LUCIA MESQUITA DE MAGALHÃES

Procedimentos de cálculo e sentido de número:

uma aproximação no contexto da sala de aula

Tese apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutora em Educação

Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Maria do Carmo Santos Domite

São Paulo
2012

Catalogação na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

375.3 M188p	Magalhães, Lucia Mesquita de Procedimentos de cálculo e sentido de número: uma aproximação no contexto da sala de aula / Lucia Mesquita de Magalhães; orientação Maria do Carmo Santos Domite. São Paulo: s.n., 2012. 205 p.; ils.; tabs.; apêndices Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Matemática e Ciências - - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. 1. Ensino e aprendizagem 2. Matemática (Estudo e ensino) 3. Sala de aula (Pesquisa) 4. Ensino fundamental I. Domite, Maria do Carmo Santos, orient.

FOLHA DE APROVAÇÃO

MAGALHAES, L. M. **Procedimentos de cálculo e sentido de número**: uma aproximação no contexto da sala de aula

Tese apresentada à Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutora em Educação.

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. ___________________________________ Instituição: ___________________
Julgamento: ________________________________ Assinatura: __________________

Prof. Dr. ___________________________________ Instituição: ___________________
Julgamento: ________________________________ Assinatura: __________________

Prof. Dr. ___________________________________ Instituição: ___________________
Julgamento: ________________________________ Assinatura: __________________

Prof. Dr. ___________________________________ Instituição: ___________________
Julgamento: ________________________________ Assinatura: __________________

Prof. Dr. ___________________________________ Instituição: ___________________
Julgamento: ________________________________ Assinatura: __________________

Para Edu, por tantos dias de sol e chuva, num pedaço de qualquer lugar.

Para Manu e Lelê, feliz por voltar a poder desfrutar
sempre e muito dessa convivência deliciosa.

AGRADECIMENTOS

À professora com quem compartilhei o presente trabalho, que tão generosamente me acolheu em sua sala de aula e, com seu jeito afetuoso e firme de relacionar-se com seus alunos, tornou esse trabalho possível.

Aos alunos que participaram da pesquisa, tão disponíveis e curiosos, de quem sinto muitas saudades.

À minha orientadora, Prof. Dra. Maria do Carmo Domite, pela disponibilidade, abertura e apoio carinhoso.

Ao Prof. Dr. Lino de Macedo, por ter me apresentado à vida acadêmica 15 anos atrás, e pelas valiosas considerações por ocasião do Exame de Qualificação.

Ao Prof. Silvânio de Andrade, pela leitura cuidadosa do trabalho e pelas indicações bibliográficas certeiras, que tanto me ajudaram.

À Cristine, Helenice e Soninha, diretoras do Colégio Santa Cruz, pelo apoio e incentivo.

Aos meus colegas de trabalho, com quem aprendo tanto e todos os dias

À minha querida família e meus queridos amigos, por ajudas de todos os tipos e em todas as horas.

RESUMO

MAGALHÃES, L. M. **Estratégias de cálculo e sentido de número: uma abordagem no contexto da sala de aula**. 2012. 205p. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2012.

Esta pesquisa foi dedicada a procurar nuances da construção do *sentido de número* no desenvolvimento e uso de estratégias de cálculo de adição e subtração. Tal procura se deu nas ações e práticas emergentes de interações no contexto de sala de aula – dezessete aulas distribuídas ao longo de três meses – durante as quais foram propostos jogos relacionados ao cálculo e às noções de *número*, além de problemas do campo aditivo presentes nos "Cadernos de apoio e aprendizagem", material em uso na rede municipal de São Paulo. A análise das práticas matemáticas e interações em sala de aula teve como objetivos: a) procurar caminhos que pudessem levar a compreender em que medida o uso de certos procedimentos de cálculo favorece o desenvolvimento do sentido de número; b) discutir em que medida o aluno, ao comunicar seus procedimentos para o grupo, expressa conhecimentos sobre números e operações; e c) discutir as ações individuais como correlatas de aspectos sociais da microcultura da sala de aula e, ao mesmo tempo, a microcultura de sala de aula como um fenômeno emergente continuamente gerado pelas ações individuais (Cobb, Stephan, McClain e Gravemeijer, 2001). Da nossa incursão pelas teorizações de Cobb e outros, orientamos nossa análise pela via de três categorias prévias: 1) normas sociais e crenças dos alunos sobre o próprio papel, o papel do outro e a natureza geral da atividade matemática na escola; 2) normas sociomatemáticas e crenças e valores matemáticos e 3) práticas matemáticas e concepções e atividade matemática. Partindo dessa análise, procuramos discutir, em primeiro lugar, a ligação entre normas sociais, normas sociomatemáticas e práticas matemáticas como uma relação de estreita interdependência. Em segundo lugar, como a abordagem de conhecimentos procedimentais (aqui, estratégias de cálculo na adição e na subtração) pode colocar em pauta conhecimentos conceituais (aqui, a estrutura do sistema numérico). Por fim, refletimos as limitações do estudo em relação à promoção e análise do desenvolvimento do sentido de número dos alunos. Os resultados indicam que a consideração do trabalho em sala de aula sob a perspectiva emergente, analisando as ações dos alunos nos níveis das normas sociais, normas sociomatemáticas e práticas matemáticas pode guiar as intervenções do professor, favorecendo o foco em características específicas do conteúdo em pauta. Também sugerem que o trabalho com o objetivo de desenvolver o sentido de número dos alunos, que obviamente abarca a compreensão da estrutura do nosso sistema numérico, deve perpassar o trabalho de matemática ao longo de todo o ensino fundamental.

Palavras chave: ensino – aprendizagem – ensino fundamental – adição e multiplicação – número natural – pesquisa em sala de aula.

ABSTRACT

MAGALHÃES, L. M. **Calculation strategies and sense of number: an approach in the classroom context**. 2012. 205p. Thesis (Doctorate). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2012.

This research was dedicated to looking for nuances in the *sense of number* construction in the development and use of adding and subtracting calculation strategies. Such search happened based on actions and practices emerging from interactions in the classroom context – seventeen classes distributed in the period of three months – during which games related to calculation and to *number* notion were proposed, as well as addictive problems present in the "Cadernos de apoio e aprendizagem" [Support and learning notebooks], material in use at São Paulo City public schools. The analysis of mathematical practices and classroom interactions aimed at: a) looking for ways that could lead to understanding in which measure the use of certain calculation procedures favored the development of the sense of number; b) discussing in which measure the students, when communicating their procedures to the group, express knowledge about numbers and operations; and c) discussing individual actions as related to the classroom micro culture social aspects and, at the same time, classroom micro culture as an emerging phenomenon continually generated by individual actions (Cobb, Stephan, McClain e Gravemeijer, 2001). From our incursions into Cobb's and other's theories, we oriented our analysis via three previous categories: 1) social norms and student's beliefs about his/hers own roles, the roles of the others and the general nature of mathematical activity in the school; 2) socio mathematical norms and mathematical beliefs and values and 3) mathematical practices and conceptions and mathematical activity. Starting from this analysis, we tried to discuss, firstly, the link referring to social norms, socio mathematical norms and mathematical practices as a closely interdependent relation. Secondly, how the approach to procedure knowledge (in this case, adding and subtracting calculation strategies) can put on the agenda conceptual knowledge (in this case, numeric system structure). Lastly, we reflected the limitations of the study relating to the promotion and analysis of the development of the student's sense of number. The results indicate that considering the classroom work by the emerging perspective, analyzing the student's actions at the level of social norms, socio mathematical norms and mathematical practices can guide teacher's interventions, favoring the focus on specific characteristics of the content on the agenda. They also suggest that the work aiming at the development of the student's sense of number, which obviously comprehends the understanding of our numeric system structure, should pervade mathematical work throughout all primary and junior high school teaching.

Key words: learning – elementary school - addition and multiplication - number - classroom research.

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

Este trabalho pretende debruçar-se sobre uma questão que vem me acompanhando ao longo da minha trajetória profissional, e que já foi formulada de muitos modos, sob diferentes perspectivas. Trata-se de uma tentativa de me aproximar, dentro da complexidade da sala de aula, do modo como os alunos, ao se apropriarem de procedimentos de cálculo, constroem e expressam conhecimentos sobre números e operações.

Nos últimos 11 anos, tenho me dedicado ao ensino na Educação Infantil e nos cinco primeiros anos do Ensino Fundamental em uma escola particular de São Paulo. Iniciei esse trabalho poucos meses após a defesa da minha dissertação de mestrado, que analisava, de uma perspectiva construtivista, o modo como crianças de 7 a 13 anos jogavam Cara a Cara (MAGALHÃES, 1999). A partir de 2007, passei a trabalhar também como coordenadora pedagógica de Matemática nessa mesma escola, assessorando o trabalho dos demais professores tanto os de minha própria série (última série da EI ou pré 2) quanto os do pré 1 (4 anos completos), os do 1º ano (6 anos completos) e os do 2º ano (7 anos completos). Ao longo desses anos, vivi o trabalho na escola como uma sequência de mergulhos, cada um deles abria um mundo de descobertas que, em vez de responderem às perguntas que vêm me acompanhando, me faziam reformulá-las sempre, tornando-as mais elaboradas e mais situadas.

Em 2008, deixei a sala de aula, ao mesmo tempo em que iniciei o doutorado e passei a dedicar mais tempo ao trabalho de coordenação pedagógica, o que me permitiu aprofundar o estudo de questões relativas ao ensino de Matemática na Educação Infantil e nas séries inicias do Ensino Fundamental. Durante dois anos, entre 2008 e 2009, ainda dei aulas, mas minha experiência de ensino se deslocou para os grupos de apoio pedagógico em Matemática, na mesma escola. Eram aulas ministradas no período oposto ao regular para alunos com rendimento insatisfatório na disciplina. Dediquei duas manhãs por semana a esse trabalho, em três grupos sucessivos: 3º ano, 4º ano e 5º ano. Esses grupos tinham no máximo 15 alunos, situação privilegiada para se observar e intervir no modo como os alunos se relacionavam com os conteúdos matemáticos postos em jogo.

Ao longo desses anos, fui me encantando por questões relacionadas à prática de sala de aula, especialmente ao ensino e aprendizagem de Matemática.

É possível agrupar as principais questões levantadas ao longo desse processo em dois grupos: o primeiro grupo refere-se à necessidade de conhecer mais profundamente o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos específicos em Matemática, uma vez que as teorias de caráter geral não são suficientes para dar suporte ao trabalho em classe. O segundo grupo de questões refere-se ao funcionamento da sala de aula e às regras implícitas e explícitas que a regem.

O primeiro grupo de questões é abarcado pela Psicologia da Educação Matemática como área de estudo. Minha aproximação de alguns autores, pertencentes a essa área de estudo, datam de um longo percurso, que vai da prática para a teoria, o qual gostaria de relatar brevemente.

Em meu trabalho de pedagoga sempre tendo em mente a matemática em sala de aula, passei a observar as relações entre conceitos e procedimentos, tais como se expressam no trabalho dos alunos. Ao se engajar em determinadas atividades matemáticas de cálculo, era claro, para mim, que algumas crianças estavam se apropriando de um procedimento, às vezes apresentado por um colega, outras vezes pelo professor, sem, no entanto, compreender, de fato, os conceitos em pauta. Seria esse procedimento, para essas crianças, parte de um caminho possível na busca dessa aprendizagem conceitual? Como descobrir objetivos intermediários, que pudessem me orientar nas intervenções junto ao grupo e a essas crianças, especificamente? Como integrar compreensões parciais de certas ideias ao trabalho do grupo de maneira produtiva? Tinha comigo a sensação de que alguns dos objetivos de ensino eram ou demasiadamente abrangentes ou pouco diziam sobre aquilo que meu aluno estava realmente aprendendo.

Nesse caminho, uma questão específica foi se tornando cada vez mais desafiadora: de que maneira os conhecimentos procedimentais estavam relacionados aos conhecimentos conceituais? Ou, em minha formulação de professora, quais conhecimentos sobre números um aluno manifestava ao criar determinado procedimento de cálculo? Seria o uso de determinado procedimento uma oportunidade para que o aluno avançasse em seus conhecimentos conceituais sobre número? Ou determinados conhecimentos sobre número seriam pré requisitos para o uso de certos procedimentos? Fui delineando uma ideia empírica e ainda algo vaga do que depois encontrei na literatura sobre educação matemática:

> *"Enquanto nas décadas anteriores o debate sobre a relação entre conhecimento conceitual e procedimental foi dominada por proponentes de duas vertentes – a visão "habilidades-primeiro" ("skills-first") versus a visão "conceitos-primeiro" ("concepts-first") –, a maioria dos*

> *pesquisadores hoje adotam uma perspectiva mais nuanceada na qual a relação entre conhecimento procedimental e conceitual se desenvolve mais concorrentemente e iterativamente do que se sugeria em ambas as visões mais antigas, e na qual está aceito que a natureza dessa relação pode variar entre os diferentes subdomínios da matemática".* (Verschaffel, Greer e De Corte, 2007, p.562, tradução nossa)

Nesse percurso, aproximei-me, inicialmente, da teoria dos campos conceituais, proposta por Vergnaud (1996), especialmente das ideias de *teoremas-em-ação* e *conceitos-em-ação*, que me davam o suporte para ensaiar análises de hesitações e erros dos alunos ao lidarem com problemas de cálculo do ponto de vista dos esquemas mobilizados e transformados nesse processo. Mais adiante, algumas pesquisas relacionadas a cálculo e conhecimentos sobre número (FUSON, 1992; VERSCHAFFEL, GREER E DE CORTE, 2007) vieram alimentar reflexões específicas sobre como, no contexto de sala de aula, a consciência do professor sobre a relação entre conhecimentos sobre o sistema numérico decimal e os procedimentos de cálculo pode levar a boas intervenções no sentido de favorecer a aprendizagem dos alunos.

As questões do segundo grupo, que se referem ao funcionamento da sala de aula, começaram a ser timidamente formuladas a partir de observações de minha vivência como professora, sobre o modo como o trabalho era organizado – desde as diferentes configurações físicas possíveis quanto aos lugares ocupados pelos alunos na sala até os turnos de fala e o papel que o professor atribui aos alunos, e que cada aluno toma para si em determinada situação. Essas observações eram cruciais para que eu pudesse de fato me aproximar, tanto quanto possível, do que eles estavam pensando e aprendendo.

O foco dessa observação foi se deslocando para acordos implícitos que regem o modo de se expressar, o pensar e o aprender em um grupo – o que pode ser explicitado sob a forma de uma pergunta: que fatores concorrem para que determinado grupo tenha muitos alunos dispostos a discutir seus modos de resolver determinada proposta, sem se constranger em expor propostas inacabadas, dúvidas e erros, enquanto em outro grupo a maioria prefere manter-se em silêncio, esperando que a resposta seja apresentada por alguém e chancelada pelo professor, para só então preencher corretamente seu caderno, mesmo que não tenha compreendido a proposta?

Recebendo, nos grupos de apoio escolar, subgrupos vindos de classes diferentes – e, portanto, com uma experiência escolar orientada, até então, por professoras diferentes – observei a mudança na atitude de alguns alunos, que passaram a participar mais ativamente das discussões à medida que vivenciavam um ambiente onde era valorizado o compartilhamento de tentativas incertas ou malsucedidas de resolução de uma questão. Tais reflexões se fizeram alimentadas pela ideia de contrato didático, tal como proposta por Brousseau (1986), que trata das regras, quase sempre implícitas, que se estabelecem nas relações entre professor, aluno e saber, e, principalmente, de seus sucessivos rompimentos e negociações.

O contato com autores ligados à perspectiva situada da aprendizagem (BOALER, 2000; COBB, 2000) veio trazer uma nova perspectiva a partir da ideia, amplamente aceita a partir da última década do século XX em pesquisas na área de educação matemática, de que "o conhecimento (...) não simplesmente pode ser usado em diferentes contextos, mas emerge como função dos contextos, pessoas, atividades e objetivos" (BOALER, 2000, p. 2).

Essas questões são consideradas no modelo de análise proposto por Cobb et al. (2001), que trata da análise da atividade em sala de aula coordenando os aspectos individual e social. Nesse modelo, o aspecto individual e o aspecto coletivo são vistos como perspectivas de análise de um mesmo fato: a ação individual de um aluno é vista como um ato de participação em um modo de agir, pensar e argumentar da comunidade de sala de aula a que ele pertence, ao mesmo tempo em que esse modo de agir, pensar e argumentar da comunidade de sala de aula é constituído pelas ações individuais de alunos e professores. Nas pesquisas desses autores (COBB ET ALL, 2001; COBB E YACKEL, 1996b), essas ações individuais e normas do grupo são analisadas em três níveis: o das normas sociais e crenças dos alunos sobre o próprio papel, o papel do outro e a natureza da atividade matemática na escola; o das normas sociomatemáticas e crenças e valores matemáticos (que, no nosso trabalho, veio a ocupar gradativamente o lugar antes preenchido pela ideia de contrato social de Brousseau); e, por fim, o das práticas matemáticas e concepções e atividade matemática dos alunos.

O presente trabalho, portanto, parte de uma experiência vivida e da busca de referenciais teóricos para analisar e compreender essa experiência, ainda que sempre de modo incompleto. Sendo assim, não poderia deixar de procurar diretamente na sala de aula seu material de análise: o agir dos alunos em situações específicas, nas quais estão postas em jogo questões relacionadas ao sentido de número e operações. A análise dessas ações, coordenando o ponto de vista individual e o coletivo, pretende explorar em que medida é possível colocar em pauta, no grupo, os modos pessoais ou compartilhados de lidar com esses conteúdos.

2. INTRODUÇÃO

O primeiro objetivo delineado para o presente estudo foi o de observar o uso que alunos fazem de procedimentos não convencionais de cálculo, procurando compreender de que modo esses procedimentos, ao mesmo tempo em que se apoiam em conhecimentos sobre números e operações, também são oportunidade de aprendizagem a respeito desses conteúdos – objetivo que se manteve, mas foi alterado por uma condicionante poderosa: essa observação deveria acontecer no contexto da sala de aula.

A opção pelo trabalho dentro do contexto da sala de aula levou-me a buscar ideias preciosas a serem compartilhadas entre alunos e entre professor e alunos na busca do primeiro objetivo. Ao mesmo tempo, essa opção significou a submissão aos limites de aprofundamento nas ações individuais, determinados pela situação de sala de aula.

As questões específicas vinculadas a esse objetivo maior foram emergindo a partir de minha prática, tanto em sala de aula quanto na função de coordenadora pedagógica, à medida que agia e refletia sobre o ensino de números e operações. A primeira delas surgiu de um incômodo relacionado ao trabalho com estratégias de cálculo não convencionais, fossem elas elaboradas pelo aluno ou apresentadas por professores ou colegas. A causa desse incômodo é a justificativa adotada, por muitos professores, para desenvolverem esse trabalho, isto é, que ele favoreceria a compreensão, mais adiante, das relações matemáticas implícitas nos algoritmos convencionais.

Minha percepção é a de que, embora pertinente, essa justificativa está incompleta, pois não considera o que os alunos podem aprender sobre números e operações ao elaborar tais estratégias ou se apropriar delas. Assim, frequentemente, se deixa de colocar luz sobre conteúdos matemáticos importantes com os quais os alunos precisam lidar, trabalhando mais em prol de um adiamento mal justificado da apresentação do algoritmo convencional do que na defesa de uma aprendizagem bem fundamentada de conceitos relacionados à compreensão do sistema numérico e às propriedades das operações. Um trecho da introdução ao livro do professor dos *Cadernos de apoio e aprendizagem*, produzido pelo Departamento de Orientações Técnicas da Prefeitura de São Paulo, por exemplo, ressalta a importância de se trabalhar com procedimentos alternativos de cálculo e de se compartilhar diferentes modos de resolver um cálculo em classe, mas não menciona a oportunidade de aprendizagem sobre números que esse trabalho pode significar:

> Além dos exercícios com as operações, o volume 1 explora e procura sistematizar os procedimentos de cálculo escrito, partindo de alguns processos intermediários até chegar ao convencional. O cálculo mental é bastante evidenciado e solicita-se sempre que os alunos socializem suas resoluções com os colegas, uma vez que surgem métodos diferentes para cada situação. Esse momento de troca é bastante rico e contribui para a ampliação dos procedimentos de cálculo (DOT / PMSP, 2010, p.13).

As estratégias não convencionais interessam tanto por serem muito mais transparentes quanto às relações envolvidas do que as convencionais – que, por sua vez, trazem a vantagem de ser muito econômicas, mas, para isso, precisam ser muito mais opacas, pois se passa a trabalhar com os dígitos, sem explicitar seu valor no número e deixa-se de realizar o cálculo passo a passo, condensando etapas. Fuson (1992) mostra que muitos alunos que vivenciam em sala de aula um ensino da adição e da subtração centrado em procedimentos regidos por regras tendem a lidar com números de vários dígitos como se fossem números de um dígito postos lado a lado, desconsiderando o valor assumido por cada dígito de acordo com sua posição.

Isso é parte da justificativa para que se abram – como tem sido feito, aos poucos – espaços para as estratégias não convencionais. Mas não é só isso. A lida com algoritmos alternativos traz a oportunidade – e a necessidade – de que o aluno explicite conhecimentos sobre número e de que use, ainda que sem nomear, propriedades das operações.

Nos últimos anos, as discussões acerca do desenvolvimento de sentido de número (MCINTOSCH; REYS; REYS, 1992; SPINILLO, 2006) têm sido fecundas ao identificar objetivos de ensino relacionados às competências desenvolvidas pelos alunos no contexto do trabalho com estratégias alternativas de cálculo.

McIntosch, Reys e Reys (1992) argumentam em favor do estabelecimento de sentido de número como um termo que pudesse substituir a expressão “numeracia”, expressando a necessidade de que a Matemática aprendida na escola tivesse sentido no contexto sociocultural dos alunos e, ao mesmo tempo, provocasse uma mudança no modo de ver o papel e a natureza do cálculo na escola elementar. E afirma:

> O sentido de número (...) desempenha um papel importante quando o aprendiz escolhe, desenvolve e usa métodos de cálculo, incluindo cálculo escrito, cálculo mental, cálculo com calculadora e estimativa. A criação e aplicação de um algoritmo pessoal se apoia em facetas do sentido de número

> como decomposição e recomposição, e compreensão de propriedades dos números (MCINTOSCH; REYS; REYS, 1992, p. 3, tradução nossa).

Cebola (2002) retoma as ideias de McIntosh, Reys e Reys (1992) e de outros autores sobre sentido de número, defendendo o cálculo mental e o cálculo por estimativa como ferramentas importantes na construção do sentido de número:

> Ambos [o cálculo mental e o cálculo por estimativa] podem proporcionar oportunidades para uma aplicação flexível dos conceitos de número e das operações, para inventar processos de resolver novos problemas, e para refletir sobre os números e seus significados no contexto de um dado problema (CEBOLA, 2002, p.232).

De fato, a disponibilidade para trabalhar com estratégias pessoais e não convencionais de cálculo nos leva a observar as muitas formas como os conhecimentos sobre número podem ser expressos, e os muitos caminhos que podem levar os alunos a aperfeiçoá-los. Vejamos um exemplo de conhecimento matemático envolvido nas estratégias não convencionais de cálculo: quando as crianças compreendem a contagem de 10 em 10 partindo de um número qualquer, elas estão se valendo de uma característica do nosso sistema numérico. Elas percebem que 113 + 10 = 123; 123 + 10 = 133, e assim por diante. Então compreendem que esse "1", que aumenta na casa da dezena, vale dez. É claro que essa compreensão tem níveis diferentes de profundidade, a serem abordados por aproximações sucessivas ao longo dos anos escolares.

Outro exemplo: é possível fazer 50 + 60 como 50 +50 +10 porque essa é uma decorrência de uma propriedade da adição, ou seja, em uma adição com três ou mais parcelas pode-se juntar ou decompor algumas delas, que isso não altera seu resultado. Os alunos empenhados em formular estratégias pessoais de cálculo aprendem, desde cedo, a usar tais propriedades, porque elas estão inseridas na lógica do funcionamento da Matemática e tornam-se ferramentas para a resolução de problemas.

Em nossa experiência, observamos a necessidade de se discutir com os professores os conhecimentos postos em ação nessas situações, e de se construir um repertório de intervenções e de possibilidades de procedimento de cálculo a ser apresentado e discutido com alunos. Isso porque, embora as estratégias pessoais dos alunos sejam parte fundamental do trabalho, em muitos momentos faz-se necessário apresentar uma alternativa, um caminho, que pode ou não ser fecundo para determinado aluno ou grupo de alunos. Nas discussões sobre essas possibilidades de intervenção, passamos a lidar, em situações específicas, com a compreensão de conceitos e de procedimentos de cálculo de outro modo: ao trabalhar com procedimentos não convencionais de cálculo mental (com ou sem apoio escrito) e escrito, nem sempre todos os alunos compreendiam as relações subjacentes aos procedimentos em uso. No entanto, observávamos que alguns procedimentos ensinados (isto é, "não pessoais", não criados pelo próprio aluno), ao serem explicitados e usados, favoreciam a ampliação dos conhecimentos das crianças sobre números e operações, enquanto a maioria não favorecia essa ampliação.

Numa classe de segundo ano, por exemplo, muitos alunos começaram a usar o seguinte procedimento para realizar adições de dezenas completas: *"se 5 mais 4 é 9, então 50 mais 40 é 90"*. Isso pode ter decorrido da observação, por algum dos alunos, dessa regularidade, ou pode ter sido um "truque" ensinado por outra pessoa (irmão, colega, pai, professor). Pois bem, observamos que os alunos estavam usando esse procedimento quando houve uma atividade de avaliação em que uma das adições propostas era 70 + 50, e mais da metade da série produziu respostas como 12, 102 ou 1200. Perguntadas sobre qual tinha sido o raciocínio para resolver aquela questão, algumas das crianças disseram que haviam usado, com desfechos variados, a fórmula *"se 7 mais 5 é 12, então..."*. A mudança dos valores, fazendo com que a soma dos primeiros algarismos de cada parcela tivesse dois dígitos, desmontou o algoritmo que essas crianças haviam adotado.

Ficou claro que essas crianças não haviam compreendido as relações matemáticas que estariam por detrás dessa estratégia. Perguntei, então, às crianças que haviam dado a resposta correta como haviam resolvido a questão e obtive, como respostas, que elas haviam usado a contagem de dez em dez ("*eu fiz 70, 80, 90, 100, 110, 120"*) ou decomposições variadas das parcelas, como *"eu fiz 50 mais 50 mais 20"*. Uma das crianças havia usado a ideia do *"se 7 mais 5 é 12, então..."* corretamente, mas não sabia explicar por que isso dava certo. Enquanto observava outra criança resolvendo a operação, escrevendo o 10 sete vezes abaixo do 70, e cinco vezes abaixo do 50, para então contar de dez em dez, construindo uma explicação: *"ah, aqui tem 'sete dez' e aqui tem 'cinco' dez"*. "E então?", perguntei. Nenhuma resposta. "E o que o 12 tem a ver com o 120?", insisti. *"Tem 12 dez!!"*.

Esse é um exemplo que ilustra como os alunos podem elaborar e enunciar conhecimentos sobre os números e as operações ao tentar explicar seus procedimentos de cálculo e como os professores podem encontrar caminhos fecundos para o ensino ao examinar, com a atenção, os erros e as justificativas de seus alunos, partindo da premissa de que “as atitudes das pessoas são lógicas desde seu próprio ponto de vista” (COBB, 2011, p. 159, tradução nossa).

A segunda questão é um aprofundamento da primeira: a reflexão sobre procedimentos de cálculo e o conhecimento sobre número nos levou aos autores que discutem o fazer Matemática na escola: de um lado, a observação de que os alunos constroem seus conhecimentos sobre números, rearranjando continuamente suas teorias a cada desequilíbrio (VERGNAUD, 1990); de outro, a constatação de que eles devem se apropriar de um conhecimento construído socialmente ao longo do tempo. Para o presente trabalho, focamos nossa atenção no desenrolar desse processo em sala de aula e, em especial, na possibilidade de que os alunos possam compartilhar parte dele ao apresentar, aceitar ou rejeitar soluções, e ao negociar significados matemáticos de situações e signos (VOIGT, 1994).

A justificativa para esse foco da questão no contexto da sala de aula vai além da questão pragmática, ou seja, do fato de estarmos especialmente interessados nas possibilidades de acompanhamento e intervenção no trabalho dos alunos. Essa opção também está ligada a uma concepção de ensino e aprendizagem em consonância com a noção de conhecimento situado, na qual uma aprendizagem não pode ser considerada fora de seu contexto (BOALER, 2000).

Nesse sentido, o presente trabalho pretende se inspirar em estudos que partiram de estudos sobre os alunos individualmente, passando a pensar a aprendizagem de matemática como um processo socialmente mediado dentro da cultura da sala de aula (VERSCHAFFEL; GREER; DE CORTE, 2007).

3. CONTEXTO TEÓRICO

Apresentamos aqui as bases teóricas dos fenômenos educativos focalizados em nossa pesquisa – nuances da construção do número no contexto da sala de aula – procurando refletir sobre elas a partir de um ponto de vista sociológico, psicológico e pedagógico.

Em relação às teorizações sobre o conhecimento matemático, podemos afirmar que esses fundamentos coincidem com as bases sobre as quais se constituiu a *perspectiva emergente* (COBB, 1997, 1996a, 1996b, 2000; BAUERSFELD, 1994; VOIGT, 1994). A atividade matemática individual, nessa perspectiva, é vista necessariamente como situada social e culturalmente. No entanto, ao mesmo tempo em que o desenvolvimento do indivíduo é possibilitado e delimitado pela sua participação em práticas sociais (aí incluídas as práticas em comunidade de sala de aula), tal desenvolvimento não é determinado por essa participação. Assim, a perspectiva emergente inclui também análises construtivistas das atividades individuais dos alunos: "a coordenação do interacionismo e do construtivismo psicológico é a principal característica da versão de construtivismo social a qual nos referimos como **abordagem emergente** ou **perspectiva emergente**" (COBB; YACKEL, 1996, p. 177, grifo dos autores).

Dos fundamentos sobre o ensino e a aprendizagem do *número*, trazemos autores comprometidos com a ideia do *sentido de número* (GREENO, 1991; MCINTOSCH; REYS; REYS, 1992; SOWDER, 1992), que discutem a interdependência entre cálculo e sentido de número e algumas possibilidades de abordagem desse conteúdo em sala de aula.

3.1. A perspectiva emergente como modo de compreender o ensino e aprendizagem de matemática na sala de aula

O desafio a que esta pesquisa se propõe – considerar as aprendizagens dos alunos em relação ao desenvolvimento do sentido de número dentro do contexto da sala de aula – levou-me a buscar uma perspectiva teórica que, além de considerar a construção do conhecimento pelo indivíduo, se ocupasse com igual ênfase das interações em sala de aula. Esse viés foi encontrado na perspectiva emergente (COBB et al., 1997; COBB, 2000). Ao mesmo tempo em que realizam seus estudos sobre a aprendizagem de conceitos matemáticos específicos em sala de aula, os autores se dedicam ao desenvolvimento de uma metodologia de trabalho que considera a atividade individual dentro do grupo e de uma estrutura interpretativa para analisar esse processo. “Do ponto de vista teórico, queremos explorar modos de analisar o desenvolvimento matemático dos alunos enquanto acorre na situação social da sala de aula” (COBB et al., 1997, p. 153, tradução nossa).

A história dessa estrutura teórica de análise de ensino e aprendizagem da matemática em sala de aula começa com pesquisas realizadas numa abordagem construtivista, especificamente fundamentadas pelo radical construtivismo (COBB, 2011; COBB, 2000; VON GLASERSFELD, 1994) e, por necessidades advindas da própria pesquisa, passa a adotar gradativamente uma perspectiva de aprendizagem situada.

> Quando começamos a realizar experimentos de design (*design experiments*[1]) há 13 anos, inicialmente seguimos uma abordagem construtivista, que significava um foco quase exclusivo na atividade e pensamento matemático individual dos alunos. No entanto, adotamos gradualmente uma perspectiva cada vez mais fortemente situada, na medida em que nos voltamos a questões concretas e assuntos relacionados ao desenvolvimento de nosso trabalho em sala de aula (*classroom-based work*). É importante ressaltar que nós não decidimos conscientemente adotar uma abordagem situada dos problemas do ensino e aprendizagem da matemática de um modo que poderia ser chamado de cima para baixo (*top-down*). Ao contrário, nossa mudança de orientação teórica foi altamente pragmática (COBB, 2000, p. 46).

Bauersfeld (1994) também revela uma ligação estreita com a prática, ao relatar o percurso de seu grupo de pesquisa até uma posição interacionista, que adotou conceitos e relações da sociologia, desenvolvendo-os para o campo da Educação Matemática. Ele conta que, no começo dos anos 1960, na Alemanha, vinha obtendo fracos resultados em trabalhos empíricos em sala de aula, e identificou como causa dessa dificuldade o pouco conhecimento que se tinha sobre as relações entre professores e alunos. O advento das filmadoras como recurso para documentação trouxe mudanças fundamentais em sua abordagem de pesquisa, por permitir que as cenas de sala de aula fossem vistas muitas vezes, e com focos diferentes de atenção a cada nova passagem. Criou-se, então, a necessidade de se buscar uma orientação teórica para os procedimentos interpretativos sobre essas interações que eram criados, já que

[1] Os experimentos de design (*design experiments*) a que Cobb (2000) se refere correspondem a um ciclo maior de pesquisa, que inclui o desenvolvimento de sequências de atividades instrucionais (instructional design) e análises do trabalho em sala de aula (*classroom-based analyses*) (GRAVEMEIJER, 1994) e no qual um elemento modifica o outro. No entanto, cada elemento do ciclo pode formar uma unidade independente.

as teorias psicológicas, embora muito úteis, não atingiam as complexas relações reflexivas entre professores e alunos (BAUERSFELD, 1994, p. 137).

É possível dizer que esse percurso em direção à consideração da aprendizagem como um fenômeno situado acompanha uma tendência mundial da educação matemática a partir dos anos 1980. Voigt (1994) identifica uma “mudança no foco de atenção” dos educadores matemáticos que, de pesquisas baseadas em entrevistas clínicas com o objetivo de compreender o pensamento individual dos alunos, passaram a se dedicar à compreensão do aprendizado da matemática em contextos sociais diversos. Citando exemplos de pesquisas no Brasil (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1985)[2], Inglaterra (BISHOP; GOFFREE, 1986; WALKERDINE, 1988)[3], França (BALACHEFF; LABORDE, 1988)[4], Itália (BARTOLINI-BUSSI, 1990)[5], Estados Unidos (COBB; WOOD; YACKEL, 1991)[6] e Alemanha (BAUERSFELD; KRUMMHEUUER; VOIGT, 1988)[7], o autor afirma que o pressuposto básico desses estudos é o de que “as dimensões sociais não são condições periféricas, e sim intrínsecas ao aprendizado de matemática” (VOIGT, 1994, p. 275, tradução nossa).

Na introdução de um livro reunindo artigos sobre Educação Matemática de autores de diversos países, do fim do século passado e começo deste, Boaler (2000) também assinala o crescente reconhecimento da natureza sociocultural do conhecimento e do aprendizado. Sem deixar de mencionar que esse reconhecimento não tem uma só decorrência, e sim múltiplas nuances nas abordagens socioculturais, dedica-se a analisar a perspectiva situada da aprendizagem.

Reconhecer a aprendizagem como situada significa considerar que o contexto de produção de um conhecimento o condiciona, ou seja, não se pode pensar o conhecimento separadamente da situação em que ele é produzido e usado.

---

[2] CARRAHER, T; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. Mathematics in the streets and in the school. **British Journal of Developmental Psychology** 3, 21-29.

[3] BISHOP, A.; GOFFREE, F. Classroom organization and dinamics. In: CHRISTIANSEN, B.; HOWSEN, A.; OTTE, M. (Ed.) **Perspectives on mathematics education,** 174-188. Antwerp, 1986;
WALKERDINE, V. **The mastery of reason**. London: Routledge, 1988.

[4] BALACHEFF, N; LABORDE, C. Social Interactions for experimental studies of pupils’ conceptions: its relevance for research in didactics of mathematics. In: STEINER, H.; VERMANDEL, A. **Foundations and methodology of the discipline mathematics education. Proceedings of the 2nd TME Conference**, p. 189-195. Bielefeld: IDM, 1988.

[5] BARTOLINI-BUSSI, Mathematics knowledge as a collective enterprise. In **Proceedings of the 4th SCTP Conference in Brakel, West Germany**. Bielefeld: IDM, 1990.

[6] COBB, P.; WOOD, T.; YACKEL, E. A constructivist approach to second grade mathematics. In: VON GLASERSFELD (Ed.) **Constructivism in mathematics education**, p. 157-176. Dordrecht: Kluwer, 1991.

[7] BAUERSFELD, KRUMMHEUUER, VOIGT. International theory of learning and teaching mathematics and related microethnographical studies. In: STEINER, H.; VERMANDEL, A. (Ed.). **Foundations and methodology of the discipline mathematics education,** p.. 174-188**.** Antwerp, 1988.

> As perspectivas situadas sugerem que quando as pessoas desenvolvem e usam conhecimentos, elas o fazem pela interação com sistemas sociais mais abrangentes. (...) As diferentes atividades nas quais os sujeitos que aprendem se engajam co-produzem seu conhecimento, de modo que quando alunos aprendem algoritmos, eles aprendem um conjunto particular de práticas e crenças associadas (BOALER, 2000, p.3, tradução nossa).

Partindo dessa premissa, as teorias psicológicas da mente em ação tornam-se insuficientes para analisar o ensino e a aprendizagem, e as ações dos aprendizes precisam ser pensadas como parte de um contexto constituído cultural e socialmente. Boaler (2000) ressalta, então, que essa mudança de perspectiva tem a consequência de ampliar o raio de disciplinas chamadas a lidar com as questões educacionais para além da psicologia, já que a antropologia, a sociologia, a filosofia, a política e outras disciplinas possuem ferramentas poderosas para produzir boas análises de "pessoas, sistemas e ambientes" (BOALER, 2000, p. 2).

Ao mesmo tempo em que afirma a importância das perspectivas situadas de aprendizagem, Boaler (2000) assinala que a perspectiva individual da aprendizagem não pode ser negligenciada:

> Ainda que representações da aprendizagem como trajetórias de participação em comunidades de prática possam trazer diferentes insights em relação às representações anteriores que eram apenas cognitivas, elas deixam inexplicadas a subjetividade e a regulação dos indivíduos nessas práticas. (...) a consciência de que a aprendizagem é ao mesmo tempo individual e social requer que perspectivas, previamente desenvolvidas, dando primazia a um ou ao outro, sejam adaptadas ou combinadas (BOALER, 2000, p. 6, tradução nossa).

A perspectiva emergente (COBB, 2000; BAUERSFELD, 1994; VOIGT, 1994) parte dessa preocupação, ao considerar o ensino e a aprendizagem como fenômenos complexos e ao representar as práticas educacionais como eventos simultaneamente individuais e sociais. Com raízes no interacionismo e no radical construtivismo (COBB et al., 1997), essa perspectiva considera que o pensamento individual e os processos sociais e culturais estão ligados reflexivamente, e têm muito em comum com outras perspectivas que procuram ir além das análises puramente cognitivas, cujas bases teóricas estão em Vygotsky e nos teóricos da atividade como Davydov, Leont'ev e Galperin (NUNES, 1992). Tanto do ponto de vista dessas últimas quanto da perspectiva emergente, "influências culturais e sociais não estão restritas ao processo de aprendizagem, mas são vistas como se estendendo aos seus produtos:

modos de conhecimento matemático crescentemente sofisticados" (COBB et al., 1997, p. 151). É importante notar que as duas linhas de pesquisa também rejeitam a hipótese de que a interação social seja simplesmente um desencadeador de um desenvolvimento cognitivo que, de outra forma, seria autônomo.

A principal diferença entre a perspectiva emergente e as demais perspectivas que veem a atividade matemática dos alunos como uma atividade social está na ênfase relativa atribuída à cognição individual e às práticas coletivas em comunidade. Nessas últimas, os processos sociais e culturais são prioritários em relação à atividade matemática do indivíduo, enquanto que na perspectiva emergente essa prioridade não existe.

> Com o objetivo de compreender suficientemente os avanços individuais e as regularidades sociais emergentes de certas culturas de sala de aula, era necessário alternar entre ambas as perspectivas, a psicológica e a sociológica, **sem dar preferência** a nenhuma delas (BAUERSFELD, 1994, p. 138, tradução nossa, grifo do autor).

Cobb (2000) comenta que, ao coordenar a perspectiva social e a individual em sua abordagem do trabalho em sala de aula, algumas vezes foi interpretado como se estivesse misturando duas orientações teóricas epistemologicamente incompatíveis. O autor explica, então, que vê a relação entre as perspectivas individual e social como reflexivas e mais do que interdependentes: uma não existe sem a outra.

> É importante esclarecer que nós tomamos a relação entre as perspectivas social e individual é de reflexibilidade. É uma relação extremamente forte que não significa meramente que as duas perspectivas são interdependentes. Em vez disso, implica que uma perspectiva não existe sem a outra, já que cada uma constitui o background sobre o qual cada atividade matemática é interpretada desde a outra perspectiva (COBB, 2000, p. 64, tradução nossa).

Na perspectiva emergente, foram adaptados conceitos de teorias ligadas ao construtivismo, às perspectivas socioculturais da aprendizagem e aos ramos específicos da sociologia e da linguística, como a etnometodologia, o interacionismo simbólico e a análise do discurso (BAUERSFELD, 1994). Essa adaptação, como já assinalado, teve um ponto de partida eminentemente prático, e levou à formulação de expressões ou conceitos que merecem atenção especial no contexto da presente pesquisa, que se detém em alguns deles, tal como explicitados por Cobb (2000) e outros pesquisadores a ele ligados (COBB et al., 2001; COBB et al., 1997; COBB; YACKEL, 1996A; COBB; YACKEL, 1996b; BAUERSFELD, 1994; VOIGT, 1994), tais como: prática matemática em sala de aula, microcultura de classe, a perspectiva psicológica adotada, negociação de significado na educação matemática.

3.1.1. Prática matemática em sala de aula

Um dos construtos teóricos fundamentais na perspectiva emergente é a ideia de prática matemática em sala de aula, que foi desenvolvida a partir da noção de prática cultural, das perspectivas socioculturais. Na teoria sociocultural, essa noção se refere a modos de agir que emergem como norma ao longo da história humana, ideia que possibilitou a caracterização da matemática como uma atividade humana complexa e, assim, se pode ver a tarefa do professor como a de organizar e dar suporte para as ações do aluno, o qual irá se apropriar de práticas que emergiram ao longo da história intelectual dessa disciplina.

Na teoria sociocultural, no entanto, as práticas da disciplina desenvolvidas historicamente são vistas como existindo *a priori* e independentemente dos professores e seus alunos, enquanto em uma comunidade local de sala de aula as práticas tidas como normativas (*normative*) não existem independentemente dos alunos e seus professores. Ao contrário, são constituídas por eles ao longo de suas interações (COBB, 2000):

> Quando focamos uma comunidade local e a sala de aula e não a disciplina como ponto de referência, a prática é vista como um fenômeno emergente e não como modo pré-estabelecido de pensamento e comunicação no qual os alunos devem ser iniciados. Além disso, enquanto as práticas da disciplina podem ser vistas como prioritárias quando se adota um ponto de vista sociocultural, a relação entre práticas matemáticas em sala de aula e pensamento dos alunos que delas participam é mais bem caracterizada como reflexiva (COBB, 2000, p. 66, tradução nossa).

Bauersfeld (1994) explicita que o modo de encarar a matemática tem decorrências sobre a prática matemática em sala de aula: ver a matemática como "uma verdade objetiva, um tesouro social e algo existente e objetivamente documentado" (p. 140, tradução nossa) levará o professor a "introduzir" os alunos nessa verdade. Para isso, o professor procurará recursos e representações que considere correspondentes à estrutura matemática do que pretende ensinar e corrigirá os erros dos alunos de acordo com a resposta esperada.

Por outro lado, ver a matemática como uma prática compartilhada, guiada por regras e convenções que emergem dessa prática (mesmo fora da escola), leva o professor a organizar suas atividades como "parte de uma prática de matematização" (BAUERSFELD, 1994, p.

140, tradução nossa), e não como uma atividade guiada pelo controle permanente das produções dos alunos.

Isto é, [a prática matemática em sala de aula é vista] como uma subcultura desafiadora e encorajadora, específica para **esse** professor e **esses** alunos, **nessa** sala de aula, orientada para o desenvolvimento das habilidades construtivas dos alunos, seu autoconceito e autoorganização. A diversidade de construções subjetivas do sentido e a necessidade de chegar a adaptações viáveis – "significados presumidamente compartilhados" e "relações presumidamente compartilhadas" – requerem tentativas de discussões baseadas em experiências intensivas e com objetivo de negociar significados[8]. Não há descoberta no sentido clássico, há apenas construção subjetiva de sentido, já que "o que é observado não são coisas, propriedades ou relações de um mundo que existe como tal, mas sim os resultados de distinções (*distinctions*) feitas pelo próprio observador (BAUERSFELD, 1994, p. 140, tradução nossa).

3.1.2. Perspectiva psicológica adotada

A perspectiva psicológica desenvolvida dentro da abordagem emergente toma do construtivismo "a noção básica de que aprender é um processo de atividade reorganizadora" (COBB, 2000, p. 66, tradução nossa). Ao mesmo tempo, levada pela necessidade de uma abordagem que considerasse, além da atividade mental interna, os modos diversos através dos quais os alunos lidam com ferramentas e símbolos, busca referências também nas teorias da inteligência direcionada (*distributed theories of intelligence*).

