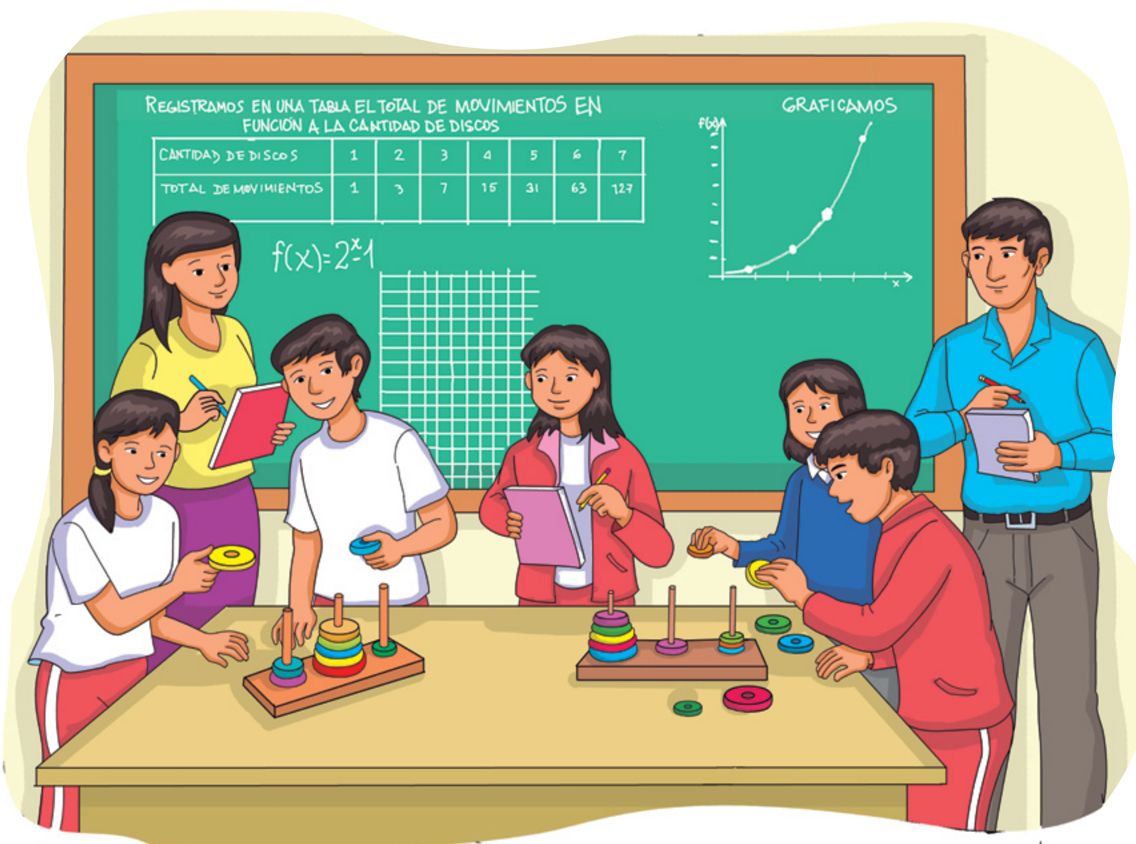
SECUNDARIA

Fascículo para el desarrollo de la competencia

Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio



MINISTERIO DE EDUCACIÓN

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

FASCÍCULO PARA EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA RESUELVE PROBLEMAS DE REGULARIDAD, EQUIVALENCIA Y CAMBIO

Esta herramienta curricular en versión digital para docentes de las IIEE de Secundaria ha sido elaborada por la Dirección de Educación Secundaria y tiene como propósito fortalecer y promover el desarrollo de la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio propuestas en el Currículo Nacional de la Educación Básica.

Edición
© Ministerio de Educación
Calle Del Comercio N.º 193
San Borja
Lima 15021, Perú
Teléfono: 615-5800
www.minedu.gob.pe

Elaboración de contenido
Jimmy Deivy Canaza Ojeda
José Luis Maurtua Aguilar
Juan Carlos Chávez Espino
Larisa Mansilla Fernández
Mariela Quispe Quille
Roxana Pilar Choquepata Vilca

Revisión pedagógica
José Luis Maurtua Aguilar
Juan Carlos Chávez Espino
Larisa Mansilla Fernández
Mariela Quispe Quille
Roxana Pilar Choquepata Vilca

Especialista en edición
Oscar Emiliano Palomino Flores

Corrección de estilo
Elizabeht Beatriz Bautista Toledano
Marco Antonio Vigo Esqueche

Diseño y diagramación
Marco David Villanueva Imafuku
Ana Matilde Morales Vásquez

Ilustración
Gloria Arredondo Castillo

Debido a la naturaleza dinámica de internet, las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que se hace referencia en este material educativo pueden tener modificaciones o desaparecer.

En este material se utilizan términos como “el docente”, “el estudiante”, “el profesor” y sus respectivos plurales, así como otras palabras equivalentes en el contexto educativo, para referirse a hombres y mujeres. Esta opción considera la diversidad y respeta el lenguaje inclusivo, y se emplea para promover una lectura fluida y facilitar la comprensión del texto.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Estimados docentes:

La presente herramienta curricular, titulada "Fascículo para el desarrollo de la competencia 'Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio'", ha sido diseñada con el objetivo de apoyar la implementación del Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB). A través de este documento, buscamos ayudarlos a promover en los estudiantes actuaciones relacionadas con generalizar regularidades, reconocer o plantear relaciones de equivalencia y entender los cambios de una magnitud respecto de otra en situaciones diversas.

Esta herramienta facilita comprender qué se espera conseguir con el desarrollo de la competencia "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio". Apoyándose en su información, ustedes podrán guiar a los estudiantes en la resolución de problemas que requieren el uso de expresiones simbólicas y algebraicas en la vida cotidiana. Además, estarán en condiciones de ayudarlos a comprender las propiedades de los patrones, funciones, ecuaciones e inecuaciones utilizando diversas representaciones, de manera que los estudiantes sean capaces de plantear afirmaciones.

Esperamos que este fascículo sea una guía valiosa en su práctica pedagógica. Confiamos en que contribuirá a fomentar un aprendizaje activo, colaborativo y estrechamente vinculado con la realidad de los estudiantes.

Dirección de Educación Secundaria

Capítulo 1

¿En qué consiste desarrollar la competencia "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio"?

Reflexiona

- ¿Qué opinas sobre la conversación que sostienen los tres docentes?
- ¿Te identificas con alguna de las posturas de los docentes?, ¿por qué?
- ¿Qué crees que se debe hacer para que los estudiantes desarrollen la competencia "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio"?

En este diálogo, los docentes reflexionan sobre sus creencias en torno a la competencia "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio". Algunos consideran que el desarrollo de esta competencia se limita a actividades abstractas y a la memorización de reglas y fórmulas, desvinculadas de la realidad, sin considerar la necesidad de los estudiantes de comprender la aplicación de estos saberes en situaciones prácticas. Este enfoque, centrado en la repetición de procedimientos, limita la capacidad de los estudiantes para identificar patrones y hacer predicciones, con lo cual se restringe también el desarrollo de un pensamiento abstracto y relacional. Sin embargo, aunque esta competencia tiene una naturaleza abstracta, es fundamental que los estudiantes conecten las matemáticas con situaciones concretas, para que les confieran un sentido más amplio y significativo.

Es importante que los docentes reconsideren su práctica con el objetivo de crear un ambiente de aprendizaje que permita a los estudiantes descubrir relaciones y patrones, de tal manera que fomenten la exploración y el uso de símbolos y procedimientos algebraicos en contextos que reflejen situaciones reales. En lugar de limitarse a un enfoque mecanicista, los docentes deben promover el razonamiento, la formulación de hipótesis y la resolución de problemas, de modo que los estudiantes se conviertan en participantes activos en su propio aprendizaje. Esto les ayudará a alcanzar una comprensión más profunda de las relaciones algebraicas, con lo cual se mejoran sus habilidades para realizar generalizaciones y establecer reglas de manera autónoma.

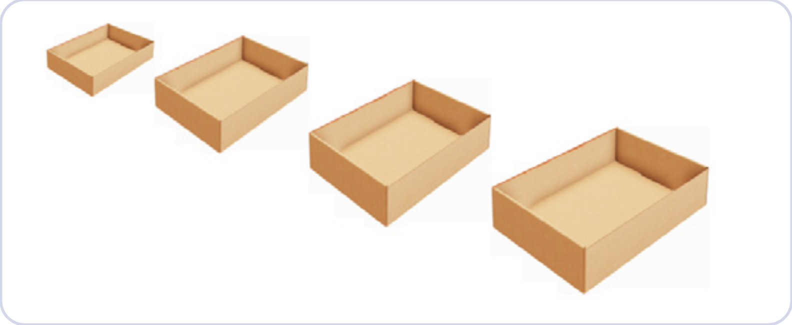
En el desarrollo de la competencia "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio" desde la perspectiva del pensamiento variacional, planteada por Cantoral (2013), es fundamental que el aprendizaje sea contextualizado, y que se empleen situaciones reales y significativas. Esto facilita que los estudiantes perciban el álgebra como una herramienta práctica para modelar y resolver problemas cotidianos, y les permite descubrir su utilidad en la vida real. La propuesta de Cantoral ha demostrado ser más efectiva que el enfoque tradicional con miras a mejorar las habilidades de pensamiento de orden superior en los estudiantes (Baskoro, 2021). Este enfoque posibilita que los estudiantes disciernan nuevos aspectos de un objeto de aprendizaje, lo cual favorece una comprensión profunda y la aplicación efectiva de los conceptos matemáticos. Así, se fomenta la exploración a través de la interacción entre variación e invariante, lo que promueve el razonamiento y la argumentación. Para ilustrar lo expuesto, observemos la siguiente situación:

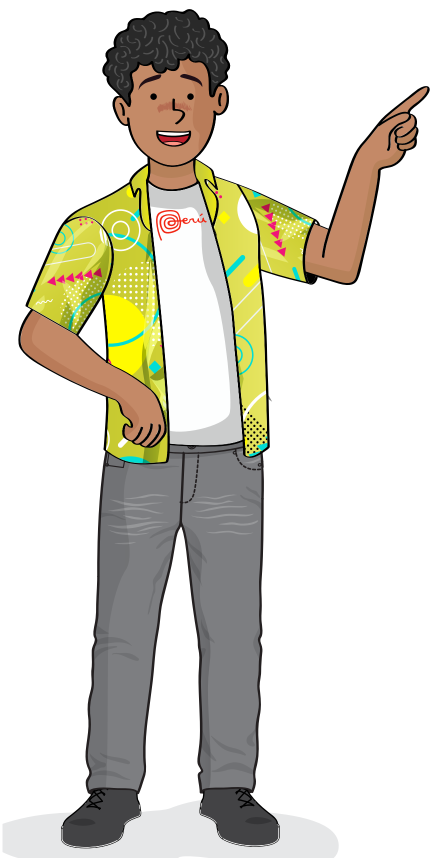
En la I. E. Mi Perú, desde el área de Educación para el Trabajo, han decidido emprender un negocio creativo: elaborar chocotejas de diferentes sabores y ofrecerlas al público.

Para presentar las chocotejas de manera atractiva, las colocarán en cajas decorativas de cartón. Se sabe que cada caja será elaborada a partir de una lámina de cartón cuadrada de 10 cm de lado. ¿Cuáles serían los posibles tamaños de las cajas para empaquetar las chocotejas?

¿Cuál sería la caja de mayor volumen para poder empaquetar las chocotejas? ¿Cuáles serían las dimensiones de dicha caja?

Figura 1. Cajas de diferentes tamaños para la presentación de chocotejas





Desde el enfoque variacional, la situación planteada permite que los estudiantes exploren la relación entre las dimensiones de la caja y su volumen. Al modificar el tamaño de los cortes en las esquinas del cuadrado, los estudiantes pueden observar cómo varía la capacidad de la caja e identificar la relación entre las dimensiones y el volumen. Esta exploración de la variación favorece una comprensión profunda de cómo los cambios en una variable afectan el resultado final.

Además, para desarrollar la competencia, es fundamental que los estudiantes identifiquen patrones y regularidades en diversos contextos. Este proceso de observación y análisis les permite abstraer y generalizar relaciones, con lo que fortalecen su capacidad para razonar algebraicamente. Al construir sus propias expresiones simbólicas a partir de situaciones concretas, los estudiantes logran que el lenguaje algebraico surja de manera comprensible y funcional, con lo cual se evita que se convierta en un simple conjunto de símbolos memorizados. La validación de estos modelos, mediante la reflexión sobre su aplicabilidad y utilidad, profundiza su comprensión del razonamiento algebraico.

Este enfoque contribuye a una transición gradual desde el pensamiento aritmético hacia el pensamiento algebraico. Según Sun, Sun y Xu (2023), esta progresión ocurre en cuatro etapas: comienza con el pensamiento aritmético, y sigue con el pensamiento algebraico concreto, el pensamiento algebraico generalizado y, finalmente, el pensamiento algebraico simbólico. Cada etapa requiere que los estudiantes desarrollen habilidades de generalización y simbolización, lo que favorece una comprensión cada vez más abstracta de los conceptos algebraicos.

La generalización de patrones desempeña un papel esencial en el desarrollo del razonamiento algebraico. Investigaciones previas señalan que los estudiantes pueden identificar patrones sin recurrir a la notación algebraica formal; sin embargo, la capacidad para expresar generalizaciones de forma verbal no siempre implica un uso adecuado de la notación algebraica (Zazkis y Liljedahl, 2002). Las actividades centradas en patrones, en el nivel de secundaria, han demostrado mejorar considerablemente el razonamiento algebraico en los estudiantes (Demonty, Vlassis y Fagnant, 2018).

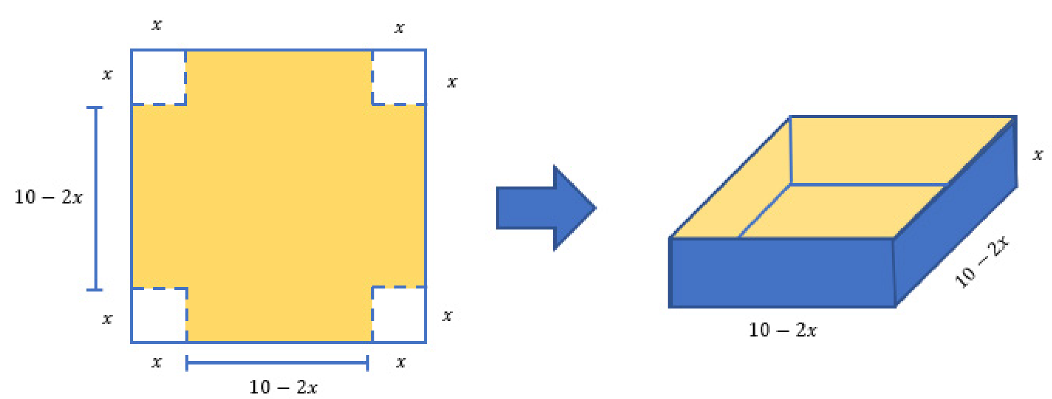
Asimismo, muchos estudiantes enfrentan dificultades con la simbolización y resolución de ecuaciones, debido a una comprensión limitada de tipo instrumental o procedimental. La enseñanza que hace hincapié en la comprensión relacional y en el uso de representaciones múltiples puede mejorar significativamente la interpretación y el manejo de los símbolos algebraicos (Cañadas, Dooley, Hodgen y Oldenburg, 2012).

