5*. The National Council of Teachers of Mathematics.

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., Ross, S., y Zbiek, R. M. (2010). *Developing essential understanding of rational number: grades 3-5. Essential Understandings*. ERIC.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., y Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, *47*(1), 133-180. https://doi.org/10.3102/0002831209345157

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., y Silver, E. A. (1983). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Academic Press.

Beswick, K. (2012). Teachers' beliefs about school mathematics and mathematicians' mathematics and their relationship to practice. *Educational Studies in Mathematics*, *79*, 127-147. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9333-2

Blum, W., y Leiss, D. (2006). "Filling up" - the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 4* (pp. 1623-1633). Fundemi IQS Business Institute.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R., y Köller, O. (2015). *Estándares de aprendizaje de la matemática. Articulación primaria-secundaria: orientaciones para las sesiones de aprendizaje, ideas para la capacitación docente, ejemplos de tareas*. SINEACE.

Booth, J. L., Newton, K. J., y Twiss-Garrity, L. K. (2014). The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. *Journal of Experimental Child Psychology*, *118*(1), 110-118. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.09.001

Braun, V., y Clarke, V. (2012). Thematic analysis. En American Psychological Association (Ed.), *APA handbook of research methods in psychology, Vol. 2. Research designs: Quantitative, qualitative, neuropsychological, and biological* (pp. 57-71). American Psychological Association. https://doi.org/https://doi.org/10.1037/13620-004

Castro-Rodríguez, E., y Rico, L. (2021). Knowledge of preservice elementary teachers on fractions. *Uniciencia*, *35*(2), 144-160. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.10

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(3), 525-545.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L., y Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: a comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, *47*, 82-92. https://doi.org/10.1016/j.tate.2014.12.009

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model. *Journal of Education for Teaching*, *15*(1), 13-33. https://doi.org/10.1080/0260747890150102

Escolano, R., y Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *1*(1).

Fandiño, M. I. (2009). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Editorial Magisterio.

Fives, H., y Gill, G. (2015). *International handbook of research on teachers' beliefs*. Routledge.

Getenet, S., y Callingham, R. (2017). Teaching fractions for understanding: addressing interrelated concepts. En A. Downton, L. Sharyn y J. Hall (Eds.), *40 years on: We are still learning! Proceedings of the 40th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 277-284).

Hernández, R., Fernandez, C., y Baptista, P. (2015). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.39.4.0372

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2016). Proposing an operational definition of science teacher belief. *Journal of Science Teacher Educational*, *27*(6), 675-691. https://doi.org/10.1007/s10972-016-9480-5

Hill, H. C., Rowan, B., y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371-406.

Hill, H. C., Schilling, S. G., y Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal*, *105*(1), 11-30.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement* (pp. 101-144). ERIC Information Analysis Center for Science, Mathematics, Environmental Education, Columbus, Ohio.; Georgia Univ., Athens. Georgia Center for the Study of Learning; Teaching Mathematics.

Kutub, A., y Wijayanti, P. (2019). Relationship of teacher's content knowledge on fraction topic toward student performance. *Journal of Physics: Conference Series*, *1417*(1), 012054. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1417/1/012054

López, R. (2022). Explorando el conocimiento sobre las fracciones de un grupo de profesores mexicanos. *Flegini*, *5*(20), 218-240.

López, S. (2021). *Creencias de los docentes de matemáticas de educación secundaria sobre sus prácticas pedagógicas en una institución pública de Lurín*.

López Padilla, R., Rodríguez Alegre, L., Ramos Pacheco, H., y Ramos Pacheco, R. L. (2022). Disposición al pensamiento crítico en estudiantes universitarios. *Revista Venezolana de Gerencia*, *27*(98), 831-850.

Maharaj, A., Brijlall, D., y Molebale, J. (2007). Teachers' views of practical work in the teaching of fractions: a case study. *South African Journal of Education*, *27*(4), 597-612.

Minarni, B., Retnawati, H., y Nugraheni, T. (2018). Mathematics teachers' beliefs and its contribution toward teaching practice and student achievement. *Journal of Physics: Conference Series*, *1097*(1).

