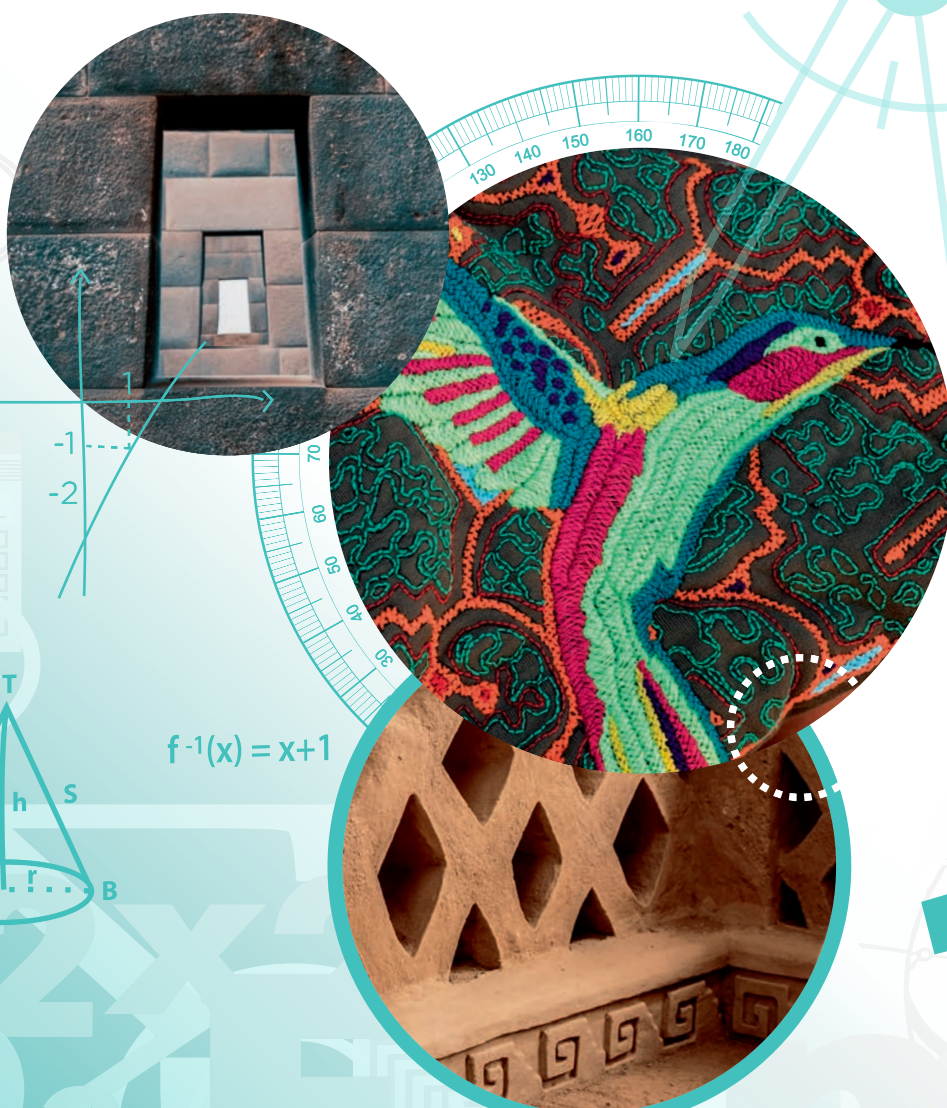
SECUNDARIA

Fichas de MATEMÁTICA



1

REPÚBLICA DEL PERÚ

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

El ciudadano que queremos

El estudiante se reconoce como persona valiosa y se identifica con su cultura en diferentes contextos.

El estudiante propicia la vida en democracia a partir del reconocimiento de sus derechos y responsabilidades y de la comprensión de los procesos históricos y sociales de nuestro país y del mundo.

El estudiante practica una vida activa y saludable para su bienestar, cuida su cuerpo e interactúa respetuosamente en la práctica de distintas actividades físicas, cotidianas o deportivas.

El estudiante aprecia manifestaciones artístico-culturales para comprender el aporte del arte a la cultura y a la sociedad, y crea proyectos artísticos utilizando los diversos lenguajes del arte para comunicar sus ideas a otros.

El estudiante se comunica en su lengua materna, en castellano como segunda lengua(*) y en inglés como lengua extranjera de manera asertiva y responsable para interactuar con otras personas en diversos contextos y con distintos propósitos.

El estudiante indaga y comprende el mundo natural y artificial utilizando conocimientos científicos en diálogo con saberes locales para mejorar la calidad de vida y cuidando la naturaleza.

El estudiante interpreta la realidad y toma decisiones a partir de conocimientos matemáticos que aporten a su contexto.

El estudiante gestiona proyectos de emprendimiento económico o social de manera ética, que le permiten articularse con el mundo del trabajo y con el desarrollo social, económico y ambiental del entorno.

El estudiante aprovecha responsablemente las tecnologías de la información y de la comunicación (TIC) para interactuar con la información, gestionar su comunicación y aprendizaje.

El estudiante desarrolla procesos autónomos de aprendizaje en forma permanente para la mejora continua de su proceso de aprendizaje y de sus resultados.

El estudiante comprende y aprecia la dimensión espiritual y religiosa en la vida de las personas y de las sociedades.

Perfil de egreso
de la Educación Básica

(*) Este aprendizaje es para aquellos estudiantes que tienen como lengua materna una de las 48 lenguas originarias o lengua de señas, y que aprenden el castellano como segunda lengua.

Currículo Nacional

Fichas de
MATEMÁTICA

1

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Fichas de Matemática 1

Este material educativo, *Fichas de Matemática 1* para estudiantes de primer grado de Educación Secundaria, ha sido elaborado por la Dirección de Educación Secundaria para promover el desarrollo de las competencias “Resuelve problemas de cantidad”, “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”, “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización” y “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” propuestas en el Currículo Nacional de Educación Básica.

Edición
© Ministerio de Educación
Calle Del Comercio N.° 193, San Borja
Lima 15021, Perú
Teléfono: 615-5800
www.minedu.gob.pe

Elaboración de contenidos
Larisa Mansilla Fernández
Ólber Muñoz Solís
Juan Carlos Chávez Espino
Hugo Luis Támara Salazar
Hubner Luque Cristóbal Jave
Enrique García Manyari
Emilia Gabriela Del Busto Sipán

Especialista en edición
Oscar Emiliano Palomino Flores

Revisión pedagógica
Roxana Pilar Choquepata Vilca

Diseño y diagramación
José Luis Batalla Ugarte
Daniel Zavala Agapito

Corrección de estilo
Sofía Yolanda Rodríguez Barrios
Marco Antonio Vigo Esqueche

Primera edición: setiembre de 2017
Segunda edición: junio de 2019
Primera reimpresión: agosto de 2020
Segunda reimpresión: diciembre de 2020
Tercera reimpresión: agosto de 2021
Tercera edición: noviembre de 2022
Cuarta edición: octubre de 2023
Primera reimpresión: setiembre de 2024

Tiraje
513 499 ejemplares

Impresión
Se terminó de imprimir en octubre de 2024, en los talleres gráficos de Quad/Graphics Perú S. R. L., sito en Av. Los Frutales 344, Urb. Los Artesanos, Ate, Lima-Perú.
RUC N.° 20371828851

Debido a la naturaleza dinámica de internet, las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que se hace referencia en este material educativo pueden tener modificaciones o desaparecer.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N.° 2023-07498

Impreso en el Perú / *Printed in Peru*

En este material se utilizan términos como “el docente”, “el estudiante”, “el profesor” y sus respectivos plurales, así como otras palabras equivalentes en el contexto educativo, para referirse a hombres y mujeres. Esta opción considera la diversidad y respeta el lenguaje inclusivo, y se emplea para promover una lectura fluida y facilitar la comprensión del texto.

PRESENTACIÓN

Estimado estudiante:

Nos complace poner en tus manos el material educativo ***Fichas de Matemática 1***, que, estamos seguros, te ayudará a descubrir la presencia de la matemática en la vida cotidiana y a utilizarla de manera adecuada y creativa en la resolución de problemas vinculados a la realidad.

En su estructura, te proponemos algunos ejemplos de estrategias heurísticas para que las puedas emplear en cada una de las fichas, las cuales se encuentran organizadas en tres secciones: *Construimos nuestros aprendizajes, Comprobamos nuestros aprendizajes y Evaluamos nuestros aprendizajes*.

En la primera sección, *Construimos nuestros aprendizajes*, te presentamos una situación relacionada con la vida cotidiana, que será abordada a través de interrogantes que pretenden movilizar tus capacidades y conocimientos, lo cual te ayudará a comprender el problema, diseñar o seleccionar una estrategia o plan, ejecutar la estrategia y reflexionar sobre lo desarrollado. En esta y las demás secciones vas a contar con información, datos, conocimientos, entre otros, que te ayudarán a gestionar tus aprendizajes de manera autónoma.

En la segunda sección, *Comprobamos nuestros aprendizajes*, te planteamos tres situaciones de contexto, en cuyo desarrollo podrás explicar el proceso de resolución, identificando las estrategias y describiendo los procedimientos utilizados. Este análisis te permitirá plantear otros caminos de resolución, así como identificar errores, aprender de estos y realizar tu propia corrección.

En la tercera sección, *Evaluamos nuestros aprendizajes*, te presentamos situaciones de diversos grados de complejidad en contextos variados y apoyadas en gráficos. Al desarrollar las actividades que contienen, podrás medir de tu progreso teniendo en cuenta criterios de evaluación conocidos de antemano por ti.

Finalmente, puedes desglosar las fichas para desarrollarlas y organizarlas en tu portafolio, de manera que tu docente te brinde retroalimentación u orientación para que puedas seguir mejorando.

Esperamos que con esta experiencia sientas que hacer matemática es un reto posible de alcanzar. Disfrútala.

Ministerio de Educación

Fuente: Shutterstock

CONTENIDO

CONOCIENDO ALGUNAS ESTRATEGIAS

Un buen resolutor de problemas debe llegar a desarrollar la capacidad de resolver un problema con diversos métodos; además, necesita estar en capacidad de combinar estrategias creativamente. En cada etapa de desarrollo de la solución, debemos definir qué estrategia se utilizará en la siguiente fase.

1. Estrategias de comprensión

Lectura analítica

Leer analíticamente un texto es dividirlo en unidades que proporcionen algún tipo de información y, luego, establecer cómo estas partes se interrelacionan y muestran el panorama de lo que se quiere decir. Al leer un problema de manera analítica, uno puede hacerse estas preguntas: ¿quiénes participan en la historia?, ¿qué es lo que no varía a lo largo de la historia?, ¿cuáles son las condiciones del texto?, ¿cuáles son los datos que nos proporciona?, ¿qué datos son relevantes para resolver el problema?, ¿qué debemos encontrar?, ¿qué condiciones se imponen a lo que buscamos?, entre otras interrogantes que ayudarán a que cada estudiante se familiarice con el problema y le pierda temor a resolverlo.

La lectura analítica ayuda mucho en la comprensión lectora del problema, y aporta al proceso de solución. Leer analíticamente no es identificar las palabras claves ni buscar tips para encontrar la variable (estos son procesos mecánicos que no ayudan a comprender cabalmente un problema).

En la vida real, los problemas matemáticos pueden no contener esas palabras claves que aparecen en problemas diseñados para libros de texto, por lo que el estudiante enfocará erradamente un problema si hace uso de este mecanismo.

La lectura analítica es importante en la comprensión de problemas, pues estos textos contienen elementos matemáticos como números, diagramas, relaciones dentro de una historia o un contexto real complejo, por lo que no es lo mismo que leer un cuento o un ensayo. De hecho, hay personas que comprenden perfectamente textos humanísticos, pero no aquellos que contienen elementos matemáticos.

Parafrasear

Parafrasear es decir algo de otro modo para clarificar y comprender un texto. Explicar un problema con nuestras propias palabras ayuda mucho en el proceso de comprensión. Se debe decir que parafrasear no implica aprenderse de memoria un texto y repetirlo; es señalar lo más importante de una historia y expresarlo con palabras, evitando en lo posible particularidades como números, fechas, nombres, locaciones, etc.

Veamos un ejemplo:

Problema	Parafraseo
Jaime fue el organizador de la fiesta de fin de año de su colegio. Él proyectó ganar S/4800, para lo cual repartió 200 tarjetas; pero, lamentablemente, solo se vendieron 130, lo que le causó una pérdida de S/150. ¿Cuánto invirtió en la fiesta?	Una persona organiza una fiesta. Para ganar necesita vender una cantidad de tarjetas; pero vende menos y pierde. Nos piden saber cuánto invirtió en la fiesta.

Se sugiere que se realice una lectura analítica de los problemas, que el estudiante produzca sus propios esquemas de comprensión y realice al menos dos parafraseos por cada problema presentado.

Hacer esquemas

La capacidad de representar una situación compleja mediante esquemas es algo que se va aprendiendo desde los primeros años de escolaridad y continúa en proceso de construcción toda la vida. Hacer e interpretar esquemas son algunas de las capacidades más necesarias en nuestra vida laboral adulta. En diversas situaciones cotidianas se requiere de la esquematización de los sistemas, las situaciones y los procesos, con el fin de comprenderlos mejor. Un esquema apunta a encontrar una estrategia de solución; no existe una relación directa entre hacer un esquema y dar solución a un problema, pero ayuda mucho en este proceso.

2. Estrategias de resolución

Una estrategia importante en la búsqueda de soluciones es representar el problema mediante algún organizador visual. Aquí presentamos algunos organizadores de información que se utilizan frecuentemente en el proceso de resolver problemas matemáticos.

Diagramas de tiras

Se utilizan mayormente cuando la cantidad que interviene en el problema varía en el tiempo o es dividida en partes que se relacionan entre sí.

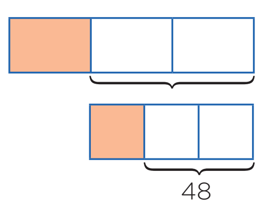
Ejemplo:

La tercera parte de las entradas para el estreno de una película se vendieron días antes de la función, y 1/3 del resto se vendió el día del estreno. Finalmente, quedaron 48 entradas sin vender. ¿Cuál era el número total de entradas previsto para la función de estreno?

Solución:

Cantidad: Número total de entradas.

Elabora un diagrama de tiras.



Diagramas tabulares (tablas)

Se emplean cuando se brinda información sobre características que relacionan dos grupos. También en problemas sobre edades o de proporcionalidad, en los que se debe buscar algún patrón o regla de formación.

Ejemplo:

Dos amigos tienen lápices, borradores y tajadores en sus cartucheras. Hay 8 borradores en total. Mónica tiene el doble de lápices que Felipe, quien tiene 5 tajadores más que lápices. Mónica tiene tantos tajadores como lápices posee Felipe. Mónica tiene 18 útiles y ningún borrador. ¿Cuántos lápices, tajadores y borradores tiene cada uno?

Solución:

Grupo 1: Mónica, Felipe.
Grupo 2: Lápices, borradores, tajadores.

	Lápices	Borradores	Tajadores	TOTAL
Mónica	$2x$	0	x	18
Felipe	x	8	$x + 5$	
TOTAL		8		

Diagramas analógicos

Se suelen utilizar en problemas geométricos. Son dibujos que representan la realidad de manera similar, pero esquemática, sin considerar los elementos irrelevantes para el problema.

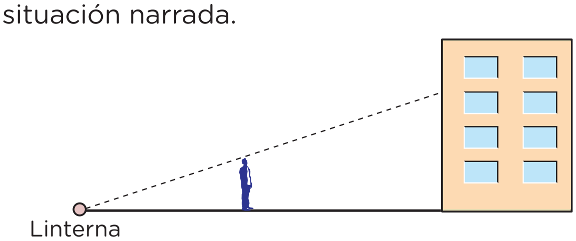
Mediante esta representación es posible visualizar las relaciones entre los datos y las incógnitas.

Ejemplo:

Un hombre de 1,8 m de estatura camina hacia un edificio a razón de 1,5 m/s. Si hay una linterna sobre el suelo a 15 m del edificio, ¿cuánto mide la sombra del hombre sobre el edificio cuando se encuentra a 9 m de este?

Resolución:

Hagamos un diagrama que represente la situación narrada.



Diagramas de flujo

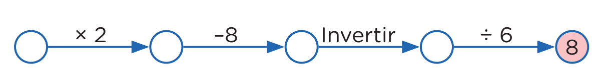
Se emplean cuando una cantidad varía a lo largo de la historia o si tenemos la situación final de esta cantidad. También cuando se dan secuencias de pasos para encontrar objetos matemáticos, entre otras aplicaciones.

Ejemplo:

Un número se duplica, luego se le resta 8 y después se invierten las cifras de este número. Finalmente, se divide por 6 y se obtiene 8. ¿Cuál era el número?

Resolución:

Haremos un diagrama que indique las fases por las que pasó el número.



Diagramas conjuntistas

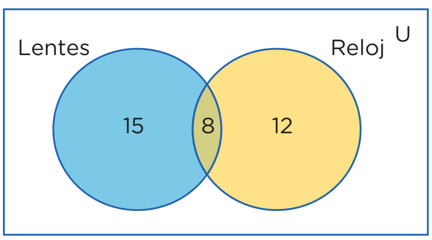
Se suele recurrir a estos cuando se trata de información acerca de dos o más grupos cuyos elementos pueden pertenecer a más de un conjunto. También cuando se deben realizar clasificaciones. Los más conocidos son los diagramas de Venn y los de Carroll.

Ejemplo:

De los 35 estudiantes de un aula, 23 usan lentes y 20 reloj. ¿Cuántos usan ambas cosas?

Resolución:

Grupo 1: Estudiantes que usan lentes.
Grupo 2: Estudiantes que usan reloj.



Diagramas cartesianos

Son de gran utilidad cuando se requiere representar funciones o si tenemos pares ordenados o relaciones entre dos variables.

Ejemplo:

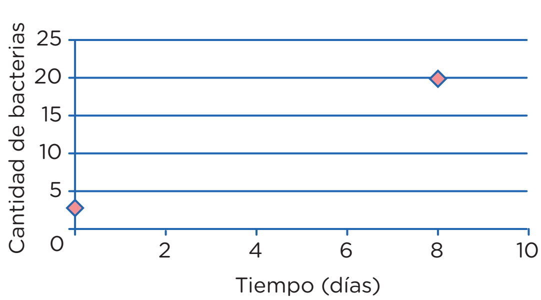
El crecimiento de un grupo de bacterias se da con el paso de los días de manera constante. Al inicio, había 3 bacterias, y después de 8 días llegan a 20. ¿Cuántos días transcurrirán desde el inicio para que la colonia tenga 400 bacterias?

Resolución:

Cantidad:

Organizaremos los datos en un gráfico cartesiano.

Pares ordenados: (0; 3) (8; 20)



Diagramas lineales

Se usan cuando se cuenta con información acerca de una característica de un solo grupo. Generalmente se emplean para ordenar los elementos del grupo con respecto a esa característica.

Ejemplo:

Si tanto Roberto como Alfredo están más alegres que Tomás, mientras que Alberto se encuentra menos alegre que Roberto, pero más alegre que Alfredo, ¿quién está menos alegre?

Resolución:

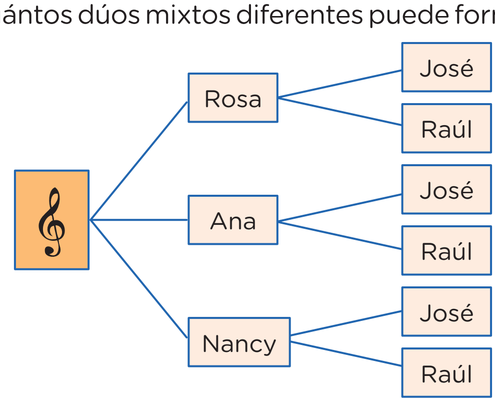
Tomás, Ana, Lidia, Roberto.

Diagrama de árbol

Se suelen utilizar en conteos de casos posibles o para hacer listas sistemáticas. Es la representación gráfica de los principios de adición y multiplicación.

Ejemplo:

Un productor de cumbia quiere armar un dúo mixto (varón y mujer). Puede elegir entre 3 cantantes mujeres y 2 cantantes varones. ¿Cuántos dúos mixtos diferentes puede formar?



3. Otras estrategias

Busca patrones

En algunos problemas es necesario experimentar con varios casos con el fin de encontrar pautas o regularidades que después se podrán emplear para llegar a la solución.

Ejemplo:

El arreglo mostrado se conoce como el triángulo de Pascal.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

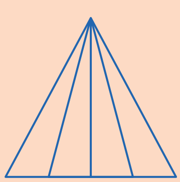
Escribe las tres filas siguientes de este arreglo. Como observas, cada fila empieza por uno. ¿Qué número sigue al 1 en la fila 75?, ¿cuál es la suma de los números que ocupan la fila número 20?, ¿puedes encontrar un patrón en las diagonales del triángulo de Pascal?

Haz una lista sistemática

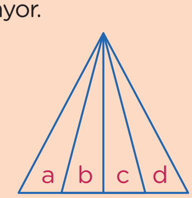
En los casos en que se requiere la enumeración de objetos matemáticos, es conveniente realizar un conteo o listado organizado, con el fin de no dejar de lado ninguna posibilidad. Esta estrategia es muy útil al buscar soluciones en una ecuación polinómica, para encontrar espacios muestrales o resolver problemas de permutaciones o combinaciones.

Ejemplo:

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Pongamos una etiqueta a cada uno de los cuatro triángulos en que se ha dividido el triángulo mayor.



Resolución:

- Contemos ahora los triángulos identificándolos por el número de letras:

  Triángulos con una letra: a-b-c-d

  Triángulos con dos letras: ab-bc-cd

  Triángulos con tres letras: abc-bcd

  Triángulos con cuatro letras: abcd
- En total tenemos: 4 + 3 + 2 + 1 = 10 triángulos.

Generaliza

En algunos problemas puede ser muy útil simbolizar las expresiones o averiguar si lo que piden se refiere a un caso particular de alguna propiedad general; a esto se conoce como *la paradoja del inventor*. A veces, es conveniente investigar más de lo que piden.

Ejemplo:

Halla el valor de $(234\ 756\ 474)^2 - (234\ 756\ 473)^2$.

Solución:

Se observa que elevar al cuadrado cada número y luego realizar la resta sería demasiado laborioso, así que se trata de ver en la estructura del problema alguna particularidad. Lo primero que se observa es que consiste en una diferencia de cuadrados, lo que nos hace recordar las fórmulas algebraicas pertinentes. Además, se aprecia que los números son consecutivos.

- Al generalizar el problema, se observa que se solicita:

  $(n + 1)^2 - n^2$, cuando n vale 234 756 473
- Factorizando por diferencia de cuadrados, se tiene:

  $$(n + 1 + n)\ (n + 1 - n) = (n + 1) + n$$
- Luego, podemos afirmar que, para cualquier n entero positivo, se cumple:

  $$(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1) + n = 2n + 1$$
- Ahora el problema se ha simplificado bastante; para hallar la respuesta, solo basta duplicar el número dado y aumentarle 1.

  Entonces:

  $(234\ 756\ 474)^2 - (234\ 756\ 473)^2 = 469\ 512\ 947$

Particulariza

Conviene siempre utilizar casos particulares para familiarizarse con el problema; de este modo, es posible observar algún método que guíe hacia la solución de un problema genérico.

Ejemplo:

En una tienda de remates te ofrecen un descuento del 12 %, pero, al mismo tiempo, debes pagar el impuesto general a las ventas (18 %). ¿Qué preferirías que calculasen primero, el descuento o el impuesto?

Solución:

- Particularicemos para algunos casos: si el artículo vale S/100 y elijo primero el descuento, termino pagando S/106. Pero, si elijo pagar el impuesto antes, entonces termino pagando la misma cantidad.

- Podemos probar con otros precios y obtener un resultado análogo. Esta experimentación me da pie para inferir que es lo mismo elegir primero el descuento o el impuesto.
- Ahora deberé evaluar mi conjetura.

Razona lógicamente

El razonamiento lógico es muy importante al resolver problemas, pues gracias a él podemos engarzar los pasos y comprender las secuencias y cadenas de razonamientos que se producen en el desarrollo de su solución. Un ejemplo clásico es el siguiente acertijo.

Ejemplo:

José, Jaime, Tito y Rosa son guardias en un museo. Ellos hacen guardia cuatro días a la semana. Dos personas solamente hacen guardia cada día. Nadie hace tres días de guardia seguidos. ¿Cuál de los tres hombres no hace guardia con Rosa?

Solución:

Veamos una lista parcial que muestra los días de la semana en los que cada uno hace guardia:

Dom.	Lun.	Mar.	Miér.	Juev.	Vier.	Sáb.
José	Tito	Rosa	José	Jaime	Tito	Rosa
Jaime						

Empieza por el final

La estrategia de utilizar el pensamiento regresivo se utiliza mayormente en problemas en los cuales tenemos información de una situación final; también para demostrar desigualdades. La combinación de métodos progresivos y regresivos es una potente técnica para demostrar teoremas.

La utilización del razonamiento regresivo nos evitará tener que trabajar con ecuaciones complicadas.

Ejemplo:

El nivel del agua de un pozo desciende 3 cm por debajo de su mitad en cada hora, hasta quedar vacío luego de 4 horas. ¿Qué profundidad tenía el agua inicialmente?

Solución:

- "3 cm debajo de su mitad" se interpreta como $\div 2, -3$.
- Esto ocurre en cada hora y se repite 4 veces, ya que todo el suceso ocurre en 4 horas; de modo que al final el nivel es cero (0).
- Las operaciones directas serían así:

  $x \rightarrow (\div 2, -3, \div 2, -3, \div 2, -3, \div 2, -3) \rightarrow 0$
- Ahora, operando al revés, obtenemos: $x = 90$

Plantea una ecuación

Una de las técnicas de modelación por excelencia a nivel elemental es el planteo de ecuaciones. Lo primordial para poder aplicarla con éxito es el entrenamiento que se tenga en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico. Es conveniente ponerse de acuerdo en cuanto a convenciones generales de redacción para no crear ambigüedades.

Ejemplo:

Dos velas de la misma longitud se encienden al mismo tiempo. La primera se consume en 4 horas y la segunda, en 3. ¿Cuánto tiempo pasa, después de haberse encendido, hasta que la primera vela tenga el doble de longitud que la segunda?

Solución:

- La primera vela se consume en su cuarta parte cada hora.
- La segunda se consume en su tercera parte cada hora.

  Tiene que verificarse; por tanto:

  $L - (1/4)Lx = 2\,[L - (1/3)Lx]$; simplificando:

  $1 - (1/4)\,x = 2 - (2/3)x$; de donde $x = 2{,}4$ horas
- Es decir, pasan 2 horas 24 minutos.

Establece submetas

Muchas veces, para llegar a la solución de un problema, se deben resolver problemas más pequeños. Es como escalar una gran montaña: se sabe que se debe llegar a alturas menores para conquistar la cima. De igual manera, para resolver un problema original, se necesita de un problema auxiliar que sirva de medio.

Ejemplo:

Supongamos que la población actual del Perú es de 33 millones de habitantes y la tasa de crecimiento es de un 5 % anual. ¿En cuánto tiempo se duplicará la población?

Fuente: Shutterstock

Solución:

La primera meta es hallar una fórmula que modele el comportamiento de la población y, solo después de formada, se igualará a 66 millones. Si bien aquí la incógnita es el tiempo, se busca en su lugar la relación entre el tiempo y el número de habitantes.

Utiliza el ensayo y error

Tantear es una estrategia muy útil cuando se hace de forma organizada y evaluando, cada vez, los ensayos que se realizan. En realidad, algunos métodos específicos de solución, como el de regulación o el de aproximaciones sucesivas, se basan en el uso sistemático de numerosos ensayos y sus respectivas correcciones. La idea es que cada rectificación conduzca a un ensayo que se acerque más a la respuesta.

Ejemplo:

Un libro se abre al azar. El producto de las dos páginas observadas en ese momento es 3192. ¿Cuál es el número de las páginas en las que se abrió el libro?

Fuente: Shutterstock

Solución:

- Primero se observa que $50 \times 50 = 2500$, número que no llega; y que $60 \times 60 = 3600$, el cual se pasa. Con esto observamos que los números están en el rango entre 50 y 60.
- 55×56 no puede ser, pues el producto termina en 0. Se quiere que termine en 2 y que los números sean consecutivos.
- Al probar $53 \times 54 = 2862$, el resultado no corresponde.
- Pero, al hacer la prueba con $56 \times 57 = 3192$, se observa que cumple con el resultado que plantea el problema.
- Entonces, las páginas que se observaron fueron la 56 y la 57.

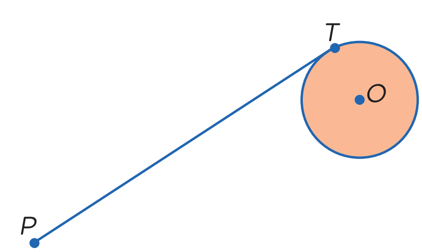
Supón el problema resuelto

Ejemplo:

Usando solo regla y compás, construye una tangente a una circunferencia dada, desde un punto exterior a ella.

Solución:

Para resolver este problema, se supone que se debe hallar la tangente a una circunferencia, trazada desde un punto exterior a ella.



- El punto *T* es de tangencia. Entonces, ¿qué relación existe entre la tangente y algún elemento de la circunferencia? ¿Hay algún teorema que los relacione?
- Existe un teorema que nos dice que el radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia.
- Por tanto, si unimos *O* con *T*, tendremos que *OT* es perpendicular a *PT*.
- Además, como tenemos tres puntos involucrados, *P*, *T* y *O*, es posible hacer un triángulo uniendo el punto *P* con el punto *O*. Se observa que el triángulo es rectángulo.