Según Serres (2011), el pensamiento algebraico conlleva un proceso de generalización que permite formular expresiones algebraicas, patrones, ecuaciones y funciones. Este proceso utiliza el lenguaje algebraico y su simbología para buscar precisión en la resolución de problemas y en el diseño de modelos matemáticos, tanto en matemática como en otras áreas del conocimiento y en situaciones de la vida cotidiana (p. 126).

Radford (2006) aporta una visión sociocultural al pensamiento algebraico al sugerir que el desarrollo de este tipo de razonamiento está influenciado por la interacción social, el lenguaje y el uso de herramientas simbólicas. Desde esta perspectiva, el pensamiento algebraico no se limita a ser una actividad mental individual, sino que se construye a través de interacciones con otros y mediante artefactos culturales, como el lenguaje matemático y las representaciones simbólicas. Asimismo, el autor distingue dos dimensiones en el pensamiento algebraico: la simbólica, que involucra el uso de símbolos, fórmulas y expresiones; y la semiótica, que se centra en la interpretación y el significado de estos símbolos. En este proceso, los estudiantes aprenden a manipular expresiones algebraicas como objetos estructurados y, a la vez, a comprender las relaciones que estas representan.

Respecto a la situación planteada, a continuación se detallan las dimensiones de la caja expresadas mediante fórmulas simbólicas que indican las posibles variaciones en sus medidas:

Figura 2. Representaciones algebraicas de las modificaciones en la caja de chocotejas



Con esto, en la figura 2 se reconocen las expresiones numéricas que muestran la relación entre la medida de la altura de la caja, el largo y el ancho de la base. Los estudiantes pueden desarrollar su razonamiento algebraico explorando relaciones entre variables en un contexto práctico, como la construcción de cajas de distintas dimensiones y el cálculo de sus áreas y volúmenes.

Se puede observar que los estudiantes establecen una relación que vincula la altura de la caja (h) con el área de su base (A_B). Utilizando esta relación, calculan el área en función de la altura, lo que permite representar en una tabla diferentes valores de altura y el área de la base de la caja. La tabla 1 muestra cómo el área de la base cambia conforme varía la altura, lo que permite a los estudiantes identificar patrones y visualizar cómo una dimensión afecta a otra. Esta observación es esencial para que comprendan el proceso de generalización en un contexto práctico, donde pueden ver cómo las cantidades están relacionadas de manera estructurada.

El área de la base de la caja depende de la altura y se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$A_B = [10 - 2h]^2$$

Tabla 1. Variación del área de la base según la altura de la caja

h	Área de la base
1	$A_1 = [10 - 2(1)]^2 = 64$
1,5	$A_2 = [10 - 2(1,5)]^2 = 49$
2	$A_3 = [10 - 2(2)]^2 = 36$
2,5	$A_4 = [10 - 2(2,5)]^2 = 25$
3	$A_5 = [10 - 2(3)]^2 = 16$
3,5	$A_6 = [10 - 2(3,5)]^2 = 9$
4	$A_7 = [10 - 2(4)]^2 = 4$
4,5	$A_8 = [10 - 2(4,5)]^2 = 1$
x	$A_x = [10 - 2(x)]^2$

Al incorporar el volumen en el análisis, los estudiantes amplían su comprensión a una tercera dimensión. El volumen de la caja depende de la altura y del área de la base, y se calcula mediante la siguiente fórmula, donde h es la altura de la caja:

$$V = [10 - 2h]^2 \cdot h$$

Al calcular el volumen para diferentes valores de altura, los estudiantes pueden observar cómo varía en función de la altura y el área de la base. Este proceso les permite explorar patrones de crecimiento y disminución en el volumen, al visualizar cómo un aumento en la altura impacta en el volumen total (ver tabla 2).

Tabla 2. Variación del volumen de la caja según la altura

h	Volumen
1	$V_1 = [10 - 2(1)]^2 (1) = 64$
1,5	$V_2 = [10 - 2(1,5)]^2 (1,5) = 73,5$
2	$V_3 = [10 - 2(2)]^2 (2) = 72$
2,5	$V_4 = [10 - 2(2,5)]^2 (2,5) = 62,5$
3	$V_5 = [10 - 2(3)]^2 (3) = 48$
3,5	$V_6 = [10 - 2(3,5)]^2 (3,5) = 31,5$
4	$V_7 = [10 - 2(4)]^2 (4) = 16$
4,5	$V_8 = [10 - 2(4,5)]^2 (4,5) = 1$
x	$V_x = [10 - 2(x)]^2 (x)$

A medida que los estudiantes completan la tabla 2 con los valores de altura, largo de la base, área y volumen de la caja, pueden identificar que el volumen crece hasta un cierto punto antes de comenzar a disminuir. Esto los lleva a descubrir que existe una altura óptima que maximiza el volumen de la caja. En el ejemplo, el volumen se aproxima a su valor máximo de 73,5 cm^3 cuando la altura es de 1,5 cm, lo que muestra que, aunque aumentar la altura inicialmente incrementa el volumen, este eventualmente disminuye, debido a la reducción en el área de la base.

Este análisis del volumen refuerza la comprensión de los estudiantes sobre la relación entre las dimensiones de la caja y los introduce a conceptos de optimización. Les permite entender cómo el máximo de una función puede representar el mejor valor para cumplir con un objetivo específico: en este caso, maximizar el volumen. Este proceso de análisis fortalece el razonamiento algebraico de los estudiantes al mostrarles cómo una expresión general puede aplicarse en la práctica y cómo pueden modelar situaciones reales con expresiones simbólicas.

Para el desarrollo de esta competencia matemática, es fundamental incorporar diversas formas de representación —gráfica, algebraica, tabular y verbal—, ya que favorecen la comprensión y el aprendizaje de los conceptos matemáticos. La traducción entre diferentes representaciones de funciones y la visualización matemática son elementos clave en el aprendizaje de las matemáticas.

El uso de múltiples representaciones en contextos realistas ha demostrado mejorar significativamente el aprendizaje de los estudiantes de secundaria. Según un estudio de Kusumaningsih y otros (2018), los estudiantes que emplearon estrategias basadas en representaciones múltiples superaron a aquellos que siguieron un enfoque tradicional. Brenner y otros (1995) también destacan que la capacidad de traducir entre diferentes formas de representación es crucial para el éxito en la resolución de problemas matemáticos. Sin embargo, los estudiantes a menudo enfrentan dificultades al pasar de representaciones pictóricas a representaciones matemáticas, lo que puede afectar su precisión en la estimación y resolución de problemas.

En el aprendizaje de las funciones, el desempeño de los estudiantes puede analizarse según los tipos de argumentos que utilizan, ya sea a través de procedimientos algebraicos, consideraciones visuales o una combinación de ambas. Yerushalmy (1991) encontró que el uso de procedimientos algebraicos y representaciones visuales fomentan la creatividad y mejoran la comprensión de los conceptos de función; sin embargo, observó que la conexión entre las manipulaciones algebraicas y la representación visual no surge espontáneamente y necesita ser promovida de manera activa. La visualización matemática, especialmente en el estudio de funciones lineales y multivariables, es crucial para la comprensión de conceptos complejos. Trigueros y Martínez-Planell (2010) y Adu-Gyamfi y Bossé (2014) señalan que los estudiantes que pueden visualizar y manipular diferentes representaciones tienden a tener una comprensión más sólida de las funciones y sus propiedades.

Otro desafío es desarrollar la capacidad de generalizar principios matemáticos al trabajar con representaciones simbólicas y tabulares. Cooper y Warren (2008) subrayan que la identificación de relaciones comunes entre distintas representaciones es fundamental para la generalización exitosa de conceptos matemáticos.

Según Duval (2017), un objeto matemático puede ser representado mediante una representación semiótica; es decir, un conjunto de signos que se convierten en el medio de expresión para hacer visibles las representaciones mentales de otros individuos. Las representaciones semióticas utilizan registros diferentes, como el registro gráfico, algebraico, tabular, la lengua natural, etc. La siguiente imagen muestra los registros utilizados para resolver la situación de la caja:

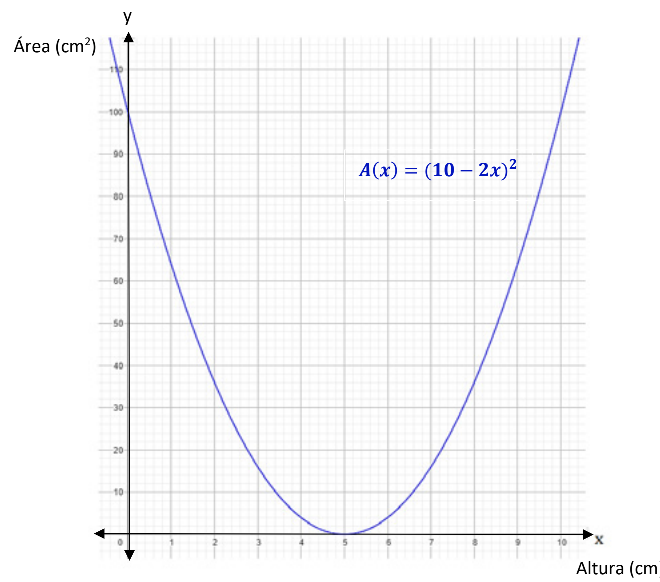
Figura 3. Diversos registros matemáticos para representar el área de la base de una caja

Área de la base de una caja

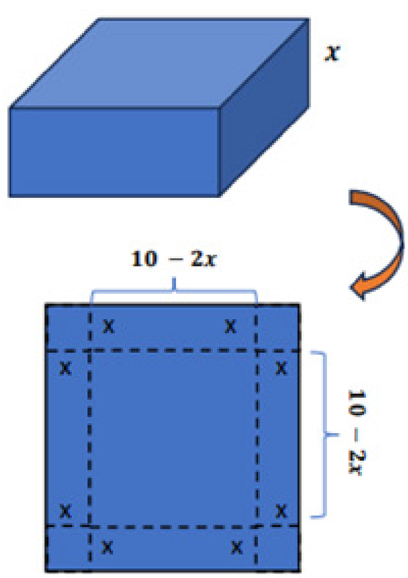
Registro tabular

Altura x	Área de la base $A(x) = (10 - 2x)^2$
0	$(10 - 2 \cdot 0)^2 = 100$
1	$(10 - 2 \cdot 1)^2 = 64$
2	$(10 - 2 \cdot 2)^2 = 36$
3	$(10 - 2 \cdot 3)^2 = 16$
4	$(10 - 2 \cdot 4)^2 = 4$
5	$\mathbf{(10 - 2 \cdot 5)^2 = 0}$

Registro gráfico



Plantilla de la caja



Registro algebraico

x: Altura de la caja

A(x): Área de la caja

Área = lado²

$$A(x) = (10 - 2x)^2$$

$$A(x) = 100 - 40x + 4x^2$$

$$\mathbf{A(x) = 4x^2 - 40x + 100 \ ; \ 0 < x < 5}$$

Registro lengua natural

El área de la base de la caja varía en función de la altura de esta, que debe ser un número real mayor que cero y menor que 5, para que el área exista. Cuando la altura aumenta, el área de la base de la caja disminuye. Así, por ejemplo, si la altura de la caja es de 1 cm, el área es 64 cm²; en cambio, si el lado aumenta a 2 cm, la nueva área es de 36 cm².

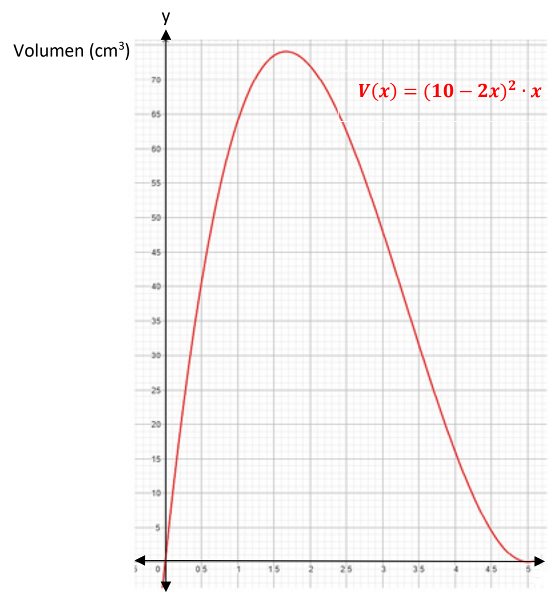
Figura 4. Diversos registros matemáticos para representar el volumen de una caja

Volumen de una caja

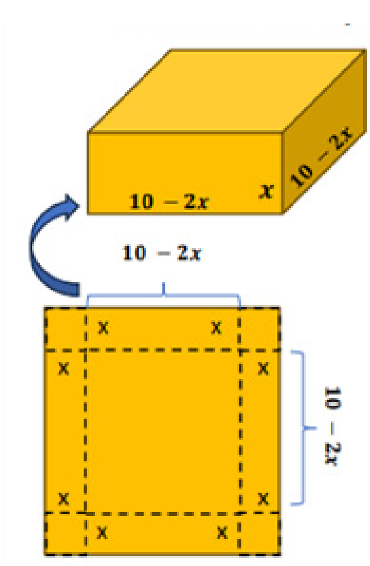
Registro tabular

Altura x	Área de la base $A(x) = (10 - 2x)^2$	Volumen de la caja $V(x) = (10 - 2x)^2 \cdot x$
0	$(10 - 2 \cdot 0)^2 = 100$	$(10 - 2 \cdot 0)^2 \cdot 0 = 0$
1	$(10 - 2 \cdot 1)^2 = 64$	$(10 - 2 \cdot 1)^2 \cdot 1 = 64$
1,5	$(10 - 2 \cdot 1,5)^2 = 49$	$(10 - 2 \cdot 1)^2 \cdot 1,5 = 73,5$
2	$(10 - 2 \cdot 2)^2 = 36$	$(10 - 2 \cdot 2)^2 \cdot 2 = 72$
3	$(10 - 2 \cdot 3)^2 = 16$	$(10 - 2 \cdot 3)^2 \cdot 3 = 48$
4	$(10 - 2 \cdot 4)^2 = 4$	$(10 - 2 \cdot 4)^2 \cdot 4 = 16$
5	$(10 - 2 \cdot 5)^2 = 0$	$(10 - 2 \cdot 5)^2 \cdot 5 = 0$

Registro gráfico



Construcción de la caja



Registro algebraico

x: Altura de la caja

V(x): Volumen de la caja

V(x) = Área de la base x altura

$$V(x) = (10 - 2x)^2 x$$

$$V(x) = (4x^2 - 40x + 100)x$$

$$V(x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x\,; \quad 0 < x < 5$$

Registro lengua natural

El volumen de la caja varía en función de la altura de esta, el cual debe ser un número real mayor que cero y menor que 5 para que el volumen exista. A medida que la altura se incrementa, el volumen aumenta y luego disminuye alrededor del punto 1,5. Cuando la altura es 1 cm el volumen es 64 cm³, pero cuando la altura es de 1,5 cm el volumen toma el valor de 73,5 cm³ y luego al ser 2 cm el volumen disminuye.