De acordo com as teorias da inteligência distribuída (BATESON, 1973; ROTH; MACGINN, 1998)[9], a unidade de análise do sujeito que aprende é "um sistema funcional que consiste no indivíduo, nas ferramentas e nos contextos sociais" (COBB, 2000, p. 66, tradução nossa). Ao tomar esse sistema como unidade de análise, no entanto, tais teorias rejeitam abordagens que foquem a natureza do pensamento individual do estudante. Nesse ponto, elas se diferenciam da abordagem emergente que, mesmo ampliando sua ideia de atividade para incluir o uso de ferramentas e símbolos, trata dos modos como o pensamento do indivíduo evolui nesse sistema.

> Nós precisamos de uma abordagem analítica que possa considerar os diversos modos pelos quais os alunos pensam com ferramentas e símbolos e, ao mesmo tempo, como esses modos de pensamento evoluem ao longo do

---

8 Ver subitem *Negociação de significados*.

9 BATESON, G. **Steps to an ecology of mind**. London: Paladin, 1973; ROTH, W-M.; MCGINN, M. K. Inscriptions: Towards a theory of representing as social practice. **Review of Educational Research**, 68, 35– 59, 1998.

> tempo. Uma abordagem desse tipo é fundamentalmente não dualista (*nonduelist*), em que aprender envolve a reorganização do mundo no qual se age tanto quanto modos de agir no mundo (COBB, 2000, p. 66, tradução nossa).

Ancorada no construtivismo, que, por sua vez, tem sua raiz na epistemologia genética de Piaget, a perspectiva emergente pretende "inferir a qualidade do pensamento individual *no*, *com* e *sobre* o mundo, e para explicar o desenvolvimento de seu pensamento em termos da reorganização da atividade e do mundo no qual age" (COBB, 2000, p. 67, tradução nossa).

Essa noção de conhecimento como construção do sujeito tem sua história, dentro da perspectiva emergente, no radical construtivismo de von Glasersfeld (COBB, 1997). Partindo da impossibilidade de produzir cognitivamente uma representação de um mundo objetivo, von Glasersfeild (1990) afirma que o construtivismo propõe uma reconstrução do conhecimento, que difere radicalmente das conceitualizações tradicionais quanto à relação entre conhecimento e realidade. Essa reconstrução significa substituir a ideia de representação por outro tipo vínculo entre as nossas estruturas cognitivas e o mundo real: "é necessário encontrar um modo de relacionar conhecimento e realidade que não implique em algo parecido com par (*match*) ou correspondência" (p. 22, tradução nossa).

Para esclarecer a diferença entre corresponder (*mach*) e se encaixar ou servir (*fit*), von Glasersfeld recorre a uma analogia que vale a pena mencionar. A ideia de "corresponder" (*mach*) implica buscar algo que se possa considerar equivalente: "o realista metafísico procura um conhecimento que corresponda à realidade do mesmo modo que se pode procurar a tinta correspondente à cor que já está na parede que você quer consertar" (VON GLASERSFELD, 1984, p. 19, tradução nossa), ou seja, o realista busca equivalência de relações que lhe permitam dizer "que seu conhecimento é **do** mundo" (VON GLASERSFELD, 1984, p. 19, tradução nossa, grifo do autor).

Já a ideia de "encaixar" ou "servir" (*fit*) supõe uma relação diferente: quando uma chave serve, ela abre a porta. Mas isso não significa que essa seja a única chave que pode abrir a porta. Um ladrão pode ter uma chave com um formato completamente diferente da que tem o dono da casa, e, ainda assim, abrir a porta: "do ponto de vista do construtivismo radical, todos nós – cientistas, filósofos, leigos, alunos, animais, sem dúvida qualquer tipo de organismo vivo – enfrentamos nosso ambiente como o ladrão enfrenta a fechadura que ele precisa abrir para fazer o saque" (VON GLASERSFELD, 1984, p. 19, tradução nossa).

A ideia de adaptação, presente na teoria da evolução de Darwin, oferece essa alternativa conceitual; von Glasersfeld ressalta que a adaptação, tanto na teoria darwiniana quanto no construtivismo, não é um movimento do organismo ou das ideias, mas a resposta do ambiente a eles: "nunca poderia haver organismos ou ideias que se adaptem à realidade, mas é sempre a realidade que, ao **limitar o que é possível**, inexoravelmente aniquila o que não se encaixa para viver (*what is not fit to live*)" (VON GLASERSFELD, 1984, p. 19, tradução nossa, grifo do autor).

Pensar em adaptação das ideias ao mundo experimentado ao invés de pensar em correspondência significa, para von Glasersfeld, admitir que, quando uma teoria formulada funciona (seja uma ideia muito simples, seja uma formulação científica altamente sofisticada), isso não significa que ela seja uma representação do mundo objetivo, e sim que ela seja uma ideia viável nas condições do nosso mundo experimental.

> O construtivismo radical, portanto, é radical porque (...) desenvolve uma teoria do conhecimento na qual o conhecimento não reflete uma realidade ontológica "objetiva", mas exclusivamente uma ordenação e organização do mundo constituído pela nossa experiência (VON GLASERSFELD, 1984, p. 20, tradução nossa).

3.1.3. Negociação de significado

É na sociologia que Voigt (1994) busca referências para pensar o ensino e a aprendizagem da matemática, justificando essa escolha pela relação interpessoal implicada nesse processo e declarando que a perspectiva, a qual propõe é interacionista e se refere a um domínio específico da sociologia compatível com uma perspectiva do construtivismo psicológico.

O ponto de partida de Voigt (1994) é a ambiguidade dos objetos na matemática escolar: lições, tarefas, questões e símbolos matemáticos não têm (como reza o senso comum) um sentido definido, e demandam negociação.

> Qual o significado do algarismo 5 para uma criança pequena em uma situação específica? O significado está relacionado a coisas concretas (por exemplo, o mindinho da minha mão esquerda)? O símbolo leva a criança a lembrar de atividades prévias (por exemplo, é um número difícil de escrever)? Ativa emoções específicas (por exemplo, meu número favorito)? Deriva seu significado relacionando-se com outros números (por exemplo, é igual a 2+3, 1+4, 0+5)? (VOIGT, 1994, p. 277, tradução nossa).

Essa ambiguidade de figuras, enunciados de problemas, jogos e histórias se faz mais clara quando as crianças, para quem elas são propostas, não estão habituadas a resolver esse tipo de tarefa, ou seja, “o processo de matematização dado por estabelecido torna-se problemático quando as situações são interpretadas por sujeitos que (ainda) não são membros daquela cultura de sala de aula” (VOIGT, 1994, p. 277, tradução nossa).

Os interacionistas têm como pressuposto que “todo objeto ou evento na interação humana é plurisemântico” (VOIGT, 1994, p. 277, tradução nossa): baseado em seu conhecimento anterior, o sujeito forma um contexto sensível (*sensible context*) para interpretar o objeto e lhe atribuir significado. É importante notar que o sujeito pode experimentar o objeto como sendo fatual, sem perceber que ele é plurisemântico.

Nós, pesquisadores, que nos mantemos em contato com professores e alunos no que diz respeito ao ensino e aprendizagem da matemática, vivemos situações desses dois tipos: situações em que essa ambiguidade se torna um problema explícito na sala de aula, e situações em que a ambiguidade de uma proposta ou simbolização não é percebida por professores ou alunos (e nem por isso deixa de se tornar um problema para o ensino e aprendizagem, ou, justamente por isso, se torna um problema). Voigt (1994) identifica uma tendência muito forte, especialmente no nível elementar, de se desprezar a ambiguidade tanto dos símbolos matemáticos quanto das situações empíricas que deveriam servir como fonte de significado matemático. Existe a expectativa de que os alunos aprenderão prontamente se os significados matemáticos estiverem vinculados a coisas concretas. No entanto,

> se o professor toma um fenômeno empírico como ponto de partida para familiarizar os alunos com conceitos matemáticos específicos, e se um aluno matematiza o fenômeno empírico de modo diferente do esperado pelo professor, haverá um conflito que não pode ser resolvido por inferências. Essa é a razão pela qual os significados, na escola, são, necessariamente, matéria sob negociação (VOIGT, 1994, p. 280, tradução nossa).

E, ainda que alunos e professores concordem ao atribuir determinado significado, a negociação de significado é útil para distinguir entre razões empíricas e teóricas: “Por que 2 + 3= 5? É porque se pode contar 5 bananas na figura[10]? Ou isso é verdade porque 2 + 3 tem que ser um a mais do que 2 + 2, que é igual a 4 – independentemente das bananas?” (VOIGT, 1994, p. 280, tradução nossa). Ou seja, mesmo quando os participantes de uma situação não explicitam diferentes pontos de vista, há margem para a ambiguidade.

[10] Esse trecho é um excerto da descrição de parte de uma aula em que o professor apresenta uma figura aos alunos na qual há um macaco dentro de uma jaula e um homem, que parece ser um funcionário do zoo. O macaco tem duas bananas na mão, o homem tem três, e, abaixo do desenho, aparece a seguinte combinação de sinais: $\square \bigcirc \square = \square$. Voigt (1994) descreve uma situação em que várias pessoas são perguntadas sobre o significado da imagem, e as respostas são muito variadas.

Ao mesmo tempo, na perspectiva interacionista, a negociação de significado acontece o tempo todo, mesmo que não esteja explícita. Reações sutis do professor a uma interpretação ou proposta de solução de um aluno podem ser tomadas por ele como sinal de reprovação e levá-lo a reconsiderar o que pensou.

A negociação de significado é, portanto, uma constante no trabalho em sala de aula. A estrutura de análise proposta pela perspectiva emergente trata dessa negociação ao focar permanente a prática matemática em sala de aula e os modos como, pela negociação, determinados modos de agir, crenças, valores e conceitos matemáticos tornam-se presumidamente compartilhados.

3.1.4. A expressão "presumidamente compartilhado"

Ao mencionar uma prática, valor ou crença que pareça ter se tornado comum entre os participantes de uma comunidade de sala de aula, as pesquisas realizadas desde a perspectiva emergente usam a expressão "presumidamente compartilhada" (COBB, 1997, 1996a, 1996b, 2000; BAUERSFELD, 1994; VOIGT, 1994).

> Nós falamos de atividades normativas sendo *presumidamente compartilhadas* em vez de *compartilhadas* para deixar espaço para a diversidade nos modos individuais dos alunos ao participarem dessas atividades. A afirmação de que uma atividade específica é presumidamente comparilhada não faz afirmações determinísticas sobre o pensamente dos alunos participantes, muito menos de que seus raciocínios sejam idênticos. (COBB, 2000, p. 74, tradução nossa).

Essa expressão mostra-se coerente com a noção de conhecimento como uma construção individual. Se, de acordo com von Glasersfeld (1984), mais de uma construção do sujeito pode se encaixar (*fit*) no objeto que se pretende conhecer, em uma sala de aula, em que alunos estejam aparentemente em total acordo, não é possível afirmar que suas construções sobre aquele objeto sejam iguais.

3.2. Sentido de número e estratégias de cálculo

A preocupação com o desenvolvimento do sentido de número dos alunos como tema de pesquisa na área de Educação Matemática é relativamente recente, e as pesquisas sobre o assunto ainda não são numerosas no Brasil. A definição de sentido de número aparece necessariamente vinculada às habilidades de cálculo, seja exato, aproximado, mental ou escrito (MCINTOSCH, 1992; SOWDER, 1992), mas não se restringe a isso, levando-nos a refletir sobre como a abordagem de conteúdos matemáticos, na escola, está estreitamente ligada à possibilidade de definir, ensinar e avaliar o sentido de número (RESNIK, 1989).

3.2.1. Sentido de número: tentativas de definição

A ideia de sentido de número não tem uma formulação precisa, mas alguns autores trazem definições parciais. É possível dizer que, em termos gerais, as tentativas de definição têm em comum a descrição de uma pessoa que tem sentido de número desenvolvido como alguém que tem cálculo mental flexível, boa capacidade de estimar quantidades numéricas e de realizar julgamentos quantitativos.

Para Castro e Rodrigues (2008) essa expressão, surgida há cerca de 20 ou 25 anos na literatura especializada, refere-se, normalmente, a conhecimentos matemáticos observados tanto em contextos educativos como na vida prática. O National Council of Teachers of Mathematics (1989) descreve uma criança com bom sentido de número como alguém que compreende os números e as múltiplas relações entre eles, reconhece a grandeza relativa dos números e desenvolveu referências para quantidades e medidas. Sowder (1992) considera que tais habilidades podem ser consideradas genericamente como “uma rede conceitual bem organizada que capacita o indivíduo a resolver problemas numéricos de modo flexível e criativo” (p. 381, tradução nossa).

Spinillo (2006) retoma o paralelo entre ser letrado e ser numeralizado, recuperando a discussão em torno dos termos “letrado” e “alfabetizado”: é possível identificar certo nível de letramento entre pessoas não alfabetizadas, quando conhecem funções da escrita e participam de práticas sociais de uso dessa habilidade, sendo capazes, por exemplo, de antecipar o tipo de informação que podem encontrar em determinado portador (notícias em um jornal, receitas em um caderno de receitas) e de usar o discurso escrito adequadamente (por exemplo, ditando uma carta ou um bilhete). Ao mesmo tempo, é possível que uma pessoa alfabetizada não saiba redigir uma carta, ou não conheça a organização ou o tipo de texto que se espera encontrar em um jornal.

A autora destaca, como indício de numeralização, habilidades numéricas e espaciais que podem ser desenvolvidas tanto por pessoas escolarizadas quanto por pessoas não escolarizadas. São habilidades desenvolvidas no exercício de práticas sociais, que requerem “familiaridade com o mundo dos números, pensar matematicamente em situações diversas, empregar sistemas eficientes de representação e compreender regras lógicas que regem os conceitos matemáticos inseridos nessas situações" (SPINILLO, 2006, p.85). A autora assume, então, a posição de que a habilidade da numeralização está estreitamente relacionada ao desenvolvimento do sentido de número.

Considerando que o termo carece mais de análises teóricas do que de uma definição, Greeno (1991) discute o sentido de número como um conhecimento situado, dentro do domínio conceitual (*conceptual domain*) de números e operações. Para isso, faz uso de uma metáfora em que um domínio conceitual é considerado como um ambiente em que uma pessoa precisa aprender a se orientar, identificando recursos disponíveis, localizando-os e utilizando-os para compreender e pensar. Enquanto para as teorias de processamento da informação, os conceitos e as relações estão representados na estrutura cognitiva e o pensamento acontece pela ativação de representações e pela interpretação das representações ativadas, na metáfora proposta por Greeno (1991) conhecer um conjunto de conceitos não é saber representá-los, e sim saber identificá-los e usá-los em processos construtivos de pensamento. O autor procura situar o papel das representações no conhecimento de um domínio conceitual:

> Se concordamos com a abordagem expressa por Howden (1989[11]), de que o sentido de número "desenvolve-se gradualmente como resultado da exploração de números, observando-os em contextos variados e relacionando-os" deveríamos considerar representações simbólicas como análogas a mapas, guias e instruções faladas ou escritas que podem ser úteis – e até essenciais – nas atividades para aprender a viver em ambientes e como importantes recursos para pensar e comunicar-se, mas elas não deveriam substituir a experiência no domínio conceitual como a principal atividade de aprendizagem que oferecemos aos alunos (GREENO, 1991, p. 177).

McIntosh et al. (1992) veem o surgimento da expressão "sentido de número" (*number sense*) como uma alternativa à expressão "numeracia" ou "numeramento", que ele indica como usada pela primeira vez em 1959 por Crowther, para descrever a destreza ao lidar com demandas matemáticas na comunidade. Segundo ele, o termo "numeracia" acabou se referindo à habilidade de lidar com as demandas matemáticas no dia a dia e, sem uma análise detalhada de tais demandas, passou a se referir ao uso das mesmas habilidades exigidas pela aritmética.

[11] HOWDEN, H. Teaching number sense. **The Arithmetic Teacher.** 36. 6-11,1998.

Considerando que os adultos, hoje, fazem relativamente pouco uso do cálculo escrito, com a crescente disponibilização e com o barateamento das calculadoras, e que existe um reconhecimento do cálculo mental e da estimativa como processos eficientes de cálculo, McIntosh et al. (1992) propõem que o ensino de cálculo na escola básica “deveria levar em conta o aumento da importância tanto da **escolha** da estratégia de cálculo quanto do **processo** e resultado do emprego dessa estratégia” (p.2, tradução nossa, grifo nosso). Afirmam, ainda, que a expressão “sentido de número” foi a que teve maior aceitação ao expressar essas mudanças. Os autores relacionam, então, o sentido de número com uma visão da Matemática como instrumento para compreender, analisar e intervir no mundo atual, propondo uma definição provisória:

> Sentido de número: propensão e habilidade para usar números e métodos quantitativos como meios de comunicação, processamento e interpretação de informações. Resulta na percepção de que números são úteis e de que a Matemática tem certa regularidade (faz sentido) (p. 4, tradução nossa).

O autor propõe, ainda, um modelo para se pensar a ideia de sentido de número, que se mantém como referência importante em trabalhos de pesquisa nacionais e internacionais (por exemplo, SPINILLO, 2006; BARBOSA, 2007; BATISTA, 2009; RIBEIRO, 2006; CEBOLA, 2002; REYS, 1998) e em projetos curriculares atuais (*Desenvolvendo o sentido de número*, de 2005 a 2007 e *National Numeracy Strategy*, de 1999 a 2000, respectivamente em Portugal e na Inglaterra). Nesse modelo, as habilidades correspondentes a um sentido de número desenvolvido são agrupadas em três grandes grupos: (I) conhecimento e destreza com números; (II) conhecimento e destreza com operações; (III) aplicação do conhecimento e da destreza com números e operações a situações de cálculo. A respeito da organização que propõe, o autor faz uma observação importante: todas as habilidades apresentadas se inter-relacionam, e o todo formado por elas é maior do que a soma de suas partes.

I) Conhecimento e destreza com números

Como parte desse grupo, o autor lista “compreensões” que o aluno deve demonstrar e utilizar ao lidar com números, observando que essa abordagem é diferente de listar tópicos de ensino sobre o tema:

- Sentido de regularidade do número

O sentido de regularidade do número supõe compreender a organização do sistema numérico hindu-arábico e o modo como essa organização pode ser útil na análise e no olhar crítico sobre números. Um componente importante dessa habilidade é a compreensão do **valor posicional** do número e suas implicações, tanto para os números inteiros quanto para os números decimais, além da compreensão dos números racionais e de suas representações, sabendo **relacioná-los entre si** e **ordenar** números de diferentes tipos. O autor também marca a importância de **observar regularidades** e traz como exemplo a aprendizagem da sequência dos números naturais pelas crianças pequenas, observando que, quando elas aprendem a contar além do 20, elas passam a perceber regularidades tanto na sequência oral quanto na sequência escrita. Aponta que essa identificação de padrões e regularidades deve acontecer, também, na exploração dos números decimais.

É claro que essa compreensão tem níveis de profundidade muito diferentes, indo desde a simples percepção de que o 3 pode valer 3, 30, 300 até a consideração, em contextos variados, de que cada ordem corresponde a dez vezes o valor da ordem à sua direita.

- Múltiplas representações dos números

Saber que os números podem ser representados e manipulados de diversas maneiras (**gráficas** e **simbólicas**) é outro componente do sentido de número. Isso significa reconhecer números em suas diversas formas e contextos, identificando aquelas que serão mais úteis em determinadas situações. Exemplos trazidos pelo autor: reconhecer 2+2+2+2 como equivalente a 4x2; reconhecer vários modos de compor 30 *cents* com moedas de valores variados; 30min como equivalente a meia hora e, mais adiante, ¾ como equivalente a 6/8 ou 0,75 ou 75%.

O autor assinala a importância da **decomposição e recomposição** como a possibilidade de expressar um número de uma forma mais conveniente para determinada operação, observando que, entre os alunos do primeiro ciclo do Ensino Fundamental, a decomposição e a recomposição frequentemente fazem parte de procedimentos pessoais ("inventados") de cálculo. Como exemplo de uma situação em que um aluno manifesta importante conhecimento intuitivo sobre número e sobre adição, apresenta o seguinte processo de resolução para 25+27: reconhecendo o 27 como equivalente a 25+2, e sabendo que 25+25=50, o aluno resolve mentalmente essa soma como 25+25+2. Outro aspecto importante, relacionado a múltiplas representações dos números, é sua **comparação com referências**: por exemplo, pensar o 5/8 graficamente, ou através de frações equivalentes, ou na forma decimal e, mais do que isso, perceber que esse número corresponde a pouco mais de ½ (referência), ou está entre ½ e ¾.

- Sentido de valor absoluto e relativo dos números

Reconhecer o valor absoluto e relativo dos números em contextos variados, comparando-os tanto a um **referencial físico** quanto a um **referencial matemático**. Exemplo trazido pelo autor: perguntar a um aluno do 3º ano se já viveu mais do que 1.000 dias ou menos do que 1.000 dias, lhe dá a oportunidade de pensar sobre o 1.000 em um contexto pessoal.

- Sistema de referências

Um sistema de referências pode ser visto como uma bússola a orientar o pensamento sobre números. É usado para avaliar a ordem de grandeza de uma resposta ou para arredondar um número com o objetivo de tornar mais fácil lidar com ele. Há números que são especialmente úteis como referências, como as potências de 10, os múltiplos de potências de 10 ou valores como ½ ou 50%, mas qualquer valor que seja familiar e bem compreendido pelo aluno pode servir como referência. Possuir um sistema de referências complexo e variado para apoiar decisões sobre números e contextos numéricos é, para McIntosch et al. (1992), indício seguro de sentido de número desenvolvido.

II. Conhecimento e destreza com operações

As habilidades fundamentais para o conhecimento e a destreza com operações não se relacionam apenas à capacidade de realizar cálculos, e são tão ou mais importantes para alguém que usa uma calculadora quanto para alguém que realiza um cálculo escrito.

- Compreensão do efeito das operações

Compreender de fato uma operação inclui a compreensão de seu efeito sobre os números, sejam eles inteiros ou racionais. Os modelos podem ser úteis para promover essa compreensão, mas é necessário que sejam explorados vários modelos de uma mesma operação, ou os alunos podem ser induzidos a erros em sua interpretação. Por exemplo, a multiplicação como adição de parcelas iguais pode ser útil, mas um aluno precisa lidar com outros modelos de multiplicação para não correr o risco de chegar à conclusão de que o efeito de uma multiplicação será sempre o aumento no número inicial.

1. Conhecimento e destreza com números	1.1 Sentido de regularidade dos números	1.1.1 Valor posicional
		1.1.2 Relações entre diferentes tipos de números
		1.1.3 Ordenar números de mesmo tipo ou de diferentes tipos
	1.2 Múltiplas representações dos números	1.2.1. Gráfica ou simbólica
		1.2.2 Formas numéricas equivalentes (incluindo decomposição e recomposição)
		1.2.3 Comparação com referências
	1. 3 Sentido de grandeza relativa e absoluta dos números	1.3.1 Comparativamente a referentes físicos
		1.3.2 Comparativamente a referentes matemáticos
	1.4 Sistema de referências ou âncoras	1.4.1 Matemáticas
		1.4.2 Pessoais
2. Conhecimento e destreza com operações	2.1 Compreensão do efeito das operações	2.1.1 Operando com números inteiros
		2.1.2. Operando com frações ou decimais
	2.2 Compreensão das propriedades matemáticas das operações	2.2.1 Comutatividade
		2.2.2 Associatividade
		2.2.3 Distributividade
		2.2.4 Identidades
		2.2.5 Inversas
	2.3 Compreensão das relações entre operações	2.3.1 Adição / Multiplicação
		2.3.2 Subtração / Divisão
		2.3.3 Adição / Subtração
		2.3.4 Multiplicação / Divisão
3. Aplicação do conhecimento e destreza com números e operações a contextos de	3.1 Compreensão das relações entre o contexto dos problemas e os cálculos requeridos	3.1.1 Reconhecer informações como exatas ou aproximadas
		3.1.2 Consciência de que soluções podem ser exatas ou aproximadas
	3.2 Consciência da existência de múltiplas estratégias	3.2.1 Habilidade de criar ou inventar estratégias
		3.2.2 Habilidade de aplicar diferentes estratégias
		3.2.3. Habilidade de selecionar uma estratégia eficiente
	3.3. Inclinação para o uso de representações e / ou métodos eficientes	3.3.1 Facilidade com métodos variados (mental, calculadora, papel e lápis)
		3.3.2 Facilidade para escolher números eficientes
	3.4 Inclinação para rever a pertinência de dados e resultados	3.4.1 Reconhecer a razoabilidade da informação
		3.4.2 Reconhecer a razoabilidade do cálculo

Figura 1: Modelo proposto por McIntosch (1992) para analisar o sentido de número

- Compreensão das propriedades matemáticas das operações

A compreensão das propriedades matemáticas das operações (comutatividade, associatividade, distributividade) não corresponde ao seu conhecimento como regras formais, mas ao seu uso. McIntosh et al. (1992) trazem um exemplo estreitamente ligado aos objetivos deste estudo, em que um aluno usa estratégias ligadas a propriedades da multiplicação para resolver o cálculo 36x4: faz 35x4 + 1x4; ou 40x4 – 6x4; ou 30x4 + 4x4.

- Compreensão das relações entre operações

Defendendo a possibilidade de relacionar operações como um enriquecimento nos recursos para abordar um problema de diversas formas, o autor apresenta o seguinte exemplo: para responder à pergunta “quantas rodas há em 8 triciclos?”, é possível contar mentalmente as rodas um a um, adicionar o 3 repetidamente (3+3+3+3+3+3+3+3), fazer quatro grupos com dois triciclos em cada (6+6+6+6) ou usar a multiplicação.

As relações inversas entre as operações também são importantes, e o autor traz dois exemplos de exploração da relação inversa entre divisão e multiplicação. O primeiro, do aluno que, para definir o quociente de 480 ÷ 8, procura descobrir por quanto deveria multiplicar o oito para que obtenha 480. O segundo refere-se às relações entre essas operações ao lidar com números racionais: perceber que multiplicar por 0,1 é equivalente a dividir por 10, e dividir por 0,1 é equivalente a multiplicar por 10.

III. Aplicação do conhecimento e da destreza com números e operações a contextos de cálculo

O processo de resolução de problemas do mundo real, envolvendo números e operações, depende de uma série de decisões: lidar com valores exatos ou aproximados, escolher a ferramenta de cálculo mais eficiente (entre as disponíveis), escolher e aplicar uma estratégia, rever a plausibilidade do resultado e, se necessário, repetir o processo lançando mão de outra estratégia. Para isso, são necessárias as habilidades seguintes:

- Compreensão das relações entre o contexto dos problemas e os cálculos requeridos

Percepção de que, em certos contextos, um cálculo aproximado é mais adequado, enquanto em outros o cálculo exato é requerido. Os autores (MCINTOSH et al., 1992) trazem como exemplo uma situação em que são apresentadas três frutas e seus preços, que são \$2,88,

$2,38 e $3,76. Ele observa que, caso a pergunta seja “qual o valor gasto?”, é necessário calcular o valor exato – escolhendo para isso qualquer dos procedimentos de cálculo disponíveis. Caso a pergunta seja “é possível pagar as três frutas com $10,00?”, a estimativa é um meio confiável e mais rápido de chegar à resposta.

- Consciência da existência de múltiplas estratégias

A consciência da existência de múltiplas estratégias de resolução possíveis para grande parte dos problemas se mostra quando, diante do insucesso no emprego de determinada estratégia, o aluno formula e aplica uma estratégia alternativa.

- Inclinação para o uso de representações e/ou métodos eficientes

Pessoas com sentido de número pouco desenvolvido muitas vezes usam métodos de cálculo mais trabalhosos, por terem praticado determinado procedimento intensivamente, por não conhecerem métodos alternativos de cálculo ou por não confiarem neles. Pessoas com sentido de número desenvolvido, em contraste, tendem a identificar e usar representações ou métodos mais eficientes para cada situação. O exemplo apresentado pelo autor, de uma criança de 2º ano, mostra procedimentos para calcular 8+7: considerar o 8 como 7+1, resolvendo a adição como 7+7+1, por já saber o resultado de 7+7, ou representar o 7 como 5+2, resolvendo a adição como 8+2+5, por já saber que 8+2 é igual a 10 (uma referência, no caso).

- Inclinação para rever a pertinência de dados e resultados

Uma pessoa com sentido de número desenvolvido tende a examinar uma resposta produzida, verificando se ela “faz sentido” em relação ao problema original, levando em conta os números apresentados e a pergunta a ser respondida. Essa verificação seria uma tendência natural, como parte do processo de resolução do problema.

O autor observa que essa tendência é rara entre alunos, e formula a hipótese de que isso se deve à pouca importância atribuída por eles à resposta e ao problema em si.

3.2.2. Cálculo e sentido de número: delimitando nossas pretensões

Não pretendemos defender que um trabalho com procedimentos de cálculo visando o desenvolvimento, pelos alunos, do sentido de número, abarque todos os aspectos dessa habilidade. Estamos de acordo com Reys et al. (1991), quando diz:

> *"Compreensão numérica [sentido de número] não é uma entidade finita que o aluno possui ou não, nem uma unidade curricular que possa ser ensinada depois deixada de lado. Acima de tudo, a compreensão numérica se caracteriza por uma intenção de construir sentido para situações numéricas. Compreensão numérica é uma forma de pensar que deve permear todos os aspectos do ensino e aprendizagem da matemática, se a matemática é algo que deva fazer sentido". (p.5)*

Sendo assim, só podemos pretender que a ideia de sentido de número, e a intenção de que os alunos possam desenvolver seu sentido de número, permeiem as propostas relacionadas ao ensino de cálculo. Ou seja, o trabalho com estratégias de cálculo considerando o objetivo de que os alunos desenvolvam seu sentido de número é um recorte em um cenário mais amplo, não uma proposta metodológica para desenvolvimento do sentido de número.

Ainda nessa linha, Greeno (1991), partindo do consenso de que ter um sentido de número desenvolvido é desejável como produto da educação matemática, vê dois possíveis caminhos a serem trilhados. O primeiro seria tentar desenvolver propostas de atividades que levassem os alunos a desenvolver capacidades correspondes aos indicadores de sentido de número (cálculo mental flexível, cálculo por estimativa, julgamentos e inferências quantitativos e outros). O segundo, que ele defende, seria tratar os indicadores de sentido de número não como habilidades a serem desenvolvidas diretamente, mas como "*sintomas de uma condição mais básica e geral de conhecimento do domínio conceitual dos números e quantidades"* (Greeno, 1991, p. 173, tradução livre). Desde esse ponto de vista, o sentido de número seria desenvolvido através da educação matemática como um todo, e não como produto de atividades especialmente programadas para esse fim específico. Sowder (1992), ao comentar as variadas abordagens para o tema, de acordo com tradições epistemológicas tão diversas como a empirista, a racionalista e a sociocultural[12], aponta um consenso entre pesquisadores dessas três tradições presentes em uma conferência[13], em 1989:

> *O que é notável sobre todos esses modelos é que, quando os pesquisadores os aplicam à questão sobre como o sentido de número é adquirido, o ponto de vista genericamente unânime é que o ensino deve ser muito diferente do que é correntemente a norma. Há consenso no fato de que o sentido de*

[12] Para situar essas três tradições, Sowder (1992) recorre a Case (1989), que apresenta: 1) a tradição empirista como aquela que vê o a origem do conhecimento no mundo real, acreditando ser possível, através de um currículo bem planejado, conduzir o aluno para que obtenha um conhecimento desejado; 2) a tradição racionalista como aquela que vê o conhecimento como algo originado na mente, com métodos mais centrados no aluno e preocupação com a adequação do conteúdo do currículo ao desenvolvimento; e 3) a tradição sociocultural como aquela que vê o conhecimento como uma construção social a ser passada de uma geração a outra.

[13] Establishing foundations on numer sense and related topics: reports of a conference (San Diego, California, February 16-17, 1989).

> *número deve permear o currículo desde as séries iniciais, em vez de ser relegado a "atividades especiais" planejadas para "ensinar sentido de número".* (Sowder, 1992, p. 386, tradução livre)

Para localizar o presente trabalho, é fundamental esclarecer que, ao discutir a interrelação entre procedimentos de cálculo e desenvolvimento do sentido de número, não assumimos a posição de que trabalhar desse modo seria um *método* para se desenvolver o sentido de número. Mais adequado seria pensar essa abordagem como perpassada pela ideia de sentido de número. Isso significa pensar em que medida o trabalho com algoritmos alternativos de cálculo pode contribuir para o desenvolvimento do sentido de número, ou seja, qual pode ser um modo de trabalhar o cálculo condizente com uma perspectiva geral de ensino de matemática em que o desenvolvimento do sentido de número pelos alunos é tido como desejável. Nesse ambiente, é sempre bom lembrar, devem estar presentes muitos outros fatores desconsiderados no presente trabalho, como a discussão sobre contextos de uso dos números.

Apesar dessas flagrantes limitações, necessárias para definir um recorte para o trabalho, McIntosh (1992), parece indicar que escolhemos um caminho fecundo ao afirmar que, entre os muitos modos de manifestação de sentido de número no pensar matemática, os métodos de cálculo têm um lugar importante.

> *"Particularmente, [o sentido de número] é um importante tema subjacente quando o aprendiz escolhe, desenvolve e usa métodos de cálculo, incluindo cálculo escrito, cálculo mental, cálculo em calculadora e estimativa. (...) a invenção e aplicação de um algoritmo inventado mobiliza aspectos do sentido de número como a decomposição/recomposição e a compreensão de propriedades dos números. Quando algoritmos escritos aprendidos e calculadora são usados, o sentido de número é importante ao se refletir sobre as respostas."* (McIntosh, 1992, p. 3, tradução livre)

Reys & Yang (1998) conduziram um estudo, que reportam produzir resultados semelhantes em outros países (Behr et al., 1992; McIntosh, Reys, Reys, Bana & Farrell, 1997; Sowder, 1992) em que observaram que alunos cuja formação enfatiza o ensino de algoritmos convencionais de cálculo escrito podem apresentar ótima performance em cálculo, mas não demonstram o mesmo desempenho em tarefas que exijam sentido de número bem desenvolvido. Além do teste, foram realizadas entrevistas para explorar o modo como parte dos estudantes da amostra lidava com algumas das habilidades que caracterizam um bom sentido de número, como a compreensão da ordem de grandeza de um número, o uso de âncoras, o efeito relativo das operações, decomposição e recomposição, e aplicação do conhecimento sobre números e operações a situações de cálculo. A pesquisa conclui que existe uma diferença significativa entre o desempenho nos testes de cálculo escrito por algoritmos convencionais e no teste e entrevista focalizando o grau de desenvolvimento do sentido de número. O interesse dessa pesquisa para o presente estudo está no fato de terem sido propostas várias questões em que havia um paralelo entre os números e operações solicitados no teste de cálculo e no de sentido de número. Por exemplo, enquanto 61% da amostra de estudantes de sexto ano calculavam corretamente a soma de 12/13 + 7/8, apenas 25% da mesma amostra apontavam a melhor estimativa para o resultado sem lançar mão do cálculo escrito. As respostas disponíveis para escolha no teste, nesse caso, eram 1, 2, 19 e 21, e esperava-se que, lançando mão do inteiro como uma âncora, os estudantes afirmassem sem calcular que a estimativa mais próxima seria 2. Outra conclusão interessante do estudo é que, embora nas entrevistas realizadas as performances tenham variado bastante entre os estudantes, a primeira abordagem da grande maioria dos alunos para qualquer questão foi através do cálculo escrito.

3.2.3. Algoritmos não convencionais de cálculo, cálculo exato e aproximado, mental e escrito

O trabalho com o cálculo na escola tem se baseado no ensino dos algoritmos tradicionais como um conjunto de técnicas, e os conhecimentos sobre número (ou conceitos em ato) subjacentes a essas técnicas não são explicitados. Segundo Domite Mendonça (1996), essa opção tem condicionantes estruturais, sociais e históricos, por ela denominados fatores de pressão. O fator de pressão estrutural decorre da estrutura do nosso sistema de numeração, ou seja, do fato de os algoritmos estarem estreitamente relacionados com as ideias de valor posicional e de agrupamentos decimais. O fator de pressão histórico está ligado à valorização, pelo homem, da produção de conhecimento historicamente construída e ao mecanismo de se assimilar e transmitir esse conhecimento, ou seja, ao próprio processo de fazer história. Por fim, o fator de pressão social, que advém das expectativas de professores, especialistas e da comunidade em geral, coloca o domínio das técnicas operatórias no centro das preocupações.

A observação de Domite (1996) sobre a valorização do algoritmo convencional pela sociedade em geral nos parece manter-se com a mesma força, inclusive em relatos de professores sobre a resistência dos pais a reconhecer, como positivos, os trabalhos com procedimentos alternativos de cálculo nas escolas de seus filhos. Podemos considerar, no entanto, que a perspectiva de professores e especialistas vem mudando nas últimas décadas, com o crescente número de pesquisas nacionais e internacionais sobre cálculo mental e sentido de número.

Em nível internacional, temos os grandes projetos já mencionados em Portugal (*Desenvolvendo o sentido de número*, 2005 a 2007) e na Inglaterra (*National Numeracy Strategy*, 1999/2000), assim como as recomendações do National Council of Teachers of Mathematics NTCM (2000). Em nível nacional, como veremos mais adiante, os Parâmetros Curriculares Nacionais e as publicações locais, como os Cadernos de apoio e aprendizagem, da Prefeitura de São Paulo (DOT, SMESP, 2010), recomendam o trabalho com o cálculo mental e o desenvolvimento de estratégias pessoais de cálculo com variações de formulação e ênfase.

Muitos autores (KAMII; DOMINICK (1998), CARRAHER; SCHILIEMANN (1985), DOMITE, 1996, entre outros) consideram que o algoritmo ensinado como um conjunto de procedimentos, sem que os alunos sejam colocados em situações que os levem a construir seus próprios procedimentos, pode desencorajá-los a dar sentido à sua atividade matemática.

Entre os estudos que têm questionado a importância do algoritmo na aprendizagem da Matemática, podemos mencionar Carraher e Schiliemann (1985), que observaram mais acertos entre os alunos que utilizaram procedimentos pessoais de cálculo, em relação àqueles que tentavam se apoiar no algoritmo convencional.

Kamii e Dominick (1998) observaram que os alunos, a quem os algoritmos convencionais não haviam sido ensinados, além de produzirem mais respostas corretas, compreendiam melhor a característica posicional do nosso sistema de numeração. Elas observaram, tanto em seus próprios estudos quanto na análise de pesquisas de outros autores (MADELL, 1985[14]), que os alunos, estimulados a somar, subtrair ou multiplicar por procedimentos próprios, costumam começar pelas centenas, depois as dezenas, e, por fim, as unidades, ou seja, lidam com o número “da esquerda para a direita”, ao contrário do algoritmo convencional[15]. Essas autoras afirmam, então, que os alunos não conseguem relacionar suas ideias sobre os procedimentos de cálculo pessoais com os algoritmos que lhes são ensinados, o que os levam a abandonar caminhos próprios.

> Como afirmamos antes, quando as crianças inventam seus próprios procedimentos, resolvem os problemas da esquerda para a direita. Como não há conciliação possível entre partir da direita e partir da esquerda como requer o algoritmo, as crianças deixam de pensar em suas próprias formas de

[14] MADELL, R. Childrens’ natural processes. **Arithmetic Teacher**, 32, 20-22, 1985.

[15] REYS et al., (1982), como se verá adiante, observaram que essa estratégia, chamada de *front-end*, é também a mais utilizada entre pessoas com alta competência em cálculo estimado.

> resolver os problemas matemáticos para usar os algoritmos (KAMII; DOMINICK, 1998, p.66, tradução nossa).

Em pesquisas com alunos das três séries iniciais na Inglaterra, elas também observam que o uso do algoritmo desfavorece a consideração do valor do número, já que eles passam a lidar com os dígitos: quando um aluno usa o algoritmo para adicionar 89 e 34, diz “nove mais quatro, treze. Colocamos o três embaixo, vai um. Um mais oito, nove, mais três, doze”, ao passo que um aluno que não usa o algoritmo convencional começa a resolver a operação dizendo “cento e oitenta mais cinquenta é duzentos e trinta” (KAMII; DOMINICK, 1998, p. 67). Essa desconsideração também se reflete, segundo as mesmas autoras, na pouca crítica dos alunos em relação à pertinência do resultado. Os alunos das classes em que foi ensinado o algoritmo convencional da adição produziram resultados que não eram razoáveis (como obter 144 ou 783 para 6 + 53 + 185), algo que não aconteceu entre os alunos das classes nas quais não foi ensinado o algoritmo, e que usaram procedimentos pessoais. Além disso, os alunos das classes “com algoritmo” que fizeram tais erros não perceberam que esses resultados não eram possíveis.

Podemos considerar bem documentadas, por avaliações governamentais e pesquisas, as dificuldades encontradas pelos alunos na construção de conceitos relacionados ao sistema numérico decimal e de procedimentos adequados de cálculo. Segundo Verschaffel et al (2007), algumas das manifestações de falta de compreensão conceitual documentadas em pesquisas nos Estados Unidos e em outros países são: a) a inabilidade de identificar os dígitos correspondentes a dezenas, centenas etc em números de vários dígitos; b) a inabilidade de relacionar objetos agrupados ou não agrupados aos diferentes algarismos que compõem um número de vários dígitos; c) a inabilidade de demonstrar ou explicar a troca “dez por um” entre as ordens de um número com representações concretas. Já as manifestações de falta de conhecimento procedimental encontradas referem-se principalmente aos erros frequentes dos alunos ao resolver problemas com lápis e papel, especialmente por usar os procedimentos convencionais de cálculo escrito de maneira incompleta ou incorreta. (VERSCHAFFEL et al, 2007, p. 565)

A ideia de sentido de número também se relaciona à ideia de cálculo estimado. Thompson (1979)[16], citado por Sowder (1992), diferencia a estimativa da aproximação, definindo estimativa como um “palpite educado” (*educated guess*) sobre o número de objetos em uma coleção, o resultado de um cálculo numérico ou a medida de um objeto, e

[16] THOMPSON, A. G. Estimating and approximating. **School Science and Mathematics**, 79 (8),575-580, 1979.

aproximação como a tentativa de se aproximar, ao máximo, de um valor alvo. As respostas possíveis para uma estimativa variam, tornado difícil avaliar a magnitude de um erro de estimativa; em uma aproximação, é possível chegar tão próximo quanto se deseja do resultado, sem, no entanto, atingir o valor exato.

Reys et al. (1982) selecionaram alunos das últimas séries do Ensino Fundamental e do Ensino Médio conforme o sistema educacional norteamericano e adultos não escolarizados, todos com alto desempenho em um teste de cálculo estimado, e realizaram 59 entrevistas sobre as estratégias que usavam ao resolver problemas de estimativa. A partir dessas entrevistas, identificaram três processos fundamentais: reformulação, translação e compensação.

Reformulação, o primeiro deles, foi definido como “o processo de alterar dados numéricos para produzir uma forma mais administrável mentalmente, mantendo intacta a estrutura do problema” (REYS et al., 1982, p. 187, tradução nossa). Exemplos de reformulação são arredondamento, truncamento, substituição por um número mais compatível ou por uma forma equivalente ou quase equivalente de um número.

Um exemplo de substituição de um número por outro mais compatível seria substituir (6x347) ÷ 43 por (6x350) ÷ 42, e um exemplo de substituição de um número por um quase equivalente seria mudar 30% para 1/3. Translação, o segundo processo, foi definida como “alterar a estrutura matemática de um problema para uma forma melhor administrável mentalmente” (REYS et al., 1982, p. 188, tradução nossa). Exemplos: transformar 8.946 + 7.212 + 7.814 em 8.000 x 3; ou (347 x 6) ÷ 43 em 347 x (6÷43), depois em 350 ÷ 7. Compensação, o terceiro processo, é definida como “fazer ajustes para refletir a variação numérica decorrente de translação ou reformulação do problema” (REYS et al., 1982, p. 189, tradução nossa). O tempo disponível para resolução tinha a maior influência na presença ou não desses ajustes, mas também a maleabilidade dos dados numéricos, contexto do problema e tolerância ao erro. Exemplo: para estimar $ 21.319.908 ÷ 26, faz-se 26.000.000 ÷ 26, obtendo $ 1.000.000 e, então, compensando para $ 850.000.

Reys et al. (1982) também observaram que as pessoas com bom cálculo estimado variavam suas estratégias entre os três processos apresentados, com uma característica presente quase o tempo todo: tendiam a trabalhar observando, principalmente, o dígito mais à esquerda no número (estratégia *front-end*). Por fim, esses autores observaram que bons estimadores tinham um bom conhecimento de fatos fundamentais, valor posicional e propriedades aritméticas, tinham também estratégias variadas, que mudavam com facilidade, além de mostrarem autoconfiança e tolerância ao erro.

Sowder (1992), baseada em ampla revisão dos estudos em cálculo estimado até 1991, conclui que "bons estimadores são flexíveis em seu pensamento e usam estratégias variadas. Eles demonstram uma compreensão profunda dos números e operações, e recorrem a elas constantemente" (SOWDER, 1992, p. 375, tradução nossa). A autora acrescenta, ainda, que, enquanto os bons estimadores são tão versáteis, as pessoas com pouca habilidade no cálculo estimado parecem estar presas à estratégia de aplicar algoritmos para chegar à resposta exata. Estimadores com baixo desempenho também "têm apenas uma vaga noção na natureza e no propósito da estimativa; acreditam que ela seja inferior ao cálculo exato (MORGAN, 1988[17]) e a tratam como sinônimo de aposta (THREADGILL-SOWDER, 1984[18])" (SOWDER, 1992, p. 375, tradução nossa).

