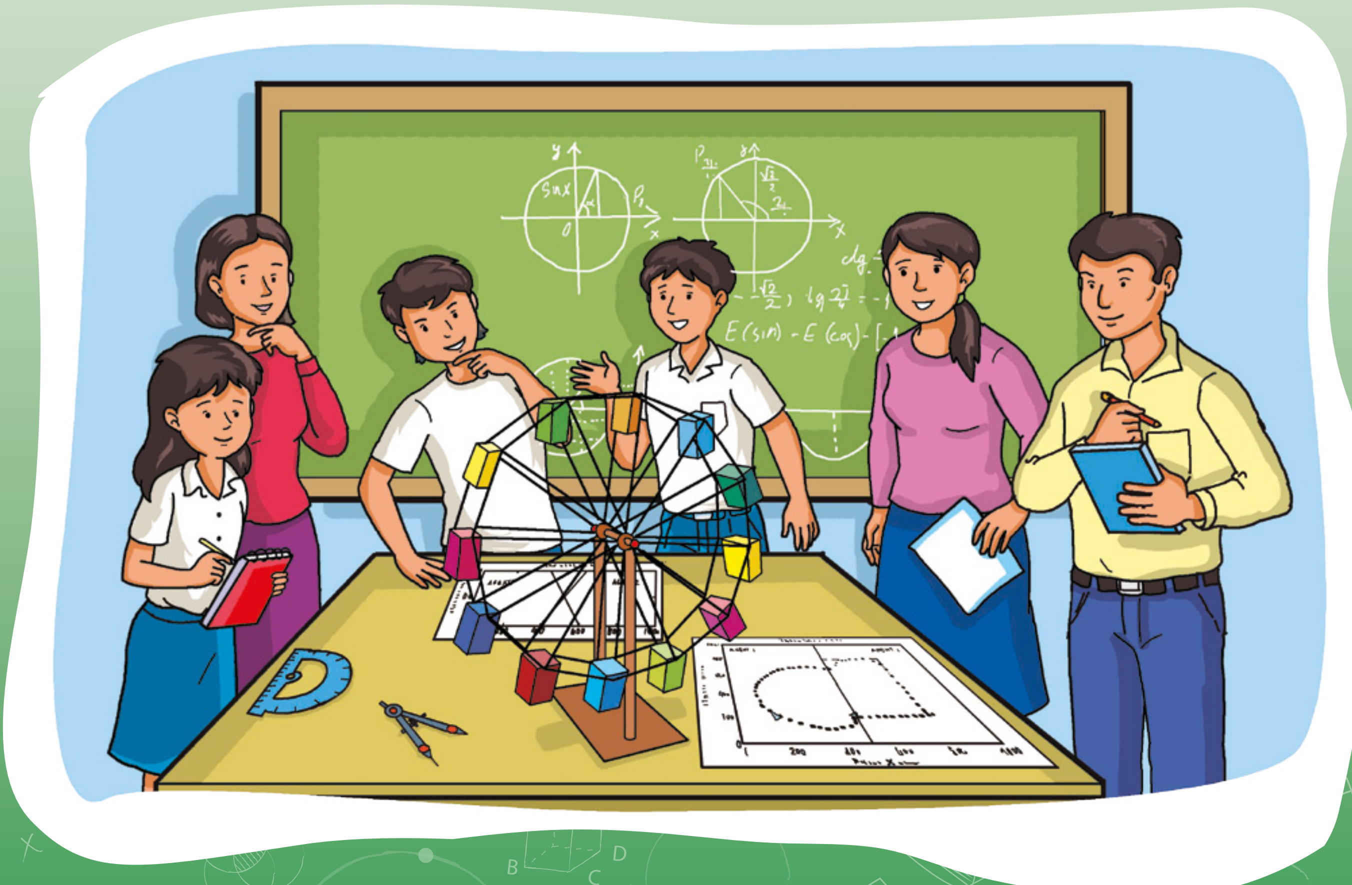
SECUNDARIA

Orientaciones para la Indagación en matemática



MINISTERIO DE EDUCACIÓN

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

ORIENTACIONES PARA LA INDAGACIÓN EN MATEMÁTICA

Esta herramienta curricular en versión digital para docentes de las IIEE de Secundaria ha sido elaborada por la Dirección de Educación Secundaria y tiene como propósito promover el desarrollo de las competencias en el área de Matemática propuestas en el Currículo Nacional de la Educación Básica.

Edición
© Ministerio de Educación
Calle Del Comercio N.º 193
San Borja
Lima 15021, Perú
Teléfono: 615-5800
www.minedu.gob.pe

Elaboración de contenido
José Luis Maurtua Aguilar
Juan Carlos Chávez Espino
Larisa Mansilla Fernández
Roxana Pilar Choquepata Vilca
Beatriz Paulina Espinoza Peralta

Revisión pedagógica
José Luis Maurtua Aguilar
Juan Carlos Chávez Espino
Larisa Mansilla Fernández
Roxana Pilar Choquepata Vilca
Milagros Arango Arango

Especialista en edición
Oscar Emiliano Palomino Flores

Corrección de estilo
Carlos Alberto Zavala Félix
Elizabeht Beatriz Bautista Toledano

Diseño y diagramación
Elisa del Rocío Espinoza Cerdan
Marco Villanueva Imafuku

Ilustración
Gloria Arredondo Castillo

Debido a la naturaleza dinámica de internet, las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que se hace referencia en este material educativo pueden tener modificaciones o desaparecer.

En este material se utilizan términos como “el docente”, “el estudiante”, “el profesor” y sus respectivos plurales, así como otras palabras equivalentes en el contexto educativo, para referirse a hombres y mujeres. Esta opción considera la diversidad y respeta el lenguaje inclusivo, y se emplea para promover una lectura fluida y facilitar la comprensión del texto.

Índice

Presentación

Estimados docentes:

La presente herramienta curricular, denominada "Orientaciones para la indagación en matemática", ha sido elaborada en el marco de la implementación del Currículo Nacional para la Educación Básica (CNEB) como recurso de apoyo para los docentes del área de Matemática.

Tiene como propósito ofrecer contenidos teóricos y pedagógicos que faciliten la integración de la indagación matemática en la enseñanza diaria, promoviendo el enfoque de la resolución de problemas y el desarrollo de competencias matemáticas en diversos contextos y situaciones.

Esta herramienta brinda orientaciones para diseñar situaciones y actividades que favorezcan el pensamiento crítico, creativo y reflexivo mediante el uso contextualizado de los conocimientos matemáticos.

Asimismo, proporciona pautas metodológicas para implementar la indagación matemática en las aulas, y anima a los docentes a mejorar su práctica pedagógica de manera autónoma, explorando, indagando y validando experiencias educativas.

La intención principal es que los estudiantes asuman un rol protagónico en su aprendizaje, conectando las matemáticas con su entorno y fomentando su participación activa en el descubrimiento del conocimiento.

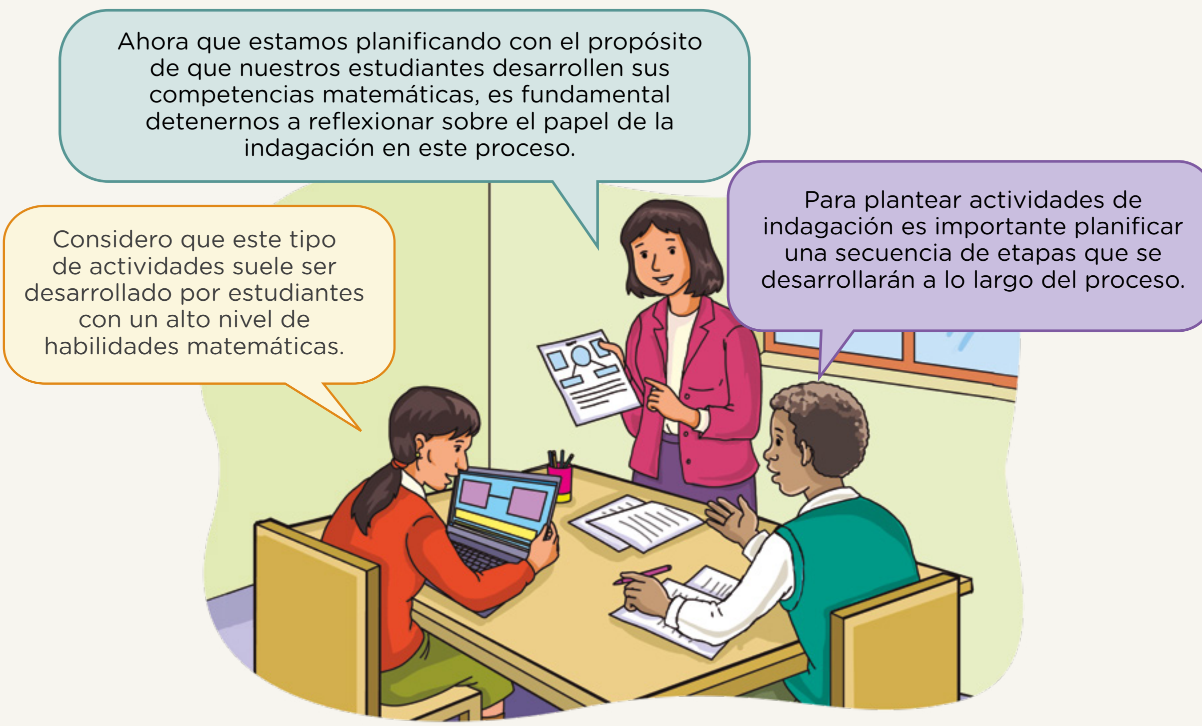
Ponemos a su disposición este documento con la esperanza de que se convierta en una herramienta útil para fortalecer los aprendizajes de sus estudiantes, promoviendo un proceso educativo que impulse el pensamiento crítico, la creatividad y el aprendizaje significativo en matemática.

Dirección de Educación Secundaria

Capítulo 1

¿Qué es la indagación para el desarrollo de las competencias matemáticas?

En una reunión colegiada de docentes del área de Matemática, Beatriz, José y Liliana dialogan.