¿Cómo operamos con fracciones al realizar repartos de la unidad o de un total?

Construimos nuestros aprendizajes

Propósito

Representamos gráfica y simbólicamente las propiedades de las operaciones de adición y sustracción con fracciones, y establecemos relaciones entre sus representaciones. Asimismo, empleamos estrategias y procedimientos para realizar las operaciones de adición y sustracción con expresiones fraccionarias.

Disfrutamos de nuestra gastronomía

Cuando Juana, Julio y José visitaron Arequipa, decidieron probar una *pizza* de rocoto relleno. Ellos recibieron su pedido dividido en tajadas, tal como se muestra en la figura.

José comió tres pedazos y Juana la cuarta parte de la *pizza*. Luego de haber comido los tres, quedó $\frac{1}{8}$ de *pizza*.

Ellos empiezan a conversar sobre cuánto comió cada uno. Ayúdalos a responder:

a. ¿Quién comió más *pizza*, José o Juana?

b. ¿Qué parte de la *pizza* comieron entre los dos?

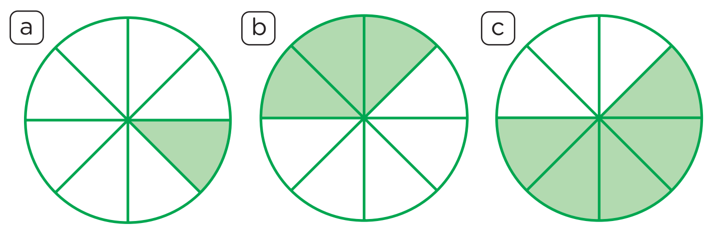
c. ¿Qué parte de la *pizza* comió Julio?

Comprendemos el problema

1. ¿En cuántas partes está dividida la *pizza* de la imagen mostrada?

2. Según la información, ¿cuánto comió José?

3. ¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde a lo que comió José?



4. Expresa mediante una fracción la parte de *pizza* que comió José.

5. Representa de forma gráfica la parte de *pizza* que comió Juana. ¿A qué fracción corresponde?

6. ¿Cuál es la fracción de *pizza* que quedó después de que José, Juana y Julio comieron?

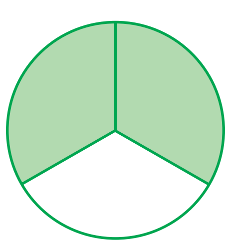
7. ¿Qué piden hallar las preguntas de la situación?

Recuerda

Una fracción permite representar una parte de la unidad. Sus términos son el numerador, que indica las partes que se toman de la unidad, y el denominador, que indica el total de partes en que ella se divide.

Por ejemplo, si se toman 2 partes de un total de 3 partes en las que se ha dividido la unidad, la fracción es $\frac{2}{3}$.

Su representación gráfica es:



Numerador → $\frac{2}{3}$ ← Denominador

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

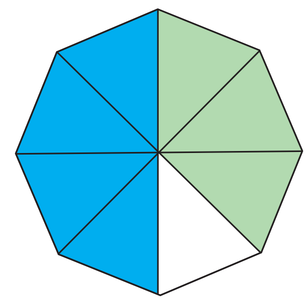
8. Analicemos el siguiente ejemplo: Gloria y Miguel construyen una cometa con forma de octógono regular. Para darle color, Gloria pinta la mitad de la superficie de color azul y Miguel pinta tres octavos de color verde. ¿Qué fracción de la superficie de la cometa pintaron entre los dos? Si la hermana menor de ellos quiere ayudar a pintar el resto, ¿qué fracción de la superficie de la cometa pintaría ella?

Resolución

Representamos gráficamente y coloreamos lo que pintan Gloria y Miguel.

Fracción de la cometa que pinta Gloria: $\frac{1}{2}$

Fracción de la cometa que pinta Miguel: $\frac{3}{8}$



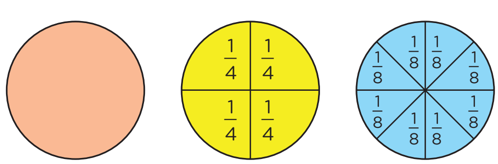
Observamos el gráfico y notamos que siete de las ocho partes en que está dividida la cometa están pintadas, es decir, $\frac{7}{8}$.

Por tanto, la superficie de la cometa que pintaron Gloria y Miguel es $\frac{7}{8}$ y lo que falta pintar corresponde a $\frac{1}{8}$ de la superficie de la cometa, que es lo que pintaría la hermana menor.

9. Describe el procedimiento que realizarías para dar respuesta a las preguntas de la situación.

Ejecutamos la estrategia o plan

10. Observa los círculos con fracciones y completa.



- Cada círculo representa ....
- En el círculo amarillo la unidad está dividida en .... partes. Cada parte es .... de la unidad.
- En el círculo celeste la unidad está dividida en .... partes. Cada parte es .... de la unidad.

Recuerda

Un grupo de fracciones son llamadas homogéneas cuando tienen el mismo denominador, y son fracciones heterogéneas cuando tienen diferentes denominadores.

Por ejemplo:

$\frac{1}{9}$; $\frac{3}{9}$; $\frac{2}{9}$

son fracciones homogéneas.

$\frac{3}{7}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$

son fracciones heterogéneas.

Ten en cuenta

Un par de fracciones son equivalentes si representan la misma parte de un todo. Se obtienen fracciones equivalentes cuando se amplifica o cuando se reduce una fracción.

Por ejemplo, hay infinitas fracciones equivalentes a $\frac{3}{5}$ que se obtienen por amplificación.

$$\frac{3}{5} \xrightarrow{\times 4} \frac{12}{20}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$$

Así también, hay fracciones equivalentes a $\frac{20}{30}$ que se pueden obtener por reducción.

$$\frac{20}{30} \xrightarrow{\div 10} \frac{2}{3}$$

$$\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Recuerda

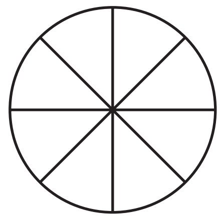
Para sumar o restar fracciones con el mismo denominador (homogéneas), se suman o restan los numeradores y se coloca el mismo denominador.

Por ejemplo:

$$\frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{2}{10} = \frac{1+4+2}{10} = \frac{7}{10}$$

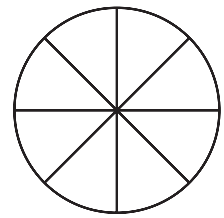
11. Representa en forma gráfica y simbólica (fracción) la parte de la *pizza* que comieron José y Juana. Compara y responde la primera pregunta de la situación.

José



$\frac{\quad}{\quad}$

Juana

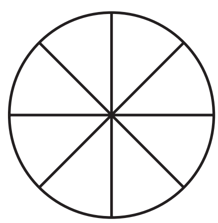


$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{8}$

Respuesta: ....

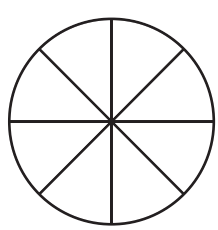
12. Representa gráfica y simbólicamente lo que comieron entre José y Juana. Responde la segunda pregunta de la situación.

José y Juana



Respuesta: ....

13. Representa gráfica y simbólicamente la parte que comieron José yJuana, así como lo que sobró al final. ¿Cuánto falta para completar la unidad? Calcula lo que comió Julio y responde la tercera pregunta.



José y Juana		**Julio**		**Quedó**		**Total**
$\frac{\quad}{\quad}$	+	$\frac{\quad}{\quad}$	+	$\frac{\quad}{\quad}$	=	$\frac{\quad}{\quad}$

Respuesta: ....

Reflexionamos sobre el desarrollo

14. Entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$, ¿cuál es mayor? Explica.

Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito

Representamos gráfica y simbólicamente las operaciones con expresiones fraccionarias y empleamos estrategias de cálculo y procedimientos para realizar dichas operaciones. Asimismo, justificamos las operaciones con expresiones fraccionarias con ejemplos y conocimientos, y corregimos errores si los hubiera.

Situación A: Las elecciones municipales escolares

Para las elecciones municipales escolares, los estudiantes gestionaron recursos por medio de algunas actividades.

Un candidato de primer grado de secundaria distribuyó su presupuesto así:

Actividad	Fracción del presupuesto
Refrigerio	$\frac{1}{2}$ del presupuesto
Publicidad	$\frac{1}{5}$ del presupuesto
Implementación de proyectos	$\frac{1}{4}$ del presupuesto

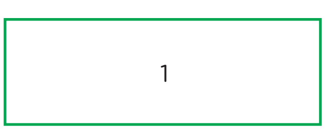
Fuente: Autor/Vía onpe.gob.pe

Si el resto del presupuesto se destinó para impresión de documentos, ¿qué parte del presupuesto se empleó para este concepto?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

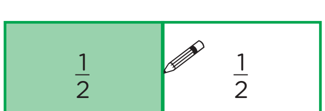
Resolución

De la información de la situación, entendemos que el total del presupuesto corresponde a la unidad. Lo representamos así:



La unidad representa el total del presupuesto.

Como la mitad se destina al refrigerio, hacemos un trazo vertical que permita dividir el rectángulo en dos partes iguales. Luego, pintamos una. Esta representa la mitad del total.

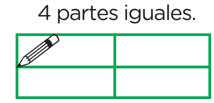


Un medio o la mitad del presupuesto se destinó al refrigerio.

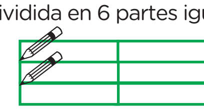
Ahora debemos representar en el mismo rectángulo la parte del presupuesto que se destinó a publicidad, es decir, $\frac{1}{5}$. Para ello, haremos trazos horizontales de modo que la unidad quede dividida también en 5 partes iguales. ¿Será posible?

Ten en cuenta

Si hacemos un trazo horizontal, la unidad quedará dividida en 4 partes iguales.



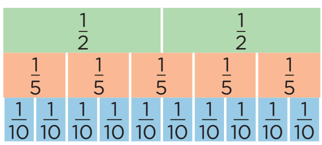
Si hacemos dos trazos horizontales, la unidad quedará dividida en 6 partes iguales.



Entonces, no es posible obtener 5 partes iguales en el rectángulo. Esto ocurre porque la división de la unidad en medios y en quintos no tiene coincidencias. Así que debemos encontrar una fracción equivalente a $\frac{1}{5}$.

Ten en cuenta

Observamos las líneas de las fracciones con el propósito de identificar fracciones equivalentes, es decir, fracciones que representan la misma parte de un todo.



Tenemos:

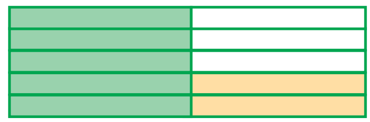
- $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{10}$ son equivalentes.

  $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$

- $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{10}$ son equivalentes.

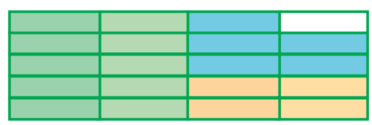
  $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$

Hacemos trazos horizontales para dividir en 10 partes iguales el rectángulo que representa el presupuesto, y tomamos 2 de estas, es decir, $\frac{2}{10}$, lo cual representa el presupuesto destinado a la publicidad. Las pintamos de color amarillo.



Lo destinado a publicidad es $\frac{2}{10}$ y lo destinado a refrigerio es $\frac{1}{2}$ o $\frac{5}{10}$.

Para representar lo destinado a la implementación de proyectos, dividimos el rectángulo con líneas verticales en cuatro partes iguales. Así, el rectángulo queda dividido en 20 partes iguales, donde cada parte representa $\frac{1}{20}$. Cinco de estas partes son $\frac{5}{20}$, que equivalen a $\frac{1}{4}$, lo cual representa el presupuesto destinado a proyectos. Las pintamos con celeste.



I. de proyectos: $\frac{5}{20}$

Publicidad: $\frac{4}{20}$

Refrigerio: $\frac{10}{20}$

Como queda una parte de color blanco, esta es la que representa lo destinado a la impresión de documentos. Es decir, $\frac{1}{20}$ del presupuesto.

Respuesta: Para la impresión de documentos, se destinó $\frac{1}{20}$ del presupuesto.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué se tuvo que dividir la unidad en 10 partes iguales para representar $\frac{1}{5}$ del presupuesto?

2. ¿Qué otro procedimiento podrías emplear para dar respuesta a la situación? Explica.

Recuerda

Utilizando operaciones, pudimos proceder así:

1.° Lo que se asignó a refrigerio, publicidad y proyectos:

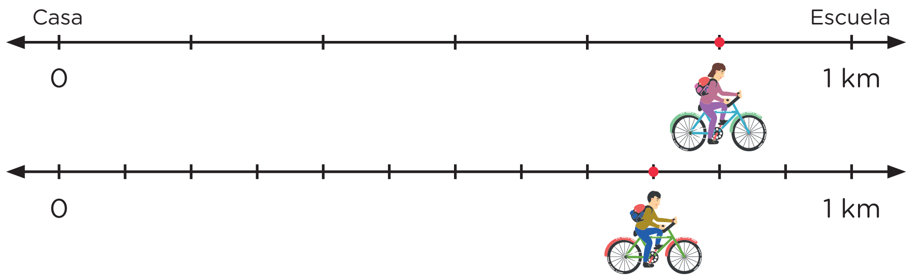
$$\frac{10}{20} + \frac{4}{20} + \frac{5}{20} = \frac{19}{20}$$

2.° Lo que se invirtió en impresión de documentos:

$$1 - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$$

Situación B: Vamos en bicicleta

Laura y Mario usan la bicicleta para ir a estudiar porque es una opción ecológica que beneficia el cuidado del ambiente, de la salud e incluso de su economía. En las siguientes rectas numéricas se observa la representación de las distancias que han recorrido ambos amigos (en un tiempo determinado) para trasladarse de su casa a la escuela.



¿Cuál es la diferencia entre las distancias recorridas por Laura y Mario?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

A partir del gráfico, identificamos que Laura recorrió $\frac{5}{6}$ de 1 km o $\frac{5}{6}$ km, mientras que Mario recorrió $\frac{9}{12}$ de 1 km o $\frac{9}{12}$ km.

Para encontrar la diferencia entre dos fracciones heterogéneas ($\frac{5}{6}$ y $\frac{9}{12}$), debemos **homogeneizar** las fracciones a un común denominador, es decir, buscamos una fracción equivalente a $\frac{5}{6}$ que tenga denominador 12. Para ello, multiplicamos por el factor 2 al numerador y al denominador, y obtenemos:

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{10}{12}$$

Luego, realizamos la sustracción para encontrar la diferencia entre lo que recorrieron Laura y Mario.

Lo que recorrió Laura		**Lo que recorrió Mario**		
$\frac{10}{12}$	$-$	$\frac{9}{12}$	$=$	$\frac{1}{12}$

Respuesta: La diferencia entre las distancias que recorrieron Laura y Mario es $\frac{1}{12}$ km.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué se consideró homogeneizar las fracciones? Justifica con un ejemplo.

2. ¿Qué otro procedimiento podrías emplear para dar respuesta a la pregunta de la situación? Explica.

Glosario

Homogeneizar las fracciones consiste en uniformizar los denominadores de las fracciones heterogéneas.

Recuerda

Dos o más fracciones son equivalentes cuando representan la misma parte de un todo.
Se pueden obtener fracciones equivalentes por **ampliación**, cuando multiplicamos por un mismo factor al numerador y al denominador de la fracción, o por **simplificación**, cuando dividimos por un mismo factor a ambos términos de la fracción.

Aprendemos a partir del error

Situación C: Pinturas de colores

Mientras Patricia combinaba $\frac{3}{4}$ L de pintura blanca con $\frac{3}{5}$ L de color verde oscuro para obtener el color deseado, tropezó y perdió $\frac{1}{10}$ L de la combinación. Finalmente, ¿cuántos litros (L) quedaron?


Fuente: Shutterstock

¿Sabías que...?

Para sumar y restar fracciones heterogéneas, realizamos el siguiente procedimiento:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$$

Hallamos el mcm de 2 y 5.

2	-	5	2
1	-	5	5
1	-	1	

mcm(2; 5) = 2 × 5 = 10

Dividimos el mcm entre cada denominador y multiplicamos el resultado por el respectivo numerador:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{5 + 2}{10} = \frac{7}{10}$$

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

Como Patricia combinó las pinturas blanca y verde oscuro, sumamos para obtener el total de pintura obtenido:

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{5} = \frac{6}{9}$$

Luego perdió $\frac{1}{10}$ L de la combinación. Entonces, para calcular cuánto le quedó de pintura, restamos:

$$\frac{6}{9} - \frac{1}{10} = \frac{5}{19}$$

Respuesta: Finalmente, le quedaron $\frac{5}{19}$ L de pintura.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. ¿Las fracciones que intervienen en la situación son homogéneas o heterogéneas?, ¿por qué?

2. ¿El procedimiento empleado para sumar y restar fracciones heterogéneas fue correcto? Corrige los errores y resuelve correctamente la situación.

3. ¿Podrías realizar otro procedimiento para dar respuesta a la pregunta de la situación? Explica cómo sería.

Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito

Representamos las propiedades de las operaciones con fracciones y establecemos relaciones entre dichas representaciones; asimismo, las transformamos en expresiones numéricas. Empleamos estrategias y procedimientos para realizar operaciones con fracciones y justificamos nuestros resultados.

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. Un grupo de obreros ha pintado los $\frac{3}{5}$ de un mural, y el otro grupo, la mitad de lo que falta. ¿Qué fracción del total del mural falta pintar?

   a) $\frac{9}{10}$ del mural c) $\frac{1}{10}$ del mural
   b) $\frac{1}{5}$ del mural d) $\frac{3}{10}$ del mural

2. Se tiene un listón de madera de $\frac{3}{10}$ m. ¿Cuántos metros más de madera debo adquirir para completar $\frac{17}{20}$ m?

   a) $\frac{14}{20}$ m b) $\frac{51}{200}$ m c) $\frac{11}{20}$ m d) $\frac{14}{10}$ m

3. Una piscina inflable con una capacidad de 5200 L está llena hasta los $\frac{3}{8}$ de su capacidad. ¿Cuántos litros de agua se deben agregar para llenar la piscina?

   a) 1950 L b) 2500 L c) 3250 L d) 4600 L

4. Julia va a organizar una salida a la playa y está calculando cuántas botellas de agua de $1\frac{1}{4}$ L debe comprar. Su familia está integrada por 5 personas, incluida ella, y estima que cada uno tomará 3 vasos de $\frac{1}{4}$ de litro. ¿Cuántas botellas de agua debe comprar?

5. En la clase de Educación para el Trabajo, las y los estudiantes están elaborando collares. Primero, hicieron un collar con 10 cuentas. Cuando lo terminaron, la profesora les indicó que la cantidad de cuentas que utilizaron representaba solo las $\frac{2}{5}$ partes de las cuentas que utilizarán para elaborar otro tipo de collar. ¿Cuántas cuentas se utilizarán para elaborar el nuevo collar?

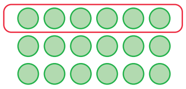
   

   Fuente: Shutterstock

   a) 25 b) 20 c) 12 d) 4

Ten en cuenta

Para hallar $\frac{1}{3}$ de 18, representamos 18 elementos divididos en 3 grupos con la misma cantidad de elementos. Luego, escogemos solo 1 de los grupos.



Entonces:

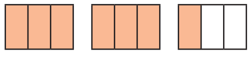
$\frac{1}{3}$ de 18 es igual a 6,
o también $\frac{1}{3} \times 18 = 6$.

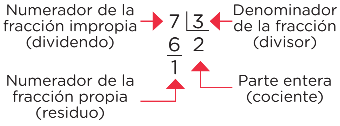
Recuerda

Un número mixto tiene una parte entera y una parte fraccionaria. Una fracción impropia se puede expresar como un número mixto y viceversa.

Por ejemplo:

La fracción impropia $\frac{7}{3}$ la expresamos como un número mixto.

$\frac{7}{3}$ 



$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

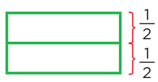
Recuerda

Dada una unidad de referencia, si esta se divide en partes iguales y luego cada una de estas partes se vuelve a dividir en partes iguales, se dice que la segunda parte es una fracción de la primera.

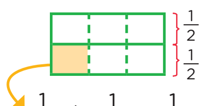
Por ejemplo:

Hallemos $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$.

- Representamos gráficamente $\frac{1}{2}$.



- Dividimos en 3 partes iguales cada mitad.



$\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{6}$

Cuando se tenga una fracción de una fracción, las palabras "de", "del" y "de los" indicarán multiplicación.

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

6. Alicia afirma que, al sumar o restar dos o más fracciones heterogéneas, es necesario convertirlas a fracciones que tengan denominadores iguales. ¿Será cierta su afirmación? Justifica tu respuesta con ejemplos.

7. Para realizar las instalaciones eléctricas de una casa, se compró un rollo de cable, del cual se usó la mitad para la instalación del circuito eléctrico de la sala y el comedor. La mitad de lo que quedó se empleó para la instalación eléctrica del ambiente de la cocina y, luego, la mitad del resto se utilizó para el dormitorio. Finalmente, con las $\frac{2}{5}$ partes de lo que quedó, se realizó la conexión del timbre. Si después de todo quedaron 15 m de cable, ¿qué longitud tenía el rollo al inicio?

a) 300 m b) 400 m c) 200 m d) 150 m

8. César y Juan compran una torta cuadrada para compartirla. César cortó la torta en tres partes iguales y repartió un pedazo para cada uno. Una vez que terminaron su parte, decidieron repartir lo que quedaba. César volvió a cortar el pedazo en tres partes iguales y repartió un pedazo para cada uno. Después, volvió a partir el pedazo que sobraba en tres partes iguales y repartió un pedazo para cada uno. Juan indica que comió más de la mitad de la torta. ¿Es eso correcto? Fundamenta tu respuesta.

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre las representaciones y las transformé en expresiones numéricas con fracciones.			
Representé de forma gráfica y simbólica las propiedades de las operaciones con fracciones.			
Empleé estrategias de cálculo y procedimientos para realizar las operaciones con expresiones fraccionarias usando propiedades de las operaciones.			
Justifiqué con mis conocimientos matemáticos afirmaciones sobre las propiedades de las operaciones con fracciones.			

¿Cómo aplicamos la proporcionalidad en situaciones cotidianas?

Construimos nuestros aprendizajes

Propósito

Establecemos relaciones entre datos, valores desconocidos, o relaciones de equivalencia o variación entre dos magnitudes; transformamos esas relaciones en expresiones de proporcionalidad directa y empleamos estrategias heurísticas, recursos o procedimientos pertinentes a las condiciones del problema.

Fijamos el precio del mantenimiento de jardines

Marcela deseaba contratar los servicios de una persona que se encargara del mantenimiento de su jardín. Así, buscó en Internet y seleccionó el anuncio que se muestra a continuación. Llamó a Alberto y le dijo que estaba interesada en la oferta de la semana; le explicó que su jardín tenía la misma forma, pero el doble de la longitud en cada lado.

Fuente: Shutterstock

Cuando Alberto terminó el trabajo, Marcela le pagó el doble del monto que figura en el anuncio, pero Alberto le indicó que ese monto no era suficiente por el trabajo realizado.

a. Ayuda a Marcela a calcular cuánto debe pagarle a Alberto por el trabajo realizado en su jardín.

b. Si los lados de otro jardín cuadrado midieran el triple de la medida que aparece en el anuncio como oferta de la semana, ¿cuánto cobraría Alberto por ese trabajo de mantenimiento?

c. ¿Cuál es la relación entre lo que cobra Alberto y el área del jardín al que le hace mantenimiento?

Comprendemos el problema

1. ¿En qué consiste la oferta de la semana que aparece en el anuncio del jardinero?

2. ¿Qué forma tiene el jardín de Marcela y cuánto miden sus lados?

3. ¿Cuánto ofreció pagar Marcela por el mantenimiento de su jardín y por qué crees que pensó de esa manera?

4. ¿Qué pide hallar la situación?

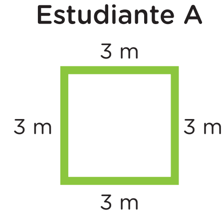
Glosario

La **superficie** es la región que ocupa un cuerpo.

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

5. Dos estudiantes que analizaban esta situación pintaron de verde la región del jardín que ellos creen que recibirá mantenimiento.

Estudiante A



El mantenimiento se hace al contorno del jardín, es decir, a 12 m.

Estudiante B

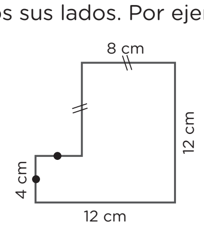
El mantenimiento se hace a toda la **superficie** del jardín; por ello, se debe calcular su área.

¿Cuál de los estudiantes tiene la razón?, ¿por qué?

6. ¿Qué relación podría ayudarte a resolver la situación?
   - a) La relación entre la longitud del lado del jardín y el precio que cobra Alberto.
   - b) La relación entre el perímetro del jardín y el precio que cobra Alberto.
   - c) La relación entre el área del jardín y el precio que cobra Alberto.

Recuerda

El perímetro (P) es la medida del contorno de una figura. Para el caso de figuras poligonales, se calcula sumando las longitudes de todos sus lados. Por ejemplo:



Entonces:
$P = 4 + 4 + 12 + 12 + 8 + 8$
$P = 48$
El perímetro de la figura es 48 cm.

7. Numera los cuadros del 1 al 3 de modo que el procedimiento para resolver la situación quede ordenado. Escribe otro procedimiento en la parte inferior.

- [ ] Hallar el precio del mantenimiento a partir de la relación del área.
- [ ] Hallar el área de cada jardín.
- [ ] Evaluar la relación entre las áreas de los jardines.

Otro:

Ejecutamos la estrategia o plan

8. Representa, mediante una figura geométrica, el jardín que se describe en la oferta de la semana y calcula su área. Considera que el lado de cada cuadradito de la cuadrícula representa 1 m.

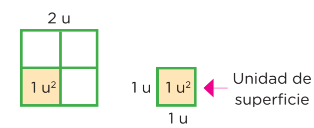
9. Representa mediante una figura geométrica el jardín de Marcela y halla su área.

10. ¿Cuántas veces contiene el jardín de Marcela al jardín descrito en la oferta de la semana?

11. A partir de la respuesta de la pregunta anterior, ¿cuánto debe pagar Marcela por el mantenimiento de su jardín? Responde la primera pregunta de la situación.

¿Sabías que…?

El área (A) de una figura es la medida de su superficie y se expresa en unidades de área: metros cuadrados (m^2), centímetros cuadrados (cm^2), kilómetros cuadrados (km^2), etc. Por ejemplo, calculemos el área del cuadrado mostrado de 2 u de lado.



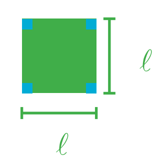
Vemos que hay cuatro cuadraditos de lado 1 u. Por lo tanto, su área es 4 u^2.

Además, si cada cuadradito midiera 1 m de lado, entonces el área se expresaría en metros cuadrados:

$A = 2 \times 2 = 4\ m^2$

Recuerda

En general, el área de una región cuadrada se calcula así:



$A = \ell \times \ell = \ell^2$

Donde ℓ es la longitud del lado del cuadrado.

Formalización

Dos magnitudes son directamente proporcionales (M. D. P.) si, al aumentar una de las magnitudes, también la otra aumenta en la misma proporción; o si, al disminuir una de las magnitudes, también disminuye la otra en la misma proporción. El cociente de las dos magnitudes es siempre una constante, llamada constante de proporcionalidad.

Por ejemplo, son magnitudes directamente proporcionales la cantidad de objetos y el precio que se paga por ellos:

N.º de objetos	Costo (S/)
3	6
6	12
15	30

12. Representa gráficamente el otro jardín de forma cuadrada, cuyos lados miden el triple de los del jardín descrito en la oferta, y determina su área. ¿Cuántas veces contiene este jardín al descrito en la oferta de la semana?

13. ¿Cuánto debe pagarse por el mantenimiento de este jardín? Responde la segunda pregunta de la situación.

14. Observa la tabla y responde.

× 9

× 4

Precio (S/)	120	480	1080
Área (m²)	9	36	81

× 4

× 9

- ¿Qué pasa con el precio cuando el área se multiplica por 4? ¿Y cuando se multiplica por 9?
- ¿Qué ocurriría con el precio si el área se multiplicara por otro número?

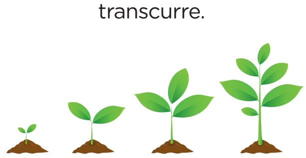
15. Responde la tercera pregunta de la situación.

Reflexionamos sobre el desarrollo

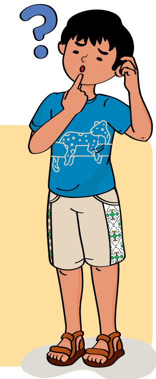
16. ¿Por qué se halla el área de cada jardín para determinar lo que cobra Alberto?

Ten en cuenta

Si dos magnitudes A y B no aumentan en la misma proporción, entonces no son magnitudes directamente proporcionales. Por ejemplo, el crecimiento de una planta y el tiempo que demora en crecer no son D. P. porque la altura de la planta no varía de forma proporcional al tiempo que transcurre.



Comprobamos nuestros aprendizajes



Propósito

Expresamos con símbolos y lenguaje algebraico nuestra comprensión sobre la proporcionalidad directa e inversa. Asimismo, justificamos mediante ejemplos las características y propiedades de la variación entre dos magnitudes y la constante de proporcionalidad, y corregimos errores si los hubiera.