Heirdsfield (2001) procurou identificar fatores ou combinações de fatores que influenciam a proficiência de alunos de 3º ano, na Austrália, no cálculo mental. As estratégias de cálculo mental encontradas do estudo foram classificadas em *separação* (*separated* - por exemplo, 38+17: 30+10=40, 8+7=15=10+5, 40+10+4=55), *agregação* (*aggregation* - por exemplo, 38+17: 38+10=48, 48+7=55 e *holística* (*holistic* - por exemplo, 38+17 = 40+17-2 = 57-2 = 55) e *imagem mental do algoritmo tradicional escrito* (seguir uma imagem mental do cálculo escrito ensinado na escola). De acordo com o índice de acerto e com as estratégias utilizadas, as habilidades de cálculo mental dos sujeitos foram classificadas em *precisas e flexíveis*, *precisas e inflexíveis*, *imprecisas e flexíveis*, *imprecisas e inflexíveis*.

Os alunos com cálculo preciso e flexível usavam estratégias de cálculo mental variadas, já aqueles com cálculo preciso e inflexível usavam uma estratégia automatizada (no caso, a imagem mental do algoritmo convencional escrito). Os que apresentaram cálculo impreciso e flexível também variaram suas estratégias, embora elas fossem pouco sofisticadas (principalmente do tipo *separação*), ao passo que os alunos com cálculo impreciso e inflexível mostraram pouca sofisticação em matéria de estratégia (HIERDSFIELD, 2001, p.132). O principal fator relacionado à precisão no cálculo mental foi o domínio, pelos alunos, de um repertório rápido e preciso de fatos fundamentais (*number facts*), ou seja, o

---

[17] MORGAN, C. **A study of estimation by secundary school children.** Unpublished Masters' dissertation. Institute of Education, Londres, 1988.
[18] THREADGILL-SOWDER, J. Computational estimation procedures of school children. **Journal of Educational Research**, 77 (6), 332-336, 1984.

“conhecimento rápido e acurado de fatos fundamentais mostrou-se essencial para cálculo preciso na adição e na subtração” (HIERDSFIELD, 2001, p. 133, tradução nossa).

Quanto ao conhecimento dos números, o uso das estratégias de cálculo mental mais eficientes (dos tipos *holístico* e *agregação*) demanda uma boa compreensão do sistema numérico, já as menos sofisticadas (do tipo *separação*) também requerem alguma compreensão, enquanto que o uso da imagem mental do algoritmo escrito exige apenas um conhecimento inicial, canônico, para a compreensão do procedimento.

Ferreira (2009), relatando suas experiências no contexto do projeto português *Desenvolvendo o sentido de número*, observa que o desenvolvimento do sentido de número e das operações está muito atrelado ao domínio crescente de habilidades de cálculo mental, uma vez que os conhecimentos sobre números e relações entre números são fundamentais na elaboração e no uso de estratégias pessoais de cálculo mental. Sendo assim, a estratégia de cálculo usada em uma adição dependerá do número que se deseja adicionar e do sistema de referências que o aluno possui (MCINTOSCH; REYS; REYS, 1992).

Alguns exemplos: diante da adição 3.996 + 4.246, espera-se que alguém, com um sentido de número desenvolvido, observe que o 3.996 é bastante próximo de 4.000. Essa observação levaria à escolha de um procedimento de arredondamento e compensação para a resolução do cálculo: 4.000 + 4.246 resulta em 8.246; 8.246 – 4 resulta em 8.242. Esse procedimento se inscreveria entre os chamados por Hierdsfield (2001) de holísticos.

Nesta pesquisa, a terminologia adotada é a usada por Hierdsfield (2001) para descrever e discutir as estratégias de cálculo mental conforme aparecem em sala de aula.

Quanto ao cálculo escrito, Thompson (1999, apud FERREIRA, 2009) agrupa os algoritmos de cálculo em três categorias: *standard* e formal, não *standard* e formal, não *standard* e informal.

Na primeira categoria, a dos algoritmos *standard* e formais, estão os procedimentos convencionais de cálculo, que se caracterizam pela realização do cálculo com os dígitos e pela representação da operação na vertical, o que favorece esse cálculo pelos dígitos.

Na segunda categoria, a dos algoritmos não *standard* e formais, o cálculo é realizado pela decomposição do número ordem a ordem, e também é organizado verticalmente. Por exemplo, faz-se 253 + 127 decompondo as parcelas em 200 + 50 + 3 e 100 + 20 + 7 e organiza-se o cálculo da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} 253 \\ +\,127 \\ \hline \end{array}$$

300
70
10
480

Por fim, a categoria dos algoritmos não *standard* e informais se caracteriza por decomposições variadas, decididas de acordo com os números com os quais se lida na operação, apoiando-se na estrutura de dobro de metade, em contagens de 5 em 5 ou de 10 em 10, na estrutura multiplicativa dos números, considerando a decomposição decimal, mas também outras estruturas multiplicativas, como 80 = 4 x 20, por exemplo.

Para o presente trabalho, usa-se a denominação genérica algoritmos alternativos para aqueles pertencentes às duas últimas categorias, ou seja, os que não pertencem à categoria *standard*, independentemente de serem formais ou informais. No entanto, os procedimentos do último tipo, em que as decomposições são feitas de acordo com o número com que se trabalha e as etapas do cálculo e sua organização no papel (quando houver) são os que mais interessam, por favorecerem imensamente o desenvolvimento do sentido de número.

3.2.4. O sentido de número e a perspectiva emergente

Em uma conferência[19] cujo foco eram as bases para a pesquisa sobre o sentido de número, e na qual ficou patente a dificuldade existente em definir e avaliar esse sentido, Resnick (1989) relacionou tal dificuldade a modos tradicionais de conceber a natureza do conhecimento, nos quais se baseiam os modos de definir os objetivos educacionais e de avaliar os avanços.

> O que vale [sob o viés das perspectivas tradicionais], tanto um objetivo como um teste aceitável de avanço, é influenciado por duas premissas ocultas que eu chamo de **premissas da decomposição** e premissa da **descontextualização** (*the decomposition and the decontextualization assumptions*) (RESNICK, 1989, p. 35, tradução nossa, grifos da autora).

A premissa da decomposição, segundo a autora, corresponde à ideia de que "uma competência pode ser completamente definida pela coleção de elementos independentes de conhecimentos ou habilidades" (RESNICK, 1989, p. 35, tradução nossa). Segundo essa ideia, uma capacidade seria definida quando todos os seus componentes fossem identificados, o que

[19] **Establishing foundations for research on number sense and related topics**, em San Diego, Califórnia, EUA, 16 e 17 de fevereiro de 1989.

leva à proposta, presente nos testes padronizados, de que a competência aritmética poderia ser testada pela observação da performance nesse conjunto de componentes individuais.

A premissa da descontextualização se refere à noção de que "existe certa forma pura e abstrata de conhecimento que se mantém intacta, independentemente das condições de uso" (RESNICK, 1989, p. 35, tradução nossa). Faz parte dessa noção, a ideia de que o conhecimento pode ser totalmente definido como algo independente da situação em que o indivíduo atua, e essa ação seria a "aplicação" do conhecimento.

> Desse ponto de vista, se alguém **sabe** um fato fundamental (*number fact*), esse conhecimento toma sempre a mesma forma. Não há espaço para a ideia de que alguém pode saber que quatro moedas de 25 centavos (*quarters*) correspondem a um dólar, mas não saber que 4 x 25 é 100 ou que 4 x 0,25 = 1,00 – a não ser que a criança falhe ao "aplicar" seu conhecimento sobre quartos às diferentes formas simbólicas (RESNICK, 1989, p. 35, tradução nossa, grifo e aspas da autora).

Essa noção leva à desconsideração das situações em que os conhecimentos são usados, assim como dos "modos como podem ser combinados para produzir novas construções pessoais e interessantes em situações específicas" (RESNICK, 1989, p. 35, tradução nossa).

Quando se mantêm essas premissas como condicionantes, aponta a autora, torna-se, de fato, quase impossível definir sentido de número, já que tal sentido "**não** é uma coleção de coisas que alguém sabe sobre números ou de habilidades que alguém pode exercitar sobre número" (RESNICK, 1989, p. 36, tradução nossa, grifo da autora), e sim "um conjunto de coisas não totalmente previsíveis que alguém tende a fazer com números, sob determinadas circunstâncias, baseado em um corpo de conceitos inter-relacionados de números e no conhecimento de números específicos" (RESNICK, 1989, p. 36, tradução nossa). Ou seja,

> O sentido de número corresponde a um modo de raciocinar e pensar no domínio dos números. Como outras formas de pensamento e raciocínio[20], ele é não determinístico, aberto; dependente de uma interação complexa entre conhecimento individual, habilidade, detalhes dos problemas a serem resolvidos, e expectativas de performance social inerentes à situação (RESNICK, 1989, p. 37, tradução nossa).

A perspectiva emergente, ao considerar o conhecimento como necessariamente situado, percebendo a ação individual como condicionada pelo meio social, mostra-se um

[20] Resnick (1989) refere-se, aqui, ao pensamento de alta complexidade (*higher order thinking*), cuja caracterização desenvolve em RESNICK, L. B. (1987). **Education and Learning to Think**, Washington, DC, National Academy Press.

caminho de análise especialmente adequado para se tratar do sentido de número dentro ou fora da escola.

Sowder (1992), ao discutir o ensino do cálculo estimado, faz interessantes perguntas relacionadas a essa questão:

> É possível ensinar as estratégias específicas, usadas pelas pessoas com um bom cálculo estimado, às pessoas que tenham um cálculo estimado pobre? Ou a flexibilidade de pensamento e a criação de estratégias é que deveriam ser o foco de ensino? A pesquisa sobre os esforços de expertos e novatos em outras áreas da matemática e da ciência mostrou que os expertos organizam o conteúdo em pauta de modo muito diferente de como os novatos o fazem; e novatos se tornam expertos não simplesmente por aprenderem mais fatos e procedimentos, mas por um longo processo de reorganização mental de sua estrutura cognitiva sobre o conteúdo em pauta (SOWDER, 1992, p. 375, tradução nossa).

Mais uma vez, a escolha da perspectiva emergente como pano de fundo teórico mostra-se adequada, já que ela vê a possibilidade de conhecimento como uma construção permanente: "Uma abordagem desse tipo é fundamentalmente não dualista (*nonduelist*), em que aprender envolve a reorganização do mundo no qual se age tanto quanto os modos de agir no mundo" (COBB, 2000, p. 66, tradução nossa).

4. CONTEXTO METODOLÓGICO

As perguntas a que se atém este trabalho só permitem uma abordagem de caráter qualitativo, já que exigem, para a busca de uma resposta – ou, quem sabe, de uma reformulação –, a colheita e a análise de observações de alunos em plena atividade matemática.

Diante da grande diversidade de abordagens dentro da pesquisa dita qualitativa, acreditou-se ser mais proveitoso descrever as opções metodológicas específicas da presente pesquisa, em vez de considerações sobre a pesquisa qualitativa em geral. Pois, como afirma Alvez-Mazzotti (1999),

> não tem sentido falar em "paradigma qualitativo", pois (...) diferentes paradigmas podem e têm utilizado metodologias qualitativas. Isto não quer dizer, porém, que não se possam, no interior desses paradigmas, distinguir pesquisas cuja ênfase recai sobre a compreensão das intenções e do significado dos atos humanos, de outras que não têm essa preocupação. Às primeiras se convencionou chamar pesquisa qualitativa (p. 146).

Como parte desse universo de pesquisas "cuja ênfase recai sobre a compreensão das intenções e do significado dos atos humanos", a metodologia desta pesquisa precisaria levar em conta outros condicionantes poderosos: o duplo papel de professora e pesquisadora por mim assumido e a análise das práticas dos alunos e da professora/pesquisadora dentro do contexto de sala de aula.

4.1. **O modelo interpretativo adotado**

Como referencial para pensar a interação dentro da sala de aula, pretendemos adotar o modelo interpretativo proposto por Cobb et al., (2008). Com esse modelo, os autores propõem a coordenação, durante a análise da atividade em sala de aula, de dois pontos de vista teóricos: um ligado à perspectiva social e o outro à perspectiva individual ou psicológica.

A perspectiva social "foca os modos de agir, pensar e argumentar que são típicos de uma determinada comunidade em sala de aula" (COBB et al., 2001, p. 118, tradução nossa). Assim, ao analisar o pensamento individual de um aluno a partir dessa perspectiva, esse pensamento será considerado como um ato de participação nessas atividades comuns. Já a perspectiva individual focará os modos particulares com que determinado aluno participa das atividades comunitárias em sala de aula. A coordenação dessas duas perspectivas, em uma relação reflexiva, é um ponto central da metodologia em questão.

> Enquanto a perspectiva social foca modos presumidamente compartilhados de falar e pensar, a perspectiva psicológica foca a diversidade nos modos de participação dos estudantes nessas atividades presumidamente compartilhadas (COBB et al., 2001, p.119, tradução nossa).

Os autores ressaltam que as duas perspectivas não são apenas interdependes – na verdade, uma não existe sem a outra, e o que se coordena não são dois elementos distintos, mas dois modos diferentes de olhar e de atribuir significado ao que acontece na classe:

> Da perspectiva social, vemos o pensamento de um aluno inserido em uma microcultura de classe em evolução, e de uma perspectiva psicológica, lidamos com essa microcultura como um fenômeno emergente que é continuamente renovado por professores e alunos no decorrer de suas interações. Como consequência, a coordenação não ocorre entre alunos como indivíduos e a comunidade de sala de aula vistas como entidades separadas, de contornos definidos. Em vez disso, a coordenação acontece entre dois modos distintos de olhar e de atribuir significado (*making sense*) ao que está acontecendo em sala de aula. A abordagem analítica, daí resultante, focaliza a diversidade no pensamento dos alunos ao mesmo tempo em que situa essa diversidade no contexto de sua participação em atividades de sala de aula sob determinados padrões de comportamento (*normative classroon activities*) (COBB et al., 2001, p. 122, tradução nossa).

A filiação teórica dessa perspectiva inclui muitos autores: Cole (1996), Lave (1988) e Rogoff (1997), da teoria sociocultural; Blumer (1969), da etnometodologia e interacionismo simbólico; Bauersfeld, Krummheuer e Voigt (1988), trazendo essas perspectivas especificamente para a educação matemática; Piaget (1970); Steffe e Kieren (1994); Thompson (1991), do construtivismo. Entretanto, esses autores ressaltam que seu objetivo não é produzir uma síntese teórica dessas ideias, pelo contrário: de acordo com seus objetivos pragmáticos de dar suporte e organizar a aprendizagem dos alunos em matemática, os autores adaptaram algumas premissas dessas teorias. Duas dessas adaptações serão aqui mencionadas.

A primeira adaptação trata da ideia de prática cultural que, na teoria sociocultural, costuma se referir a comportamentos que tenham emergido ao longo de extensos períodos da história e que são interessantes para a pesquisa com a Matemática em sala de aula, porque é possível ver a matemática como uma atividade humana complexa, que produziu significado historicamente. No entanto, na teoria sociocultural, as práticas desenvolvidas ao longo da história seriam consideradas como algo que existe *a priori* e independentemente da atividade de professores e alunos.

Na perspectiva apresentada por Cobb et al., (2001), centrada na comunidade de sala de aula local, mais do que na Matemática como disciplina, as práticas normativas de uma comunidade de sala de aula são vistas como "um fenômeno emergente, mais do que um modo preestabelecido de pensar e comunicar, no qual as crianças deveriam ser incluídas" (COBB et al., 2001, p.121, tradução nossa). Assim, os alunos são, ao mesmo tempo, produtores dessa prática e formados por ela.

A segunda adaptação trata da perspectiva psicológica adotada, na qual "as ferramentas e os símbolos que os alunos usam não são considerados independentemente ou fora do indivíduo, mas, ao contrário, são vistas como constituindo parte de sua atividade (cf. DEWEY, 1981)" (COBB et al., 2001, p.121, tradução nossa). Em vez de tratar de processamento de informações ou de criação de representações internas, essa abordagem vê a inteligência como algo que "toma corpo ou se localiza" na atividade.

> O objetivo das análises a partir da perspectiva psicológica não é especificar mecanismos cognitivos internos aos alunos. Em vez disso, é inferir a qualidade do pensamento individual do aluno no, com e sobre o mundo, e explicar o desenvolvimento de seu raciocínio em termos da reorganização da atividade e do mundo no qual ele age (COBB et al., 2001, p.121, tradução nossa).

Embora o objetivo da análise não seja especificar os mecanismos cognitivos internos dos alunos, sua filiação construtivista considera o papel preponderante desses mecanismos como organizadores das ações dos alunos. No entanto, o foco da análise está estreitamente ligado às suas ações em relação a desafios matemáticos específicos.

Dentro de cada uma dessas perspectivas (social ou psicológica), são focados três aspectos, coordenados com os da outra perspectiva, como mostra a figura 2. Assim, cada aspecto da microcultura de sala de aula (perspectiva social) se coordena com um aspecto psicológico de alunos e professores (perspectiva psicológica).

O primeiro aspecto da microcultura de classe, apresentado na coluna correspondente à perspectiva social (figura 2), corresponde às **normas sociais de sala de aula**, que são "características da comunidade da classe e documentam regularidades na atividade em sala de aula que são estabelecidas conjuntamente por professores e alunos" (COBB et al., 2001, P.122, tradução nossa). São exemplos de normas sociais: explicar e justificar soluções, tentar compreender explicações dadas por outros e indicar concordância ou discordância. Como correlato psicológico (perspectiva individual) das normas sociais de sala de aula, são referidas as **crenças sobre o próprio papel, o papel do outro, e a natureza geral da atividade matemática na escola**. O professor, ao guiar o estabelecimento de normas sociais específicas de sala de aula, está, ao mesmo tempo, favorecendo a reorganização, pelos alunos, de suas crenças sobre as questões acima referidas.

Perspectiva social	**Perspectiva individual**
Normas sociais de sala de aula	Crenças sobre o próprio papel, o papel do outro, e a natureza geral da atividade matemática na escola
Normas sociomatemáticas	Crenças e valores matemáticos
Práticas matemáticas em sala de aula	Interpretações e raciocínio matemáticos

Figura 2: Estrutura interpretativa para analisar atividade e aprendizagem em sala de aula (COBB et al. 2001, p.119, tradução nossa).

O segundo aspecto do modelo interpretativo corresponde, sob o prisma da perspectiva social, às **normas sociomatemáticas**, que seriam as normas sociais que se referem especificamente ao fazer matemática em sala de aula. São exemplos de normas sociomatemáticas: o que vale como solução matemática diferente, sofisticada ou eficiente, e o que é uma explicação matemática aceitável. Seu correlato psicológico, **crenças e valores matemáticos**, é expresso pela capacidade de julgar se uma solução vale como diferente daquelas já apresentadas, se é sofisticada ou é eficiente, e se uma explicação é aceitável. Ou seja, os alunos desenvolvem suas crenças e seus valores matemáticos ao participar da negociação das normas sociomatemáticas da sala de aula.

O terceiro aspecto da microcultura de classe apresentado no modelo trata das **práticas matemáticas em sala de aula** de uma perspectiva social e das **interpretações e dos raciocínios matemáticos do ponto de vista individual**. De modo semelhante ao que acontece entre as instâncias social e individual, dos aspectos já mencionados,

> o que é visto de uma perspectiva como um ato de aprendizagem individual em que um aluno reorganiza seu pensamento matemático, é visto, da outra perspectiva, como um ato de participação na evolução das práticas matemáticas comuns (COBB et al., 2001, p.125, tradução nossa).

É importante notar que cada aspecto de que o modelo trata é mais específico do que o anterior: as normas sociais lidam com os aspectos da participação em classe que não estão necessariamente ligadas à matemática, mas podem se referir, também, a explicações e justificativas de afirmações em outras disciplinas. As normas sociomatemáticas são específicas da atividade matemática, pois tratam do estabelecimento do que é válido ou não em relação ao fazer matemática na sala de aula. Por fim, as práticas matemáticas estão vinculadas a ideias matemáticas específicas.

Quanto ao planejamento das atividades, esta pesquisa pretende trabalhar com o que Lincoln e Guba (1985) denominam *design* emergente. Em uma pesquisa com essa característica, o planejamento inicial é passível de modificações, de acordo com necessidades identificadas ao longo da própria pesquisa. Isso significa que ela parte de uma pergunta diretriz e de um planejamento, até certo ponto flexível, e segue aberta a possíveis modificações ao longo do seu curso. Nesse contexto, até mesmo a pergunta diretriz pode sofrer modificações, e esse processo também é parte importante da pesquisa.

Mesmo considerando a impossibilidade de um planejamento rígido, nossa pesquisa conta com certo grau de estruturação, advinda de referenciais fornecidos por pesquisas em psicologia da educação matemática (SPINILLO, 2000; MCINTOSH, 1992; VERGNAUD, 1996), por pesquisas sobre atividade matemática em sala de aula (COBB et al., 2001; STEEFE; THOMPSON, 2000), e nossas experiências anteriores em ensino de matemática nas séries iniciais.

4.2. **Área temática**

Esta pesquisa pretende fazer parte dos estudos relacionados à Educação Matemática e à Psicologia da Educação Matemática, vista como uma área de intersecção entre a Matemática, a Educação e a Psicologia (SPINILLO; LAUTERT, 2006), que tem como foco o estudo dos aspectos psicológicos do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Do ponto de vista da psicologia da educação matemática, este trabalho se apoia especificamente nas pesquisas relacionadas à aprendizagem dos conceitos ligados à estruturação do sistema numérico decimal (FUSON, 1992; VERSCHAFFEL et al, 2007) e ao desenvolvimento do sentido de número (MCINTOSCH; REYS; REYS, 1992; SPINILLO, 2000). Pretende focar procedimentos não convencionais de cálculo, discutindo em que medida seu uso pode favorecer o desenvolvimento, pelos alunos, de seu sentido de número.

Do ponto de vista da Educação Matemática, ao considerar a atividade matemática em sala de aula, a pesquisa pretende analisar a microcultura desse ambiente considerando a ação individual como um modo de participação no contexto social da sala de aula, ao mesmo tempo em que o constitui (COBB et al., 2001). Nesse sentido, acompanha um movimento crescente desde os anos 90, no qual os estudos centrados no indivíduo têm dado lugar a pesquisas extensivas baseadas em sala de aula (VERSCHAFFEL et al, 2007). A principal mudança teórica que se observa nas pesquisas que fazem parte desse movimento está na substituição de uma

> análise cognitivo-racionalista do pensamento e aprendizagem individual das crianças (...) por uma análise em que o contexto social e cultural complexo é considerado como verdadeiramente constitutivo do quê e como as crianças pensam e aprendem em matematica". (VERSCHAFFEL et al, 2007, p. 593, tradução nossa).

Sfard (2003[21], apud VERSCHAFFEL et al, 2007), ao comparar as duas vertentes, classifica as do segundo tipo como as que adotam uma perspectiva "participacionista", em oposição às pesquisas do primeiro tipo, que adotam uma perspectiva "aquisionista":

> O grupo "aquisicionista" consiste nas abordagens cognitivistas (tradicionais) que explicam aprendizagem e conhecimento em termos de entidades mentais (...), enquanto o modelo "participacionista" inclui as relativamente novas teorias que preferem uma visão da aprendizagem como uma reorganização da atividade que acompanha a integração do indivíduo que aprende em uma comunidade de prática. Assim, o último modelo foca o processo pelo qual o sujeito que aprende se torna um participante habilidoso (skillful) em um dado discurso (matemático). (VERSCHAFFEL et al, 2007, p. 558, tradução nossa).

O mesmo autor (SFARD, 2003, apud VERSCHAFFEL et al, 2007) acrescenta que as duas perspectivas não podem ser totalmente separadas, e se fazem presentes em quase todas as pesquisas desenvolvidas atualmente, variando o grau de intensidade com que cada uma se apresenta.

[21] SFARD, A. Balancing the unbalanceable: the NCTM Standards in light of theories of mathematics. In KILPATRICK, J; MARTIN, W.; SCHIFTER, D. (Eds). **A research companion to Principles and Standards for School Mathematics (pp 289-303) Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003.**

No caso da presente pesquisa, essa convivência das duas perspectivas é explícita, uma vez que a perspectiva emergente, aqui assumida, se pauta ao mesmo tempo em uma perspectiva situada do conhecimento e na visão do indivíduo como sujeito ativo na construção do seu conhecimento (COBB et al, 2001). Também é importante esclarecer que, entre as pesquisas desenvolvidas de uma perspectiva situada, há aquelas fortemente relacionadas ao contexto sócio cultural mais amplo, e outras que consideram a sala de aula como o contexto a ser considerado nas analises da aprendizagem dos alunos. A presente pesquisa se inscreve entre as últimas.

4.3. **Justificativa e problema**

As pesquisas sobre desenvolvimento do sentido de número na escola têm tomado corpo no âmbito internacional.

Em Portugal e Inglaterra, o sentido de número foi tema de recentes projetos curriculares nacionais, respectivamente *Desenvolvendo o sentido de número* (2005 a 2007) e *National Numeracy Strategy* (1999/2000). Nos Estados Unidos, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), em seus parâmetros para a matemática escolar (*The Principles and Standards for School Mathematics),* coloca o desenvolvimento do sentido de número como ponto central para o eixo de números e operações (NCTM, 2000). Ainda assim, as publicações que abordam o tema (SPINILLO, 2006; BARBOSA, 2007; BATISTA, 2009; RIBEIRO, 2006) são relativamente raras no Brasil.

Um dos pontos fundamentais do desenvolvimento do sentido de número é o cálculo mental flexível (MCINTOSCH; REYS; REYS, 1992, SPINILLO, 2006) e muitos trabalhos têm sido publicados sobre o cálculo mental na escola (por exemplo, FONTES, 2010; SILVA, 2000; GUIMARÃES, 2009; GONÇALVES, 2008; EDCKHARDT, 2005). Além disso, a necessidade de abordar esse conteúdo nas aulas de matemática, além de ser expressa nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), é mencionada, já em 1929, nos *Programas para os Jardins de Infância e Escolas Primárias do Distrito Federal* (Rio de Janeiro), como documenta Backheuser (1933).

No entanto, algumas questões levantadas pelo projeto *Desenvolvendo o sentido de número*, em Portugal, são pertinentes também ao contexto brasileiro: são raras as propostas que discutam como o trabalho com o cálculo mental deve ser desenvolvido, não são mencionadas explicitamente técnicas de cálculo e não são especificadas as expectativas de cada série em relação ao cálculo mental (BROCARDO; SERRAZINA, 2008).

Uma observação informal mostra que poucos professores têm um repertório organizado de cálculo mental que possa ser adequado para compreender e intervir nas tentativas dos alunos. Mais do que isso, poucos professores observam que o cálculo mental se dá por procedimentos essencialmente diferentes do cálculo escrito convencional (BROCARDO; SERRAZINA, 2008), e que é preciso explicitar esses procedimentos em classe, sejam eles criados exclusivamente pelos alunos, sejam eles parcialmente propostos pelos professores.

O impacto causado pelo contato com estudos relacionados à ideia de sentido de número em nossa prática profissional nos manteve voltadas, em nossa experiência profissional dos últimos 10 anos, para a o trabalho com estratégias de cálculo não convencionais, conhecimentos sobre número nelas implicados e estratégias de ensino a elas relacionadas.

Sendo assim, o presente trabalho se justifica em pelo menos duas direções. A primeira refere-se à construção de conhecimento relacionado às bases teóricas da prática, analisando conhecimentos e ideias matemáticas postas em jogo no trabalho com cálculo mental, tendo em vista o desenvolvimento do sentido de número pelos alunos (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; SPINILLO, 2000) em consonância com tendências internacionais, contribuindo, assim, com o detalhamento e aprofundamento de um trabalho que vem sendo desenvolvido no Brasil.

A segunda, relacionada diretamente ao trabalho em sala de aula, e se propondo a analisar como os alunos compartilham – ou não – esses conteúdos (COBB et al., 2001), coordenando os pontos de vista social e psicológico, vem contribuir com as pesquisas nesse campo, de uma perspectiva ainda pouco explorada no Brasil.

Nossa questão inicial de pesquisa, então, pode ser assim delineada: compreender em que medida o uso, pelo aluno, de certos procedimentos alternativos de cálculo favorece o desenvolvimento do sentido de número; identificar os conhecimentos sobre números e operações expressos pelos alunos ao comunicarem seus procedimentos de cálculo; e analisar as ações individuais dos alunos ao trabalharem com tais procedimentos como correlatos de aspectos sociais da atividade matemática em sala de aula.

4.4. **Objetivos**

Com esta pesquisa, pretendemos compreender, ainda que parcialmente, algumas questões ligadas aos procedimentos de cálculo e ao desenvolvimento do sentido de número.

- Procurar caminhos que possam nos levar a compreender em que medida o uso, pelo aluno, de certos procedimentos de cálculo favorece o desenvolvimento do próprio sentido de número.
- Analisar em que medida o aluno, ao comunicar seus procedimentos para o grupo, ou seja, ao falar sobre o modo como resolveu determinada questão, expressa conhecimentos sobre números e operações.
- Analisar as ações individuais como correlatas de aspectos sociais da microcultura da sala de aula, ao mesmo tempo em que a microcultura de sala de aula é vista como um fenômeno emergente continuamente gerado pelas ações individuais (COBB et al., 2001).

4.5. **Procedimentos**

Uma decisão importante sobre a ação pedagógica desenvolvida nesta pesquisa esteve condicionada a uma contingência, que não coincidiu com o planejamento inicial: o encontro de uma professora que estivesse de fato disposta a abrir sua sala de aula para a proposta deste trabalho, dialogando com a pesquisadora. A proposta inicial foi pensada para ser desenvolvida em um grupo de segundo ou terceiro ano, séries em que comumente se dedica uma porção importante do tempo em sala de aula à estruturação do cálculo na adição e na subtração. No entanto, após uma tentativa frustrada nesse segmento, fomos apresentadas à professora Márcia, que se mostrou entusiasmada com a proposta, mas estava trabalhando com um grupo de 5º ano do Ensino Fundamental de 9 anos.

4.5.1. Um longo caminho: ajustando rumos

Nossa primeira preocupação, ao planejar o trabalho de campo, foi encontrar uma professora que pudesse se sentir à vontade com a presença da pesquisadora em classe e, mais do que isso, que visse na pesquisa um trabalho do seu interesse, tendo seus próprios objetivos em relação a esse estudo. Trabalhando como Coordenadora Pedagógica, já havia experimentado parcerias intensas e frutíferas, que me levavam a formular novas questões sobre o trabalho, ao mesmo tempo em que transformavam também a prática de ensino da professora. Parece possível dizer que, nessas situações, o que fazia a diferença era mesmo o desejo de ambas compartilharem dúvidas, descobertas e desilusões.

Entretanto, havia outro aspecto, relacionado à natureza do ensino, que ainda preocupava: a busca pela professora parceira, pois a complexidade da tarefa do professor é de tal magnitude que torna impossível discutir todos os aspectos que serão postos em jogo. Assim, não se pode ver um professor como alguém que vai “apenas” – não que isso seja pouco – executar um plano de trabalho: esse professor precisa ser alguém com quem se possa estreitar o diálogo, ajustar, a cada nova conversa, os significados atribuídos, de parte a parte, a uma ideia, uma situação, um diálogo.

A busca dessa professora tornou-se, assim, o ponto mais importante dos primeiros passos desta pesquisa. As únicas condições para iniciar essa busca eram: o trabalho deveria se desenvolver em uma *escola pública,* em torno do *uso de estratégias de cálculo alternativas* e *dos conhecimentos sobre número* postos em jogo, os quais poderiam ser indício do desenvolvimento do sentido de número pelos alunos.

A depender da série em que fosse realizada a pesquisa, os conteúdos em pauta mudariam radicalmente. Embora eu tivesse minhas preferências a respeito disso, esse não seria um ponto de restrição na busca de uma parceria, já que minha vivência prévia incluía a Educação Infantil e as cinco séries iniciais do Ensino Fundamental de 9 anos. O processo de procura e o encontro dessa escola, dessa classe e dessa professora, no entanto, não foram livres de obstáculos.

Como ponto de partida, a busca era por uma professora de 2º ano, pois se queria focar o trabalho naquele momento de construção de conhecimento, em que os alunos devem se distanciar da *contagem* como estratégia prioritária de resolução de operações, passando a usar estratégias de cálculo cada vez mais eficazes (CASTRO; RODRIGUES, 2008).

No segundo semestre de 2010, foi feito o contato com a coordenadora de uma Escola Municipal de Ensino Fundamental de São Paulo, que indicou uma professora de 2º ano interessada em participar da pesquisa. Fizemos duas reuniões iniciais, nas quais foram expostos os objetivos e os principais pressupostos teóricos da pesquisa, e estabelecido um calendário para as atividades. O calendário, no entanto, precisou ser alterado algumas vezes a pedido da professora, por razões pessoais e também em virtude da organização da escola, até que, passado um mês, ficou claro que não haveria condições de estabelecer esse calendário para o semestre em andamento.

Configurou-se, para esta pesquisadora, nesse momento, o problema discutido por Fiorentini (2004) em relação às pesquisas colaborativas e cooperativas. Embora as dificuldades de cronograma e de calendário tivessem sido concretamente acordadas com aquela professora, não deixávamos de interpretá-las, de certa forma, como decorrentes da estrutura do trabalho: não se tratava de uma pesquisa cuja necessidade estivesse partindo da escola, muito menos da professora e, portanto, não era, de fato, uma pesquisa colaborativa (FIORENTINI, 2004). Talvez pudesse, então, ser pensada como uma pesquisa cooperativa, no entanto, por se tratar de uma pesquisa de doutorado isolada, que partiu da Universidade para a Escola, seus condicionantes eram demasiado fracos.

Esse foi um momento crítico do trabalho, em que foi preciso rearranjar expectativas e buscar, no quadro teórico que sustenta a presente pesquisa, a coerência necessária para seguir procurando uma parceria para o trabalho de campo. Considerou-se, em primeiro lugar que, embora a pretensão fosse a de analisar a atividade matemática dos alunos, tanto do ponto de vista individual como do ponto de vista social, e, por isso, o professor cumpriria um papel fundamental no desenrolar do trabalho, o foco principal de análise seria a ação dos alunos, e não a do professor.

Além disso, a atuação do professor no tipo de atividade que essa pesquisa pretende desenvolver demanda uma formação específica, de longo prazo, que não era possível prever se o professor que aceitasse participar teria. Tampouco seria possível engajá-lo "espontaneamente" em um estudo intensivo, que se relacionasse com uma pesquisa cuja necessidade não partiu de suas vivências, de seus planos ou de seus questionamentos.

Diante dessas reflexões, e juntamente com a observação de que, nas pesquisas em que se origina o modelo interpretativo, aqui adotado, o professor é necessariamente um membro do grupo de pesquisa, decidi assumir que esta pesquisadora deveria desempenhar o papel de professora nas sessões em classe. Mesmo assim, a busca de uma professora interessada nas questões que a pesquisa investigaria, e que estivesse disposta a acompanhar as atividades, discutindo-as com a pesquisadora e contribuindo com suas observações sobre os alunos, manteve-se como uma preocupação central na escolha da classe que seria sujeito do trabalho de pesquisa.

Em janeiro de 2011, uma professora da rede municipal de Educação Infantil, com quem trabalhei em outros contextos, apresentou-me a diretora da EMEF onde esta pesquisa se realizou. A conversa com essa diretora foi decisiva, pois, após ouvir um pouco sobre a ideia da pesquisa, ela disse que iria conversar com uma das professoras, que se interessava especialmente em observar diferentes estratégias dos alunos na resolução de problemas matemáticos e, por isso, poderia se interessar pela pesquisa. Essa professora pegaria uma classe de 4ª série (5º ano) em 2011.

Abriu-se, então, uma nova questão para definir os rumos da pesquisa: se o trabalho seria desenvolvido em um 5º ano, série em que o investimento no campo multiplicativo é muito mais intenso do que no aditivo, seria preciso mudar o foco do campo aditivo para o campo multiplicativo? Por um lado, parecia inadequado manter o foco no campo aditivo, já que o maior investimento dos professores nessa série costuma ser em conteúdos relacionados ao campo multiplicativo. Por outro lado, seria importante conhecer a professora e o grupo antes que qualquer decisão fosse tomada. A escolha pelo campo aditivo se deu após a consideração de algumas questões, apresentadas a seguir.

Em primeiro lugar, foi considerado o fato de que são raros os trabalhos relacionados ao cálculo mental na adição e na subtração nessa série. Isso se mostra coerente com o fato de que o foco principal do currículo no segundo ciclo do Ensino Fundamental, ser o campo multiplicativo. No entanto, a hipótese era a deque, nessas séries, um trabalho no campo aditivo, tratando de cálculo mental exato ou aproximado com números a partir de três dígitos também favorece a estruturação da ideia dos alunos sobre o sistema numérico de base dez. Pensar sobre números maiores obriga a formulações sobre o sistema numérico que não são necessárias ao lidar com números até 100, ou mesmo até 1000, e a maior parte das propostas no primeiro ciclo lida com números de até três algarismos.

Em segundo lugar, uma aproximação inicial das possibilidades de cálculo das crianças, que serão sujeitos do trabalho, mostrou que o grupo não tinha familiaridade com estratégias de cálculo mental na adição e na subtração, tanto exato quanto aproximado. Os alunos tendiam a trabalhar com os dígitos dos números de forma isolada, desvinculados de seu valor, procurando reproduzir mentalmente – muitas vezes sem sucesso – o algoritmo escrito tradicional. De um grupo de 30 crianças, por exemplo, apenas duas se referiram a uma estratégia que considerava o valor dos números envolvidos em uma adição ou subtração.

Observou-se, ainda, que pouquíssimos alunos sabiam contar em intervalos ascendentes ou descendentes de 100 a partir do zero, e de dez a partir de um número qualquer, algo fundamental para uma boa noção de número e parte da base necessária para se constituir um repertório rico de cálculo mental na adição e na subtração.

Tendo em vista esse cenário, foram pensadas atividades, inicialmente baseadas em jogos, durante as quais se pretendia que os alunos

- Utilizassem estratégias alternativas de cálculo na adição e na subtração, que lhes permitissem ter em vista o valor total do número, trabalhar com números aproximados e avaliar a pertinência de um resultado encontrado.
- Justificassem as estratégias usadas e, ao fazê-lo, explicitassem ideias sobre o sistema numérico, especialmente aquelas relacionadas ao valor posicional e à inclusão de classes.

Já com o trabalho em andamento, a presença da pesquisadora na escola e sua interação com a professora obrigaram, mais uma vez, a um ajuste nos rumos da pesquisa. Desde os primeiros contatos, a professora Márcia manifestou, algumas vezes, o interesse de que a pesquisadora incluísse, de alguma forma, o trabalho com os *Cadernos de apoio e aprendizagem* (material lançado pela Secretaria da Educação do Município de São Paulo em 2011), nas propostas com a classe.

Suas justificativas eram, por um lado, a dificuldade que ela e suas colegas de trabalho sentiam ao trabalhar com as propostas desse caderno, e, por outro, sua percepção de que havia, em suas propostas, certa afinidade com o modo de abordar números e operações que perpassava as propostas da pesquisa. Inicialmente resisti, já que tinha toda uma análise do contexto do jogo e das propostas que pretendia desenvolver como situações que fariam sentido para o grupo e que colocariam em pauta as relações entre números e operações, os quais seriam objeto da pesquisa. Mas, à medida que acontecia a aproximação com a professora e das expectativas da escola, foi possível vislumbrar o desenvolvimento de uma pesquisa que, se não fosse colaborativa (já que a pesquisadora desempenharia o papel de professora), pelo menos iria ao encontro de uma demanda legítima da escola.

Portanto, ficou decidido que os problemas apresentados no primeiro capítulo do *Caderno de apoio e aprendizagem* (2010) seriam trabalhados no contexto da pesquisa, verificando a possibilidade de que os objetivos iniciais dessa pesquisa pudessem também ser mantidos.

4.5.2. A professora da classe

Embora não tenha sido a professora da classe a conduzir o trabalho com os alunos durante as atividades da pesquisa, sua presença mostrou-se fundamental. Sua atuação começou antes das propostas que mais adiante relatamos, pois explicou aos alunos qual o propósito do trabalho e, já nas primeiras aproximações, o grupo se mostrou extremamente receptivo e impressionantemente disciplinado. Era possível perceber, em vários momentos, como ela trocava olhares com algumas crianças, ora incentivando-os a se arriscar apresentando sua solução, ora exigindo um pouco mais de paciência para acompanhar uma discussão que se alongasse um pouco mais.

Márcia[22] é professora há 20 anos, e sempre morou e trabalhou no bairro onde fica a escola. Formou-se, inicialmente, no magistério de quatro anos. Quando estava no terceiro ano do magistério, seu professor de estatística e matemática (matérias em que ela se saía muito bem), que era diretor em uma escola estadual do bairro, disse a ela que se inscrevesse para ser estagiária nessa escola. Ela ficou, então, dois anos trabalhando como estagiária: era auxiliar, fazendo atividades, acompanhando alunos, e substituía dando aulas, quando necessário.

[22] Nome fictício.

Ao se formar no magistério, assim que acabasse seu contrato de estagiária, Márcia se tornaria professora eventual: iria até a escola todos os dias, mas ficaria – e seria remunerada – apenas nos dias em que seu trabalho fosse necessário. Mas aconteceu algo que ela gosta muito de contar: no seu primeiro dia como eventual, saiu a aposentadoria de uma professora de quem tinha sido aluna na 3ª série (e que, desde aquela época, era sua professora mais querida), e Márcia foi contratada para assumir a sala dessa professora. Conta que, nessa primeira escola onde trabalhou, só podia dar o que estivesse no livro, e as aulas vinham bem prontas para que as professoras as aplicassem. A escola não tinha coordenador pedagógico e não se discutiam as propostas: cada professor pegava o material e ia para a sua sala de aula. Em 1995, Márcia fez o concurso para a Prefeitura, no início da gestão do Prefeito Celso Pitta. Ela conta que entrou como professora adjunta, que também era um professor substituto, porém efetivo.

> A Prefeitura mudou totalmente a minha vida, porque, você sabe, eles estavam vindo da gestão de Erundina, que tinha mudado tudo. Era tudo novo: construtivismo para lá, e eu perdida com aquilo. O Pitta queria tirar tudo, queria deixar a marca dele, e os professores estavam muito resistentes, porque tinham gostado muito, o Paulo Freire tinha sido Secretário da Educação. Aí começou aquele conflito, e eu peguei justamente aquela época do conflito. As pessoas começaram a criticar o construtivismo, a dizer que não era legal, e eu caí de pára-quedas nesse conflito, com todo o meu tradicionalismo lá do Estado, Pitta entrando, querendo derrubar as ideias da gestão anterior, os professores da escola onde eu entrei totalmente construtivistas, totalmente voltados para Paulo Freire, e "eu não sei dar aulas", foi o que passou pela minha cabeça, "eu vou ser uma negação". Porque [era] tudo novo para mim, eu não tinha contato nenhum, as professoras no 1º ano não usavam cartilha (Depoimento em 18/02/2011).

Márcia trabalhou durante 10 anos nessa primeira escola, mas apenas dois anos em sala de aula, e os outros 8 anos como auxiliar de direção. Passou a trabalhar também em uma Escola Municipal de Educação Infantil (EMEI) e cursou pedagogia em uma faculdade particular. Relata que, durante esse tempo, foram várias as políticas, e descobriu que "tudo muda muito depressa". Acrescenta, também, que seu primeiro objetivo era ser diretora, mas foi se encantando com a sala de aula, e deixou de lado esse objetivo, pensando em ter a responsabilidade "sobre uma sala de aula, e não sobre uma escola".

Hoje trabalha pela manhã na Escola Municipal de Ensino Fundamental (EMEF) onde se realizou esta pesquisa, e, à tarde, em uma EMEI, no mesmo bairro. Relata que gosta muito da escola em que trabalha pela manhã, onde "todo mundo ajuda todo mundo", a diretora “entende as professoras” e, “quando se tem que atingir alguma meta, como agora, com as avaliações, todo mundo se empenha”.

4.5.3. A escola

A instituição escolar onde se realizou esta pesquisa é uma escola pequena, em um bairro da zona sul da capital, que conta com sete salas de aula, uma sala de leitura, uma sala de informática, uma quadra esportiva, sala dos professores, secretaria, banheiros masculino e feminino e depósito. O refeitório ocupa o espaço do pátio coberto, alternando seu uso entre a alimentação dos alunos e o recreio. Até 1995, era uma “escola de latinha”, que teve seu prédio refeito em alvenaria, no entanto sem um novo projeto. Assim, a estrutura mantém algo de precário do projeto anterior: espaço restrito para o recreio, corredor estreito, uma planta que parece não ter sido pensada em seu todo.

Todas as salas de aula são equipadas com quadro branco, televisão com aparelho de DVD. A sala de informática conta com computadores em número suficiente para o uso de uma classe. A cozinha é tocada por uma empresa terceirizada, e os espaços da escola mostram-se limpos e organizados.

No período da manhã funcionam cinco classes de 4ª série (5º ano do Ensino Fundamental de 9 anos) e duas classes de 3ª série (4º ano do Ensino Fundamental de 9 anos). No período da tarde, há quatro classes de 1ª série (2º ano do Ensino Fundamental de 9 anos), três classes de 2ª série (3º ano do Ensino Fundamental de 9 anos).

A menos de um quarteirão de distância existe uma escola maior, que atende os alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. Há um conjunto de poucos prédios, sendo que as demais moradias são sobrados geminados. O bairro também conta com uma Escola de Educação Infantil particular, pequenos comércios e oficinas.

A maioria dos alunos mora no próprio bairro e, assim, muitos são trazidos a pé ou de carro por familiares, enquanto alguns utilizam o transporte escolar. As professoras relatam que é comum que algumas mães permanecerem do lado de fora logo após o sinal, olhando através da grade os alunos, que se juntam por classes no pátio coberto para descer, com as professoras, à sala de aula. A diretora relata uma participação bastante significativa dos pais, com boa frequência às reuniões de pais e acompanhamento das ações da escola através da Associação de Pais. É uma escola bem avaliada pelo bairro e onde, nas palavras da diretora, “todos querem colocar seu filhos”.