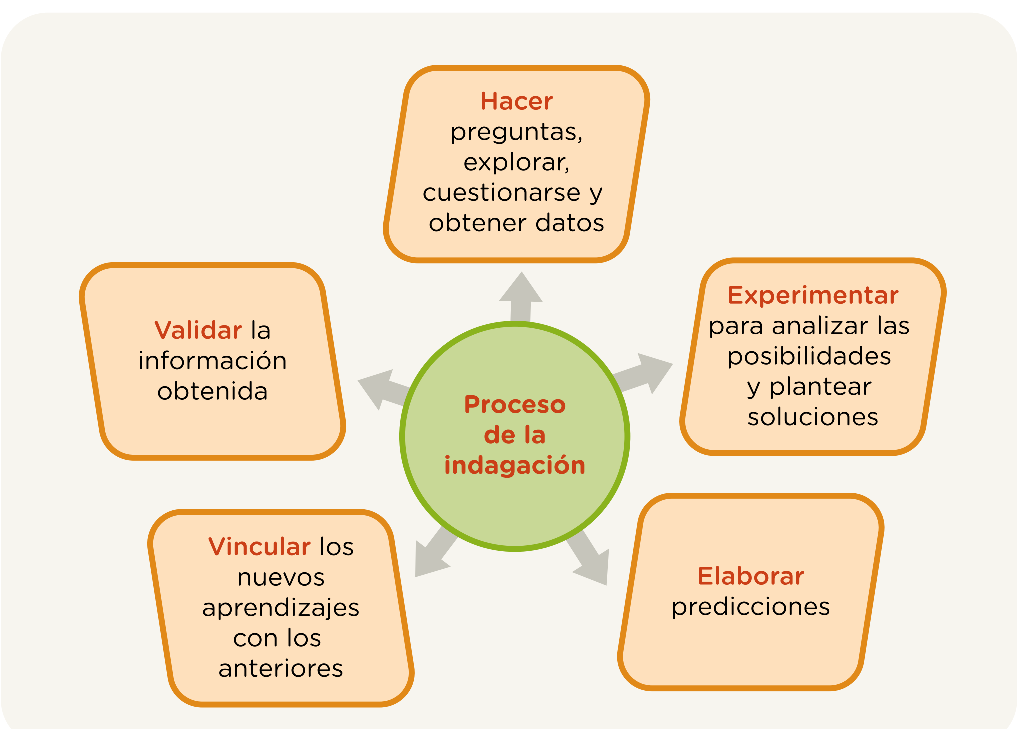
Para lograr el desarrollo de las competencias matemáticas, es fundamental comprender qué implica el proceso de indagación en este ámbito. Más allá de resolver problemas o seguir un procedimiento, la indagación matemática involucra un enfoque flexible en el que los estudiantes formulan sus propias preguntas, diseñan estrategias y evalúan sus soluciones. Este proceso permite avanzar de manera no lineal a través de la exploración, la observación, el análisis y la síntesis. Así, el objetivo es que los estudiantes construyan significados profundos y conexiones auténticas entre sus conocimientos previos y lo que están descubriendo, promoviendo un aprendizaje contextualizado y relevante.

Indagar es un proceso de búsqueda de información, conocimiento o verdad a través del cuestionamiento, la investigación o la exploración. También alude al intento de averiguar o inquirir algo a través de la formulación de preguntas y otros métodos.

La indagación consiste en una serie de pasos flexibles y personales, en un ciclo continuo en el que cada respuesta genera nuevas preguntas. Su esencia radica en la capacidad de pensar y tomar decisiones de manera autónoma. Esto implica razonar y reflexionar, siendo clave la habilidad de formular preguntas pertinentes y desarrollar un plan para responderlas (Lucero, Schellens y Valcke, 2013).

De acuerdo con lo expuesto, la indagación se considera un proceso impulsado tanto por el estudiante como por el docente, que facilita el avance desde un nivel de comprensión actual hacia uno más profundo. Este proceso puede implicar lo siguiente:

Figura 1: Proceso de la indagación



La **indagación para el desarrollo de las competencias matemáticas** promueve el aprendizaje activo y significativo a través de la exploración, la experimentación y la resolución de problemas. Por lo tanto, fomenta la participación y el involucramiento de los estudiantes, quienes son capaces, a partir de una situación problemática, de plantear supuestos, formular preguntas, realizar conjeturas, recopilar y analizar datos, y plantear soluciones fundamentadas desde una perspectiva.

Una de las razones de enfatizar en **la indagación** es que, cuando se implementa de manera efectiva, facilita el establecimiento de conexiones entre las ideas matemáticas, promoviendo un pensamiento relacional y estructurado con significado, con el desarrollo de las competencias matemáticas. Tal como se observa en la siguiente situación.

Situación: Diseño y construcción de paredes ecológicas con botellas plásticas

Un grupo de estudiantes ha decidido construir, experiencialmente, paredes en su institución educativa (IE) utilizando botellas plásticas llenas de arena como principal material de construcción. Este proyecto tiene el objetivo sensibilizar sobre la necesidad de contar con ambientes educativos, reducir los desechos plásticos y promover prácticas de construcción sostenibles. En este sentido, **¿cómo deben los estudiantes diseñar las paredes para que sea funcional, estable y sostenible, considerando las variables interrelacionadas y las restricciones de recursos?** Explica el proceso de diseño y justifica las decisiones tomadas a lo largo del proyecto.

Fuente: Primas Project.

Fuente: Primas Project.

Fuente: Primas Project.

Fuente: Primas Project.

Fuente: Primas Project.

A partir de la observación de las imágenes, los estudiantes comienzan a formularse las siguientes interrogantes:

- ¿Cuántas botellas se necesitarán para construir las paredes de la IE?
- ¿Cuál será la altura de la pared?
- ¿Cómo se ensamblan las botellas entre sí?
- ¿Cuánta arena se requerirá para rellenar las botellas?
- ¿Cuánto cemento será necesario para los espacios entre las botellas?
- ¿Cómo se resolverán las esquinas?
- ¿Qué se hará en el caso de las puertas y las ventanas?

En el trabajo realizado por el estudiante, se reconoce que, para resolver la situación planteada, se llevan a cabo acciones de exploración, búsqueda y organización de información. A partir de esto, se emplean procedimientos matemáticos para resolver el problema, así como adaptaciones y creaciones de estos cuando sea necesario.

En ese sentido, Artigue y Blomhøj (2013, como se citó en García y otros, 2019), señalan que las estrategias pedagógicas basadas en la indagación matemática deben incluir diversas acciones desde la práctica pedagógica en el aula, como las siguientes:

- Elaborar preguntas
- Resolver problemas
- Modelizar y matematizar: búsqueda de recursos e ideas
- Explorar y analizar información
- Experimentar
- Formular conjeturas
- Explicar, razonar, argumentar y demostrar
- Establecer conexiones, representar y comunicar (adaptación propia)

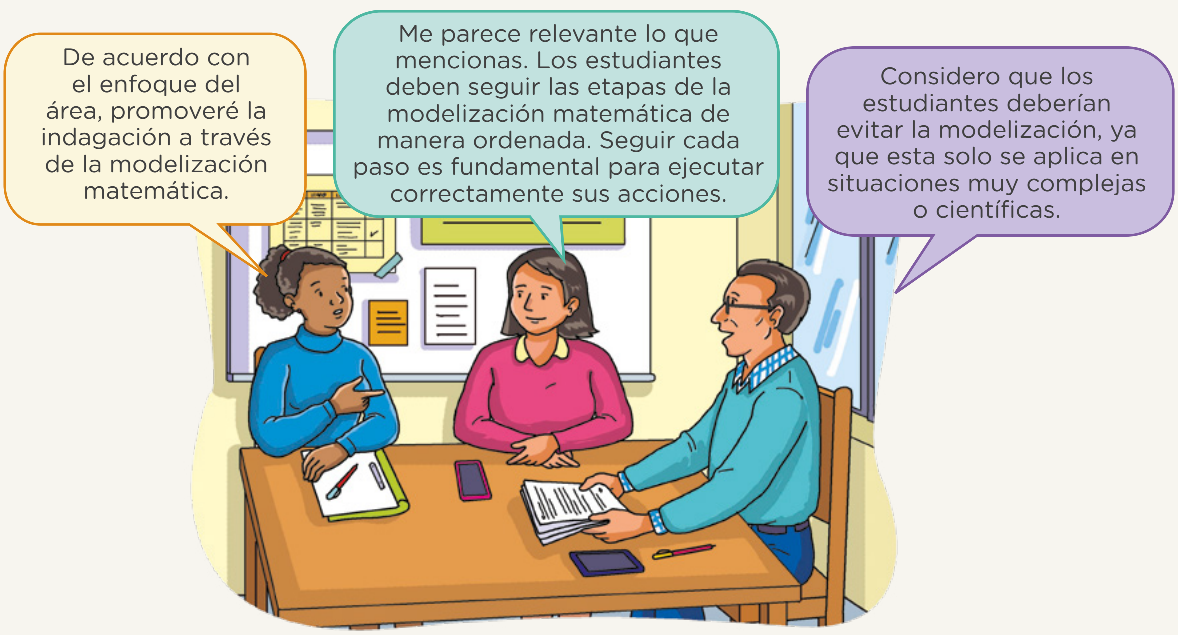
Por tanto, se reconoce la importancia, a partir de la práctica docente, de proporcionar oportunidades de aprender a través de la indagación matemática empleando estrategias que estimulen el pensamiento crítico, creativo y las habilidades de resolución de problemas en los estudiantes por medio de la participación activa en actividades de aprendizaje de manera permanente (OBI, 2021, p. 14).

En consecuencia, es fundamental que los docentes incluyan, en sus planificaciones, experiencias de aprendizaje que integren situaciones significativas del mundo real, promoviendo en los estudiantes actividades que impulsen al desarrollo de la indagación matemática. Esto implica trabajar de manera continua con este tipo de situaciones.

Capítulo 2

¿Cómo se relacionan la modelización matemática y la indagación para desarrollar las competencias matemáticas?