Ministerio de Educación del Perú. (2016a). *Informe de evaluación de Matemática en sexto grado - 2013. ¿Qué logros de aprendizaje en Matemática muestran los estudiantes al finalizar la primaria?* http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2016/07/EM_Matematica_baja-2.pdf

Ministerio de Educación del Perú. (2016b). *Marco de fundamentación de las pruebas de la Evaluación Censal de Estudiantes*. http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2016/04/Marco-de-Fundamentaci%c3%b3n-ECE.pdf

Ministerio de Educación del Perú. (2017a). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. http://www.minedu.gob.pe/curriculo/

Ministerio de Educación del Perú. (2017b). *Programa curricular de educación primaria*. http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-primaria.pdf

Ministerio de Educación del Perú. (2017c). *Programa curricular de educación secundaria*. http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf

Ministerio de Educación del Perú. (2018). *¿Qué logran nuestros estudiantes en Matemática?* http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2019/04/Informe-Matem%C3%A1tica-ECE2018-2S.pdf

Ministerio de Educación del Perú. (2021). *Kit de evaluación diagnóstica: manual de uso de la prueba de Matemática en 2.° grado de secundaria*. https://hdl.handle.net/20.500.12799/8071

Ministerio de Educación del Perú. (2023). Evaluación Muestral de estudiantes 2022. http://umc.minedu.gob.pe/resultadosem2022/

Mohamed, R., Ghazali, M., y Samsudin, M. A. (2021). A systematic review on teaching fraction for understanding through representation on Web of Science database using

PRISMA. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, *9*(1), 100-125. https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1449

Moreano, G., Asmad, U., Cruz, G., y Cuglievan, G. (2008). Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales. *Revista de Psicología*, *26*(2), 299-334. https://doi.org/10.18800/psico.200802.005

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* (M. Fernández, Trad.). SAEM Thales.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, *62*(3), 307-332. https://doi.org/10.3102/00346543062003307

Peterson, P. L., Fennema, E., Carpenter, T. P., y Loef, M. (1989). Teachers' pedagogical content beliefs in mathematics. *Cognition and Instruction*, *6*(1), 1-40. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0601_1

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affects. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). NCTM.

Rokeach, M. (1986). A theory of organization and change within value-attitude systems. *Journal of Social Issues*, *24*(1), 13-33. https://doi.org/10.1111/j.1540-4560.1968.tb01466.x

Schmitz, A., y Eichler, A. (2015). Teachers' individual beliefs about the roles of visualization in the classroom. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 1266-1272). Charles University in Prague, Faculty of Education y ERME.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. https://doi.org/10.2307/1175860

Sigel, I. (1985). *Parental belief systems: the psychological consequences for children*. Erlbaum.

Simeone, B., y Pukelsheim, F. (2006). *Mathematics and democracy*. Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Stafylidou, S., y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*(5), 503-518. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Staub, F. C., y Stern, E. (2002). The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of Educational Psychology*, *94*(2), 344-355. https://doi.org/10.1037/0022-0663.94.2.344

Stols, G., Ono, Y., y Rogan, J. (2015). What constitutes effective mathematics teaching? Perceptions of Teachers. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(3), 225-236. https://doi.org/10.1080/10288457.2015.1080934

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Rowley, G., Peck, R., Bankov, K., Rodriguez, M., y Reckase, M. (2012). *Policy, practice, and readiness to teach primary* *and secondary mathematics in 17 countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. International Association for the Evaluation of Student Achievement.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: the case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(1), 5-25. https://doi.org/10.2307/749817

Valenzuela, M., Ramos, E., y Flores, P. (2022). Transformación del conocimiento especializado de los futuros profesores de primaria sobre división de fracciones. *Acta Scientiae*, *23*(3), 218-240. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5650

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales (J. D. Godino, trad.) *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, *10*(2), 133-170.

Wijayanti, P., y Fardah, D. (2021). Teachers' content knowledge (CK) analysis and students' performance on fractional materials: a case study in Al-Amien Prenduan Foundation School. *Journal of Physics Conference Series*, *1899*(1), 218-240. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5650