El desarrollo de la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio” permite a los estudiantes fortalecer el razonamiento algebraico a través de la identificación de patrones, relaciones y variaciones en diversos contextos. Al explorar cómo los cambios en una variable afectan los resultados, los estudiantes aprenden a generalizar y formular expresiones simbólicas, lo que fortalece su comprensión de las estructuras algebraicas. Este proceso incluye el uso de múltiples representaciones (gráfica, tabular, algebraica y verbal), las cuales ayudan a traducir y visualizar las relaciones, y esto facilita una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos.

La transición gradual desde el pensamiento aritmético hacia el algebraico se apoya en contextos significativos y situaciones reales, donde los estudiantes validan sus modelos y reflexionan sobre su aplicabilidad. Este enfoque fomenta el uso de herramientas simbólicas y visuales que, además de promover la argumentación y el razonamiento matemático, incrementan la creatividad y la precisión en la resolución de problemas matemáticos complejos.

En este marco, la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio” implica que los estudiantes desarrollen habilidades para la identificación, descripción y generalización de patrones numéricos, geométricos y algebraicos, aspectos fundamentales para el desarrollo del pensamiento algebraico. Identificar y describir patrones es el primer paso hacia la generalización, un proceso en el cual los estudiantes pasan de observar casos específicos a formular reglas generales que describen relaciones funcionales. Según Blanton y Kaput (2005), los estudiantes exploran estas generalizaciones con el fin de comprender relaciones funcionales, objetivo central de la instrucción en álgebra. Este proceso no solo les permite reconocer patrones, sino también entender cómo esos patrones pueden representar relaciones entre diferentes elementos matemáticos.

La visualización de patrones geométricos y su generalización es otro aspecto crucial para desarrollar el pensamiento variacional y la comprensión de variables en el álgebra. Estudios realizados por Wilkie y Clarke (2016) destacan que la capacidad de visualizar patrones geométricos y entender su estructura ayuda a los estudiantes a abordar las relaciones funcionales desde una perspectiva más intuitiva y profunda. De esta manera, los estudiantes pueden aprender a reconocer no solo cómo los elementos dentro de un patrón se relacionan entre sí, sino también cómo describir esos cambios de forma simbólica y algebraica. En particular, los patrones que crecen, en lugar de los que se repiten, tienen un papel relevante en el currículo de grados medios, pues promueven la comprensión de relaciones funcionales que serán necesarias en el estudio de funciones y ecuaciones.

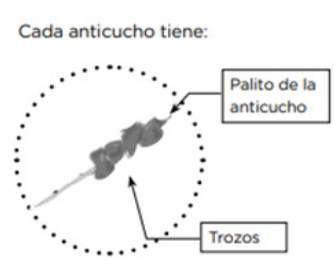
El desarrollo de habilidades para reconocer y representar relaciones funcionales es esencial en la enseñanza del álgebra. La investigación muestra que, incluso en primaria, los estudiantes son capaces de generalizar y representar relaciones funcionales al trabajar con patrones crecientes y estructuras geométricas (Wilkie y Clarke, 2016). Estas tareas ayudan a los estudiantes a pasar de representaciones concretas y visuales a representaciones simbólicas, al utilizar notación variable para expresar propiedades aritméticas, ecuaciones y relaciones funcionales (Blanton y otros, 2019). La habilidad de los estudiantes para interpretar y utilizar la notación variable de manera significativa es un indicador de progreso en su pensamiento algebraico, ya que les permite expresar generalizaciones y construir reglas simbólicas que van más allá del simple cálculo. Esta transición desde la comprensión visual a la representación simbólica refuerza la capacidad de los estudiantes para conceptualizar ideas abstractas, como las funciones, incluso antes de recibir instrucción formal en expresiones y ecuaciones algebraicas.

Trabajar con secuencias y series es otra práctica clave que introduce a los estudiantes al análisis de patrones, ya que les permite explorar sus propiedades y aplicaciones. La transformación de secuencias cuadráticas en expresiones algebraicas simbolizadas, tanto en su forma numérica como gráfica, es un ejemplo de cómo los estudiantes pueden reconocer y extender patrones, en situaciones que requieren especializar o generalizar relaciones funcionales particulares (Gierdien, 2011). Esta habilidad de transformar y generalizar secuencias no solo fomenta la comprensión de relaciones algebraicas, sino que también prepara a los estudiantes para pensar en términos de relaciones funcionales más complejas. En un estudio realizado por Moss y McNab (2011), se demostró que la intervención en el aula mediante representaciones geométricas y numéricas de patrones crecientes fue efectiva para que los estudiantes de segundo grado comprendieran funciones lineales y la covariación. Esto indica que, incluso en etapas tempranas, los estudiantes pueden adquirir una comprensión de cómo los cambios en un elemento afectan a otro en una relación funcional.

Veamos, a continuación, la siguiente situación:

Don Jacinto vende porciones de anticucho. Un cliente desea saber cuántos trozos de carne obtendría si compra un número determinado de porciones y cuál sería el costo total de su compra. ¿Cuántos trozos de carne hay en una compra de n porciones? ¿Cuál es el costo total de esa compra en función del número de porciones n?

Figura 5. Ejemplo realista de una situación que requiere el uso de patrones



El ejemplo de la venta de porciones de anticucho de don Jacinto ofrece un contexto ideal para que los estudiantes desarrollen habilidades de identificación, descripción y generalización de patrones. Los estudiantes comienzan observando que cada porción de anticucho consta de 3 palitos, y que cada palito tiene 4 trozos de carne. Por lo tanto, cada porción contiene un total de 12 trozos de carne (3 palitos × 4 trozos). Este proceso inicial de identificación es un paso hacia la generalización, ya que permite a los estudiantes ver una relación constante entre el número de porciones y el total de trozos de carne.

El uso de una tabla que muestre el número de porciones, el total de trozos de carne y el costo total ayuda a los estudiantes a visualizar el patrón de crecimiento.

Tabla 3. Relación entre el número de porciones, el total de trozos de carne y el costo total

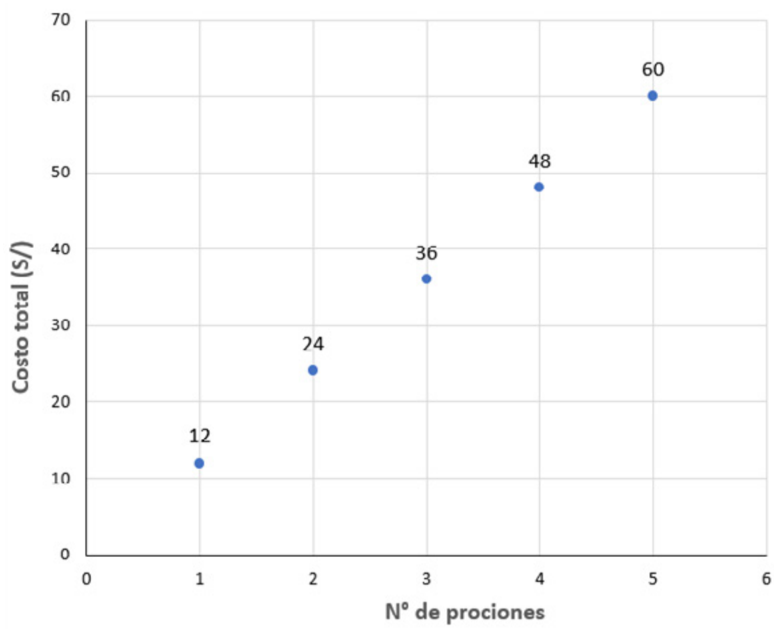
Número de porciones	Número de palitos	Número de trozos de carne (porción × 12)	Costo total (porción × S/ 12)
1	3	12	S/12
2	6	24	S/24
3	9	36	S/36
4	12	48	S/48
5	15	60	S/60
...		...	...
n		12 × *n*	S/12 × *n*

A medida que el número de porciones aumenta, tanto el total de trozos como el costo total crece de manera proporcional, lo que refuerza la comprensión de los estudiantes sobre cómo los cambios en una cantidad afectan a otra en una relación funcional. Este tipo de análisis les permite construir una regla general: el total de trozos de carne es igual a 12 multiplicado por el número de porciones (12 × n), y el costo total, representado por $C(n)$, es $C(n) = 12n$.

Al reconocer esta relación funcional y representarla simbólicamente, los estudiantes practican el uso de variables y la notación algebraica. Este paso, que va de una observación concreta a una representación simbólica, fortalece su habilidad para conceptualizar ideas abstractas. Usando la notación n como variable, los estudiantes pueden calcular el total de trozos y el costo total para cualquier cantidad de porciones, lo que evidencia el desarrollo de una comprensión dinámica de patrones crecientes en lugar de repetitivos. Esta capacidad para visualizar y generalizar patrones fomenta un pensamiento algebraico profundo y establece una base para estudiar relaciones funcionales más avanzadas en álgebra y cálculo.

La representación gráfica de estos datos posibilita a los estudiantes observar que cada punto es independiente y corresponde a cantidades enteras específicas, por lo que no deben unirse con una línea. Esto ayuda a comprender la diferencia entre datos discretos y continuos. En el ejemplo planteado, la función que relaciona el número de porciones, el total de trozos y el costo total es discreta, ya que solo se consideran números enteros. Esto es clave para entender funciones con números naturales y para diferenciar situaciones donde las cantidades son enteras de aquellas donde pueden ser continuas.

Figura 6. Costo total por la compra de porciones de anticuchos



Así, la competencia de "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio" implica reconocer que la equivalencia se entiende en diversos contextos y desde distintas perspectivas. En el caso de las fracciones, por ejemplo, existen dos concepciones de equivalencia: la equivalencia proporcional y la equivalencia de unidades. La equivalencia proporcional se centra en la relación entre las partes y el total, mientras que la equivalencia de unidades se fundamenta en la igualdad de cantidades enteras. Esta distinción es fundamental para desarrollar una comprensión conceptual de los números racionales y la aritmética de fracciones, como señalan estudios recientes (Pedersen y Bjerre, 2021).

En el álgebra, la equivalencia se amplía a contextos más complejos, como la equivalencia de contextos, que generaliza la equivalencia. Diversos estudios han demostrado que ciertas intervenciones educativas, como el uso del signo igual en contextos no aritméticos y el análisis de diferentes formatos de problemas, potencian significativamente la comprensión de la equivalencia matemática en los estudiantes. Cuando estos observan la equivalencia desde distintas perspectivas, cuentan con más herramientas para entender la matemática en mayor profundidad (McNeil y otros, 2019). Además, organizar la práctica aritmética en torno a valores equivalentes facilita que los estudiantes asimilen el concepto de equivalencia de manera más intuitiva (McNeil y otros, 2012).

Aplicar los principios de equivalencia es crucial al resolver ecuaciones y desigualdades, ya que ayuda a los estudiantes a comprender el signo igual no solo como una señal de operación, sino como un símbolo que representa la igualdad entre dos expresiones. En varios estudios se ha observado que muchos estudiantes tienden a interpretar el signo igual como una operación, lo cual limita su capacidad para resolver ecuaciones de manera efectiva. Guiar a los estudiantes a interpretar el signo igual como un símbolo de equivalencia es, por lo tanto, un paso fundamental para el desarrollo de la competencia, ya que facilita la resolución de ecuaciones y desigualdades con una comprensión más completa de su estructura lógica (McAuliffe y otros, 2020).

Además, explorar las propiedades de los sistemas numéricos y algebraicos a través del concepto de equivalencia permite que los estudiantes adquieran una comprensión más avanzada de las matemáticas. La equivalencia de contextos en álgebra, por ejemplo, permite relacionar propiedades de un álgebra y sus ideales, lo cual es útil para entender las estructuras algebraicas con mayor profundidad (Smirnov, 2017). El desarrollo de esta competencia no solo mejora la habilidad de los estudiantes para resolver problemas matemáticos, sino que también fortalece su capacidad de razonamiento lógico y les proporciona una base sólida para abordar contenidos matemáticos más avanzados en el futuro.

Veamos el siguiente ejemplo:

Una entrenadora personal está ayudando a Juan a planificar su dieta diaria para mejorar su rendimiento físico. Juan debe consumir 2200 calorías al día, y su nutricionista le ha recomendado una distribución específica de macronutrientes para apoyar su entrenamiento: el 50 % de sus calorías debe provenir de carbohidratos; el 30 %, de proteínas; y el 20 %, de grasas.

La entrenadora dispone de tres alimentos básicos para la dieta de Juan:

- **Pechuga de pollo:** Cada porción de 100 gramos proporciona 165 calorías, con un 0 % de carbohidratos, un 80 % de proteínas y un 20 % de grasas.
- **Arroz integral:** Cada porción de 100 gramos proporciona 130 calorías, con un 85 % de carbohidratos, un 10 % de proteínas y un 5 % de grasas.
- **Palta:** Cada porción de 100 gramos proporciona 160 calorías, con un 10 % de carbohidratos, un 5 % de proteínas y un 85 % de grasas.

La entrenadora quiere saber cuántos gramos de cada alimento debe incluir en la dieta diaria de Juan para que cumpla con las 2200 calorías diarias y, además, logre el balance de macronutrientes recomendado: 50 % de carbohidratos, 30 % de proteínas y 20 % de grasas.

Para resolver el problema de balanceo de macronutrientes en la dieta de Juan, la clave está en el equilibrio de las calorías y los macronutrientes que el cliente necesita para cumplir con sus objetivos de salud y rendimiento físico.