Los docentes de la institución educativa han reflexionado sobre la relevancia de la modelización matemática y su vínculo con la indagación en la planificación de clases. A continuación, se presentan sus aportes:

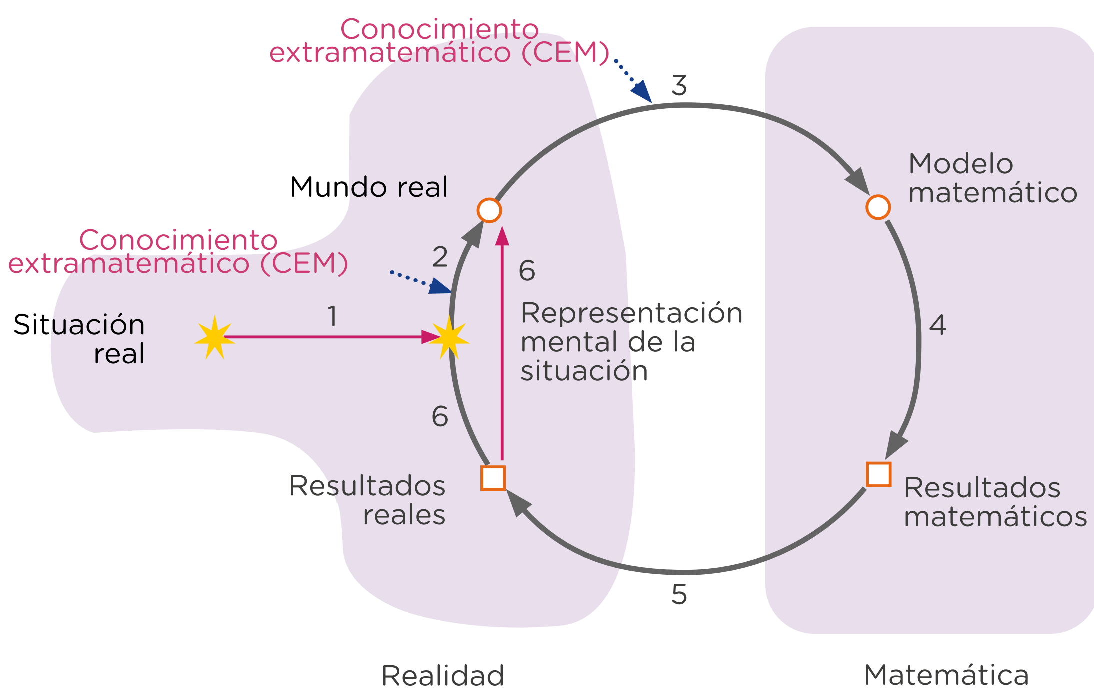


En el proceso de planificación, los docentes reflexionan sobre la importancia de integrar la modelización matemática como una vía para fomentar la indagación y, a su vez, desarrollar competencias matemáticas. Mientras algunos reconocen el potencial de este enfoque, otros consideran que debe seguirse un proceso estructurado y lineal, o restringen su aplicación a problemas científicos complejos. Sin embargo, la modelización matemática y la indagación permiten a los estudiantes abordar problemas del mundo real, explorar diferentes perspectivas y ajustar sus soluciones.

La modelización debe verse como una herramienta dinámica que invita a los estudiantes a construir modelos a partir de su experiencia, ajustando sus acciones y descubriendo cómo la matemática se aplica a situaciones cotidianas. Es mediante esta integración de indagación y modelización que se generan oportunidades para el desarrollo de competencias matemáticas esenciales.

La modelización matemática es un enfoque que permite abordar y resolver problemas mediante la comprensión de situaciones del mundo real, evaluando los efectos de posibles cambios y proporcionando una base sólida para la toma de decisiones. Al respecto, Borromeo (2010) señala que la modelización matemática es un proceso de traducción entre el mundo real y la matemática, que conecta los elementos de naturaleza no matemática con el conocimiento matemático en ambas direcciones. Además, destaca la importancia de considerar procesos cognitivos en cada etapa del ciclo de modelización matemática, para prestar atención a los procesos mentales y cognitivos que los estudiantes emplean durante el desarrollo de la modelización. Esto incluye aspectos como la comprensión del problema, la formulación del modelo matemático, la aplicación de métodos de resolución y la interpretación de los resultados.

Figura 2: Ciclo de modelización matemática desde la perspectiva cognitiva



Fuente: Borromeo (2018, p. 15)

Donde:

1. Entender las tareas.
2. Simplificar/estructurar la tarea. El uso o la necesidad del CEM depende de la tarea.
3. Matematizar. Aquí el CEM es fuertemente necesario.
4. Trabajar usando las competencias matemáticas del estudiante.
5. Interpretar.
6. Validar.

En la propuesta de Borromeo se destaca el planteamiento de conocimiento extramatemático, que valora las comprensiones y los saberes que tiene una persona para desarrollar el proceso de modelación. Esto implica que, a partir de las experiencias y los conocimientos del grupo, se formulan preguntas, hipótesis y suposiciones para abordar el problema presentado en la realidad.

De la figura mostrada, se reconoce que el ciclo de modelización presenta seis tramos o conexiones.

En el tramo 1, se parte de una situación real que puede ser representada mediante una imagen, una representación gráfica, tabular, un texto o una combinación de estos. El estudiante analiza esta situación para crear una representación mental que le permita comprenderla. A partir de esta comprensión, filtra y focaliza la información relevante de manera consciente o inconsciente, según su estructura mental y desarrollo del pensamiento respecto a la situación.

En el tramo 2, se produce una transición que simplifica e idealiza el problema, conduciendo a un modelo real. Este proceso es más consciente y ocurre de manera interna en el estudiante, quien, dependiendo del problema, conecta esta simplificación con conocimientos extramatemáticos.

En el tramo 3, se lleva a cabo un proceso de matematización que surge a partir de la conexión entre los conocimientos extramatemáticos y las características, elementos y propiedades del objeto real. De este modo, emerge un modelo matemático, lo que implica establecer afirmaciones y argumentos que derivan de la conceptualización del objeto matemático.

En el tramo 4, se aplican los resultados matemáticos obtenidos a través del modelo matemático identificado en el tramo anterior.

En el tramo 5, los resultados matemáticos son interpretados y contrastados con la situación real, de lo cual se obtienen los resultados finales. Si estos son coherentes con la situación, el modelo matemático se valida.

Finalmente, en el tramo 6, los resultados obtenidos pueden servir de insumo para iniciar un nuevo ciclo de modelización o para extrapolar la representación mental del modelo real.

Figura 3: Ciclo de la modelización

Ciclo de la modelización

TRAMO 1
- Comprende la situación real.
- Crea una representación mental de la situación.
- Prioriza filtrar la información de la situación real (consciente o inconscientemente).

TRAMO 2
- Simplifica e idealiza de manera más consciente.
- Establece conexiones con conocimiento extramatemático.
- Vincula lo matemático con el mundo real.

TRAMO 3
- Ejecuta un proceso de matematización a partir de los conocimientos extramatemáticos.
- Define el modelo matemático.
- Utiliza el lenguaje formal matemático.

Interacción del estudiante en el proceso de modelización

TRAMO 4
- Usa estrategias y métodos matemáticos.
- Obtiene resultados y argumenta sobre ellos.

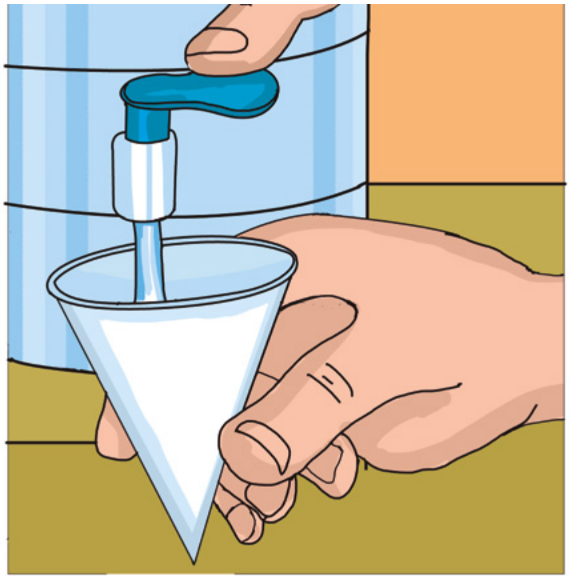
TRAMO 5
- Interpreta resultados matemáticos y los contrasta con la situación real.
- Verifica la coherencia entre los elementos de la situación y su solución.

TRAMO 6
- Evalúa la validez del modelo planteado.
- Inicia un nuevo ciclo de modelización a partir de la validación.

A continuación, describiremos cómo se aborda una situación empleando el ciclo de modelización matemática propuesto por Borromeo (2006) y cómo la indagación influye en el proceso de construcción de los aprendizajes.

Situación problemática: Diseñamos una propuesta de envase

Una empresa dedicada a elaborar envases biodegradables recibe un pedido para hacer vasos en forma de cono que se utilizarán para beber agua. Juan y María se encargan de diseñar el prototipo del vaso de cartón a partir de una plancha de cartón de forma circular de 9 cm de radio. Al respecto, ellos desean conocer las características que debe tener el vaso para que contenga la mayor cantidad de líquido posible.



A continuación, se abordará la situación desde el ciclo de modelización, reconociendo que, junto con el proceso de indagación, se fomenta la construcción de aprendizajes.

Tramo 1: De la situación real (SR) a la representación mental de la situación (RMS)

La situación real (SR) representa la situación proporcionada en el problema, que puede mostrarse mediante una imagen, una gráfica, una tabla, un texto o una combinación de estos.

En este tramo el estudiante realizará lo siguiente:

- Hacer supuestos para el problema y simplificar la situación.
- Reconocer las cantidades que influyen en la situación.
- Revisar la información disponible y diferenciar entre información relevante e irrelevante.

Al transitar de la SR a la representación mental de la situación (RMS), el estudiante comprende más o menos el problema y reconstruye mentalmente la situación. Aun cuando no lo comprenda completamente, puede comenzar a trabajar en él. Para ello, es necesario que el estudiante indague planteando las siguientes interrogantes:

- ¿Cuáles son las características de un vaso?
- ¿Cuáles son las alturas usuales que tienen los vasos?
- ¿Hay una relación entre la base del vaso y la altura?
- ¿Qué partes del vaso debemos de considerar para determinar la capacidad máxima que puede contener?

Las preguntas planteadas buscan explorar lo siguiente:

- La forma del vaso
- La altura más conveniente
- La capacidad máxima que podría contener
- La cantidad de cartón a emplear

La RMS puede variar entre los estudiantes, dependiendo de su estilo de pensamiento. Por ejemplo, algunos estudiantes pueden ser visuales en relación con la experiencia, otros pueden haber vivido experiencias similares a la situación propuesta, y habrá otros más familiarizados con las representaciones u objetos matemáticos abstractos. En ese sentido, todo dependerá de las conexiones que realiza el estudiante entre la situación real y su estructura mental al momento de comprender la situación.