4.5.4. O trabalho em classe

A presença desta pesquisadora na escola se deu em três âmbitos: em primeiro lugar, o da sala de aula, trabalhando diretamente com os alunos; em segundo lugar, o das reuniões com a professora da classe, que foram de extrema importância para acompanhar as transformações na atividade dos alunos e refletir sobre as intervenções feitas ou a fazer; em terceiro lugar, um breve contato com os pais, em uma reunião de pais, durante a qual alguns minutos foram cedidos para que a proposta fosse apresentada e a autorização para gravação em vídeo fosse pedida (apêndice B).

O cronograma a seguir apresenta resumidamente as fases do trabalho:

Fevereiro de 2011

- Primeiras reuniões com a professora da classe e com a diretora da escola: apresentação dos objetivos da pesquisa, dos tipos de propostas a serem trabalhadas e discussão das condições e do cronograma das atividades com a classe.
- 18/02: reunião de pais - apresentação dos objetivos da pesquisa e pedido de autorização para a filmagem dos alunos.
- Dias 24 e 25: apresentação da professora e primeiras aproximações com o grupo.

Março a Maio de 2011

- Reuniões semanais com a professora (em horário reservado para planejamento): discussão das propostas da semana, a partir de análise das atividades da semana anterior trazida pela pesquisadora. Quando necessário, adaptação de propostas em função dessa discussão.
- Sessões de atividade com os alunos, com duração entre 50 minutos e 1 hora e 20 minutos, duas vezes por semana (quintas e sextas-feiras), gravadas em vídeo. As atividades foram conduzidas pela pesquisadora, com intervenções da professora, indicando crianças que podem contribuir para a discussão ou propondo temas a serem discutidos, à medida que ela se sinta à vontade para isso.
- As aulas foram planejadas seguindo a estrutura sugerida por Cobb et al., 2001. A primeira parte de cada sessão, após a apresentação da proposta e dos esclarecimentos necessários, deve ser dedicada ao trabalho individual ou em duplas. Ao mesmo tempo, a pesquisadora percorria a sala de aula, com dois objetivos: primeiro, discutir com alguns alunos ou duplas o trabalho que estão desenvolvendo, procurando identificar a

estratégia matemática e os conhecimentos sobre números postos em jogo ou não no emprego dessa estratégia, e segundo, ao observar esse trabalho dos alunos, identificar e fazer conjecturas sobre questões significativas que poderiam ser levadas à discussão, na segunda parte da sessão.

A segunda parte, de discussão com o grupo todo, se iniciava com as questões trazidas pela pesquisadora, que podia fazer isso de dois modos: formulando diretamente perguntas que se referiam a soluções e estratégias observadas na primeira parte da sessão, ou convidando alunos a apresentarem suas propostas de resolução, sobre as quais tanto a pesquisadora quanto os outros alunos teciam considerações, faziam perguntas e propunham decorrências.

- A primeira análise do material em vídeo aconteceu, sempre, entre as atividades realizadas em uma semana e as da semana seguinte, procurando identificar momentos em que uma ideia ou um procedimento pudesse ser considerado presumidamente compartilhado (COBB et al., 2001), ou elaborando propostas de atividades para focar, especificamente, uma dificuldade ou uma ideia que houvesse sido expressa pelos alunos nas sessões anteriores.
- A análise final do material em vídeo, procurando:

  a) estabelecer momentos em que determinada ideia pode ser declarada como presumidamente compartilhada (COBB et al., 2001);

  b) identificar ideias fecundas de tópicos para discussão que possam promover o desenvolvimento, pelos alunos, do próprio sentido de número.

Especificidades do trabalho com jogo

A escolha do jogo como instrumento para parte das atividades está relacionada a experiências anteriores desta pesquisadora, no contexto do LaPp (Laboratório de Psicopedagogia do Instituto de Psicologia da Universidade de São Paulo, coordenado pelo Prof. Lino de Macedo), onde participou de estudos sobre a importância do jogo na escola e entrou em contato com uma metodologia para o trabalho com jogos desenvolvida por esse Laboratório.

Em Macedo, Petty e Passos (2000), são apresentados os aspectos metodológicos que baseiam o trabalho do LaPp, e nos quais esse trabalho se apoiou quando foram planejadas as sessões com os jogos *Qual é o número?* e *Número alvo*. Nessa proposta, os autores observam que o processo de aprendizagem através do jogo passa por quatro fases, que devem ser levadas em conta pelo professor ou psicopedagogo em seu planejamento: a exploração dos materiais e a aprendizagem das regras, a prática do jogo e a construção de estratégias, a resolução de situações-problema e, por fim, a análise das implicações do jogar.

A primeira fase, de exploração dos materiais e aprendizagem das regras, não precisa necessariamente se completar antes do início das partidas. É possível ensinar as regras, propor que os alunos joguem um pouco, e depois analisar o material. Essa análise, muitas vezes, é crucial para a elaboração de estratégias de jogo, que vão ficando cada vez mais sofisticadas.

A segunda fase, de prática do jogo e de construção de estratégias, é a etapa do jogar propriamente dito. Deve-se investir tempo nessa etapa, para que os alunos possam construir estratégias e aperfeiçoá-las, o que pode ser favorecido pela ação do professor, instigando os alunos a analisarem suas próprias ações e a buscarem novas estratégias, e esclarecerem eventuais dúvidas sobre o funcionamento do jogo. Esse também é um momento privilegiado para observar a conduta do jogador e, a partir de suas ações, verificar de que maneira ele compreende as regras e as utiliza para fazer boas jogadas.

Na terceira fase, são propostas situações-problema, elaboradas a partir de recortes do próprio jogo. Elas têm o objetivo de promover a análise e o questionamento sobre a ação de jogar, anulando a influência que a sorte, e focando questões específicas, favorecendo, assim, um domínio cada vez maior da estrutura do jogo.

A quarta e última fase, a de análise das implicações do jogar, é momento de se tematizar, com os alunos, as experiências vividas nas fases anteriores. Entre os exemplos de tematização apresentados pelos autores, destaca-se a análise das produções e dos eventuais erros, ferramenta especialmente poderosa para os objetivos da presente pesquisa.

Embora essas fases não tenham sido estritamente seguidas, essa estrutura guiou o planejamento do trabalho e o olhar da pesquisadora, permitindo:

1. Analisar previamente os dois jogos escolhidos, identificando de que forma os conhecimentos matemáticos se fazem necessários para jogá-los bem e de que forma as intervenções ou questões formuladas sobre o jogo poderiam levar os alunos a avançarem em relação aos conhecimentos matemáticos postos no jogo.
2. Analisar o trabalho dos alunos tendo em vista especialmente a diferença entre jogar corretamente (segundo as regras) e jogar bem; ao mesmo tempo, observar, especificamente, os conhecimentos matemáticos relevantes para a pesquisa ao apresentar e ao discutir resultados.

3. Preparar, previamente, situações do jogo que, ao serem discutidas, colocariam também em pauta os conhecimentos matemáticos definidos com o objetivo.

A seguir são apresentados os dois jogos assim como os conhecimentos matemáticos que se esperava que fossem acionados pelos alunos ao jogá-los.

4.5.4.1. Jogo *Qual é o número?*

Trata-se de um jogo de senha bastante simples, em que o objetivo é descobrir um número escondido, recebendo como informação inicial apenas o número de dígitos que ele tem. A partir daí, o desafiado faz uma primeira tentativa, falando um número, que deve ser escrito pelo desafiador e, caso alguma das ordens do número falado seja ocupada pelo mesmo algarismo no número escondido, essa informação é dada ao desafiado. Por exemplo, o jogador A está escondendo o número 3.407. B começa dizendo “mil, trezentos e nove”.

O jogador A deve escrever esse número com algarismos como o primeiro de uma lista de tentativas e, em seguida, colocar o 0 na casa correspondente à dezena no espaço reservado ao número escondido. Em seguida, o jogador B deve fazer nova tentativa, levando em consideração as informações recebidas: a ordem da unidade **não é** ocupada por um 9, a ordem da dezena **é** ocupada por um 0, a ordem da centena **não é** ocupada por um 4 e a ordem da unidade de milhar **não é** ocupada por um 3 no número escondido.

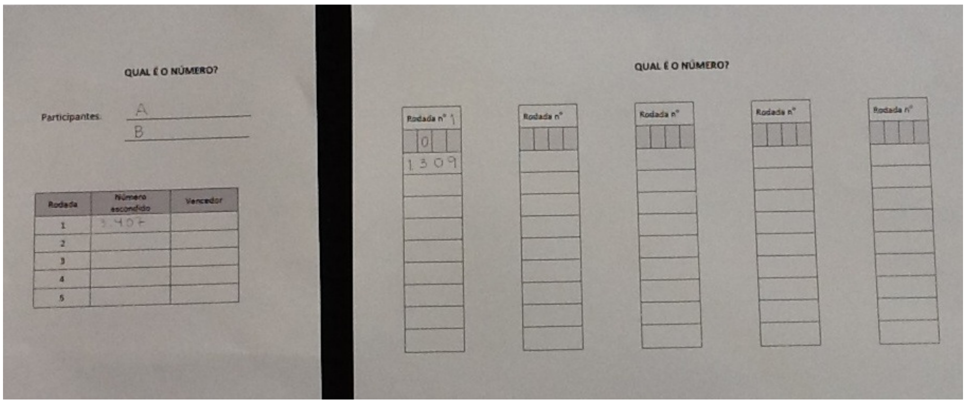

Figura 3: Material do jogo *Qual é o número?*

Do ponto de vista do conhecimento matemático, é necessário saber nomear os números e escrevê-los. Essa necessidade está dada pela regra: o desafiado deve dizer o número e o desafiador o escreve, pois, caso o desafiado pudesse simplesmente escrever sua tentativa, ele poderia trabalhar apenas com os dígitos, como se fossem um sinal qualquer, sem se preocupar com o número formado por eles. Assim, quando o jogador desfiado – ou o grupo desafiado, como se vê em parte das atividades no presente trabalho – descobre que há um 0 na ordem da dezena, precisa saber dizer números que satisfaçam essa exigência.

Do ponto de vista do raciocínio do jogo, a habilidade requerida é a de levar em conta todas essas informações a cada tentativa – ou seja, os algarismos que devem e os que podem ocupar cada ordem no número escondido, pois a quantidade de tentativas é limitada. Limitando-se o número de tentativas a dez, elimina-se o fator sorte e todo o jogador que considerar sempre as informações irá vencer a partida.

Esse jogo foi escolhido por ser uma situação que mobiliza os alunos a ler, escrever e ditar números, levando em conta o valor assumido pelos algarismos de acordo com a sua posição. No entanto, no contexto desse jogo, nem sempre quem tem o melhor conhecimento de leitura e escrita de números é o melhor jogador. Há alunos que, mesmo sabendo ler, escrever e ditar os números corretamente, não consideram as informações obtidas pelas jogadas anteriores ao fazer sua tentativa. E há alunos que, apesar de não saberem qual o número que estão formando com os dígitos que escolheram para cada ordem, fazem essa escolha observando rigorosamente as possibilidades e necessidades determinadas pelas jogadas anteriores.

Embora tenha sido dada atenção a esses aspectos no decorrer das atividades em classe, o foco das situações discutidas foi a leitura e a escrita de números, conhecimento básico a ser compartilhado no grupo, inclusive para que os alunos pudessem desenvolver suas ideas sobre números nas situações propostas e falar sobre elas.

Qual é o número?

Material

Folha de papel ou lousa com espaço determinado para números com a quantidade de dígitos desejada.

Como jogar

1. Um dos jogadores (o desafiador) escreve um número com a quantidade combinada de dígitos em um papel, sem mostrar para o(s) desafiado(s). Por exemplo, 2.038.
2. O desafiado, ou os desafiados, cada um à sua vez, fala um número com a quantidade de dígitos combinada (por exemplo, 1.437).
3. O desafiador escreve esse número logo abaixo dos espaços reservados ao número que deve ser descoberto e, caso o algarismo em alguma das ordens seja o mesmo do número escondido,

o escreve no espaço reservado a ele. Por exemplo, o 3 será escrito no espaço correspondente às dezenas.

4. Na jogada seguinte, espera-se que o(s) desafiado(s) considere(m) essa informação para falar um novo número, e o desafiador deve fazer a mesma coisa.

5. Determina-se previamente um número de tentativas (normalmente dez). Se o desafiante descobre o número escondido, ganha um ponto; caso se completem as dez tentativas sem que ele o tenha descoberto, o desafiador ganha um ponto.

6. Na rodada seguinte, invertem-se os papeis.

7. Ganha, o jogador que primeiro obtiver três pontos.

4.5.4.2. Jogo *Número alvo*

Nesse jogo, o objetivo é compor, a partir de algarismos sorteados, o número mais próximo possível de um número alvo. Cada jogador tem um pequeno tabuleiro com espaço para montar seu número. São quadradinhos, tantos quantos forem os dígitos do número escondido, preenchidos com zeros. Definido o número alvo, o primeiro jogador sorteia dois algarismos, que deverá posicionar em seu tabuleiro, procurando formar o número mais próximo possível do alvo. Por exemplo, tendo o número 3.000 como alvo, o jogador A abre os algarismos 2 e 7. Ele pode, então, compor em seu tabuleiro os números 2.700, 2.070, 2.007, 7.200, 7.020, 7.002 (considerando-se apenas números de quatro algarismos), mas, nesse caso, imaginemos que ele decida formar o 2.700. Em seguida, o jogador B sorteia os algarismos 3 e 9. Consideremos que ele decida formar o 3.009. Por fim, A e B precisam entrar em um acordo sobre qual dos números formados (2.700 e 3.009) está mais próximo do número alvo (3.000). Quem tiver feito o número mais próximo do alvo ganha a rodada. Quem primeiro fizer três pontos é o vencedor da partida.

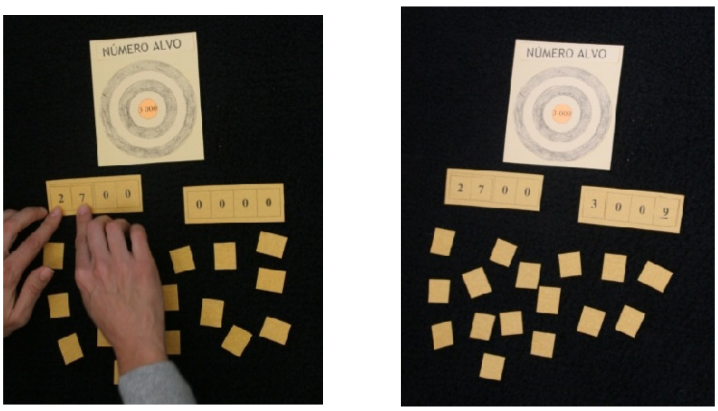

Figura 4: Material do jogo *Número alvo*

Número alvo é um jogo que exige a coordenação de vários conhecimentos matemáticos, a saber: a consideração do valor atribuído a um algarismo de acordo com sua posição no número, os diversos modos de se combinar quatro elementos considerando-se sua posição, e o cálculo, às vezes aproximado, outras vezes exato, da diferença entre dois números. Esse cálculo poderá ser aproximado quando uma aproximação basta para definir qual dos jogadores ganhou a rodada, mas pode precisar ser exato quanto essa aproximação não resolve o problema ou quando um dos jogadores ou ambos não percebem a possibilidade de usar a aproximação. Essa decisão sobre o tipo de cálculo a fazer é de extrema importância tendo em vista nosso objetivo de refletir sobre o desenvolvimento do sentido de número pelos alunos.

Número alvo

Material

1 tabuleiro com espaço para compor um número para cada participante, com o número de casas correspondentes ao número de dígitos do número alvo, todas preenchidas com 0.

2 conjuntos de cartõezinhos com os algarismos de 0 a 9

Como jogar

1. Define-se (ou se sorteia) o número que será alvo, ou seja, o número do qual os jogadores tentarão se aproximar o máximo possível (no caso dessa primeira sessão, eram números de quatro algarismos).
2. O primeiro a jogar abre dois cartões com algarismos, e o posiciona sobre seu tabuleiro, procurando formar o número mais próximo possível do alvo (por exemplo, tirando o 3 e o 7, é possível formar 3.700, 3.070, 3.007, 7.300, 7.030 e 7003 no jogo com quatro algarismos.
3. O outro jogador faz o mesmo e assim por diante, até que ambos tenham seu número completo.
4. Aquele que tiver formado o número mais próximo do alvo ganha a rodada.
5. Quem primeiro obtiver três pontos ganha a partida.

Cronograma desta etapa

1	25/02/2011	Jogo *Número alvo* com quatro algarismos (apresentação e primeiras jogadas em duplas)
2	08/03/2011	Jogo *Qual é o número?* com quatro algarismos (apresentação e jogadas em duplas)
3	10/03/2011	Situações do jogo *Qual é o número?* (apêndice n. 4)
4	11/03/2011	Jogo *Número alvo* com quatro algarismos na lousa, com a classe dividida em dois times; jogadas em duplas.
5	24/03/2011	Situações problema do jogo *Número alvo* com quatro algarismos.
6	25/03/2011	*Número alvo* com três algarismos na lousa e em duplas. Situações sobre o jogo *Número alvo*.
7	31/03/2011	Discussão de situações sobre o jogo *Número alvo* com três algarismos.

4.5.4.3. Os problemas do *Caderno de apoio e aprendizagem*

As propostas da primeira unidade dos *Cadernos de apoio e aprendizagem* da Prefeitura de São Paulo para o 5º ano, que comporão as situações da segunda fase da pesquisa de campo, são problemas de enunciado relacionados ao campo aditivo.

Ao assumir, no contexto desta pesquisa, tais problemas como propostas de trabalho, foi preciso refletir sobre alguns pontos que não estavam previstos inicialmente no planejamento, concernentes às dificuldades subjacentes a esse tipo de problema, já identificadas e documentadas na literatura.

Os problemas de enunciado estão muito presentes nos programas de Matemática do Ensino Fundamental. Historicamente, eram usados com o objetivo de que os alunos aplicassem, ao resolvê-los, as habilidades e os conhecimentos matemáticos previamente ensinados. Mais adiante, passaram a ser considerados como oportunidades para o desenvolvimento de habilidades gerais de resolução de problemas (VERSCHAFFEL et al., 2007, p. 582). Segundo Andrade (2011), as pesquisas sobre resolução de problemas foram muito intensas durante os anos 1980, diminuindo dramaticamente sua intensidade durante os anos 1990. Recentemente, observa-se uma retomada do interesse de pesquisadores e educadores matemáticos sobre o tema (ANDRADE, 2011). Parte das pesquisas trata dos diferentes tipos de problemas e das dificuldades que oferecem aos alunos (ver adiante), outra parte sobre os processos de resolução de problemas.

De acordo com uma revisão feita por Verschaffel et al. (2007), a maior parte das pesquisas sobre os processos de resolução de problemas pressupõe que alunos competentes procuram representar a situação problema e basear a escolha de uma estratégia na compreensão dessa situação. No entanto, outras pesquisas (VERSCHAFFEL; DE CORTE, 1997, apud VERSCHAFFEL et al., 2007) mostram que o processo de muitas crianças não se dá por esse caminho: a representação não aparece e, em vez disso, a escolha de uma estratégia se faz diretamente a partir da leitura do enunciado, muitas vezes guiada por características superficiais, como a presença de uma palavra-chave (por exemplo, a presença, no texto, da palavra "menos" leva à decisão automática de realizar uma subtração usando os números presentes no enunciado e o resultado é apresentado como resposta). Experimentos de ensino foram levados a cabo com o objetivo de desenvolver essas habilidades heurísticas dos alunos, com resultados desapontadores.

Partindo dessa constatação, foram desenvolvidas pesquisas com foco na metacognição (SHOENFELD, 1992, apud VERSCHAFFEL et al., 2007). Vários estudos constataram que "momentos de consciência metacognitiva ou de atividades autorregulatórias, como analisar o problema, monitorar o processo de solução e avaliar o resultado, estavam completamente ausentes" (VERSCHAFFEL et al., 2007, p. 596, tradução nossa). De modo semelhante às pesquisas relacionadas a habilidades heurísticas, observou-se que a abordagem típica dos alunos quando deparam com o problema é partir de uma leitura superficial e tomar uma decisão rápida por um cálculo com os números apresentados no problema, sem considerarem alternativas, mesmo que a primeira decisão não dê bons resultados.

Partindo desses estudos e de um modelo cognitivo detalhado das habilidades heurísticas e metacognitivas, subjacentes à atividade competente de resolução de problemas matemáticos, vários pesquisadores (LESTER, GAROFALO, KROLL, 1989; CARDELLE-ELAWAR, 1995, MEVARECH, 1999, apud VERSCHAFFEL et al., 2007) se dedicaram a criar e a avaliar ambientes instrucionais com o objetivo de desenvolver habilidades metacognitivas para a resolução de problemas, a maior parte delas com bom resultados. Ou seja, esses estudos sugerem que o desenvolvimento de habilidades metacognitivas por meio do ensino tem uma influência positiva na performance dos alunos em resolução de problemas (VERSCHAFFEL et al., 2007. p. 586).

Tais estudos, desenvolvidos primeiro em uma abordagem cognitivo-racionalista, recentemente passaram a ser pensados desde uma perspectiva mais situada, uma orientação socioconstrutivista, o que se faz notar em algumas mudanças importantes:

> uma atitude mais crítica em relação aos problemas de texto tradicionais, uma consciência maior da complexidade da relação entre matemática e realidade e uma ênfase maior nas tarefas autenticamente matemáticas (VERSCHAFFEL et al., 2007, p. 586, tradução nossa).

Entre as críticas tecidas por educadores matemáticos ligados a múltiplas perspectivas (linguística, cultural e sociológica) aos problemas de texto tipicamente representados nos livros didáticos, destaca-se a de que sua natureza artificial e estereotipada, aliada ao discurso e à atividade vinculados a eles nas aulas de matemática, têm efeitos prejudiciais na disposição dos alunos para a modelagem matemática realística e a atribuição de sentido (VERSCHAFFEL et al., 2007).

Essa aparente "suspensão da atribuição de sentido" parece ser resultado das percepções e interpretações dos alunos a respeito do contrato didático (BROUSSEAU, 1986) ou das normas sociomatemáticas vigentes na maioria das salas de aula (COBB; YACKEL, 1996), que parecem determinar, implicitamente, duas regras para a prática instrucional corrente: a primeira concerne à natureza dos problemas propostos e a segunda ao modo como eles são vistos e tratados pelos professores.

A natureza dos problemas que costumam ser propostos, na maioria dos livros didáticos, parece favorecer, nos alunos, a crença de que, ao lidar com problemas na escola, devem suspender seus conhecimentos sobre o mundo real (VERSCHAFFEL et al., 2007). Quanto ao modo como eles são vistos e tratados pelos professores, estudos mostram que, assim como os alunos, muitos deles tendem a não se preocupar se determinado problema faz sentido ou não em relação ao mundo real (VERSCHAFFEL; DE CORTE; BORGHART, 1997, apud VERSCHAFFEL et al., 2007).

Tais discussões em torno da resolução de problemas são fundamentais. Alguns caminhos têm sido vislumbrados pelos estudos por estudos que fazem uma ligação entre modelagem matemática e resolução de problemas, problematização, proposição de problemas, investigação matemática etc. Os trabalhos sob a perspectiva da metacognição, que tiveram grande impulso no anos 1980, têm marcado forte presença, recentemente, nas revistas especializadas. Entre os estudos de sala de aula, muitos têm essa perspectiva da cognição em modelagem matemática, que têm estado em pauta entre muitos estudiosos da Educação

Matemática (Domite, 2009), assim como nas pesquisas baseadas na Matemática Realista, que tratam de identificar “contextos ricos” para a elaboração de problemas adequados aos objetivos de ensino postos para determinadas trajetórias de aprendizagem (DOLK, 2008; SCHIFTER; FOSNOT, 1993; GRAVEMEIJER, 1994).

As questões levantadas por esses estudos são pertinentes aos enunciados apresentados nos *Cadernos de apoio e aprendizagem*, embora haja um esforço de contextualizar os problemas, usando como pano de fundo a cidade de São Paulo. Esta pesquisa se abstém, no entanto, de fazer uma análise crítica desses enunciados, ainda que alguns problemas, em relação aos contextos escolhidos, ao vocabulário e à coerência de algumas das situações sejam perceptíveis. Ao contrário, a pesquisa irá pautar-se na oportunidade de descrever, tendo como referência a análise do sentido de número dos alunos em sala de aula, as interações aluno-aluno e aluno-professora desencadeadas por tais problemas, já que eles são a realidade na esmagadora maioria das escolas brasileiras – e de outros países – hoje.

A pesquisa partirá, portanto, de uma categorização dos tipos de problemas de adição e subtração apresentada por Fuson (1992), localizando, em seguida, os oito problemas trabalhados nessa classificação.

No começo dos anos de 1980, muitas categorizações das situações de adição e de subtração que ocorrem no mundo real são foco de pesquisas sobre resolução de problemas. Fuson (1992) faz uma revisão dessas categorizações, descrevendo quatro classes de situações modelares para adição e subtração: *comparar*, *combinar*, *mudar adicionando* e *mudar subtraindo*. As operações de *combinar* e *comparar* são chamadas *binárias*, pois só é possível realizar essas ações quando há duas quantidades. Quando há apenas uma quantidade, pode-se adicionar ou subtrair dessa quantidade, por isso as operações de mudar adicionando e mudar subtraindo são chamadas *unitárias* (*unary*). Quando tais operações são feitas sobre objetos, a situação inicial desaparece em todas, exceto na situação de comparar. Outra distinção é feita entre situações *estáticas* e *ativas*, sendo as estáticas aquelas em que as quantidades não mudam, e ativas aquelas em que as quantidades mudam. Cada adição e cada subtração envolve três quantidades, e cada uma delas pode ser desconhecida, o que leva a três subtipos para cada situação.

Muitos estudos foram feitos demonstrando o significado psicológico dessa categorização, ao constatar que problemas que podiam ser resolvidos pela mesma operação, mas que pertenciam a diferentes categorias, impunham diferentes graus de dificuldade aos alunos e geravam diferentes modos de representação e diferentes categorias de erro (FUSON, 1992; VEGNAUD, 1996).

Os oito problemas propostos no capítulo inicial dos *Cadernos de apoio e aprendizagem* da Prefeitura de São Paulo (5º ano) pertencem a seis categorias diferentes: dois deles trazem situações de combinar conceitualmente, com total oculto; dois trazem problemas de combinar conceitualmente, com uma das partes oculta; um traz uma situação de mudar adicionando, com final oculto, um traz uma situação de mudar adicionando, com começo oculto, um traz uma situação de mudar subtraindo, com final oculto e, por fim, um traz uma situação de comparar, com sentença modificada sugerindo procedimento oposto.

Essas situações foram consideradas adequadas para recolher observações de acordo com o objetivo da presente pesquisa, uma vez que permitem um trabalho perpassado pela ideia de sentido de número, como será defendido adiante.

Cronograma

Sessões 8 a 15	01/04/2011 08/04/2011 14/04/2011 29/04/2011 05/05/2011 12/05/2011 19/05/2011 20/05/2011	*Caderno de apoio e aprendizagem*: resolução de problemas do campo aditivo com prévia estimativa.

4.5.4.4. As estratégias de cálculo em foco

A abordagem prática empregada nesta pesquisa – que buscava elementos que ajudassem a refletir sobre como o uso de determinadas estratégias de cálculo permitem que os conhecimentos sobre número sejam explicitados em sala de aula – exigia duas decisões prévias sobre minha atuação como professora no desenvolvimento desta pesquisa. A primeira, sobre os tipos de procedimentos que se esperava que fossem úteis para que, em sala de aula, os conhecimentos sobre número se tornassem objeto de negociação. A segunda decisão dizia respeito aos procedimentos: seriam trabalhados unicamente os procedimentos inventados pelos alunos ou, ao lado desses, seria apresentado algum procedimento que se mostrasse especialmente proveitoso para o propósito da pesquisa?

Como apresentado nos *fundamentos* deste trabalho, a relação entre o sentido de número desenvolvido e as boas estratégias de cálculo mental e aproximado foi descrita por vários autores (MCINTOSCH, 1992; GREENO, 1989; SOWDER, 1992, entre outros). Além disso, pesquisas relatadas por Kamii e Dominick (1998) afirmam que os procedimentos de cálculo escrito tradicionais, em que os alunos lidam com os dígitos dos números, distanciando-se da consideração de seu valor, desfavorecem imensamente o desenvolvimento da noção de número. Assim, a primeira decisão foi a de que seriam priorizados os procedimentos que trabalhassem decompondo e recompondo números, categorizados por Thompson (1999) como não *standard* e informais, ou seja, aqueles que não têm uma estrutura predefinida, com os quais se lida com decomposições e recomposições de números de acordo com os números em jogo na operação específica.

Além disso, seria priorizado o que alguns pesquisadores denominam "aritmética mental" (*mental arithmetic*, VERSCHAFFEL et al., 2007, p.566), termo usado para se referir ao trabalho que tem sido desenvolvido em sala de aula, nos Estados Unidos e em outros países (ANGHILERI, 1999; REYS et al., 1995; THOMPSON, 1999[23], apud VERSCHAFFEL et al., 2007), focado em estratégias de cálculo inventadas pelos alunos. Não é usado para designar um cálculo feito sem apoio de um registro, e sim para designar um modo de

> inventar e aplicar meios práticos e flexíveis de cálculo, baseados na compreensão das características básicas do sistema numérico e das operações aritméticas, assim como em um bem desenvolvido sentido de número e em um sólido conhecimento dos fatos fundamentais. (VERSCHAFFEL et al., 2007, p. 566, tradução nossa).

Os autores esclarecem que esse tipo de trabalho não exclui a possibilidade de uso de anotações quando necessário ou quando o problema permitir. Assim "não é a presença ou a ausência de papel e lápis, e sim a natureza das entidades matemáticas e ações que é crucial em nossa diferenciação entre aritmética mental e algoritmos escritos" (VERSCHAFFEL et al., 2007, p. 566, tradução nossa).

---

[23] ANGHILERI, J. Issues in teaching multiplication and division. In: THOMPSON, I. (Ed) **Issues in teaching numeracy in primary schools** (p. 184-194). Buckingham, UK: Opens University Press, 1999.
REYS, R; REYS, B; NOHDA N.; EMORI, H. Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grades 2, 4, 6 and 8. **Journal for research in mathematics education,** 26, 304-366: 1995.
THOMPSON, I. Getting your head around mental calculation. In: THOMPSON, I. (Ed). **Issues in teaching numeracy in primary schools** (p. 184-194). Buckingham, UK: Opens University Press, 1999.

A reflexão que se propõe sobre a segunda questão apoia-se inicialmente em Kamii e Dominick (1998) e na prática anterior desta pesquisadora em sala de aula, pela constatação de que, ao empregar procedimentos pessoais, os alunos raramente se aventuram a usar rotinas que não fazem sentido para eles e, além disso, nos dão pistas sobre sua compreensão das situações em foco.

Assim, incentivar e valorizar a criação e o uso de procedimentos pessoais é a primeira posição assumida por esta pesquisadora a respeito dessa questão. Por outro lado, um dos principais mecanismos de enriquecimento do repertório de cálculo dos alunos é a incorporação, em sua prática, de procedimentos pessoais apresentados por colegas. De modo semelhante, podem vir a incorporar – ou não – ferramentas apresentadas pelo professor. Isso se justificaria quando uma ferramenta não estruturasse, previamente, o cálculo do aluno e favorecesse a explicitação de etapas no cálculo com números em seu valor nominal.

Muitas vezes, ao se trabalhar o cálculo mental em sala de aula, é útil escrever as etapas do cálculo que está sendo discutido. Por exemplo, se um aluno descreve sua resolução para 372 + 247 assim: “fiz 300 mais 200, deu 500; aí fiz 70 mais 40, deu 130, depois dois mais sete deu nove. Então juntei 500, 130 e nove, que deu 639”, é interessante que o professor anote no quadro as etapas, para que o grupo possa acompanhar o cálculo do colega, escrevendo “300 + 200 = 500; 70 + 40 = 110; 2 + 7 = 9; 500 + 110 + 9 = 619”. O tipo de cálculo descrito corresponde a um cálculo por separação (HEIRDSFIELD, 2001), e é adequadamente representado por sentenças matemáticas sucessivas, como no exemplo anterior.

No entanto, outras estratégias importantes de cálculo mental, categorizadas por Hierdsfield como agregação e holística, não ficam mais bem representadas em um reta vazia do que em sentenças matemáticas sucessivas. Isso porque, nesse tipo de cálculo, o resultado de uma etapa é o início da seguinte, e dispô-lo em linha deixa o raciocínio muito claro. Assim, se um aluno descreve como resolveu 372 + 247 dizendo “fiz 372 mais 200, deu 572; 572 mais 30 eu sabia que era 602, mais dez, 612, mais sete, 619”, uma representação em reta (figura 5) apresenta seus passos de modo bem mais explícito do que sentenças matemáticas sucessivas.

Da nossa experiência em classe, e de pesquisas relatadas por Cobb et al. (1997) e Brocardo e Serrazina (2008), a reta numérica mostrou-se um instrumento muito útil para que se o aluno possa registrar etapas de um cálculo mental. Ou seja, ela pode funcionar como um apoio escrito para o cálculo mental, que permite ao aluno retomar as etapas do cálculo já realizadas antes de continuar, ou retroceder sem precisar recomeçar todo o processo.

Cobb et al. (1997) empregaram a reta numérica em um estudo com uma classe de 1º ano, com objetivo de que ela desse suporte ao tipo de estratégia de cálculo aqui denominado agregação e holístico (HIERDSFIELD, 2001), e por eles denominado *counting-based*. Segundo esses autores, a metáfora correspondente ao uso da reta é a de uma contagem que pode ser feita por pedaços, ou seja, parte-se de determinado número e adiciona-se a ele outro, o que pode ser feito por etapas. Brocardo e Serrazina (2008) registram o êxito da utilização da reta no contexto do projeto português *Desenvolvendo o sentido de número*:

> no âmbito do projeto DSN, desenvolvemos várias tarefas em que se previa o uso da linha numérica vazia. Verificamos como esse modelo apóia o desenvolvimento do cálculo mental, pois estimula os alunos a operarem mentalmente e permite-lhes estruturar o seu modo natural de pensar, adicionando e subtraindo em linha ao longo da reta (p. 111).

A decisão de apresentar a reta numérica vazia, no entanto, não significou que se tivesse a pretensão de que os alunos ficassem restritos a esse procedimento, mas que ele se tornasse um entre outras ferramentas (GREENO, 1991) disponíveis para os alunos.

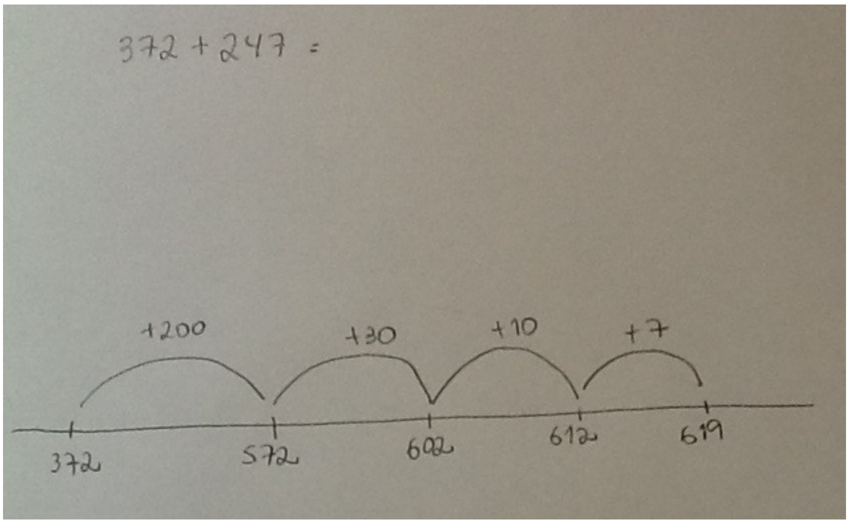

Figura 5: Exemplo de cálculo na reta numérica vazia.

De certa maneira, a apresentação da reta se dá de modo semelhante à negociação do uso de qualquer representação matemática. Conservam-se, ao mesmo tempo, o incentivo, para que os alunos criem suas próprias estratégias, e a valorização dessas estratégias, assim como o reconhecimento da escolha pela estratégia mais adequada a cada situação. Ou seja, a ideia, defendida por Sowder (1992) e McIntosc (1992), entre outros, de que a escolha de uma estratégia de cálculo apropriada é uma habilidade fundamental para um sentido de número desenvolvido é mantida. Ao mesmo tempo, defende-se que é necessário oferecer subsídios, tanto para que os alunos ampliem seu repertório de procedimentos de cálculo, quanto para que pensem e falem sobre os critérios para a escolha em si, de acordo com a tarefa enfrentada.

4.5.5. Fatores qualitativos de análise

- Procedimentos de cálculo mental, com ou sem apoio de papel e lápis.
- Justificativas formuladas pelos alunos sobre as soluções por eles encontradas, e os conhecimentos sobre números e operações implícitos ou explícitos nessas justificativas.
- Atividade matemática em sala de aula: normas sociais e crenças dos alunos sobre seu papel, o papel dos demais e a atividade matemática na escola; normas sociomatemáticas e as crenças e os valores matemáticos dos alunos; práticas matemáticas de sala de aula, interpretações e pensamento matemático dos alunos.

5. RESULTADOS

Nessa etapa do trabalho, o esforço estava centrado em buscar, no movimento da sala de aula, ações e práticas emergentes das interações no contexto sociocultural escolar.

Da incursão pelas teorizações de Cobb (COBB et al, 1997; COBB et al, 2001), que, de algum modo, já vinha transformando minha reflexão sobre a prática da sala de aula, três categorias prévias de análise orientarão essa busca investigativa – , categorias aqui denominadas *recortes*.

Tais categorias serão consideradas na coordenação das perspectivas social e individual, como bem discutido em Cobb et al. (2001). A perspectiva social remeterá o olhar para os modos de agir, pensar e argumentar típicos dessa comunidade de sala de aula. A perspectiva individual focará os modos particulares com que determinado aluno participa das atividades em sala de aula (COBB et al., 2001, p. 118).

O primeiro recorte constitui-se pelas normas sociais de sala de aula, articuladas com as crenças dos alunos sobre o seu próprio papel, o papel do outro e a natureza geral da atividade matemática na escola. O segundo recorte busca evidências sobre as normas sociomatemáticas e as crenças e os valores matemáticos dos alunos. O terceiro trata das práticas matemáticas em sala de aula, das interpretações e do raciocino matemático dos alunos.

Vale, ainda, destacar que as análises sobre as práticas matemáticas, consideradas na coordenação entre as perspectivas individual e social, terão, como direção para o ensino e a aprendizagem, o desenvolvimento do sentido de número em diferentes níveis de complexidade.

5.1. Recortes da atividade matemática dos alunos do ponto de vista das normas sociais e das crenças dos alunos sobre o próprio papel, o papel do outro e a natureza geral da atividade matemática na escola

Do trabalho conjunto entre pesquisadora e alunos, ao longo das dezesseis sessões de trabalho, que se estenderam por três meses, esboçou-se progressivamente um conjunto de normas sociais, as quais emergiam das ações e crenças dos participantes e, ao mesmo tempo, eram condicionadas por essas ações.

Desde o início do trabalho, a atuação e as reflexões da pesquisadora a respeito das normas sociais e crenças sobre o seu próprio papel, o papel do outro e a natureza da atividade matemática da escola estavam relacionadas a algumas expectativas em relação a elas, que, inspiradas em Cobb (1997), se esperava que fossem se estabelecendo progressivamente no grupo. O relato, a seguir, sobre o movimento que se anunciou nesse período, descreve um início de negociação e transformação desses aspectos, tanto do ponto de vista individual quanto do ponto de vista social.

A observação das primeiras sessões levou-me a vislumbrar que uma das *normas sociais* da classe (COBB et al., 1997; COBB et al., 2001) era a prevalência do discurso do professor e o de somente alguns alunos considerados conhecedores da matemática escolar. Os alunos que se manifestaram frente às questões propostas pareciam agir segundo a crença de que o seu *próprio papel* era produzir as respostas esperadas pelo professor. Nesse contexto inicial, não foi possível identificar que ideia os alunos faziam sobre o *papel do outro*, por exemplo, como afirma Cobb, em enxergar o colega como possível parceiro ou contestador de uma solução proposta.

Na primeira fase do trabalho, as propostas feitas aos alunos giravam em torno de dois jogos[24], sempre com quatro fases de trabalho: apresentação na lousa, jogadas em duplas, situações problema sobre o jogo e discussões (tanto de algumas das partidas jogadas como das situações problema). A opção pelo jogo teve uma razão relacionada à negociação das normas sociais da classe: em um jogo, é mais difícil que se mantenha a crença, por parte do aluno, de que deva produzir a resposta esperada pelo professor. Na interação que ele promove, cria-se uma situação em que a solução muda de acordo com as circunstâncias de cada jogada e de cada partida, e o objetivo do jogador é ganhar a partida, em vez de "acertar" uma resposta que imagine predeterminada pelo professor.

Nas primeiras sessões, uma pergunta ou um pedido de explicação, feitos pela pesquisadora sobre o trabalho de um aluno eram, com certa frequência, entendidos pelo grupo como um indício de que o pensamento apresentado – fosse no quadro à frente do grupo, fosse no trabalho individual ou em duplas – tivesse algum problema. A pesquisadora levantou essa hipótese a partir de algumas ações dos alunos, nesse contexto, como indício dessa interpretação: quando estavam escrevendo no caderno ou no quadro, o gesto de aproximar a

[24] Jogos "Número alvo" e "Qual é o número, descritos nas páginas 70 a 73.

borracha/o apagador do que estivesse escrito, como se fossem apagar, diante de qualquer pergunta da pesquisadora; se estavam apresentando uma solução oralmente, havia uma mudança de solução como resposta à indagação "por quê?". Entretanto, rapidamente o pedido de explicação deixou de ter esse significado, já que ele era constante no trabalho.

Nesse mesmo sentido, o interesse real demonstrado pela pesquisadora em compreender o modo como o aluno pensou – mesmo diante de explicações inconsistentes ou de soluções incorretas – e a explícita valorização ao ato de contribuir parecem ter iniciado uma transformação. Muito rapidamente, boa parte dos alunos passou a levantar a mão pedindo a palavra diante da pergunta "por quê?", mostrando-se cada vez mais à vontade quando questionados diretamente.

Na primeira sessão com o jogo, dez das 32 crianças presentes se dispuseram a falar, propondo soluções, explicando-as, complementando explicações dos colegas, mas sempre respondendo a uma demanda direta da pesquisadora. É importante notar, também, que a direção da conversa foi sempre pesquisadora-alunos-pesquisadora. Não foram observados episódios em que um aluno tenha questionado ou completado diretamente a fala de outro.

Os alunos que não se propuseram a sugerir soluções ou a questionar soluções propostas por outros colegas – a maioria da classe – participaram coletivamente. Limitavam-se a responder com um "siiiim!" em coro a uma pergunta como "Quem concorda com o que o fulano propôs?". É possível, de algum modo, afirmar que eles se guiavam mais pelos indícios dados pela pesquisadora e/ou pelas manifestações de colegas considerados competentes do que por considerações pessoais sobre a solução (Exemplos 1 e 2*)*.

Exemplo 1

A pesquisadora sorteou os algarismos 4 e 8, e pediu aos alunos uma sugestão do melhor número a ser formado próximo de 5.000. Apenas uma aluna levantou a mão para pedir a palavra.

Manuela: Coloca o 4 no primeiro quadradinho e o 8 no segundo.

Pesquisadora: Por quê?

Manuela: Porque aí vai formar o 4.800, e é o mais perto do 5.000.

Pesquisadora: Quem concorda com a Manuela? [Manuela é uma boa aluna, tida pelos colegas como alguém competente em Matemática].

Praticamente toda a classe levanta a mão imediatamente.

Pesquisadora: E se eu quisesse colocar o 8 no lugar do 4?

O grupo permanece em silêncio.

Carlos (o único que se propôs a responder): Aí ia passar.

Exemplo 2

A pesquisadora sorteou os algarismos 2 e 7.

Cristiane: Coloca o 2 no primeiro e o 7 no segundo.

Carlos: Se colocar o 7 na frente do 2, e o 2 na frente do 7, vai passar de 5.000.

Pesquisadora: Você quer por como? [Carlos indica 7.200].

Pesquisadora: Tudo bem, passou de 5.000. Mas este [7.200] é mais perto do 5.000 do que este [2.700]?

Classe em coro (imediatamente): Ééé!

As crianças pareciam induzidas a responder assim, pois a resposta foi imediata e foi possível observar, em outras situações, com desafio matemático similar, que a grande maioria dos alunos, naquele momento, não calcularia rapidamente a diferença entre dois números de quatro algarismos, mesmo no caso de números do tipo (com centenas completas). Provavelmente se guiaram pelo fato de que a pesquisadora, involuntariamente, interrompeu a atenção dada à primeira solução para perguntar sobre a segunda. Além disso, Carlos também é tido pelos colegas como um aluno "bom" em Matemática, ao contrário de Cristiane.

Outra observação sobre as normas sociais da classe diz respeito à interação verbal durante as discussões no grupo todo, sempre seguindo o padrão aluno-professor-aluno. Mesmo nas interações aluno-aluno, quando se trata de soluções propostas por eles, não existe a espontaneidade. A classe, aliás, manifesta estranhamento quando a pesquisadora propõe que uma aluna peça diretamente a um colega que apresentou uma solução, que ele a explique melhor (Exemplo 3).

Exemplo 3

Joaquim: Pode fazer assim, professora: põe o 7 na frente, o 0, o 0 e o 2 [7002].

Pesquisadora: Por que você achou melhor fazer esse número?

Joaquim: Porque ia ficar mais perto [do 5.000].

Manuela: Eu não entendi.

Pesquisadora: Quer perguntar para ele? Pergunta para ele.

Manuela, Joaquim e os outros alunos da classe riem, contidos, enquanto Manuela diz a Joaquim que não entendeu.