El proceso para resolver este problema comienza por el análisis de los alimentos disponibles mediante una representación tabular, como se muestra en la tabla 4. Recordemos que la entrenadora personal tiene tres alimentos básicos: pechuga de pollo, arroz integral y palta, cada uno con una distribución específica de calorías y macronutrientes por cada 100 gramos.

Tabla 4. Calorías y proporción de carbohidratos, proteínas y grasas de cada elemento

Alimento	Calorías por 100 g	% de carbohidratos	% de proteínas	% de grasas	Carbohidratos (cal)	Proteínas (cal)	Grasas (cal)
Pechuga de pollo	165	0 %	80 %	20 %	0	1,32x	0,33x
Arroz integral	130	85 %	10 %	5 %	1,105y	0,13y	0,065y
Palta	160	10 %	5 %	85 %	0,16z	0,08z	1,36z
Requerimiento total	**2200**	**50 % (1100 cal)**	**30 % (660 cal)**	**20 % (440 cal)**	**1100**	**660**	**440**

El problema consiste en que la dieta diaria debe contener 2200 calorías, con una distribución específica de macronutrientes: 50 % de carbohidratos, 30 % de proteínas y 20 % de grasas. Para cumplir con estas especificaciones, la entrenadora tiene a su disposición tres alimentos: pechuga de pollo, arroz integral y palta, cada uno con distintas proporciones de macronutrientes y calorías. El reto es determinar cuántos gramos de cada alimento deben incluirse en la dieta para cumplir con el objetivo calórico total y el balance deseado de macronutrientes.

El concepto de equivalencia en este problema puede abordarse desde múltiples perspectivas. Por ejemplo, podemos ver la **equivalencia proporcional** en la distribución de macronutrientes: 50 % de las calorías debe provenir de carbohidratos, 30 % de proteínas y 20 % de grasas. Esta equivalencia proporcional se centra en la relación entre cada tipo de macronutriente y el total de calorías. Por otro lado, **la equivalencia de unidades** se observa en la suma de todas las calorías de los alimentos seleccionados, que debe dar exactamente 2200 calorías. Para modelar matemáticamente esta situación, planteamos un sistema de ecuaciones en el que cada ecuación representa una condición específica de equivalencia:

1. La suma de las calorías de los tres alimentos debe ser igual a 2200.
2. Las calorías de cada macronutriente (carbohidratos, proteínas y grasas) deben ser equivalentes al porcentaje indicado en la recomendación nutricional.

Al plantear estas condiciones en un sistema de ecuaciones, aplicamos el signo igual no solo como un operador, sino como un símbolo de equivalencia que indica una igualdad entre expresiones. Guiar a los estudiantes a interpretar el signo igual como una expresión de equilibrio y equivalencia les ayuda a comprender este concepto más allá de los simples cálculos aritméticos.

Este tipo de situación organiza la práctica en torno a valores equivalentes, lo que permite que los estudiantes asimilen el concepto de manera intuitiva. Así se facilita una comprensión conceptual que se enfoca en el significado y el propósito de los números y operaciones involucradas.

Desarrollar la competencia "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio" implica guiar a los estudiantes en la comprensión y representación de fenómenos dinámicos, como el crecimiento y el decrecimiento, así como en el análisis de tasas de cambio y variaciones en diferentes contextos. Esto se enfoca en la habilidad de interpretar y modelar situaciones del mundo real, donde el cambio es una constante.

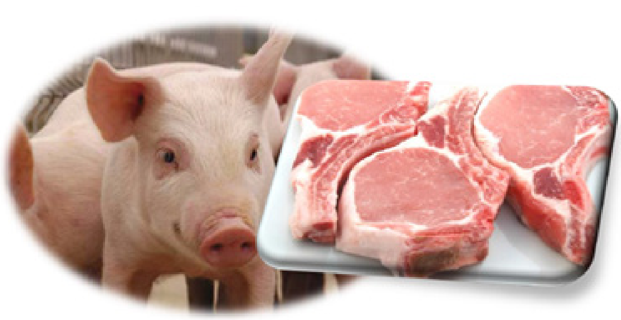
El cambio y la variación son esenciales para entender cómo los fenómenos evolucionan a lo largo del tiempo o en respuesta a factores variables. En este sentido, los conceptos de función y modelado actúan como herramientas clave que permiten a los estudiantes estructurar su comprensión del cambio. Las funciones matemáticas proporcionan un marco para describir la relación entre variables en fenómenos que cambian continuamente, mientras que el modelado matemático facilita la construcción de interpretaciones y predicciones de estos cambios en situaciones prácticas.

Los estudiantes, especialmente en los niveles avanzados de matemáticas, a menudo enfrentan desafíos al usar funciones para modelar fenómenos de cambio, debido a lo complejo que resulta coordinar diferentes variables y sus relaciones de manera precisa. Un enfoque basado en el modelado, que se apoya en contextos específicos, como la descomposición exponencial o el crecimiento poblacional, les ayuda a interpretar y manejar mejor las tasas de cambio. Este enfoque contextualizado facilita el desarrollo de habilidades para identificar y representar el cambio a través de gestos, representaciones gráficas y el lenguaje, con lo cual se promueve un aprendizaje significativo que conecta la teoría matemática con experiencias observables.

El fomento de un pensamiento crítico y profundo sobre el cambio requiere introducir conceptos de función y modelado en contextos dinámicos desde los primeros niveles de la Educación Secundaria. Un enfoque de modelado contextualizado y explícito ayuda a que los estudiantes desarrollen la habilidad de describir tasas de cambio, incluidos los cambios en dirección negativa, como puede ser el caso de fenómenos que disminuyen en lugar de aumentar. Incorporar el lenguaje y el contexto en el proceso de aprendizaje hace visible el razonamiento de los estudiantes y permite identificar posibles dificultades conceptuales.

A continuación, veamos la siguiente situación extraída de Pochulu (2018)

Un criador de cerdos busca mejorar la ganancia que obtiene de su granja **optimizando** el crecimiento de los animales en relación con el costo de su alimento. Cada cerdo consume, en promedio, 3 kg de alimento balanceado al día, y su aumento de peso depende de cuánto comen y de la etapa de crecimiento en la que se encuentran. En las primeras etapas, los cerdos ganan peso rápidamente, pero, a medida que se acercan a su peso máximo, el crecimiento se vuelve más lento y necesitan más alimento para ganar cada kilogramo adicional de peso (eficiencia de conversión).



El criador sabe que una eficiencia de conversión menor a un valor de 2,59 es ideal, ya que indica que el alimento se convierte de manera más eficiente en peso. Además, el precio por kilogramo de cerdo vivo varía en el mercado, al igual que el costo del alimento balanceado, que cambia mes a mes. El desafío del criador es decidir el momento óptimo para vender los cerdos maximizando las ganancias y controlando los costos.

1. **¿En qué momento es más rentable vender los cerdos?**

   Considera el precio de venta por kilogramo de cerdo vivo, los costos variables del alimento balanceado y la eficiencia de conversión para determinar el momento óptimo que maximice las ganancias.

2. **¿Cómo formular un modelo para tomar esta decisión?**

   Diseña un modelo que relacione:

   - La ganancia de peso del cerdo.
   - El consumo de alimento.
   - Los costos asociados al alimento y otros gastos.
   - Los ingresos generados por la venta.

   Usa este modelo para calcular el tiempo ideal de venta que maximice el beneficio económico y mantenga una eficiencia de conversión adecuada.

La eficiencia de conversión (EC) mide cuánta cantidad de alimento se necesita para que un cerdo gane un kilogramo de peso. Es decir, nos indica qué tan eficiente es el proceso de crecimiento del animal en relación con el alimento que consume.

Para calcular esta relación, el criador debe medir:

1. La cantidad total de alimento consumido por el cerdo en un periodo determinado (en kilogramos).
2. El aumento de peso del cerdo durante ese mismo tiempo (en kilogramos).

El objetivo es obtener un valor de **EC** lo más bajo posible, ya que esto significa que se necesita menos alimento para ganar cada kilogramo de peso, lo que reduce los costos de producción.

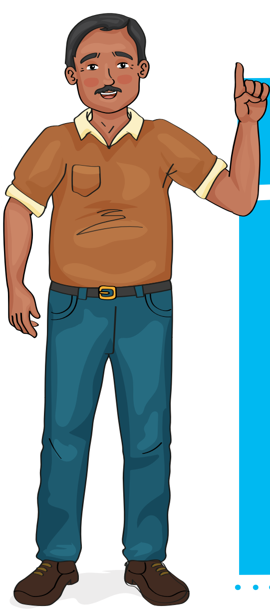
La fórmula es la siguiente:

$$EC = \frac{\text{(Cantidad de alimento consumido (kg)}}{\text{Ganancia de peso vivo (kg)}}$$

Por ejemplo, si un cerdo consume 50 kg de alimento y gana 20 kg de peso, su EC será:

$$EC = \frac{50}{20} = 2{,}5$$

Un valor de EC igual o menor a 2,59 se considera ideal, ya que representa un uso deficiente del alimento y ayuda a reducir los costos de producción.



Para tener en cuenta...

La **optimización** tiene un uso muy claro y práctico en la **crianza de cerdos**, ya que el objetivo principal del productor es maximizar las ganancias económicas mientras se minimizan los costos y se aprovechan eficientemente los recursos disponibles.

El concepto de **cambio** está intrínsecamente relacionado con la **optimización**, porque esta última se centra en encontrar los valores máximos o mínimos de una función matemática, y para hacerlo es fundamental analizar cómo cambian las variables involucradas.

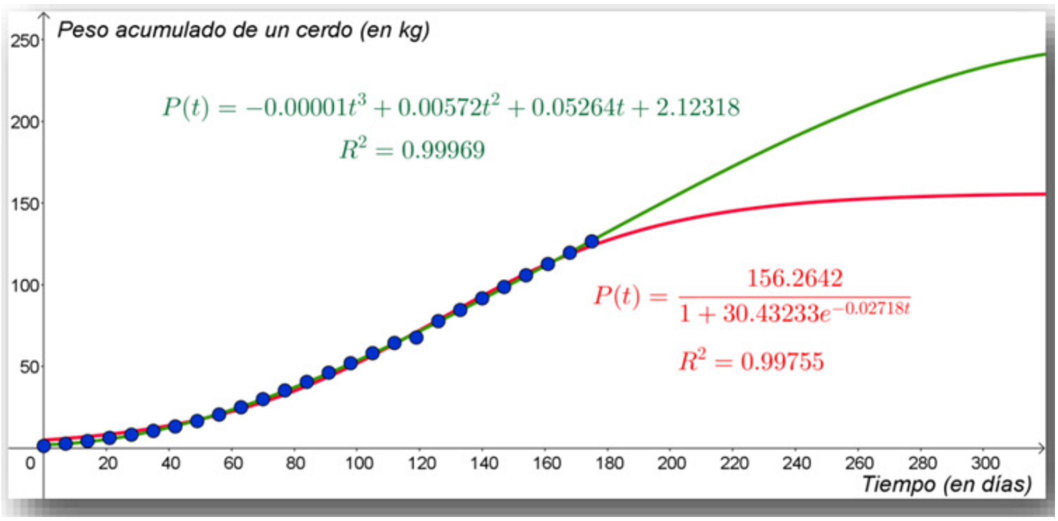
La tabla 5 muestra cómo evoluciona el peso de un cerdo, la ganancia de peso, el consumo de alimento balanceado y la eficiencia de conversión a lo largo de los días. Inicialmente, los cerdos tienen una alta eficiencia de conversión (bajo consumo por kilo ganado), pero esta disminuye a medida que crecen y se estabiliza alrededor de 2,5 kg de balanceado por kilo de peso ganado. Esto sugiere que el momento óptimo para maximizar la eficiencia y minimizar costos está antes de que la eficiencia de conversión supere los 2,59.

Tabla 5. Eficiencia de conversión en la cría y engorde de un cerdo

N.º de días	Peso acumulado (kg)	Ganancia de peso vivo (kg)	Consumo acumulado de balanceado (kg)	Eficiencia de Conversión (kg de balanceado/ kg de cerdo)
0	1,4	-	0,2	0,05
7	2,8	1,4	0,5	0,08
14	4,4	1,6	2,8	0,34
21	6,3	1,9	5,5	0,52
28	8,29	5,49	9,5	0,71
35	10,61	5,82	15,1	0,91
42	13,31	10,51	22,0	1,07
49	16,61	13,81	30,0	1,2
56	20,61	17,81	39,2	1,31
63	25,07	22,27	49,7	1,41
70	30,03	27,23	61,8	1,52
77	35,34	32,54	75,3	1,63
84	40,57	37,77	90,4	1,74
91	46,23	43,43	107,2	1,84
98	52,04	49,24	125,7	1,95
105	58,17	55,37	145,5	2,15
112	64,4	61,6	167,0	2,15
119	67,71	64,91	189,6	2,24
126	77,74	74,94	213,3	2,33
133	84,59	81,79	238,2	2,41
140	91,7	88,9	264,4	2,5
147	98,64	95,84	291,9	2,59
154	105,8	103,0	319,5	2,67
161	112,7	109,9	346,9	2,74
168	119,62	116,82	-	-
175	126,53	123,73	-	-

En función de ello, se presentan **dos modelos matemáticos para modelar el peso acumulado** de los cerdos a lo largo del tiempo:

Figura 7. Relación entre peso acumulado del cerdo y el tiempo



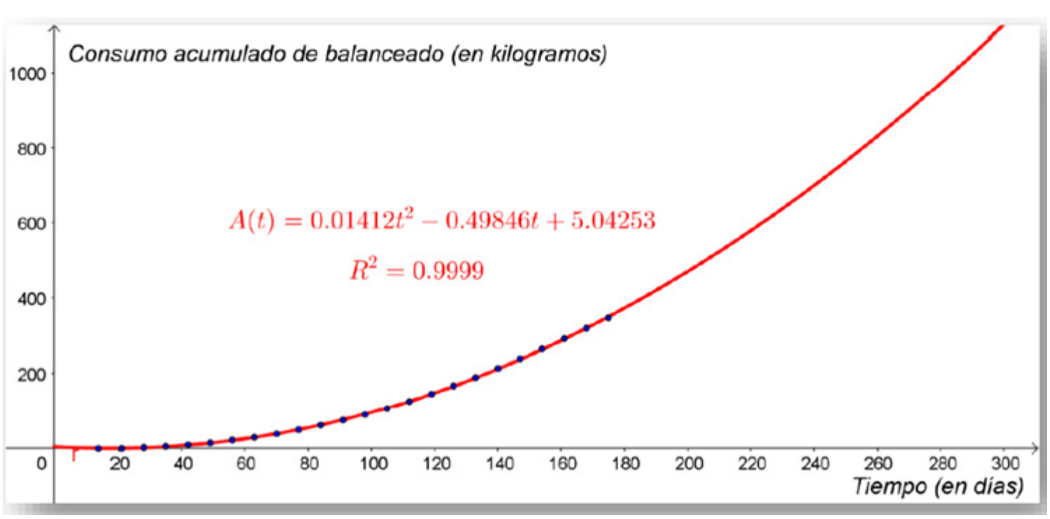
Modelo polinómico de grado 3: Ideal para interpolar datos, aunque tiende a mostrar un aumento excesivo si se extrapolan los valores.