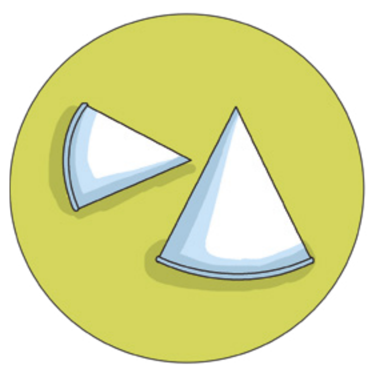
Al respecto, podemos señalar dos aspectos que marcan la diferencia entre la SR y la RMS:

- Las simplificaciones inconscientes de la tarea, que implican focalizar, delimitar o filtrar la información propuesta en la SR. Por ejemplo, el estudiante centra su representación en la forma que tiene el vaso.
- La elección individual sobre cómo abordar el problema, el cual implica que el estudiante, de acuerdo con el desarrollo de su pensamiento, intente comprender la situación y representarla para resolverla. Por ejemplo, el estudiante, al focalizarse en la representación de un vaso, puede referirse a uno que cuya base es de forma circular.

En el tramo 1, es importante que el estudiante formule interrogantes de indagación para reconocer e identificar diversos objetos cuyas formas se asemejan a la de un vaso, como conos, cilindros, troncos de cono, prismas u otras figuras geométricas.

Tramo 2: De la representación mental de la situación (RMS) al modelo real (MR)

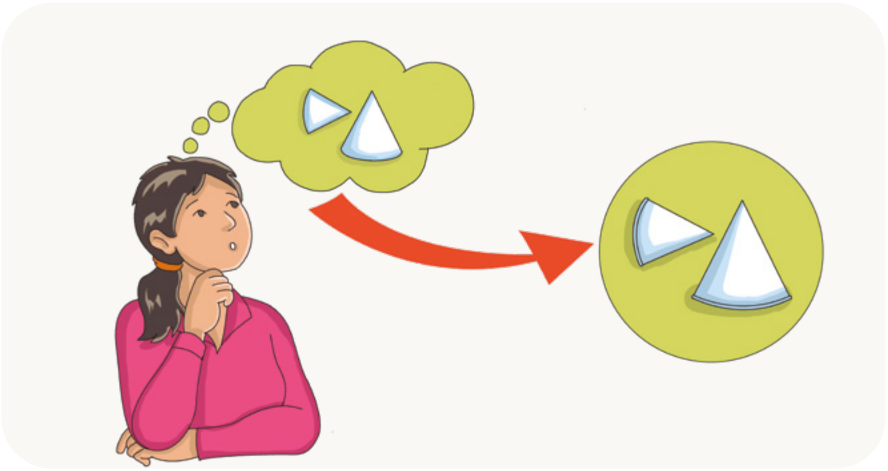
En el paso de la representación mental de la situación (RMS) al modelo real (MR), se llevan a cabo simplificaciones e idealizaciones más conscientes por parte del estudiante, debido a que en la fase de la RMS el individuo ya ha tomado decisiones que influyen en el filtrado de la información. En este proceso de transición, puede requerirse el conocimiento extramatemático, el cual depende del tipo de tarea. Por ejemplo, el estudiante representa un vaso en forma de un cono.



En este tramo el estudiante realizará lo siguiente:

- Identificar y nombre las variables clave, como la altura y el radio del cono.
- Simplificar las cantidades relevantes y sus relaciones, reduciendo con ello el número de variables y la complejidad del problema, si es necesario, para facilitar su análisis y resolución.

La fase del MR está fuertemente relacionada con la fase de la RMS, ya que el MR es el resultado de la transición de las representaciones externas (diseño del vaso en forma de cono) a la construcción en el esquema mental del estudiante (idea del vaso en forma de cono).



Al respecto, los estudiantes pueden plantearse estas interrogantes de indagación:

- ¿Qué aspectos del diseño del vaso podemos simplificar sin afectar la cantidad de líquido que puede contener?
- ¿Es razonable suponer que la forma del vaso se mantiene al ser fabricado a partir de la plancha circular?

En este tramo, el proceso la indagación permite al estudiante identificar el objeto real de estudio: formas, características o propiedades, para llegar al MR a partir de lo representado en el tramo 1.

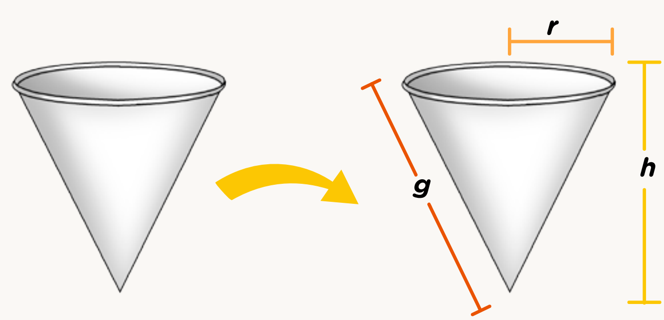
Tramo 3: Del modelo real (MR) al modelo matemático (MM)

Al transitar del modelo real (MR) al modelo matemático (MM), se hace presente un progreso individual de matematización, en el que podría ser necesario también recurrir al conocimiento extramatemático.

En este tramo el estudiante realizará lo siguiente:

- Establecer relaciones entre las variables de manera coherente.
- Escoger apropiadamente las notaciones matemáticas.
- Representar gráficamente las situaciones, para facilitar la comprensión y el análisis del problema.

Para transitar del MR al MM se debe tener en cuenta la conexión entre las representaciones externas y las expresiones matemáticas o dibujos. Por ejemplo, se debe pasar del vaso en forma de cono al MM mediante la identificación sus características, elementos y propiedades, tal como se muestra en el gráfico. Este tramo completa el proceso de transición hacia la matemática.



Donde:
A_L: Área lateral
A_t: Área total
V: Volumen
r: Radio
g: Generatriz
h: Altura

$$A_L = \pi \,.\, r \,.\, g$$
$$A_T = \pi \,.\, r \,.\, g + \pi \,.\, r^2$$
$$V = \frac{1}{3}\pi \,.\, r^2 .\, h$$

Para ello, los estudiantes pueden plantear interrogantes como las siguientes:

- ¿Cuáles son las características de un cono?
- ¿Cómo es su desarrollo?
- Respecto a su desarrollo, ¿cuál es la ventaja de este frente a otros diseños?
- ¿Cuánto material se empleará en una pieza del vaso?

- ¿Cuánto será el volumen y la capacidad de un cono?
- A medida que se incrementa la altura o se amplía la base, ¿cómo se ve afectado el volumen y la capacidad del cono?
- ¿Cuál es la relación del sector circular y el radio respecto al diseño del cono?
- En cuanto a su altura, ¿cuál es la medida más conveniente del cono?

En este tramo, el proceso de indagación permite al estudiante reconocer las características, las propiedades y los elementos del cono como sólido de revolución, así como los modelos matemáticos, para estimar el área y el volumen del cono.

Tramo 4: Del modelo matemático (MM) a los a resultados matemáticos (RM)

En el tránsito del modelo matemático (MM) a los resultados matemáticos (RM), se ponen en juego las competencias matemáticas del estudiante, así como los recursos matemáticos y las estrategias para analizar, explorar el modelo y obtener resultados o conclusiones.

En este tramo el estudiante realizará lo siguiente:

- Usar estrategias heurísticas, tales como la división del problema en partes, el establecimiento de relaciones con problemas similares o análogos, la reformulación del problema, la visualización desde diferentes perspectivas, y la variación de cantidades o datos de las variables.
- Emplear o desarrollar su conocimiento matemático para resolver el problema.

La fase de los RM implica la presentación de los resultados obtenidos a partir del modelo. El tránsito de los RM a los resultados reales ocurre mediante la reinterpretación de la solución en el contexto del problema planteado. Según Borromeo (2006), los estudiantes suelen realizar esta transición de forma inconsciente.

En función de la situación propuesta, en este tramo, el estudiante realiza los siguientes procedimientos matemáticos:

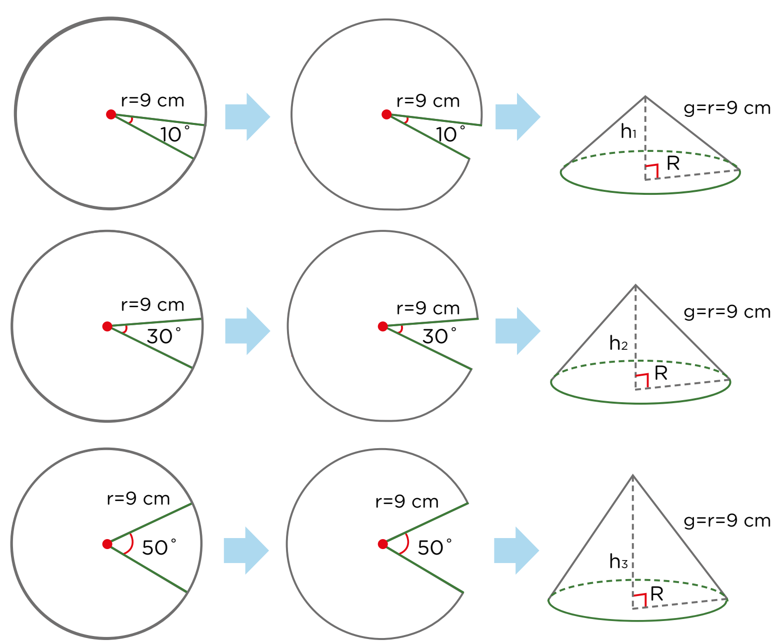
Procedimiento 1: El estudiante formula una conjetura. El ángulo del sector circular, la altura del cono y el radio influyen en la obtención del volumen máximo del vaso en forma de cono.

Está afirmación está sujeta a verificación durante el proceso de resolución.

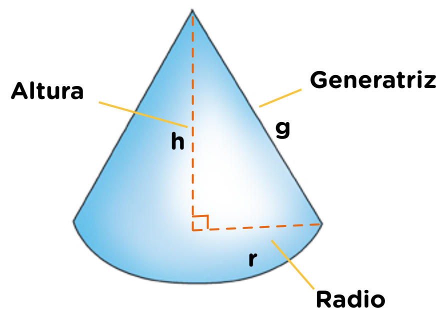
Procedimiento 2: El estudiante pone a prueba la conjetura. A partir de la comprensión conceptual, realiza procedimientos y emplea estrategias de resolución. Por ejemplo:

a. Reconocer las características de un círculo, del sector circular y del cono de revolución.

b. A partir de tres planchas circulares, traza tres sectores con diferentes ángulos, luego los recorta para extraerlos. Con lo que queda del círculo, une los extremos de cada radio, sin superponerlos, para formar un cono recto, tal como se muestra en los siguientes casos:



c. A continuación, realiza la medida de las alturas de cada uno de los conos:



d. Luego, representa en la siguiente tabla las medidas del ángulo, del radio, de la altura y del volumen obtenido en cada uno de los conos formados.