Os alunos ainda não se colocaram à vontade para se manifestar sobre o que um colega disse, complementando ou discordando de uma solução ou explicação apresentada. E quando propõem soluções ou explicam uma ideia, é como se cada um tivesse sua vez de falar **para a pesquisadora**, esperando um retorno **dela** (Exemplo 4).

Exemplo 4

Pesquisadora (perguntando à classe qual número seria mais perto de 5.000, se o 2.700 ou o 7.002): E agora, esses dois? (apontando para os números que haviam sido formados pelos alunos)

André: O de cima tá 2.700. Se colocasse mais 200, ia ficar 4.700, e aquele ali, se colocasse menos 200, ia ficar 5.002.

Nenhum aluno contestou a fala de André, que estava confundindo 200 com 2.000. Mesmo considerando que mais da metade da classe não teria condições de fazê-lo, pelos conhecimentos matemáticos demonstrados, havia pelo menos seis alunos que seriam capazes, mas não se propuseram, provavelmente por não se perceberem nesse papel.

A maioria das interações seguiu essa direção aluno-pesquisadora-aluno, mas já na terceira sessão apareceu, pela primeira vez, uma manifestação de discordância da classe em relação à solução de um aluno (Exemplo 5). Ela surgiu numa retomada de uma solução que já havia sido discutida, e a pesquisadora estava anotando os pontos com o grupo, para apresentar a tabela em que seriam anotados os pontos nas próximas partidas. Ou seja, a classe já havia chegado antes a um consenso sobre a resposta, e um aluno propôs outra na hora de registrar os pontos.

Exemplo 5

Pesquisadora (mostrando os números 7.002, de Manuela, e 4.800, de Lucia, com número alvo 5.000): Nesta coluna, os jogadores colocam a letra inicial do nome de quem ganhou a rodada. Quem conseguiu o número mais próximo?

Joaquim: A Manuela [com 7.002].

Várias crianças da classe se manifestaram, discordando.

Com o trabalho já em andamento, decidimos interromper temporariamente o as propostas com o *Número alvo*, para propor, durante duas sessões, o jogo *Qual é o número*[25]. Essa decisão foi tomada para colocar em foco a leitura de números de quatro algarismos, uma vez que muitas das crianças não liam os números corretamente e esse conhecimento seria fundamental para o andamento do trabalho.

Na primeira parte da sessão a pesquisadora era o desafiante e o grupo era o desafiado. Os alunos levantavam a mão para falar o número que gostariam, e a pesquisadora priorizava sempre quem ainda não tivesse falado. Apenas em caso de não haver novos candidatos, uma criança era chamada pela segunda vez. Houve bom aumento na quantidade de alunos que participou espontaneamente, sugerindo números para o jogo (de dez alunos, na sessão anterior, com o *Número alvo* (de dez alunos para 18). Depois que os alunos que se propuseram a participar espontaneamente já haviam se manifestado pelo menos duas vezes, sem que os outros o tivessem feito, a pesquisadora combinou que iria chamar, por fileira, cada aluno que ainda não houvesse participado. Esse aluno poderia decidir se falaria ou não. Houve, então, seis novas participações. É interessante mencionar que as jogadas desses alunos foram muito boas, quase todas melhores do que as tentativas dos alunos que haviam participado espontaneamente, o que nos leva a inferir que esses alunos não tinham deixado de participar nem por desinteresse, nem por falta de compreensão[26].

A atuação da maior parte dos alunos foi muito mais intensa nessa sessão do que na sessão anterior: muitos levantaram a mão, pediram a palavra (*"eu, eu!"; "eu não fui, eu não fui!"*), comentavam baixinho as descobertas parciais, e apareceram as primeiras observações de crianças sobre as propostas dos colegas.

Parte dessa mudança pode estar relacionada ao fato de que esta tarefa era mais adequada do que a da primeira sessão, quando muitos alunos mostraram dificuldade para calcular a diferença entre os números formados e o número alvo, para decidir qual seria o maior. Essa justificativa parece mais plausível do que supor uma transformação na crença dos alunos sobre o próprio papel, sobre o papel dos outros ou sobre a natureza da atividade matemática na escola. Isso porque, mesmo que a ação da pesquisadora tenha sido no sentido de fazer emergir, gradativamente, como uma norma social da classe, a valorização da

---

[25] Jogo *Qual é o número?* com quatro algarismos, descrito na página 70.

[26] Essa observação sugere uma possível frente de pesquisa – que não será aqui desenvolvida – sobre como alunos que não chegam a se expressar oralmente se beneficiam, em sua aprendizagem, de aulas que privilegiam o compartilhamento de soluções e justificativas.

participação, crê-se que o fato de o desafio ser mais acessível teve maior impacto, nesse momento, do que essas negociações iniciais sobre o papel dos alunos, em virtude do pouco tempo decorrido desde o início do trabalho. Por outro lado, consideramos essa experiência como muito importante no processo de transformação das crenças dos alunos sobre a participação nas aulas de Matemática.

Durante essa sessão, três entre os 18 alunos que participaram espontaneamente comentaram jogadas de colegas, apontando incoerências (Exemplos 6 e 7)

Exemplo 6

Um dos alunos disse o número 5.000, e não acertou nenhum dos dígitos do número escondido. O seguinte, então, propôs o número 7.205.

Joaquim: Não!

Pesquisadora: Por que não?

Joaquim (apontando a posição correspondente à dezena): Porque não tem o zero ali!

Exemplo 7

Um dos alunos propôs 2.245, e acertou o 2 na posição unidade de milhar. Duas rodadas adiante, outra criança propôs 3.333.

Pesquisadora: Quanto? Três mil?

Várias crianças protestam: Não dá pra ser 3.000!

Claudia: Agora só pode ser 2.000!

Depois de uma sessão de partidas coletivas no quadro e partidas em duplas, houve uma sessão em que os alunos primeiro trabalharam individualmente sobre algumas situações do jogo *Qual é o número?*[27], e depois as questões foram discutidas em grupo. Outras crianças se propuseram a participar, algumas espontaneamente, outras após incentivo da pesquisadora.

Um dos alunos, Antônio, resistiu inicialmente em participar, depois passou a pedir a palavra espontaneamente. A pesquisadora havia discutido uma das situações com ele no momento de trabalho em duplas e o chamou para mostrar ao grupo. Antônio relutou, depois concordou. Mais adiante, pediu para ser o aluno que escreveria os números sugeridos pelos colegas no quadro.

Após duas sessões dedicadas à leitura e escrita de números de quadro algarismos, a proposta volta a ser o jogo *Número alvo*, que havia sido apresentado antes. O jogo ainda

[27] Apêndice número 4.

acontecia com números de quatro algarismos, na lousa, com a classe dividida em dois times. Em seguida, os alunos tiveram um tempo para resolver, individualmente, algumas situações baseadas no jogo e, por fim, essas situações foram discutidas no grupo todo.

Mais uma vez, é possível observar – tanto na atividade em duplas quanto na discussão em grupo – que a grande maioria dos alunos não tem estratégias ou repertório de cálculo mental para comparar e calcular a diferença entre números dessa ordem de grandeza. Ainda assim, a participação dos alunos propondo soluções e procurando justificá-la se manteve um pouco menor do que na sessão anterior, e bem mais intensa do que nas primeiras três sessões. Isso nos leva a fortalecer a hipótese de que, após as duas sessões com um jogo mais acessível, as normas sociais a respeito da participação (propor e justificar uma solução, ouvir explicações e justificativas de colegas, manifestar discordância ou incompreensão de uma solução apresentada) sofreram alguma transformação. Essa transformação, ainda que pequena, tem efeito na dinâmica do trabalho quando retornamos a uma proposta com a qual muitos alunos ainda não lidavam com autonomia.

Uma das normas sociais que esperava ver emergir era a de que os alunos se manifestassem, espontaneamente, sempre que não compreendessem ou discordassem de uma ideia apresentada. Nessa sessão isso aconteceu pela segunda vez, desde o início do trabalho: um aluno disse que não entendeu algo sem que a pesquisadora tivesse perguntado. É Carlos que, após a pesquisadora ter proposto o uso da reta numérica para descobrir qual dos números – se 3.003 ou 9.003 – estaria mais perto de 6.000, disse: "Ô, professora, sinceramente, eu não consegui entender".

É importante mencionar que esse aluno, tanto quanto a primeira aluna que se manifestou na segunda sessão, está entre aqueles que têm maior compreensão dos desafios e das discussões em pauta. Ou seja, até a sexta sessão, quando inúmeras situações, em que grande parte do grupo não compreendeu uma proposta ou uma justificativa de solução dada por um dos colegas, já haviam sido observadas, nenhuma das crianças havia manifestado essa incompreensão, nem pedido esclarecimentos. De certa forma, há uma coerência: os alunos que fizeram isso estão entre os que mostraram maior compreensão dos desafios, pois, para formular uma pergunta, é preciso que se tenha algum conhecimento sobre a tarefa.

Tendo em vista as dificuldades apresentadas pela classe para calcular a diferença entre números de quatro algarismos, a pesquisadora e a professora, em sua reunião de planejamento, decidiram que nas duas últimas sessões proporiam o jogo *Número Alvo* com três algarismos.

Nesse dia, a pesquisadora explicita para os alunos um funcionamento do trabalho: "o jeito de trabalhar nesta aula é diferente do jeito de trabalhar em muitas aulas. Vocês perceberam isso? É um jeito de pensar junto. A gente não vem na lousa só para mostrar alguma coisa que a gente já sabe. A gente vem, também, para pensar junto com todo mundo uma coisa que a gente não sabe".

Muitas das crianças que não tinham segurança sobre as questões apresentadas e que a pesquisadora convidou, explicitamente, para ir ao quadro não quiseram fazê-lo. Duas delas (Cristiane e Augusto), mesmo sem ter uma solução pensada para a situação, se dispuseram a ir espontaneamente ao quadro para calcular a diferença entre um número qualquer e o número alvo. A hipótese é a de que o modo de receber um aluno, que não tem uma solução formulada, na frente da classe, dando espaço para uma resposta pouco elaborada e incentivando-o a contar com a ajuda de colegas do grupo, encoraja progressivamente crianças que evitavam ir ao quadro a se candidatarem com desenvoltura cada vez maior. Além disso, mesmo que algumas vezes eles sejam escribas das soluções propostas por outros alunos do grupo, muitos deles estão se apropriando de parte dos conhecimentos postos em jogo (no caso desses alunos, a contagem em intervalos como recurso para calcular mentalmente a diferença entre dois números).

A partir da nona sessão, a cada dia foi proposto um problema de texto do *Caderno de apoio e aprendizagem,* da prefeitura de São Paulo, que é parte do material de matemática dos alunos. Na primeira parte de cada sessão, a pesquisadora pedia que os alunos estimassem a resposta do problema. Em seguida, eles trabalhavam individualmente em busca da solução e, enquanto isso, a pesquisadora circulava pela classe, discutindo o trabalho de alguns alunos e identificando questões ou soluções a serem discutidas no grupo. A última parte da sessão era dedicada às discussões em grupo, que podiam ter como foco uma questão lançada pela pesquisadora ou soluções apresentadas por alunos. Nesse caso, eram escolhidos procedimentos que levassem a uma explicitação da possibilidade de decompor um número ao realizar uma adição ou subtração e dos modos de se fazer isso, ou seja, para essa apresentação, a participação não era espontânea, embora dependesse da disposição do aluno para atender à solicitação da pesquisadora. Colocados os cálculos na lousa, a pesquisadora perguntava se algum aluno gostaria de tentar descobrir como seu autor pensou e explicar isso ao grupo. Aqui, foi enfatizada a possibilidade de dar respostas parciais, apontar inferências incompletas sobre a atividade dos colegas, assim como pedir ajuda.

Já na primeira vez que a pesquisadora pede que os alunos estimem um resultado para o problema, 20 alunos se animam a fazê-lo, em um bom índice de participação. Na segunda parte, alguns alunos são convidados a apresentar seus procedimentos de cálculo aos colegas. Parte dos alunos está à vontade, considerando-se participante da discussão o tempo todo, fazendo observações sobre as ações e explicações dos colegas. No entanto, a maioria deles acabou tendo sua participação limitada por não ter conhecimento suficiente sobre os números e operações (Exemplo 8).

Exemplo 8

Manuela escreveu na lousa seu procedimento de cálculo de uma adição, que se apoia na decomposição das duas parcelas. A pesquisadora perguntou se alguém queria explicar o procedimento de Manuela, mas nenhuma criança se candidatou. Pergunta se alguém, então, queria perguntar algo sobre esse procedimento para ela, e apenas Augusto se manifestou. Sua pergunta não demonstrou qualquer familiaridade com esse tipo de interação, além de baixa compreensão do que a colega escreveu, pois ele simplesmente perguntou: "Como você fez *para descobrir aquele número ali* (apontando o 412, resultado final dos cálculos apresentados)?". Manuela limitou-se a descrever as etapas do cálculo que fez, remetendo-se diretamente às sentenças matemáticas escritas na lousa.

Ainda assim, uma mudança quanto às normas sociais se fez perceber nessa situação: embora ainda não houvesse uma formulação adequada da pergunta nem da resposta, os alunos já não achavam estranho que essa interação direta aluno-aluno acontecesse – na terceira sessão, quando a pesquisadora sugeriu que uma aluna formulasse uma pergunta para o colega, o grupo achou a situação engraçada.

Em outra sessão desse bloco, aparece uma situação que ilustra um movimento mais ou menos comum em todas as sessões já ocorridas. Vários alunos levantaram uma hipótese e depois mudaram sua posição sem, no entanto, demonstrar qualquer reflexão nova sobre a questão: pareciam se pautar em outros tipos de indícios, como *qual* a resposta dos alunos que consideram competentes, ou qual o *tipo de pergunta* feita pelo professor e quais as circunstâncias dessa pergunta (Exemplo 9).

Exemplo 9

A pesquisadora pediu que os alunos estimassem a resposta do seguinte problema: "A cidade tem 260 salas de cinema e alguns centros culturais, totalizando 299 atrações desse tipo. Quantos são os centros culturais?"

Helena é a primeira a falar, com uma estimativa (140) que, embora bastante imprecisa, considerava corretamente o sentido da operação. Seguiram os outros alunos e, ao fim dessa primeira rodada, apenas seis das 23 crianças estimaram um número abaixo dos 299, que seria o total de atrações. Todas as outras estimaram o resultado da adição do que deveria ser a soma com uma das parcelas, ou seja, juntaram os números que apareciam no problema, sem atentar para o sentido da operação em pauta. As estimativas permaneciam escritas na lousa, enquanto os alunos trabalhavam individualmente, procurando resolver o problema.

Um acompanhamento dessa fase individual de trabalho mostrou que a grande maioria dos alunos que estimou respostas adicionando os dados do problema manteve essa hipótese. No entanto, antes de abrir a discussão sobre os procedimentos de resolução, a pesquisadora propôs a seguinte discussão:

Pesquisadora: Nesse problema apareceram estimativas muito diferentes. Por que será que tem estimativas tão diferentes? Olha só: a gente tem 40 e 500. No outro não apareceram números tão diferentes, não é? Por que será que aqui apareceram coisas tão diferentes umas das outras?

Helena: A criança que falou 500 pensou em uma conta de mais e a que falou 40 pensou em uma conta de menos.

Pesquisadora: Quem tinha razão? Levanta a mão quem acha que quem tinha razão é quem juntou.

Só quatro crianças levantaram a mão, sendo que a grande maioria havia juntado.

Para que ocorresse essa situação visivelmente contraditória, é possível que alguns alunos tenham repensado o problema enquanto trabalhavam individualmente – de fato alguns deles discutiram a questão com pesquisadora. Também é possível que tenham se pautado pela escolha das crianças que consideram mais competentes em Matemática dentro do grupo, e que não levantaram a mão quando a pesquisadora pediu: "Levanta a mão quem acha que quem tinha razão é quem juntou". Ou que os alunos tenham observado um movimento recorrente da pesquisadora que, quando pretende que os eles discutam, partindo de duas posições opostas, frequentemente pergunta primeiro o que eles pensam sobre a afirmação que espera que seja superada, para, em seguida, perguntar sobre a ideia que espera prevalecer. Atentos a isso, inferiram que a primeira afirmação colocada em pauta era a falsa. Do ponto de vista das normas sociais, uma situação desse tipo mostra que a atitude de se manifestar quando não compreende ou discorda de uma solução não está presumidamente compartilhada no grupo. Ou seja, parte dos alunos costuma manifestar essa discordância ou incompreensão, mas não são todos, e isso não acontece em todas as situações.

Por outro lado, na sessão seguinte, mais uma vez dois alunos se colocaram no papel de acompanhar o que os colegas apresentavam e discordar, apontando erros que encontraram, ou sugerindo alternativas e complementações (Exemplo 10).

Exemplo 10

Francisco pediu para mostrar como usou a reta numérica ao realizar seu cálculo. Sua reta, no entanto, faz pouco sentido. Francisco havia calculado o resultado previamente, e procurava apresentar esse cálculo num formato que percebia ser o mais valorizado pela pesquisadora (figura 6).

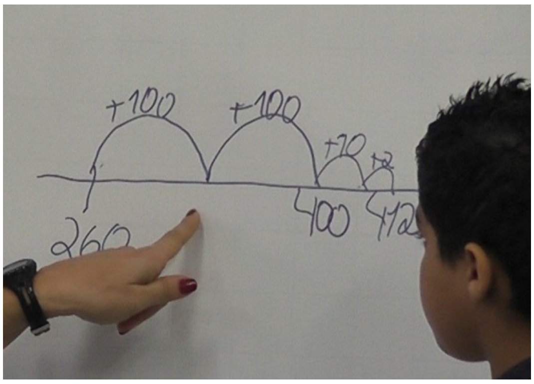

Figura 6: Reta apresentada por Rodrigo, cujos erros de cálculo são apontados por dois colegas.

Carlos protesta: ele esqueceu de colocar o 360.

André: 360 + 100 não dá 400, dá 460.

Com o início do trabalho com os problemas de enunciado do *Caderno de apoio e aprendizagem,* da Prefeitura de São Paulo, esboçou-se uma intensificação das interações, motivadas pelas propostas nas quais os alunos deveriam estimar um resultado para o problema e, depois, poderiam propor a eliminação de uma estimativa, desde que justificassem a impossibilidade de que aquele problema tivesse como resultado o valor estimado.

Existe um movimento especialmente interessante nessa etapa do trabalho: inicialmente, a discussão se restringiu a alguns alunos que já vinham participando mais intensamente nas sessões anteriores; no entanto, na décima segunda sessão, após um aluno ter proposto a eliminação de uma estimativa de resultado, justificando-a, outro aluno quis eliminar outra estimativa, com a mesma justificativa, embora ainda não soubesse como formulá-la (Exemplo 11). Isso se tornou uma possibilidade que permitiu a mais alunos participarem dessas discussões, apoiados nas falas de colegas.

Exemplo 11

Joaquim pediu para eliminar a estimativa "1.000" para a resposta do seguinte problema: "Dona Marina já havia comprado algumas réguas, mas, em outra loja, comprou outras 360. Quando contou o total de réguas compradas, viu que eram 640. Quantas réguas ela comprou na primeira loja?"

Pesquisadora: Por que você tem certeza que não pode dar mil?

Joaquim: Porque até no total não dá mil.

(Em seguida, houve uma conversa em que outros alunos colaboraram com a justificativa de Joaquim)

Bia: É que a gente não sabe quanto ela comprou na primeira loja. Na segunda a gente já sabe que é 360. E diz (lendo) "quando contou o total de réguas viu que era 640".

Manuela: Ele quer saber quanto ela já havia comprado. O tanto que ela comprou mais 360 vai dar 640.

Pesquisadora: Quem quer vir tirar outra estimativa?

Augusto: Três mil.

Pesquisadora: Conta para o pessoal por que você tem certeza que não pode dar 3.000.

Augusto: ...

Voz não identificada: É a mesma coisa que o Joaquim.

A partir desse episódio, a pesquisadora passou a ratificar esse tipo de justificativa, pedindo ao aluno que recuperasse, com a ajuda do grupo, a argumentação em que pretendia se basear ("Pelo mesmo motivo que o Joaquim. O que mesmo que o Joaquim disse?").

Essa nova possibilidade, de se apoiar explicitamente na justificativa de um colega, ao identificar um caso semelhante para o qual ela se aplicasse, teve duas decorrências muito valiosas para o trabalho: em primeiro lugar, a de incluir algumas crianças que acompanhavam a discussão e as argumentações dos colegas, sem, no entanto, se manifestar; em segundo lugar, de favorecer a formulação de argumentações próprias em um segundo momento. Há, ainda, a hipótese de que outros alunos passaram a ouvir e a tentar compreender as argumentações dos colegas, com o objetivo de identificar casos similares entre as outras estimativas escritas na lousa.

Das observações ao longo das sessões, podemos sintetizar brevemente esse movimento inicial do grupo como um movimento significativo, com transformações importantes no modo de agir de muitas crianças do grupo. No entanto, ao término do trabalho, não é possível considerar esses modos de agir como típicos do grupo.

5.2. Recortes da atividade matemática dos alunos do ponto de vista das normas sociomatemáticas e das crenças e valores matemáticos

Nas primeiras duas sessões, dedicadas a uma primeira aproximação com o grupo, foi possível levantar algumas hipóteses sobre as normas sociomatemáticas e as crenças e os valores matemáticos iniciais dos alunos. Quanto à *natureza geral da atividade matemática na escola*, todos os comentários feitos nessas primeiras duas sessões se referiam a procedimentos de cálculo. Assim, há indícios, nessas primeiras sessões, de que os alunos consideram o fazer matemática na escola como a aplicação de procedimentos de cálculo ensinados pelo professor.

"Eu sabia que era essa a resposta [1.382] porque se você pegar o 582 mais o 800 vai dar certinho 1.382".

Com essa fala, um dos alunos justificou sua escolha do número 1.382 entre as alternativas de resposta à questão: "uma padaria vendeu 582 pães pela manhã. Continuou vendendo durante a tarde e, ao fim do dia, tinha vendido 800 pães. Quantos pães a padaria vendeu durante a tarde?". Uma justificativa como essa parece corresponder à crença de que uma resposta é válida quando os cálculos "dão certo". Uma justificativa que considere a pergunta a ser respondida e o sentido da operação envolvida na resolução não parece ser percebida como necessária por esse aluno.

Existe, também, a hipótese de que essa também não é uma norma sociomatemática do grupo, uma vez que ninguém se manifestou para contestar tal justificativa. Talvez essa conjectura se justifique, mas não pelo fato de ninguém ter contestado a fala do colega, pois se supõe que, nesse momento inicial, entre as normas sociais do grupo, não está incluída a de que o grupo deve aceitar ou rejeitar a proposição de um colega. Essa conjectura se justifica porque apareceu muitas vezes ao longo da discussão das respostas, em ambas as sessões, além da absoluta inexistência de outros tipos de justificativas, baseadas na análise do sentido da operação. Um exemplo de análise desse tipo seria considerar que a quantidade de pães vendidos durante a tarde não poderia ser maior do que 800 já que essa quantidade correspondia ao total de pães vendidos no dia.

Outra norma sociomatemática que se mostrou absolutamente estabelecida foi a de que as justificativas e explicações sobre uma questão se baseariam em descrições de procedimentos. Os poucos alunos que se dispuseram a explicar as opções que fizeram diante das questões propostas se referiam a procedimentos de cálculo – na verdade a um único procedimento de cálculo: o cálculo exato pelo algoritmo tradicional, mesmo que visualizado mentalmente (ver a próxima sessão, sobre práticas matemáticas).

***

As propostas da primeira fase do trabalho colocam um novo tipo de desafio, no qual o sentido da ação se dá pelos objetivos dos jogos. Ao serem apresentados ao jogo *Número alvo,* fica claro que é a primeira vez que os alunos se deparam com a tarefa que ele exige: descobrir qual, entre dois números, fica mais próximo de um número referência e, convencer o colega de que tem razão, demonstrando os cálculos que fez. Nesse contexto, começa uma negociação do que seria uma justificativa válida, negociação que avança muito lentamente, especialmente porque os conhecimentos sobre números e operações, presumidamente compartilhados na classe, são bastante restritos (Exemplos 1 e 2).

Exemplo 1

Na terceira sessão, os alunos tentaram formar o número mais próximo possível de 5.000 usando os algarismos 7 e 2 sobre o tabuleiro com três zeros, e a primeira proposta é fazer 7.200.

Joaquim: (...) põe o 7 na frente, o 0, o 0 e o 2 [7002].

E (justificando sua proposta): [o número formado] “ia ficar mais perto” [do alvo].

Manuela (incentivada pela pesquisadora, pede uma explicação para Joaquim): Eu não entendi.

Joaquim: É que eu... o 7.200 vai mais longe do 5.000. O sete mil e ... (hesita, em dúvida sobre como ler o número que compôs) dois vai mais perto.

Manuela se satisfez com a resposta, que, no entanto, não explicou o raciocínio, apenas repetiu o que já havia sido dito.

Exemplo 2

Pesquisadora: Agora vamos ver: a gente já sabe que este [7.002] é melhor do que este [7.200]. Mas e este [7.002] em relação a este [2.700]? Qual é mais próximo do 5.000?

Alguns instantes de silêncio.

André: O de cima tá 2.700, se colocasse mais *duzentos* ia ficar 4.700. E aquele ali, se colocasse menos *duzentos*, ia ficar 5.002.

Nenhum aluno se manifestou sobre o erro de André.

Pesquisadora: É, mas é 200 mesmo? Porque, olha, quanto é 2.700 mais 200?

André: Ah, é 2.000!

A pesquisadora repetindo o que André falou, foi colocando na lousa: 2.700 + 2.000 = 4.700 e, logo abaixo, 7.002 – 2.000 = 5.002.

Pesquisadora: Alguém quer aproveitar isso que o André falou para dizer qual destes números (apontando o 2.700 e o 7.002) é mais perto de 5.000?

Silêncio. Apenas uma aluna se propôs a responder.

Claudia: Vai ficar mais perto o de baixo, porque 4.700 ainda ia precisar de mais 300 para chegar no 5.000, e o 5.002 só precisa tirar dois.

Todos os alunos disseram concordar, embora fique claro que não tivessem compreendido muito bem o que a colega disse, inclusive porque bem mais da metade do grupo mostrou, diante de desafios matemáticos semelhantes, nesta e nas sessões anteriores, que precisava recorrer ao cálculo escrito convencional para verificar a diferença entre 4.700 e 5.000.

A negociação de normas sociomatemáticas, que se iniciou nessas sessões, sobre o que é válido como solução aceitável, solução diferente, solução eficiente e solução sofisticada, tem como objetivo que os alunos desenvolvam seu sentido de número e discutam procedimentos de cálculo.

Na interação alunos e pesquisadora, espera-se ver emergir como solução não aceitável aquela que lida apenas com os dígitos, descrevendo procedimentos de cálculo tradicionais e ignorando o valor que os algarismos assumem no número. Ou seja, uma solução aceitável deve lidar com o valor do número, decomposto e recomposto, sempre que necessário, e não descrever procedimentos de cálculo baseados na manipulação dos dígitos. O algoritmo do cálculo escrito convencional é aceito como um recurso em situações em que os alunos não consigam usar outra estratégia.

Compartilhar soluções variadas no grupo é algo muito importante, tendo em vista o objetivo do desenvolvimento de sentido de número, já que alguém com bom sentido de número deve ter um cálculo mental flexível, usando a melhor estratégia de acordo com os números em questão (MCINTOSH, 1992; SOWDER, 1992). Esse princípio rege a maioria das intervenções da pesquisadora.

Como solução eficiente, espera-se que venha a emergir o uso da aproximação quando conveniente, e do cálculo aproximado sempre que não for necessário recorrer ao cálculo exato, que seriam estratégias condizentes com o desenvolvimento do sentido de número. As soluções sofisticadas, que acabam tendo pouco espaço, em virtude do restrito conhecimento compartilhado no grupo, serão aquelas em que os alunos lançam mão de arredondamentos e compensações na adição e na subtração.

Na sexta sessão, pela primeira vez, vários alunos pediram para ir ao quadro mostrar um jeito diferente de fazer o mesmo cálculo. Quando a pesquisadora disse que precisavam encerrar a sessão, Joaquim ainda quis acrescentar outro: "*professora, também dá para fazer 50 e dois 10*". Nesse momento, parece se esboçar, como um valor sociomatemático em construção, por alguns alunos, a apresentação de soluções diferentes para um mesmo cálculo mental.

***

Na segunda fase, o trabalho passou a focar atividades propostas nos *Cadernos de apoio e aprendizagem.* A partir daí, intensifica-se uma negociação, do ponto de vista das normas sociomatemáticas, que está relacionada ao sentido das operações. Os alunos foram convidados a apresentar suas estimativas para a resposta do problema proposto. A estimativa, nesse caso, foi apresentada aos alunos simplesmente como uma tentativa de dizer "mais ou menos" o quanto eles achavam que seria a resposta do problema, sem recorrer ao cálculo exato. A pesquisadora deu um exemplo e considerou que também a negociação do que seria essa estimativa faria parte das sessões que se seguiriam.

Ao pedir que os alunos estimassem as respostas dos problemas, antes de trabalhar individualmente ou em duplas, são dois os focos de trabalho e análise. O primeiro foco não está ligado à estimativa em si, mas à possibilidade de discutir o sentido das operações expressas no enunciado. Isso porque, antes de estimar, o aluno precisa identificar as relações entre as informações presentes no enunciado e decidir qual operação[28] colocar em jogo.

Um exemplo de dificuldade nessa interpretação seria: diante de um problema que diz: uma doceira produziu 137 doces pela manhã, continuou produzindo durante a tarde e, ao fim do dia, tinha feito 300, perguntando quantos doces ela produziu durante a tarde, o aluno faz 300 + 137. Parte da dificuldade de interpretar certos enunciados pode ser creditada à má qualidade dos desafios propostos, mas esse não é o foco do presente estudo.

O fato é que, na experiência em sala de aula da pesquisadora, observou-se que essa parte fundamental da resolução de problemas é muito difícil de ser discutida em classe. Ao longo do presente trabalho, a negociação do que seria uma estimativa válida e de como um aluno poderia apontar a validade ou não da estimativa posta por outro, fez emergir uma estratégia de trabalho muito interessante em relação a esse ponto.

O segundo foco está ligado à estimativa em si, ou seja, entre as estimativas que consideraram corretamente o sentido do problema, quais são estimativas coerentes e quais não são. Na primeira sessão, essas estimativas são bastante variadas, e não se observa um questionamento de um aluno sobre a estimativa do outro. É possível observar que os alunos partem de justificativas apoiadas, unicamente, na descrição de um cálculo para as estimativas e soluções apresentadas (Exemplo 3).

Exemplo 3

O primeiro problema proposto foi o que segue:

São Paulo tem 152 teatros e 260 salas de cinema. Quantos teatros ou cinemas a cidade oferece?

Após a leitura do enunciado, a pesquisadora propôs que os alunos estimassem a solução do problema. Manuela foi a primeira a falar, e trouxe como estimativa o número exato correspondente à resposta do problema: 412. Fez-se um silêncio de alguns minutos, até que outros alunos se arriscassem a propor seus números. De 18 estimativas, oito foram adequadas, situando-se de 400 a 420. Quatro foram números maiores ou iguais a 490 e seis

[28] Com Vergnaud (1996), observamos que muitos alunos podem resolver uma questão em que se deve calcular a diferença entre dois números aditivamente, determinando quanto se deve adicionar a um número para obter o outro. Nesse caso, eles estão considerando o sentido da operação adequadamente ao dar como resposta o valor adicionado, e não a soma.

foram números menores ou iguais a 320, valores facilmente identificáveis como inadequados. Nenhum aluno contestou qualquer estimativa feita pelos colegas.

Observando o trabalho individual dos alunos, na resolução do problema, logo após as estimativas e antes da discussão, é possível afirmar que eles assumiram como um valor matemático o uso de procedimentos de cálculo diferentes do algoritmo convencional escrito. Muitos dos alunos, no entanto, se propuseram a empregar a decomposição de parcelas ou a reta vazia perdendo de vista o sentido da operação (Exemplos 4, 5 e 6). É importante notar que, em muitos momentos ao longo do estudo, a pesquisadora esclareceu que os procedimentos não convencionais eram importantes para que os alunos pudessem aprofundar a compreensão dos números e operações, mas que eles deveriam poder recorrer, sempre que considerassem necessário, aos procedimentos convencionais aprendidos em séries anteriores.

Em praticamente todas as sessões, houve muitos alunos que recorreram a esses procedimentos (provavelmente os únicos que sabiam empregar com sucesso nesse momento), e eles sempre estiveram presentes entre os procedimentos ratificados como soluções possíveis, mesmo que não aparecessem como soluções sofisticadas. Com certa frequência, inclusive, a pesquisadora dedicou-se, quer durante os momentos de trabalho individual ou em dupla, quer durante os momentos de discussão coletiva, a promover o aprofundamento da compreensão dos alunos a respeito das relações matemáticas envolvidas nesses algoritmos.

Exemplo 3

Carolina esboçou uma reta na qual calcularia a diferença entre 152 e 260, sendo que o problema demandava, para sua solução, uma adição entre esses dois números.

Exemplo 4

Pedro quis decompor os números e, ao fazê-lo, acabou adicionando duas vezes o 60 do 260 (figura 7).

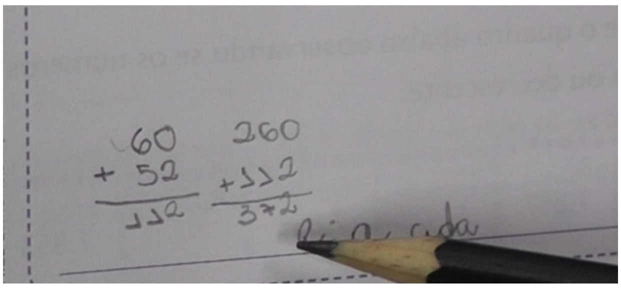

Figura 7: A tentativa de usar procedimentos de acordo com as normas sociomatemáticas que estão se constituindo esbarra em questões relacionadas ao conhecimento dos números.

Exemplo 5

Mara usou uma decomposição incorreta, provavelmente apenas "desmontando" o algoritmo tradicional da adição:

$100 + 200 = 300$

$2 + 0 = 2$

$5 + 6 = 11$

$260 + 156 = 412$

Nessa parte da sessão, de trabalho individual, apenas uma aluna trabalhou com os números, mantendo seu valor e aplicando adequadamente estratégias de cálculo mental (Exemplo 6).

Exemplo 6

Manuela explicou como fez o cálculo mentalmente, e é a única que usou, de fato, um procedimento adequado de cálculo mental: "eu fiz 100 mais 200 igual a 300. Aí sobrou 52 e 60. Ai eu fiz 50 mais 60, 110, aí fiz 110 mais 2 e deu 112. Então fiz 112 mais 300, 412".

No momento da discussão coletiva, a pesquisadora deu maior espaço para a discussão de soluções que tivessem trabalhado com os números mantendo seu valor e empregando decomposições, ao mesmo tempo em que fosse mantido o algoritmo entre as soluções possíveis. Essa opção levou os alunos a inferirem qual o tipo de abordagem que a pesquisadora valorizava (YACKEL; COBB, 1996). As soluções escolhidas para serem apresentadas na lousa foram uma reta vazia, uma adição pela decomposição das parcelas ordem a ordem e o algoritmo convencional da adição. As duas primeiras soluções foram discutidas longamente, enquanto o algoritmo foi apenas ratificado como solução legítima.

Aqui se percebe que ainda são poucos os alunos que se propuseram a intervir nas soluções apresentadas, apontando erros e se prontificando a discutir, comparando um procedimento com o outro (Exemplos 7).

Exemplo 7

Pedro foi à lousa mostrar como calculou, escrevendo seus cálculos no quadro.

Pesquisadora: Quem quer dizer, olhando as contas do Pedro, de onde ele tirou o 300?

Carlos: Do 200 + 100?

Pesquisadora: Muito bom. E por que ele só precisava juntar 300 com 112?

Claudia: Porque no final do 100 é 52 e no final do 200 é 60.

Pesquisadora: Quem quer mostrar como Pedro decompôs o número?

Apenas Manuela, entre todos os alunos da classe, se dispôs a ir à lousa para mostrar a decomposição feita pelo colega.

Pesquisadora: Alguém quer explicar como Manuela decompôs o número?

Nenhuma criança se candidatou. Pela observação do trabalho individual, etapa anterior da sessão, é possível inferir que muitos dos alunos não viam os números decompostos como apresentado por Manuela.

O segundo problema proposto foi:

A cidade tem 260 salas de cinema e alguns centros culturais, totalizando 299 atrações desse tipo. Quantos são os centros culturais?

Por se tratar de um problema em que pergunta se refere a uma das partes que compõe o todo, foi possível observar, por meio das estimativas propostas, como muitos dos alunos não consideraram corretamente o sentido do problema. Helena foi a primeira a falar, com uma estimativa que considerava corretamente o sentido da operação (140). Seguiram-se os outros alunos e, ao fim dessa primeira rodada, apenas seis das 23 crianças estimaram um número abaixo dos 299, que seria o total de atrações. Todas as outras estimaram o resultado da adição do total com uma das parcelas, ou seja, juntaram os números que apareciam no problema, erro recorrente em situações desse tipo.

Quando se estabeleceu que parte das estimativas foram produzidas pela adição entre os dados do problema e parte pela subtração, a pesquisadora tentou colocar em pauta o sentido da operação expressa no problema.

Pesquisadora: Joaquim, por que você acha que tinha que juntar?

Joaquim: Porque tá falando quantos são.

Pesquisadora: Está falando quantos são, é verdade. Mas quem quer ajudar a explicar por que tinha que juntar?

André relê o enunciado e diz: Você vai lá, junta os dois, e *aparece* quantos centros culturais são.
Claudia: Tá falando que *totalizando* (ênfase) é 299. Aí, se eu "tirar 299 menos" 260 vai dar 39, e aí vai ser o número de centros culturais.
Pesquisadora: Tá bom, mas por que você acha que tem que tirar?
Claudia: Porque já tá falando "totalizando".
Helena: *Totalizando tudo* dá 299. Se tirar as salas de cinema, vai ficar os centros culturais.
Manuela: Tipo, ó, tem 299 atrações culturais. Só que a gente já sabe que 260 são salas de cinema e o resto são centros culturais. Tá perguntando quantos são os centros culturais, então tem que tirar, porque se a gente fizer 260, que são as salas de cinema, mais 299, que são as atrações culturais, a gente vai tá somando *de novo* (ênfase) as salas de cinema.
Pesquisadora: Ah, agora estou começando a entender o que vocês querem dizer. Olha, gente, a Helena disse que, se os centros culturais junto com os cinemas são 299 atrações, se tirar as salas de cinema, tem que sobrar os centros culturais. Fez sentido? (Alunos concordaram, sem convicção.) E a Manuela disse que, se a gente fizer 260, que são as salas de cinema, mais 299, que são as atrações culturais – cinema junto com centro cultural –, a gente vai colocar os cinemas duas vezes.
A intenção da pesquisadora, aqui, era validar a explicação que ser refere às informações do problema, colocando-as *em relação*, para aceitar ou rejeitar uma estimativa. Nas sessões seguintes, vai ficar patente um movimento muito interessante, em que o grupo vai compartilhando, progressivamente, os modos de falar sobre essas informações e relações percebidas.

5.3. Recortes da atividade dos alunos do ponto de vista das práticas matemáticas e das concepções e atividade matemática

Para discutir as práticas matemáticas que se desenvolveram ao longo dos três meses de trabalho em sala de aula, foi necessário organizar o trabalho em dois eixos, relacionados aos modos como essas práticas deixam entrever e dão oportunidades para que aspectos relacionados ao sentido de número dos alunos sejam discutidos. São eles: I. *Sentido de número, estratégias e procedimentos de cálculo*; e II) *Sentido de número, estimativa e sentidos da adição e da subtração*.

I. Sentido de número, conhecimentos sobre o sistema de numeração decimal, estratégias e procedimentos de cálculo

Primeira fase do trabalho: jogos *Qual é o número?* e *Número alvo*

Para apresentar as práticas matemáticas durante a primeira fase do trabalho, que se estendeu por seis sessões durante as quais os alunos jogaram e discutiram situações problema dos jogos *Número alvo* e *Qual é o número?*, é útil elencar alguns eixos que organizaram as observações ao longo do tempo. Assim, apenas será feita a referência à sessão, a que determinada observação pertence, quando essa informação se fizer necessária.

Na primeira sessão com o jogo *Número Alvo*, observou-se que poucos alunos sabiam nomear números de quatro algarismos, ou se confundiam ao fazê-lo. Seria muito proveitoso, portanto, que fosse proposta uma atividade ou um jogo que pusesse em pauta a leitura de números de quatro algarismos. Assim, a pesquisadora e a professora decidiram interromper temporariamente o trabalho com o *Número alvo* e dedicar duas sessões a um jogo que demandasse a leitura de números de vários dígitos, levando os alunos a nomeá-los, de acordo com o valor assumido por um algarismo em virtude de sua posição no número (*Qual é o número?*). Mesmo subvertendo a ordem do cronograma inicial, será mais adequado apresentar as observações sobre os alunos em ação com esse jogo antes, passando em seguida ao jogo *Número alvo*.

Leitura de números: o jogo *Qual é o número?*[29]

Os conhecimentos que esse jogo mobiliza estão relacionados à tradução das marcas escritas para os números falados, que traz dois desafios às crianças (FUSON, 1992).

O primeiro decorre do fato de que o valor dos números falados está explícito, enquanto que o valor dos algarismos está implícito em suas posições, o que se agrava no contexto desta e de muitas salas de aula, onde não se fala sobre os desafios e as soluções matemáticas, e o número acaba sendo manipulado apenas em sua forma escrita.

O segundo desafio decorre do fato de que as posições dos algarismos não têm valores absolutos como os números falados, e sim valores relativos, de acordo com a posição mais à direita no número. Assim, ao ler um número, é preciso, antes, contar as posições da direita

[29] Jogo apresentado em *na página 72.*

para a esquerda, estabelecendo o valor do primeiro algarismo e, só então, é possível ler o número da direita para a esquerda, inserindo o valor assumido pelo algarismo em determinada posição após dizer o número que ocupa aquela posição. Uma decorrência dessa característica posicional do sistema é que, ao escrever um número que não tem uma das ordens, não é possível simplesmente omiti-la, sob a pena de alterar o valor das ordens à sua esquerda. Ou seja, é necessário usar o zero para que os outros algarismos permaneçam em suas posições corretas (escrevendo, por exemplo, 502 e não 52).

Do ponto de vista das práticas matemáticas, jogar *Qual é o número?* seria uma oportunidade para que os alunos lançassem mão de alguns conhecimentos, tomando decisões ao articulá-los. São eles:

1) Considerar a quantidade de dígitos e o valor atribuído aos algarismos de acordo com suas posições no número, expressando essa consideração ao nomear o número.

2) Articular as informações recebidas a cada jogada sobre o número escondido, produzindo uma tentativa que leve em conta tanto as informações positivas (tem determinado algarismo em tal posição) quanto as negativas (não tem determinados algarismos em tal posição).

Apresentando o jogo

Para a partida de apresentação do jogo, a pesquisadora é o desafiante e a classe é o desafiado. A pesquisadora desenha quatro quadrinhos na lousa, dizendo que eles estão no lugar de algarismos, e que irão representar, então, um número de quatro dígitos. Explica que há um número de quatro dígitos escrito no papel que tem em mãos e que o desafio da classe é descobrir qual é. Para isso, podem fazer tentativas, dizendo números de quatro algarismos que a professora anotará abaixo dos quadrinhos. Quando algum jogador, representando a classe, acertar um dos algarismos do número em sua posição, ela o escreverá no quadrinho correspondente. Desenha dez linhas abaixo dos quadrinhos e avisa que cada uma daquelas linhas representa uma tentativa. O grupo ganha o jogo se conseguir descobrir o número antes que acabem as linhas, e perde se não descobrir o número antes que se acabem as linhas.

Pesquisadora: Então quem quer começar tentando um número de quatro algarismos?

Vários alunos levantaram a mão.

Francisco: Mil.

A pesquisadora anotou o número na linha reservada à primeira tentativa e anunciou que ele não acertou nenhum algarismo, quer dizer, “o número que estava escondido não tem o 1 aqui (apontando o quadrinho que corresponderia à unidade de milhar), nem o 0 aqui (apontando o quadrinho correspondente à centena)” e assim por diante.

Roberto: 8.720.

A pesquisadora não questionou, ainda, o fato de Roberto ter ignorado a informação de que não poderia haver 0 na posição correspondente às unidades.

Rodrigo: 5.000.

Pesquisadora (Depois de escrever o número na lousa e dizer que não acertou nenhum número): Nessa tentativa aqui, já dava para saber que não poderia ser o número 5.000. Quem sabe por quê?

Eduardo: Por causa que o 1.000 tem três zeros.

Na jogada seguinte, outra criança ignorou a informação de que não havia zero na posição correspondente à dezena:

Ramon: Sete mil, duzentos e cinco.

Joaquim (protestando baixinho): Não!

Pesquisadora (escrevendo o número): Quem disse não? Por quê?

Joaquim: Porque não pode ser zero ali!

Pesquisadora: Ah, olha só, o Joaquim ficou de olho, ele lembrou que não dá para ter zero aqui (aponta quadrinho correspondente à dezena), então não dá para ser 7.205.

Outro aluno, a seguir, fez uma observação importantíssima para esclarecer as regras nesse momento, pois há uma interpretação errada, que desconsidera a posição ocupada pelo número.

Carlos: E também não pode ser o 2, que tem no segundo, e o 5, que tem no terceiro.

Voz não identificada: E o 7.

Pesquisadora: Ah, não, mas olha. Esse 5 aqui (aponta o 5 do 5.000) não é o mesmo que esse (aponta o 5 do 7.205). Porque, olha, esse 5 aqui seria quanto?