Modelo logístico: Refleja mejor el crecimiento limitado de los cerdos, ya que tiende a estabilizarse con el tiempo, de tal manera que termina por trazar una “S” invertida en la gráfica de crecimiento.

Ambos **modelos permiten predecir el peso del cerdo en función de los días transcurridos** desde su nacimiento, y esto ayuda a determinar el momento óptimo de venta.

El consumo acumulado de alimento también se modela mediante un polinomio de grado 2, que relaciona el consumo total de balanceado con el tiempo. Este modelo permite calcular los costos totales en función del tiempo, un elemento crucial para determinar el beneficio.

Figura 8. Relación entre consumo acumulado de balanceado y el tiempo



Cálculo del beneficio en la crianza de cerdos

Factores por considerar:

Para calcular cuánto ganará un productor (el beneficio), se deben tener en cuenta dos factores principales:

1. Ingresos por venta:

   Se obtienen multiplicando el peso del cerdo en el momento de la venta por el precio por kilogramo en el mercado.

2. Costos de alimentación:

   Se calculan multiplicando la cantidad total de alimento consumido por el cerdo hasta ese momento por el precio del alimento por kilogramo.

Fórmula del beneficio:

Con estos dos datos, el beneficio (ganancia neta) se define como…

Beneficio = Ingresos por venta - Costos de alimentación

La fórmula se puede expresar de la siguiente manera:

- Ingresos por venta:

Peso del cerdo en función del tiempo × Precio de venta por kg

- Costos totales de alimentación:

Consumo acumulado de balanceado en función del tiempo × Precio del alimento por kg

Uso de modelos para calcular el beneficio:

Recuerda que el peso del cerdo cambia con el tiempo; para modelar este crecimiento, se propusieron dos modelos matemáticos:

1. **Modelo polinómico de grado 3**

2. **Modelo logístico**

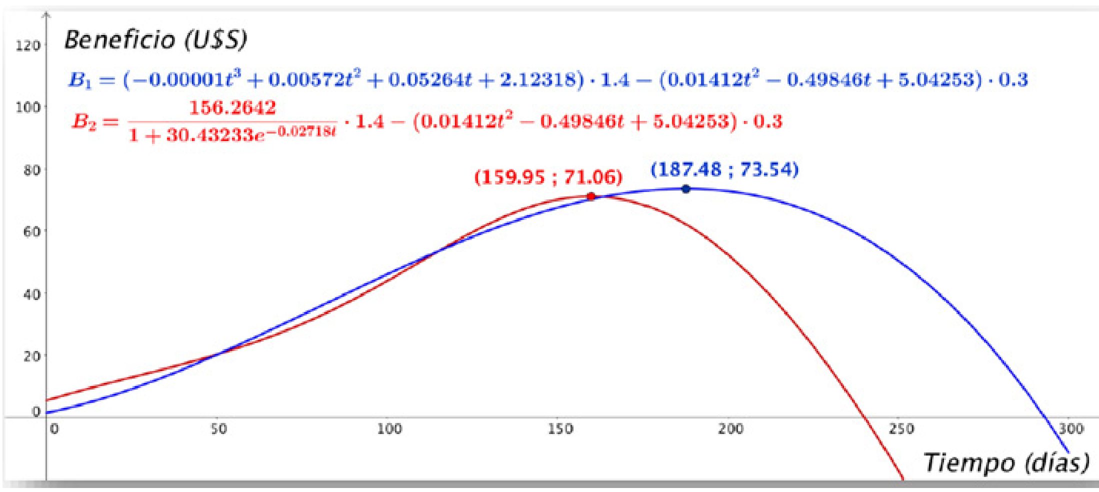
Cada uno de estos modelos describe cómo crece el peso del cerdo con el tiempo. Por lo tanto:

- Usando estos modelos, podemos calcular los ingresos en función del tiempo.
- Además, como el consumo de alimento también depende del tiempo, podemos calcular los costos totales.

Entonces, al combinar ambos modelos (peso y consumo), se obtendrán dos funciones distintas para los beneficios, una basada en el modelo polinómico y otra en el modelo logístico. Esto permitirá comparar qué modelo se ajusta mejor y maximiza la ganancia del criador de cerdos.

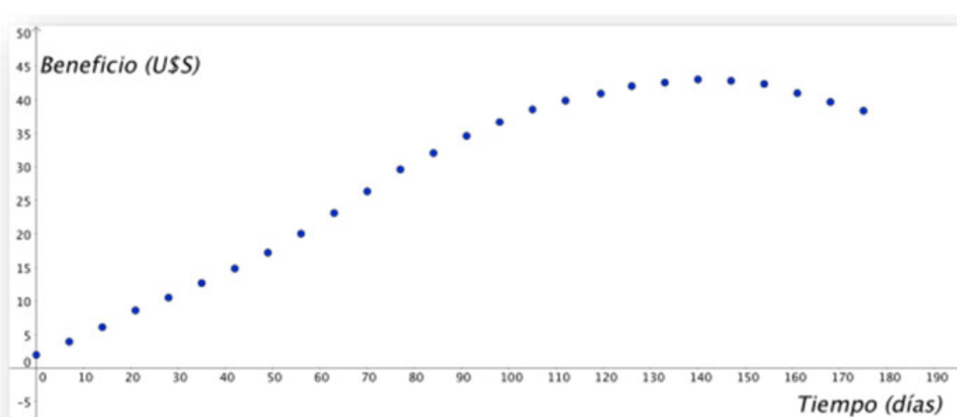
Al utilizar herramientas como GeoGebra, podemos obtener el punto máximo de la función de beneficio como se muestra en la figura 9.

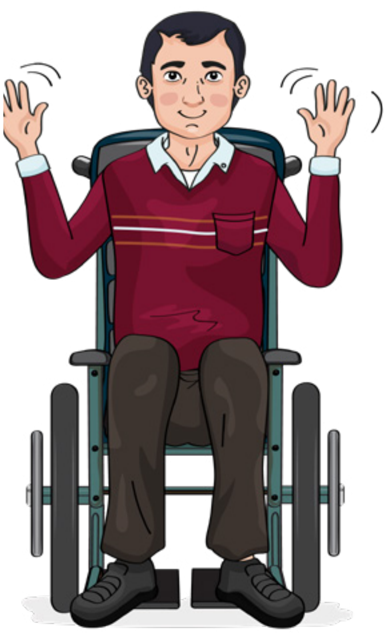
Figura 9. Beneficio según modelo logístico y modelo polinómico de grado 3



Los modelos propuestos no brindan la misma información ante la pregunta que nos formulamos para el problema. En uno de ellos se debería faenar al cerdo a los **160 días**, lo que arroja una utilidad de **USD 71**, mientras que, en el otro, a los 187 días, con un beneficio que llega a **USD 74**, aproximadamente. Si buscamos el peso alcanzado por el cerdo en cada modelo, arroja **112 kilos** y **140 kilos**, respectivamente.

Figura 10. Diagrama de dispersión del Beneficio con relación al tiempo





Función lineal:

$$f(x) = 650x$$

Así, se hubiera ganado más dinero por la misma cantidad de unidades vendidas.

Según los cálculos anteriores, “se deberían vender 13 750 ladrillos de plástico adicionales, lo que arrojaría un ingreso máximo de S/7031,25”.

Realizamos los cálculos de acuerdo con la propuesta de Jorge:

$$f(13{,}75) = 650(13{,}75)$$

$$f(13{,}75) = 8937{,}50$$

La diferencia sería S/8937,50 – S/7031,25 = S/1906,25.

En la figura 10, se observa que el beneficio máximo se alcanza alrededor de los 140 días, cuando el cerdo tiene un peso cercano a los 91,7 kg. Este punto corresponde al momento en el cual el crecimiento adicional ya no compensa el costo adicional del alimento, lo que optimiza el beneficio para el productor.

El análisis nos indica que, al alcanzar los 140 días, el cerdo ha aprovechado eficientemente el alimento y ha alcanzado un peso óptimo para la venta. Más allá de este punto, los costos de alimentación empiezan a superar el beneficio adicional de crecimiento.

Este proceso permite a los productores de cerdos tomar decisiones informadas sobre el momento ideal de venta, de tal forma que se optimiza el retorno de inversión y se asegura una producción eficiente y rentable.

Capítulo

2 ¿Qué significa desarrollar la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”?

Los docentes de una institución educativa dialogan sobre sus reflexiones en torno al desarrollo de la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”.

Reflexiona

- ¿Qué opinas sobre las posturas que tienen los tres docentes en relación con el desarrollo de la competencia?
- ¿Te identificas con alguna de las perspectivas presentadas?, ¿por qué?
- ¿Crees que es beneficioso desarrollar todas las capacidades de manera integrada, o es mejor centrarse en una sola para evitar confusiones? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué sugerirías para que los estudiantes logren una comprensión significativa de la competencia?

En la reflexión previa, los docentes manifestaron creencias erróneas sobre la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”. En el diálogo, algunos docentes consideran que esta competencia puede abordarse efectivamente mediante el trabajo aislado de capacidades, como “Traducir datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas” o “Comunicar su comprensión sobre las relaciones algebraicas”, sin combinarlas en actividades complejas. Sin embargo, esta segmentación en el abordaje de las capacidades limita el entendimiento profundo de los estudiantes, ya que no logran ver cómo la traducción de datos, la comprensión conceptual, el uso de estrategias y el planteamiento de afirmaciones y sus sustentos requieren una visión integrada para resolver problemas reales y complejos.

Además, algunos docentes tienden a creer que trabajar con equivalencias algebraicas o cambiar valores numéricos por letras ya implica el desarrollo de la competencia. No obstante, una visión restrictiva dificulta el desarrollo del pensamiento algebraico, que debe ser generalizador, relacional y predictivo en los estudiantes. Dichos aspectos requieren que comprendan la estructura de las relaciones algebraicas y cómo estas pueden generalizarse en distintos contextos, lo que excede la mera realización de sustituciones. Así se promueve la habilidad de prever y formular reglas generales, una competencia clave para el actuar satisfactorio.

Es vital que los docentes comprendan la importancia de interrelacionar las capacidades dentro de la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio” y planifiquen actividades que fomenten esta conexión. De ese modo, se propiciará que los estudiantes participen activamente en su aprendizaje, desarrollen un pensamiento crítico y exploren diversas estrategias para resolver problemas. Al integrar el desarrollo de las capacidades como traducir, comunicar, emplear estrategias y argumentar, los estudiantes podrán reconocer patrones y relaciones subyacentes. Esto les posibilita comprender las estructuras matemáticas que permiten aplicar conceptos de regularidad, equivalencia y cambio en contextos reales.

A continuación, se presenta una situación problemática que ejemplifica el desarrollo integrado de estas capacidades.

2.1. ¿En qué consiste desarrollar la capacidad “Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas”?

Significa transformar los datos, valores desconocidos, variables y relaciones de un problema a una expresión gráfica o algebraica (modelo) que generalice la interacción entre estos. Implica también evaluar el resultado o la expresión formulada con respecto a las condiciones de la situación, y plantear preguntas o problemas a partir de una situación o una expresión

Este proceso involucra la identificación de los elementos clave del problema, como las variables relevantes y las relaciones que existen entre ellas. Por ejemplo, en contextos vinculados con tasas de cambio, es esencial identificar variables como los montos en moneda extranjera, las tasas de cambio y el monto resultante en moneda local. El análisis de la situación problemática comienza con el reconocimiento de estas conexiones iniciales para construir modelos y resolver problemas referidos a transacciones de cambio. Para ello, deben identificar y registrar las tasas de compra y venta en cada casa de cambio:

- Para la casa de cambio El Porvenir:
  - Dólar: Compra: S/ 3,735; venta: S/ 3,737
  - Yen: Compra: S/ 0,025; venta: S/ 0,026
- Para la casa de cambio Money:
  - Dólar: Compra: S/ 3,734; venta: S/ 3,735
  - Yen: Compra: S/ 0,024; venta: S/ 0,025

Asimismo, deberán relacionar estas tasas con las transacciones de cambio, por ejemplo:

Monedas en soles = Moneda en dólares × tasa de compra

Monedas en soles = Moneda en yenes × tasa de compra

También deberán identificar variables y relaciones. En contextos de tasas de cambio, las variables fundamentales incluyen:

- **Monto en soles (*Ms*):** Resultado en moneda local.
- **Monto en dólares (*Md*):** Monto en la primera moneda extranjera.
- **Monto en yenes *(My)*:** Monto en la segunda moneda extranjera.
- **Tasa de cambio *(Tc)*:** Valor por unidad de moneda extranjera en términos de soles, que puede clasificarse en tasa de compra y tasa de venta.

Una vez identificadas las variables, los estudiantes deben proceder a la **representación de las relaciones en el marco de la situación problemática.** Este paso requiere ordenar y transformar los datos en expresiones algebraicas o gráficas que generalicen las interacciones entre los elementos del problema. Según Roux (2001), dicha traducción no solo implica un dominio técnico, sino también una habilidad conceptual para visualizar estas relaciones en diagramas o representaciones que permitan una comprensión más profunda (p. 3).

Así pues, en la situación problemática las variables están interrelacionadas, ya que las tasas de cambio (*Tc*) determinan cuántos soles (*Ms*) se obtienen por cada unidad de dólar (*Md*) o yen (*My*).

Por ejemplo, si Carla desea calcular el monto en soles al cambiar dólares, se plantea la relación algebraica siguiente:

$$Ms = Md \times Tc$$

La construcción de las relaciones matemáticas consiste en identificar cómo son las interacciones de las variables para formular expresiones algebraicas que las describan.

En este contexto, Blanton y Kaput (2005) resaltan la importancia de generalizar patrones en el pensamiento algebraico, lo cual se vincula directamente con la formulación de expresiones. Estas últimas constituyen un modelo general que permite calcular el monto en soles (*Ms*) a partir de cualquier cantidad en dólares *(Md)* y cualquier tasa de cambio (*Tc*). Identificar y generalizar las relaciones en un modelo algebraico es esencial para comprender y resolver problemas matemáticos de manera eficiente.