Ángulo del sector circular (α)	Radio (*r*) de la base en cm	Altura (*h*) del cono en cm	Volumen (*V*) del cono en cm^3

e. De acuerdo con la información presentada en la tabla, el estudiante responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué se puede afirmar sobre la relación entre el valor del ángulo (α) y la altura (*h*) del cono?
- ¿Qué se puede afirmar sobre la relación entre el valor del ángulo (α) y el volumen del cono?
- Según los resultados obtenidos en cada uno de los casos, ¿qué ángulo producirá el mayor volumen del cono?

Procedimiento 3: El estudiante justifica los resultados. Demuestra o valida la conjetura a través de la comprensión conceptual, y el empleo de estrategias y procedimientos matemáticos, tal como se señala a continuación:

a. Determina valores específicos de ciertos parámetros del cono.
- Determina la altura (h) del cono en función del ángulo del sector circular.
- Determina el área de la base del cono en función de su radio (r).
- Obtiene el volumen del cono multiplicando el área de la base por la altura dividido entre 3.

b. El estudiante emplea recursos tecnológicos para:
- Graficar el cono y usar los deslizadores para variar las medidas de los parámetros (ángulo del sector circular, radio y altura).
- Calcular el volumen del cono según la variación de los parámetros señalados en el proceso previo.
- Realizar un análisis cuantitativo de los valores de los volúmenes obtenidos en relación con la variación de los parámetros.

c. Diseña el prototipo del vaso ecológico en forma de cono y reconoce sus elementos.

d. Argumenta con sustento matemático las afirmaciones relacionadas a las características del cono y sus elementos, así como del volumen y de la representación de sus variaciones.

En este tramo, el proceso de indagación ayuda al estudiante a establecer las relaciones entre las características, las propiedades y los elementos del cono como sólido de revolución, lo cual le permitirá justificar, con sustento matemático, el diseño del prototipo del vaso en forma de cono.

Es fundamental considerar que, para avanzar en el siguiente tramo, el proceso de indagación desempeña un papel crucial en la validación de los resultados, de acuerdo con el contexto en el que se desarrolla la situación.

Tramo 5: De los resultados matemáticos (RM) a los resultados reales (RR)

En este tramo se discuten los resultados matemáticos (RM) en correspondencia con los resultados reales (RR) de la situación. Al validar los RR, el estudiante busca relaciones entre estos resultados y la RMS, lo que depende de la forma de validación que elija.

Para ello, se pueden adoptar distintas formas de validación. Por ejemplo, una validación intuitiva o una validación basada en la comprensión conceptual.

En este tramo el estudiante realizará lo siguiente:

- Interpretar resultados matemáticos en el contexto del problema real planteado.
- Generalizar situaciones desarrolladas a partir del problema original.
- Encontrar soluciones utilizando el lenguaje matemático adecuado o comunicar las soluciones de manera efectiva.

En este tramo, el proceso de indagación permite al estudiante identificar el objeto real de estudio, sus formas, características o propiedades, y establecer las conexiones iniciales del problema. A partir de lo representado en el tramo 1, el estudiante determina si estas conexiones se ajustan al MR y corresponden al MM obtenido.

Para ello, se pueden plantear interrogantes como las siguientes:

- ¿Cómo se pueden interpretar los resultados matemáticos en el contexto del problema real?
- ¿Cómo se relacionan los resultados obtenidos con las características reales del vaso que se quiere diseñar?
- ¿De qué manera se puede generalizar la solución encontrada para aplicarla en la fabricación de otros tipos de vasos o envases similares?
- ¿Qué métodos de validación podrían utilizarse para garantizar que los resultados obtenidos sean aplicables en un contexto real?

Tramo 6: De los resultados reales (RR) al modelo real (MR)

En este tramo, los resultados reales (RR) sirven de insumos para iniciar un nuevo ciclo de modelización, extrapolar o transferir la representación mental del modelo real (MR) a situaciones similares con base en las validaciones realizadas.

En este tramo el estudiante realizará lo siguiente:

- Reflexionar y evaluar críticamente las soluciones encontradas.
- Revisar partes del modelo o, si es necesario, plantear nuevas cuestiones mediante el proceso de modelación cuando las soluciones no se ajustan a la situación.
- Considerar el problema desde otras perspectivas de modelación o explorar si las soluciones pueden desarrollarse de manera diferente.
- Generalizar las preguntas del modelo para ampliar su comprensión.

En ese sentido, el estudiante amplía su perspectiva al modificar las condiciones de la situación, lo que le permitirá plantear y probar nuevas conjeturas sobre las relaciones entre las características, los elementos, las propiedades y los modelos matemáticos relacionados con el área y el volumen del objeto en forma de cono.

Por ejemplo, el estudiante puede plantear la siguiente pregunta: si mantenemos constante el ángulo del sector circular y variamos el radio de la plancha de cartón, ¿podemos afirmar que los volúmenes obtenidos siguen una relación determinada? ¿Por qué sí o por qué no?

Otras interrogantes también pueden ser:

- ¿De qué manera los resultados reales pueden modificar o mejorar el modelo inicial?
- ¿Qué nuevas preguntas o suposiciones podrían surgir al ajustar las condiciones del problema, como, por ejemplo, cambiar el radio de la base del círculo original?
- ¿Cómo se puede extrapolar el aprendizaje de este proceso a situaciones similares?
- ¿Qué aspectos del modelo deberían revisarse si los resultados no se ajustan adecuadamente a la situación real?

Finalmente, en este tramo, el proceso de indagación juega un papel preponderante, puesto que permite al estudiante identificar nuevas situaciones a las que se transferirán los aprendizajes de menor a mayor complejidad.

Capítulo 3

¿Qué preguntas pueden guiar la indagación en el proceso de modelización matemática?

En el aula, los docentes reflexionan sobre cómo las preguntas clave son fundamentales para guiar la indagación durante el proceso de modelización matemática. A continuación, se recogen sus comentarios:

Las preguntas juegan un papel crucial en la indagación, ya que orientan a los estudiantes en cada fase del proceso de modelización matemática. Los docentes reflexionan sobre la importancia de formular preguntas abiertas que fomenten la exploración, aunque algunos creen que estas deberían estar estrictamente relacionadas con las etapas de la modelización o incluso que pueden ser innecesarias. Sin embargo, la indagación se enriquece con interrogantes que desafían a los estudiantes a reflexionar sobre variables, supuestos y relaciones entre los elementos del problema.

Plantear preguntas que inviten a una reflexión profunda es fundamental para guiar el proceso de modelización. Estas interrogantes permiten a los estudiantes explorar múltiples caminos, ajustar sus modelos y conectar el conocimiento matemático con la realidad, promoviendo así el desarrollo de habilidades críticas y creativas.

En el proceso de modelización matemática, las preguntas fácticas, conceptuales y debatibles son fundamentales para guiar el pensamiento crítico y estructurar el aprendizaje. Estas preguntas, en conjunto, permiten a los estudiantes abordar problemas complejos, explorar distintas soluciones y desarrollar habilidades de pensamiento matemático aplicadas a contextos reales. En ese sentido, se pueden distinguir tres tipos de preguntas:

- **Las preguntas fácticas (PF):** Se basan en conocimientos matemáticos expresados en datos y representaciones, y se relacionan con las habilidades y se sustentan en pruebas. Estas preguntas son pertinentes para **recordar, conocer y clarificar** las terminologías empleadas en el enunciado de indagación, vinculadas a temas de actualidad y diversos contextos. Se caracterizan por ser directas, objetivas y concretas.

- **Preguntas conceptuales (PC):** Permiten explorar ideas que conectan los datos y las nociones de las competencias matemáticas, y generan oportunidades para **comparar, contrastar y explorar contradicciones** que conduzcan a una comprensión conceptual profunda, y fomenten la transferencia a situaciones nuevas de diferentes contextos que promueven el análisis y la aplicación. Se caracterizan por referirse a ideas generales, ser complejas y desafiar la creatividad.

- **Preguntas abiertas o debatibles (PAD):** Permiten utilizar datos y conceptos para **debatir una posición**, promoviendo así la discusión y la exploración de ideas desde múltiples perspectivas y contextos. Estas preguntas **invitan a reflexionar** y pueden ser objeto de controversia, lo que fomenta la **síntesis** y la **evaluación**. Se distinguen por permitir una amplia variedad de respuestas, invitar a la **argumentación** y ofrecer espacio para la **reflexión crítica**.

Teniendo en cuenta la situación problemática “Diseñamos una propuesta de envase”, se adjunta la siguiente tabla que muestra las preguntas formuladas para modelar y resolver el problema del diseño de un vaso de cartón:

Tabla 1: Preguntas formuladas para modelar y resolver la situación problemática

Tramo del ciclo	Pregunta fáctica (PF)	Pregunta conceptual (PC)	Pregunta abierta o debatible (PAD)
1. Entender las tareas.	¿Cuáles son las características de un vaso? ¿Cuáles son las alturas usuales que tienen los vasos?	¿Existe una relación entre la base del vaso y la altura que permita determinar el volumen adecuado? ¿Cómo se calcula el área de la plancha de cartón?	¿Qué partes del vaso debemos de considerar para poder plantear la capacidad máxima que podría contener?
2. Simplificar el problema real a un modelo real.		¿Qué aspectos del diseño del vaso podemos simplificar sin afectar la cantidad de líquido que puede contener?	¿Es razonable suponer que la forma del vaso se mantiene sin distorsiones al ser fabricado a partir de una plancha circular?
3. Matematizar el modelo real a un modelo matemático.		¿Cuáles son las características de un cono? ¿Cómo es su desarrollo?	¿Cuál es la ventaja de su desarrollo respecto a otros diseños? ¿Cuánto material se empleará en un vaso? ¿Cuánto será el volumen y la capacidad de un cono?