Situación A: Los vasos con gelatina

Los estudiantes de primer grado de secundaria organizan un compartir con otras aulas. Para ello, proponen preparar gelatina. Uno de los estudiantes dice: "En otro compartir realizado, con 4 sobres de gelatina alcanzó para preparar 32 vasos". ¿Cuántos sobres necesitan para preparar 120 vasos?

Fuente: Shutterstock

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

Graficamos la cantidad de vasos obtenidos por cada sobre de gelatina. Notamos que existe una relación entre el número de sobres de gelatina y el de vasos. La expresamos en una tabla:

N.° de sobres	÷ 4	÷ 3	÷ 2	÷ 1	÷ x
N.° de vasos	32	24	16	8	120

Además, si dividimos los términos correspondientes, obtenemos la constante de proporcionalidad:

$$k = \frac{4}{32} = \frac{3}{24} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} = \frac{x}{120} \qquad \text{Entonces: } x = \frac{120}{8} = 15$$

Respuesta: Se necesitan 15 sobres de gelatina si se quiere obtener 120 vasos.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Qué ocurre con la cantidad de vasos si la cantidad de sobres de gelatina se multiplica por cierto número? Plantea un ejemplo.

2. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en esta situación y cómo se interpreta?

Ten en cuenta

La constante de proporcionalidad (k) se calcula dividiendo dos magnitudes (siempre en el mismo orden) de la misma correspondencia.

Por ejemplo:

Calculemos la constante de proporcionalidad:

Cantidad de cuadernos	1	2	10
Costo (S/)	10	20	100

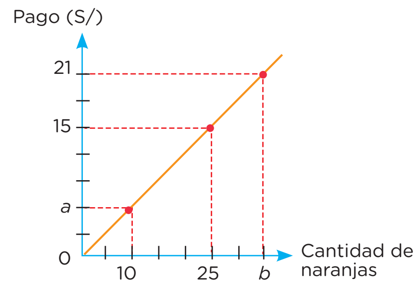
$$k = \frac{10}{1} = \frac{20}{2} = \frac{100}{10} = 10$$

Situación B: La venta de naranjas

Observa en el gráfico la línea recta que representa la relación entre el pago realizado y la cantidad de naranjas que se compraron. A partir de dicha información, calcula lo siguiente:

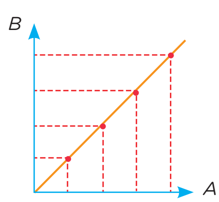
a. los valores correspondientes de *a* y *b*

b. el precio de una naranja



Ten en cuenta

Al representar en un plano cartesiano la relación entre dos magnitudes directamente proporcionales, su representación gráfica es la siguiente:



A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

A partir del gráfico, identificamos que las magnitudes "cantidad de naranjas" y "pago" son directamente proporcionales; es decir, si aumenta la cantidad de naranjas, el pago también aumenta de manera proporcional.

Al ser magnitudes directamente proporcionales, se cumple que en cada caso el cociente o razón entre la cantidad de naranjas y el pago es constante.

$$\frac{\text{Cantidad de naranjas}}{\text{Pago}} = \frac{10}{a} = \frac{25}{15} = \frac{b}{21}$$

Calculamos los valores de *a* y *b*:

$$a = \frac{10 \times 15}{25} = 6 \qquad b = \frac{25 \times 21}{15} = 35$$

Entonces, si por 10 naranjas se pagó S/6, el pago por una naranja resulta de dividir $\frac{6}{10}$ = S/0,6.

Respuesta:

Los valores de *a* y *b* son 6 y 35, respectivamente. Así también, el pago por una naranja es S/0,60.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo se relacionan de forma gráfica las magnitudes directamente proporcionales?

2. ¿De qué manera la constante de proporcionalidad permitió calcular los valores de *a* y *b*?

Recuerda

Una **razón geométrica** es la comparación de dos cantidades mediante una división; por ejemplo, la razón geométrica de *m* y *n* es $\frac{m}{n}$.

Una **proporción geométrica** surge al igualar dos razones geométricas. Por ejemplo, dadas las razones $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$, la proporción geométrica es

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

Aprendemos a partir del error

Situación C: La competencia de atletismo

Aurora y Beatriz son dos estudiantes del primer grado de secundaria que disputan la final de una competencia de atletismo de 100 metros planos. El premio que se repartirá es S/99, considerando que el premio es mayor cuando el tiempo empleado sea menor. Si Aurora llega a la meta en 20 segundos y Beatriz en 25 segundos, ¿cuánto dinero le corresponde a cada una de ellas?

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

Si a menor tiempo se recibe mayor premio, entonces las magnitudes son directamente proporcionales. Como Aurora (A) llegó en 20 segundos y Beatriz (*B*) en 25 segundos, entonces:

$$\frac{A}{B} = \frac{20}{25}, \text{ o también } \frac{A}{B} = \frac{4}{5} \text{ (por simplificación)}$$

De la expresión anterior, podemos decir que lo que recibe Aurora es $4k$ y lo que recibe Beatriz es $5k$. Además, si sumamos los premios de ambas, debe obtenerse el premio total, que es S/99. Entonces:

$$\begin{aligned} 4k + 5k &= 99 \\ 9k &= 99 \\ k &= 11 \end{aligned}$$

Reemplazamos para obtener el premio de cada una:

$A = 4k = 4(11) = 44$
$B = 5k = 5(11) = 55$

Respuesta: Aurora recibirá S/44 y Beatriz recibirá S/55.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. ¿Quién llegó primero a la meta?, ¿por qué?

2. Según la resolución planteada, ¿es correcto que quien llegó primero reciba menos dinero?, ¿por qué?

3. Corrige el error y calcula cuánto debe recibir cada estudiante.

Formalización

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** (M. I. P.) cuando, al aumentar una, la otra disminuye en la misma proporción. Es decir: Supón que *A* y *B* son M. I. P. Entonces, si *A* se duplica, *B* se divide a la mitad; si *A* se divide a la tercera parte, *B* se triplica. Por ejemplo, son magnitudes inversamente proporcionales el número de trabajadores que hacen una obra y el tiempo en que la terminan, ya que, a más trabajadores, menos tiempo.

Por ejemplo:
Felipe y Darío juegan a los penales y se repartirán una propina de S/70, considerando que a menos penales fallidos más propina. Si Felipe falló 3 penales y Darío 4 penales, ¿cuánto le toca a cada uno?

Resolución:
Como el reparto es inverso, lo que le corresponde a Felipe es $\frac{1}{3}k$ y lo que le toca a Darío es $\frac{1}{4}k$.

Como la propina es S/70, sumamos:

$$\frac{1}{3}k + \frac{1}{4}k = 70$$

$$\frac{7}{12}k = 70 \rightarrow k = 120$$

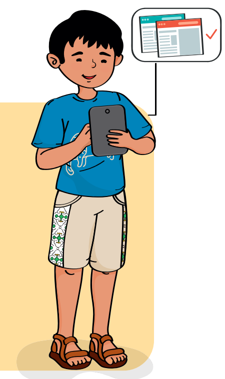
Entonces:

Felipe: $\frac{1}{3}k = \frac{1}{3}(120) = 40$

Darío: $\frac{1}{4}k = \frac{1}{4}(120) = 30$

Entonces, a Felipe le toca S/40, y a Darío, S/30.

Evaluamos nuestros aprendizajes



Propósito

Establecemos relaciones entre datos, valores desconocidos o variación entre dos magnitudes; las transformamos en expresiones de proporcionalidad directa y las expresamos con símbolos y lenguaje algebraico. Empleamos estrategias o procedimientos para resolver problemas. Asimismo, justificamos afirmaciones con conocimientos sobre proporcionalidad directa e inversa entre magnitudes.

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. Si hace 10 años las edades de Ana y su madre eran 15 y 40, respectivamente, ¿cuál es la razón entre las edades actuales de ambas?

a) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{4}$

2. Luisa planea preparar pastelitos para el cumpleaños de su hija. Si gasta S/15 en 25 unidades, ¿cuánto dinero necesita para preparar 80 pastelitos?

a) S/45 c) S/50

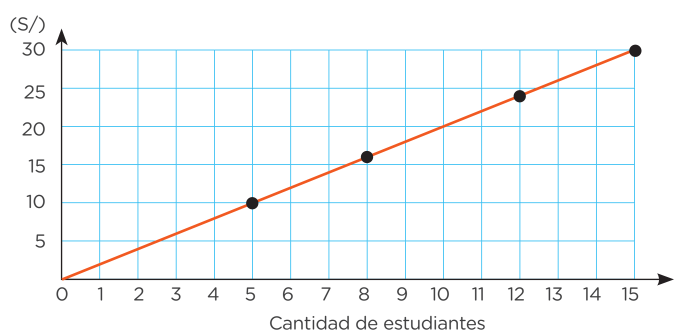
b) S/48 d) S/54

3. Cuando un automóvil va a 90 km/h, tarda cuatro horas en llegar a su destino. Si fuera a 120 km/h, ¿cuántas horas tardaría?

a) 3 horas c) 4 horas

b) 3,5 horas d) 5 horas

4. La gráfica muestra la cantidad de dinero que emplea el tutor de primer grado A para adquirir las entradas de sus estudiantes en la visita al Museo de Historia Natural. Traslada los valores y completa la tabla. ¿Cuál es el precio de una entrada al museo? Justifica tu respuesta.



Cantidad de estudiantes	5	8	12	15
Costo de entradas (S/)				

Ten en cuenta

Otra forma de resolver problemas de proporcionalidad directa es el método de reducción a la unidad. Por ejemplo, si 6 barras de cereal cuestan S/3 y queremos calcular cuánto costarán 9 barras de cereal, procedemos así:

Calculamos el precio de una barra de cereal a partir de la relación entre el precio total y el número de barras de cereal.

$$\frac{\text{Precio}}{\text{Cantidad de barras de cereal}} = \frac{3}{6} = \text{S/}0{,}50$$

Cada barra de cereal cuesta S/0,50.

Luego, hallamos el precio que se pagará por las 9 barras de cereal:

$9 \times \text{S/}0{,}50 = \text{S/}4{,}50$

Por lo tanto, 9 barras de cereal costarán S/4,50.

5. ¿Cuál de las siguientes tablas no representa una relación de proporcionalidad? Justifica tu respuesta.

a

Cantidad de cuadernos	2	3	6
Costo (S/)	5	7,5	15

b

Cantidad de baldes de pintura	2	4	8
Área de pared pintada (m^2)	25	50	100

c

Lado de un cuadrado (m)	2	3	4
Área (m^2)	4	9	16

d

Cantidad de personas	1	5	8
Costo de pasajes (S/)	5	25	40

6. En la siguiente tabla, la primera fila indica la cantidad de ingredientes que se requieren para preparar un pay de limón para 8 personas. Completa la información para 4 y 12 personas.

Cantidad de personas	Limón (g)	Azúcar (g)	Leche (mL)	Harina (g)
8	400	300	450	200
4				
		450		

Explica tus procedimientos para completar la tabla.

7. La razón entre dos números *a* y *b* es $\frac{3}{8}$. Relaciona las columnas para que los valores correspondientes de *c* y *d* formen una proporción con los números *a* y *b*, respectivamente.

I.	$c = 7{,}5$	1.	$c = 15$
II.	$d = 40$	2.	$c = 6$
III.	$c + d = 22$	3.	$d = 24$
IV.	$c = 9$	4.	$d = 20$

a I-2, II-3, III-4 y IV-1
b I-2, II-4, III-1 y IV-3
c I-3, II-1, III-2 y IV-4
d I-4, II-1, III-2 y IV-3

Recuerda

Si ***A* es D. P. a *B***, entonces, cuando *A* se multiplica o divide por el número *n*, *B* también queda multiplicado o dividido por *n*, respectivamente.

Ten en cuenta

Cuando **dos magnitudes son directamente proporcionales**, es posible aplicar la regla de tres simple.

Por ejemplo, si por 8 entradas al cine se pagan S/96 y deseamos saber cuánto pagaremos por 13 entradas, procedemos así:

N.° de entradas	Pago
8	S/96
13	x

Entonces:

$$x = \frac{13 \times 96}{8}$$

$$x = 156$$

Por lo tanto, se pagarán S/156 por las 13 entradas.

Recuerda

Al dividir un número decimal entre un número natural, divide como si fueran números naturales y coloca la coma en el cociente conforme bajas la cifra del dividendo que corresponde. Por ejemplo, al dividir 21,6 ÷ 31, procede así:

Divide 21 ÷ 30. Resulta 0 como cociente y sobra 21.

```
  2  1,  6 | 3  1
             -----
-    0       0
 -------
  2  1,
```

Al bajar la cifra 6 en el dividendo, coloca una coma en el cociente.

```
  2  1,  6 | 3  1
             -----
-    0       0,
 -------
  2  1,  6
```

Divide 216 ÷ 31. Resulta 6 como cociente y sobra 30. Continúa dividiendo.

```
  2  1,  6 | 3  1
             -----
     0       0,  6
 -------
  2  1  6
- 1  8  6
 ----------
     3  0
```

8. En una tienda de abarrotes, con la finalidad de atraer más clientes, se anuncian promociones y descuentos cada semana. Sara acude a dicha tienda y observa la siguiente oferta para un mismo tipo de detergente a granel. ¿Qué tamaño de bolsa le conviene comprar?, ¿por qué?

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre datos, valores desconocidos o variación entre dos magnitudes, y transformé esas relaciones en expresiones de proporcionalidad directa.			
Expresé con símbolos y lenguaje algebraico mi comprensión sobre la relación proporcional entre dos magnitudes.			
Empleé estrategias heurísticas, recursos o procedimientos pertinentes para resolver problemas de proporcionalidad directa.			
Justifiqué afirmaciones con mis conocimientos sobre proporcionalidad directa e inversa entre magnitudes.			

¿Cómo describimos ubicaciones o desplazamientos de objetos?

Construimos nuestros aprendizajes

Propósito

Leemos mapas o planos a escala y los usamos para ubicarnos en el espacio. Empleamos estrategias heurísticas y procedimientos para describir la localización de los objetos mediante unidades convencionales (centímetro y kilómetro).

Apoyamos la reactivación del turismo

Según el Observatorio Turístico del Perú, el turismo ocupa el tercer lugar entre los sectores que generan más ingresos al país. Cada año, el Ministerio de Comercio Exterior y Turismo (Mincetur) presenta un informe sobre las cifras oficiales de turismo. De acuerdo con su último reporte, el destino más visitado es el santuario histórico de Machu Picchu.

Con la finalidad de orientar mejor a los turistas que visitan el Cusco, la agencia de viajes El Chasqui elaboró el siguiente afiche, el cual contiene un mapa y las indicaciones para llegar al santuario.

Fuente: Shutterstock

Al visitar el Cusco, Gustavo y su familia contrataron los servicios de esta agencia para realizar el *tour.* Tal como indica el afiche, lo hicieron en dos tramos: plaza de Armas del Cusco-Ollantaytambo y Ollantaytambo-Machu Picchu. Así, Gustavo trazó con rojo las distancias geométricas de ambos tramos; al medirlas con una regla, obtuvo 8,8 cm en la distancia plaza de Armas del Cusco-Ollantaytambo y 4,3 cm de Ollantaytambo a Machu Picchu.

Ayuda a Gustavo a determinar cuál es la distancia geométrica en la realidad, en kilómetros, del recorrido que hizo con su familia.

Muy bien, ya estamos listos para iniciar el desarrollo de la ficha 3.

Comprendemos el problema

1. ¿Qué lugar turístico visitarán Gustavo y su familia, y cuál será el recorrido?

2. Completa la tabla con las longitudes que obtuvo Gustavo al trazar en el plano la **distancia geométrica** que hay en cada tramo.

Tramos del recorrido	Longitud en el mapa (cm)
Tramo 1: Plaza de Armas de Cusco-Ollantaytambo	
Tramo 2: Ollantaytambo-Machu Picchu	

3. ¿Por qué estas longitudes están expresadas en centímetros?

4. ¿Qué se pide calcular en la situación?

5. ¿Cuál es la escala que se presenta en el mapa?

Glosario

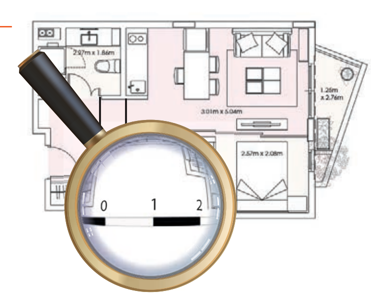
La **distancia geométrica** es la longitud del segmento de recta entre dos puntos en un mapa o plano.

Desde tiempos antiguos, surgió la necesidad de representar gráficamente la superficie terrestre, con la finalidad de estudiarla. Observa algunas de estas representaciones:

Representaciones gráficas de la superficie

- **Mapas**: Permiten representar grandes extensiones, como continentes, países, regiones, entre otras.
- **Planos**: Permiten representar pequeñas extensiones, como viviendas, barrios, urbanizaciones, etc.

Fuente: Shutterstock



Fuente: Shutterstock

Observa que en ambos aparece un elemento llamado escala. Esta indica cuántas veces se ha reducido o ampliado la superficie representada en el mapa o plano.

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

6. Lee lo que dos amigos conversan sobre los procedimientos que emplearán para resolver la situación.

a. ¿Es correcta la afirmación de Juan?, ¿por qué?

b. ¿Es correcta la afirmación de Flor?, ¿por qué?

7. Numera las afirmaciones de manera que el procedimiento para resolver la situación quede ordenado.

- [ ] Calcular la distancia geométrica en la realidad (en kilómetros) entre Ollantaytambo y Machu Picchu.
- [1] Interpretar la escala 1:500 000.
- [ ] Convertir las distancias geométricas en la realidad de centímetros a kilómetros.
- [ ] Calcular la distancia geométrica en la realidad (en kilómetros) que hay desde la plaza de Armas del Cusco hasta Ollantaytambo.
- [ ] Sumar las distancias geométricas en la realidad expresadas en kilómetros.

8. Escribe otro procedimiento para resolver la situación.

Ten en cuenta

La **escala** (E) se expresa como la relación entre la longitud de un objeto representado en un plano o mapa y su longitud real.

$$E = \frac{d}{D}$$

Donde:

d: Longitud del objeto en el plano o mapa

D: Longitud del objeto en la realidad

Además, en un plano o mapa podemos encontrar una escala numérica o gráfica.

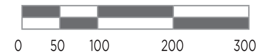
Escala numérica

Medida del objeto en la realidad

Escala → **E 1:100**

Medida del objeto en el dibujo

Escala gráfica



En ambos casos, se lee "escala de 1 a 100" y se interpreta así: 1 cm en la representación del plano o mapa corresponde a 100 cm en el objeto en la realidad.

Recuerda

La estrategia de **establecer submetas** durante la resolución de un problema consiste en realizar acciones sucesivas que conduzcan a la respuesta final. Dialoga en grupo sobre cuáles podrían ser las submetas para resolver esta situación.

Recuerda

Para convertir 150 000 cm a kilómetros, usamos el siguiente factor de conversión:

$$\frac{1 \text{ km}}{100\,000 \text{ cm}}$$

Entonces:

1.° Multiplicamos 150 000 cm por el factor de conversión.

$$150\,000 \text{ cm} \times \frac{1 \text{ km}}{100\,000 \text{ cm}}$$

2.° Simplificamos.

$$15\cancel{0}\;\cancel{000}\;\cancel{\text{cm}} \times \frac{1 \text{ km}}{10\cancel{0}\;\cancel{000}\;\cancel{\text{cm}}}$$

3.° Escribimos el resultado de la conversión.

150 000 cm <> 1,5 km

Ten en cuenta

Para sumar o restar expresiones decimales, alineamos las cifras por la coma decimal y luego operamos.
Por ejemplo, al sumar las distancias 19,7 km y 32 km, procedemos así:

$$\begin{array}{r} 19{,}7 \;+ \\ 32{,}0 \\ \hline 51{,}7 \end{array}$$

Ejecutamos la estrategia o plan

9. Escribe la interpretación de la escala numérica 1:500 000.

10. Completa la tabla a partir de lo indicado.

Distancia geométrica en el plano (cm)	Distancia geométrica en la realidad (cm)
1	1 × 500 000 = 500 000
2	
4,5	

11. Calcula la distancia geométrica en la realidad (cm) entre la plaza de Armas del Cusco y Ollantaytambo. Luego, convierte a kilómetros.

12. Calcula la distancia geométrica en la realidad (cm) entre Ollantaytambo y Machu Picchu. Luego, convierte a kilómetros.

13. ¿Cuál es la distancia geométrica en la realidad, en kilómetros, que da respuesta a la situación?

Reflexionamos sobre el desarrollo

14. Emplea otro procedimiento para resolver la situación y comprueba si la respuesta en ambos casos es la misma.

15. Si la distancia geométrica en la realidad entre la plaza de Armas del Cusco y Machu Picchu es 64,7 km, ¿cuántos centímetros medirá en el mapa que tiene Gustavo?

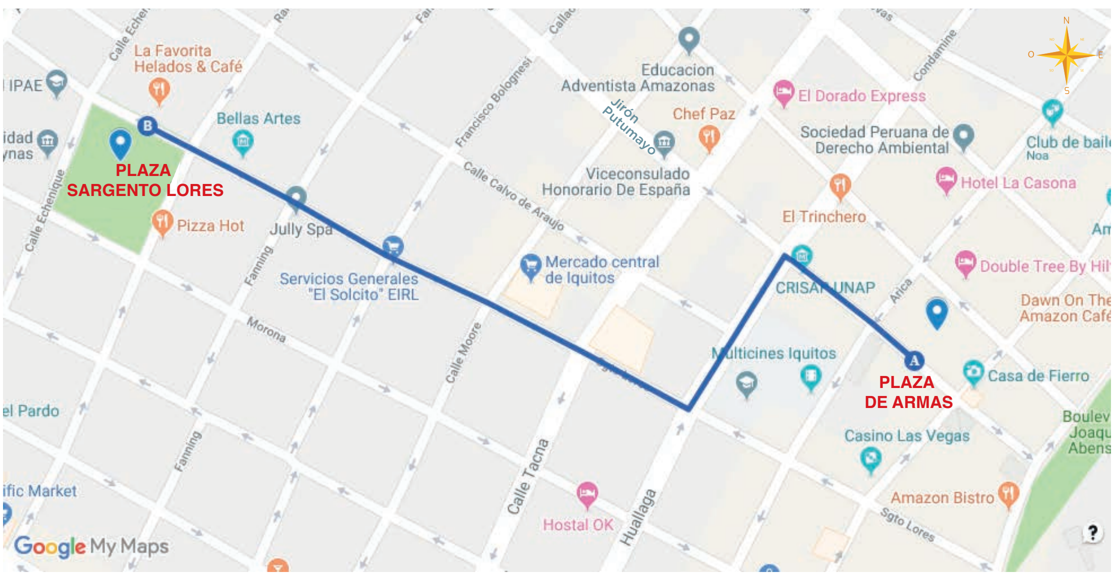
Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito

Describimos el recorrido de un objeto real o imaginario presentado en planos o mapas a escala. Asimismo, justificamos con ejemplos y con nuestros conocimientos geométricos las relaciones y propiedades que descubrimos entre los objetos, y de haber errores los corregimos.

Situación A: Un recorrido por Iquitos

Observa el recorrido que realiza María para ir desde la plaza de Armas de Iquitos hasta la plaza Sargento Lores. Describe el recorrido realizado por María.



Fuente: Google Maps

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

Observamos el mapa y la rosa náutica para describir el recorrido de María.

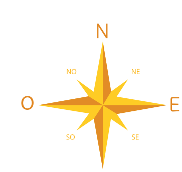
Se dirige al noroeste por el jirón Putumayo hasta Huallaga. Gira a la izquierda y camina dos cuadras hasta el cruce con Sargento Lores. Finalmente, gira a la derecha y camina cinco cuadras. Así llega a la plaza Sargento Lores.

Ahora, respondemos la siguiente pregunta:

1. Describe otro recorrido que podría realizar María para ir de la plaza de Armas de Iquitos a la plaza Sargento Lores.

Ten en cuenta

El elemento que aparece en el mapa se llama **rosa náutica** o rosa de los vientos.



En ella están señalados los puntos cardinales: norte (N), sur (S), este (E) y oeste (O); y los puntos equidistantes entre estos: noreste (NE), noroeste (NO), sureste (SE) y suroeste (SO).

Situación B: Lugares representativos de Huancayo

Al viajar a Huancayo, en la región Junín, Mónica marcó en un mapa algunos lugares turísticos: la plaza Constitución, Torre Torre, el parque de la Identidad Wanka y el Cerrito de la Libertad.

Fuente: Google Maps

Con la intención de escoger la mejor ruta para visitar estos lugares, Mónica indagó que la distancia geométrica en la realidad desde la plaza Constitución hasta Torre Torre es 3 km, y desde Torre Torre hasta el parque de la Identidad Wanka es 2 km.

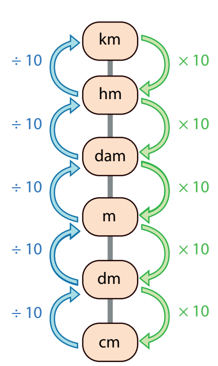
Ella desea conocer la escala del mapa y, a partir de ello, calcular la distancia geométrica en la realidad desde el parque de la Identidad Wanka hasta el Cerrito de la Libertad.

¿Cómo podrá hacerlo? ¿Qué resultados obtendrá?

Ten en cuenta

Para convertir 12 km a centímetros, según el diagrama, bajamos 5 posiciones; esto significa multiplicar 12 por 10^5 o 100 000.

$12 \times 100\,000 = 1\,200\,000$ cm



Por lo tanto:

12 km <> 1 200 000 cm

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

Para determinar la escala del mapa de Mónica, debemos relacionar las distancias geométricas en la realidad con las distancias geométricas del mapa.

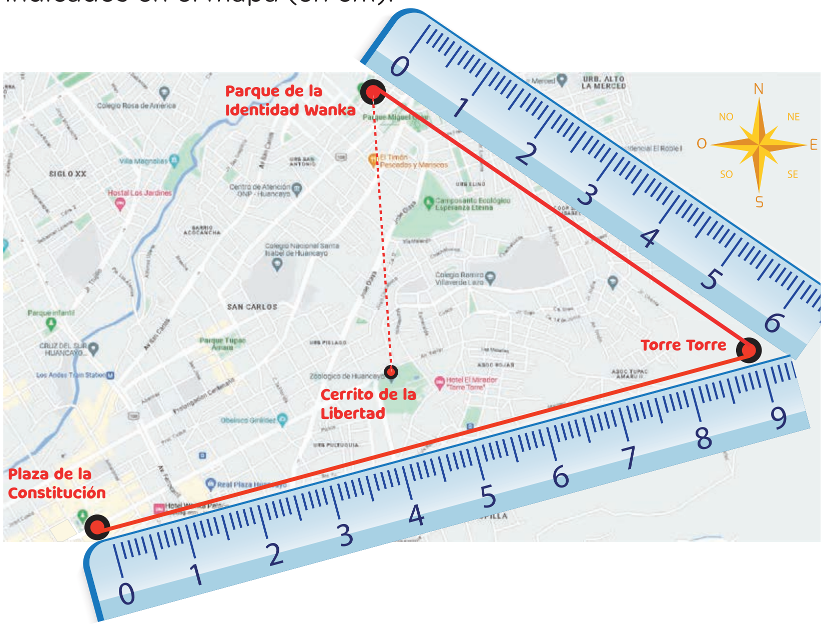
Entonces, convertimos las distancias geométricas reales de kilómetros a centímetros.

Tramo	Distancia geométrica en la realidad (km)	Distancia geométrica en la realidad (cm)
De la plaza Constitución a Torre Torre	3	$3 \times 10^5 = 3 \times 100\,000$ $= 300\,000$
De Torre Torre al parque de la Identidad Wanka	2	$2 \times 10^5 = 2 \times 100\,000$ $= 200\,000$

Obtenemos que la distancia geométrica en la realidad desde la plaza Constitución hasta Torre Torre es 300 000 cm y la distancia geométrica en la realidad desde Torre Torre hasta el parque de la Identidad Wanka es 200 000 cm.

Ahora debemos calcular las distancias en el mapa.

Utilizamos una regla para medir la distancia entre los puntos indicados en el mapa (en cm).



Fuente: Google Maps

La distancia geométrica de la plaza Constitución a Torre Torre es de 9 cm en el mapa.

La distancia geométrica de Torre Torre al parque de la Identidad Wanka es de 6 cm en el mapa.

Empleamos la relación de la escala en cada caso:

- Para la distancia geométrica de la plaza Constitución a Torre Torre:

$$E = \frac{d}{D} \rightarrow E = \frac{9 \text{ cm}}{300\,000 \text{ cm}} = \frac{3}{100\,000}$$

- Para la distancia de Torre Torre al parque de la Identidad Wanka:

$$E = \frac{d}{D} \rightarrow E = \frac{6 \text{ cm}}{200\,000 \text{ cm}} = \frac{3}{100\,000}$$

En ambos casos, se aprecia que una distancia de 3 cm en el plano equivale en la realidad a 1 km. Por lo tanto, la escala del plano es 3:100 000.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. Describe el proceso seguido para dar respuesta a la situación.