El siguiente paso en este proceso es la **generalización de las relaciones**, donde los estudiantes deben utilizar variables para representar valores desconocidos o dinámicos, y formular modelos que sean aplicables en distintos contextos. Lesh y otros (2009) destaca que esta etapa es crucial para garantizar que los modelos no solo resuelvan el problema específico, sino que también sean transferibles a otros similares o de mayor complejidad (p. 10).

Retornando a la situación de las tasas de cambio, para la compra de monedas la generalización sería:

- Para convertir dólares a soles: $Ms = Md \times T_{compra}$
- Para convertir yenes a soles: $Ms = My \times T_{compra}$
- Para convertir soles a dólares: $Md = Ms/Tc$
- Para convertir soles a yenes: $My = Ms/Tc$

Aplicando estas relaciones a casos particulares, tenemos…

Para cambiar 500 dólares a soles en la casa de cambio El Porvenir, se realiza:

$$\boldsymbol{Ms = 500 \times 3{,}735 = 1867{,}50 \text{ soles}}$$

O para cambiar 10 000 yenes a soles en la casa de cambio Money, se tiene que…

$$\boldsymbol{Ms = 10\,000 \times 0{,}024 = 240 \text{ soles}}$$

De lo obtenido, los estudiantes deben registrar los resultados para visualizar las combinaciones, tal y como se muestra en la tabla 6:

Tabla 6. Conversión de monedas según tasas de cambio

Monto en moneda	Casa de cambio	Tasa aplicada	Resultado (S/)
500 dólares	El Porvenir	3,735	1867,50
500 dólares	Money	3,734	1867,00
10 000 yenes	El Porvenir	0,025	250,00
10 000 yenes	Money	0,024	240,00

Una parte fundamental de este proceso es la **evaluación y validación de los modelos construidos.** Esto implica verificar si los modelos creados representan adecuadamente las condiciones iniciales y si son útiles para interpretar resultados o realizar predicciones. Lesh y otros (2009) enfatiza que esta etapa requiere ajustes iterativos basados en pruebas prácticas, para asegurarse de que las soluciones no solo sean matemáticamente correctas, sino también relevantes en el contexto planteado (p. 12).

Con el objetivo de evaluar el modelo, los estudiantes usan las expresiones algebraicas para calcular los resultados de las transacciones y analizar si reflejan la situación específica. En ese sentido, deben aplicar los modelos a diferentes montos de transacciones; de ese modo verificarán la validez de las ecuaciones:

- Cambiar 1000 dólares en ambas casas de cambio:

- $Ms = 1000 \times 3{,}735 = 3735{,}00$ soles (El Porvenir)
- $Ms = 1000 \times 3{,}734 = 3734{,}00$ soles (Money)

Comparar los resultados obtenidos permite corroborar la precisión de los cálculos y, principalmente, evaluar cómo las diferencias en las tasas influyen en los resultados. A partir de este análisis, los estudiantes pueden concluir que la casa de cambio El Porvenir ofrece más soles para transacciones en dólares, mientras que Money resulta menos favorable para operaciones con yenes.

2.2. ¿En qué consiste desarrollar la capacidad “Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas”?

La capacidad “Comunicar su comprensión sobre las relaciones algebraicas” requiere que los estudiantes expresen de manera clara su entendimiento acerca de conceptos, nociones y propiedades relativas a las sucesiones, funciones y ecuaciones. Según Sun, Sun y Xu (2023), posibilita a los estudiantes identificar patrones, generalizar relaciones y vincular ideas visuales, tabulares y simbólicas. Con ello, se ayuda a los a construir conexiones entre los datos y expresiones, y esto fortalece su capacidad de análisis y resolución de situaciones problemáticas.

Por ejemplo, una tabla puede ser utilizada para registrar relaciones cuantitativas, mientras que un gráfico visualiza la covariación entre variables. Estas representaciones fomentan la capacidad de los estudiantes para conceptualizar y comunicar sus hallazgos, lo que promueve un aprendizaje más profundo y significativo.

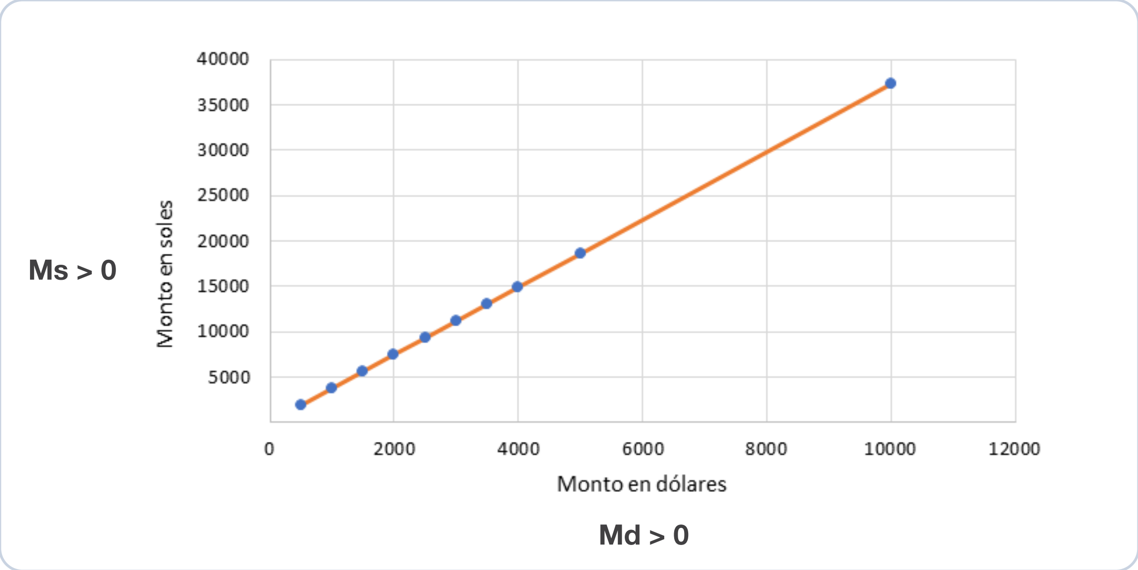
En la situación problemática, las tablas de valores estructuran los datos de las transacciones, lo que facilita la identificación de patrones que describen el comportamiento de las variables involucradas. Por ejemplo, al organizar pares ordenados de Md y Ms en la tabla 7, los estudiantes pueden observar cómo el monto en soles (Ms) crece proporcionalmente al incremento del monto en dólares (Md), mientras la tasa de cambio de compra (Tc) permanece constante. Asimismo, las expresiones algebraicas, como $Ms = Md \times Tc$, permiten generalizar esta relación y simplificar su modelado.

Tabla 7. Conversión de monedas según tasas de cambio

Monto en dólares (*Md*)	Tasa de cambio (*Tc*)	Monto en soles (*Ms*)
500	3,735	1867,50
1000	3,735	3735,00
1500	3,735	5602,50
2000	3,735	7470,00
2500	3,735	9337,50
3000	3,735	11 205,00
3500	3,735	13 072,50
4000	3,735	14 940,00
5000	3,735	18 675,00
10000	3,735	37 350,00

Asimismo, haciendo uso del gráfico apoyado en el plano cartesiano, se observa cómo un aumento en el monto en dólares trae consigo un incremento proporcional en el monto en soles (*Ms*), lo que valida la relación directa representada por la ecuación $Ms = Md \times Tc$. Esta representación refuerza el vínculo entre los cálculos algebraicos y los datos tabulados. Vincular un punto específico como (500;1867,50) con las expresiones algebraicas y las tablas permite a los estudiantes comprender las relaciones subyacentes entre las variables.

Figura 11. Monto en soles en la casa de cambio El Porvenir



Esta expresión permite la exploración de relaciones algebraicas. Por ejemplo, con la representación gráfica se reconoce la pendiente de esta recta, que representa la tasa de cambio de compra (*Tc*) y permite visualizar cómo *Ms* varía proporcionalmente con *Md*. La relación se valida al calcular Tc a partir de diferentes pares ordenados (*Md*; *Ms*), como se muestra a continuación:

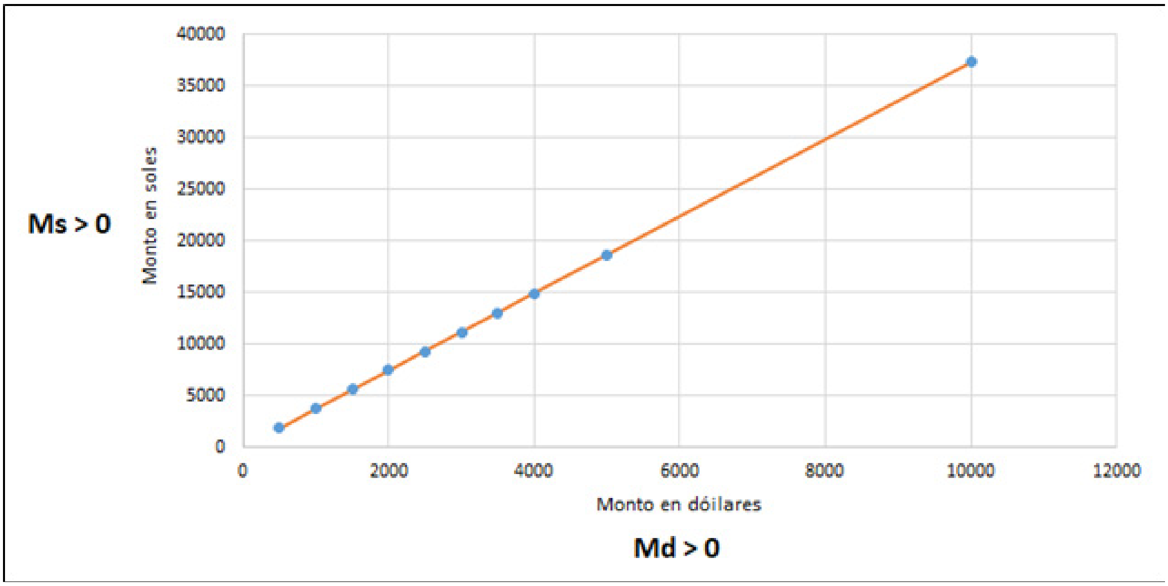
$$\boldsymbol{Tc} = \frac{Ms}{Md} = \frac{1867{,}50}{500} = \frac{3735{,}00}{1000} = \frac{5602{,}50}{1500} = 3{,}735$$

Por su parte, los gráficos lineales y la representación algebraica se complementan al evidenciar que la pendiente de la recta es el factor constante que relaciona las magnitudes. Observarlo con claridad fortalece la comprensión conceptual de la proporcionalidad.

Así también, esta relación está condicionada por las restricciones propias del contexto práctico, como el dominio y el rango de la función *Ms* (monto en soles). El dominio de esta relación está restringido a valores positivos de *Md*, dado que no es posible realizar transacciones con montos negativos de dólares. De igual forma, el rango está limitado a valores positivos de *Ms*, ya que el monto en soles depende directamente de un $Md > 0$. Dichas restricciones aseguran que la representación gráfica se ubique en el primer cuadrante del plano cartesiano. Las transacciones monetarias imponen límites reales al dominio y rango de la función.

Las mencionadas restricciones no solo determinan el dominio ($Md > 0$) y el rango ($Ms > 0$), sino que también aseguran que las representaciones gráficas reflejen con precisión las relaciones entre las magnitudes involucradas.

Figura 12. Relación entre soles y dólares en la casa de cambio El Porvenir



Asimismo, la comunicación verbal y escrita permite a los estudiantes articular sus razonamientos, validar sus resultados y colaborar efectivamente con otros. Wilkie y Clarke (2016) destacan que la verbalización de conceptos fomenta el análisis crítico y el trabajo conjunto, mientras que la escritura organiza las ideas y refuerza la claridad del pensamiento matemático. En el contexto de las tasas de cambio, expresar cálculos y decisiones de forma verbal y por escrito ayuda a justificar las conclusiones basadas en datos concretos, y esto contribuye al desarrollo de habilidades esenciales para el aprendizaje.

Volviendo a la situación, a partir de la tabla 7 se puede presentar el siguiente diálogo entre tres estudiantes:

Estudiante 1:

“Bien, según la tabla, vemos que la tasa de cambio (*Tc*) es constante en 3,735. Esto significa que, cada vez que incrementamos el monto en dólares (*Md*), el monto en soles (*Ms*) también aumenta proporcionalmente. Empecemos con un ejemplo: para 500 dólares, el cálculo sería $Ms = Md \times Tc = 500 \times 3{,}735$. ¿Cuánto da eso?”.

Estudiante 2:

“Déjame calcular… $500 \times 3{,}735 = 1867{,}50$. Esto coincide con el valor en la tabla. Ahora probemos con 1000 dólares. Según la misma fórmula, tenemos $Ms = 1000 \times 3{,}735$”.

Estudiante 3:

“El resultado es 3735 soles. Esto confirma que al duplicar el monto en dólares de 500 a 1000, el monto en soles también se duplica, al pasar de 1867,50 a 3735,00. ¿Esto involucrará una relación proporcional entre estas variables?”.

Estudiante 1:

“Probemos con otros valores en la tabla: por ejemplo, para 2000 dólares, el cálculo sería $Ms = 2000 \times 3{,}735 = 7470{,}00$, lo cual es el doble del monto obtenido para 1000 dólares… Notamos que la relación es proporcional”.

2.3. ¿En qué consiste desarrollar la capacidad “Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales”?

Desarrollar estrategias es importante para promover el pensamiento algebraico y variacional, debido a que facilita la transición de los estudiantes desde el pensamiento aritmético a formas más abstractas. Este proceso implica hacer hincapié en una **flexibilidad estratégica** Bye, Harsch y Varma (2022) y el uso de **representaciones múltiples** (Kusumaningsih y otros, 2018). Además, integrar el pensamiento variacional fomenta la comprensión de patrones, relaciones funcionales y cambios, lo que prepara a los estudiantes para analizar situaciones dinámicas y resolver problemas en contextos reales.

De acuerdo con Bye, Harsch y Varma (2022), desarrollar la **flexibilidad estratégica** en los estudiantes supone enseñarles a alternar entre diferentes métodos para solucionar problemas según las características específicas de cada situación. Por ejemplo, en la resolución de ecuaciones, los estudiantes pueden optar por métodos directos, como la sustitución, o por estrategias inversas, como reorganizar términos. Este enfoque contribuye a que elijan el procedimiento más eficiente y efectivo, con lo cual se mejora su capacidad de análisis y adaptación. Desarrollar esta habilidad también implica reconocer patrones y seleccionar estrategias basadas en las propiedades del problema, lo cual es esencial para formular reglas generales aplicables a contextos diversos y abstractos.