4. Buscar una solución trabajando matemáticamente.	Según los resultados obtenidos en cada uno de los casos, ¿qué ángulo producirá el mayor volumen del cono?	¿Cuáles son las características de un círculo, de un sector circular y de un cono de revolución? ¿Cómo puedes formar un cono recto a partir de tres sectores circulares con diferentes ángulos, trazados y recortados de planchas circulares, y uniendo los extremos de cada radio sin superponerlos?	¿Qué se puede afirmar sobre la relación entre el valor del ángulo (α) y la altura (h) del cono?
5. Interpretar la solución del modelo matemático.	¿Qué métodos de validación puedes emplear para asegurar que los resultados obtenidos sean aplicables en un contexto real?	¿Cómo se pueden interpretar los resultados matemáticos en el contexto del problema real? ¿Cómo se relacionan los resultados obtenidos con las características reales del vaso que se quiere diseñar?	¿Qué otros factores deberían considerarse para determinar si este diseño es el más adecuado para su uso práctico? ¿Cómo se puede generalizar la solución encontrada para aplicarla en la fabricación de otros tipos de vasos o envases similares?

6. Validar la solución en el contexto real.	¿Qué nuevas preguntas o supuestos se pueden plantear si se ajustan las condiciones del problema?	¿Cómo podríamos modificar el diseño del vaso para que tenga diferentes volúmenes, pero a partir de una misma plancha?	¿Cómo influye la forma del vaso en la facilidad para beber y en su estabilidad cuando se lo coloca sobre una superficie plana? ¿De qué manera los resultados reales obtenidos pueden modificar o mejorar el modelo inicial? ¿Qué aspectos del modelo deben revisarse si los resultados no encajan perfectamente en la situación real?

Por tanto, se reconoce la importancia, a partir de la práctica docente, de proporcionar oportunidades de aprender a través de la indagación matemática empleando estrategias que estimulen el pensamiento crítico, creativo y las habilidades de resolución de problemas en los estudiantes por medio de la participación activa en actividades de aprendizaje de manera permanente (Organización del Bachillerato Internacional, 2021, p. 14).

Es decir, los docentes diseñarán, desde la sesión de clase, situaciones (auténticas), experiencias, actividades y estrategias que permitan alcanzar los niveles de logro de los estudiantes en cada una de las competencias matemáticas, para lo cual utilizarán todos los recursos y materiales disponibles en la institución.

En este contexto, a continuación se presenta otra propuesta de abordaje para la situación problemática "Diseño y construcción de paredes ecológicas con botellas plásticas", esta vez basada en las fases del ciclo de modelización.

Situación: Diseño y construcción de paredes ecológicas con botellas plásticas

Un grupo de estudiantes ha decidido construir, experiencialmente, paredes en su institución educativa (IE) utilizando botellas plásticas llenas de arena como principal material de construcción.

Fuente: Primas Project

Fuente: Primas Project

Fuente: Primas Project

Este proyecto, además de sensibilizar sobre la importancia de contar con ambientes educativos adecuados, contribuye a reducir los desechos plásticos y fomenta prácticas sostenibles en la construcción

Fuente: Primas Project

Fuente: Primas Project

Tabla 2: Propuesta de abordaje basada en las fases del ciclo de modelización

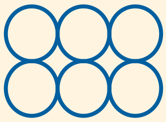
Orientaciones del docente en el ciclo de modelización	Acciones del estudiante en el ciclo de modelización
Tramo 1: De la situación real (SR) a la representación mental de la situación (RMS) Identificamos aspectos clave de la situación para su representación, formulando preguntas como las siguientes: • ¿Cuántas botellas se necesitarán para construir las paredes de la IE? • ¿Cuál será la altura de la pared? • ¿Cómo encajan las botellas entre sí? • ¿Cuánta arena se requerirá para rellenar las botellas? • ¿Cuánto cemento será necesario para cubrir los huecos? • ¿Cómo se resolverán las esquinas? • ¿Qué pasa con las puertas y las ventanas? ¿Y con el tejado?	**Tramo 1: Transitar de la situación real (SR) a la representación mental de la situación (RMS),** El estudiante construye una representación mental clara del problema que debe resolver. Para ello, realiza lo siguiente: • Analiza la situación real. • Identifica las variables clave del problema, como la altura y el diámetro de las botellas, la altura del edificio y la forma en que las botellas encajan entre sí. • Formula preguntas iniciales para aclarar su comprensión del problema, como “¿Cuántas botellas hacen falta para un edificio como este?” y “¿Cómo funcionan las esquinas y las puertas?”. **El estudiante puede explorar las siguientes preguntas para promover la indagación:** • ¿Cuántas botellas se necesitarán para construir las paredes de la IE? (Pregunta fáctica) • ¿Cuál será la altura de la pared? (Pregunta fáctica) • ¿Cómo encajan las botellas entre sí? (Pregunta fáctica) • ¿Cuánta arena se requerirá para rellenar las botellas? (Pregunta abierta) • ¿Cuánto cemento será necesario para los huecos? (Pregunta abierta) • ¿Cómo se resolverán las esquinas? (Pregunta fáctica) • ¿Qué pasa con las puertas y las ventanas? ¿Y con el tejado? (Pregunta fáctica) • ¿Cuál es la altura y el diámetro de las botellas? (Pregunta conceptual) • ¿Cómo afecta el tamaño de las botellas al diseño del edificio? (Pregunta abierta) • ¿Qué otros factores debemos considerar al construir un edificio con botellas? (Pregunta abierta)

Tramo 2: De la representación mental de la situación (RMS) al modelo real (MR)

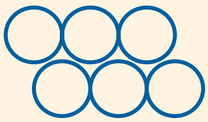
Comenzaremos abordando un planteamiento práctico para resolver la siguiente pregunta: ¿cuántas botellas serán necesarias para construir las paredes de la IE?

Para simplificar de manera consciente la situación, asumiremos que el total de paredes consiste en 4 muros de igual tamaño, sin ventanas. Además, consideraremos que el número de botellas no variará de manera significativa si se apilan en forma cuadrada.

De esta forma



En lugar de esta



Tramo 2: Simplificar el problema real a un modelo real

El estudiante simplifica el problema real a un modelo real. Para ello, realiza lo siguiente:

- Simplifica el problema al identificar los aspectos más relevantes para el cálculo, como asumir que hay 4 paredes del mismo tamaño y que no hay ventanas. También debe considerar cómo estas simplificaciones pueden facilitar los cálculos iniciales y ser consciente de las limitaciones de estas suposiciones.
- Selecciona qué variables y características del problema real son esenciales para modelarlo matemáticamente.

El estudiante puede explorar las siguientes preguntas para promover la indagación:

- ¿Cuántas paredes del mismo tamaño se utilizarán en la edificación? (Pregunta fáctica)
- ¿Qué suposiciones podrían ser problemáticas en el proceso de simplificación y cómo podrían afectar la precisión de los cálculos? (Pregunta abierta)
- ¿Cuántas botellas serán necesarias para construir las paredes de la IE? (Pregunta fáctica)

Tramo 3: Del modelo real (MR) al modelo matemático (MM)

Analizamos y representamos la situación mediante un modelo matemático de la siguiente manera:

- Contamos el número de botellas en una fila (en este caso, 25).
- Estimamos el número de filas (no se ven todas). Solo se pueden contar claramente 7 filas superiores, lo que representa aproximadamente un tercio de la altura total. Por lo tanto, estimamos que hay alrededor de 20 filas (3 x 7).
- Calculamos el número de botellas por pared multiplicando estos dos valores (25 x 20 = 500 botellas) y luego multiplicamos por 4 paredes, suponiendo que todos son del mismo tamaño.
- Así, obtenemos que la edificación requiere aproximadamente 2000 botellas (4 x 500).

Interpretamos y evaluamos el proceso de modelización para su discusión. Sin embargo, dado que se trata de un ciclo de modelización, siempre es posible mejorar la propuesta volviendo a analizar otras cuestiones planteadas, como:

Tramo 3: Matematizar el modelo real a un modelo matemático

El estudiante analiza y modela matemáticamente el modelo real. Para ello, realiza lo siguiente:

- Traduce la situación simplificada a un modelo matemático.
- Cuenta el número de botellas por fila, estima el número de filas, y calcula el número total de botellas necesarias para los 4 paredes.
- Determina cómo se apilan las botellas (de forma cuadrada o con menos espacio) y utiliza esta información para plantear ecuaciones que representen el problema.

El estudiante puede explorar las siguientes preguntas para promover la indagación:

- ¿Cómo se calcula el número total de botellas necesarias para un muro? (Pregunta conceptual)
- ¿Qué implicaciones tiene la disposición de las botellas en el número total necesario? (Pregunta abierta)
- ¿Qué otras disposiciones de las botellas podríamos considerar para optimizar la construcción? (Pregunta abierta)
- ¿Cuál es el tamaño exacto de las botellas? ¿Podríamos estimarlo? (Pregunta fáctica)
- ¿Cuánta arena necesitaremos? (Pregunta abierta)

- ¿Cuál es el tamaño exacto de las botellas? ¿Podríamos estimarlo?, ¿cómo?
- ¿Cuánta arena necesitaremos? (Por ejemplo, 2000 botellas de un litro podrían requerir de 2 a 3 toneladas, ¿por qué?).
- Además, sería necesario diseñar un plano adecuado para la construcción de las paredes.

Tramo 4: Del modelo matemático (MM) a resultados matemáticos (RM)

Simplificamos y representamos el apilamiento de las botellas de diferentes maneras. Por ejemplo, encajándolas con menos espacio entre ellas, como se muestra en la figura A (sin cemento entre filas) o en la figura B (con cemento entre filas).

Figura A

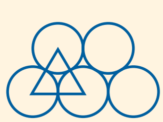
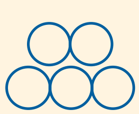


Figura B



Analizamos cómo varía la cantidad de botellas necesarias según las diferentes disposiciones, con o sin cemento entre las filas.

Tramo 4: Buscar una solución trabajando matemáticamente a partir del modelo matemático

El estudiante aplica procedimientos matemáticos para resolver el modelo.

- Calcula el total de botellas necesarias multiplicando el número de botellas por fila, por el número de filas, y finalmente, por la cantidad de paredes.
- Explora diferentes estrategias para optimizar el uso de botellas, considerando la inclusión de cemento entre ellas o variando su disposición. Por ejemplo:

  Sin cemento:

  » La longitud de cada fila en la pared se determina multiplicando el diámetro de una botella por el número de botellas en esa fila.

- Calculamos la longitud de una fila y la altura entre filas usando las fórmulas dadas, y determinamos el número total de botellas para cada configuración.
- Registramos nuestros cálculos en una tabla para comparar visualmente las diferencias entre las configuraciones.
- Verificamos si los resultados son coherentes y consideramos posibles ajustes para mejorar la precisión o eficiencia del modelo.