2. Calcula la distancia geométrica real que hay del parque de la Identidad Wanka al Cerrito de la Libertad.

Ten en cuenta

Para determinar la escala en un mapa o plano, emplea la siguiente relación:

$$E = \frac{d}{D}$$

Donde:

E: escala que se presenta en el mapa o plano

d: longitud en el mapa o plano

D: longitud en la realidad

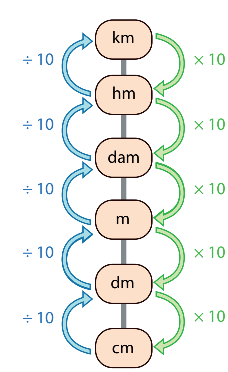
Si un segmento mide 3 cm en el dibujo, y en la realidad mide 30 m, la escala empleada es la siguiente:

$$E = \frac{3 \text{ cm}}{30 \text{ m}} = \frac{3 \text{ cm}}{3000 \text{ cm}} = \frac{1}{1000}$$

Esto significa que la medida de 1 cm en el plano equivale a 1000 cm en la realidad.

Recuerda

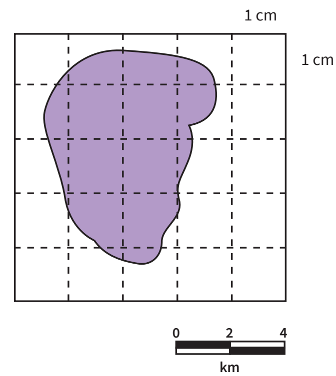
Para realizar conversiones entre múltiplos y submúltiplos, puedes utilizar el siguiente esquema:



Por ejemplo, para convertir 500 000 cm a kilómetros, dividimos entre 10^5 y obtenemos 5 km. Por lo tanto, 500 000 cm <> 5 km.

Aprendemos a partir del error

Situación C: Áreas no poligonales



El teorema de Pick nos permite calcular el área de su distrito cuya figura está trazada sobre una cuadrícula. Para aplicarlo, primero contamos los puntos que se encuentran dentro del polígono y los puntos que se encuentran en el borde. Luego, aplicamos la fórmula:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

Donde:

A: área de la región

B: puntos ubicados en el borde de la región

I: puntos interiores de la región sombreada

Ayuda a Jorge a calcular el área aproximada de su distrito en kilómetros cuadrados.

Glosario

El **área** es la medida de la superficie delimitada por un contorno (de una figura o forma bidimensional) al que se denomina perímetro.

Ten en cuenta

Considera la siguiente escala gráfica:

Notamos que 1 cm en el mapa equivale a 5 km en la realidad.

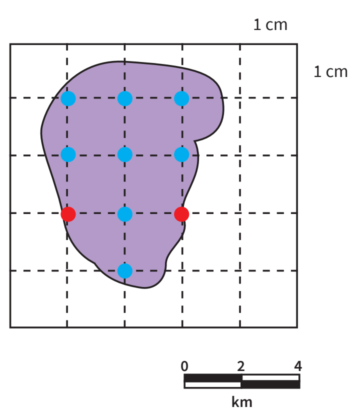
Además, como las escalas expresan una relación entre longitudes, para calcular el área, debes considerar las unidades de superficie que corresponden.

Por ejemplo, si la escala indica que 1 cm equivale a 5 km, entonces 1 cm^2 equivale a 25 km^2.

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

Ubicamos los puntos interiores (*I*, en celeste) y los puntos que se encuentran en el borde de la figura (*B*, en rojo).



Contamos que hay 8 puntos celestes y 2 rojos. Entonces:

$I = 8$ $\quad B = 2$

Reemplazamos en la fórmula para el área aproximada y efectuamos:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

$$A = 8 + \frac{2}{2} - 1$$

$$A = 8 \text{ cm}^2$$

Según la escala gráfica mostrada, 1 cm del dibujo equivale a 1 km en la realidad; luego, el área de la región coloreada será $8 \times 1 = 8$ km^2.

Respuesta: El área estimada de la superficie del distrito es 8 km^2.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. Según la escala gráfica, ¿a cuántos kilómetros equivale 1 cm?

2. Si 1 cm equivale a 2 km, ¿es correcto decir que 1 cm^2 equivale a 2 km^2? Emplea esta información para corregir el procedimiento de la situación.

Evaluamos nuestros aprendizajes

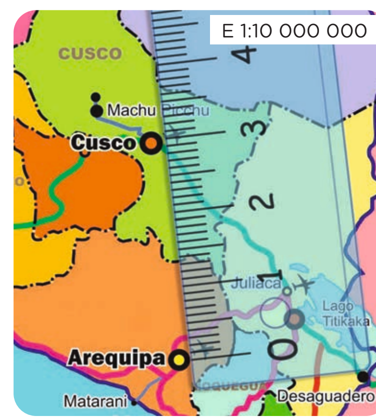
Propósito

Describimos el recorrido de objetos presentados en planos o mapas a escala que usamos para ubicarnos y desplazarnos. Empleamos estrategias o procedimientos para describir la localización de los objetos mediante unidades convencionales. Planteamos afirmaciones y las justificamos con nuestros conocimientos geométricos.

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

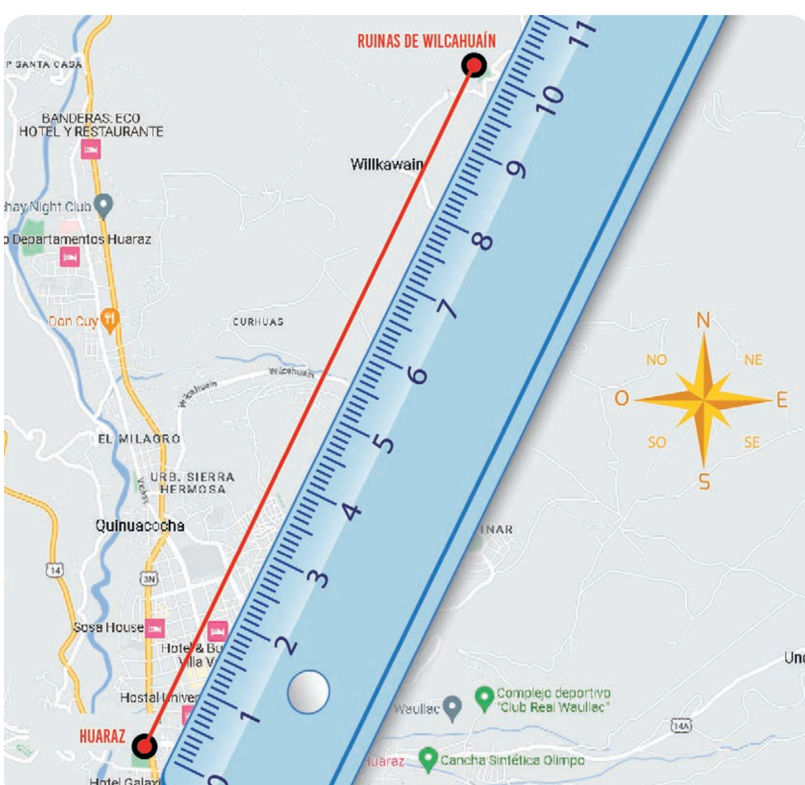
1. Diego observa la parte del mapa del Perú que se muestra a la derecha. Observa el valor que obtuvo al medir en el mapa la distancia geométrica entre Cusco y Arequipa, y calcula la distancia geométrica en la realidad entre estas dos ciudades.

   a) 10 km
   b) 30 km
   c) 100 km
   d) 300 km



Fuente: Shutterstock

2. En un mapa se ha medido con una regla la distancia geométrica entre la ciudad de Huaraz y las ruinas de Wilcahuaín. Si la distancia geométrica en la realidad entre estos dos puntos es 5 km, ¿cuál es la escala?



Fuente: Google Maps

   a) 1:10 000
   b) 1:50 000
   c) 1:100 000
   d) 1:500 000

Recuerda

Para convertir una unidad en otra, puedes usar el factor de conversión, la escalera de equivalencias u otro procedimiento que conozcas.

Ten en cuenta

Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, se desplaza la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros acompañen a la unidad.

$58 \times 10 = 580$

$13{,}5 \times 100 = 1350$

$4{,}8 \times 1000 = 4800$

$5 \times 10\,000 = 50\,000$

$80 \times 100\,000 = 8\,000\,000$

Al dividir un número por la unidad seguida de ceros, se desplaza la coma a la izquierda de acuerdo con la cantidad de ceros que acompañen a la unidad. Si no hay suficientes cifras, se agregan ceros.

$27 \div 10 = 2{,}7$

$2500 \div 100 = 25$

$89 \div 1000 = 0{,}089$

$62\,000 \div 10\,000 = 6{,}2$

$270\,000 \div 100\,000 = 2{,}7$

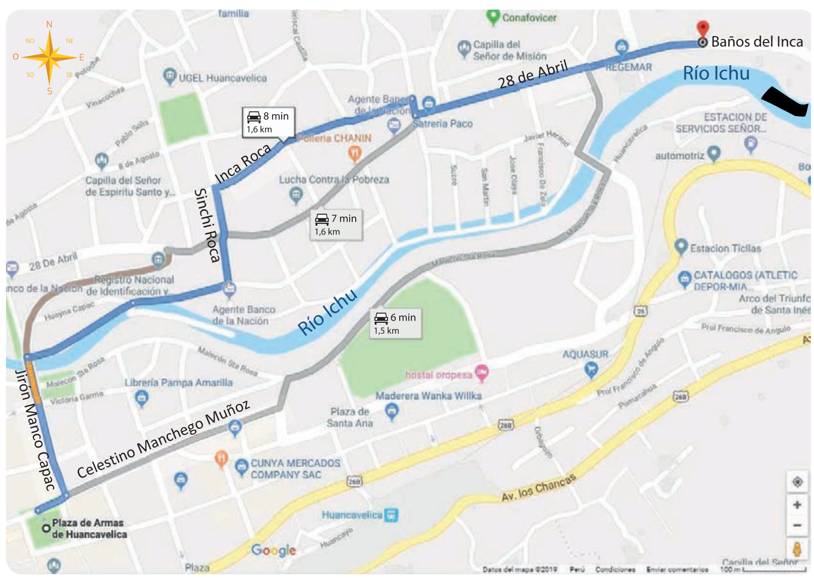
Recuerda

Hay diversos caminos para llegar a un lugar. Evalúa otro procedimiento que permita resolver la situación.

3. Se toma una medida de 10 cm en cuatro mapas con escalas distintas. Relaciona las escalas con la distancia geométrica en la realidad que corresponde a esa medida.

1:50 000	2,5 km
1:100 000	5 km
1:25 000	10 km
1:500 000	50 km

4. Observa el recorrido (ruta de color azul) que hace Alessandra para trasladarse de la plaza de Armas de Huancavelica a los Baños del Inca.

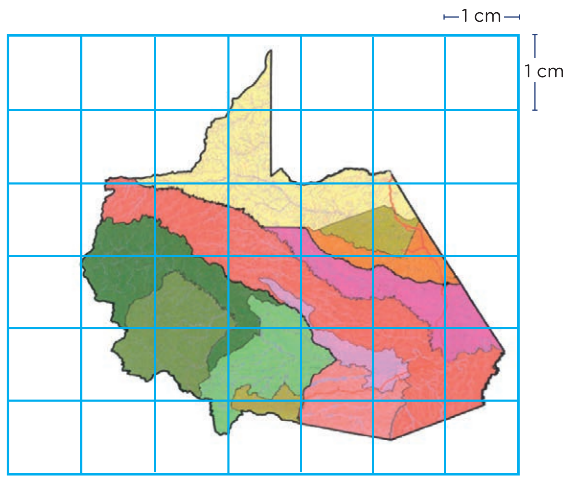


Fuente: Google Maps

Lee las afirmaciones. Luego, escribe los números del 1 al 6 de manera que la descripción del recorrido quede ordenada.

- [ ] Avanza tres cuadras por Inca Roca y, al girar a la derecha, camina hasta llegar a 28 de Abril.
- [ ] Avanza dos cuadras por Sinchi Roca hasta el cruce con Inca Roca, y gira a la derecha para continuar por esa calle.
- [ ] Avanza por el jirón Manco Cápac hasta cruzar el río Ichu y gira a la derecha.
- [ ] Parte de la plaza, por Celestino Manchego, al cruce con jirón Manco Cápac; luego, gira a la izquierda.
- [ ] Avanza por 28 de Abril aproximadamente 7 cuadras hasta llegar a los Baños del Inca.
- [ ] Continúa por el borde del río Ichu y gira a la izquierda en Sinchi Roca.

5. El mapa de la región Madre de Dios que se muestra fue elaborado considerando que 1 cm en el mapa equivale a 70 km en la realidad.



Expresa la escala.

a) 1:70
b) 1:7000
c) 1:70 000
d) 1:7 000 000

Calcula el área aproximada de la superficie de la región Madre de Dios a partir del mapa mostrado.

a) 85 750 km^2
b) 850 000 km^2
c) 4900 km^2
d) 83 300 km^2

Recuerda

Para calcular el área aproximada de formas no poligonales, podemos aplicar el **teorema de Pick**.

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

Donde:

A: área de la región sombreada

B: puntos ubicados en el borde de la región

I: puntos interiores de la región sombreada

6. El siguiente mapa corresponde a la región conocida como "La isla de los piratas". Toma una regla y, a continuación, mide la distancia geométrica que hay entre el barco y el tesoro; luego, determina en metros la distancia geométrica que corresponde a la realidad.

Ten en cuenta

Otra forma de realizar conversiones entre unidades es empleando la **regla de tres simple**.

Por ejemplo, para convertir 6,5 km a metros, procedemos así:

1 km —— 1000 m

6,5 km —— x

Entonces:

$$x = \frac{6{,}5 \times 1000}{1}$$

x = 6500 m

Entonces, 6,5 km equivalen a 6500 m.

Recuerda

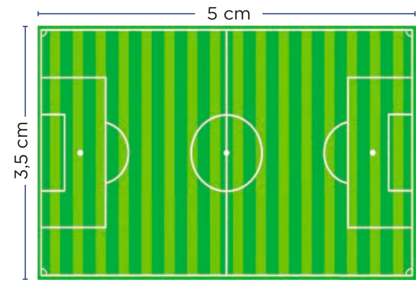
La expresión para determinar el **área** de una superficie rectangular es

$A = l \times a$

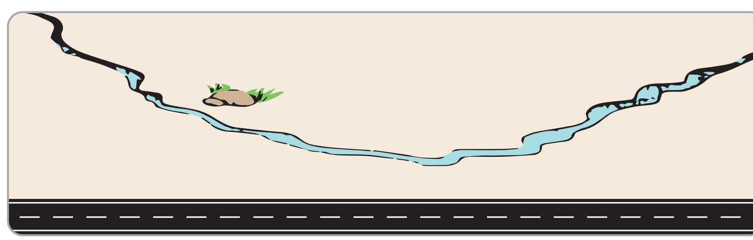
Donde:
l: largo
a: ancho

7. El siguiente plano corresponde a un campo de fútbol dibujado a escala 1:2000. Para darle mantenimiento, se desea recubrirlo con planchas cuadradas de pasto artificial de 4 m^2. ¿Cuántas de estas planchas serán necesarias para cubrir todo el campo?

a) 1360 planchas
b) 1750 planchas
c) 7000 planchas
d) 2800 planchas



8. Fabián quiere determinar en el mapa dos puntos del río separados 1,5 km. Él afirma que, si la escala es 1:100 000, la distancia de separación representada en el plano es de 3 cm por cada 1500 metros. ¿Será cierta dicha afirmación? Justifica tu respuesta.



Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre los atributos medibles de objetos reales o imaginarios y las representé de diversas formas. También establecí relaciones entre longitudes y áreas.			
Describí el recorrido de un objeto presentado en planos o mapas a escala que uso para ubicarme en el espacio y determinar rutas.			
Empleé estrategias y procedimientos para describir la localización de los objetos mediante unidades convencionales (centímetro, metro y kilómetro).			
Justifiqué afirmaciones con conocimientos geométricos.			

Ficha
4

¿Cómo las medidas de tendencia central nos ayudan a tomar decisiones?

Construimos nuestros aprendizajes

Propósito

Usamos procedimientos para determinar la mediana, la media y la moda de variables cuantitativas discretas para datos no agrupados, y explicamos nuestra comprensión de las medidas de tendencia central.

Escogemos a la delegación de deportistas para una competencia

La entrenadora de natación debe seleccionar a sus dos mejores deportistas, quienes representarán a la institución educativa en los Juegos Deportivos Escolares Nacionales 2024, categoría A. Con ese fin, ella registra el tiempo que realiza cada una de las cuatro deportistas que tiene a su cargo en seis pruebas de 50 metros libres.

Fuente: Shutterstock

Luego de analizar los resultados de cada nadadora, la entrenadora ha elegido a Gabriela como la mejor deportista.

a. ¿Qué medida de tendencia central utilizó la entrenadora para elegir a Gabriela como la mejor deportista?

b. ¿Qué medida de tendencia central la ayudaría a elegir a la segunda mejor deportista?, ¿por qué?

Comprendemos el problema

1. ¿A cuántas nadadoras debe seleccionar la entrenadora?

2. ¿En cuántas pruebas participó cada una de las deportistas?

3. Completa la tabla con los tiempos de cada nadadora.

Nombre	Tiempo (segundos)					
	Prueba 1	Prueba 2	Prueba 3	Prueba 4	Prueba 5	Prueba 6
Sandra	44					
Gabriela	33					
Sofía	32					
Sheyla	32					

4. ¿Qué debes responder para resolver la situación?

Ten en cuenta

Las medidas de tendencia central son valores representativos de un conjunto de datos, y son las siguientes:

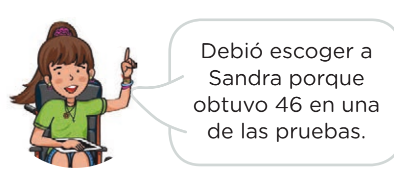
Media aritmética ($\bar{x}$): Es el valor promedio de un conjunto de datos numéricos. Se obtiene sumando todos los valores de los datos y dividiendo el resultado entre la cantidad total de datos.

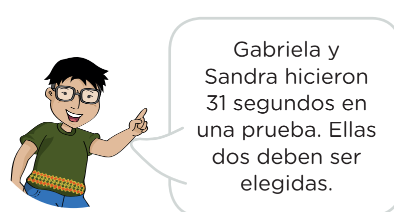
Mediana (Me): Es el valor numérico que ocupa la ubicación central de la muestra. Esto significa que el 50 % de los datos son menores o iguales que la mediana y el otro 50 % son mayores o iguales que ella.

Moda (Mo): Es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia absoluta.

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

5. Observa lo que dicen algunos estudiantes sobre la elección de Gabriela.





- ¿Cuál es tu opinión?

6. Para solucionar la situación, debemos buscar un valor que represente el tiempo de cada nadadora en todas las pruebas. Para ello, usaremos las medidas de tendencia central. ¿Cuál o cuáles de estas se emplearán? Pinta el recuadro.

Media aritmética | **Mediana** | **Moda**

Ejecutamos la estrategia o plan

7. Observa los tiempos de cada nadadora y rodea el que más se repite. Con ello determinarás cuál es la moda.

- Sandra ▶ 44 31 46 35 37 43
  Mo = ...
- Gabriela ▶ 33 32 33 31 32 32
  Mo = ...
- Sofía ▶ 32 37 32 35 32 32
  Mo = ...
- Sheyla ▶ 32 33 32 32 32 33
  Mo = ...

8. Escribe ordenadamente los tiempos de cada nadadora y halla la mediana.

- Sandra ▶ .... ; .... ; .... ; .... ; .... ; ....
  Me = ...
- Gabriela ▶ .... ; .... ; .... ; .... ; .... ; ....
  Me = ...
- Sofía ▶ .... ; .... ; .... ; .... ; .... ; ....
  Me = ...
- Sheyla ▶ .... ; .... ; .... ; .... ; .... ; ....
  Me = ...

9. Completa y calcula la media aritmética de los tiempos de las nadadoras.

- $\bar{x}(\text{Sandra}) = \dfrac{44 + 31 + 46 + 35 + 37 + 43}{6}$

  $\bar{x}(\text{Sandra}) = \dfrac{\square}{6} = \square$
- $\bar{x}(\text{Gabriela}) = \dfrac{\square}{6}$

  $\bar{x}(\text{Gabriela}) = \dfrac{\square}{6} = \square$
- $\bar{x}(\text{Sofía}) = \dfrac{\square}{6}$

  $\bar{x}(\text{Sofía}) = \dfrac{\square}{6} = \square$
- $\bar{x}(\text{Sheyla}) = \dfrac{\square}{6}$

  $\bar{x}(\text{Sheyla}) = \dfrac{\square}{6} = \square$

¿Sabías que...?

Un grupo de datos puede no tener moda; en este caso, se dice que es un grupo amodal. Cuando tiene moda, es unimodal; dos modas, bimodal, o más de dos modas, multimodal.

Ten en cuenta

Para determinar la **mediana** (Me), se procede de dos formas, dependiendo de si el número de datos es par o impar. Si es impar, se ordenan los datos y se ubica el dato central. Si es par, se ordenan los datos, se escogen los dos datos centrales y se halla su promedio.

Recuerda

La media aritmética te permite conocer los valores representativos de calificaciones, encuestas, censos, salarios, velocidades, entre otros. De esta manera podremos tomar mejores decisiones.

Por ejemplo, si el promedio de panes que se vende en una panadería durante una semana es de 500 panes, esto significa que las ventas en los días de esa semana podrían estar cercanos a dicha cantidad.

10. Organiza en la tabla los resultados encontrados en las preguntas 7, 8 y 9.

	Sandra	Gabriela	Sofía	Sheyla
Media				
Mediana				
Moda				

Responde.

- ¿Por qué la entrenadora eligió a Gabriela como la mejor deportista? Responde la primera pregunta de la situación.

- ¿Quién es la segunda mejor deportista? ¿Qué medida de tendencia central te permitió llegar a esa conclusión? Justifica y responde la segunda pregunta de la situación.

Reflexionamos sobre el desarrollo

11. ¿Por qué la moda no te permite determinar a la segunda mejor deportista? Justifica tu respuesta.

12. Un deportista realiza las seis pruebas en los siguientes tiempos (segundos): 35; 36; 37; 39; 39; 100. ¿Cuál de las medidas de tendencia central es la más representativa?

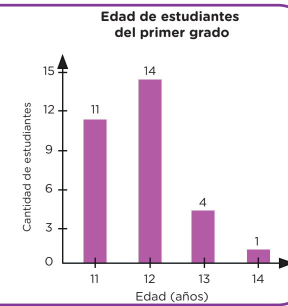
Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito

Representamos las características de una muestra o una población por medio de variables cuantitativas discretas y expresamos el comportamiento de los datos mediante medidas de tendencia central. Asimismo, justificamos los procedimientos reconociendo los errores para corregirlos.

Situación A: Edad promedio

Un docente de una institución educativa desea conocer la media aritmética de la edad de sus estudiantes del primer grado de secundaria, para lo cual cuenta con el gráfico de barras mostrado. Ayuda al docente a determinar la media aritmética de la edad de sus estudiantes.



A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

Organizamos en una tabla la información del gráfico de barras:

Edad (x_i)	Cantidad de estudiantes (f_i)	$f_i \cdot x_i$
11	11	11 × 11 = 121
12	14	14 × 12 = 168
13	4	4 × 13 = 52
14	1	1 × 14 = 14
Total	30	355

Calculamos el promedio:

$$\bar{x} = \frac{11 \times 11 + 14 \times 12 + 4 \times 13 + 1 \times 14}{30} = \frac{355}{30} = 11{,}8333...$$

Respuesta:

La edad promedio de los estudiantes es 11,83 años.

Ten en cuenta

Para calcular la media aritmética o promedio puedes utilizar:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + ... + x_k \cdot f_k}{n}$$

Ahora, respondemos la siguiente pregunta:

1. Describe el procedimiento que se realizó para determinar la media aritmética de la edad de los estudiantes. ¿Qué significa que un grupo de estudiantes tenga en promedio 11,83 años?

Situación B: El descuento

Con la finalidad de ofrecer un descuento especial al grupo etario que compra más en una farmacia, en dicho establecimiento se registraron las edades de los clientes que acudieron durante un día. Las edades registradas fueron las siguientes:

18	34	25	16	42	29	23	18	25	29	17	16
35	27	54	37	27	27	19	26	43	27	26	33

Los clientes con la edad más representativa recibirán un descuento del 40 % en su próxima compra. ¿Cuántos clientes recibirán este descuento?

Fuente: Shutterstock

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

Calculamos las medidas de tendencia central para determinar la edad representativa de los clientes.

Moda (Mo)

Notamos que 27 es la edad que tiene mayor frecuencia:

18	34	25	16	42	29	23	18	25	29	17	16
35	**27**	54	37	**27**	**27**	19	26	43	**27**	26	33

Mo = 27

Mediana (Me)

Ordenamos las edades de menor a mayor, como la muestra tiene un número par de datos, la mediana es el promedio de los dos datos centrales:

$$\underbrace{16; 16; 17; 18; 18; 19; 23; 25; 25; 26; 26}_{11\text{ datos}};\ \underbrace{\mathbf{27}; \mathbf{27}}_{2\text{ datos centrales}};\ \underbrace{27; 27; 29; 29; 33; 34; 35; 37; 42; 43; 54}_{11\text{ datos}}$$

Calculamos el promedio de los dos datos centrales y el resultado será la mediana.

$$Me = \frac{27 + 27}{2} = 27$$

Media aritmética ($\bar{x}$)

Dividimos la suma de todos los valores por el número total de datos:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 16 + 17 + 2 \cdot 18 + 19 + 23 + 2 \cdot 25 + 2 \cdot 26 + 4 \cdot 27 + 2 \cdot 29 + 33 + 34 + 35 + 37 + 42 + 43 + 54}{24}$$

$$\bar{x} = \frac{673}{24} \longrightarrow \bar{x} \approx 28{,}042$$

La moda y la mediana coinciden, pues el valor de ambas es 27; mientras que la media tiene un valor de 28,042.

La edad más representativa es 27 años.

Respuesta: Cuatro clientes recibirán el descuento del 40 %.

Ahora, respondemos la siguiente pregunta:

1. En general, ¿cuándo la media de un conjunto de datos no resulta muy representativa?

¿Sabías que...?

La media aritmética es representativa cuando los datos son no dispersos. Para calcularla, usamos el rango (R), que es la diferencia entre el mayor y el menor dato. Si el resultado es un número alto, significa que los datos son dispersos. Por ejemplo, si se tienen los datos 0; 1; 5; 7; 7; 9; 10; 15; 31; 40, el rango es R = 40 – 0 = 40. Como el valor es alto, decimos que los datos son dispersos.

Aprendemos a partir del error

Situación C: Tallas de los integrantes de un equipo de fútbol

Las estaturas de los seis integrantes del equipo de fulbito de primer grado de secundaria de una institución educativa son las que se muestran en la tabla.

¿Cuál es la estatura representativa de los estudiantes que conforman este equipo?

Nombre	Estatura (cm)
Rodrigo	143
Franco	144
Tomás	146
Gerardo	148
José Luis	149
Carlos	128

Fuente: Shutterstock

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

Calculamos las medidas de tendencia central para determinar la estatura representativa del equipo.

Moda (Mo)

Notamos que es un conjunto amodal, porque no se repite ninguno de los datos, es decir, no hay moda.

Mediana (Me)

Ordenamos los datos y promediamos los dos centrales:

$$128;\ 143;\ 144;\ 146;\ 148;\ 149 \rightarrow \text{Me} = \frac{146 + 148}{2} \rightarrow \text{Me} = 147 \text{ cm}$$

Media aritmética ($\bar{x}$)

Dividimos la suma de todos los valores por el número total de datos:

$$\bar{x} = \frac{143 + 144 + 146 + 148 + 149 + 128}{6} \rightarrow \bar{x} = \frac{858}{6} \rightarrow \bar{x} = 143 \text{ cm}$$

La estatura promedio es 143 cm y solo uno de los estudiantes la tiene, por lo que la media no resultará muy representativa.

Respuesta: La estatura representativa es 147 cm.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. ¿Cuándo la media aritmética de un conjunto de datos resulta representativa?

2. Verifica el procedimiento y la respuesta, y corrige si hubiera algún error.

Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito

Representamos las características de una muestra o de una población por medio de variables cuantitativas y expresamos el comportamiento de los datos mediante gráficos estadísticos y medidas de tendencia central; explicamos y usamos procedimientos para determinar la mediana, la media y la moda. Asimismo, justificamos afirmaciones con conocimientos estadísticos.

Clases de variables

- **Cualitativas**
  - Nominales
    Ejemplo: Color de ojos
  - Ordinales
    Ejemplo: Nivel de instrucción
- **Cuantitativas**
  - Continuas
    Ejemplo: Estatura de un niño
  - Discretas
    Ejemplo: Número de hermanos

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. Un docente de Marketing informó que la nota que obtuvieron más estudiantes en una prueba fue 14. Si quisiéramos interpretar los datos estadísticamente, podríamos decir que la nota expresada por el docente es:

   a) el promedio
   b) la media
   c) la mediana
   d) la moda

2. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justifica tu respuesta.