Algumas crianças: Cinco mil!

Pesquisadora: E esse?

Algumas crianças: Cinco! (figura 8)

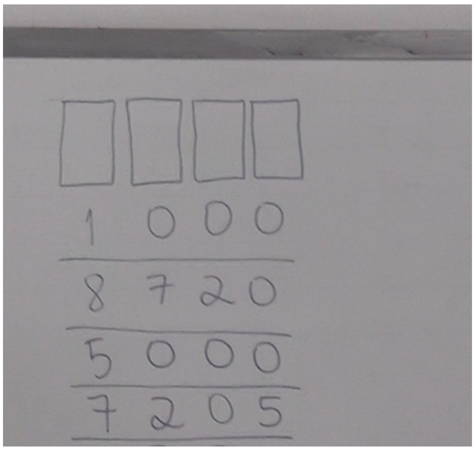

Figura 8: Parte da apresentação do jogo "Qual é o número?", entre pesquisadora e alunos, escrita na lousa.

Quando, ao contrário, alguém propõe um número adequado, considerando todos os algarismos da(s) jogada(s) anterior(es), a pesquisadora também ressalta essa ação, aproveitando para relacionar a posição de cada algarismo com o valor que ele assume.

Após a primeira tentativa, com o número 2.702, não resultar em nenhum acerto, *Eduardo* propõe "três mil, quatrocentos e vinte e seis". (figura 9)

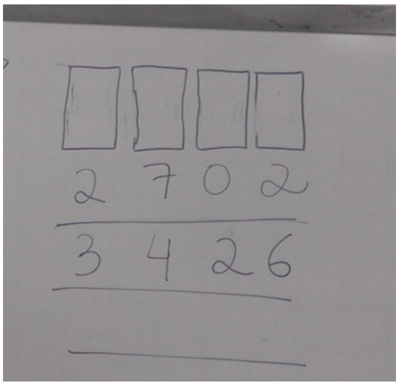

Figura 9: Parte da segunda partida de *Qual é o número?*, entre pesquisadora e alunos, escrita na lousa. O aluno que propõe a segunda jogada considera a informação de que os algarismos apresentados para cada posição, na primeira jogada, não podem ocupá-la na segunda.

Pesquisadora: Olha, gente, o *Eduardo* ficou de olho: já que não era dois mil, ele pôs outro (algarismo) no lugar do mil, já que não era setecentos ele pôs quatrocentos pra mudar, já que aqui nessa casa da dezena não era zero, ele pôs vinte, já que aqui não era dois, ele pôs seis. Foi uma boa jogada, né?

A leitura de números

Ao longo de toda a sessão, nas partidas feitas na lousa (classe *versus* pesquisadora) e nas partidas disputadas em duplas, quase todos os alunos jogaram prestando atenção apenas aos algarismos já descobertos, sem levar em conta as informações sobre os que não poderiam ocupar em determinada posição. Do ponto de vista do objetivo estrito (que os alunos aprendessem a ler e escrever os números), é mais importante que eles considerassem, a cada jogada, os algarismos já descobertos no número[30]. Ou seja, é desejável que se torne presumidamente compartilhado, no grupo, um conhecimento sobre os números que, embora superficial, é fundamental para que os alunos possam expressar idéias sobre números e cálculos em outros contextos.

Para isso, é preciso observar que quando um número tem o 3 na ordem da centena, ele será necessariamente "alguma coisa, trezentos e alguma coisa", ou, um raciocínio mais difícil: se há um zero na ordem da centena, não haverá cem, duzentos, trezentos, quatrocentos etc. no número. O foco principal da atuação da pesquisadora, nessas duas sessões, do ponto de vista da informação que esperava ser presumidamente compartilhada, foi esse.

Nas primeiras rodadas, quando os alunos deviam ditar o número que gostariam de propor, a cada jogada, para que a pesquisadora o escrevesse na lousa, eles frequentemente se confundiam ("quinhentos trezentos e vinte", por exemplo). Ao longo da sessão, a maioria deles passou a falar os números corretamente, com uma regularidade quanto aos erros observados: e praticamente não houve mais erros na leitura nem na escrita de números que tivessem todas as ordem ocupadas por algarismos de 1 a 9.

No entanto, muitos alunos hesitavam quando o número a ser lido tinha o algarismo 0 na casa da centena ou quando havia 0 na posição da dezena. Nas partidas em duplas, quando o desafiado falava o número e o desafiador devia escrevê-lo usando algarismos, observava-se dificuldade semelhante com a escrita dos números: vários alunos escreviam, por exemplo, 5.36 para 5.036, numa transcrição "direta" do número falado para o número escrito, desconsiderando a necessidade de marcar, no número escrito, a posição que não aparecia no número falado.

Um dos alunos, Joaquim, teve uma participação interessante, que merece reflexão, pois o jogo não se reverteu para ele, pelo menos no nível em que é trabalhado, em aprendizagem sobre a leitura dos números de quatro algarismos. Rapidamente ele se tornou um dos melhores jogadores da classe, um dos únicos que observava as informações negativas (levando em conta informações que eliminam determinado algarismo de certa posição). No

[30] A questão de considerar as informações sobre algarismos que não poderiam ocupar determinada posição fez parte das discussões, pois ela é fundamental para uma abordagem adequada do jogo e para uma postura respeitosa em relação às conjecturas dos alunos. No entanto, apenas duas sessões poderiam ser dedicadas a esse jogo, em razão dos objetivos e do cronograma da pesquisa, mas esse tempo é insuficiente para aprofundar essa questão lógica e dar condições aos alunos que construam essas complexas relações.

entanto, até o fim das atividades com esse jogo, ele se confundia na leitura dos números, como podemos observar em um trecho do diário da pesquisadora:

> *Joaquim tem uma participação interessante. Demora a se candidatar para uma jogada, mas comenta a todo o momento as jogadas dos colegas, muito atento às jogadas anteriores. Por exemplo, quando Rodrigo já havia tentado 5.000 sem descobrir nenhum algarismo, Ramon em seguida diz 7.205. Joaquim interrompe: "Não, não tem zero aí!". Faz isso outras, vezes, apontando tentativas incorretas dos colegas. Por fim, decide fazer sua própria jogada, e tem dificuldade para dizer 4.191: "queria o 1 no segundo". A pesquisadora pergunta como se diz o número, Joaquim diz "quatro mil, um?". A pesquisadora informa que seria cem, e ele acrescenta: "quatro mil, cento e novecentos...". "Nesse lugar, os algarismos valem 10, 20, 30", diz a pesquisadora. Joaquim, por fim, conclui sua jogada, absolutamente pertinente tendo em vista as tentativas anteriores, porém sem que isso tivesse ainda resultado em um melhor conhecimento sobre os números. Joaquim é um caso interessante de aluno atento, bom jogador, mas para quem a proposta não cumpriu seu objetivo principal ainda: ele não sabe nomear números de quatro algarismos.*

Situações problema sobre o jogo

As situações foram propostas inicialmente por escrito, para serem resolvidas em duplas. Depois que cada dupla pensou em suas respostas, abriu-se espaço para que elas as apresentassem e as discutissem com o grupo.

As questões foram elaboradas coerentemente com o objetivo de levar os alunos a compartilharem seus conhecimentos sobre o valor assumido por um algarismo de acordo com a posição ocupada por ele em determinado número, mesmo que em um nível apenas de nomeação. A escrita por extenso, neste caso, tem a função de comunicar o modo como a criança lê o número em questão. A ideia era que, ao trabalhar em duplas, eles pudessem chegar a um acordo sobre a leitura daqueles números, anotando então sua solução.

Foram escolhidos números que apresentassem 0 na posição da centena e/ ou da dezena porque a presença do zero em determinada ordem no número escrito faz suprimir a parte correspondente a essa ordem no número falado (FUSON, 1992), o que traz dificuldades aos alunos quando começam a lê-los. Isso também se foi percebido, com muita frequência, na escrita de números nas três primeiras sessões, em que apareceram muitas vezes produções do tipo 1.53 quando o aluno queria escrever 1.053

Na primeira questão, apresentada abaixo, o aluno deveria observar quais dos números apresentados como alternativa seriam números de três algarismos e, em seguida, escrever esses números usando algarismos.

1) Marina e Fábio estão jogando *Qual é o número?* com três algarismos.

a) Assinale as alternativas que podem ser boas tentativas para a primeira jogada.

( ) mil, duzentos e trinta e sete

( ) trezentos e dois

( ) duzentos

( ) quatro mil e trinta e quatro

( ) sete mil e três

( ) cento e vinte

b) Escreva com algarismos apenas os números que você assinalou na questão acima.

Observando as atividades individuais, foram identificados dois erros relacionados à presença do zero intercalado nos números. Muitas crianças não assinalaram a alternativa "trezentos e dois", como jogada possível para um número de três algarismos, e muitas assinalaram "sete mil e três" como se fosse um número de três algarismos, escrevendo-o depois como 7.03.

Na segunda questão, o desafio era o mesmo, mas com números de quatro algarismos.

2) Marcos e Fernanda estão jogando *Qual é o número?* com quatro algarismos.

a) Assinale as alternativas que podem ser boas tentativas para a primeira jogada.

( ) cinco mil, quinhentos e dois

( ) três mil e quarenta

( ) setecentos e onze

( ) mil, oitocentos e setenta e nove

( ) duzentos e três

( ) oito mil e sete

b) Escreva com algarismos apenas os números que você assinalou na questão acima.

Várias crianças ficaram em dúvida se "setecentos e onze" seria escrito com quatro algarismos. Alguns alunos assinalaram "oito mil e sete" e/ ou três mil e quarenta (afirmando, portanto, que esses números são escritos com quatro algarismos), mas, ao escrevê-los, produziram números como 817 em vez de 8.007 e 340 em vez de 3.040.

Na terceira questão era necessário considerar, além do número de dígitos, o fato de que uma das posições estaria ocupada com determinado algarismo.

A opção por colocar o zero na posição correspondente à centena e o 1 na posição correspondente à dezena foi feita, principalmente, tendo em vista o fato de que números desse tipo não permitem uma transcrição direta do número falado para o escrito.

Ao colocar o 1 na posição da dezena, a intenção foi colocar em evidência uma situação em que a irregularidade da sequência numérica oral em Português (e em outras línguas) no intervalo de 11 a 19 (FUSON, 1992) dificulta a atribuição do valor ao algarismo pela transcrição direta da fala para o número escrito. Observou-se em outros momentos, que alguns alunos, perguntados sobre o valor do 1 em um número como 3.215, responderam "quinze". Aqui, no entanto, a situação é inversa, e o aluno tem opções para guiar seu raciocínio. De certa forma, a situação não se mostrou eficiente para colocar a discussão desejada em pauta.

3) Escolha os números que podem ser boas escolhas considerando o algarismo já descoberto em cada situação do jogo apresentada abaixo.

a)

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{1}\ \boxed{}$

( ) mil, quinhentos e vinte
( ) três mil, cento e dezessete
( ) cinco mil, setecentos e onze

b)

$\boxed{}\ \boxed{0}\ \boxed{}\ \boxed{}$

( ) sete mil, oitocentos e dois
( ) seis mil e trinta
( ) mil e onze

c)

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{0}$

( ) quatro mil, cento e vinte
( ) três mil, quinhentos e três
( ) mil e trinta e seis

Nessa questão, talvez pela oferta de três alternativas como opção para cada subitem, houve menos erros do que nas questões anteriores. Mesmo assim, o zero ocupando uma das ordens trouxe dificuldades para alguns alunos, que pareciam não localizar exatamente a posição que deveriam omitir no número falado. Roberto, por exemplo, assinalou “sete mil oitocentos e dois” como jogada possível no subitem b, quando o tabuleiro apresentava um zero na casa da centena. Outros alunos cometeram erros semelhantes.

Na quarta questão, não havia alternativa com números por extenso. A proposta, aqui, era que os alunos compusessem um número de quatro algarismos com as restrições dadas e depois o lessem corretamente. Como a pesquisadora considerou interessante que os alunos pudessem pensar e discutir com sua dupla previamente a leitura desses números, foi solicitado que escrevessem por extenso os números que iam compondo, ou seja, a escrita por extenso tem, neste caso, como único objetivo, registrar a leitura que os alunos fariam desses números.

4) Escreva um número que seja uma boa escolha, considerando os algarismos já descobertos em cada situação:

a)

$\boxed{}\ \boxed{0}\ \boxed{3}\ \boxed{}$

____

Por extenso:

____

b)

$\boxed{5}\ \boxed{}\ \boxed{1}\ \boxed{}$

____

Por extenso:

____

d)

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{0}\ \boxed{4}$

____

Por extenso:

____

Os erros permaneceram semelhantes aos das outras questões. Mara, por exemplo, compôs 5.019 e o leu como “quinhentos e dezenove”. Já Antônio compôs 5.030 e o leu como “quinhentos mil e trinta”.

Na discussão em grupo, os alunos que se propuseram a apresentar suas soluções o fizeram corretamente. Nosso encaminhamento foi direcionado apenas para essa nomeação e, assim, optamos por não incentivar um debate mais aprofundado. Ademais, a hipótese, já expressa nos objetivos do trabalho, é a de que as discussões sobre cálculo são muito mais fecundas para se tratar da compreensão do sistema numérico.

Sentido de número, valor posicional, cálculo aproximado e cálculo exato: o jogo *Número alvo*[31]

Na primeira sessão, foi possível observar que os conhecimentos da classe sobre números e seu repertório de cálculo mental na adição e na subtração eram bastante restritos. Algumas decisões foram tomadas em relação a essa situação: a primeira, de que os algoritmos escritos, convencionais da adição e da subtração, poderiam ser usados lado a lado com as estratégias de cálculo, mental ou escrito, baseadas em decomposições e recomposições de números. Embora a pesquisadora fosse valorizar mais as estratégias do último tipo, coerentes com os objetivos da pesquisa, ela declarou aos alunos que poderiam recorrer ao algoritmo tradicional sempre que julgassem necessário[32].

A segunda decisão dizia respeito a começar o trabalho de acordo com o planejamento inicial, com o jogo *Número alvo* de quatro algarismos, mas ajustar o desafio ao desenvolvimento das sessões. Assim, após duas sessões com o jogo *Número alvo* com quatro algarismos, em que grande parte do grupo mostrou dificuldades para acompanhar as estratégias de cálculo mental apresentadas por alguns colegas, a pesquisadora decidiu propor o jogo com três algarismos nas duas sessões que ainda seriam dedicadas a ele.

---

[31] Jogo apresentado na página 72.

[32] Essa decisão, embora não seja coerente com as ideias sobre o ensino de algoritmos no Ensino Fundamental defendidas no presente trabalho (KAMII; DOMINICK, 1998), têm sua justificativa: neste caso, a pesquisadora trabalhou com os alunos apenas duas vezes por semana durante três meses do ano escolar. Sendo um trabalho assim restrito, a pesquisadora precisou buscar seus objetivos sem, no entanto, fazer com que os alunos abandonassem um recurso que, provavelmente, seria cobrado ao longo do ano letivo, após o término da pesquisa.

Para apresentar o trabalho dos alunos com esse jogo, foram reunidos exemplos significativos da prática matemática com esse jogo. Ao fazer isso, deixou-se em segundo plano a sessão a que pertencem esses exemplos, desvinculando-os de sua ordem cronológica, a menos que essa informação for relevante.

Do ponto de vista das práticas matemáticas, jogar *Número alvo* seria oportunidade para que os alunos colocassem em jogo alguns conhecimentos, tomando decisões ao articulá-los. São eles:

1) A consideração do valor atribuído ao algarismo de acordo com sua posição no número, não apenas nominalmente, mas também em relação às outras posições;

2) A avaliação das diferenças entre os dois números compostos pelos jogadores e o número alvo, de maneira a decidir se era necessário apenas analisar os números, empregar um cálculo aproximado ou calcular a diferença exata.

3) A ideia de diferença entre dois números, criando ou adotando um procedimento apresentado por outros para calculá-la, quando necessário. Um procedimento que se estabelece progressivamente no grupo, por sugestão da pesquisadora, é a contagem ascendente ou descendente em intervalos de 10 em 10, de 100 em 100 e de 1.000 em 1.000, como recurso para calcular a diferença entre dois números, quando necessário.

1) Quanto à consideração do valor atribuído a um algarismo no número, boa parte dos alunos muito rapidamente se apropriou da possibilidade de aproximar do alvo o número que estão compondo pela mudança de um ou mais dígitos de lugar (Exemplos 1 e 2).

Exemplo 1

A classe foi dividida em dois times, e o alvo combinado é 6.000. A pesquisadora escreveu os tabuleiros na lousa e sorteou os dois algarismos para o primeiro time (3 e 6).

Pesquisadora: Levanta a mão quem quer formar um número.

Antônio: O 6 no primeiro e o 3 no segundo (um colega fala algo baixinho para ele). Não, o 3 no último.

Pesquisadora: Por que, gente, que é melhor colocar o 3 aqui (aponta posição correspondente à unidade) do que aqui (aponta posição correspondente à centena)?

Carlos: Porque se colocar no segundo vai ficar seis mil e trezentos, se colocar no terceiro vai ficar seis mil e trinta; então é melhor colocar no último, que fica seis mil e três.

Claudia: Que é mais perto de 6.000.

Exemplo 2

Com o alvo 5.000, e algarismos sorteados 5 e 3, Helena foi à lousa compor um número, e fez 5.003.

Pesquisadora (comentando o trabalho dos alunos em duplas, que havia observado): Todo mundo quis por 5.000, ninguém quis por 3.000 aí, né? Por quê?

Claudia (com outras vozes ao fundo): Porque 5.000 já é o alvo, aí.

Pesquisadora: Agora, olha só. Eu também vi que quase todo mundo pôs o 3 aqui (indicando a posição correspondente à unidade). Por quê? Tinha outros lugares onde o 3 poderia ir, né? (vai perguntando ao grupo quanto o 3 valeria em cada posição no número). Por que você escolheu por o 3 aqui (posição da unidade), Helena?

Helena: Porque aqui, se tirar só três já chega no 5.000. Aqui, ia ter que tirar 30, aqui ia ter que tirar 300.

Nas primeiras sessões, muitos dos alunos não nomeavam corretamente os números, mas alguns entre eles pareciam ter alguma noção do valor que aquele número, quando escrito, representava e, às vezes, uma boa noção de cálculo (exemplos 3, 4 e 5).[33] Essa questão pode ser pensada no contexto das relações entre número falado e número escrito, já mencionada (FUSON, 1992; VERSCHAFFEL et al., 2007).

Exemplo 3

Pesquisadora: Você quer por como?

Carlos indica 7.200.

Pesquisadora: (...) Este [7.200] é mais perto do 5.000 do que este [2.700]?

Alunos: Ééé! (parecem induzidos a responder assim, pois a resposta é imediata).

Os dois números ficam escritos na lousa.

Joaquim: Pode fazer assim, professora: põe o 7 na frente, o 0, o 0 e o 2 [7002].

Pesquisadora: Por que você achou melhor fazer esse?

Joaquim: Porque ia ficar mais perto.

Pesquisadora: Quem quer tentar explicar por que ia ficar mais perto do 5.000 se a gente pusesse o 2 aqui (indica posição da unidade) e não aqui (indica a centena)?

[33] Essa dificuldade de nomear os números apareceu com força na primeira sessão de *Número alvo*. As duas sessões que se seguiram foram dedicadas ao jogo *Qual é o número?*, descrito anteriormente, e nas sessões seguintes a maioria dos alunos passou a nomear corretamente os números.

(...)

Joaquim: É que eu... o 7.200 vai mais longe do 5.000. O sete... sete mil e ... (hesitando, em dúvida sobre como ler o número que compôs).

Uma criança completa a leitura para Joaquim, baixinho, e ele continua.

Joaquim: ... dois vai mais perto.

Exemplo 4

Helena e *Claudia* disputaram uma partida com número alvo 2.500.

Claudia sorteou os algarismos 8 e 9, e decidiu formar 890, comentando: “Eu tirei ‘oitenta e nove’... não, ‘oitenta e noventa’, que é melhor”.

Claudia não sabia ler o número; no entanto, compreendia os números escritos o suficiente para saber que valia mais a pena compor um número de três algarismos, deixando um dos zeros do tabuleiro à esquerda no número, do que um número em torno de oito ou nove mil.

Exemplo 5

Para justificar que 7.002 é um número mais próximo de 5.000 do que 4.700 [os três números estavam escritos na lousa], Gabriel propôs adicionar 2.000 a um deles e subtrair 2.000 do outro, mas disse duzentos em vez de 2.000.

André: O de cima tá 2.700, se colocasse mais *duzentos* ia ficar 4.700. E aquele ali [7.002], se colocasse menos *duzentos*, ia ficar 5.002.

Pesquisadora: É, mas é duzentos mesmo? Porque, olha, quanto é 2.700 mais 200?

André: Ah, é 2.000!

Após as duas sessões dedicadas ao jogo *Qual é o número?*, é possível perceber que aumentou a quantidade de alunos que sabem ler e escrever números de quatro algarismos. Depois disso, quando um aluno se confundia ao ler ou escrever um número, alguém normalmente o corrigia, algo que não acontecia nas três primeiras sessões.

2) O jogo, na primeira sessão, mostrou-se um desafio exigente demais para quase todas as crianças da classe: elas precisavam buscar tantos objetivos intermediários que acabavam perdendo a referência do que buscavam resolver. A pergunta inicial – qual dos números formados é mais perto do alvo? – teve que se desdobrar em tantas outras perguntas, e

cada uma dessas perguntas exigia tal mobilização para sua resolução, que ficava difícil manter o sentido do que se pretendia.

Ao mesmo tempo, já na primeira sessão apareceu, ainda que na fala de muito poucos alunos, o tipo de abordagem do desafio que se esperava ver emergir como presumidamente compartilhado do grupo: os procedimentos de cálculo não são preestabelecidos, mas determinados em função do número em jogo a cada rodada e do objetivo. Ou seja, em vez de realizar indiscriminadamente o cálculo exato da diferença, alguns alunos procuraram outros modos de justificar a maior proximidade de um ou outro número com o alvo. O Exemplo 5, acima, a despeito do lapso com a leitura do número, é exemplo de uma estratégia desse tipo, assim como o Exemplo 6, a seguir.

Exemplo 6

Alguns alunos pretendiam calcular as diferenças para decidir qual dos números, se 4.700 ou 5.002, é o mais próximo de 5.000.

Pesquisadora: Será que a gente precisa calcular isso mesmo? Tem outro jeito de garantir que um é mais perto do alvo do que o outro?

Claudia: Vai ficar mais perto o de baixo, porque para chegar no 5.000, do 5.002 só precisa tirar dois.

Pesquisadora: Olha, gente, o que a Claudia disse. Ela percebeu que do 5.002 para o 5.000 era bem perto, só tinha que tirar dois. Mas do 4.700 para o 5.000, já da para saber que é mais do que isso.

A pesquisadora repetiu o que Claudia disse, ressaltando essa solução como uma solução adequada.

Em uma das sessões, foi apresentada a seguinte situação problema ao grupo:

Marcela e Roberto estão jogando *Número alvo*, e seu alvo é o número 5.000.

a. Na primeira rodada, Marcela sorteia os números 3 e 5. Qual o número mais próximo do alvo que ela pode formar? Justifique.

b. Roberto sorteia 4 e 2. Qual o melhor número que ele pode formar? Justifique.

c. Quem ganhou essa rodada? Justifique.

Essa situação poderia ser resolvida, propositalmente, sem que fosse necessário calcular as diferenças, pois a diferença de um dos números possíveis de serem formados era de apenas três em relação ao alvo. Boa parte dos alunos observou isso e argumentou que o número 5.003 era mais perto do alvo porque “só tinha que tirar três”.

Para a discussão em grupo, a pesquisadora escreveu o alvo na lousa e os tabuleiros dos dois jogadores (figura 10), enquanto lia as questões para o grupo. Enquanto o item *a* era lido, já havia crianças com a mão levantada, pedindo a palavra. Ela explicou, então, que nessa parte da aula eles primeiro trabalhariam em duplas, para depois falarem para a classe o que pensaram. Avisou também que, para decidir quais números formar e quem era o ganhador da rodada, poderiam usar qualquer tipo de cálculo (Carlos perguntou se poderia usar a conta armada), e que o mais importante era poder explicar por que se decidiram por determinado número.

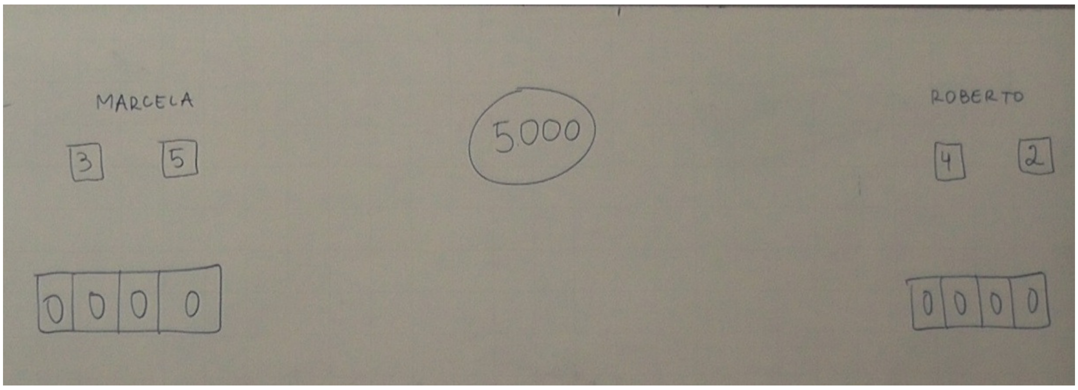

Figura 10: Situação sobre o jogo *Número alvo* representada no quadro.

Observando o trabalho dos alunos nas duplas, nota-se que muitos alunos fizeram erros ao escolher a melhor posição para os algarismos sorteados, deixando de posicioná-los em uma casa que seria mais conveniente para aproximar o número composto do alvo. Os alunos que se propuseram a apresentar suas soluções ao grupo, no entanto, o fizeram do modo mais eficiente.

A situação apresentada não se mostrou frutífera para o debate, talvez por permitir a composição de um número demasiadamente próximo do alvo, deixando evidente demais que ele seria o ganhador:

Helena foi à lousa compor o número da Marcela, e fez 5.003.

(...)

Pesquisadora: Ah, então a diferença entre 5.000 e 5.003 é quanto?

Muitos alunos: Três.

Cristiane foi compor o número de Roberto, e fez 4.200, com o que todos concordaram.

Antônio foi anunciar quem ganhou a rodada, e apontou Marcela.

Pesquisadora: Por quê?

Antônio: Porque 5.003 é mais perto do 5.000.

3) Nas primeiras sessões, os alunos não apresentaram estratégias pessoais para determinar a diferença entre os números compostos pelos jogadores e o alvo. A contagem em intervalos de 100 e de 10 é sugerida pela pesquisadora, partindo da hipótese de que, por ser um tipo de procedimento apoiado explicitamente na estrutura multiunidades do número, colocaria em pauta questões relacionadas a essa estrutura. De acordo com Fuson (1992), como já mencionado, essa estruturação do número segue um sistema de agrupamentos: os números são compostos de multiunidades (*multiunits*), compostas por certo número de unidades ou de multiunidades menores. Para compreendê-las, as crianças devem construir estruturas conceituais que reflitam os tipos de multiunidades usadas e as relações entre elas. Ou seja, saber que, a cada multiunidade maior correspondem dez multiunidades da categoria imediatamente menor.

O uso da contagem em intervalos começa a desvelar uma ideia de número pouco estruturada, pois muitas das crianças da classe não sabem o que virá quando se completa uma das ordens do número, ou ficam em dúvida sobre qual a diferença entre números da mesma categoria multiunidades, como 1.000 e 2.000 (Exemplo 7).

Exemplo 7

Victória e Pedro tentam descobrir a diferença entre 1.600 (número composto por Pedro) e seu alvo, 3.000, sem sucesso. A pesquisadora sugeriu que contassem de 100 em 100.

Pedro: 1,700, 1.800, 1.900, 10.000.

Tenta várias vezes, pede ajuda para Victória (numa sugestão da pesquisadora), mas não sabe o que viria depois de 1.900, contando de 100 em 100.

Pesquisadora: Quanto será que dá se eu fizer 1.900 mais 100?

Pedro (pensando durante alguns segundos): Dois mil?

Em outro momento, a pesquisadora pergunta a Pedro como ele descobriu quanto seria 1.900 mais 100, e ele explica que "fez a conta na cabeça" [desenhando mentalmente o algoritmo escrito da adição].

Pedro: Aí faltam mais 100.

Pesquisadora: Faltam 100? Dois mil mais 100 dá quanto?

Pedro: Três mil.

Pesquisadora: Não, 2.000 mais 100 dá 2.100.

Pedro: Faltam 1.000?

Pesquisadora: Sim, de 2.000 para 3.000 faltam 1.000.

Como pareciam não ter a contagem em intervalos memorizada e não demonstravam um conhecimento sobre números que lhes permitissem dizer, rapidamente, quanto seria, por exemplo, o intervalo entre 1.000 e 2.000, ou entre 1.900 e 2.000, muitos dos alunos perdiam o objetivo inicial do cálculo ao longo do processo (Exemplo 8).

Exemplo 8

Pedro contou de 100 em 100, do 1.700 ao 2.000, e, em seguida, descobriu, relutante, que do 2.000 para o 3.000 ainda faltavam 1.000.

Pesquisadora: Quanto será que faltava do seu número [1.700] até 3.000, então?

Pedro: Mil.

Pesquisadora: Mil a partir do 2.000, mas quanto você já tinha posto antes?

Pedro não conseguiu recuperar.

Os alunos tiveram muitas dificuldades para descobrir qual dos jogadores compôs o número mais próximo do número alvo. Quase ninguém conseguiu fazer cálculos aproximados quando isso era possível, e acabaram tendo que se pautar pelo cálculo exato da diferença, tendo encontrado muitas dificuldades nesse cálculo. Em primeiro lugar, muitos alunos não perceberam que uma subtração, ou que descobrir o quanto se deve adicionar ao menor número para chegar ao maior, poderia resolver-lhes o problema, o que mostra uma falta de conhecimento do sentido dessas operações (MCINTOSH, 1992); em segundo lugar, muitas crianças não tinham um procedimento de cálculo garantido na subtração.

A reta numérica vazia pareceu, por isso, um recurso bastante adequado para que os alunos pudessem registrar as etapas de seu cálculo, por permitir adicionar ou subtrair o quanto se achar necessário ou conveniente, retomando o cálculo a qualquer momento. Essa característica, de permitir retomar o percurso feito, é especialmente importante, tendo em vista os conhecimentos pouco elaborados sobre números e a falta de agilidade do grupo para o cálculo não convencional, assim como o objetivo da pesquisadora de que muitos desses cálculos pudessem ser apresentados ao grupo.

A reta numérica vazia foi apresentada como um recurso possível[34], lado a lado com o cálculo mental sem nenhum registro (desde que suas etapas fossem descritas oralmente, caso em que a pesquisadora tratava de anotar as etapas no quadro, para que os outros alunos pudessem acompanhar o percurso descrito) ou documento em sentenças matemáticas sucessivas, ambos baseados em decomposições e recomposições dos números. No entanto, mesmo contando com o registro, grande parte dos alunos encontrou dificuldades para adicionar, e dificuldade ainda maior para subtrair centenas simples ou unidades de milhar dos números com os quais trabalhavam sem apoiar-se no algoritmo escrito convencional.

Para uma nova rodada de *Número alvo* em duplas, a pesquisadora optou por propô-lo com três algarismos, já que, tanto durante as partidas em duplas quando nas discussões em grupo (exceto na sessão imediatamente anterior, quando os números facilitavam a decisão e os alunos que tiveram dificuldades no trabalho individual decidiram não se manifestar), vários alunos precisavam de muita ajuda na hora de calcular as diferenças quando não conseguiam decidir qual o número mais próximo do alvo.

Um dos focos da pesquisadora foi fazer circular estratégias para calcular a diferença entre os números compostos e o alvo que se baseassem em um olhar para os números em pauta, ou seja, não fossem estratégias definidas *a priori*, e sim selecionadas de acordo com a situação (Exemplo 9). Também procura evidenciar a utilidade da contagem em intervalos de 100 e de 10, embora a oportunidade de pedir que os alunos mostrem isso tenha sido perdida (Exemplo 10).

Exemplo 9

Claudia foi ao quadro mostrar a diferença entre 400 (alvo) e 609. A pesquisadora pediu, explicitamente, que ela mostrasse na reta como pensou para saber a diferença.

Pesquisadora: Gente, vocês acham que ela tem que pôr o 609 para cá do 400 (mostrando a região da reta à direita do 400) ou para lá do 400?

Várias crianças: Para cá!

Pesquisadora: Então, Claudia, eles já te deram essa dica.

[34] Apesar desse cuidado, observou-se que os alunos notaram a preferência da pesquisadora por esse recurso, procurando empregá-lo mesmo sem tê-lo compreendido, como mencionado da sessão 4.2, sobre as normas sociomatemáticas.

Claudia anotou os dois números na reta, depois fez dois arcos entre o 400 e o 609, um representando +200 e outro representando +9 (figura 11).

Pesquisadora: Por que você fez dois pulos?

Claudia: É porque fica fácil: Quatrocentos mais 200 é 600; 600 mais 9 é 609.

Pesquisadora: Então quanto é a diferença entre 400 e 609?

Claudia: É 209.

Pesquisadora: Agora, olha o que a Victória (criança que havia composto o 609 no jogo) falou. Ela falou “se eu pusesse o 9 aqui” (apontando a posição correspondente à dezena)... o que ia acontecer com o número, gente, se a Victória pusesse o 9 aqui?

Alunos: Ia ficar 690.

Pesquisadora: E onde que o 690 ia estar nessa reta, gente?

Resmungos apenas.

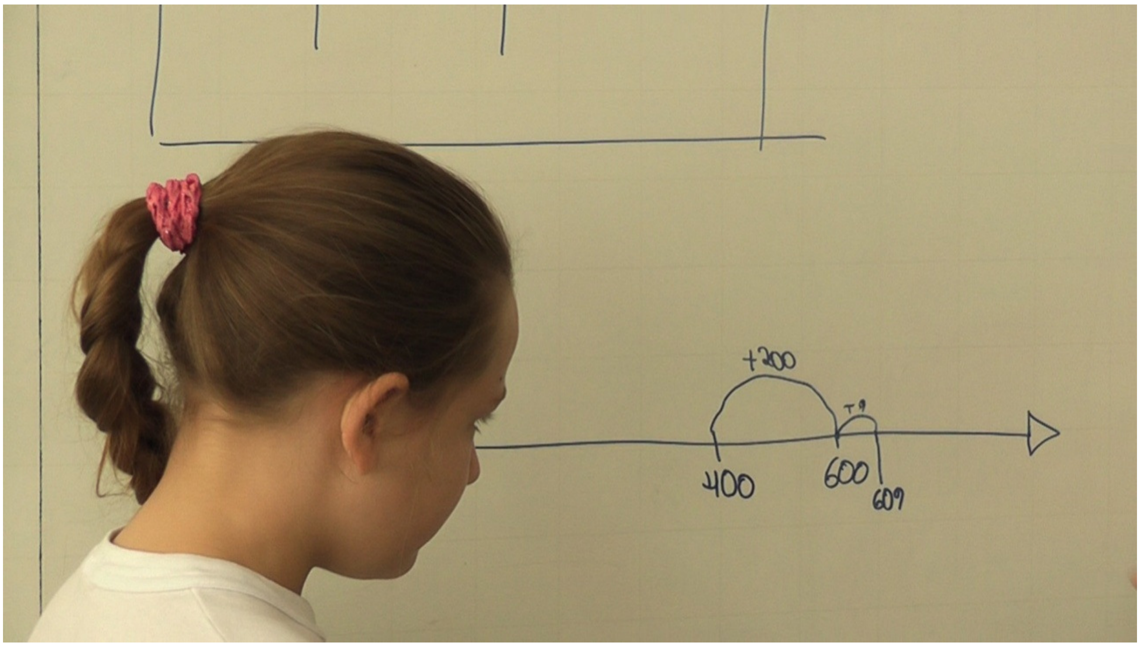

Figura 11: Reta construída por Claudia para mostrar a diferença entre 400 e 609.

Pesquisadora: Mais para lá do 609 (apontando região à esquerda do 609), ou mais para cá do 609?

Vários alunos: Mais para cá.

Pesquisadora: A mesma coisa que a Victória falou. Porque, para pular do 600 para o 690, a gente em que pular quanto?

Joaquim: Como?

Pesquisadora: Seiscentos mais quanto que dá 690?

Alguns alunos: Noventa.

Pesquisadora: Então ia ser um pulo maior, não é? A mesma coisa que a Victória falou, agora deu para ver na reta.

Exemplo 10

Pesquisadora: Agora sou eu (sorteando dois algarismos para si). Ih, tirei 1 e 0.

Crianças riem.

Pesquisadora (enquanto escrevia o número que compôs, 100)*:* Quem ganhou?

Crianças: A Victória!

Pesquisadora: A Victória, né?, porque do 100 para chegar no 400...

Joaquim: Precisa de 300.

Acompanhando as partidas em duplas, foi possível observar parte das crianças lidando com os números com desenvoltura, atribuindo significado à diferença e usando argumentos pessoais para justificar seu raciocínio (Exemplo 11). Por outro lado, parte da classe teve dificuldades para elaborar uma estratégia pessoal e solicitou a ajuda da pesquisadora ou da professora (Exemplo 12).

Exemplo 11

Marcos e Victória (alvo 500)

Victória compõe 470 e comenta: “o 470 é mais perto do 500 do que o 407”

Marcos compõe 310 e diz que Victória ganhou.

Pesquisadora: Por que já dá para você saber que a Victória ganhou sem calcular a diferença?

Marcos: Porque o meu é trezentos, o dela é quatrocentos, e quatrocentos é mais perto de quinhentos do que trezentos.

Exemplo 12

Pedro e Andrea (alvo 500)

Pedro tentou descobrir se valia mais a pena compor 280 ou 802, com alvo 500. Pediu ajuda à pesquisadora, que sugeriu que ele colocasse os três números em uma reta. Pedro se propôs a fazê-lo, mas pediu ajuda passo a passo. Começou dizendo que pretendia adicionar 300 ao 280 e percebeu que ia passar do alvo, então ficou paralisado.

Pesquisadora: O que você quer fazer?

(...)

Pesquisadora: Você está fazendo alguma conta?

(...)

Pesquisadora: Então quer experimentar adicionar 200 primeiro?

Pedro concorda, e diz que dá 480.

Pesquisadora: Do 480 para o 500 quanto falta?

Pedro: Vinte. (Isso foi um avanço em relação a sessões anteriores, em que ele se atrapalhava ao contar de dez em dez – embora os números agora fossem de três algarismos).

Pesquisadora: Então qual é a diferença entre 280 e 500?

(...)

Pesquisadora: Quanto você pôs no 280 para chegar no 500?

Pedro: Quatrocentos e oitenta.

Pesquisadora: Olha, você estava no 280, adicionou 200, depois adicionou 20. Quanto você adicionou?

Pedro "arma" uma adição pelo algoritmo tradicional, ao lado da reta (480+200+20=700) e responde: "Setecentos". (figura 12)

Pesquisadora: Você adicionou tudo isso, mesmo? Eu vi que você pôs 200 (apontando na conta que ele fez), e pôs o 20 (apontando), agora 480 eu não vi você adicionando não. Olha aqui (apontando na reta), o 480 é onde você chegou quando pôs 200, não é?

(...)

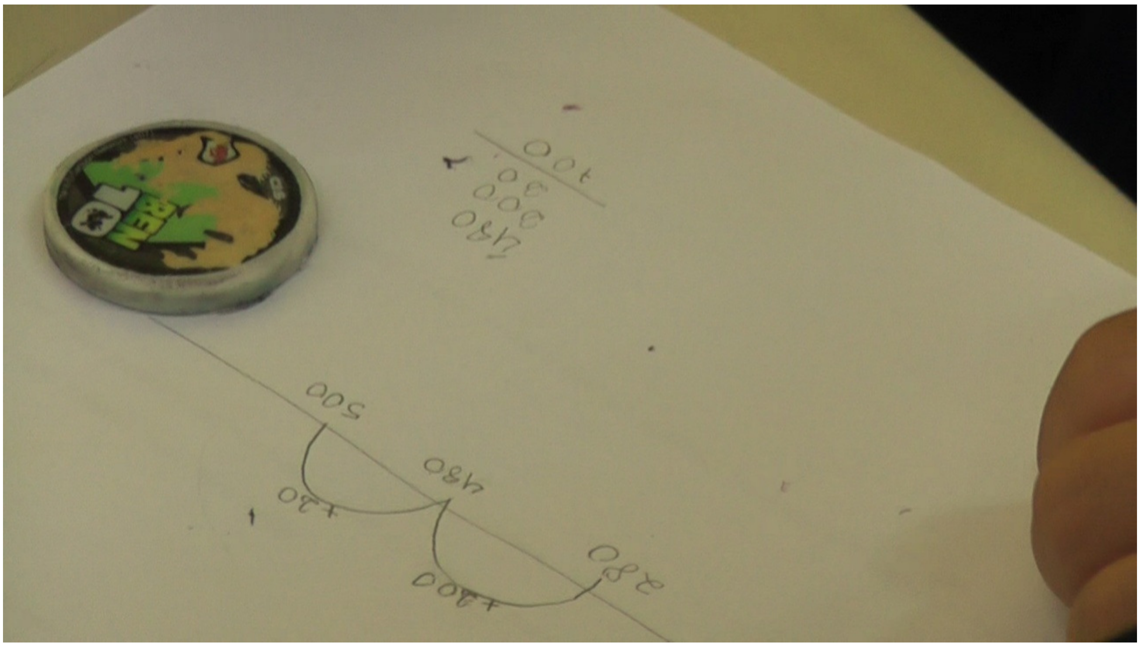

Figura 12: Pedro faz a reta e a adição pelo algoritmo tradicional, o que não o ajuda atingir seu objetivo.

Pesquisadora: Você pôs 200, depois pôs 20, então qual que é a diferença?

Pedro (sem mostrar convicção): Duzentos e vinte[35]?

Pesquisadora: É. Agora tem que ver com o outro número que você pensou.

Pedro. calcula a diferença entre 500 e 802 na mesma reta.

Pesquisadora: Olhando a reta que você fez, qual número é mais perto do alvo?

Pedro: O 802.

Pesquisadora: Qual era a diferença entre o alvo e 280?

Pedro.: Duzentos e vinte.

Pesquisadora: E entre o alvo e 802?

Pedro: Trezentos e dois.

Pesquisadora: Então qual é mais perto?

(...)

Pesquisadora: Qual que deu o pulo menor?

Pedro: Duzentos e oitenta.

Pesquisadora: Então que número você vai escolher?

Pedro: Duzentos e oitenta.

Terminado o tempo destinado às partidas em duplas, dois alunos ainda não decidiram quem ganhou uma rodada, e a pesquisadora trouxe essa questão para o quadro:

Pesquisadora: O Joaquim e a Carolina estão querendo saber quem ganhou uma rodada: o Joaquim fez 100 e a Carolina fez 809. O alvo é 500. Quem vai ajudar os dois a decidir? Vou fazer uma reta aqui, e colocar o alvo (500). Para que lado tenho que pôr o 100? (alunos indicaram corretamente) E o 809? (alunos indicaram corretamente).

Augusto foi ao quadro calcular a diferença entre 100 e 500, e disse que não tinha ideia de como fazer. Francisco sugeriu que ele fosse "andando" na reta de cem em cem. Augusto fez isso com ajuda, inclusive para saber onde anotar o número que estava adicionando e onde anotar o número a que chegou. No entanto, essa é uma situação proveitosa porque explicita a contagem de 100 em 100, algo que boa parte dos alunos não dominava (figura 13). É interessante observar que Augusto, nos primeiros saltos de 100 na reta, esperou que lhe dissessem cada passo a ser dado, mas, nos últimos saltos de 100 para chegar ao 500, fez sozinho.

[35] Percebe-se que essa resposta foi totalmente induzida pela pergunta da pesquisadora.

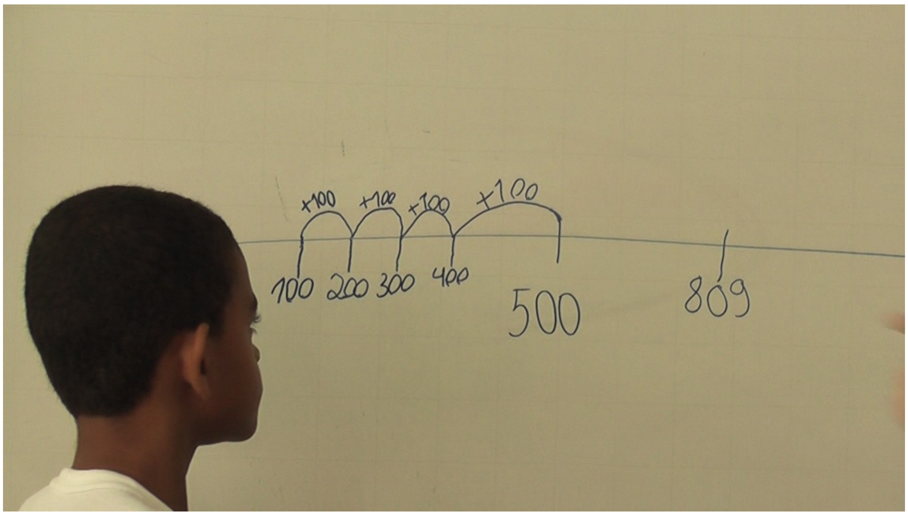

Figura 13: Augusto explicita contagem de 100 em 100 no quadro.

Cristiane foi ao quadro calcular a diferença entre 500 e 809, e já trouxe a informação de que deve acrescentar 300 ao 500 para obter 800. No entanto, é possível inferir que recebeu essa orientação de um colega, porque, depois de fazer isso, não sabia o quanto adicionar para ir do 800 ao 809. Alguns colegas a ajudaram, e ficou estabelecido que o 809 era mais próximo do alvo do que o 100.