Retomando la situación de las tasas de cambio, Carla, como empresaria textil, enfrenta el desafío de manejar las conversiones de soles a dólares y yenes para exportar sus productos mientras optimiza su margen de ganancia. Con el fin de tomar decisiones eficientes, Carla debe comparar las tasas de cambio ofrecidas por las casas **El Porvenir** y **Money**, y decidir cuál le proporciona mayores beneficios según sus necesidades.

Datos de las casas de cambio

- **Casa de cambio El Porvenir:**
  - Dólar: Compra: S/3,735; venta: S/3,737
  - Yen: Compra: S/0,025; venta: S/0,026
- **Casa de cambio Money:**
  - Dólar: Compra: S/3,734; venta: S/3,735
  - Yen: Compra: S/0,024; venta: S/0,025

Carla tiene S/10 000 y necesita convertir S/ 6000 a dólares y S/ 4000 a yenes para cubrir costos en ambas monedas.

Resolución

Conversión de S/ 6000 a dólares; para ello usamos la relación:

$$M_d = \frac{M_s}{T_{venta}}$$

1. **En El Porvenir:**

$$\text{Monto en dólares} = \frac{6\,000}{3{,}737} \approx 1605{,}57$$

2. **En Money:**

$$\text{Monto en dólares} = \frac{6\,000}{3{,}735} \approx 1606{,}43$$

Resultado: Carla obtendría 0,86 dólares más en Money para esta transacción.

Conversión de S/4000 a yenes; para ello usamos la relación:

$$M_y = \frac{M_s}{T_{venta}}$$

1. **En El Porvenir:**

$$\text{Monto en yenes} = \frac{4000}{0{,}026} \approx 153\,846{,}15$$

2. **En Money:**

$$\text{Monto en yenes} = \frac{4000}{0{,}025} \approx 160\,00{,}00$$

Resultado: Carla obtendría 6153,85 yenes más en Money para esta transacción.

La flexibilidad estratégica le permite a Carla alternar entre casas de cambio según las ventajas específicas para cada divisa. En este caso:

- Para dólares, **Money** es la mejor opción, ya que proporciona una tasa más favorable para la venta.
- Para yenes, también es más ventajoso elegir **Money**, ya que la diferencia en la tasa de venta le genera una mayor cantidad de yenes.

Adaptación de la estrategia

1. **División del presupuesto:** Carla decide usar Money para ambas transacciones debido a las tasas más competitivas.
2. **Reconocimiento de patrones:** Carla identifica que las tasas más favorables no siempre están en una misma casa de cambio, por lo que analiza cada moneda por separado.

Al emplear flexibilidad estratégica, Carla maximiza el rendimiento de su presupuesto. Con S/ 10 000, obtiene:

- **Dólares en Money:** 1606,43
- **Yenes en Money:** 160 000,00

La capacidad de alternar estrategias según las condiciones de mercado le posibilita mantener un control más efectivo sobre sus operaciones financieras.

Kusumaningsih y otros (2018) destacan el uso de múltiples formatos de representación (diagramas, gráficas, ecuaciones y representación verbal) como una herramienta para mejorar la comprensión y la resolución de problemas algebraicos. Este enfoque permite a los estudiantes conectar conceptos abstractos con experiencias concretas.

La tabla 8 muestra las conversiones de yenes a soles y luego de soles a dólares en dos casas de cambio, El Porvenir y Money, para distintas cantidades de yenes (1000; 5000; 10 000; 20 000).

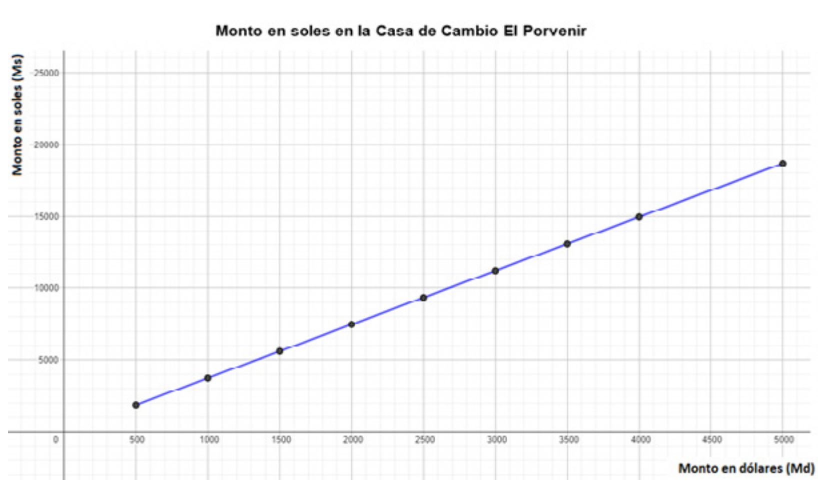
Tabla 8. Conversión de monedas según tasa de cambio en la casa de cambio El Porvenir y Money

Cantidad de yenes	Soles obtenidos en El Porvenir	Soles obtenidos en Money	Dólares obtenidos en El Porvenir	Dólares obtenidos en Money
1000	1000×0,025=25,00	1000×0,024=24,00	$\frac{25{,}00}{3{,}737} = 6{,}69$	$\frac{24{,}00}{3{,}735} = 6{,}43$
5000	5000×0,025=125,00	5000×0,024=120,00	$\frac{125{,}00}{3{,}737} = 33{,}45$	$\frac{120{,}00}{3{,}735} = 32{,}13$
10 000	10 000×0,025=250,00	10 000×0,024=240,00	$\frac{250{,}00}{3{,}737} = 66{,}90$	$\frac{240{,}00}{3{,}735} = 64{,}26$
20 000	20 000×0,025=500,00	20 000×0,024=480,00	$\frac{500{,}00}{3{,}737} = 133{,}80$	$\frac{480{,}00}{3{,}735} = 128{,}45$

Por otro lado, la situación ayuda a desarrollar la visualización de la relación proporcional. El gráfico siguiente es una representación visual que relaciona el monto en soles (*Ms*) con el monto en dólares (Md) a través de una función lineal de proporcionalidad directa. Este tipo de representación gráfica permite conectar conceptos abstractos como las relaciones algebraicas con situaciones concretas del comercio internacional, lo que facilita la comprensión de la tasa de cambio y su aplicación práctica (Kusumaningsih y otros, 2018).

A continuación, en la figura 13 se detalla cómo este gráfico contribuye al desarrollo de procesos y estrategias

Figura 13. Relación entre los montos en soles y dólares en la casa de cambio El Porvenir Money



El gráfico muestra que, al aumentar el monto en dólares (*Md*), el monto en soles (*Ms*) crece de forma proporcional, de tal manera que representa una relación directa dada por la ecuación:

$$Ms = Md \times Tc$$

Donde *Tc* es la tasa de cambio.

Esta visualización permite a los estudiantes identificar rápidamente cómo varían las dos variables, al conectar los cálculos algebraicos con una representación concreta.

El gráfico también permite la interpretación de pendientes, en la situación la pendiente de la recta, calculada como…

$$Tc = \frac{Ms}{Md}$$

Representa la tasa de cambio. Los estudiantes pueden calcularla usando cualquier par de puntos en la línea. Por ejemplo, para el punto (500; 1867,50):

$$Tc = \frac{1567{,}50}{500} = 3{,}735$$

Esto ayuda a reforzar el concepto de pendiente en contextos prácticos.

También permite la identificación de patrones, pues en el gráfico se puede observar que el comportamiento lineal permanece constante, independientemente del monto convertido, lo que facilita la formulación de estrategias generales para resolver problemas similares.

Finalmente, el gráfico establece la conexión con múltiples formatos: tablas, datos y ecuaciones. Vincular puntos específicos del gráfico con datos tabulados posibilita verificar la validez de las relaciones algebraicas y los cálculos numéricos. La visualización gráfica refuerza el uso de ecuaciones para modelar relaciones entre variables, lo que ayuda a traducir situaciones reales a un lenguaje matemático.

2.4. ¿En qué consiste desarrollar la capacidad “Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia”?

Involucra elaborar afirmaciones acerca de variables, reglas y propiedades algebraicas, razonando de manera inductiva para generalizar una regla y deductiva al probar y comprobar propiedades y nuevas relaciones.

Esto involucra comprender que las estructuras algebraicas son importantes para desarrollar la competencia “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”. En este sentido, Lew (2004) describe que el pensamiento algebraico trasciende técnicas y procedimientos, al proporcionar herramientas para **analizar relaciones y estructuras**. Estas últimas incluyen funciones, propiedades de operaciones y relaciones algebraicas, como las ecuaciones lineales, cuadráticas o un sistema de ecuaciones. Asimismo, Godino y otros (2012) afirman que los estudiantes deben aprender a identificar patrones y estructuras generales para comprender cómo interactúan los elementos matemáticos.

Retomando la situación de las casas de cambio, se puede evidenciar el desarrollo de esta capacidad argumentativa al encontrar regularidades en las tasas de cambio, esto es, la relación entre las tasas de compra y venta.

- **Relación entre tasas de compra y venta:**

  Cada casa de cambio establece una diferencia entre la tasa a la que compra y vende una moneda para garantizar su ganancia. Esta diferencia representa un patrón constante y predecible que Carla puede analizar matemáticamente para decidir qué opción es más favorable. Veamos el caso de los dólares en la siguiente tabla:

Tabla 9. Comparativa de las casas de cambio El Porvenir y Money en cuanto a dólares

Casa de cambio	Moneda	Compra	Venta	Diferencia
El Porvenir	Dólar	S/3,735	S/3,737	S/0,002
Money	Dólar	S/3,734	S/3,735	S/0,001

  Para el dólar en El Porvenir, la diferencia entre el precio de compra (S/3,735) y venta (S/3,737) es de S/0,002.

  En Money, esta diferencia es de S/0,001.

Esta regularidad ayuda al estudiante a identificar qué casa de cambio tiene márgenes más estrechos, de tal forma que favorece su rentabilidad.

- **Uso de equivalencias algebraicas**

También el análisis de las tasas de cambio se puede modelar usando equivalencias algebraicas. Si definimos:

- *Cx*: Tasa de compra de la moneda x (soles que Carla recibe al vender la moneda)
- *Vx*: Tasa de venta de la moneda x (soles que Carla paga al comprar la moneda)
- *Q*: Cantidad de moneda negociada

Entonces, la relación de equivalencia puede expresarse como…

Ganancia neta = *(Vx - Cx)* × *Q*

Este modelo permite calcular el impacto directo de las tasas en su negocio y estimar ingresos o costos totales dependiendo de su elección.

Por ejemplo:

En la casa de cambio El Porvenir la tasa de compra de dólares es de S/ 3,735 y la tasa de venta es de S/ 3,737; entonces, la ganancia neta para cambiar 1000 dólares es 2 soles.

Ganancia neta = (3,737 – 3,735) × 1000

= (0,002) × 1000

Ganancia neta = 2 soles

Análisis de cambio

El análisis de cambio es clave para comprender cómo fluctúan las tasas y cómo estas variaciones afectan las decisiones de Carla. En términos algebraicos:

Si las tasas cambian, por ejemplo, de Cx a $C'x$, Carla debe analizar el cambio relativo:

$$\Delta Cx = Cx' - Cx$$

Este cálculo ayuda a evaluar el efecto de pequeñas variaciones en las tasas y a identificar si debe ajustar su estrategia para maximizar sus ganancias o minimizar sus costos.

Por ejemplo:

En la casa de cambio El Porvenir la tasa de compra de dólares es de S/3,735 y el siguiente mes es S/3,736; entonces, el cambio relativo por cada dólar es de S/0,001.

$$\Delta Cx = Cx' - Cx$$

$$\Delta Cx = 3{,}736 - 3{,}735$$

$$\Delta Cx = 0{,}001$$

Asimismo, involucra reconocer que las propiedades algebraicas son esenciales para justificar afirmaciones y resolver problemas. Según Kieran (2004), las propiedades como la asociativa, distributiva y conmutativa proporcionan las bases para transformar expresiones algebraicas de manera lógica. Godino y otros (2007) explican que el uso adecuado de estas propiedades ayuda a los estudiantes a reconocer patrones y aplicar reglas generales con confianza. Por ejemplo, al simplificar una ecuación, el estudiante puede usar la propiedad distributiva para reorganizar términos y justificar cada transformación. Este enfoque fomenta la comprensión conceptual, ya que las propiedades no se aplican mecánicamente, sino con pleno conocimiento de su propósito. Además, el uso de estas herramientas permite construir argumentos sólidos y coherentes que conecten las operaciones individuales con soluciones más amplias, lo que contribuye al desarrollo del razonamiento algebraico y las habilidades de demostración (razonamiento algebraico).

En la situación de las casas de cambio, aplicar **propiedades algebraicas conocidas** ayuda a justificar afirmaciones sobre qué casa de cambio es más favorable para Carla. Esto posibilita un análisis lógico y sistemático de las tasas de compra y venta. A continuación, veremos cómo estas propiedades pueden ser utilizadas.

Propiedad distributiva

La **propiedad distributiva** permite multiplicar una cantidad por una suma o diferencia distribuyendo el multiplicador entre los términos. En este caso, la usamos para calcular el total de soles obtenidos o pagados al operar con tasas de cambio y cantidades de moneda.

Ejemplo: Carla quiere vender 1000 dólares.

En El Porvenir: Tasa de compra = **S/3,735.**

Usando la propiedad distributiva, el cálculo del total sería:

$$\text{Total} = 1000 \times 3{,}735 = 1000 \times (3 + 0{,}7 + 0{,}035)$$
$$= 1000 \times 3 + 1000 \times 0{,}7 + 1\,000 \times 0{,}035$$
$$= 3000 + 700 + 35$$
$$\text{Total} = 3735$$

Carla recibirá S/ 3735 por vender 1000 dólares.

Esta descomposición permite verificar cada término, lo que ayuda a reforzar la comprensión de cómo se calcula el total.

Propiedad asociativa

La **propiedad asociativa** facilita reorganizar los cálculos al agrupar términos de una operación sin alterar el resultado. Esto es útil al comparar múltiples tasas de cambio o realizar operaciones con grandes cantidades.

Ejemplo: Carla quiere comparar los ingresos por vender 1000 dólares en dos casas de cambio:

- En El Porvenir: $(1000 \times 3{,}735) = (1000 \times 3) + (1000 \times 0{,}735)$
- En Money: $(1000 \times 3{,}734) = (1000 \times 3) + (1000 \times 0{,}734)$

Agrupando:

$$(1000 \times 3) + (1000 \times 0{,}735) - (1\,000 \times 3) - (1000 \times 0{,}734)$$
$$= [(1000 \times 3) - (1000 \times 3)] + [(1000 \times 0{,}735) - (1000 \times 0{,}734)]$$
$$= 0 + 1$$
$$= 1$$

Este uso de la asociativa permite analizar diferencias en términos específicos, como $0{,}735 - 0{,}734 = 0{,}001$, lo que muestra claramente la ventaja de El Porvenir.