   I. La media aritmética es siempre menor que la moda.
   II. Si ordenamos los datos, siempre encontraremos a la moda en el centro.
   III. Puede haber más de una moda en un grupo de datos.

   a) Solo I
   b) Solo II
   c) Solo III
   d) I y III

3. Un estudiante obtiene los siguientes puntajes en sus exámenes de Contabilidad durante un semestre:

14	13	1	16	16	15	14	18	18	17	17	20	19	18	0

   ¿Cuál es el puntaje más representativo que obtuvo el estudiante?

   a) 16
   b) 14,4
   c) 18
   d) 14

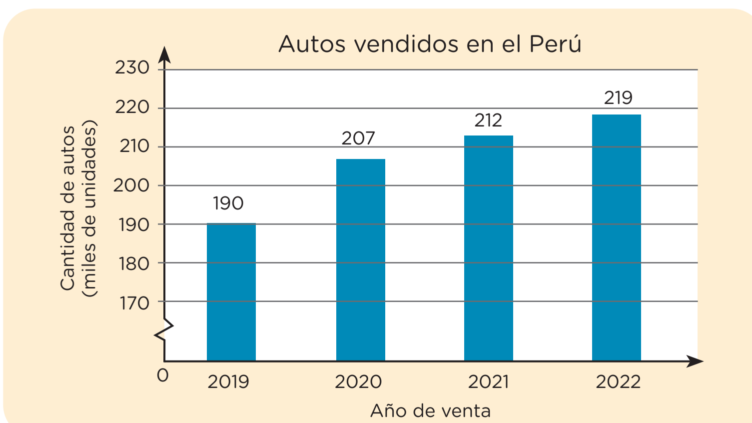
4. Los datos siguientes corresponden a los minutos que Alberto debió esperar el bus para ir a su trabajo durante 15 días:

20	5	6	8	6	6	8	6	5	6	8	6	5	6	7

   ¿Cuál de las medidas de tendencia central tomará en cuenta Alberto para estimar el tiempo que debe esperar su transporte?, ¿por qué?

5. El siguiente gráfico de barras muestra la venta de autos en el Perú del 2019 al 2022. De acuerdo con el comportamiento de los datos, determina la media aritmética de la cantidad de autos vendidos en ese periodo.

Fuente: Shutterstock



a) 207 000 autos

b) 212 000 autos

c) 216 000 autos

d) 218 000 autos

Ten en cuenta

El **gráfico de barras** está formado por barras rectangulares del mismo ancho y sus alturas está determinada por la frecuencia de cada uno de los valores de la variable. Además, la moda corresponde a la barra más alta.

6. La siguiente tabla muestra la información de la cantidad de veces que asistieron al cine 100 personas durante el mes de marzo. Completa la tabla según el ejemplo.

Cantidad de veces que asistieron al cine	Cantidad de personas (f_i)	Frecuencia relativa porcentual (h_i%)	Grado del ángulo del sector circular
0	20	20 %	$\frac{20}{100} \times 360° = 72°$
1	25		
2	40		
3	5		
4	10		

- Determina qué porcentaje de personas asistieron al cine en más de dos oportunidades.
- Representa los datos mediante un gráfico circular. Utiliza tu transportador.

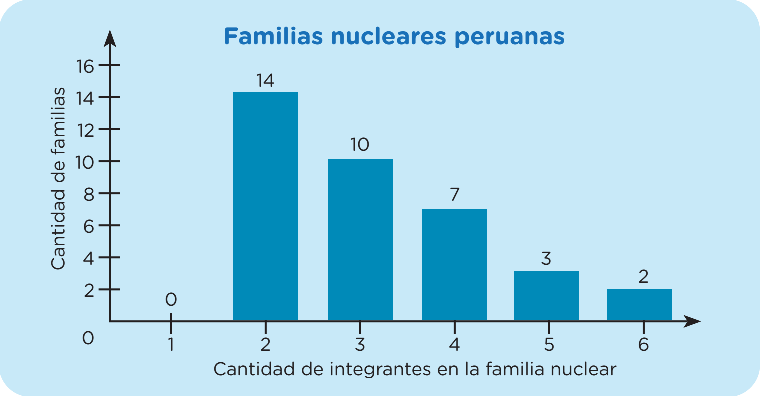
Recuerda

Un diagrama circular es la representación de datos en un círculo. Se usa para representar los porcentajes correspondientes. El diagrama circular (también llamado gráfica circular, gráfica de pastel o diagrama de sectores) sirve para representar variables cualitativas o cuantitativas discretas.

Recuerda

La media aritmética se obtiene sumando todos los valores de los datos y dividiendo el resultado entre la cantidad total de datos.

7. A partir del siguiente gráfico, determina la cantidad de integrantes promedio de la familia nuclear peruana. Una familia nuclear está formada por los miembros de un único núcleo familiar; es decir, es el grupo formado por los padres y sus hijos.



a) 2,86
c) 3,42
b) 3,14
d) 4,0

8. El gerente de una empresa de confección de ropa deportiva toma una muestra de cinco sueldos de sus trabajadores y afirma que, si uno de sus trabajadores gana S/1200, entonces la media, mediana y moda de los sueldos son S/1500, S/1400 y S/1800, respectivamente. ¿Es correcta dicha afirmación? Justifica tu respuesta empleando procedimientos matemáticos.

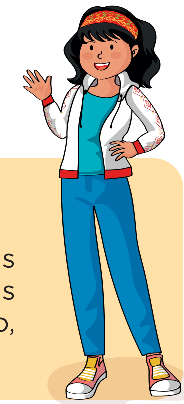
Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Representé las características de la muestra de una población por medio de variables cuantitativas discretas y expresé el comportamiento de los datos mediante gráficos de barras, gráficos circulares y medidas de tendencia central.			
Expliqué lo que comprendí de las medidas de tendencia central.			
Usé procedimientos para determinar la mediana, la media aritmética y la moda de variables cuantitativas discretas.			
Justifiqué afirmaciones con conocimientos estadísticos sobre medidas de tendencia central.			

¿Cómo operamos con números enteros en situaciones reales?

Construimos nuestros aprendizajes

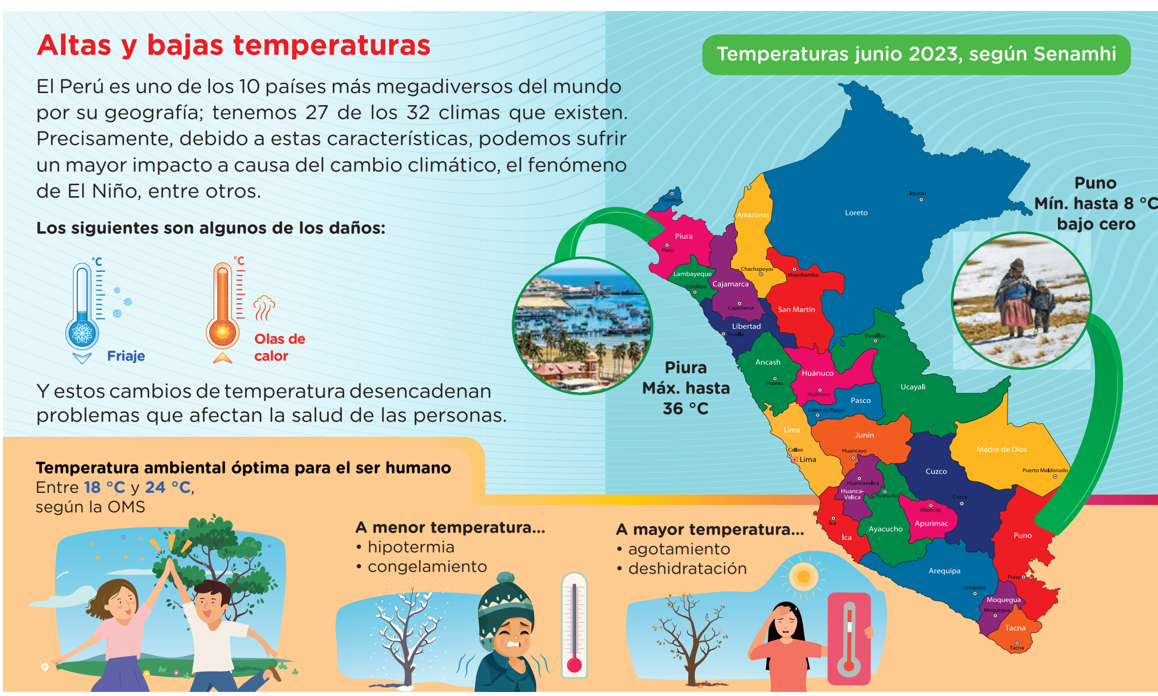


Propósito

Usamos diversas representaciones para comprender las propiedades de las operaciones con números enteros. Establecemos relaciones entre datos y las transformamos en expresiones numéricas con números enteros; asimismo, empleamos estrategias y procedimientos para realizar operaciones.

Representamos las diversas temperaturas del Perú

Adriana hizo la siguiente infografía con datos del Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología del Perú (Senamhi) y de la Organización Mundial de la Salud (OMS).



Fuente: Shutterstock

Adriana comparte esta información con sus compañeros y, conjuntamente, plantean las siguientes preguntas:

a. Entre la temperatura máxima advertida por la OMS y la temperatura máxima en Piura, ¿cuál es mayor?, ¿en cuánto? ¿Qué problemas de salud podría generar en sus pobladores?

b. Entre la temperatura mínima advertida por la OMS y la temperatura mínima en Puno, ¿cuál es menor?, ¿en cuánto? ¿Qué problemas de salud podría generar en sus pobladores?

c. ¿Cuántos grados Celsius (°C) de diferencia hay entre la temperatura máxima de Piura y la temperatura mínima de Puno?

Muy bien, ya estamos listos para iniciar el desarrollo de la ficha 5.

Comprendemos el problema

1. Según la información presentada, ¿cuál es la temperatura máxima a la que llegará la región Piura?

2. ¿Cuál será la temperatura mínima en Puno?

3. Según la OMS, ¿entre qué valores varía la temperatura ambiental óptima para nuestro organismo?

4. ¿Qué se pide hallar en las preguntas de la situación?

Ten en cuenta

Con los números naturales no pueden expresarse las ubicaciones por debajo del nivel del mar, periodos anteriores al inicio de la era cristiana, estados de pérdida financiera, entre otros.

Observa cada termómetro y lo que se ha expresado en ellos.

La marca del termómetro **está 40 °C por encima de 0 °C.**

Si continúa aumentando, llegará a 100 °C, que es la temperatura de ebullición del agua.

Se expresa con el número **+40**.

El termómetro marca **0 °C**.

A esta temperatura, el agua se congela.

Se expresa con el número **0**.

La marca del termómetro **está 10 °C por debajo de 0 °C.**

A esta temperatura se encuentran los nevados.

¿Con qué número se expresa la temperatura del termómetro azul?

No existe un número natural que pueda expresar temperaturas por debajo del cero. Por ello, ha sido necesario extender el conjunto de los números naturales. Así nace el **conjunto de los números enteros**, que incluye las cantidades negativas.

Recuerda

El conjunto de los números naturales (ℕ) está conformado por 0; 1; 2; 3; 4...

Los puntos suspensivos (...) indican que el conjunto de los números naturales continúa indefinidamente hacia números mayores. Es decir, no hay un número final en el conjunto de los números naturales.

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

5. Lee el procedimiento que realizará Juana para determinar cuál es mayor, entre la temperatura máxima recomendada por la OMS y la temperatura máxima de Piura, y en cuánto. Luego, responde.

> **Procedimiento de Juana**
> 1. Ubicaré en la recta numérica +24 y +36, que son los números enteros que expresan la temperatura máxima recomendada por la OMS y la máxima de Piura.
> 2. Determinaré cuál es mayor y en cuánto.

6. Lee el procedimiento que realizará Pedro para determinar cuál es menor, entre la temperatura mínima recomendada por la OMS y la temperatura mínima de Puno, y en cuánto.

> **Procedimiento de Pedro**
> 1. Ubicaré en la recta numérica +18 y -8, que son los números enteros que expresan la temperatura mínima recomendada por la OMS y la mínima de Puno.
> 2. Determinaré cuál es menor y en cuánto.

7. Describe el procedimiento que realizarías para dar respuesta a las preguntas de la situación.

Ejecutamos la estrategia o plan

8. Escribe una expresión matemática para cada una de estas temperaturas:

- 36 °C: ____________________________
- 24 °C: ____________________________
- 8 °C bajo cero: ________________
- 18 °C: ____________________________

Ten en cuenta

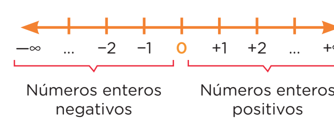
El conjunto de los **números enteros** ($\mathbb{Z}$) está formado por la unión de los números positivos, los negativos y el cero. Se representan de forma ordenada en la recta numérica. Los enteros positivos se ubican a la derecha del cero, y los enteros negativos, a su izquierda.

Entonces:

$\mathbb{Z} = \{... -2; -1; 0; 1; 2...\}$

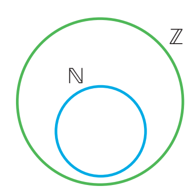
Los puntos suspensivos (...) indican que el conjunto se extiende infinitamente en ambas direcciones.

Gráficamente:



¿Sabías que...?

El conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) está incluido en el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$).



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Ten en cuenta

Dados dos números enteros ubicados en la recta numérica, es mayor el número que se encuentra situado a la derecha del otro.

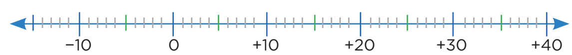
Recuerda

Los enunciados que se refieren a avances se expresan matemáticamente como cantidades positivas, y los referidos a retrocesos, como negativas.

¿Sabías que...?

Otras situaciones cotidianas que se expresan con números negativos son ubicaciones por debajo del nivel del mar, estados de pérdida en una empresa, entre otras.

9. Ubica en la recta numérica los valores de la temperatura máxima advertida por la OMS y la temperatura máxima de Piura. Luego, completa cada oración.



a) .... °C está .... unidades más a la derecha en la recta numérica que .... °C; por lo tanto, la temperatura máxima en Piura es .... en 12 °C que la temperatura máxima advertida por la OMS.

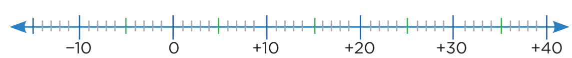
b) También se pudo obtener así:

Temperatura menor		Unidades que avanza		Temperatura mayor
....	+	....	=	....

c) Responde la primera pregunta de la situación: ....

....

10. Ubica en la recta numérica los valores de la temperatura mínima advertida por la OMS y la temperatura mínima de Puno. Luego, completa cada oración.



a) .... está .... unidades más a la derecha en la recta numérica que ....; por lo tanto, la temperatura mínima de Puno es .... en 26 °C que la temperatura mínima advertida por la OMS.

b) También se pudo obtener así:

Temperatura menor		Unidades que avanza		Temperatura mayor
....	+	....	=	....

c) Responde la segunda pregunta de la situación: ....

....

11. Realiza las operaciones que permiten dar respuesta a la tercera pregunta de la situación.

Temperatura menor		Unidades que avanza		Temperatura mayor
....	+	....	=	....

Entonces, la respuesta es ....

....

Reflexionamos sobre el desarrollo

12. ¿De qué otra manera se puede resolver la situación? Explica.

Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito

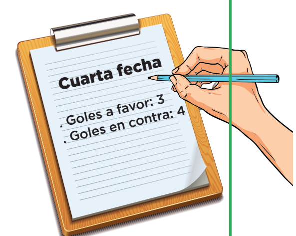
Empleamos diversas estrategias para realizar operaciones con números enteros. Asimismo, justificamos las operaciones con números enteros mediante ejemplos y propiedades de las operaciones, y corregimos los procedimientos si hubiera errores.

Situación A: El registro de goles

El entrenador de un equipo de fútbol femenino registró los goles a favor y en contra que recibió su equipo hasta la cuarta fecha.

a. ¿Cuál es la diferencia de goles hasta la cuarta fecha? ¿Cómo se interpreta ese valor?

b. Si en la quinta fecha anotaron 2 goles, pero recibieron 5 en contra, ¿cuál será su nueva diferencia de goles (DG) y qué significará?



A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

a. Interpretamos la información del equipo hasta la cuarta fecha mediante números enteros:

Goles a favor (GF): +3 Goles en contra (GC): −4

Para hallar la diferencia de goles (DG), sumamos dichos valores:

$$(+3) + (-4)$$

Observa cómo sumar números enteros con piezas de papel.

1.° Reconocemos las piezas de cada color y forma, según lo indicado en la tabla:

Números positivos (+)		Números negativos (−)	
Unidad		Unidad	
Decena		Decena	
Centena		Centena	

2.° Representamos la operación con las piezas de papel:

(+3) + (−4)

3.° Por cada pieza anaranjada, tachamos una pieza azul, ya que −1 y +1 suman 0.

Ten en cuenta

Dibuja 10 piezas de cada tipo, píntalas por un lado con azul y por el otro lado con anaranjado. Recórtalas. Luego, forma una pareja con un compañero para jugar con este material. Uno le dictará un número entero o una operación con números enteros al compañero y el otro deberá efectuarla usando las piezas de papel de colores.

Ten en cuenta

Para sumar números enteros de signos diferentes, se restan sus **valores absolutos,** y el resultado lleva el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto.

Glosario

El **valor absoluto** de un número entero *a* es la distancia, en la recta numérica, que lo separa del cero; por eso siempre es un valor positivo. Se denota por $|a|$ y se lee "valor absoluto de *a*".

Ejemplo:

- $|+7| = 7$
- $|-7| = 7$

Recuerda

Para sumar números enteros de signos iguales, se suman sus valores absolutos y el resultado lleva el signo común.

4.° Contamos lo que queda y escribimos la respuesta.

Como queda ■, que representa –1, entonces (+3) + (−4) = –1.

Usamos la regla para sumar enteros de signos diferentes:

• El **valor absoluto** de +3 es 3. • El valor absoluto de −4 es 4.

Entonces: 4 − 3 = 1

Como el número con mayor valor absoluto es −4 y su signo es menos, entonces la respuesta llevará signo negativo:

(+3) + (−4) = −1

Así comprobamos que se obtiene el mismo resultado.

Respuesta: La diferencia de goles (DG) hasta la cuarta fecha es −1. Su interpretación es que llevan un gol en contra.

b. Analizamos lo ocurrido en la quinta fecha.

Como el equipo anotó 2 goles y recibió 5, entonces actualizamos la información de los goles a favor y en contra:

	Cuarta fecha	Quinta fecha
Goles a favor (GF)	+3	(+3) + (+2)
Goles en contra (GC)	−4	(−4) + (−5)
Diferencia de goles (DG)	−1	¿?

Porque anotó 2 goles.

Porque recibió 5 goles.

Calculamos los goles a favor (GF) hasta la quinta fecha:

(+3) + (+2)

Como no podemos tachar nada, contamos que hay en total 5 piezas azules, es decir, +5. Por lo tanto:

Goles a favor (GF):
(+3) + (+2) = +5

Calculamos los goles en contra (GC) hasta la quinta fecha:

(−4) + (−5)

Como no podemos tachar nada, contamos que hay en total 9 piezas naranjas, es decir, -9. Por lo tanto:

Goles en contra (GC):
(−4) + (−5) = −9

Finalmente, calculamos la nueva diferencia de goles:

(+5) + (−9) = −4

Respuesta: La nueva diferencia de goles es −4, lo que significa que llevan 4 goles en contra.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. Describe el procedimiento que se realizó para dar respuesta a las preguntas de la situación.

2. Si en la sexta fecha el equipo anotó 5 goles y recibió 3 goles, ¿cuál será la nueva diferencia de goles?

Situación B: El globo meteorológico

La temperatura del aire baja conforme se asciende en la atmósfera, a razón de 9 °C por cada 300 metros, aproximadamente. En un momento dado, un globo meteorológico registró una temperatura de −90 °C, mientras que la temperatura a nivel del suelo en ese mismo momento era 18 °C. ¿A qué altura se encontraba el globo meteorológico?

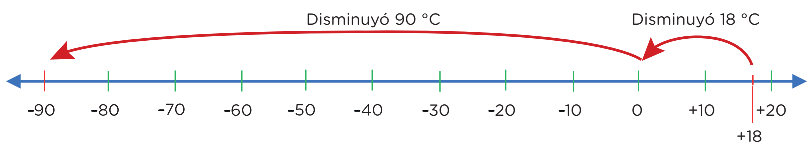
Adaptado de Santis, M. (2015). *Matemática 7.º básico. Cuaderno de ejercicios.* Ediciones SM Chile S. A.

Fuente: Shutterstock

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

Como el globo se ha elevado y la temperatura baja conforme se asciende, sabemos que la temperatura ha disminuido. Para calcular en cuánto disminuyó, ubicamos los datos en la recta.

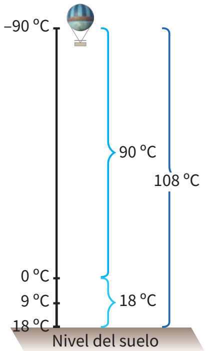


Contamos cuánto retrocedió en la recta. Lo hacemos por partes:

De 18 °C a 0 °C disminuyó 18 °C y de 0 °C a −90 °C disminuyó 90 °C. En total, disminuyó 108 °C.

También se pudo restar −90 °C de 18 °C: (+18) – (−90) = 108

Representamos los datos en un diagrama e interpretamos:



La temperatura disminuyó de 9 °C en 9 °C, así:

18 °C; 9 °C; 0 °C...

Dividimos la disminución total entre lo que disminuye cada vez: 108 °C ÷ 9 °C = 12

Entonces disminuyó 12 veces 300 m; por lo tanto, la altura se calculará multiplicando.

12 × 300 m = 3600 m

Respuesta:
El globo se encuentra a 3600 m de altura.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. Describe el procedimiento realizado para dar respuesta a la pregunta de la situación.

2. Al observar que la temperatura de 3 °C bajo cero varía a 1 °C bajo cero, Julia afirma que la temperatura disminuye. ¿Es correcta la afirmación de Julia? Justifica tu respuesta.

Recuerda

De manera práctica, entre un número negativo y un número positivo, siempre será mayor el positivo.

Ten en cuenta

La sustracción de dos números enteros equivale a la adición del minuendo con el **opuesto** del sustraendo.

Comprobamos usando la regla:

(+18) – (−90) = (+18) + (+90)
= 108

Glosario

El **opuesto de un número** entero es aquel que tiene el mismo valor numérico, pero signo contrario. Por ejemplo:

Opuesto de +3: −3

Opuesto de −7: +7

Aprendemos a partir del error

Situación C: Alturas y depresiones

El Huascarán, el pico más alto del Perú, alcanza los 6768 metros sobre el nivel del mar (m s. n. m.). Por otro lado, la depresión de Sechura, zona de tierras bajas situada en la región Piura, tiene su punto más bajo a 34 metros bajo el nivel del mar (m b. n. m.). ¿Cuál es la diferencia en metros entre el pico más alto y el punto más bajo de nuestro país?


Fuente: Shutterstock

El Huascarán


Fuente: Shutterstock

El desierto de Sechura

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

Como nos piden calcular la diferencia entre ambos puntos, restamos las cantidades:

$$6768 \text{ m} - 34 \text{ m} = 6734 \text{ m}$$

Respuesta:

La diferencia entre los dos puntos es de 6734 m.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. Completa la gráfica lineal vertical que representa las alturas mencionadas en la situación.

2. Escribe los números enteros que expresan las cantidades de la situación:

- Altura de Huascarán.

....

- Depresión de Sechura:

....

3. ¿Cuál es la operación matemática que permite resolver el problema y cuál fue el error cometido?

4. Efectúa correctamente el procedimiento que permite resolver el problema.

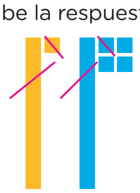
Ten en cuenta

¿Cómo efectuamos sustracciones usando piezas de papel?

1. Representa el minuendo y el sustraendo con las piezas de papel. Por ejemplo:
   $(-11) - (-14)$

2. Voltea las piezas del sustraendo. (Esto equivale a sumar con el opuesto de un número).
   $(-11) + (+14)$

3. Retira o tacha una pieza azul por cada anaranjada, cuenta lo que queda y escribe la respuesta.



Respuesta: $(-11) - (-14) = +3$

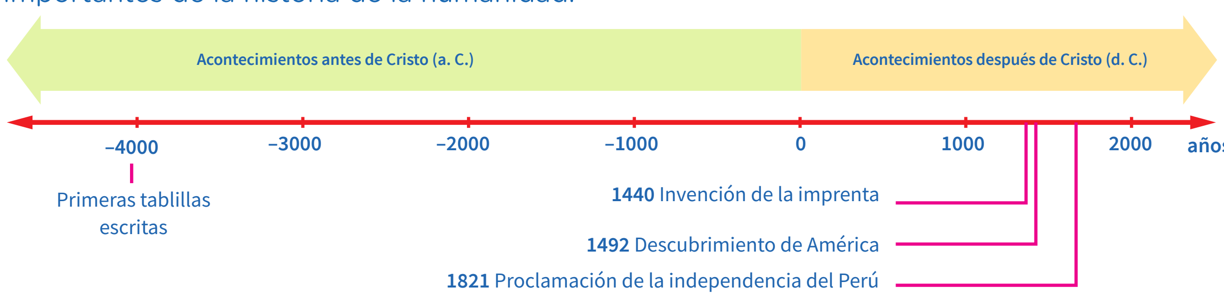
Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito

Establecemos relaciones entre datos y las transformamos en expresiones con números enteros. Asimismo, expresamos nuestra comprensión y empleamos diversas estrategias para realizar operaciones con números enteros. Justificamos afirmaciones con conocimientos, ejemplos y propiedades de las operaciones.

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

La siguiente línea de tiempo muestra algunos acontecimientos importantes de la historia de la humanidad.



Utiliza esta información para responder las preguntas 1 y 2.

1. ¿Cuántos años transcurrieron desde la invención de la imprenta hasta el descubrimiento de América?

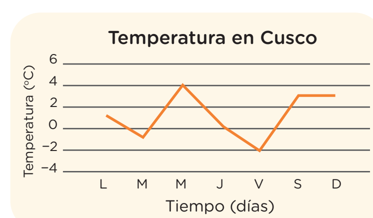
   a) 40 años b) 52 años c) 58 años d) 92 años

2. ¿Cuántos años transcurrieron desde las primeras tablillas escritas hasta la proclamación de independencia del Perú?

   a) 2230 años b) 4770 años c) 5492 años d) 5821 años

3. El Servicio Nacional de Meteorología e Hidrografía del Perú (Senamhi) registró las temperaturas a las 2 a. m. en la ciudad del Cusco durante siete días, como se muestra en el gráfico del margen. ¿Cuántos grados Celsius (°C) desciende la temperatura del miércoles al viernes?

   a) Desciende 6 °C c) Desciende 4 °C
   b) Desciende 3 °C d) Desciende 2 °C



4. De acuerdo con un libro de historia, un personaje nació en el año 35 a. C. y murió en el año 15 d. C., a la edad de 50 años. ¿Es esto realmente posible? Explica haciendo uso de tus conocimientos matemáticos.

5. La galería Alfombra Mágica tiene 3 niveles de sótano y 8 pisos, y está ubicada en un conocido centro comercial. En ese lugar, Viviana es propietaria de dos tiendas. Una de ellas se encuentra en el 3.er nivel del sótano y la otra se ubica 7 niveles más arriba de esta. ¿En qué piso se ubica la segunda tienda de Viviana?

   a) Piso 3 b) Piso 4 c) Piso 7 d) Piso 10

Recuerda

Hallar la **variación entre dos números enteros** significa calcular la diferencia que existe entre ellos. Por ejemplo, si la temperatura en una congeladora era −10 °C y luego se elevó a −4 °C, para calcular la variación restamos la cantidad mayor menos la menor. Entonces:

$$(-4) - (-10)$$

$$(-4) + (+10)$$

$$+6$$

Esto significa que la temperatura ha subido 6 °C.

6. Cierto día, en la ciudad de Puno, se registró la temperatura en tres momentos distintos. La primera medición se hizo a las 7 a. m. y marcó lo siguiente:

−2°C

Luego de 5 horas subió 10 °C y 10 horas después bajó 7 °C. Alicia afirma que la temperatura que marcaba el termómetro a las 10 p. m. es 1 °C. ¿Es correcta su afirmación? Justifica tu respuesta.

7. La siguiente tabla muestra las temperaturas máxima y mínima registradas en un día en varias ciudades:

Temperatura \ Ciudad	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Ciudad 5
Mínima (°C)	−7°	−1°	−9°	16°	3°
Máxima (°C)	23°	18°	28°	24°	38°

¿En qué ciudades se dan la mayor y la menor variación de temperatura, respectivamente?

a) Ciudad 3 y ciudad 5
b) Ciudad 3 y ciudad 4
c) Ciudad 1 y ciudad 4
d) Ciudad 1 y ciudad 5

8. Si *A* es un número entero negativo y *B* es un número entero positivo, ¿qué signo tendrá el resultado de la operación *A* – *B*?, ¿por qué? Sustenta tu respuesta con un ejemplo.

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre datos y las transformé en expresiones numéricas con números enteros.			
Usé diversas representaciones para comprender las propiedades de las operaciones con números enteros.			
Empleé diversas estrategias para realizar operaciones con números enteros.			
Justifiqué afirmaciones con conocimientos y propiedades de las operaciones con números enteros.			

¿Cómo nos ayudan las inecuaciones a respetar los límites de velocidad?