Em outra sessão, os alunos deviam resolver três situações hipotéticas sobre o jogo, trabalhando primeiro em duplas, para então discutir as soluções encontradas no grupo. Receberam uma folha com as questões apresentadas a seguir.

1. Carlos e Fábio estão jogando *Número alvo*, com o alvo 400.

a. Carlos sorteou os algarismos 3 e 4. Qual o melhor número que ele pode formar?

0 0 0

Justifique.

b. Fábio sorteou os algarismos 8 e 7. Qual o melhor número que ele pode formar?

0 0 0

Justifique.

c. Qual dessas crianças ganhou a rodada? Justifique.

2. Carla e Márcia estão jogando com o alvo 650.

a. O número que Carla formou é menor do que o alvo, e a diferença entre eles é de 80. Qual é o número que Carla formou?

R: ____

b. O número que Márcia formou é maior do que o alvo, e a diferença entre eles é de 70. Qual o número que Helena formou?

R: ____

Observando o trabalho nas duplas, foi possível perceber que os alunos estavam lidando muito bem o com o valor dos algarismos de acordo com sua posição ao compor os números, nos subitens a e b da questão 1. Ao mesmo tempo, várias crianças souberam dizer quem foi o vencedor da rodada (subitem c) sem precisar recorrer ao cálculo exato. A escolha da pesquisadora e da professora foi discutir a situação 2, que trazia questões pertinentes ao estudo, por se tratar de uma situação em que é dada a diferença e um dos números (o alvo), para que se descubra o outro. Trata-se de problemas do tipo comparar, descrito em muitas pesquisas como uma estrutura que costuma trazer dificuldades aos alunos (FUSON, 1992). Além disso, o subitem a traz uma situação que tem sido um desafio para grande parte dos alunos do grupo: para calcular 650 menos 80, é o algarismo que ocupa a posição da dezena no subtraendo é maior do que o algarismo que a ocupa no minuendo.

Cristiane foi ao quadro resolver o subitem 2a. A pesquisadora desenhou a reta na lousa, e acabou por fazer parte da tarefa dos alunos, pois direcionou totalmente o cálculo:

Pesquisadora: aqui está a reta, o 650 (escrevendo). O número que a Carla formou é menor do que o alvo. Então onde ele vai estar? (crianças apontaram) É, vai estar para cá. E a diferença entre o alvo e o número que a Carla formou é 80. Então o que você quer fazer?

Voz não identificada: Tirar 80.

Pesquisadora: Isso, e como vocês querem tirar o 80?

Cristiane decidiu tirar de 10 em 10. Seguiam sem problemas, até que subtraíram 50 e chegaram ao 600. Nesse momento, não sabiam como fazer, e a hipótese de Cristiane era a de que subtraindo um número menor, isso se tornaria mais fácil. Disse que iria tirar cinco, mas não conseguiu. Tentou, então tirar um, mas novamente não conseguiu.

Joaquim (baixinho): É 599

(Ninguém ouviu).

Claudia: Você vai tirar um do 600, vai dar 599.

Várias crianças pareciam estar pensando sobre isso pela primeira vez, Cristiane não escreveu nada.

Pesquisadora: Por que será que ficou mais difícil, para tanta gente, tirar dez do 600 do que do 650?

Manuela: É porque se ela tirar do 600, vai ser mais difícil tirar do 600, porque já vai dar dos 500, não vai mais dar 600.

Pesquisadora: Isso, né, gente? Olha o que a Manuela tá dizendo: é mais difícil porque vai parar na "parte" dos 500. Então a gente precisa imaginar o que acontece entre o 500 e o 600.

Joaquim: Cem!

Pesquisadora: Tem 100 aqui entre um e outro, boa. Vamos contar de dez em dez do 500 até o 600 para ajudar a pensar o que tem entre esses dois números? Talvez isso possa ajudar a Cristiane a pensar como pode tirar 10 do 600.

A pesquisadora foi escrevendo na lousa os números que os alunos iam dizendo: 500 – 510 – 520 etc., até chegar a 600.

Pesquisadora: Então, se a gente tirar dez do 600, quanto dá?

Voz não identificada: Quinhentos.

Pesquisadora: Quinhentos? Não, a gente viu que se tirasse 100 de 600 daria 500. E 600 menos dez?

Carlos: Vai dar 590.

Cristiane continuava em dúvida, assim como outras crianças. Mesmo assim, decidiu fazer o que Carlos disse.

Pesquisadora: E agora, quanto nós já tiramos do 650 até o 590?

Vários alunos: Sessenta.

Pesquisadora: Nós já descobrirmos qual é o número da Carla?

Francisco: Agora tem que tirar 20.

Pesquisadora: É verdade. Por quê?

Francisco: Porque só falta tirar 20 para tirar 80.

Cristiane preferiu continuar de 10 em 10. Quando subtraía duas vezes o dez em seguida, a pesquisadora comentou: É por isso que o Francisco queria tirar 20.

Pesquisadora: Quem quer vir aqui, olhar para a reta, e mostrar um jeito mais rápido ou mais fácil de tirar 80?

Rodrigo: Tirar 20.

Antônio: Tirar 50.

Pesquisadora: Olha essa ideia que o Antônio teve, gente. Tirar 50 de 650 não é bem fácil?

Rodrigo anotou na reta, feita logo abaixo da que Cristiane havia desenhado.

Pesquisadora: E agora, quanto falta para tirar 80?

Rodrigo: Trinta.

Pesquisadora: Isso! Como você sabe?

Rodrigo: Porque já tirou 50, agora faltam 30 para dar 80. E também porque ainda faltam três aqui em cima [na reta de dez em dez].

Rodrigo anotou, na reta abaixo da original, a outra alternativa para fazer o cálculo (figura 14).

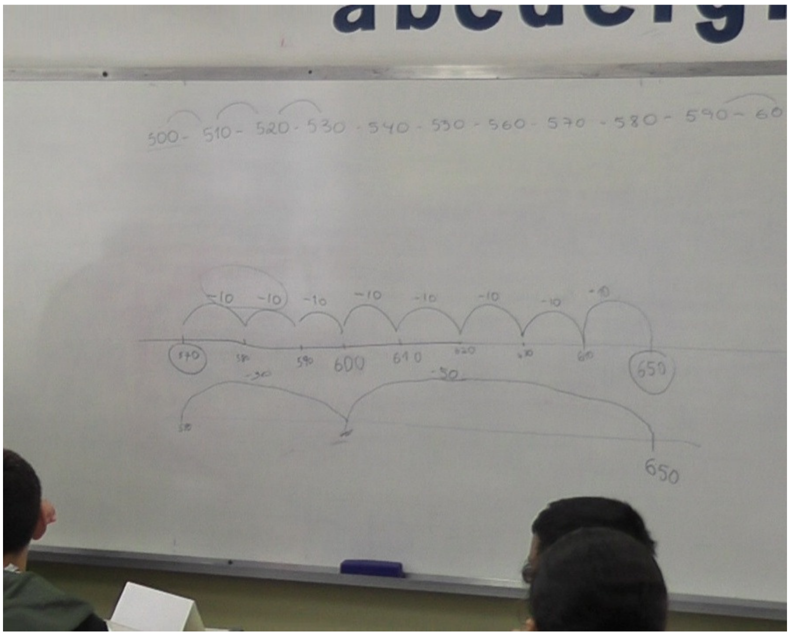

Figura 14: Tentativa de explicitar dois percursos de cálculo mental diferentes através da reta.

Ângela foi ao quadro resolver o subitem 2b. A pesquisadora releu o enunciado e deu a caneta a ela.

Pesquisadora: Como você quer fazer?

Ângela: Vou fazer uma reta.

Ângela fez um traço horizontal no quadro e ficou parada.

Pesquisadora: Quer que releia o enunciado? *Ângela:*quero.

Após a leitura, Ângela colocou o alvo do jogo no centro da linha que havia desenhado, e mais uma vez parou. *Pesquisadora*: Agora você quer descobrir um número, né? Que é o número da Márcia.

(...)

Pesquisadora: Como você acha que é o número da Márcia? De que lado você quer por ele?

(...)

Pesquisadora: Posso contar uma coisa para vocês? Eu vi várias atividades, de várias crianças da classe, que o número da Márcia virou... espera aí, deixa eu lembrar que número. Quinhentos e oitenta. Por que será que aconteceu isso?

Claudia: Porque tiraram, e não colocaram.

Pesquisadora: Acho que as pessoas pensaram: a diferença entre o alvo e o número da Márcia não é 70? Aí a pessoa foi lá, fez 650 menos 70, e deu isso. Por que será que isso não deu certo, gente?

Dois ou três alunos ao mesmo tempo: Porque a conta não era de menos, era de mais.

Voz não identificada: Porque fala que a conta é "de mais".

Pesquisadora: Fala que a conta era "de mais"?

Alunos: Não.

Pesquisadora: O que que fala?

Manuela: Que o número que a Márcia tem é maior que 650.

Pesquisadora: Não é, gente? Fala que o número que a Márcia tem é maior. Esse número aqui é maior que o alvo (aponta 580, que havia anotado no quadro)?

Alunos: Não.

Pesquisadora: Então não deu certo, não é?

(...)

Pesquisadora: E aí, Ângela, como você quer fazer?

Ângela ficou em silêncio.

Pesquisadora: O número vai estar para lá (direita) ou para cá?

Ângela: Lá.

Pesquisadora: E quanto você vai ter que andar para lá?

Rodrigo: Setenta.

Pesquisadora: Por quê?

Rodrigo: Porque tá dizendo que a diferença com o número alvo era 70.

Pesquisadora: É isso mesmo, não é? Quanto você quer começar pondo, Ângela?

Ângela: Dez.

Pesquisadora: Quer ir pondo de dez em dez? Tá bom, "manda ver".

Ângela adicionou dez, parou. A pesquisadora perguntou se ela adicionou tudo o que precisava, ela adicionou mais dez.

Pesquisadora: Quanto você adicionou?

Ângela: Vinte.

Pesquisadora: Você quer adicionar 70.

Ângela adicionou 30 (alguém sugeriu a ela baixinho), mas não sabia quanto ia dar.

Pesquisadora: Em que número você vai chegar?

Ângela não respondeu.

Pesquisadora: Dá para contar de dez em dez?

Outras crianças ajudaram.

Pesquisadora: E aí, quanto você tinha que andar, mesmo?

Ângela: Setenta.

Pesquisadora: Quanto você já andou?

Ângela: ...

Voz não identificada: Cinquenta.

Pesquisadora: E quanto falta andar?

Ângela: ...

Voz não identificada (baixinho): Vinte.

Ângela: Vinte.

Ângela finalizou o cálculo.

Joaquim foi ao quadro mostrar outro jeito de fazer o mesmo cálculo, mas não começou sozinho.

Pesquisadora: Podem ajudar o Joaquim. Que número que é bem bom de adicionar ao 650?

Voz não identificada: Trinta e cinco.

Pesquisadora: Por que 35?

(...)

Duas outras vozes: Cinquenta!

Pesquisadora: Por que 50?

Manuela: Porque fazendo mais 50, já vai chegar no 700.

Joaquim escreveu +50, anotou 700 como resultado parcial, em seguida acrescentou 20.

Outros alunos (Carlos, Manuela e Helena) pediram para mostrar jeitos diferentes de adicionar 70 a 650 (figura 15).

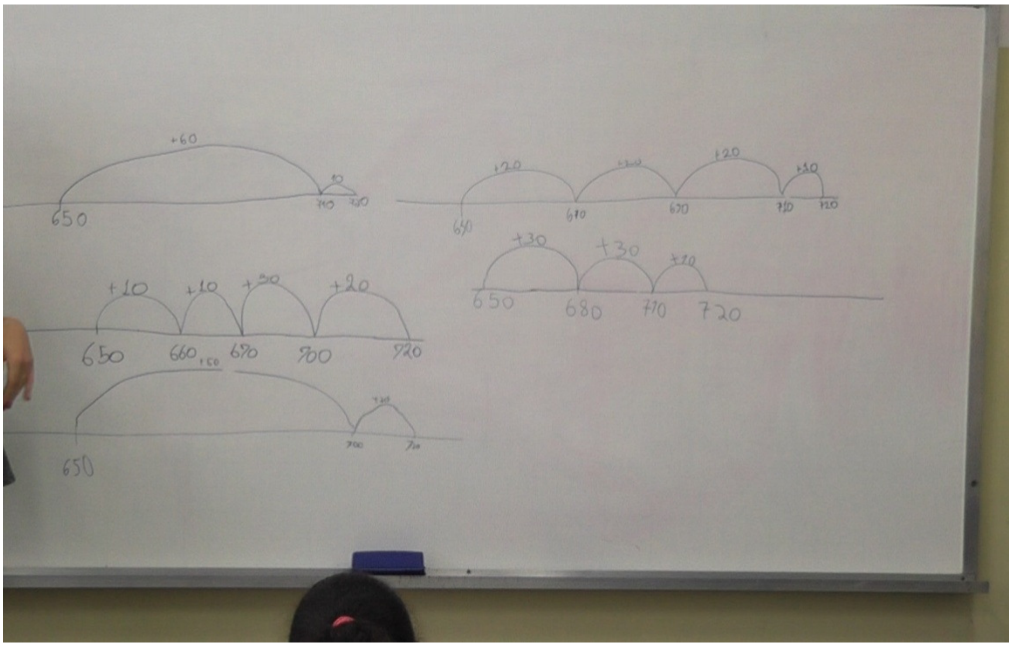

Figura 15: Alunos mostram vários modos de se adicionar 70 a 560.

A pesquisadora anunciou que precisavam encerrar a aula, e Joaquim ainda acrescentou: “professora, também dá para fazer 50 e dois dez”.

Os alunos que já se arriscavam a usar o cálculo mental para calcular a diferença entre um número e o alvo produziam erros recorrentes em situações nas quais os números em questão são valores como 3.009 e 6.000 ou 4.500 e 6.000: nesses casos, propuseram soluções como 3.009 e 2.500, respectivamente. Francisco explica: “porque se tirar 2.000, vai dar 4.000, e mais 500, da 4.500”. A discussão dessas situações foi acompanhada por poucos alunos, e nenhum deles pareceu compreender, de fato, que, ao se adicionar 500 (como no exemplo de Francisco), a diferença diminui. No caso da diferença entre 3.009, a solução de transformar o 3.009 em 3.000, e depois compensar essa transformação – num tipo de cálculo mental sofisticado, categorizado por Heirsdsfield (2001), como *holístico* – não apareceu no trabalho de nenhuma dupla.

Conversas da pesquisadora com algumas duplas sobre essa questão levaram-na a não insistir na discussão em grupo sobre esse tipo de estratégia naquele momento, pois não pareceu que seria uma conversa proveitosa para a grande maioria do grupo. Assim, esse erro recorrente foi abordado com o cálculo passo a passo em um só sentido, o que merece uma análise (Exemplo 13).

Exemplo 13

Pesquisadora: Agora vou sortear os números do outro time: agora é o 9 e o 3. Levanta a mão quem quer formar o número mais perto que der.

Andrea: O 9 no primeiro, e o 3 no último.

A pesquisadora anota o número no tabuleiro da lousa.

Pesquisadora: Alguém do grupo da Andrea tem outra ideia?

Manuela: O 3 no primeiro, o 9 no último.

A pesquisadora fez um novo tabuleiro logo abaixo do primeiro, e anotou a segunda proposta (3.009).

Pesquisadora: Alguém tem outra ideia?

Gilberto: O 3 no primeiro e o 9 no segundo.

A pesquisadora anotou a terceira proposta abaixo das outras duas.

Pesquisadora: Agora a Andrea, a Manuela e o Gilberto vão conversar para escolher um desses números para ser a opção do grupo. Então qual dos três quer começar falando para o grupo qual que escolhe, e por quê.

Manuela: Eu escolho o 3.009, porque se colocasse o 9.003 seria três mil depois do 6.000.

A pesquisadora fez uma reta com o número alvo (6.000) marcado no centro, e propôs à Manuela que fosse mostrar na reta o que disse.

Pesquisadora: Eu pus o alvo, aí você põe os outros dois números. E com as flechas, em cima, você mostra quanto precisa andar para ir de um número para o outro.

Manuela anotou os dois números a que a pesquisadora se referia. Escreveu rapidamente que se deve acrescentar 3.003 ao 6.000 para obter 9.003 (figura 16), e ficou parada, olhando para a reta, sem decidir o que escrever sobre o segundo número em relação ao alvo.

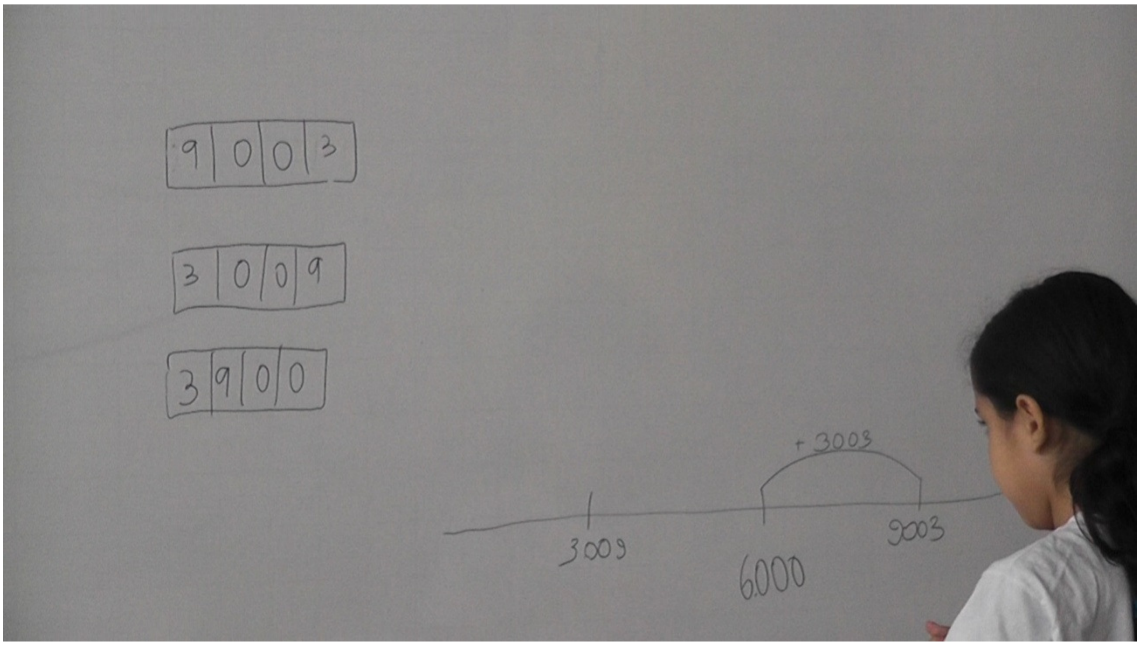

Figura 16: Manuela assinala quanto deveria adicionar a 6.000 para obter 9.003.

Pesquisadora: Então, o que ela mostrou ali. Vocês viram o que ela mostrou ali? Do 6.000 para chegar ao 9.003 foi 3.003, é isso? Bom, e do 6.000 para chegar ao 3.009? (silêncio). Você pode fazer um jeito que você chega a um número vizinho e depois muda, não precisa chegar direto[36].

Manuela ficou olhando para a reta durante mais alguns segundos. Por fim, fez um traço entre 6.000 e 3.009, escreveu 3.009 e olhou para a pesquisadora, nitidamente desconfortável com a solução que está propondo.

Pesquisadora: Olha, gente, a Manuela está propondo que, para ir do 6.000 para o 3.009 tem que tirar 3.009.

Ninguém da classe comentou.

Pesquisadora: Então vamos fazer uma coisa? Vamos tirar 3.000 primeiro? Podemos? Quanto que dá? Quanto é 6.000 menos 3.000?

Algumas crianças: Três mil!

Pesquisadora: Então, onde é que está o 3.000?

Silêncio.

Pesquisadora: O 3.000 está pra trás ou pra frente do 3.009? (apontando a reta na lousa)

Manuela e outras crianças: Para trás.

[36] Aqui a pesquisadora faz um erro de condução, já que, nesse caso, bastaria chegar a um número vizinho para decidir qual dos dois números seria mais próximo do alvo.

Pesquisadora: (pede que Manuela marque o 3.000 também na reta) Quer dizer então que se eu tirasse 3.000 do 6.000 eu chegaria no 3.000, não é? Agora, se depois disso seu tirar nove, ainda, eu vou mais para trás ou mais para frente?

Manuela: Mais para trás.

Pesquisadora: (voltando-se para a classe) Então, se a gente tirar 3.009 do 6.000, vai dar mais de 3.000 ou menos de 3.000?

Silêncio. Os alunos parecem não ter compreendido a pergunta.

Carlos: Ô, professora, sinceramente eu não consegui entender.

A pesquisadora retomou todos os passos de Manuela, refazendo a reta acima da original, na lousa. Vai pedindo a confirmação dos alunos da classe a cada passo.

Pesquisadora: Vou copiar a reta da Manuela aqui, tá bom? Ela pôs o 6.000. Daí ela pôs aqui o 9.003, e falou, gente, olha, para chegar no 9.003 eu vou precisar de 3.003, não é verdade?

Crianças: É.

Pesquisadora: Porque se eu pusesse 3.000 eu ia chegar aqui no 9.000 (faz um arco sobre a reta chegando pouco antes do 9.003, e escreve + 3.000, depois outro arco chegando ao 9.003, escreve + 3; são anotações que Manuela não havia feito no original), aí eu ponho outros 3 e chego no 9.003, não é verdade?

Crianças: É.

Pesquisadora: O outro número que ela está querendo comparar é o 3.009. Então ela olhou o 3.009 aqui e pensou o seguinte: "ah, eu acho que para ir do 3.000 para o 6.009 eu tiro 3.009". Ela pensou primeiro que tiraria 3.009. Só que aí, olha só o que a gente conversou aqui: seu eu tirar 3.000 do 6.000, vai dar quanto?

Algumas crianças: três mil.

Pesquisadora: O 3.000 é para cá (indicando o lado direito do 3.009 na reta) ou para cá (indicando o lado esquerdo do 3.009 na reta)?

Algumas crianças: Para cá (apontando o lado esquerdo).

Pesquisadora: (marcando um ponto para 3.000, à esquerda do 3.009). Então, vou pôr o 3.000 aqui. Olha o que aconteceu de interessante: se eu tirasse 3.000 eu viria parar aqui, não é?

Crianças: É.

Pesquisadora: Só que ela tá pensando em tirar 3.009. Para eu tirar 3.009, eu não tenho que tirar ainda nove?

Poucas crianças: Tem.

Pesquisadora: Se eu tirar nove de 3.000 eu vou para cá (indicando o lado direito do 3.009 na reta) ou para cá (indicando o lado esquerdo do 3.009 na reta)?

Crianças: Para cá (apontando o lado esquerdo).

Pesquisadora: Vai dar um número maior ou menor do que 3.000?

Várias crianças: Menor.

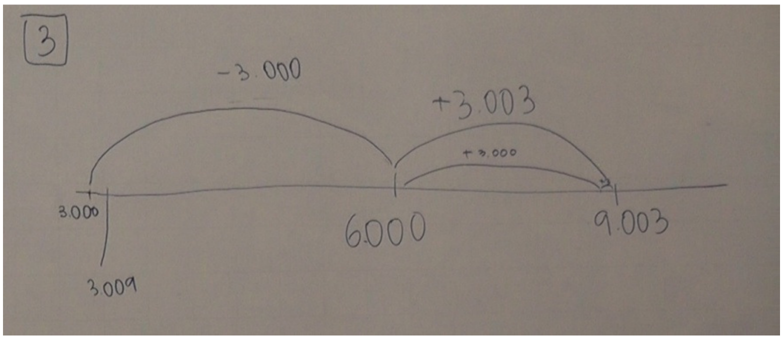

Figura 17: Reta de Manuela reproduzida pela pesquisadora

Pesquisadora: Pois é, e 3.009 está para cá (apontando à direita de 3.000). Ih, e agora?

(Silêncio)

Pesquisadora: Quem tem uma ideia para ajudar a Manuela a descobrir a diferença entre 6.000 e 3.009?[37]

(Silêncio)

Pesquisadora: A gente descobriu que para ir do 6.000 até o 3.009 a gente vai tirar mais do que 3.000 ou menos do que 3.000?

Algumas crianças (mostrando segurança): Menos.

Aqui a situação já estaria resolvida, pois a diferença entre 6.000 e o outro número em questão (9.003) era maior do que 3.000. No entanto, nenhum aluno notou isso e a pesquisadora também não disse nada, seguindo com o grupo para o cálculo da diferença entre 6.000 e 3.009. Essa opção se justifica porque esse é um problema de cálculo mental importante, com grande incidência de erros, do tipo que Manuela fez, nas partidas em duplas. No entanto, vai contra a ideia de considerar o contexto de um cálculo para decidir se é necessário o cálculo exato. Ou seja, a pesquisadora atuou contra seu objetivo de promover uma cultura em classe na qual as soluções mais adequadas são as que consideram o contexto

[37] A pesquisadora se equivoca mais uma vez, porque a pergunta não é essa. A pergunta seria: "Quem tem uma ideia para ajudar a Aline a descobrir que número está mais perto do 6.000, se 9.003 ou 3.009?"

(e que seria coerente com a ideia de promover o desenvolvimento do sentido de número), em favor da discussão de um problema recorrente de cálculo no grupo.

A continuação da discussão, mesmo muito centrada na pesquisadora, trouxe boas contribuições ao presente trabalho do ponto de vista das relações entre o cálculo mental na subtração, o conhecimento dos efeitos dessa operação e os conhecimentos sobre números.

Pesquisadora: Não precisa tirar tudo de uma vez, gente (devolvendo a caneta da lousa para Manuela). Quem vai ajudar a Manuela? Vocês querem começar tirando quanto? (apagando, na reta de Manuela, o que estava anotado à esquerda do 6.000).

(Silêncio)

Pesquisadora: Dá pra tirar bastante, não dá? A gente viu que 3.000 iria passar[38], mas da para tirar bastante, não dá?

(Silêncio)

Pesquisadora: Olha, a gente viu que 3.000 era muito, que ia passar do que a gente queria. E 2.000, é muito?

Joaquim: Ah..., não (em tom de dúvida).

Pesquisadora: Mas vai ir para trás[39] do 2.009, será?

Vários alunos: Vai.

Pesquisadora: É? Quanto é 6.000 menos 2.000?

Carlos (o único a responder, após alguns segundos de silêncio): Quatro mil.

Outras crianças: Quatro mil.

Pesquisadora: Tá pra trás do 3.009?

Crianças: (...)

Pesquisadora: Onde está o 4.000, para frente do 3.009 (aponta para a reta, adiante do 3.009) ou para trás do 3.009 (aponta para a reta, antes do 2.009)?

Crianças: Pra frente.

Pesquisadora: Então a gente pode tirar 2.000, se a gente quiser?

Crianças: Pode.

Manuela fez um arco entre 6.000 e um ponto na reta, onde marca 4.000. Anotou, sobre o arco, "-2.000".

---

[38] A pesquisadora optou por não tentar induzir uma compensação, por já ter observado, em momentos de atividades em dupla ou individual, que essa estratégia ainda não fazia sentido para a grande maioria do grupo.

[39] A pesquisadora não percebeu que "para trás" pode valer como "antes do número", se a pessoa considera que o sentido em que se movimenta, já que se está subtraindo, é da direita para a esquerda no número – e era esse o significado que ela estava atribuindo à expressão – ou "depois do número" – significado que provavelmente esses alunos estavam atribuindo à expressão.

Pesquisadora: Quem vai ajudar a Manuela a chegar no 3.009, agora? Ela está no 4.000. Quem vai sugerir alguma coisa para ela tirar?

Algumas crianças: Tira... tira 1.000.

Pesquisadora: Se tirar 1.000, onde é que vai chegar?

Várias crianças: Três mil.

Pesquisadora: Três mil, mas a gente quer o 3.009, lembra?

Voz não identificada: Tira 1.009.

Manuela: Tem que tirar 91.

Pesquisadora: Noventa e um. Vamos ver quanto é 4.000 – 91?

Manuela: (escreveu o arco, anota “-91”, olhou para a reta durante alguns instantes e escreveu 3.009): Dá 3.009.

Nenhuma criança protesta.

Pesquisadora: Quanto é 4.000 – 100, quem sabe?

Joaquim: Quatro mil menos 100?

Carlos: Três mil e novecentos!

Manuela permaneceu parada, olhando para a reta no quadro durante mais alguns segundos.

Manuela: Eu acho que é melhor eu tirar 991.

Pesquisadora: Boa ideia. Então vamos por partes, tira 900 primeiro. Que ideia boa!

Pesquisadora: Quanto será que é 4.000 menos 900, gente?

Manuela: É 3.010.

Carlos: É 3.100! Três mil e cem, eu acho.

Pesquisadora: Três mil e dez ou 3.100?

Manuela ficou em dúvida, mas estava certa de que 4.000 – 991 daria 3.009, tanto que anotou isso em sua reta no quadro enquanto isso.

Pesquisadora: Vamos tirar 900 primeiro?

(Silêncio)

Pesquisadora: Quatro mil menos 900 deu...?

Manuela: 3.010.

Pesquisadora: Olha só (anotando a sentença no quadro): 4000 – 900. Quem tem um jeito de resolver essa conta? Porque não dá 3.010, dá outra coisa.

Apenas Carlos se candidata. Ele vem à lousa.

Carlos: Posso fazer a conta armada?

Pesquisadora: Pode, se é o jeito que você acha que vai dar para descobrir.

Carlos escreve a conta no quadro.

Manuela (anotando o 3.100 na reta): Agora tem que tirar 91 (segura, completando a reta como mostra a figura 18)

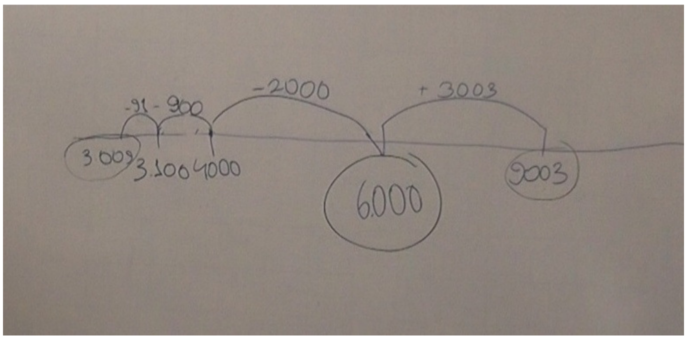

Figura 18: Reta completa feita por Manuela

Pesquisadora: Agora, olhando para a reta, gente, qual número fica mais perto do 6.000, o 9.003 ou o 3.009?

Joaquim: Nove mil e três (as crianças que se manifestaram a seguir concordaram todas com ele).

Pesquisadora: Do 6.000 para 9.003 a gente viu que a diferença era 3.003, não era?

Algumas crianças: Era.

Pesquisadora: E do 6.000 para 3.009, quanto é?

(Alguns segundos de silêncio).

Manuela: Dois mil, novecentos e noventa e um!

Pesquisadora: Isso mesmo! Porque a gente tirou 2.000, depois tirou 900, depois tirou 91, não é? Então qual número está mais perto?

Algumas crianças: Três mil e nove!

Pesquisadora: Ótimo! Agora tem mais uma coisa: porque alguém deu uma ideia, acho que foi o Gilberto, de outro número ainda. Por enquanto, a gente decidiu que o 9.003 a gente não quer. Estamos preferindo o 3.009, que é mais perto. Agora, Gilberto, onde é que entra o 3.900 aqui nessa reta?

Manuela: Está mais ou menos aqui, professora (indicando um ponto um pouco à esquerda do 4.000, como mostra a figura 19).

Pesquisadora: É, não é gente? Então qual é mais perto?

Crianças: Três mil e novecentos!

Pesquisadora: Nós nem precisamos calcular a diferença, não é?

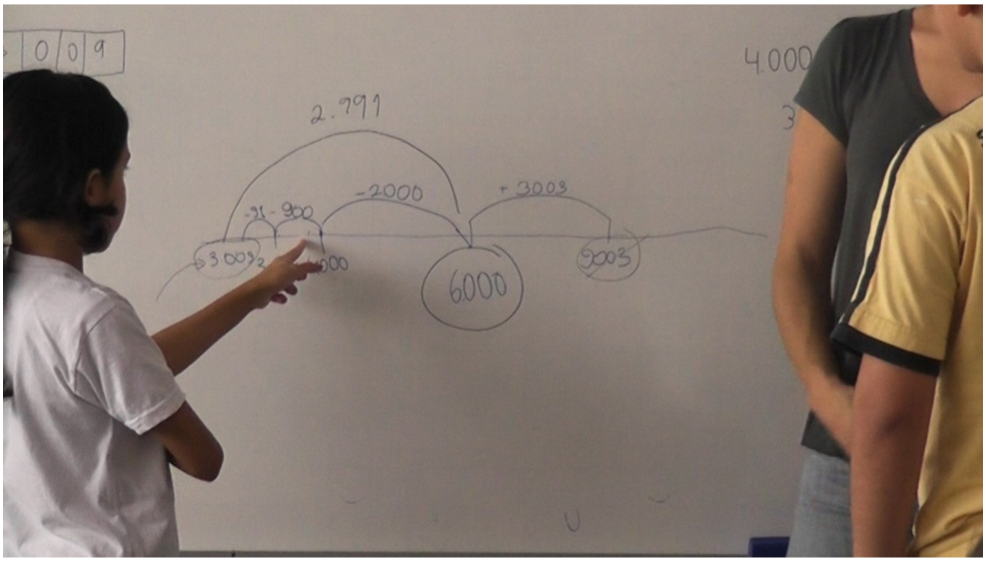

Figura 19: Manuela indica localização aproximada de 3.900 na reta que construiu.

Carlos: É, mas eu já fiz de cabeça. Porque três mais três, eu sei que é seis; mas se ali colocar seis, vai ficar 6.900, aí tem que colocar... tem que colocar 2.100 para ficar 3.000.

Pesquisadora: É, você tem razão, é isso mesmo. Mas a gente já sabe qual é mais perto, então nem precisava fazer a conta, não é?

Pesquisadora: Então o grupo de cá ficou com o 3.900, não é? Agora eu quero saber que grupo ganhou: o que fez 6.003 ou o que fez 3.900?

Crianças do grupo que havia composto 6.003: A gente!

Pesquisadora: Por quê?

Algumas crianças, vozes se sobrepondo: Porque a gente só tira seis e dá 6.000.

II. *Cadernos de apoio e aprendizagem*

Três tipos de procedimento de cálculo apareceram na fase de trabalho com os problemas de texto: algoritmo convencional, estratégia de *agregação* (HIERDSFIELD, 2001), com apoio escrito da reta numérica, e estratégia de *separação* (HIERDSFIELD, 2001), também com apoio escrito.

Quase todos os alunos que usaram o procedimento de cálculo escrito convencional o fizeram com sucesso, havendo apenas três crianças que apresentraam erros no procedimento, a saber: não alinharam os números, produzindo operações que desconsideram a ordem a que pertencem os dígitos dos números, tanto na adição quanto na subtração; e inverteram a direção da operação na subtração quando o dígito de uma ordem no minuendo é menor do que o dígito da mesma ordem no subtraendo. Entre os que queriam usar os outros dois procedimentos (*separação* e *agregação*), no entanto, muitos pareciam tentar reproduzi-los, sem, no entanto, ter clareza do significado do que faziam.

Os exemplos a seguir se referem ao seguinte enunciado:

São Paulo tem 152 teatros e 260 salas de cinema. Quantos teatros ou cinemas a cidade oferece?

Ao decompor as parcelas na estratégia de separação, alguns alunos tentaram apenas "horizontalizar" o algoritmo tradicional da adição (Exemplo 14). Outros deixaram de adicionar ou adicionaram duas vezes parte de uma das parcelas (Exemplo 15). Em um problema do tipo combinar conceitualmente, com o total oculto, que, portanto, teria que ser resolvido através de uma adição, vários alunos esboçaram uma reta na qual calculariam a diferença entre 152 e 260, mostrando a intenção de usar, nessa situação, exatamente o mesmo procedimento aplicado às situações em que calculavam a diferença entre um número e o número alvo (ver sessão anterior). Outros produziram cálculos sem sentido, nos quais procuravam usar, de alguma forma, o resultado da adição, obtido anteriormente pelo algoritmo tradicional (Exemplo 16).

Exemplo 14

Mara usou uma decomposição incorreta, parte dela parecendo corresponder a uma escrita horizontal do algoritmo tradicional da adição. A resposta que deu ao problema estava correta, e foi obtida anteriormente através do algoritmo tradicional da adição (figura 20). A conversa da pesquisadora com ela mostrou como Mara ainda não pensava os números de maneira a favorecer o cálculo mental e a pesquisadora acabou fazendo grande parte do raciocínio por ela.

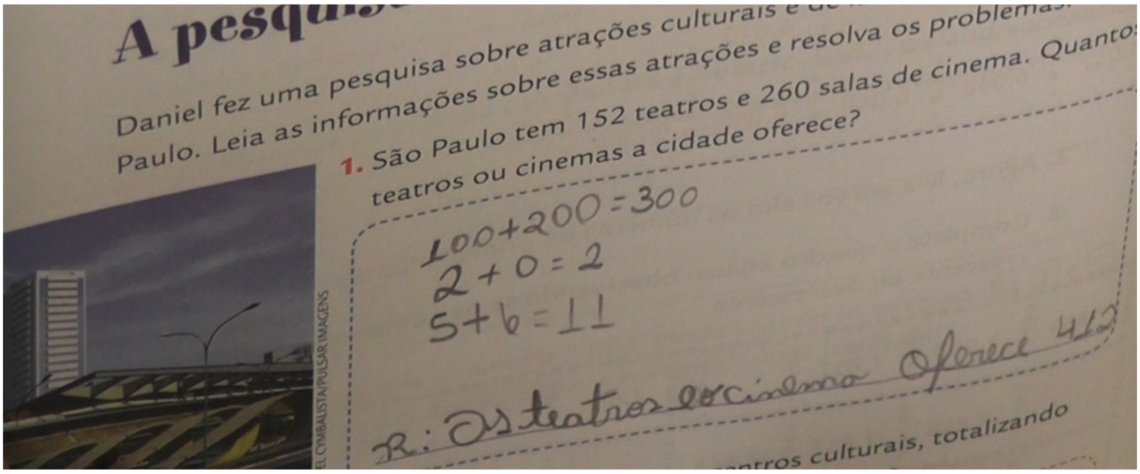

Figura 20: Mara usa apenas os algarismos em cálculo horizontal, sem atentar para seus valores.

Pesquisadora: Quanto vale esse 5?

Mara: ...

Pesquisadora: E esse 6?

Mara: ...

A pesquisadora apontou os algarismos nos números originais.

Mara (após ler os números): o 5 vale 50 e o 6 vale 60.

Pesquisadora: Será que 50 mais 60 pode dar 11?

Mara: Sim.

A aluna não soube explicar como obteve 412 como resposta para 300 + 2 + 11, mas que sabia que tinha que dar 412.

Recuperando, com a pesquisadora, os valores do 5 e do 6, ainda não sabia dizer qual seria o resultado de 50 mais 60.

Pesquisadora: Dá para pensar esse 60 como ser fosse 50 mais dez?

Mara: Sim.

Pesquisadora: Isso ajuda a descobrir quanto seria aqui? [50 + 60]

Mara: Não.

Pesquisadora: Se você fosse juntar tudo: 50 + 50 + 10.

Mara (mais animada): Cento e dez!

Exemplo 15

Pedro, ao decompor as parcelas, acabou adicionando duas vezes o 60, do 260.

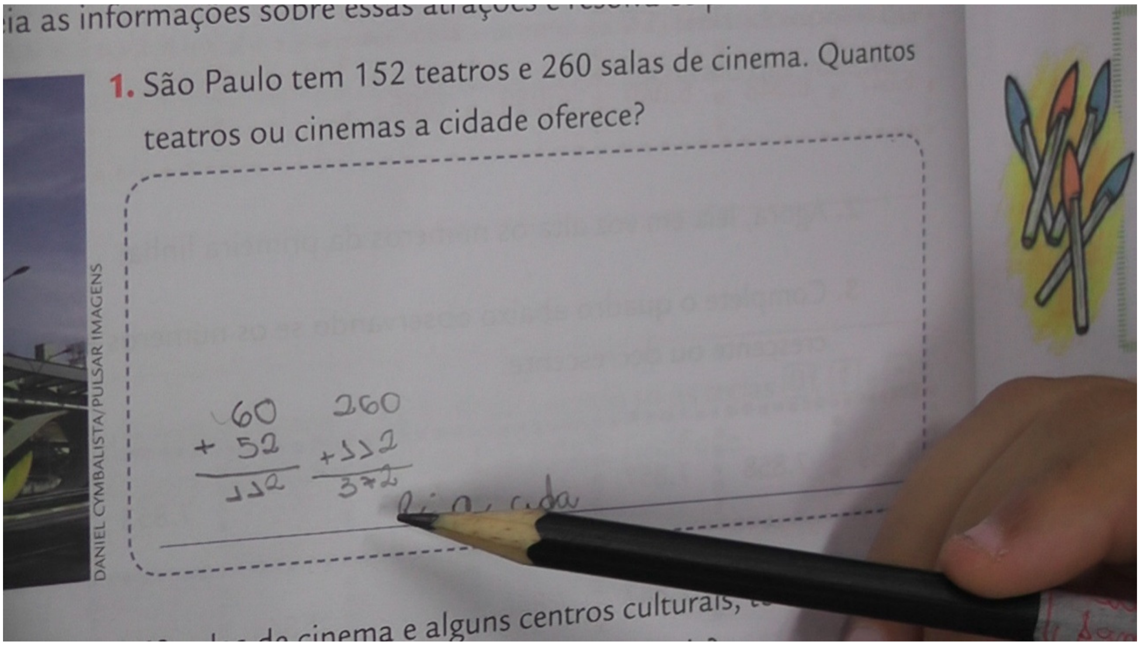

Figura 21: Cálculo de Pedro, que, ao decompor as parcelas, adiciona parte de uma delas duas vezes.

Na conversa com a pesquisadora, esse erro também não foi inicialmente compreendido por Pedro.

Pesquisadora: De onde vêm esses dois números (60 e 52)?

Pedro (pensando por alguns segundo, com o olhar no enunciado): O 60 tá aqui (apontando 260 no enunciado) e o 152 tá aqui (apontando 152).

Pesquisadora: Então vamos ver. Quando você juntou 60 com 52, o 60 ficou dentro do 112, não é? Mas quando você pega o 260, você coloca o 260 todo outra vez, não é?

Pedro: ...

Pesquisadora: Vamos pensar uma coisa? Desse 152 aqui, quanto que você já pôs?

Pedro: Cinquenta e dois.

Pesquisadora: Isso. Então quanto falta você adicionar?

Pedro (depois de alguns segundos): Cento e doze?

A pesquisadora sugeriu que Pedro. escrevesse a adição que queria fazer e escrevesse a decomposição que queria fazer abaixo de cada parcela, acompanhando passo a passo. A grande questão, para Pedro, era considerar que, “dentro” do 112, que obteve inicialmente, estavam incluídos o 60 e o 52 e, portanto, só lhe restaria adicionar 100 e 200 ao número (que ele, prontamente, tratou como 300).

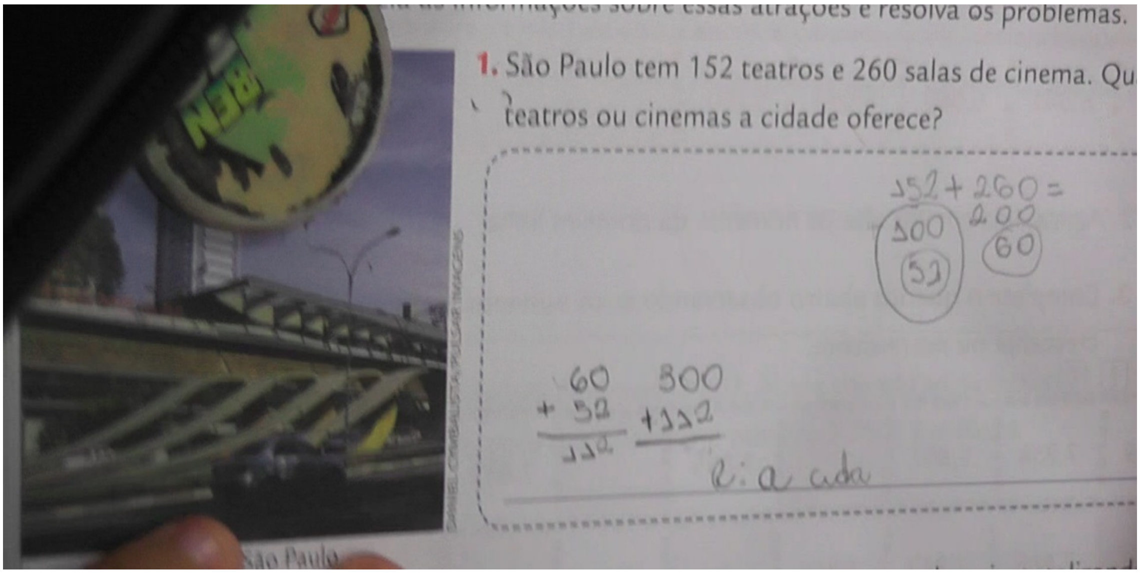

Figura 22: Decomposição de parcelas feita por Pedro com ajuda da pesquisadora.

Na segunda parte, alguns alunos foram convidados a apresentar seus procedimentos de cálculo aos colegas. Foram escolhidos procedimentos que levassem a uma explicitação da possibilidade de decompor um número ao realizar uma adição e de modos de se fazer isso, mesmo que estivessem incorretos (Exemplo 16).