» La altura entre las filas equivale a la altura del triángulo formado entre ellas, que puede calcularse aplicando el teorema de Pitágoras o midiendo un modelo físico con tres botellas. Esta altura se expresa como √ **3/2** × diámetro, lo que equivale aproximadamente al 87 % del diámetro de la botella

» Concluye que este procedimiento permite un ahorro del 13 % en los huecos entre las botellas, aunque al final de cada fila se generen huecos más grandes.

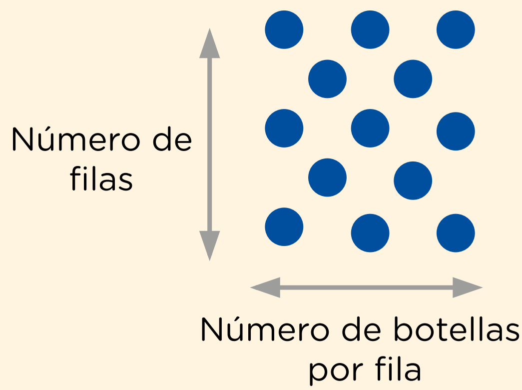
Con cemento:

» La altura entre las filas es aproximadamente igual al diámetro de cada botella. Por lo tanto, es razonable suponer que la altura total de la paredes equivalente al diámetro de la botella multiplicado por el número de filas.

En ambos modelos (con y sin cemento), se reduce el número de botellas necesarias en una por cada dos filas. Esto significa que podemos calcular y representar en una tabla el número total de botellas necesarias para cada pared. Por ejemplo:

Número de filas de botellas (*r*)						
6	9	15	21	27	33	39
5	8	13	18	23	28	33
4	6	10	14	18	22	26
3	5	8	11	14	17	20
2	3	5	7	9	11	13
1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7

Número de botellas de la fila más larga (*n*)



- Por ejemplo, si asumimos que la fila más larga de la pared tiene 25 botellas y hay 20 filas en total, esta disposición necesitará solo 10 botellas menos, es decir, 490 botellas por cada muro.

El estudiante puede explorar las siguientes preguntas para promover la indagación:

- ¿Cuántas botellas se necesitan para completar las 4 paredes según el cálculo inicial? (Pregunta conceptual)
- ¿Cómo variaría el número de botellas necesarias si ajustamos el grosor del cemento entre ellas? (Pregunta abierta)
- ¿Qué otros métodos matemáticos podríamos aplicar para obtener una solución más precisa? (Pregunta abierta)
- ¿Qué factores adicionales deberíamos considerar para optimizar la distribución de las botellas en las paredes? (Pregunta abierta).

Tramo 5: De los resultados matemáticos (RM) a los resultados reales (RR)

El análisis del procedimiento realizado por los estudiantes debe confirmar la coherencia de su razonamiento al responder la pregunta: ¿cuántas botellas son necesarias para construir cualquier edificio rectangular? Para lograrlo, es esencial fomentar la **interpretación de los resultados**, ayudando a los estudiantes a comprender el significado de los cálculos obtenidos en relación con la situación real planteada.

Asimismo, es necesario **promover la comparación** de los resultados con la realidad, asegurándose de que los estudiantes verifiquen si estos son coherentes con los parámetros del problema. Además, se debe **incentivar la reflexión crítica** sobre las suposiciones simplificadas utilizadas en el modelo matemático, identificando posibles fuentes de error o discrepancias.

También debe **guiar la validación del modelo**, evaluando si es adecuado para representar la situación real. En caso de encontrar inconsistencias, debe motivar a los estudiantes a realizar ajustes o modificaciones en el modelo.

Finalmente, **facilitar la extrapolación** de los resultados, alentando a los estudiantes a aplicar el modelo en otros contextos o iniciar un nuevo ciclo de modelización si es necesario.

Tramo 5: Interpretar la solución del modelo matemático

El estudiante interpreta los resultados obtenidos del modelo matemático y los compara con la situación real, para ello:

Evalúa si el número calculado de botellas es razonable y determina si el modelo utilizado refleja adecuadamente el problema real. Si hay discrepancias, el estudiante puede identificar áreas donde el modelo necesita ajustes. En ese sentido:

Define las variables:

- *h:* Altura de la pared
- *a:* Ancho de la pared
- *d:* Diámetro de la botella
- *n:* Número de botellas en una fila
- *f:* Número de filas
- *B:* Número de botellas en el muro
- *T:* Número total de botellas

Establece la relación entre dichas variables:

- El número de botellas en una fila n se puede calcular como el ancho de la pared dividido entre el diámetro de la botella: $n = a/d$
- El número de filas f es la altura de la pared dividida entre el diámetro de la botella: $f = h/d$

- El número de botellas en la pared B es el producto del número de botellas por fila y el número de filas: $B=n\times f=a/d\times h/d=a\times h/d^2$
- Si hay cuatro muros de igual tamaño, el número total de botellas T será: $T=4\times B=4\times a\times h/d^2=4\times a\times h/d^2$
- El área total de los cuatro muros A es: $A = 4 \times a \times h$
- Finalmente, el número total de botellas T en función del área total de las paredes y el diámetro de las botellas será: $T = A/d^2$

El estudiante puede explorar las siguientes preguntas para promover la indagación:

- ¿El número calculado de botellas refleja adecuadamente las necesidades del proyecto? (Pregunta abierta)
- ¿Qué factores podrían haber sido subestimados en nuestra solución? (Pregunta abierta)
- ¿Es la solución obtenida aplicable a diferentes tipos de construcciones con botellas o requiere ajustes? (Pregunta abierta)

Tramo 6: De los resultados reales (RR) al modelo real (MR)

A partir de las ecuaciones finales, podemos estimar el número de botellas necesarias. La última ecuación, en particular, no considera la presencia de puertas ni ventanas; simplemente establece que cada botella ocupa un área de muro equivalente al cuadrado de su diámetro. Esta relación puede ser utilizada desde el principio para abordar situaciones similares, lo que proporciona una base sencilla pero efectiva para calcular la cantidad de botellas necesarias en construcciones futuras.

Tramo 6: Validar la solución en el contexto real

El estudiante valida la solución obtenida, comparándola con el problema real y considerando si las respuestas son coherentes con la situación real. Para ello, realiza lo siguiente:

- Plantea nuevamente el problema con nuevas variables o suposiciones, como incluir ventanas o ajustar la disposición de las botellas.
- Si la solución es válida, el estudiante podría extrapolar el modelo para otros contextos similares o comenzar un nuevo ciclo de modelación para refinar aún más su solución.

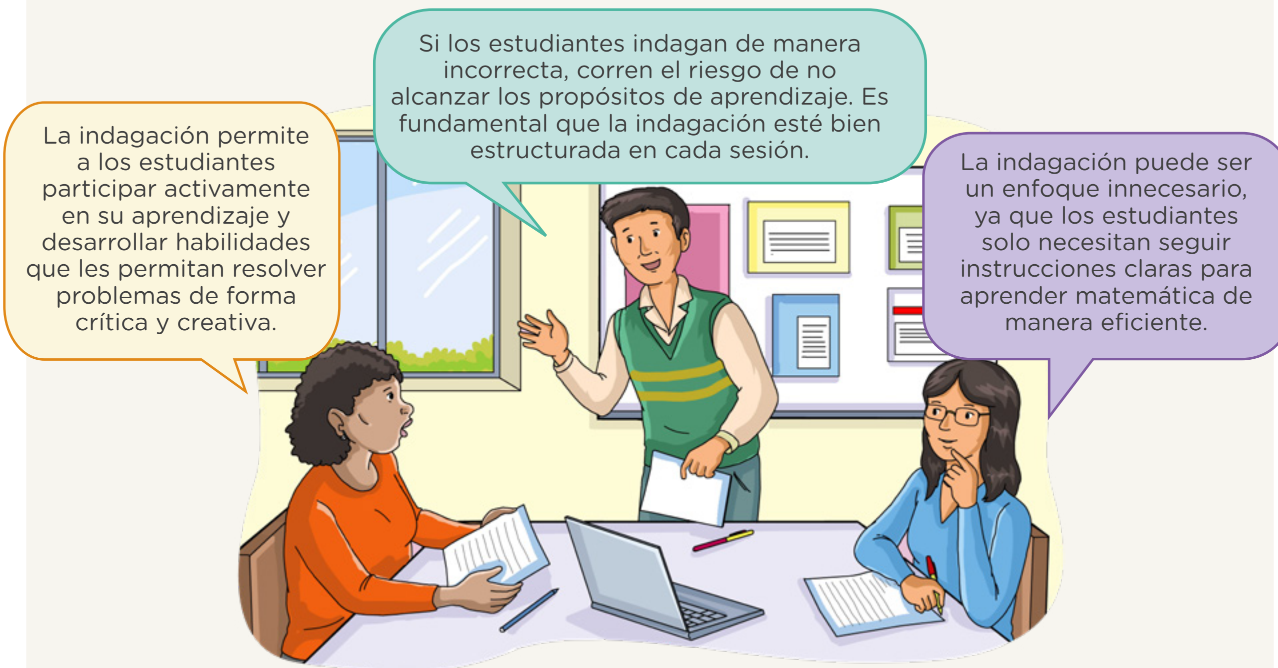
El estudiante puede explorar las siguientes preguntas para promover la indagación:

- ¿Los resultados obtenidos son consistentes con el problema planteado? (Pregunta abierta)
- ¿Cómo podríamos ajustar nuestro modelo para incluir ventanas y puertas en la construcción? (Pregunta abierta)
- ¿Qué otros elementos deberíamos considerar en un nuevo ciclo de modelización para mejorar la precisión de nuestra solución? (Pregunta abierta)

Capítulo 4

¿Por qué es importante la indagación en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática?

En una reunión de planificación, los docentes reflexionan sobre la importancia de la indagación en el proceso educativo. A continuación, se presentan sus observaciones:



Al reunirse, los docentes destacaron la relevancia de la indagación en el aprendizaje de la matemática. Mientras algunos subrayaron la importancia de una estructura clara para garantizar el progreso, otros cuestionaron su necesidad. Sin embargo, la indagación es importante debido a que ofrece a los estudiantes la oportunidad de ser protagonistas de su aprendizaje y de explorar conceptos y situaciones de manera autónoma. A través de este enfoque, desarrollan habilidades para resolver problemas, pensar críticamente y aplicar sus conocimientos en diversos contextos.