Construimos nuestros aprendizajes

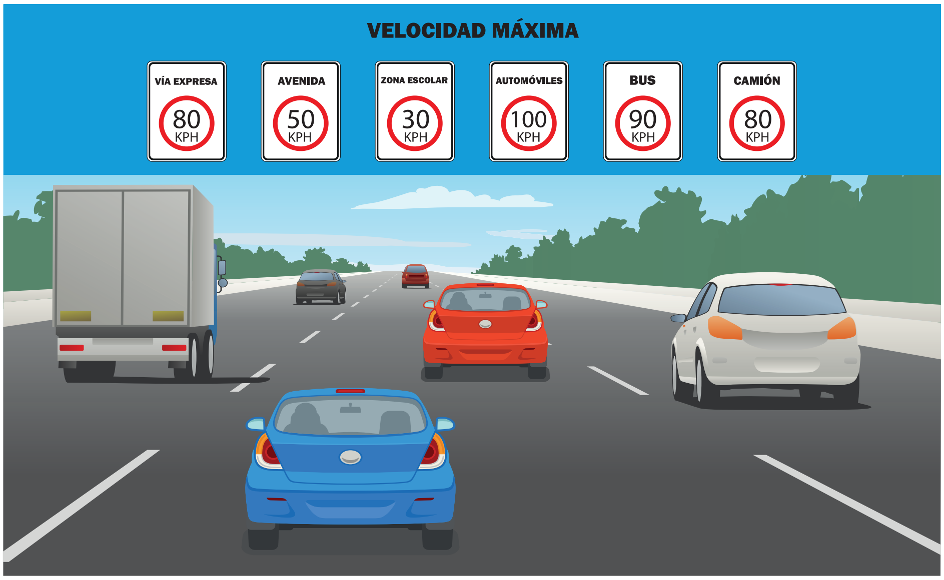
Propósito

Establecemos relaciones entre datos, valores desconocidos o desigualdades, y transformamos esas relaciones en inecuaciones. También empleamos estrategias heurísticas y procedimientos, mediante el uso de propiedades de las operaciones y de las inecuaciones, para resolver un problema.

Aprendemos la importancia de respetar los límites de velocidad

El exceso de velocidad es la primera causa de los accidentes de tránsito; así lo reveló un informe del Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI). Dicho documento destaca que la segunda causa de accidentes de tránsito es la invasión del carril contrario.

Respetar los límites de velocidad establecidos es de vital importancia para prevenir accidentes de tránsito. Por ello, los conductores y peatones, en general, debemos informarnos para evitar cometer alguna imprudencia que resulte fatal.



Fuente: Shutterstock

Juan conducía su auto por la vía Expresa. Iba con su amigo César, quien le dijo: “Vas muy despacio; podrías duplicar tu velocidad, luego aumentarla en 10 km/h y, aun así, estarías respetando el límite de velocidad permitido”. A partir de lo dialogado:

a. Escribe lo mencionado por César mediante una expresión matemática. Luego, calcula la velocidad máxima a la que podría estar conduciendo Juan.

b. Considerando que Juan conducía a la velocidad máxima según la pregunta anterior y que dentro de poco saldría de la vía Expresa para entrar a la zona escolar, ¿cuánto es lo mínimo que debería reducir su velocidad?

Comprendemos el problema

1. Escribe de qué se trata la situación.

2. Completa la tabla con las velocidades que permiten resolver la situación.

Zona	Velocidad máxima

3. ¿Qué entiendes por "duplicar un valor"? Plantea un ejemplo.

4. ¿Qué entiendes por "aumentar un valor"? Escribe un ejemplo.

5. ¿Qué entiendes por "límite de velocidad"?

6. ¿Qué piden hallar las preguntas de la situación?

¿Sabías que...?

La velocidad es una magnitud que expresa el espacio recorrido en cierta unidad de tiempo; es decir:

$$v = \frac{e}{t}$$

Donde:

v: velocidad
e: espacio
t: tiempo

Por ejemplo, una velocidad de 80 km/h indica que un vehículo recorre 80 km en una hora.

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

7. Observa los gráficos de la derecha y responde cuál o cuáles expresan lo siguiente: “la masa de las manzanas no supera 1 kg”.

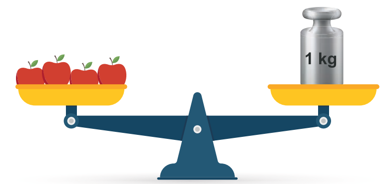


Gráfico 1

8. Si la masa de una manzana se denota con *m*, escribe la expresión matemática que corresponde al enunciado de la pregunta anterior.

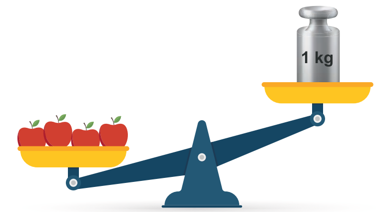


Gráfico 2

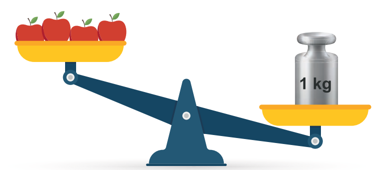


Gráfico 3

9. Observa cómo un estudiante resolvió la siguiente situación:
Gabriela decide viajar de Lima a Huaral en su auto. Durante su viaje, observa la señal de tránsito que se muestra. Ella advierte que, aunque aumente en 20 km/h su velocidad, todavía estaría respetando lo indicado por la señal de tránsito. ¿Cuál era la velocidad máxima a la que conducía Gabriela?

Como no conozco la velocidad a la que iba Gabriela, escogí la variable x para representarla. Luego, expreso matemáticamente lo que ella dice:

Lenguaje verbal	Lenguaje matemático
Velocidad del auto	x
Velocidad aumenta en 20 km/h	$x + 20$

Para que la nueva velocidad siga respetando el límite de velocidad, debe ser menor o igual que este. Entonces:

$x + 20 \leq 100 \quad \rightarrow \quad x \leq 80$

Por lo tanto, Gabriela va a una velocidad menor o igual que 80 km/h. La máxima podría ser 80 km/h.

10. Según lo observado en la pregunta 9, ordena el procedimiento que permite responder las preguntas de la situación inicial.

☐ Relacionar la velocidad máxima a la que podría ir Juan con la velocidad permitida en la zona escolar.

☐ Plantear y resolver la inecuación para calcular lo mínimo que debe reducir la velocidad para cumplir el límite.

☐ Convertir lo que dice César en el lenguaje verbal al lenguaje matemático.

☐ Plantear y resolver la inecuación para calcular la velocidad máxima a la que podría ir Juan.

Ten en cuenta

Una **desigualdad** es una expresión matemática que compara dos cantidades, que pueden incluir incognitas, números y operadores aritméticos.
Estas cantidades se relacionan mediante símbolos de orden como “mayor que” (>), “menor que” (<), “mayor o igual que” (≥), y “menor o igual que” (≤).

Ejecutamos la estrategia o plan

11. Completa la tabla con las expresiones del lenguaje matemático que corresponden a las frases del lenguaje verbal.

Lenguaje verbal	Lenguaje matemático
Velocidad del auto	v
Se duplica la velocidad del auto	
Se duplica la velocidad del auto, luego se aumenta en 10 km/h	

12. Representa en lenguaje matemático lo siguiente: "Podrías duplicar la velocidad, luego aumentarla en 10 km/h y, aun así, estarías dentro del límite de la velocidad permitido en la vía Expresa". Luego, resuelve la inecuación y responde la primera pregunta de la situación.

13. Considerando los valores de la respuesta a la pregunta anterior, responde la segunda pregunta de la situación.

Recuerda

El conjunto solución (C. S.) es aquel conjunto de todos los posibles valores que hacen verdadera una inecuación.

Por ejemplo:

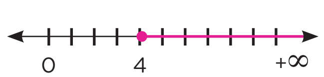
$$5x - 7 \geq 13$$

$$5x \geq 20$$

$$x \geq 4$$

C. S. = {4; 5; 6; 7...}

Gráficamente:



Reflexionamos sobre el desarrollo

14. ¿Podría Juan conducir a una velocidad menor que la obtenida en la primera pregunta de la situación? Justifica tu respuesta.

15. ¿Podría Juan reducir su velocidad a una menor que el valor obtenido en la segunda pregunta de la situación? Justifica tu respuesta.

Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito

Expresamos con lenguaje algebraico el conjunto solución de una condición de desigualdad. Asimismo, justificamos las propiedades de las desigualdades usando ejemplos y con nuestros conocimientos matemáticos, y corregimos errores si los hubiera.

Situación A: Los trabajos de investigación

Luis es profesor de un instituto de educación superior. Al final de ciclo, evalúa a sus estudiantes con un trabajo de investigación. Al momento de revisarlos, piensa: "Vamos, no son tantos. Si tuviera 7 veces la cantidad de trabajos que tengo por revisar, sobrepasarían el millar; pero, si tuviera solo la mitad y 28 más, no llegarían a la centena". ¿Cuántos trabajos de investigación tiene que revisar Luis?

Fuente: Shutterstock

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

Identificamos que la incógnita es el número de trabajos de investigación por revisar, así que llamaremos x a dicho número.

Analizamos la primera parte de lo mencionado por Luis:
"Si tuviera 7 veces la cantidad de trabajos que tengo que revisar, sobrepasarían el millar". Organizamos en la tabla las expresiones matemáticas que corresponden.

Lenguaje verbal	Lenguaje matemático
Número de trabajos de investigación por revisar	x
7 veces la cantidad de trabajos que tengo por revisar	$7x$
7 veces la cantidad de trabajos que tengo por revisar sobrepasaría el millar	$7x > 1000$

Resolvemos la inecuación planteada:

$7x > 1000$

$7x\left(\frac{1}{7}\right) > 1000\left(\frac{1}{7}\right)$ Multiplicamos ambos miembros por $\frac{1}{7}$

$x > 142,9$

Ahora, analizamos la segunda parte de lo mencionado por Luis:
"Si tuviera solo la mitad y 28 más, no llegarían a la centena".

Ten en cuenta

Para resolver una inecuación, empleamos las propiedades de la desigualdad:

- Si multiplicamos ambos miembros de la inecuación por el mismo número positivo, el sentido de la desigualdad se mantiene.

Por ejemplo:

$7 < 10$

$7 \times 5 < 10 \times 5$

$35 < 50$

Ten en cuenta

Para resolver una inecuación, empleamos las propiedades de la desigualdad:

- Si sumamos el mismo valor a ambos miembros, la desigualdad se mantiene.

  Por ejemplo:

  $16 < 20$

  $16 + 5 < 20 + 5$

  $21 < 25$

- Si restamos el mismo valor a ambos miembros, la desigualdad se mantiene.

  Por ejemplo:

  $45 > 30$

  $45 - 10 > 30 - 10$

  $35 > 20$

Recuerda

La propiedad transitiva indica que, dados tres números reales a, b y c tales que

$a < b$ y $b < c$,

se cumple que $a < c$.

Por ejemplo:

$7 < 9$ y $9 < 11$

Entonces:

$7 < 11$

Organizamos en la tabla las expresiones matemáticas:

Lenguaje verbal	Lenguaje matemático
Número de trabajos de investigación por revisar	x
La mitad de los trabajos por revisar	$\frac{1}{2}x$
La mitad de los trabajos por revisar y 28 más	$\frac{1}{2}x + 28$
La mitad de los trabajos por revisar y 28 más no llegarían a la centena	$\frac{1}{2}x + 28 < 100$

Resolvemos la inecuación planteada:

$$\frac{1}{2}x + 28 < 100$$

$$\frac{1}{2}x + 28 - 28 < 100 - 28$$ Restamos 28 a ambos miembros.

$$\frac{1}{2}x < 72$$

$$2 \cdot \frac{1}{2}x < 2 \cdot 72$$ Multiplicamos por 2 a ambos miembros.

$$x < 144$$

Entonces, de la primera parte de lo mencionado por Luis:

$x > 142{,}9$ → C. S. = {**143**; 144; 145...}

De la segunda parte tenemos:

$x < 144$ → C. S. = {0; 1; 2; ... ; 141; 142; **143**}

Por propiedad transitiva: $142{,}9 < x < 144$

Luego, el único valor natural de x que satisface dicha relación es 143.

Respuesta:

Luis tiene 143 trabajos de investigación por corregir.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué se determinó que 143 es el número de trabajos de investigación que tiene que revisar Luis? Argumenta.

2. Si a los dos miembros de una desigualdad se les suma o resta un mismo número, ¿se obtiene otra desigualdad con el mismo sentido? Justifica tu respuesta con ejemplos.

Situación B: Los hermanos

Las edades de dos hermanos, Adrián y Rafaela, suman 18 años. ¿Cuál es la edad mínima entera que puede tener el mayor?

Fuente: Shutterstock

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

Nuestra incógnita es la edad del mayor, a la que llamaremos x. Como ambas edades suman 18 años, la menor será $(18 - x)$ años.

Por la relación de las edades, podemos plantear la siguiente inecuación: $x > 18 - x$

$x + x > 18 - x + x$ Sumamos x a ambos miembros.

$2x > 18$

$2x\left(\frac{1}{2}\right) > 18\left(\frac{1}{2}\right)$ Multiplicamos por $\frac{1}{2}$ ambos miembros.

$x > 9$

Respuesta:

La edad mínima entera que tiene el o la mayor es 10 años.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué se sumó x a ambos miembros de la inecuación?

2. Describe el procedimiento realizado para responder la pregunta de la situación.

3. ¿El hermano mayor podría tener 9 años?, ¿por qué?

Recuerda

Propiedades de la desigualdad

- Si sumamos o restamos el mismo valor a ambos miembros, la desigualdad se mantiene.

$$a < b$$
$$a \pm c < b \pm c$$

- Si multiplicamos o dividimos ambos miembros por un mismo numero positivo, el sentido de la desigualdad se mantiene.

$$a < b$$
$$a \times c < b \times c$$
$$a < b$$
$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

- Si multiplicamos o dividimos ambos miembros por un mismo número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte.

$$a < b$$
$$a \times -c > b \times -c$$
$$a < b$$
$$\frac{a}{-c} > \frac{b}{-c}$$

Aprendemos a partir del error

Situación C: Fabricación de cunas

En una empresa que fabrica cunas, la ganancia mensual en soles está determinada por la siguiente expresión:

$$G(x) = 400x - 10\ 000$$

Donde x representa la cantidad de cunas fabricadas y vendidas.

¿Cuántas cunas debe fabricar y vender dicha empresa este mes, como mínimo, para no registrar pérdidas económicas?

Fuente: Shutterstock

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

Si la empresa no va a perder, su ganancia debe ser positiva, por lo cual podemos plantear la siguiente inecuación:

$$400x - 10\ 000 > 0$$
$$400x > 10\ 000$$
$$x > \frac{10\ 000}{400}$$
$$x > 25$$

Respuesta:

Para no perder, la empresa debe fabricar y vender, como mínimo, 26 cunas.

¿Sabías que...?

La ganancia es un beneficio económico que resulta de restar los gastos de producción a los ingresos obtenidos.

Por ejemplo, en un negocio de venta de menús, si al preparar un plato los gastos son de S/10 y el menú se vende a S/12, entonces la ganancia será de S/2.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. Si la empresa fabrica y vende 24 cunas, ¿gana o pierde?, ¿cuánto? Y, si fabrica 25 y 26, ¿qué ocurre en cada caso?

2. ¿La respuesta dada es correcta? De no ser así, ¿cuál es la respuesta correcta? Explica por qué.

Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito

Establecemos relaciones entre datos, valores desconocidos o desigualdades, y las transformamos en inecuaciones. Expresamos nuestra comprensión con lenguaje algebraico y empleamos estrategias y procedimientos, así como las propiedades de las desigualdades. Justificamos afirmaciones con conocimientos matemáticos.

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. María adquiere cierta cantidad de entradas para el cine. Si regalara 4 entradas, tendría menos de 12. ¿Cuántas entradas tiene como máximo?

   a) 7 entradas
   b) 8 entradas
   c) 15 entradas
   d) 16 entradas

2. Si compro dos jabones, gasto menos de lo que me cuesta un champú. ¿Cuál es el máximo precio entero que se puede pagar por un jabón si un champú cuesta S/24?

   a) S/12
   b) S/11
   c) S/10
   d) S/17

3. Regina tiene el triple de la edad de Sebastián. Si la suma de ambas edades es menor que 72, ¿cuál es la edad máxima que puede tener Sebastián?

   a) 14 años
   b) 12 años
   c) 13 años
   d) 17 años

4. Para cada enunciado, escribe la expresión algebraica correspondiente.

   I. Mi hermano tiene más de 20 canicas.
   II. Luisa tiene menos de 20 años.
   III. Si gasto S/20, me queda menos de S/100.
   IV. En mi clase somos, por lo menos, 20 estudiantes.

5. Leonardo y sus amigos deben comprar uniformes deportivos para las olimpiadas de su colegio. Los jóvenes averiguan que cada polo cuesta S/18, y cada *short*, S/12. Si no pueden gastar más de S/700, ¿cuántos conjuntos como máximo podrán comprar?

   a) 25 conjuntos
   b) 23 conjuntos
   c) 24 conjuntos
   d) 22 conjuntos

Recuerda

Hay situaciones en las que se requiere traducir enunciados verbales a expresiones matemáticas.

Por ejemplo:

Lenguaje verbal	Lenguaje matemático
Un número desconocido	x
Disminuimos 6 al número	$x - 6$
A 10 le restamos el número desconocido	$10 - x$
El cuádruple del número	$4x$
La tercera parte del número	$\frac{1}{3}x$
Sumamos al número su consecutivo	$x + (x + 1)$

Recuerda

Si cuentas con dos condiciones de desigualdad, puedes aplicar la propiedad transitiva:

$a < b$ y $b < c \rightarrow a < c$

Por ejemplo, si x es mayor que 8, pero menor que 12, podemos expresarlo así:

$8 < x < 12$

Entonces:

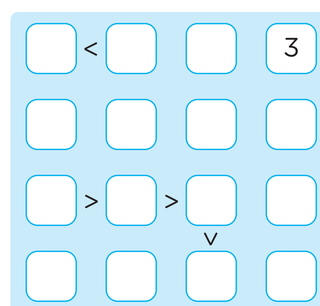
C. S. = {9; 10; 11}

6. Un comerciante compra cubos mágicos a un precio que oscila entre los 15 y 20 soles, y los vende a un precio entre los 30 y 35 soles. ¿Cuál puede ser su máxima ganancia al vender 25 cubos?

7. Jorge colecciona figuritas de la selección peruana de fútbol. Si consiguiera 6 más, su colección superaría las 40 figuritas. Pero, si regalara la mitad de las que tiene, le quedarían menos de 20. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero? Justifica.

   a) Jorge tiene más de 40 figuritas.
   b) Jorge tiene 40 figuritas.
   c) Jorge tiene 35; 36; 37; 38 o 39 figuritas.
   d) Jorge tiene más de 36 figuritas.

8. Completa cada casilla vacía con un número del 1 al 4, de manera que en cada fila y columna aparezcan los números sin repetirse. Además, dichos números deben cumplir la relación de orden indicada por los signos.



Evalúo mis aprendizajes

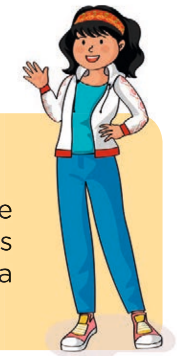
Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre datos y valores desconocidos, y las transformé en expresiones matemáticas que incluyen inecuaciones.			
Expresé con lenguaje algebraico el conjunto solución de una inecuación.			
Empleé estrategias heurísticas y procedimientos mediante el uso de propiedades de las inecuaciones para resolver un problema.			
Justifiqué afirmaciones con mis conocimientos matemáticos sobre las propiedades de las inecuaciones.			

Ficha 7

¿Cómo construimos formas geométricas con material concreto?

Construimos nuestros aprendizajes



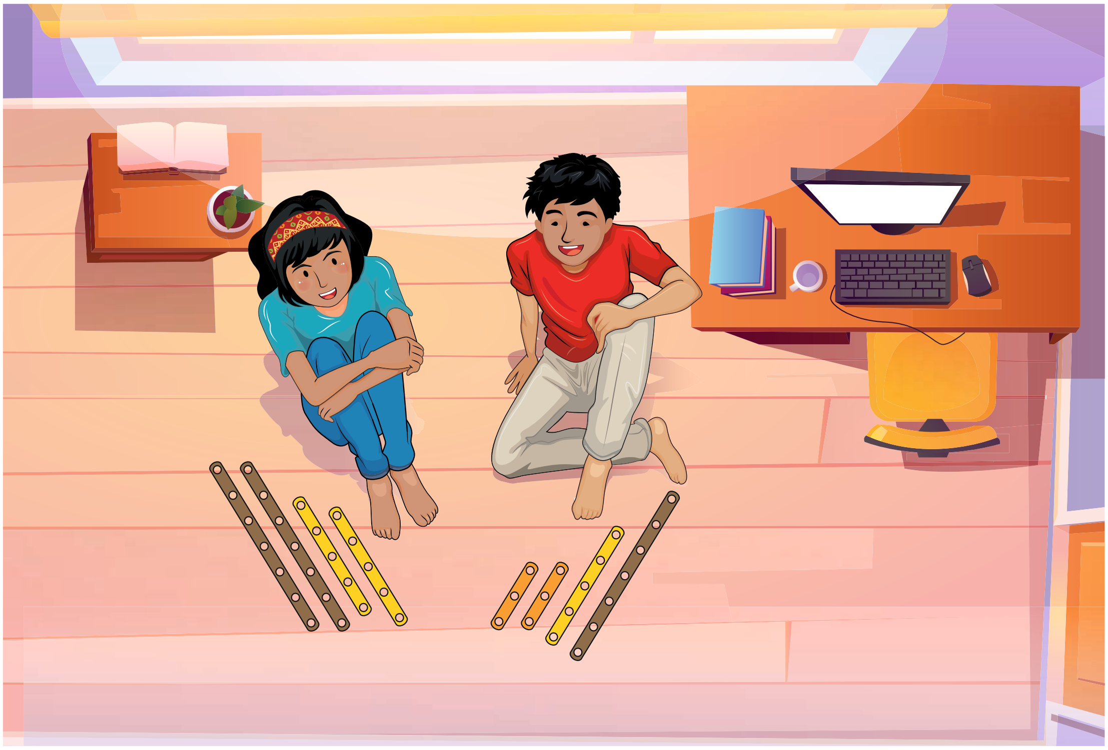
Propósito

Establecemos relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales o imaginarios; asociamos estas características y las representamos con formas bidimensionales. Asimismo, expresamos de diversas formas nuestra comprensión sobre los cuadriláteros.

Utilizamos el mecano para construir formas geométricas

El mecano es un juego que consta de tiras de distintas longitudes, generalmente metálicas, aunque pueden elaborarse incluso en papel, con una serie de agujeros equidistantes. Al unirlas, con tuercas y tornillos, se pueden formar tiras más largas, así como líneas abiertas, cerradas, rectas o quebradas, y, por lo tanto, figuras geométricas.

Melissa y Joaquín se han repartido algunas piezas del mecano. Observa las que tiene cada uno.



Fuente: Shutterstock

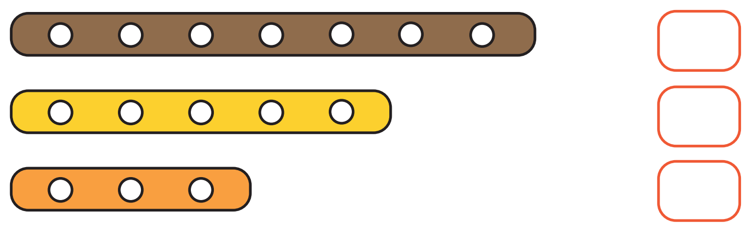
a. ¿Qué tipos de cuadriláteros podrán formar, respectivamente, Melissa y Joaquín con las piezas que les tocó? Detalla sus nombres y características.

b. Calcula el perímetro de cada tipo de cuadrilátero construido con las piezas de mecano.

Comprendemos el problema

1. ¿Qué es el mecano y para qué sirve?

2. Escribe cuánto mide cada pieza del mecano que aparece en la página 83.



3. ¿Qué solicitan las preguntas de la situación?

Glosario

Un **cuadrilátero** es un polígono limitado por cuatro segmentos; por ello, tiene cuatro lados, cuatro vértices y cuatro ángulos.

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

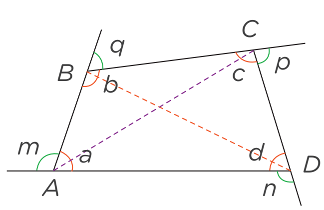
4. Describe los procedimientos que realizarías para construir **cuadriláteros** con las piezas del mecano que tiene Melissa.

5. Describe los procedimientos que realizarías para construir cuadriláteros con las piezas del mecano de Joaquín.

6. ¿Cómo determinarías el perímetro de cada figura que formas?

Recuerda

Elementos de los cuadriláteros



Vértices: A, B, C y D

Lados: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$

Medida de ángulos internos: a, b, c y d

Medida de ángulos externos: m, n, p y q

Diagonales: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

Ejecutamos la estrategia o plan

Recorta las piezas del mecano que corresponden a Melissa, ubicadas en la página 83, y sobre tu mesa construye todos los tipos de cuadriláteros posibles.

7. Una vez que hayas construido los cuadriláteros, mide la longitud de cada uno de sus lados. A continuación, calcula el perímetro y señala sus elementos.

Cuadrilátero 1:

Cuadrilátero 2:

Cuadrilátero 3:

8. ¿Cuántos cuadriláteros has construido y cuáles son sus nombres?

Recorta las piezas del mecano que corresponden a Joaquín, ubicadas en la página 83, y sobre tu mesa construye todos los tipos de cuadriláteros posibles.

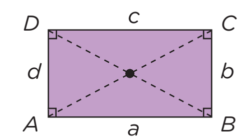
9. Una vez que hayas construido los cuadriláteros, mide la longitud de cada uno de sus lados. A continuación, calcula el perímetro y señala sus elementos

Cuadrilátero 4:

Formalización

Características de algunos cuadriláteros

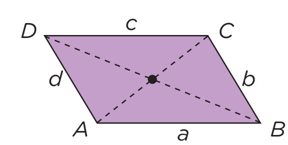
Rectángulo



$a = c$ y $d = b$

En la imagen se observa que las diagonales son de igual longitud y se cortan en su punto medio, los lados opuestos son de igual longitud y los ángulos miden 90°.

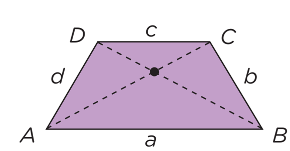
Romboide



$a = c$ y $d = b$

En la imagen se aprecia que las diagonales son desiguales, los lados opuestos son de igual longitud, y los ángulos opuestos son de igual medida y no miden 90°.

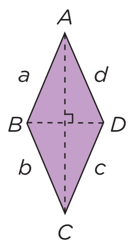
Trapecio



En la imagen se nota que cuenta con dos lados paralelos llamados bases (mayor y menor) y que las diagonales no se cortan en su punto medio.

Formalización

Rombo



$a = b = c = d$

En la imagen se nota que las diagonales son desiguales y perpendiculares, los lados son de igual longitud y los ángulos opuestos son de igual medida y diferentes de 90°.

Cuadrilátero 5:

10. ¿Cuántos cuadriláteros has construido y cuáles son sus nombres?

11. Escribe las características de cada uno de los cuadriláteros que has construido.

12. Compara dos de los cuadriláteros que has construido y señala las diferencias y semejanzas entre ellos.

Reflexionamos sobre el desarrollo

13. Completa el organizador gráfico a partir de las características que has descrito en las preguntas anteriores.

Clases de cuadriláteros

Según el paralelismo de sus lados

Tiene .... pares de lados paralelos.

Tiene .... par de lados paralelos.

.... tiene lados paralelos.

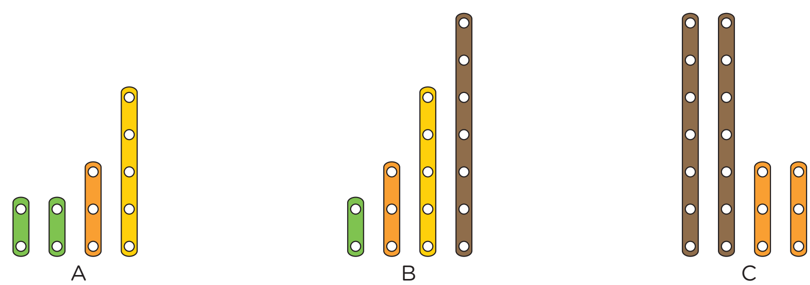
Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito

Empleamos recursos o procedimientos para determinar el perímetro y el área de cuadriláteros. Justificamos con ejemplos y con nuestros conocimientos geométricos las relaciones y propiedades que descubrimos entre las formas geométricas, y corregimos errores si los hubiera.

Situación A: Construimos un trapecio

Mónica decide construir un trapecio isósceles usando el mecano. ¿Cuál de los grupos debe elegir para formar la figura deseada? Justifica tu respuesta.



A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

Identificamos las características de un trapecio isósceles:
Es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y dos lados no paralelos. Además, las longitudes de sus dos lados no paralelos son iguales, mientras que sus lados paralelos, llamados bases, son de diferente longitud.

Analizamos los tres grupos de piezas del mecano y buscamos dos piezas que tengan igual longitud (estas serán los lados no paralelos) y otras dos piezas que tengan diferente longitud (que serán las bases).

Respuesta: Mónica debe elegir las piezas del grupo C.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

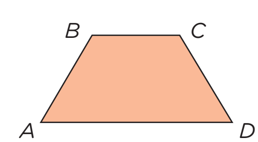
1. Dibuja el trapecio isósceles y escribe otras características.

2. ¿Puedes formar otros trapecios con las piezas de los grupos B y C? Dibuja y menciona sus características.