Propiedad conmutativa

La **propiedad conmutativa** indica que el orden de los factores no altera el resultado en operaciones de suma o multiplicación. Esto es útil para simplificar cálculos cuando analizamos múltiples monedas.

Ejemplo: Carla desea comprar 10 000 yenes en Money con una tasa de S/ 0,025. El cálculo total sería:

$$\text{Total} = 10\,000 \times 0{,}025 = 0{,}025 \times 10\,000$$

Reorganizar el orden:

$$\text{Total} = (10\,000 \times 0{,}02) + (10\,000 \times 0{,}005) = 200 + 50 = \text{S/ } 250$$

Este cambio de orden no altera el resultado, pero refuerza la comprensión de cómo se descomponen los cálculos en términos más manejables.

Reconocimiento de patrones y reglas generales

El uso adecuado de estas propiedades justifica cálculos específicos y permite reconocer patrones que Carla puede aplicar a situaciones similares. Por ejemplo:

- **Regla general para ventas:** Para maximizar ingresos, Carla debe elegir la casa con la mayor tasa de compra. Esto se deduce al observar que…

Ingresos = Tasa de compra × Cantidad vendida

Una mayor tasa siempre produce un mayor ingreso, independientemente de la cantidad.

Por ejemplo, para cambiar 1000 y 2000 dólares en ambas casas de cambio:

El Provenir:

Casa de cambio	Tasa de compra
El Porvenir	S/3,735
Money	S/3,734

$$\text{Total} = 1000 \times 3{,}735 = \text{S/}3735$$

$$\text{Total} = 2000 \times 3{,}735 = \text{S/}7470$$

Money:

$$\text{Total} = 1000 \times 3{,}734 = \text{S/}3734$$

$$\text{Total} = 2000 \times 3{,}734 = \text{S/}7468$$

En este caso, Carla se da cuenta de que la casa de cambio El Provenir le conviene, ya que le otorga mayores ingresos en soles.

- **Regla general para compras:** Para minimizar costos, Carla debe elegir la casa con la menor tasa de venta:

Costo=Tasa de venta×Cantidad comprada

Una menor tasa reduce el costo total en cualquier cantidad de moneda.

Por ejemplo, para cambiar 1000 y 2000 dólares en ambas casas de cambio:

Casa de cambio	Tasa de venta
El Porvenir	S/ 3,737
Money	S/ 3,735

El Provenir:

$$\text{Total} = 1000 \times 3{,}737 = \text{S/}3737$$

$$\text{Total} = 2000 \times 3{,}737 = \text{S/}7474$$

Money:

$$\text{Total} = 1000 \times 3{,}735 = \mathbf{S/3735}$$

$$\text{Total} = 2000 \times 3{,}735 = \mathbf{S/7470}$$

En este caso, Carla se da cuenta de que la casa de cambio Money le conviene, ya que le otorga menores costos.

Por otro lado, explicar una operación algebraica refuerza la comprensión conceptual y promueve habilidades críticas. Pedemonte (2008) enfatiza que justificar cada decisión ayuda a conectar el razonamiento lógico con las pruebas formales. Este enfoque exige que los estudiantes analicen las propiedades y reglas aplicadas, como la asociativa o la distributiva, en cada transformación. Además, Kieran (2007) señala que explicar los procedimientos fomenta una reflexión más profunda sobre los procesos matemáticos, lo que fortalece la precisión y la capacidad de hallar errores. El sustento no solo facilita el aprendizaje individual, sino que también apoya el trabajo colaborativo, al permitir a otros comprender y evaluar el razonamiento presentado. Esta práctica es clave en la formación de cadenas de argumentos válidas y asegura que las soluciones propuestas sean coherentes y justificadas, de tal forma que se construye una confianza en el dominio del álgebra.

A continuación, veamos un ejemplo del diálogo entre dos estudiantes respecto a sus argumentos con la situación de las casas de cambio.

Contexto: Dos estudiantes, Ana y Luis, discuten la situación de las casas de cambio para decidir cuál es la mejor opción para Carla. Cada uno explica detalladamente sus pasos para justificar la elección.

Ana:

Primero, analicemos las tasas para el **dólar**. Carla tiene que vender dólares que obtiene de sus exportaciones a cambio de soles. Para maximizar lo que recibe, debemos elegir la casa de cambio con la **mayor tasa de compra.**

En El Porvenir, la tasa de compra es **S/3,735.**

En Money, la tasa de compra es **S/3,734.**

La diferencia es:

$$\Delta = 3{,}735 - 3{,}734 = 0{,}001 \text{ soles por dólar}$$

Por lo tanto, **El Porvenir es más favorable para vender dólares.** Este pequeño margen puede parecer insignificante, pero si Carla vende una cantidad grande de dólares, como 1000 dólares, el cálculo total sería:

$$\text{Total en El Porvenir} = 1000 \times 3{,}735 = \text{S/ } 3735$$

$$\text{Total en Money} = 1000 \times 3{,}734 = \text{S/ } 3734$$

Carla gana **1 sol adicional** al elegir El Porvenir.

Luis:

Ahora analicemos la **compra de dólares**. Carla también necesita comprar dólares para otros costos asociados a su negocio. En este caso, buscamos la casa de cambio con la **menor tasa de venta.**

En El Porvenir, la tasa de venta es **S/3,737.**

En Money, la tasa de venta es **S/3,735.**

La diferencia es:

$$\Delta = 3{,}737 - 3{,}735 = 0{,}002 \text{ soles por dólar}$$

Entonces, **Money es más favorable para comprar dólares**. Si Carla necesita comprar 1000 dólares, el costo total sería:

$\text{Total en El Porvenir} = 1000 \times 3{,}737 = \text{S/ } 3737$

$\text{Total en Money} = 1000 \times 3{,}735 = \text{S/ } 3735$

Carla ahorra 2 soles al elegir Money.

2. Análisis de compra y venta de yenes

Luis:

Ahora veamos el caso del **yen**. Comencemos con la venta de yenes. Carla recibe yenes de sus exportaciones a Japón y quiere convertirlos a soles. Buscamos la casa de cambio con la mayor tasa de compra.

- En El Porvenir, la tasa de compra es **S/0,025.**
- En Money, la tasa de compra es **S/0,024.**

La diferencia es:

$$\Delta = 0{,}025 - 0{,}024 = 0{,}001 \text{ soles por yen}$$

Por lo tanto, **El Porvenir es más favorable para vender yenes.** Si Carla vende 10 000 yenes, el cálculo sería:

$$\text{Total en El Porvenir} = 10\,000 \times 0{,}025 = \text{S/}250$$

$$\text{Total en Money} = 10\,000 \times 0{,}024 = \text{S/}240$$

Carla gana **10 soles adicionales** al elegir El Porvenir.

Ana:

Finalmente, evaluemos la **compra de yenes.** Carla necesita yenes para cubrir costos en Japón. Aquí buscamos la casa de cambio con la menor tasa de venta.

- En El Porvenir, la tasa de venta es S/0,026.
- En Money, la tasa de venta es S/0,025.

La diferencia es:

$$\Delta = 0{,}026 - 0{,}025 = 0{,}001 \text{ soles por yen}$$

Por lo tanto, **Money es más favorable para comprar yenes.** Si Carla necesita comprar 10 000 yenes, el costo total sería:

$$\text{Total en El Porvenir} = 10\,000 \times 0{,}026 = S/260$$

$$\text{Total en Money} = 10\,000 \times 0{,}025 = S/250$$

Carla ahorra 10 soles al elegir Money.

Reflexión sobre los procedimientos

Luis:

Explicar cada paso me permitió confirmar las diferencias en las tasas de cambio y justificar por qué una elección es más favorable que otra. Al desglosar los cálculos, pude aplicar propiedades algebraicas básicas de forma clara. Por ejemplo:

- Utilicé la **propiedad distributiva** al multiplicar la tasa por la cantidad de moneda, lo que me ayudó a calcular los ingresos o costos totales: Total = Tasa × Cantidad.
- También apliqué la **propiedad asociativa**, que me permitió organizar los cálculos en pasos ordenados, como agrupar operaciones antes de realizar la comparación final.
- Este proceso asegura que los resultados sean consistentes y que no se pierdan detalles al manejar múltiples cifras.

Ana:

Estoy totalmente de acuerdo. Desglosar y justificar los pasos me ayudó a identificar cómo pequeñas diferencias en las tasas pueden tener un impacto significativo en el resultado total. Por ejemplo, la diferencia de 0,001 soles por dólar o yen parece mínima, pero al aplicarla a grandes cantidades de moneda, como 1000 dólares o 10 000 yenes, las diferencias se vuelven significativas. Esto nos permite demostrar por qué nuestras decisiones son correctas. Al realizar cada paso con cuidado, logramos mayor confianza en nuestras conclusiones.

Referencias bibliográficas

Adu-Gyamfi, K. y Bossé, M. J. (2014). Processes and Reasoning in Representations of Linear Functions. International Journal of Science and Mathematics Education, 12(1). https://doi.org/10.1007/s10763-013-9416-x

Blanton, M. y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, 36(5), 412-446.

Blanton, M., Isler-Baykal, I., Stroud, R., Stephens, A., Knuth, E. y Gardiner, A. (2019). Growth in Children’s Understanding of Generalizing and Representing Mathematical Structure and Relationships. Educational Studies in Mathematics, 102, 193-219. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09894-7

Brenner, M. E., Mayer, R. E., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Reed, B. S. y Webb, D. (1997). Learning by Understanding: The Role of Multiple Representations in Learning Algebra. American Educational Research Journal, 34(4), 663-689. https://doi.org/10.2307/1163353

Bye, J., Harsch, R. y Varma, S. (2022). Decoding Fact Fluency and Strategy Flexibility in Solving One-Step Algebra Problems: An Individual Differences Analysis. Journal of Numerical Cognition, 8(2), 281-294. https://doi.org/10.5964/jnc.7093

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios de construcción social del conocimiento. Gedisa.

Cañadas, M. C., Dooley, T., Hodgen, J. y Oldenburg, M. (2012). Algebraic Thinking and the Role of Context in Mathematical Problem Solving. En Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 297-304).

Cooper, T. y Warren, E. (2008). The Effect of Different Representations on Years 3 to 5 Students’ Ability to Generalise. ZDM, 40, 23-37.

Demonty, L., Vlassis, J. y Fagnant, A. (2018). Developing Algebraic Thinking in Early Grades: An Investigation of Teaching Approaches. Educational Studies in Mathematics, 98(2), 157-174.

Duval, R. (1995). Semiosis y matemáticas: El papel de las representaciones semióticas en la construcción del conocimiento matemático.

Gierdien, M. (2011). Transforming Spreadsheet-Based Numerical and Graphical Quadratic Sequences into Pencil–paper Algebraic Expressions, and Prospective Teachers. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42, 117-122. https://doi.org/10.1080/0020739X.2010.519791

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? The Mathematics Educator, 8(1), 139-151.

Kusumaningsih, R., Mariani, S. y Sumarmo, U. (2018). Developing Students' Algebraic Thinking through Problem-solving Activities. Journal of Physics: Conference Series, 983(1), 012032.

Lesh, R., Post, T. R. y Behr, M. (2009). Research on teaching and learning mathematics: The role of algebraic thinking. En A. D. Ellis y M. C. Artigue (eds.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 315-343). Lawrence Erlbaum Associates.

Moss, J. y London McNab, S. (2011). An Approach to Geometric and Numeric Patterning that Fosters Second Grade Students' Reasoning and Generalizing about Functions and Covariation. En J. Cai E. Knuth (eds.), Early Algebraization. Advances in Mathematics Education (pp. 277-301). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_16

McAuliffe, S., Tambara, C. y Simsek, E. (2020). Young Students' Understanding of Mathematical Equivalence across Different Schools in South Africa. South African Journal of Childhood Education, 10, 8. https://doi.org/10.4102/sajce.v10i1.807

McNeil, N., Chesney, D., Matthews, P., Fyfe, E., Petersen, L., Dunwiddie, A. y Wheeler, M. (2012). It Pays to be Organized: Organizing Arithmetic Practice Around Equivalent Values Facilitates Understanding of Math Equivalence. Journal of Educational Psychology, 104, 1109-1121. https://doi.org/10.1037/A0028997

McNeil, N., Hornburg, C., Brletic-Shipley, H. y Matthews, J. (2019). Improving Children's Understanding of Mathematical Equivalence Via an Intervention that Goes Beyond Nontraditional Arithmetic Practice. Journal of Educational Psychology. https://doi.org/10.1037/EDU0000337

Pedersen, P. y Bjerre, M. (2021). Two Conceptions of Fraction Equivalence. Educational Studies in Mathematics, 107, 135-157. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10030-7
Pochulu, M. (coord.). (2018). La modelización matemática: Marco de referencia y aplicaciones. Universidad Nacional Villa María.

Radford, L. (2006). The Cultural-Epistomological Conditions of the Emergence of Algebraic Symbolism. En F. Furinghetti, S. Kaijser y C. Tzanakis (eds.), Proceedings of the 2004 conference of the international study group on the relations between the history and pedagogy of mathematics & ESU 4 (pp. 509-24). PME.

Roux, J. P. (2001). El pensamiento algebraico: Perspectivas y enfoques pedagógicos. Revista Brasileira de Educação Matemática, 22(1), 45-66.

Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. Sapiens. Revista Universitaria de Investigación, 12(1), 122-142.

Smirnov, O. (2017). On Context-Equivalence of Algebras. Journal of Algebra and Its Applications, 17(2), 1850030. https://doi.org/10.1142/S0219498818500305

Sun, X., Sun, S. y Xu, Y. (2023). Pensamiento algebraico: Enfoques contemporáneos y estrategias pedagógicas.

Trigueros, M. y Martínez-Planell, R. (2010). El desarrollo del pensamiento algebraico en la enseñanza secundaria. Revista de Educación Matemática, 24(1), 23-40.

Wilkie, K. y Clarke, D. (2016). Developing Students' Functional Thinking in Algebra through Different Visualisations of a Growing Pattern's Structure. Mathematics Education Research Journal, 28, 223-243. https://doi.org/10.1007/S13394-015-0146-Y

Yerushalmy, M. (1991). Student Perceptions of Aspects of Algebraic Function Using Multiple Representation Software. Journal of Computer Assisted Learning, 7(1), 42-57. https://doi.org/10.1111/j.1365-2729.1991.tb00223.x

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2002). Teaching and Learning Algebra: A Model of AlgebraicThinking. Journal of Mathematical Behavior, 21(2), 121-134. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00077-X