La indagación actúa como un motor que impulsa el aprendizaje profundo; permite a los estudiantes conectar la matemática con su entorno, explorar soluciones creativas y generar un entendimiento más completo de los conceptos. Al invitar a la indagación en el aula, se fomenta la resolución de problemas y se prepara a los estudiantes para enfrentar desafíos futuros de manera crítica y reflexiva.

Para señalar la importancia de la indagación en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, es fundamental tener en cuenta que esta es una actividad polifacética que involucra la observación, la formulación de preguntas, la búsqueda de información en diversas fuentes confiables, el diseño de investigaciones, y la revisión y el análisis de resultados basados en evidencia. Además, emplea recursos o herramientas tecnológicas para **adquirir, analizar e interpretar datos, formular respuestas, explicaciones y predicciones, y comunicar resultados,** lo que implica desarrollar **el pensamiento lógico y crítico**, así como la flexibilidad para considerar explicaciones alternativas (Ariza y otros, 2016, p. 298).

En esa misma línea, la Comisión Europea (2015) define a la indagación como un proceso complejo de construcción de significados y modelos conceptuales coherentes, en el que los estudiantes se cuestionan, investigan para encontrar respuestas, comprenden y construyen nuevo conocimiento, y comunican su aprendizaje a otros aplicando este conocimiento de forma productiva a situaciones no familiares.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente y en línea con el enfoque centrado en la resolución de problemas del Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB), los conocimientos matemáticos necesarios para abordar problemas concretos deben construirse de manera progresiva. Esta secuencia permite transformarlos en métodos y técnicas que puedan aplicarse de manera eficiente en la resolución de problemas. A su vez, este proceso fomenta el desarrollo de nuevas ideas matemáticas, teorías y campos de aplicación, con lo que se amplían las posibilidades de innovación y exploración en diversas áreas. Además, las conexiones entre diferentes nociones y objetos matemáticos desempeñan un papel fundamental en el desarrollo de las competencias matemáticas.

En consecuencia, en la educación matemática basada en la indagación, es fundamental que los estudiantes no trabajen con problemas aislados, por desafiantes que puedan ser. Enfocarse solo en problemas puntuales impide que desarrollen conceptos matemáticos más amplios y profundos, necesarios para enfrentar situaciones de mayor complejidad (Artigue, 2017, p. 600).

Desde la práctica pedagógica, es crucial diseñar experiencias de aprendizaje que permitan seleccionar preguntas y tareas adecuadas para fomentar una educación matemática basada en la indagación. Esto implica considerar las necesidades de aprendizaje de los estudiantes, su potencial y la atención a la diversidad en el aula.

Es necesario asegurar una organización y progresión coherente en las actividades, teniendo en cuenta las características de la matemática como disciplina formal y el desarrollo de competencias matemáticas, con un énfasis en la interacción con el mundo real (*Learning Through Inquiry*, 2011, como se citó en Artigue, 2017, p. 601).

Artigue (2017) señala que algunas ideas matemáticas resultan indirectamente accesibles a nuestros sentidos físicos, aun cuando surgen de situaciones del mundo real. Por ello, es necesario elaborar una diversidad de situaciones o tareas que involucren una rica diversidad de representaciones semióticas[1], como gráficos, tablas, figuras, sistemas simbólicos, representaciones informáticas, entre otros, así como acciones corporales y el empleo de un lenguaje matemático acorde al tránsito entre los ciclos educativos y el progreso de las competencias matemáticas.

Asimismo, para que los estudiantes desarrollen actividades de indagación, pueden estas ser diseñadas a partir de algunas ideas o construcciones preexistentes, o a través de prácticas recurrentes que favorezcan el desarrollo de sus habilidades de indagación y la comprensión de cómo llevar a cabo su propia indagación de principio a fin. Es importante tener en cuenta que existen niveles de indagación que ayudan a los estudiantes a avanzar hacia un aprendizaje profundo, como la indagación guiada, la estructurada, la constatada y la abierta. La continuidad de estos niveles se centra en cuánta información (por ejemplo, la pregunta guiada, el procedimiento y los resultados esperados) se proporciona a los estudiantes y cuanta orientación va a proporcionar el maestro (Hernández, 2012).

De acuerdo con lo señalado en el párrafo anterior, es importante considerar en la práctica docente los niveles de indagación, tal como se muestra en el siguiente gráfico:

[1] "Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros" (Duval, 2004, p. 14).

Figura 4: Niveles de indagación matemática

Baja iniciativa del estudiante

INDAGACIÓN ESTRUCTURADA (2)

- Iniciativa intermedia del estudiante.
- Los estudiantes reciben la pregunta, pero el procedimiento/método es proporcionado por el docente.
- Los estudiantes ya conocen el resultado, lo que permite validar el procedimiento.

INDAGACÍON CONSTATADA (1)

- Baja iniciativa del estudiante.
- Procedimiento paso a paso completamente proporcionado por el docente.
- La pregunta, los recursos y los resultados son controlados por el docente.
- Los estudiantes siguen las indicaciones y generan una explicación.

INDAGACIÓN GUIADA (3)

- Mayor iniciativa del estudiante.
- El docente proporciona la pregunta y los recursos, pero los estudiantes diseñan el procedimiento y explican los resultados.
- El docente actúa como facilitador en lugar de controlar el proceso.

INDAGACIÓN ABIERTA (4)

- Alta iniciativa del estudiante.
- Total libertad para los estudiantes en la elección de la pregunta, el método y el uso de los recursos.
- El docente actúa únicamente como guía o apoyo en casos necesarios.

Alta iniciativa del estudiante

Fuente: Adaptado de López, C. (2012).

Las acciones realizadas tanto por los estudiantes como por los docentes en cada nivel mostrado se pueden evidenciar con claridad en la siguiente tabla:

Tabla 3: Acciones realizadas en cada nivel de indagación

Niveles de indagación	Indagación constatada	Indagación estructurada	Indagación guiada	Indagación abierta
Estudiantes	Los estudiantes confirman un principio a través de una actividad cuando se conocen los resultados de antemano.	Los estudiantes investigan una pregunta que el docente presenta a través de un procedimiento establecido.	Los estudiantes investigan una pregunta presentada por el docente usando procedimientos diseñados y seleccionados por ellos mismos.	Los estudiantes investigan las preguntas que se formulan a través de procedimientos diseñados y seleccionados también por ellos mismos.
Información que proporciona el docente	Preguntas, procedimientos, resultados.	Preguntas y procedimientos.	Preguntas.	

Fuente: Hernández (2012)

Por todo lo señalado, resulta de suma importancia implementar en el aula la indagación y sus niveles.a. Para llevarlo a cabo, se debe considerar el ciclo y el nivel de logro real en el que se encuentran los estudiantes respecto a las competencias matemáticas, su autonomía y la mediación docente.

Referencias bibliográficas

Ariza, M. R., Aguirre, D., Quesada, A., Abril, A. M. y García. F. J. (2016). ¿Lana o metal? Una propuesta de aprendizaje por indagación para el estudio de las propiedades térmicas de materiales comunes. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, 15*(2), 297-311. https://reec.uvigo.es/volumenes/volumen15/REEC_15_2_7_ex1017.pdf

Artigue M., Baptist P., Harlen W. y Léna, P. (2012). *Learning through inquiry.* The Fibonacci Project. http://www.fibonacci-project.eu/

Artigue, M. (2017). ¿Qué es la educación matemática basada en la indagación? La Gaceta de la RSME, 20(3), 593-609. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1416

Belcher, P. (2022). *Matemáticas: aplicaciones e interpretación* (1.ª ed.). Oxford University Express.

Boaler, J. (2016). *Mentalidades matemáticas. Cómo liberar el potencial de los estudiantes.* Jossey-Bass.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 38 (2), 86-95.

Borromeo, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behaviour. Journal für Mathematik didaktik, 31(1), 99-118.

Borromeo, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano* (Myriam Vega, Trad.). Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Espinoza, B. (2015). *Base media del trapecio y aprehensiones en el registro figural: una secuencia didáctica con el uso del GeoGebra con estudiantes del nivel secundario* [Tesis de maestría]. Pontificia Universidad Católica del Perú. https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/ handle/20.500.12404/6745

García-García, F. J., Quesada-Armenteros, A., Romero Ariza, M. y Abril Gallego, A. M. (2019). Promover la indagación en matemáticas y ciencias: desarrollo profesional docente en primaria y secundaria. *Educación XX1,* 22(2), 335-359. https://doi.org/10.5944/educXX1.23513

Guerrero-Ortiz, C. y Mena-Lorca, J. (2015). Modelación en la enseñanza de las matemáticas: Matemáticos y profesores de matemáticas, sus estrategias. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias, 10*(1), 1-14.

Hernández, C. (2012). *Utilización de la indagación para la enseñanza de las ciencias en la E. S. O.* [Trabajo de fin de máster]. Universidad de Valladolid. https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/3470/TFM-G%20167.pdf?sequence=1

Huincahue Arcos, J., Borromeo-Ferri, R. y Mena-Lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(1), 99-115.

Lucero, M., Schellens, T., y Valcke, M. (2013). Teachers' Beliefs and Self- Reported Use of Inquiry in Science Education in Public Primary Schools. *International Jornal of Science Education*, 35(8), 1407-1423.

Ministerio de Educación. (2019). *Guía metodológica de Matemática. Tercer grado.*

Ochoa-Angrino, S., Montes-González, J. y Rojas-Ospina, T. (2018). Percepción de habilidad, reto y relevancia como predictores de compromiso cognitivo y afectivo en estudiantes de secundaria. *Universitas Psychologica, 17*(5). http://doi.org/10.11144/Javeriana.upsy17-5.phrr

Organización del Bachillerato Internacional. (s. f.). *Enfoques del aprendizaje y enfoques de la enseñanza en el Programa de los Años Intermedios.* https://resources.ibo.org/myp/works/ myp_11162-425069?lang=es&root=1.6.2.4.5

Organización del Bachillerato Internacional. (2014). *El Programa de los Años Intermedios. De los principios a la práctica.* https://www.sas-teach.com/resources/PAI/Principiosalapr%C3%A1ctica.pdf

Organización del Bachillerato Internacional. (2019). *Programa del diploma. Guía de matemáticas: Análisis y enfoques* (NM-NS).

Organización del Bachillerato Internacional. (2021). *Programa de la escuela primaria. El aprendizaje y la enseñanza.* https://resources.ibo.org/pyp?lang=es

Primas Project. (s. f.). *PD Modules.* Utrecht University. https://primas-project.eu/modules/