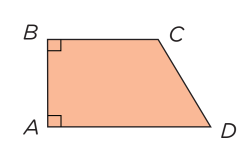
Ten en cuenta

Los trapecios pueden ser:

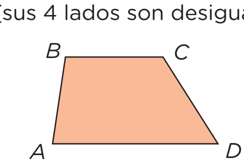
Isósceles ($AB = CD$)



Rectángulo ($m\angle A = m\angle B = 90°$)

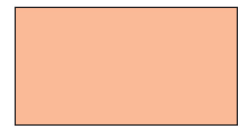


Escaleno
(sus 4 lados son desiguales)



Situación B: Construimos un romboide

Juan decide construir un romboide a partir del rectángulo de papel que se muestra en la imagen. Calculará su área y perímetro.
Describe qué procedimiento realizará Juan. Luego, justifica si el perímetro y el área del rectángulo y del romboide tienen o no las mismas medidas.



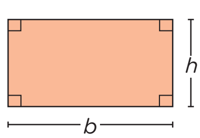
Glosario

Una **diagonal** es un segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono.

Ten en cuenta

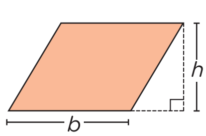
El área de un rectángulo y de un romboide se calcula de la siguiente forma:

Área de un rectángulo



$A = b \cdot h$

Área de un romboide



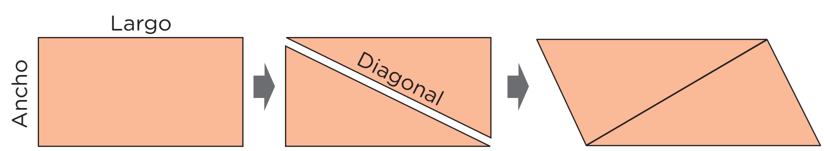
$A = b \cdot h$

El área siempre se expresa en **unidades cuadradas** (ya que se refiere a la medida de la superficie en dos dimensiones) como, por ejemplo: metros cuadrados (m^2) o centímetros cuadrados (cm^2).

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

Juan realiza el siguiente procedimiento para construir el romboide:
Traza la **diagonal** del rectángulo y corta por dicho trazo. Luego, une las partes por el largo del rectángulo, y obtiene así el romboide.



Después de realizar el procedimiento, Juan observa que las áreas de ambas figuras geométricas son iguales. Pero, al realizar la medición de los lados de cada figura, se da cuenta de que el romboide tiene mayor perímetro que el rectángulo.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

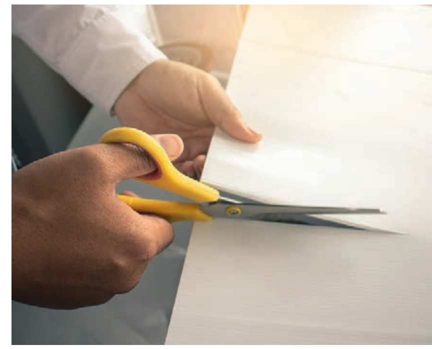
1. Describe el procedimiento realizado por Juan.

2. Mediante un ejemplo, comprueba si las áreas del rectángulo y del romboide tienen la misma medida.

Aprendemos a partir del error

Situación C: Cuadrados de papel

José corta piezas cuadradas de papel. Para comprobar si son cuadradas, mide los lados y verifica que sean de igual longitud, después de lo cual afirma que están bien cortadas.
En cambio, Alessandra dice que, para comprobar que las piezas de papel son cuadradas, se deben medir las diagonales; si estas son de igual medida, significa que la pieza cuadrada está bien cortada.
¿Estás de acuerdo con el procedimiento de cada uno de ellos para determinar si las piezas cortadas tienen forma cuadrada? Justifica tu respuesta.



Fuente: Shutterstock

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

Sí, es suficiente que los cuatro lados sean de igual longitud para asegurar que se trata de un cuadrado.

La afirmación de Alessandra también es válida, ya que, en un cuadrado, las dos diagonales tienen la misma medida.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

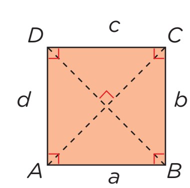
1. ¿En qué cuadrilátero(s) los cuatro lados tienen la misma longitud? ¿Y en cuál(es) sus diagonales tienen igual medida? Dibújalos.

2. A partir de las respuestas a las preguntas anteriores, ¿son correctas las afirmaciones de José y Alessandra? Justifica tu respuesta.

3. ¿Son suficientes los procedimientos de José y Alessandra para asegurar que las piezas son cuadradas? Justifica tu respuesta.

Ten en cuenta

Cuadrado



$a = c = d = b$

En la imagen se nota que las diagonales son de igual longitud, que se cortan en su punto medio y que forman un ángulo de 90°. Además, sus lados son de igual longitud y sus ángulos miden 90°.

Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito

Establecemos relaciones entre las características medibles de los objetos y las representamos mediante cuadriláteros. Expresamos nuestra comprensión empleando lenguaje matemático y procedimientos para determinar el área y el perímetro; además, justificamos afirmaciones con conocimientos sobre las propiedades de los cuadriláteros.

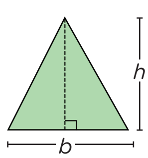
Glosario

Dos figuras son **congruentes** si tienen la misma forma y dimensiones, aunque diferente posición u orientación.

Recuerda

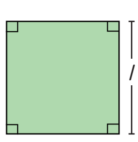
El área de un triángulo, de un cuadrado y de un trapecio se calculan así:

Área de un triángulo



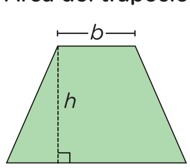
$A = \frac{b \cdot h}{2}$

Área del cuadrado



$A = l^2$

Área del trapecio



$A = \frac{(B + b)}{2} \cdot h$

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

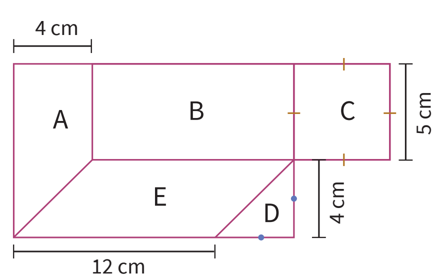
1. Determina si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
   - Las diagonales de un rombo son perpendiculares.
   - Existen paralelogramos cuyas diagonales no se cortan en sus puntos medios.
   - Si en un cuadrilátero los lados son todos **congruentes**, así como los ángulos, entonces se trata de un cuadrado.

   a) VVV   b) VFV   c) VFF   d) FFV

2. Determina a qué cuadrilátero corresponden las siguientes características:
   - Cuatro lados de igual longitud
   - Ángulos opuestos de igual medida
   - Diagonales que se cortan en sus puntos medios
   - Diagonales perpendiculares

   a) Trapecio   c) Rombo
   b) Rectángulo   d) Romboide

3. Calcula el perímetro y el área de la siguiente figura, si se sabe que A es un trapecio, B es un rectángulo, C es un cuadrado, D es un triángulo y E es un romboide.



   a) Perímetro 60 cm, área total 169 cm^2
   b) Perímetro 50 cm, área total 88 cm^2
   c) Perímetro 60 cm, área total 60 cm^2
   d) Perímetro 48 cm, área total 48 cm^2

4. Construye un romboide con estas características: uno de sus lados mide 4 cm y sus diagonales miden 6 cm y 5 cm, respectivamente.

5. Determina a qué cuadrilátero corresponden las siguientes características:
- Tiene solo un par de ángulos opuestos congruentes.
- Tiene dos pares de lados consecutivos congruentes.
- Sus diagonales son perpendiculares.
- Solo una diagonal corta a la otra en su punto medio.

a) Cuadrado
b) Rombo
c) Rectángulo
d) Trapezoide biisósceles

6. Pedro contrata a Mauro para que alfombre su dormitorio, cuyo piso tiene forma de rectángulo (figura 1). Mauro realiza mal el corte de la alfombra (figura 2); a pesar de eso, logra alfombrar el dormitorio completamente.

Dibuja cómo se podría alfombrar el dormitorio descomponiendo el área de la alfombra. Justifica tu respuesta.

Figura 1

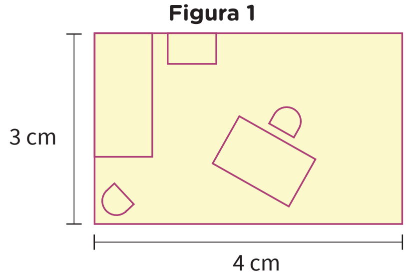
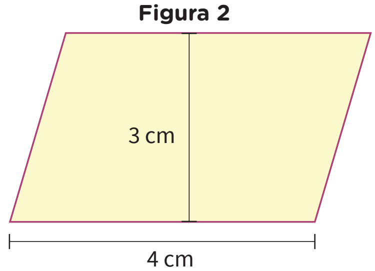


Figura 2



7. Indica si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

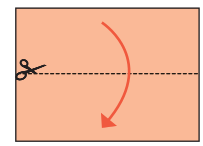
- Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, todos sus ángulos son rectos.
- Si un cuadrilátero tiene un ángulo recto, tiene al menos otro ángulo recto.
- Si un cuadrilátero tiene dos diagonales de igual medida, es un paralelogramo.
- Hay cuadriláteros que no son paralelogramos y que tienen las diagonales de igual medida.

a) VFFV
b) VVFF
c) VVVF
d) FFVV

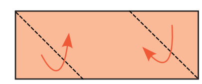
Ten en cuenta

Observa cómo obtener un romboide a partir de dobleces y recortes.

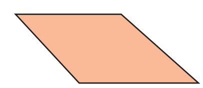
1.° Dobla el papel por la mitad y recórtalo.



2.° Dobla las esquinas formando un triangulo rectángulo isósceles y recorta por el doblez.



3.° Recorta lo que sobra.



Recuerda

Un **polígono** es una figura plana cerrada determinada por la unión de segmentos (lados) que solamente se intersecan en sus extremos (vértices).

Un **cuadrilátero** es un polígono que tiene cuatro lados, cuatro vértices y cuatro ángulos.

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos.

Recuerda

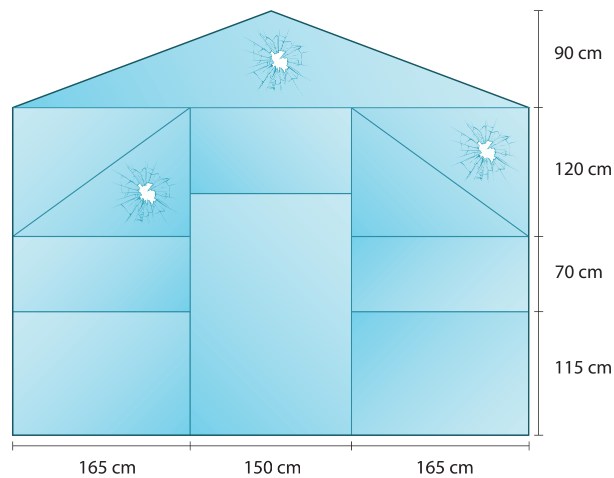
Esta es una de las equivalencias entre unidades de superficie:

1 m² <> 10 000 cm²

Para convertir de centímetros cuadrados a metros cuadrados, dividimos entre 10 000. Por ejemplo, para convertir 305 000 cm² a metros cuadrados, tenemos:

305 000 ÷ 10 000 = 30,5 m²

8. Varios vidrios de la parte frontal de una construcción han sido dañados. Para la reparación, el vidriero trae dos vidrios que tienen la forma de un rectángulo.



Fuente: Adaptado de *Matemática para todos*

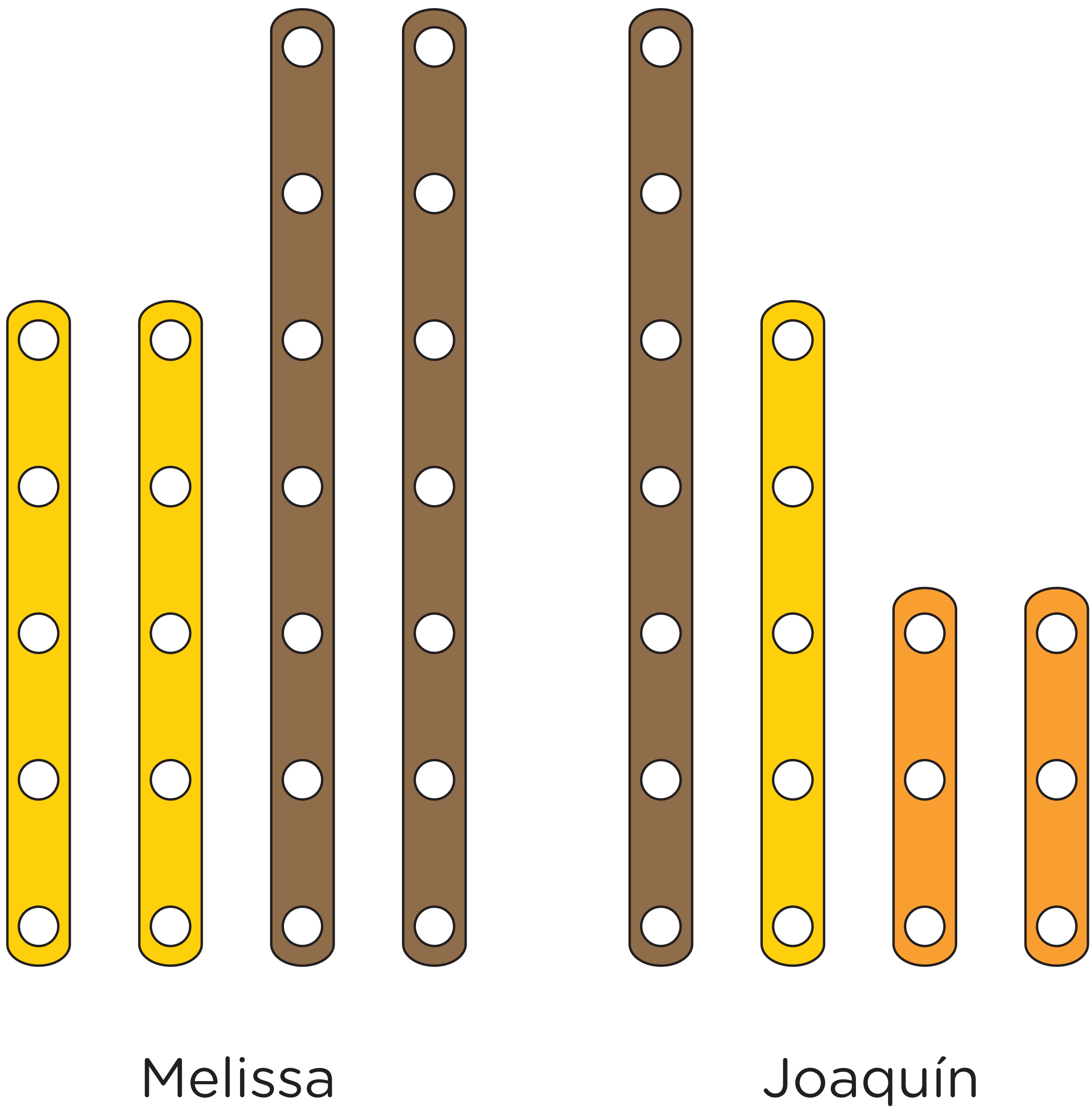
- ¿Qué medidas deben tener los vidrios rectangulares para que puedan cubrir la parte dañada?
- ¿Cuántos metros cuadrados de vidrio tienen que ser reemplazados?

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre las características medibles de objetos reales, asocié estas características y las representé mediante cuadriláteros.			
Expresé con dibujos, construcciones con material concreto y con lenguaje geométrico mi comprensión sobre los cuadriláteros.			
Empleé recursos o procedimientos para determinar el perímetro y el área de cuadriláteros usando unidades convencionales.			
Justifiqué afirmaciones con mis conocimientos sobre las relaciones y propiedades de los cuadriláteros.			

Piezas del mecano



¿Cómo aplicamos la probabilidad en situaciones de incertidumbre?

Construimos nuestros aprendizajes

Propósito

Expresamos nuestra comprensión sobre el valor de la probabilidad para caracterizar como más o menos probable una situación aleatoria, y empleamos procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos mediante la regla de Laplace. Asimismo, justificamos la probabilidad de la ocurrencia de sucesos.

Evaluamos las promociones de tiendas comerciales

Con motivo de la inauguración de una tienda de ropa, los clientes que realicen compras superiores a 100 soles tendrán la oportunidad de girar una ruleta para obtener un beneficio. Si la flecha cae en la sección marcada con "Premio", el cliente puede elegir gratuitamente un producto cuyo precio sea igual o menor al monto de su compra. Si cae en la sección del caracol, recibirá un descuento del 10 % sobre el total de su compra. Finalmente, si la flecha cae en la sección de la estrella, el cliente simplemente recibirá un agradecimiento por su visita. Elva realizó una compra de S/120 y giró la ruleta.

Fuente: Shutterstock

a. ¿Qué es más probable que reciba Elva? ¿Premio, descuento o el agradecimiento por su visita?

b. Entre ganar un premio y obtener un descuento, ¿cuál es más probable?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que Elva reciba algún beneficio económico?

Comprendemos el problema

1. ¿De qué se trata la situación?

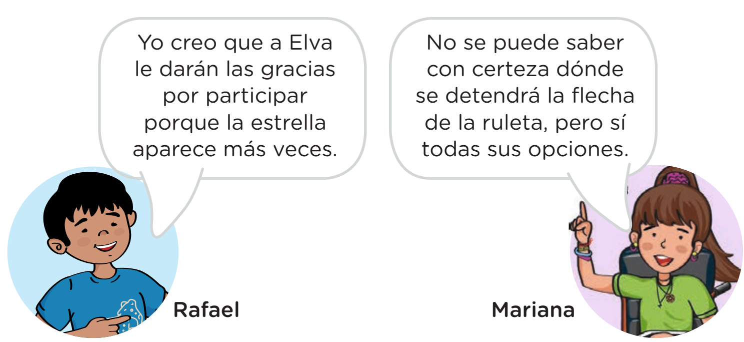
2. ¿Cuántos sectores tiene la ruleta y cómo son estos sectores en cuanto a su tamaño? ¿Qué figura se reconoce en cada sector?

3. ¿Qué sucede cuando la flecha de la ruleta queda en cada figura o palabra?

4. ¿Qué debes encontrar en la situación descrita?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

5. Lee lo que opinan dos estudiantes sobre el resultado que se obtiene al hacer girar la ruleta. Luego, escribe lo que tú crees que resultará.



Mi opinión:

Ten en cuenta

En probabilidad, llamaremos **experimento** a todo procedimiento que puede repetirse infinitamente y que tiene un conjunto definido de posibles resultados. Si el experimento tiene un solo resultado posible, será un **experimento determinista**; si tiene más de un resultado posible, será un **experimento aleatorio**.

6. Escoge la opción que te permita comprobar las opiniones de los estudiantes. Si tienes otra idea, escríbela.

   a) Construir una ruleta con material reutilizable y hacerla girar.

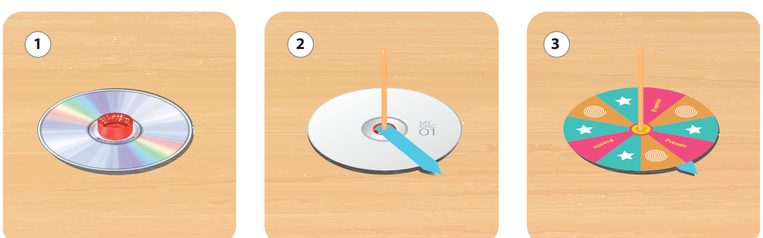
   b) Dibujar la ruleta y contar.

   c) No es posible comprobar las opiniones.

   d) Otra:

Ejecutamos la estrategia o plan

7. Construye la ruleta con un CD en desuso, una tapa de botella, un palito de brocheta y un trozo de cartulina. Dibuja la ruleta de la situación y pégala en el material construido. Recuerda que puedes usar otros materiales que tengas disponibles.



8. Haz girar varias veces la ruleta construida y responde.

   - ¿La flecha se queda siempre en la misma figura? Describe lo que ocurre.

   - ¿Se puede predecir qué beneficio se obtendrá antes de hacer girar la ruleta?, ¿por qué?

   - ¿Se puede saber cuáles son todos los posibles resultados antes de girar la ruleta?, ¿por qué?

   - Entre Rafael y Mariana, ¿quién tenía razón y por qué?

Formalización

Un **experimento** es **aleatorio** cuando antes de su ocurrencia no es posible determinar qué resultado se obtendrá, pero sí se conocen sus posibles resultados. Al conjunto de todos los resultados se le llama **espacio muestral**. Además, cada uno de los elementos del espacio muestral se denomina **suceso**.

Por ejemplo, el lanzamiento de un dado es un experimento aleatorio y su espacio muestral (Ω) está formado por los números del 1 al 6. Esto se expresa así:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Sacar un 5 al lanzar el dado es un suceso.

Asimismo, hacer girar la ruleta es un experimento aleatorio, y en la situación el espacio muestral es el siguiente:

Ω = {*premio*, ☆, ◎}

Además, que la flecha quede en "premio" es un suceso del experimento.

9. Escribe los sucesos que corresponden al experimento de hacer girar la ruleta.

10. Escribe cuántas veces se repite cada suceso.

Premio: .... Caracol: .... Estrella: ....

Formalización

Si bien no podemos predecir lo que ocurrirá, sí podemos evaluar cuán posible es la ocurrencia de un suceso. A esto le llamamos probabilidad y la calculamos mediante la regla de Laplace, en la cual se relaciona el número de casos favorables con el número de casos posibles.

$$P(A) = \frac{\text{N.° de casos favorables}}{\text{N.° de casos posibles}}$$

11. Completa las siguientes oraciones para analizar cada suceso y calcula su probabilidad. Sigue el ejemplo.

Que salga premio: De un total de 10 posibles resultados, 3 son los favorables. P(premio) = $\frac{3}{10}$ = 0,3

Que salga estrella: De un total de .... posibles resultados, ... son favorables.

Que salga caracol: De un total de .... posibles resultados, ... son favorables.

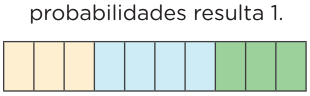
12. A partir de los resultados obtenidos, ¿qué opción de la ruleta es la más probable que reciba Elva? ¿Por qué?

13. Entre el premio y el descuento, ¿cuál es más probable?

14. ¿Cuál es la probabilidad de que Elva reciba un beneficio económico?

Ten en cuenta

Si representamos gráficamente los sucesos, nota que la suma de sus probabilidades resulta 1.



$\frac{3}{10}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{3}{10}$

Esta representación también nos permite comparar y determinar cuáles tienen mayor o menor probabilidad.

Reflexionamos sobre el desarrollo

15. Observando la ruleta, ¿puedes determinar si hay mayor o menor probabilidad de que Elva reciba un beneficio? Justifica tu respuesta.

Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito

Determinamos las condiciones de una situación aleatoria y representamos su probabilidad mediante la regla de Laplace, y, a partir de este valor, determinamos si un suceso es más o menos probable que otro. Asimismo, justificamos con conocimientos la probabilidad de ocurrencia de sucesos y corregimos errores si los hubiera.

Situación A: El dado

Se lanza un dado una sola vez. Analiza cada suceso presentado a continuación y determina si resulta seguro, imposible o probable.

Suceso *A*: Que salga un número par.

Suceso *B*: Que salga un número compuesto mayor que 4.

Suceso *C*: Que salga un número primo mayor que 5.

Suceso *D*: Que salga un número menor que 10.

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

Determinamos el espacio muestral (Ω) del experimento de lanzar un dado: Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

Analizamos los casos favorables de cada suceso:

- Suceso *A*: Que salga un número par: *A* = {2; 4; 6}
- Suceso *B*: Que salga un número compuesto mayor que 4: *B* = {6}
- Suceso *C*: Que salga un número primo mayor que 5: *C* = { }
- Suceso *D*: Que salga un número menor que 10: *D* = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

Calculamos la probabilidad de cada suceso aplicando la regla de Laplace. Luego, según los resultados, determinaremos si son imposibles, poco probables, probables, muy probables o seguros.

Para el suceso *A*:

$P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5$

Como P(*A*) = 0,5, entonces *A* es un suceso probable.

Expresamos esta probabilidad en porcentajes multiplicando por 100 %: P(*A*) = 0,5 × 100 % → P(*A*) = 50 %

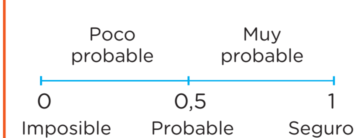
Esto significa que se tienen 3 posibilidades de un total de 6; en otras palabras, hay un 50 % de probabilidad de que salga un número par al lanzar un dado.

Ten en cuenta

Según su probabilidad P(*A*), un suceso *A* puede ser:

- seguro: P(*A*) = 1
- imposible: P(*A*) = 0

Gráficamente:



Recuerda

Para dividir 1 ÷ 6, procede así:

1.° Coloca 0 en el cociente; sobra 1.

$$\begin{array}{r|l} 1 & 6 \\ \cline{2-2} 1 & 0 \end{array}$$

2.° Coloca un cero en el dividendo y escribe una coma para continuar la división con decimales. Divide 10 ÷ 6. Se obtiene 1 y sobra 4.

$$\begin{array}{r|l} 1 & 6 \\ \cline{2-2} 1\,0 & 0,1 \\ 4 & \end{array}$$

3.° Escribe 0 al lado del 4 y forma 40. Divide 40 ÷ 6. Se obtiene 6 y sobra 4. Repite el procedimiento.

$$\begin{array}{r|l} 1 & 6 \\ \cline{2-2} 1\,0 & 0,1\,6 \\ 4\,0 & \\ 4 & \end{array}$$

Por tanto: 1 ÷ 6 = 0,1666...

¿Sabías que...?

Al multiplicar un número decimal por 10, 100 o 1000, la coma decimal avanza hacia la derecha tantos espacios como ceros tenga el número.

Por ejemplo:

2,45 × 10 = 24,5

0,268 × 100 = 26,8

0,149 × 1000 = 149

Para el suceso *B*:

$P(B) = \dfrac{1}{6} = 0{,}166...$

B es un suceso poco probable.

En porcentaje: $P(B) = 16{,}666...\ \%$

Entonces, es poco probable que salga un número compuesto mayor que 4 al lanzar un dado una sola vez.

Para el suceso *C*:

$P(C) = \dfrac{0}{6} = 0$

Como $P(C) = 0$, entonces *C* es un suceso imposible.

Esto significa que la probabilidad es nula o el suceso es imposible, porque el menor número primo mayor que 5 es 7, y no aparece en el dado.

Para el suceso *D*:

$P(D) = \dfrac{6}{6} = 1$

Como $P(D) = 1$, *D* es un suceso seguro.

En porcentaje: $P(D) = 100\ \%$

Significa que la probabilidad es segura, porque tiene 6 posibilidades de 6, o que se tiene el 100 % de probabilidad de que salga un número menor que 10 al lanzar un dado, pues todos los resultados del dado son menores que 10.

Respuesta: El suceso *A* es probable, *B* es poco probable, *C* es imposible y *D* es seguro.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿De qué depende que un suceso sea seguro, imposible, probable, muy probable o poco probable?

2. Plantea cinco ejemplos de sucesos diferentes usando el dado, de manera que el primero sea seguro, el segundo probable, el tercero imposible, el cuarto poco probable y el quinto muy probable.

Situación B: El lanzamiento de dos dados

Se lanzan simultáneamente dos dados una sola vez. Determina lo siguiente:

a. ¿Cuántos elementos tiene el respectivo espacio muestral?

b. Si sumamos los valores de los resultados de ambos dados, ¿qué suma es más probable que ocurra?

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dicha suma?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados.

Resolución

a. Dibujamos una tabla de doble entrada y anotamos todos los posibles resultados al lanzar los dos dados.

De manera práctica, como resultan 6 filas y 6 columnas, el espacio muestral tiene

$6 \times 6 = 36$ resultados posibles.

$\Omega = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3)...\}$

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
⚁	2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
⚂	3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
⚃	4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
⚄	5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
⚅	6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

b. Para dar respuesta a la segunda pregunta, sumamos los valores posibles al lanzar ambos dados y escribimos las sumas en una tabla de doble entrada.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Representamos con un mismo color las sumas iguales. Por tanto, la suma más probable es 7, porque es el valor que más se repite; este se encuentra en la diagonal de color amarillo.

c. Lo denominamos suceso *A* y calculamos su probabilidad:

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}166... \rightarrow$ suceso poco probable

Respuesta: Es poco probable que salga la suma 7 al lanzar dos dados. Sin embargo, es la más probable si comparamos con las otras sumas.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué se utilizó una tabla de doble entrada para representar el espacio muestral?

2. ¿Cuáles son los sucesos menos probables que se obtienen al sumar los valores de los dos dados lanzados?

Ten en cuenta

La tabla de doble entrada permite visualizar los resultados obtenidos en cada dado, así como sus posibles combinaciones.

Por ejemplo, si queremos calcular la probabilidad de que la suma de las caras obtenidas al lanzar los dados sea mayor que 9, escogeremos las diagonales celeste, marrón y gris. Por lo tanto, la probabilidad es

$\frac{6}{36}$ o $\frac{1}{6}$.

Aprendemos a partir del error

Situación C: El embarazo

La profesora Karina acudió al ginecólogo para su control prenatal y se acaba de enterar de que tendrá mellizos. ¿Cuál es la probabilidad de que sean de distinto sexo?

Fuente: Shutterstock

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

Los mellizos de la profesora podrán resultar:

- dos hombres: (H; H)
- dos mujeres: (M; M)
- un hombre y una mujer: (H; M)
- una mujer y un hombre: (M; H)

Por lo tanto, el espacio muestral es el siguiente:

$\Omega = \{(H; H), (M; M), (H; M), (M; H)\}$

$n(\Omega) = 4$

Observamos que hay dos posibilidades de que los mellizos de la profesora sean de distinto sexo.

Corroboramos aplicando la regla de Laplace, considerando que *C* representa el suceso de que los bebés sean de distinto sexo:

$$P(C) = \frac{\text{N.° de casos favorables a } C}{\text{N.° de casos posibles}}$$

$$P(C) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$P(C) = 0{,}25 \times 100\ \%$$

$$P(C) = 25\ \%$$

Respuesta: La probabilidad de que los mellizos sean de distinto sexo es $\frac{1}{4}$ o del 25 %.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. ¿Es correcto el espacio muestral propuesto?, ¿por qué?

2. Corrige el procedimiento en caso de que hubiera error.

Recuerda

Estas son las equivalencias entre fracciones, decimales y porcentajes más comunes:

$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\ \%$

$\frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\ \%$

$\frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\ \%$

$\frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\ \%$

$\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\ \%$

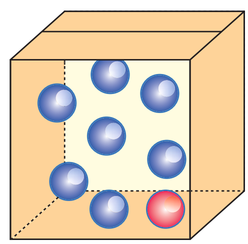
Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito

Determinamos las condiciones de una situación aleatoria y representamos su probabilidad mediante la regla de Laplace; asimismo, expresamos nuestra comprensión caracterizando una situación aleatoria como más o menos probable. Además, justificamos con conocimientos la probabilidad de ocurrencia de sucesos.

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. Maricielo extrae de la caja una bola al azar. ¿Qué es más probable que saque, una bola azul o una bola roja?, ¿por qué?



a) Es más probable que saque una bola azul, porque es imposible que saque una roja.

b) Es más probable que saque una bola azul, porque hay más bolas azules que rojas.

c) Es más probable que saque una bola roja, porque al menos hay una.

d) Es más probable que saque una bola roja, porque sí o sí debe salir.

2. ¿Qué podemos afirmar acerca del experimento de lanzar un dado? Justifica tu respuesta.

a) Es posible que salga un número mayor que 6.

b) Es seguro que salga un divisor de 6.

c) Es imposible que salga un múltiplo de 6.

d) Es probable obtener un número primo.

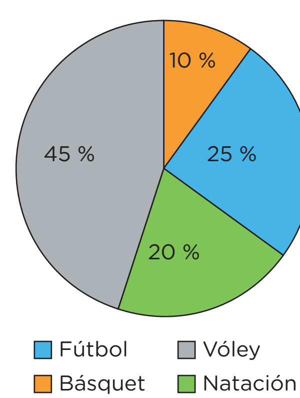
3. El gráfico representa la población de 100 estudiantes de una academia deportiva y las disciplinas que practican. Si un día cualquiera se escoge a un estudiante al azar, calcula la probabilidad de que no practique básquet.

a) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{10}{10}$

c) $\frac{9}{10}$

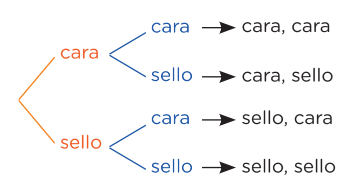
d) $\frac{90}{10}$



4. Determina el espacio muestral producido al lanzar una moneda tres veces; para ello, emplea el diagrama de árbol. Luego, calcula cuál es la probabilidad de obtener al menos un sello.

Ten en cuenta

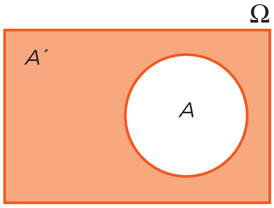
El **diagrama de árbol** es una representación que nos permite expresar, de manera sencilla, el conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio. Por ejemplo, si se lanza una moneda dos veces, podemos representar así:



Ten en cuenta

Dado un suceso A, **el suceso complementario de A** ($A´$) estará conformado por todo aquello que no sea A.

Gráficamente:



Su probabilidad se calcula así:

$P(A´) = 1 - P(A)$

Por ejemplo, para calcular la probabilidad de que no resulte 3 al lanzar un dado, efectuamos:

Suceso B: Obtener 3

Suceso $B´$: No obtener 3

$P(B´) = 1 - \frac{1}{6}$

$P(B´) = \frac{5}{6}$

5. Una escuela, con la finalidad de recaudar fondos para la implementación de su biblioteca, realizará una rifa. Para ello, manda a imprimir 500 boletos, de los cuales 10 están premiados. ¿Cuál es la probabilidad de comprar un boleto que no resulte premiado?

a) 98 %
b) 90 %
c) 10 %
d) 2 %

6. Se lanza una moneda tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara exactamente dos veces?

7. Sara lanza simultáneamente tres dados. ¿Qué probabilidad tiene de obtener tres cantidades iguales?

a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{66}$
c) $\frac{1}{36}$
d) $\frac{1}{3}$

Fuente: Shutterstock

8. Si un número del siguiente tablero se elige aleatoriamente, ¿la probabilidad de que ese número sea múltiplo de 5 es mayor que la probabilidad de que sea múltiplo de 2? Justifica tu respuesta.

2	5	7	15	18	23	35	50

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Determiné las condiciones de una situación aleatoria y representé su probabilidad mediante la regla de Laplace, y, a partir de este valor, determiné si un suceso es más o menos probable que otro.			
Expresé mi comprensión sobre el valor de la probabilidad como más o menos probable.			
Empleé procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos simples con la regla de Laplace.			
Justifiqué con mis conocimientos la probabilidad de ocurrencia de sucesos.			

Enfoques transversales

Enfoque Ambiental

Busca formar personas conscientes del cuidado del ambiente, que promuevan el desarrollo de estilos de vida saludables y sostenibles.

Enfoque Inclusivo o de Atención a la Diversidad

Busca reconocer y valorar a todas las personas por igual, con el fin de erradicar la exclusión, discriminación y desigualdad de oportunidades.

Enfoque de Derechos

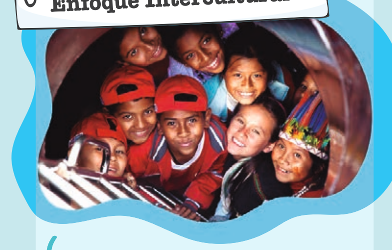
Fomenta el reconocimiento de los derechos y deberes; asimismo, promueve el diálogo, la participación y la democracia.

Son los valores y actitudes que tenemos al relacionarnos con otras personas y con nuestro entorno, con el fin de generar una sociedad más justa, inclusiva y equitativa para todos.

Enfoque Igualdad de Género

Busca brindar las mismas oportunidades a hombres y mujeres, eliminando situaciones que generan desigualdades entre ellos.

Enfoque Intercultural



Promueve el intercambio de ideas y experiencias entre las distintas formas de ver el mundo.

Enfoque Búsqueda de la Excelencia

Incentiva a los estudiantes a dar lo mejor de sí mismos para alcanzar sus metas y contribuir con su comunidad.

Enfoque Orientación al Bien Común

Busca que el conocimiento, los valores y la educación sean bienes que todos compartimos, promoviendo relaciones solidarias en comunidad.

CARTA DEMOCRÁTICA INTERAMERICANA

I

La democracia y el sistema interamericano

Artículo 1

Los pueblos de América tienen derecho a la democracia y sus gobiernos la obligación de promoverla y defenderla.

La democracia es esencial para el desarrollo social, político y económico de los pueblos de las Américas.

Artículo 2

El ejercicio efectivo de la democracia representativa es la base del estado de derecho y los regímenes constitucionales de los Estados Miembros de la Organización de los Estados Americanos. La democracia representativa se refuerza y profundiza con la participación permanente, ética y responsable de la ciudadanía en un marco de legalidad conforme al respectivo orden constitucional.

Artículo 3

Son elementos esenciales de la democracia representativa, entre otros, el respeto a los derechos humanos y las libertades fundamentales; el acceso al poder y su ejercicio con sujeción al estado de derecho; la celebración de elecciones periódicas, libres, justas y basadas en el sufragio universal y secreto como expresión de la soberanía del pueblo; el régimen plural de partidos y organizaciones políticas; y la separación e independencia de los poderes públicos.

Artículo 4

Son componentes fundamentales del ejercicio de la democracia la transparencia de las actividades gubernamentales, la probidad, la responsabilidad de los gobiernos en la gestión pública, el respeto por los derechos sociales y la libertad de expresión y de prensa.

La subordinación constitucional de todas las instituciones del Estado a la autoridad civil legalmente constituida y el respeto al estado de derecho de todas las entidades y sectores de la sociedad son igualmente fundamentales para la democracia.

Artículo 5

El fortalecimiento de los partidos y de otras organizaciones políticas es prioritario para la democracia. Se deberá prestar atención especial a la problemática derivada de los altos costos de las campañas electorales y al establecimiento de un régimen equilibrado y transparente de financiación de sus actividades.

Artículo 6

La participación de la ciudadanía en las decisiones relativas a su propio desarrollo es un derecho y una responsabilidad. Es también una condición necesaria para el pleno y efectivo ejercicio de la democracia. Promover y fomentar diversas formas de participación fortalece la democracia.

II

La democracia y los derechos humanos

Artículo 7

La democracia es indispensable para el ejercicio efectivo de las libertades fundamentales y los derechos humanos, en su carácter universal, indivisible e interdependiente, consagrados en las respectivas constituciones de los Estados y en los instrumentos interamericanos e internacionales de derechos humanos.

Artículo 8

Cualquier persona o grupo de personas que consideren que sus derechos humanos han sido violados pueden interponer denuncias o peticiones ante el sistema interamericano de promoción y protección de los derechos humanos conforme a los procedimientos establecidos en el mismo.

Los Estados Miembros reafirman su intención de fortalecer el sistema interamericano de protección de los derechos humanos para la consolidación de la democracia en el Hemisferio.

Artículo 9

La eliminación de toda forma de discriminación, especialmente la discriminación de género, étnica y racial, y de las diversas formas de intolerancia, así como la promoción y protección de los derechos humanos de los pueblos indígenas y los migrantes y el respeto a la diversidad étnica, cultural y religiosa en las Américas, contribuyen al fortalecimiento de la democracia y la participación ciudadana.

Artículo 10

La promoción y el fortalecimiento de la democracia requieren el ejercicio pleno y eficaz de los derechos de los trabajadores y la aplicación de normas laborales básicas, tal como están consagradas en la Declaración de la Organización Internacional del Trabajo (OIT) relativa a los Principios y Derechos Fundamentales en el Trabajo y su Seguimiento, adoptada en 1998, así como en otras convenciones básicas afines de la OIT. La democracia se fortalece con el mejoramiento de las condiciones laborales y la calidad de vida de los trabajadores del Hemisferio.

III

Democracia, desarrollo integral y combate a la pobreza

Artículo 11

La democracia y el desarrollo económico y social son interdependientes y se refuerzan mutuamente.

Artículo 12

La pobreza, el analfabetismo y los bajos niveles de desarrollo humano son factores que inciden negativamente en la consolidación de la democracia. Los Estados Miembros de la OEA se comprometen a adoptar y ejecutar todas las acciones necesarias para la creación de empleo productivo, la reducción de la pobreza y la erradicación de la pobreza extrema, teniendo en cuenta las diferentes realidades y condiciones económicas de los países del Hemisferio. Este compromiso común frente a los problemas del desarrollo y la pobreza también destaca la importancia de mantener los equilibrios macroeconómicos y el imperativo de fortalecer la cohesión social y la democracia.

Artículo 13

La promoción y observancia de los derechos económicos, sociales y culturales son consustanciales al desarrollo integral, al crecimiento económico con equidad y a la consolidación de la democracia en los Estados del Hemisferio.

Artículo 14

Los Estados Miembros acuerdan examinar periódicamente las acciones adoptadas y ejecutadas por la Organización encaminadas a fomentar el diálogo, la cooperación para el desarrollo integral y el combate a la pobreza en el Hemisferio, y tomar las medidas oportunas para promover estos objetivos.

Artículo 15

El ejercicio de la democracia facilita la preservación y el manejo adecuado del medio ambiente. Es esencial que los Estados del Hemisferio implementen políticas y estrategias de protección del medio ambiente, respetando los diversos tratados y convenciones, para lograr un desarrollo sostenible en beneficio de las futuras generaciones.

Artículo 16

La educación es clave para fortalecer las instituciones democráticas, promover el desarrollo del potencial humano y el alivio de la pobreza y fomentar un mayor entendimiento entre los pueblos. Para lograr estas metas, es esencial que una educación de calidad esté al alcance de todos, incluyendo a las niñas y las mujeres, los habitantes de las zonas rurales y las personas que pertenecen a las minorías.

IV

Fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática

Artículo 17

Cuando el gobierno de un Estado Miembro considere que está en riesgo su proceso político institucional democrático o su legítimo ejercicio del poder, podrá recurrir al Secretario General o al Consejo Permanente a fin de solicitar asistencia para el fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática.

Artículo 18

Cuando en un Estado Miembro se produzcan situaciones que pudieran afectar el desarrollo del proceso político institucional democrático o el legítimo ejercicio del poder, el Secretario General o el Consejo Permanente podrá, con el consentimiento previo del gobierno afectado, disponer visitas y otras gestiones con la finalidad de hacer un análisis de la situación. El Secretario General elevará un informe al Consejo Permanente, y éste realizará una apreciación colectiva de la situación y, en caso necesario, podrá adoptar decisiones dirigidas a la preservación de la institucionalidad democrática y su fortalecimiento.

Artículo 19

Basado en los principios de la Carta de la OEA y con sujeción a sus normas, y en concordancia con la cláusula democrática contenida en la Declaración de la ciudad de Quebec, la ruptura del orden democrático o una alteración del orden constitucional que afecte gravemente el orden democrático en un Estado Miembro constituye, mientras persista, un obstáculo insuperable para la participación de su gobierno en las sesiones de la Asamblea General, de la Reunión de Consulta, de los Consejos de la Organización y de las conferencias especializadas, de las comisiones, grupos de trabajo y demás órganos de la Organización.

Artículo 20

En caso de que en un Estado Miembro se produzca una alteración del orden constitucional que afecte gravemente su orden democrático, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá solicitar la convocatoria inmediata del Consejo Permanente para realizar una apreciación colectiva de la situación y adoptar las decisiones que estime conveniente.

El Consejo Permanente, según la situación, podrá disponer la realización de las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

Si las gestiones diplomáticas resultaren infructuosas o si la urgencia del caso lo aconsejare, el Consejo Permanente convocará de inmediato un período extraordinario de sesiones de la Asamblea General para que ésta adopte las decisiones que estime apropiadas, incluyendo gestiones diplomáticas, conforme a la Carta de la Organización, el derecho internacional y las disposiciones de la presente Carta Democrática.

Durante el proceso se realizarán las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

Artículo 21

Cuando la Asamblea General, convocada a un período extraordinario de sesiones, constate que se ha producido la ruptura del orden democrático en un Estado Miembro y que las gestiones diplomáticas han sido infructuosas, conforme a la Carta de la OEA tomará la decisión de suspender a dicho Estado Miembro del ejercicio de su derecho de participación en la OEA con el voto afirmativo de los dos tercios de los Estados Miembros. La suspensión entrará en vigor de inmediato.

El Estado Miembro que hubiera sido objeto de suspensión deberá continuar observando el cumplimiento de sus obligaciones como miembro de la Organización, en particular en materia de derechos humanos.

Adoptada la decisión de suspender a un gobierno, la Organización mantendrá sus gestiones diplomáticas para el restablecimiento de la democracia en el Estado Miembro afectado.

Artículo 22

Una vez superada la situación que motivó la suspensión, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá proponer a la Asamblea General el levantamiento de la suspensión. Esta decisión se adoptará por el voto de los dos tercios de los Estados Miembros, de acuerdo con la Carta de la OEA.

V

La democracia y las misiones de observación electoral

Artículo 23

Los Estados Miembros son los responsables de organizar, llevar a cabo y garantizar procesos electorales libres y justos.

Los Estados Miembros, en ejercicio de su soberanía, podrán solicitar a la OEA asesoramiento o asistencia para el fortalecimiento y desarrollo de sus instituciones y procesos electorales, incluido el envío de misiones preliminares para ese propósito.

Artículo 24

Las misiones de observación electoral se llevarán a cabo por solicitud del Estado Miembro interesado. Con tal finalidad, el gobierno de dicho Estado y el Secretario General celebrarán un convenio que determine el alcance y la cobertura de la misión de observación electoral de que se trate. El Estado Miembro deberá garantizar las condiciones de seguridad, libre acceso a la información y amplia cooperación con la misión de observación electoral.

Las misiones de observación electoral se realizarán de conformidad con los principios y normas de la OEA. La Organización deberá asegurar la eficacia e independencia de estas misiones, para lo cual se las dotará de los recursos necesarios. Las mismas se realizarán de forma objetiva, imparcial y transparente, y con la capacidad técnica apropiada.

Las misiones de observación electoral presentarán oportunamente al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, los informes sobre sus actividades.

Artículo 25

Las misiones de observación electoral deberán informar al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, si no existiesen las condiciones necesarias para la realización de elecciones libres y justas.

La OEA podrá enviar, con el acuerdo del Estado interesado, misiones especiales a fin de contribuir a crear o mejorar dichas condiciones.

VI

Promoción de la cultura democrática

Artículo 26

La OEA continuará desarrollando programas y actividades dirigidos a promover los principios y prácticas democráticas y fortalecer la cultura democrática en el Hemisferio, considerando que la democracia es un sistema de vida fundado en la libertad y el mejoramiento económico, social y cultural de los pueblos. La OEA mantendrá consultas y cooperación continua con los Estados Miembros, tomando en cuenta los aportes de organizaciones de la sociedad civil que trabajen en esos ámbitos.

Artículo 27

Los programas y actividades se dirigirán a promover la gobernabilidad, la buena gestión, los valores democráticos y el fortalecimiento de la institucionalidad política y de las organizaciones de la sociedad civil. Se prestará atención especial al desarrollo de programas y actividades para la educación de la niñez y la juventud como forma de asegurar la permanencia de los valores democráticos, incluidas la libertad y la justicia social.

Artículo 28

Los Estados promoverán la plena e igualitaria participación de la mujer en las estructuras políticas de sus respectivos países como elemento fundamental para la promoción y ejercicio de la cultura democrática.

EL ACUERDO NACIONAL

El 22 de julio de 2002, los representantes de las organizaciones políticas, religiosas, del Gobierno y de la sociedad civil firmaron el compromiso de trabajar, todos, para conseguir el bienestar y desarrollo del país. Este compromiso es el Acuerdo Nacional.

El acuerdo persigue cuatro objetivos fundamentales. Para alcanzarlos, todos los peruanos de buena voluntad tenemos, desde el lugar que ocupemos o el rol que desempeñemos, el deber y la responsabilidad de decidir, ejecutar, vigilar o defender los compromisos asumidos. Estos son tan importantes que serán respetados como políticas permanentes para el futuro.

Por esta razón, como niños, niñas, adolescentes o adultos, ya sea como estudiantes o trabajadores, debemos promover y fortalecer acciones que garanticen el cumplimiento de esos cuatro objetivos que son los siguientes:

1. Democracia y Estado de Derecho

La justicia, la paz y el desarrollo que necesitamos los peruanos sólo se pueden dar si conseguimos una verdadera democracia. El compromiso del Acuerdo Nacional es garantizar una sociedad en la que los derechos son respetados y los ciudadanos viven seguros y expresan con libertad sus opiniones a partir del diálogo abierto y enriquecedor; decidiendo lo mejor para el país.

2. Equidad y Justicia Social

Para poder construir nuestra democracia, es necesario que cada una de las personas que conformamos esta sociedad, nos sintamos parte de ella. Con este fin, el Acuerdo promoverá el acceso a las oportunidades económicas, sociales, culturales y políticas. Todos los peruanos tenemos derecho a un empleo digno, a una educación de calidad, a una salud integral, a un lugar para vivir. Así, alcanzaremos el desarrollo pleno.

3. Competitividad del País

Para afianzar la economía, el Acuerdo se compromete a fomentar el espíritu de competitividad en las empresas, es decir, mejorar la calidad de los productos y servicios, asegurar el acceso a la formalización de las pequeñas empresas y sumar esfuerzos para fomentar la colocación de nuestros productos en los mercados internacionales.

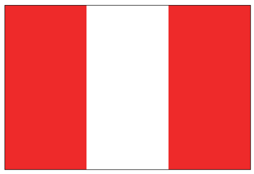
4. Estado Eficiente, Transparente y Descentralizado

Es de vital importancia que el Estado cumpla con sus obligaciones de manera eficiente y transparente para ponerse al servicio de todos los peruanos. El Acuerdo se compromete a modernizar la administración pública, desarrollar instrumentos que eliminen la corrupción o el uso indebido del poder. Asimismo, descentralizar el poder y la economía para asegurar que el Estado sirva a todos los peruanos sin excepción.

Mediante el Acuerdo Nacional nos comprometemos a desarrollar maneras de controlar el cumplimiento de estas políticas de Estado, a brindar apoyo y difundir constantemente sus acciones a la sociedad en general.

SÍMBOLOS DE LA PATRIA

Artículo 49 de la Constitución Política del Perú



BANDERA NACIONAL

ESCUDO NACIONAL

HIMNO NACIONAL DEL PERÚ

CORO

Somos libres, seámoslo siempre,
y antes niegue sus luces el sol,
que faltemos al voto solemne
que la patria al Eterno elevó.

HIMNO NACIONAL

Declaración Universal de los Derechos Humanos

El 10 de diciembre de 1948, la Asamblea General de las Naciones Unidas aprobó y proclamó la Declaración Universal de Derechos Humanos, cuyos artículos figuran a continuación:

Artículo 1
Todos los seres humanos nacen libres e iguales en dignidad y derechos y, (...) deben comportarse fraternalmente los unos con los otros.

Artículo 2
Toda persona tiene los derechos y libertades proclamados en esta Declaración, sin distinción alguna de raza, color, sexo, idioma, religión, opinión política o de cualquier otra índole, origen nacional o social, posición económica, nacimiento o cualquier otra condición. Además, no se hará distinción alguna fundada en la condición política, jurídica o internacional del país o territorio de cuya jurisdicción dependa una persona (...).

Artículo 3
Todo individuo tiene derecho a la vida, a la libertad y a la seguridad de su persona.

Artículo 4
Nadie estará sometido a esclavitud ni a servidumbre; la esclavitud y la trata de esclavos están prohibidas en todas sus formas.

Artículo 5
Nadie será sometido a torturas ni a penas o tratos crueles, inhumanos o degradantes.

Artículo 6
Todo ser humano tiene derecho, en todas partes, al reconocimiento de su personalidad jurídica.

Artículo 7
Todos son iguales ante la ley y tienen, sin distinción, derecho a igual protección de la ley. Todos tienen derecho a igual protección contra toda discriminación que infrinja esta Declaración (...).

Artículo 8
Toda persona tiene derecho a un recurso efectivo, ante los tribunales nacionales competentes, que la ampare contra actos que violen sus derechos fundamentales (...).

Artículo 9
Nadie podrá ser arbitrariamente detenido, preso ni desterrado.

Artículo 10
Toda persona tiene derecho, en condiciones de plena igualdad, a ser oída públicamente y con justicia por un tribunal independiente e imparcial, para la determinación de sus derechos y obligaciones o para el examen de cualquier acusación contra ella en materia penal.

Artículo 11
1. Toda persona acusada de delito tiene derecho a que se presuma su inocencia mientras no se pruebe su culpabilidad (...).
2. Nadie será condenado por actos u omisiones que en el momento de cometerse no fueron delictivos según el Derecho nacional o internacional. Tampoco se impondrá pena más grave que la aplicable en el momento de la comisión del delito.

Artículo 12
Nadie será objeto de injerencias arbitrarias en su vida privada, su familia, su domicilio o su correspondencia, ni de ataques a su honra o a su reputación. Toda persona tiene derecho a la protección de la ley contra tales injerencias o ataques.

Artículo 13
1. Toda persona tiene derecho a circular libremente y a elegir su residencia en el territorio de un Estado.
2. Toda persona tiene derecho a salir de cualquier país, incluso el propio, y a regresar a su país.

Artículo 14
1. En caso de persecución, toda persona tiene derecho a buscar asilo, y a disfrutar de él, en cualquier país.
2. Este derecho no podrá ser invocado contra una acción judicial realmente originada por delitos comunes o por actos opuestos a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 15
1. Toda persona tiene derecho a una nacionalidad.
2. A nadie se privará arbitrariamente de su nacionalidad ni del derecho a cambiar de nacionalidad.

Artículo 16
1. Los hombres y las mujeres, a partir de la edad núbil, tienen derecho, sin restricción alguna por motivos de raza, nacionalidad o religión, a casarse y fundar una familia (...).
2. Sólo mediante libre y pleno consentimiento de los futuros esposos podrá contraerse el matrimonio.
3. La familia es el elemento natural y fundamental de la sociedad y tiene derecho a la protección de la sociedad y del Estado.

Artículo 17
1. Toda persona tiene derecho a la propiedad, individual y colectivamente.
2. Nadie será privado arbitrariamente de su propiedad.

Artículo 18
Toda persona tiene derecho a la libertad de pensamiento, de conciencia y de religión (...).

Artículo 19
Todo individuo tiene derecho a la libertad de opinión y de expresión (...).

Artículo 20
1. Toda persona tiene derecho a la libertad de reunión y de asociación pacíficas.
2. Nadie podrá ser obligado a pertenecer a una asociación.

Artículo 21
1. Toda persona tiene derecho a participar en el gobierno de su país, directamente o por medio de representantes libremente escogidos.
2. Toda persona tiene el derecho de acceso, en condiciones de igualdad, a las funciones públicas de su país.
3. La voluntad del pueblo es la base de la autoridad del poder público; esta voluntad se expresará mediante elecciones auténticas que habrán de celebrarse periódicamente, por sufragio universal e igual y por voto secreto u otro procedimiento equivalente que garantice la libertad del voto.

Artículo 22
Toda persona (...) tiene derecho a la seguridad social, y a obtener, (...) habida cuenta de la organización y los recursos de cada Estado, la satisfacción de los derechos económicos, sociales y culturales, indispensables a su dignidad y al libre desarrollo de su personalidad.

Artículo 23
1. Toda persona tiene derecho al trabajo, a la libre elección de su trabajo, a condiciones equitativas y satisfactorias de trabajo y a la protección contra el desempleo.
2. Toda persona tiene derecho, sin discriminación alguna, a igual salario por trabajo igual.
3. Toda persona que trabaja tiene derecho a una remuneración equitativa y satisfactoria, que le asegure, así como a su familia, una existencia conforme a la dignidad humana y que será completada, en caso necesario, por cualesquiera otros medios de protección social.
4. Toda persona tiene derecho a fundar sindicatos y a sindicarse para la defensa de sus intereses.

Artículo 24
Toda persona tiene derecho al descanso, al disfrute del tiempo libre, a una limitación razonable de la duración del trabajo y a vacaciones periódicas pagadas.

Artículo 25
1. Toda persona tiene derecho a un nivel de vida adecuado que le asegure, así como a su familia, la salud y el bienestar, y en especial la alimentación, el vestido, la vivienda, la asistencia médica y los servicios sociales necesarios; tiene asimismo derecho a los seguros en caso de desempleo, enfermedad, invalidez, viudez, vejez y otros casos de pérdida de sus medios de subsistencia por circunstancias independientes de su voluntad.
2. La maternidad y la infancia tienen derecho a cuidados y asistencia especiales. Todos los niños, nacidos de matrimonio o fuera de matrimonio, tienen derecho a igual protección social.

Artículo 26
1. Toda persona tiene derecho a la educación. La educación debe ser gratuita, al menos en lo concerniente a la instrucción elemental y fundamental. La instrucción elemental será obligatoria. La instrucción técnica y profesional habrá de ser generalizada; el acceso a los estudios superiores será igual para todos, en función de los méritos respectivos.
2. La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana y el fortalecimiento del respeto a los derechos humanos y a las libertades fundamentales; favorecerá la comprensión, la tolerancia y la amistad entre todas las naciones y todos los grupos étnicos o religiosos; y promoverá el desarrollo de las actividades de las Naciones Unidas para el mantenimiento de la paz.
3. Los padres tendrán derecho preferente a escoger el tipo de educación que habrá de darse a sus hijos.

Artículo 27
1. Toda persona tiene derecho a tomar parte libremente en la vida cultural de la comunidad, a gozar de las artes y a participar en el progreso científico y en los beneficios que de él resulten.
2. Toda persona tiene derecho a la protección de los intereses morales y materiales que le correspondan por razón de las producciones científicas, literarias o artísticas de que sea autora.

Artículo 28
Toda persona tiene derecho a que se establezca un orden social e internacional en el que los derechos y libertades proclamados en esta Declaración se hagan plenamente efectivos.

Artículo 29
1. Toda persona tiene deberes respecto a la comunidad(...).
2. En el ejercicio de sus derechos y en el disfrute de sus libertades, toda persona estará solamente sujeta a las limitaciones establecidas por la ley con el único fin de asegurar el reconocimiento y el respeto de los derechos y libertades de los demás, y de satisfacer las justas exigencias de la moral, del orden público y del bienestar general en una sociedad democrática.
3. Estos derechos y libertades no podrán en ningún caso ser ejercidos en oposición a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 30
Nada en la presente Declaración podrá interpretarse en el sentido de que confiere derecho alguno al Estado, a un grupo o a una persona, para emprender y desarrollar actividades (...) tendientes a la supresión de cualquiera de los derechos y libertades proclamados en esta Declaración.