Exemplo 16

Francisco queria mostrar seu cálculo com a reta numérica. Apresentou algo bem sem sentido, aparentemente fruto da vontade de usar a reta, que percebia ser valorizada pela pesquisadora (figura x). Ele se baseou na contagem em intervalos de 100 e de 10, algo importante como base para o cálculo mental, que muitos alunos da classe não sabiam.

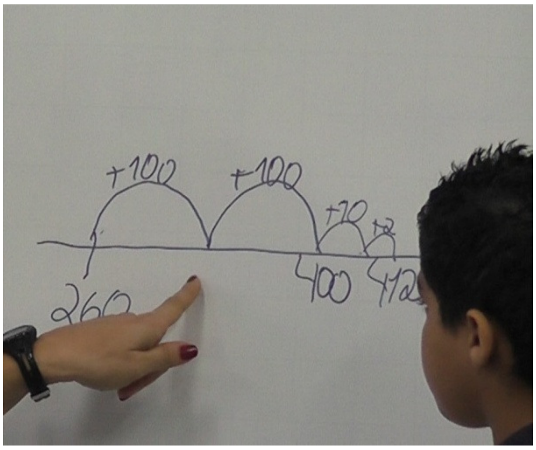

Figura 23: Reta apresentada inicialmente por Francisco, para calcular 152 mais 260.

Carlos: ele esqueceu de colocar o 360.

Pesquisadora: Hum, sabe o que o Carlos, está te falando, Francisco? Duzentos e sessenta mais 100 dá 360.

André: Ali, olha, tá 260 mais 100, 360; daí 360 mais 100 não ia ficar 400, ia ficar 460.

Francisco não altera sua reta.

Pesquisadora: Que conta você queria fazer? Você se lembra?

Francisco (olhando em seu livro): 260 + 152

Pesquisadora: Que conta que você fez aqui? Vamos ver. (Conferindo junto com as crianças o número do qual Francisco partiu e o quanto tentou acrescentar, apesar do erro): 260 +212. Era isso mesmo que você queria fazer?

Francisco: Era. Porque esse número eu tirei da conta, e esse eu tirei da reta (!).

A pesquisadora recuperou com os alunos o cálculo que pretendiam, relendo o problema e perguntando o que queriam descobrir. Os alunos concordaram que queriam calcular 260 + 152.

Francisco, então, procurou mostrar esse cálculo na reta numérica, e o fez corretamente, baseando-se na contagem em intervalos de 100 e de 10. Quando Francisco já adicionou 100 e quatro parcelas de 10, a pesquisadora perguntou quanto ele já tinha adicionado, e parte dos alunos respondeu prontamente: "cento e quarenta". Francisco, então, concluiu seu cálculo, adicionando ainda 10 duas vezes, depois dois (figura 23).

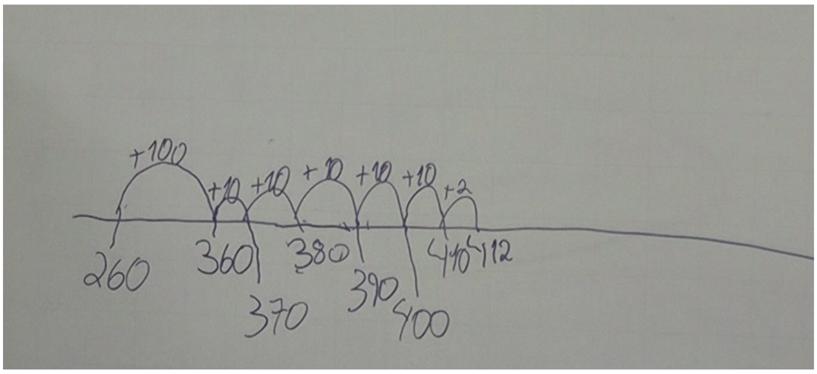

Figura24: Reta de Francisco corrigida, usando contagem em intervalos de cem e de dez.

Pensando na possibilidade de compartilhar uma estratégia de cálculo mental baseada no modo de olhar o número, a pesquisadora perguntou quem gostaria de ir ao quadro para pensar em um "pulo" bom.

André sugeriu, que a partir do 360, deveria acrescentar 40, para chegar ao 400, e então acrescentar 2 (figura 25).

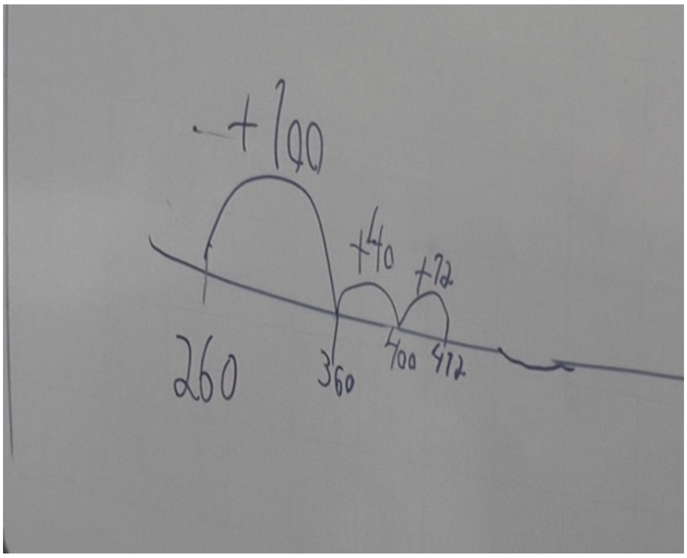

Figura 25: Reestruturação do cálculo de Francisco, considerando os valores em jogo.

Pesquisadora: olha essa ideia do André, que boa! Ele colocou 40. Por que você colocou 40, André?

André: Porque aí já ia ficar 400.

Carlos: É, professora, porque 6 mais 4 é 10, então 60 mais 40 é 100.

Manuela também foi ao quadro mostrar como calculou, usando cálculo vertical, mas decompondo as parcelas (figura 26).

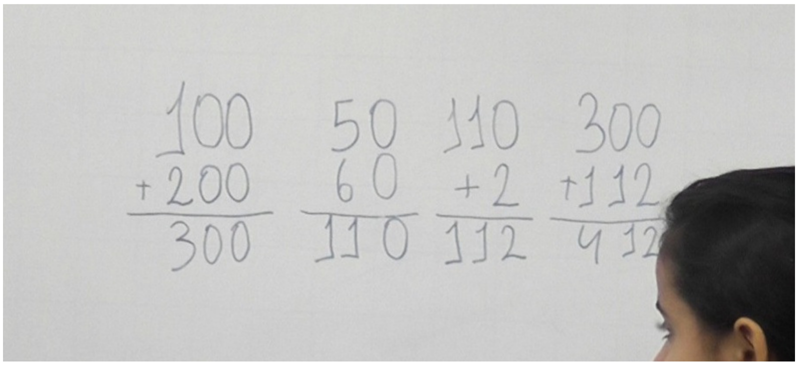

Figura 26: Manuela apresenta seu cálculo por decomposição.

Manuela explicou como fez o cálculo mentalmente, e é a única que usou, de fato, um procedimento de cálculo mental: "eu fiz 100 mais 200 igual a 300. Aí sobrou 52 e 60. Aí eu fiz 50 mais 60, 110, aí fiz 110 mais 2 e deu 112. Então fiz 112 mais 300, 412".

A pesquisadora perguntou se alguém queria explicar o procedimento de Manuela, nenhuma criança se candidatou inicialmente. Carlos começou a dizer "ela desmontou o 100..." e a pesquisadora o convidou para ir ao quadro.

Carlos foi ao quadro para mostrar a decomposição dos números usada por Manuela para fazer os cálculos. A pesquisadora o orientou para escrever a sentença matemática e, abaixo das parcelas, anotar a decomposição feita pela colega: “escreve embaixo como você acha que a Manuela desmontou cada número, e ela vai te dizer se foi assim ou não”. Carlos tinha dúvidas semelhantes às de Mara (Exemplo 14,) ao decompor uma das parcelas (Exemplo 17).

Exemplo 17

Carlos hesitou ao decompor 152. Fez duas tentativas e se satisfez com a terceira (figura 27):

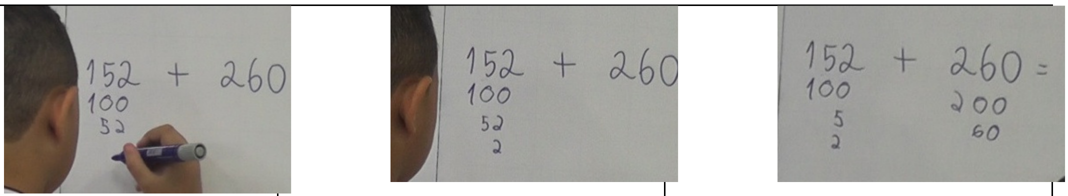

Figura 27: Tentativas de decomposição de Carlos.

Pesquisadora: Quem quer propor uma mudança?

Eduardo: Eu acho que ele podia tirar o 5 e fazer só 50, depois 2.

Pesquisadora: O que você acha, Carlos?

Carlos: Posso mudar?

Pesquisadora: Sim.

Carlos corrige sua decomposição (figura 28).

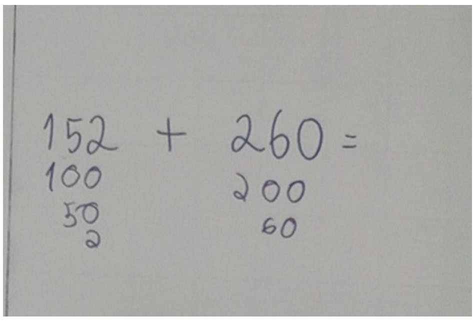

Figura 28: Decomposição de Carlos, corrigida de acordo com sugestão de colega.

Pesquisadora: Eu acho que o que o Gabriel percebeu foi que esse 5 vale 50. Se você, quando decompõe o número, escreve 5, o que acontece? Fica 100, mais 5, 105, mais 2, 107. O número não era 152?

Pesquisadora: Foi assim que você decompôs, Manuela?

Manuela: Sim.

Na sessão seguinte o problema proposto no livro dizia:

A cidade tem 260 salas de cinema e alguns centros culturais, totalizando 299 atrações desse tipo. Quantos são os centros culturais?

Muitos dos alunos fizeram uma subtração pelo algoritmo tradicional da subtração, depois tentaram escrever o cálculo decompondo parcelas (seja na reta, seja apresentando cálculos horizontais ou verticais). Nessa tentativa, muitas vezes não sabiam explicar seu objetivo no segundo cálculo.

Manuela, por exemplo, já sabia que a resposta é 39 centros culturais, e tentou compor uma linha vazia usando a subtração. Começou anotando a quantidade de atrações, e vai subtraindo 9, depois, 50, depois 40. Parou, apagou os dois últimos "pulos", subtraiu 20, depois 4 (teria subtraído 33). Olhou para seu trabalho por alguns instantes, apagou o último "pulo", substituindo-o por menos 10. Por fim, sua reta representava 299 – 39 = 260 (figura 29), algo estranho levando-se em conta o enunciado do problema.

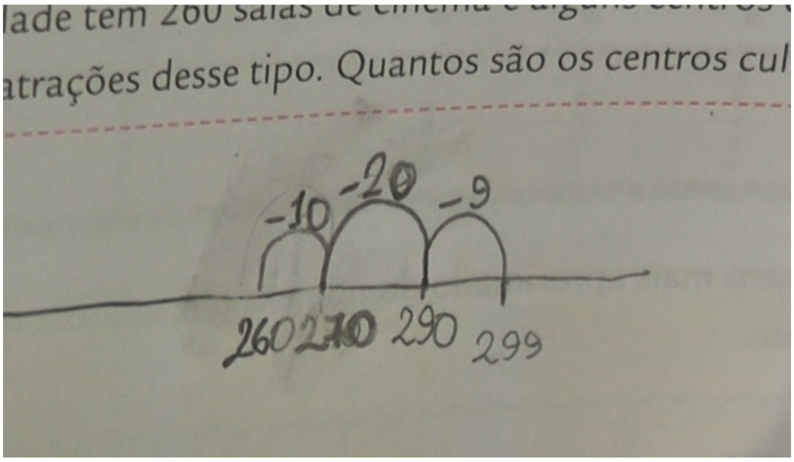

Figura 29: Primeira solução elaborada por Manuela, que já sabia que haveria 39 centros culturais.

Ainda durante o tempo reservado para o trabalho individual, Manuela mudou sua solução, fazendo uma adição que partiu do valor de uma das parcelas e chegou ao valor total, dando como resposta o valor adicionado (figura 30).

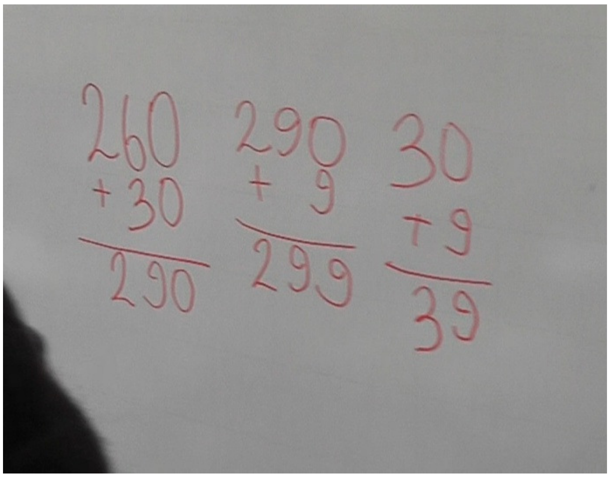

Figura 30: Reelaboração da solução de Manuela, já apresentada no quadro.

Outro exemplo de demonstração do cálculo na reta foi o trabalho de Claudia, que parecia fazer mais sentido, levando em conta o enunciado do problema. A aluna colocou, inicialmente, à direita, na linha, o número de atrações culturais. Em seguida, à esquerda da linha, escreveu a resposta (que já havia calculado). Depois foi subtraindo, aos poucos, procurando chegar ao 39. É intrigante, no entanto, que ela não tenha observado que o valor a ser subtraído, aqui, era a quantidade de cinemas (figura 31).

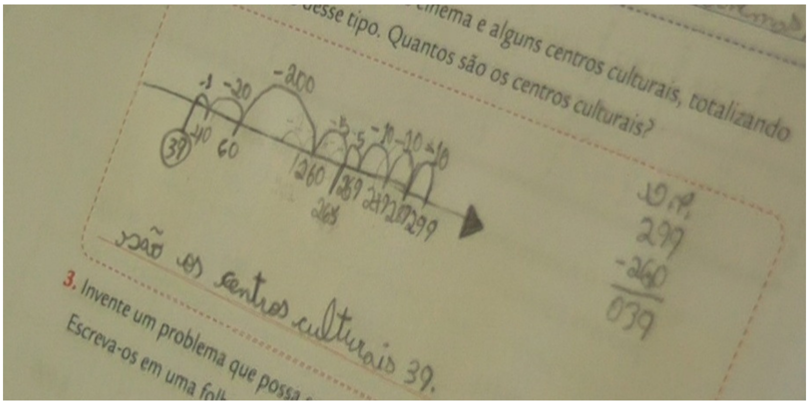

Figura 31: Reta de Claudia, que parece querer "traduzir" seu cálculo já realizado na linha.

Outras crianças pediram ajuda à pesquisadora para usar a linha vazia, partindo do que gostariam de calcular, pois não tinham o recurso de contagem em intervalos ou decomposições variadas acessível. Ângela, por exemplo, subtraiu primeiro 100, depois quis fazer 99 menos 60. Indicou em sua reta que faria 99 menos 60, mas não sabia o que fazer em seguida (Exemplo 18).

Exemplo 18

Pesquisadora: Você quer subtrair 60. Como você quer fazer?

Ângela: (...)

Pesquisadora: Quer tirar de dez em dez?

Ângela: Sim. (no entanto, ficou parada por alguns instantes).

Pesquisadora: Vamos tirar dez primeiro? Quanto é 99 menos 10?

Ângela continuou em silêncio, a pesquisadora esperou, imaginando que ela estivesse contando, mas Ângela não chegou a uma conclusão.

Pesquisadora: Quer contar de um em um, de trás para frente?

Contaram juntas. Ela passou a subtrair dez de cada vez, anotando o resultado. Na terceira vez em que vai subtrair dez, contando, a pesquisadora interveio:

Pesquisadora: Olhando as que você já fez, dá para saber quanto vai dar 69 menos dez?

Ângela: Cinquenta e nove.

Em outro problema, a adição volta a ser foco de discussão, e observam-se avanços na compreensão e uso de procedimentos por vários alunos. No entanto, muitos deles ainda usam, paralelamente, o algoritmo convencional da adição. O problema é o que segue:

Dona Marina comprou 2.130 canetas azuis e 3.450 canetas vermelhas. Quantas canetas Dona Marina comprou?

A proposta da pesquisadora, neste momento, foi que mais alunos pudessem localizar, na reta numérica, os números com que estavam trabalhando, e que aí apareciam decompostos (Exemplo 19).

Sabrina fez uma adição usando a reta corretamente, depois de ter usado o algoritmo convencional para a adição e apagado.

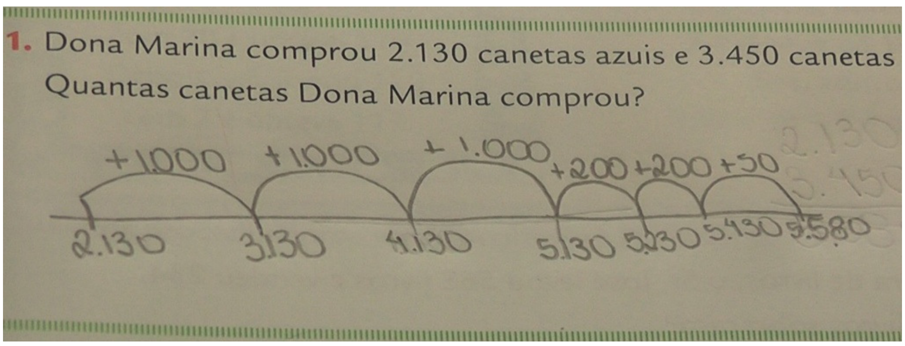

Figura 32: Sabrina usa a reta pela primeira vez.

Discussão em grupo

Pesquisadora: Eu vi que, nesse problema, quase todo mundo fez as canetas azuis mais as canetas vermelhas, para descobrir quantas canetas a Dona Marina comprou. Eu vi também que, para muita gente, era mais fácil fazer a conta armada, como essa que o Rodrigo colocou aqui [no quadro]. Mas como a gente está querendo pensar nos números, e pensar em quanto eles valem, e pensar em como calcular de outros modos, nós vamos discutir esses outros jeitos que estão aqui.

A pesquisadora perguntou quem quer ir identificar os números correspondentes às canetas azuis, às canetas vermelhas e ao total de canetas em três soluções apresentadas no quadro, que se valem da decomposição para calcular (Exemplo 19)

Exemplo 19

Pesquisadora: Quem quer mostrar, nessa reta que a Sabrina colocou aqui, onde estão as 3.450 canetas vermelhas?

(...)

Pesquisadora: Porque o Francisco tem razão, ele disse que a Sabrina fez 2.130 mais 3.450. Mas onde está o 3.450?

Cristiane foi ao quadro e não descobriu. Antônio foi ajudá-la.

Pesquisadora: Mas não adianta procurar o número assim (anotando 3.450 no quadro). O número está escrito todo desmontado.

Antônio apontou os "saltos" da reta: Se juntar esses "mil" aqui dá 3.000.

Pesquisadora: É mesmo, não é gente? E o que mais?

Antônio: Esses quatro cem dá 400.

Pesquisadora: É, não é? Até o nome do número diz isso: quatrocentos.

Antônio: E mais o 50, 3.450.

O problema seguinte voltava a exigir o cálculo de uma diferença, e foi oportunidade para discussão de um erro recorrente na subtração. Esse erro, velho conhecido dos professores de Ensino Fundamental, aparece em tentativas de alunos de usar a decomposição ao realizar uma subtração, aparentemente aplicando o esquema que costumam usar, com êxito, na subtração. Assim, decompõem o minuendo e o subtraendo ordem a ordem, e subtraem do valor de cada ordem no minuendo o correspondente do subtraendo (por exemplo, 267 – 126; 200 – 100; 60 – 20; 7 – 2). No entanto, quando o minuendo tem em uma das ordens, um valor menor do que o da ordem correspondente no subtraendo, muitos alunos aplicam uma propriedade que é valida apenas para a adição, a comutatividade, produzindo o erro (por exemplo, 345 – 273; 300 – 200; 70 – 40; 5 – 3). Alunos com erros semelhantes, no entanto, são oportunidade para reflexões em níveis muito diferentes. Manuela, por exemplo, usa o algoritmo tradicional para produzir uma resposta que para ela é confiável e, a partir desse resultado, volta a refletir sobre seu cálculo inicial (Exemplo 20). Já Cristiane demonstra uma compreensão muito restrita da subtração, apresentando dificuldades para dar sentido ao seu erro (Exemplo 21).

Exemplo 20

Diante do problema a seguir, Manuela quis usar uma decomposição na subtração, como havia feito várias vezes na adição, e ficou confusa.

Dona Marina já havia comprado algumas réguas, mas, em outra loja, comprou outras 360. Quando contou o total de réguas compradas, viu que eram 640. Quantas réguas ela comprou na primeira loja?

Manuela: Ai, eu não sei, porque se tem 640, mas tira 360, ela tiraria quaren... sessenta do quarenta.

Parou, releu o problema, olhou por alguns instantes: "posso fazer a conta [pelo algoritmo tradicional]?"

Fez a conta e se surpreendeu com o resultado obtido (280): "eu tinha pensado que eram 320, porque eu fiz 600 menos 300, deu 300, e 60 menos 40, deu 20".

Exemplo 21

Cristiane fez uma adição, e escreveu que Dona Marina havia comprado 1.000 réguas [na primeira loja].

Pesquisadora: Você não tinha me falado que não podia ser 1.000?

Cristiane: Sim.

Pesquisadora: O que aconteceu, então?

Cristiane (apagando o resultado e mudando o sinal da conta que havia escrito, que fica 360 – 640): Eu tenho que fazer menos.

Pesquisadora: Você vai fazer 360 menos 640?

Cristiane assentiu com a cabeça.

Pesquisadora: Mas tem jeito de tirar 640 de 360? Se você tem aqui uma caixa com 360 réguas, dá para tirar 640?

Cristiane: Não.

Pesquisadora: Então o que você tem que fazer com essa conta?

Cristiane: Emprestar.

A dúvida de Cristiane não é típica no grupo, mas a de Manuela sim. Esse tipo de questão começa a aparecer nessa última fase da pesquisa, já que, para o cálculo de diferenças na primeira fase (como o jogo *Número Alvo*), os alunos usaram sempre a reta numérica.

II) *Sentido de número, estimativa e sentidos da adição e da subtração*

Cadernos de apoio e aprendizagem

As propostas de problemas dos Cadernos de apoio e aprendizagem estão distantes das tendências mais atuais em Educação Matemática. No entanto, a intenção, aqui, não é avaliá-las, mesmo encontrando muitos obstáculos ao trabalhar as situações com os alunos. A intenção é descrever a interação aluno-aluno e alunos-professor em uma tentativa de discutir alguns sentidos das operações no campo aditivo expressos em problemas de texto, partindo de um material já existente e em uso na Rede Municipal de Ensino de São Paulo, e tendo como pano de fundo a ideia do sentido de número.

O primeiro problema apresentado foi o que segue:

São Paulo tem 152 teatros e 260 salas de cinema. Quantos teatros ou cinemas a cidade oferece?

Ao ler o enunciado para o grupo, a pesquisadora teve a impressão de que a pergunta com a expressão "quantos teatros **ou** cinemas" soava estranha aos alunos. Decidiu explicar brevemente: "Quer dizer assim: se eu quisesse saber teatros e cinemas, tudo, quantos que iam ser". No entanto, é claro que isso permaneceu como um fator de dificuldade para grande parte dos alunos.

Antes de dar um tempo para o trabalho em duplas, a pesquisadora pediu que os alunos fizessem uma estimativa de quantos seriam os teatros e cinemas da cidade de São Paulo. Partiram de um acordo superficial sobre o que seria uma estimativa – pensar, sem fazer a conta, quantos teatros e cinemas "mais ou menos" a cidade teria, sabendo que eram 152 teatros e 260 salas de cinema. A intenção era a de que o significado de estimativa fosse negociado ao longo das sessões que se seguiriam.

Manuela foi a primeira a falar, e trouxe como estimativa o número exato correspondente à resposta do problema: 412. Fez-se um silêncio de alguns minutos, até que outros alunos se arriscassem a propor seus números. De 18 estimativas, oito foram adequadas, situando-se de 400 a 420. Quatro eram números maiores ou iguais a 490 e seis eram números menores ou iguais a 320, valores facilmente identificáveis como inadequados. Nenhum aluno contestou qualquer estimativa feita pelos colegas.

Em seguida, os alunos tiveram um tempo para resolver o problema individualmente. A pesquisadora voltou a dizer aos alunos que "valia" usar qualquer procedimento de cálculo, e que era importante saber explicar como resolveu o problema.

Antes de encerrar a sessão, a pesquisadora comentou as estimativas que haviam sido feitas, e convidou os alunos a explicar aos colegas como fizeram sua estimativa, com o objetivo de começar uma construção no grupo sobre o que seria estimar o resultado de um problema.

Pesquisadora: quem quer explicar como pensou para fazer a estimativa?

Apenas Manuela se propôs, e descreveu novamente o cálculo mental exato ao que havia apresentado (o que propôs como estimativa no início da sessão era o resultado exato).

Pesquisadora: Você fez a conta. Mas se você quisesse dizer mais ou menos, bem rápido, o que dava para você descobrir olhando para o número?

Manuela: Quatrocentos.

Pesquisadora: Quatrocentos. Como você pensou no quatrocentos?

Manuela: Se eu olhasse para o duzentos mais o cem, trezentos. Aí 50 mais 60, perto do 100... 400.

Na sessão seguinte o problema proposto no livro dizia:

A cidade tem 260 salas de cinema e alguns centros culturais, totalizando 299 atrações desse tipo. Quantos são os centros culturais?

Antes de começar a apresentar a atividade dos alunos, uma observação se faz necessária. Nesse enunciado, temos uma questão complicada de vocabulário e contexto. Seguramente cinema e centro cultural não são parte do dia a dia da maioria da classe. E, embora tenha sido dito, no momento da leitura inicial do problema, que tanto cinema quanto centro cultural são atrações culturais, esse não é um vocabulário favorecedor. Ou seja, o contexto do problema não favorece a atividade dos alunos. Ainda assim, a discussão que se desenvolveu sobre as estimativas criou uma boa oportunidade para que os alunos pensem sobre o sentido da operação.

Estimativas

Helena foi a primeira a falar, com uma estimativa que considerava corretamente o sentido da operação (140). Seguiram-se os outros alunos e, ao fim dessa primeira rodada, apenas seis das 23 crianças estimaram um número abaixo dos 299, que seria o total de atrações. Todas as outras estimaram o resultado da adição do total com uma das parcelas, ou seja, juntaram os números que apareciam no enunciado do problema, um erro recorrente em situações desse tipo. A discussão dessas estimativas aconteceu apenas após a resolução individual da questão. No entanto, para facilitar a leitura, essa discussão será apresentada a seguir.

Pesquisadora: Nesse problema apareceram estimativas muito diferentes. Por que será que tem estimativas tão diferentes? Olha só: a gente tem 40 e 500. No outro não apareceram números tão diferentes, não é? Por que será que aqui apareceram coisas tão diferentes umas das outras?

Helena: A criança que falou 500 pensou em uma conta de mais e a que falou 40 pensou em uma conta de menos.

Pesquisadora: Quem tinha razão? Levanta a mão quem acha que quem tinha razão é quem juntou.

Só quatro crianças levantaram a mão, sendo que a grande maioria havia juntado.

Pesquisadora: Joaquim (um dos que levantou a mão), por que você acha que tinha que juntar?

Joaquim: Porque tá falando "quantos são".

Pesquisadora: Está falando quantos são, é verdade. Mas quem quer ajudar a explicar por que tinha que juntar?

André (outro dos que levantou a mão) releu o enunciado e disse: Você vai lá, junta os dois, e aparecem quantos centros culturais são.

A explicação de Joaquim tentou buscar palavras-chave no enunciado, enquanto a de André pareceu se pautar na crença de que, diante de um enunciado de problema, deve-se sempre juntar os números apresentados. Já Claudia e Helena, ao citarem uma palavra do enunciado, não parecem utilizá-la como palavra-chave, pois a relacionaram às outras informações apresentadas. Manuela, por sua vez, traduziu a situação com palavras próprias, enfatizando as relações mais importantes.

Claudia: Tá falando que **totalizando** (enfatiza a palavra ao falar) é 299. Aí, se eu “tirar 299 menos” 260 vai dar 39, e aí vai ser o número de centros culturais.

Pesquisadora: Tá bom, mas por que você acha que tem que tirar?

Claudia: Porque já tá falando “totalizando”.

Helena: “Totalizando tudo” dá 299. Se tirar as salas de cinema, vai ficar os centros culturais.

Manuela: Tipo, ó, tem 299 atrações culturais. Só que a gente já sabe que 260 são salas de cinema e o resto são centros culturais. Tá perguntando quantos são os centros culturais, então tem que tirar, porque se a gente fizer 260, que são as salas de cinema, mais 299, que são as atrações culturais, a gente vai ta somando **de novo** (enfatiza) as salas de cinema.

Mais da metade dos alunos da classe deixou de se manifestar na discussão, e parecia não acompanhar a fala dos colegas.

Pesquisadora: Agora vamos fazer uma coisa juntos. Vamos supor que eu tenha lido o problema e pensado em juntar o total de atrações e as salas de cinema, para descobrir quantos centros culturais são. Daria 559... Seria como se eu falasse que tem 559 o quê? O que que está perguntando?

Manuela: Quantos centros culturais.

Pesquisadora: Então eu ia dizer que tem 559 centros culturais, não é? (anotou no quadro: 559 centros culturais). Quantos cinemas tem?

Duas crianças: Duzentos e sessenta.

Pesquisadora (anotando no quadro): Duzentos e sessenta cinemas. E juntando essas duas coisas, totaliza... Quanto está falando que totaliza no problema?

Claudia: Duzentos e noventa e nove.

Pesquisadora (depois de anotar o total de atrações): o que vocês acham, gente?

Algumas crianças (baixinho): Não dá.

Pesquisadora: Vocês não iam dizer assim, "Lucia, como é que 260 cinemas mais 559 centros culturais pode dar 299?

Carlos: Poderia juntar se tivesse assim, "ao todo".

Pesquisadora: Será? Vamos ver. Vamos trocar "totalizando" por "ao todo". Tem "ao todo 299 atrações. Dá para ter 559 cinemas?

Carlos balança a cabeça negativamente.

Durante a parte da aula dedicada ao trabalho individual, a questão do sentido da operação no problema apareceu no trabalho de muitos alunos. Várias crianças simplesmente adicionaram as salas de cinema ao total de atrações (Exemplo 22); outras partiram do número correspondente à quantidade de salas de cinema e chegaram ao total de atrações, mas, ao interpretar seus cálculos, colocaram o número total de atrações como se fossem os centros culturais (Exemplo 23)

Exemplo 22

Victória adicionou, ao total de atrações, o número de cinemas, obtendo uma resposta absurda. É interessante notar que ela queria usar a linha vazia, mas não se sentiu segura para abrir mão do algoritmo tradicional.

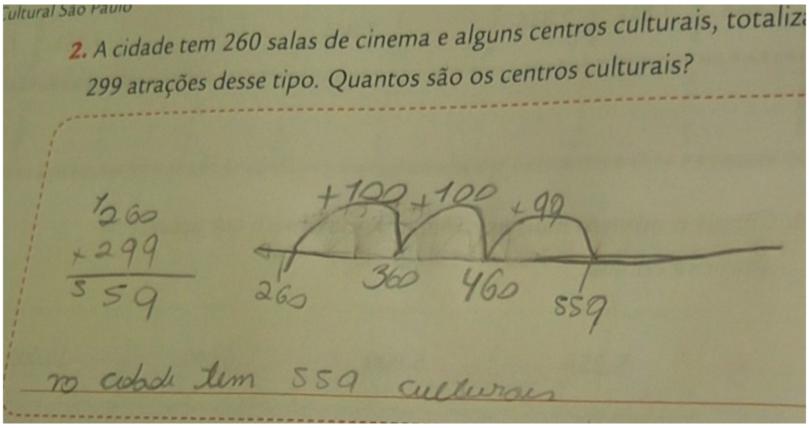

Figura 33: Cálculo de Vitória, que desconsidera o sentido da operação.

Exemplo 23

Gilberto usou a linha vazia para fazer uma conta "de chegar", partindo da quantidade de cinemas até o total de atrações. No entanto, trouxe como resposta o valor de chegada, e não o valor acrescentado (figura 34).

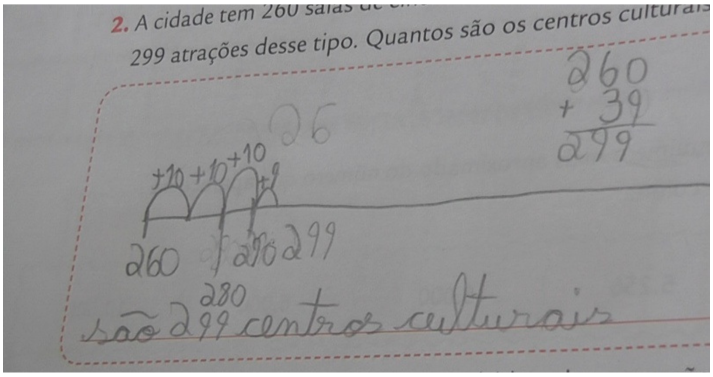

Figura34: Cálculo de Gilberto, que considera o valor total como uma parte ao formular sua resposta.

As soluções elaboradas por alguns dos alunos favoreceram o debate sobre o sentido do problema, pois alguns se utilizaram da subtração, outros se utilizaram da adição, e a discussão baseada na comparação entre essas soluções é muito produtiva.

Entre as soluções que a pesquisadora e a professora selecionaram para serem apresentadas para discussão, estava a reta de Ângela (figura 35), pois ela a apresentou sem a contagem de dez em dez que havia feito e anotado em seu livro com a pesquisadora, e com uma conta ao lado fazendo 99 –60 =39. Também foi escolhida a reta de Francisco (figura 36), que usa uma adição. A intenção era a de promover uma discussão sobre o sentido dessas operações.

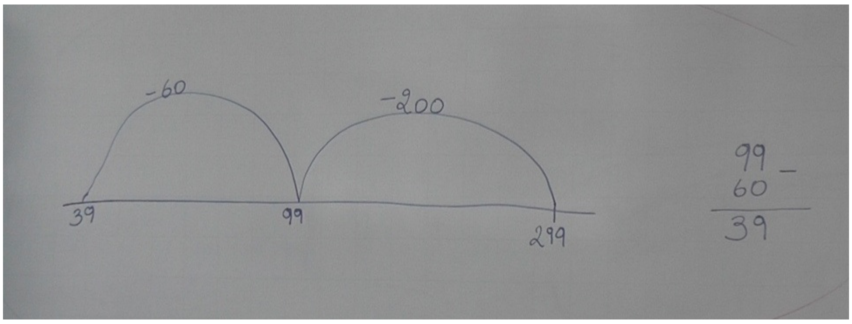

Figura 35: Reta de Ângela, que substitui a contagem descendente de dez em dez feita com a pesquisadora por uma "conta armada" ao lado.

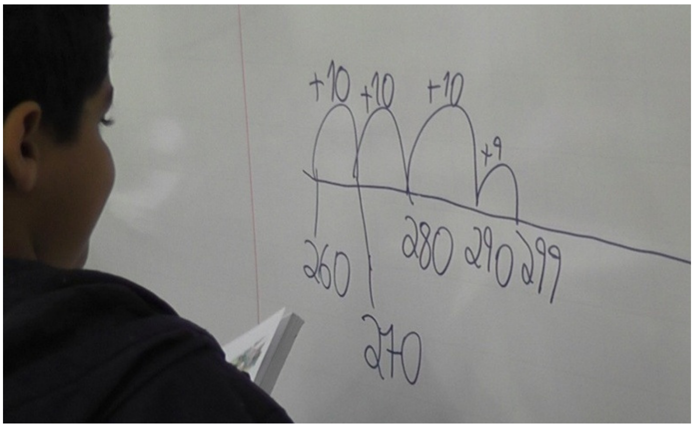

Figura 36: Francisco apresenta uma adição, partindo do valor de uma das parcelas para chegar ao total.

Pesquisadora: Quem quer dizer para gente o que tem a ver essa solução aqui com essa solução aqui (apontando as duas retas, figuras 35 e 36)?

Carlos: Ali tinha 299. Ela “tirou mais” 200, ficou 99. Daí 99 menos 60 já dá 39, aí ela ficou com o resultado certo.

Pesquisadora (anotando): Então a conta que ela fez foi?

Carlos: (...)

Pesquisadora: Duzentos e noventa e nove...

Carlos: Menos 200, menos 60.

Pesquisadora: Então foi 299 menos quanto?

Carlos: Duzentos e noventa e nove menos 260.

Pesquisadora: Vocês concordam com o Carlos, gente? E deu quanto?

Carlos: Trinta e nove.

Pesquisadora: E o Francisco?

Manuela: Ele tirou nove, deu 290...

Pesquisadora: Você tirou, Francisco?

Carlos: Ele colocou.

Manuela: Ele colocou, é.

Pesquisadora: E como que ele fez, será?

Manuela (descrevendo as adições sucessivas na reta feita por Francisco): Ele colocou 260, aí ele fez mais 10, deu 270.

Pesquisadora: É verdade. Agora, é interessante isso. Por que esse jeito do Francisco também é bom?

Helena: Porque ele quis saber, do 260, quanto falta para chegar no 299.

Pesquisadora: É isso, Francisco? Olha que ele pensou. Esse 260 era o que, mesmo?

Carlos: Os cinemas.

Pesquisadora: Os cinemas. Do cinema, ele resolveu ver quanto tinha que por para chegar aonde?

Carlos: No teatro.

Voz não identificada: No centro cultural.

Voz não identificada: No total de atrações.

Pesquisadora (anotando no quadro 260 + $\boxed{?}$ = 299): No total de atrações. Então ele fez 260 mais quanto que dará 299? E quanto que ele precisou por para chegar no 299? *Manuela*: Trinta e nove.

Pesquisadora: Gente do céu, olha só! (apontando a sentença de Ângela e a de Francisco).

Carlos: Professora, aí já tá diferente. Tá ao contrário.

Pesquisadora: Sim, só que qual é a resposta? Francisco, qual é a sua resposta?

Francisco: (lendo) São 299 centros culturais.

Pesquisadora: É? Mas o que o problema disse que o 299 era, mesmo?

Várias crianças: O total.

Pesquisadora: Então o que que a gente queria olhar nessa conta, aqui? A gente queria olhar aonde chegou?

Manuela: Não, a gente queria olhar quanto que ele andou para chegar até o 299.

Carlos: Então ele se confundiu, e fez uma conta de mais.

Pesquisadora: Mas se ele olhar o quanto que ele pôs, ele descobre quantos eram os centros culturais, não é?

Muitas crianças pareciam não ter entendido isso.

Os enunciados dos três problemas que serão apresentados a seguir se referem a compras na Rua 25 de Março. A introdução apresenta rapidamente a rua e Dona Marina, que vem à São Paulo abastecer sua papelaria, que fica no interior. Ao ler essa introdução, a pesquisadora comentou: “vocês vão perceber que as quantidades que aparecem nesses problemas não são quantidades que as pessoas compram para elas mesmas, para a casa delas. São quantidades para uma loja, para revender”.

Dona Marina comprou 2.130 canetas azuis e 3.450 canetas vermelhas. Quantas canetas Dona Marina comprou?

Estimativas

Alguns dos alunos propuseram estimativas iguais a de um colega e, assim, ao todo houve apenas 11 estimas diferentes. Dessas, cinco podem ser consideradas inadequadas, pois eram números abaixo de 5.500. As demais eram adequadas, variando de 5.500 a 5.600.

Pesquisadora: Pessoal, eu sei que todos você aqui saber armar uma conta para resolver esse problema. Eu queria combinar que quem puder fazer de outro jeito, que ajude a pensar sobre os números, vai fazer. Os jeitos que ajudam a pensar sobre os números são aqueles em que vocês decompõem os números. Mas continua valendo fazer a conta armada, se vocês acharem necessário.

Trabalho individual

Manuela começa usando mesma estratégia que usou no problema anterior, a qual tinha sido tema de discussão, sem perceber que calcular a diferença, aqui, não a levaria a resolver o problema (figura 37).

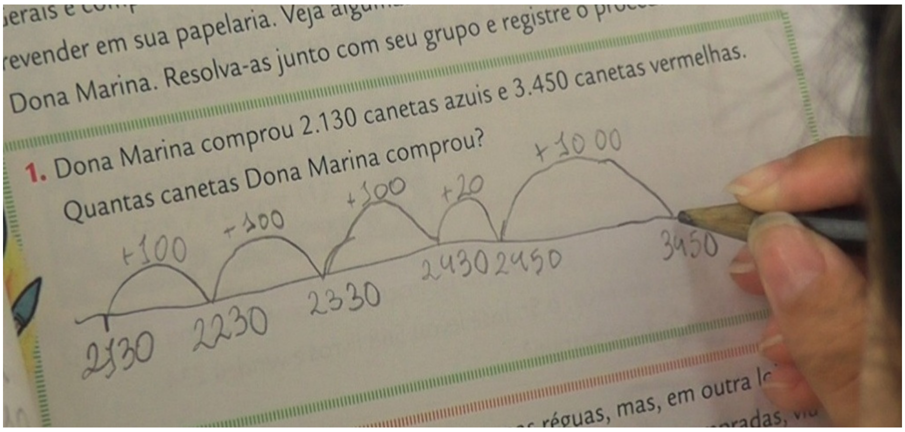

Figura 37: Primeira tentativa de resolução de Manuela.

Pesquisadora: O que você quer descobrir?

Manuela: Quantas canetas ela comprou.

Pesquisadora: E para isso, o que você precisa fazer?

Manuela: Somar.

Manuela desistiu da reta, apagou e fez uma adição por decomposição de parcelas (figura 38).

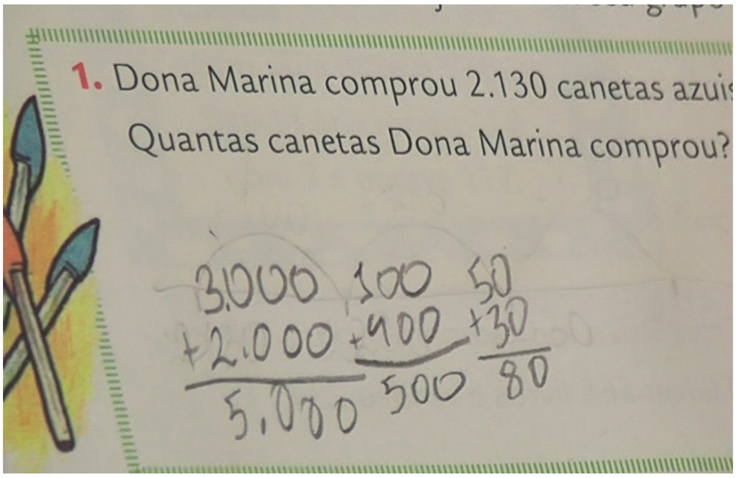

Figura 38: Em vez de usar a reta de forma diferente, Manuela opta por mudar sua estratégia de cálculo.

Thaís também quis usar a reta, mas a utilizou exatamente como era usada no jogo *Número alvo,* e do mesmo modo que foi usada por alguns alunos na sessão anterior: para descobrir a diferença entre dois números, no caso o número de canetas azuis e de canetas vermelhas, o que não faz sentido nesse caso (figura 39). Nesse problema, apenas três crianças fizeram esse tipo de erro.

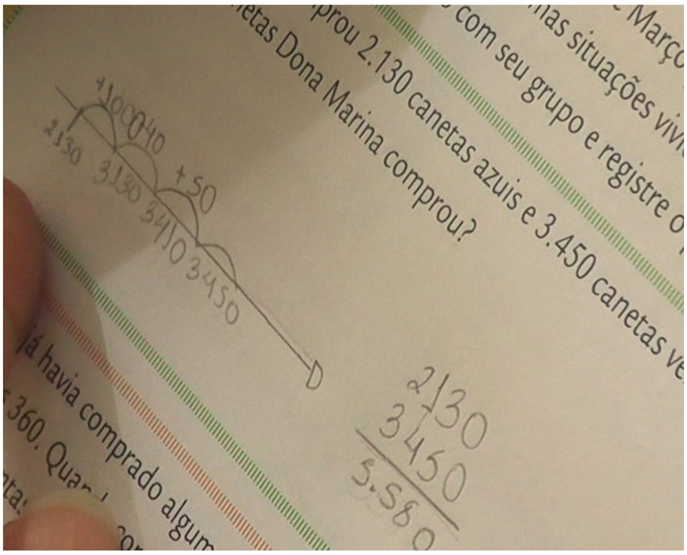

Figura 39: Tentativa de solução de Thaís.

O problema seguinte trazia uma transformação aditiva e o total, perguntando sobre o estado inicial.

Dona Marina já havia comprado algumas réguas, mas, em outra loja, comprou outras 360. Quando contou o total de réguas compradas, viu que eram 640. Quantas réguas ela comprou na primeira loja?

Estimativas

Houve 25 estimativas diferentes, seis delas propondo valores acima do total de réguas, duas com valores a partir de 400 (portanto muito facilmente identificáveis como inadequados), e as demais com valores entre 200 e 350. Todos os valores estimados são escritos na lousa pela pesquisadora.

Pesquisadora: Quem quer tirar uma das estimativas da lousa e explicar para o grupo por que o problema não pode dar esse valor?

Joaquim: Mil.

Pesquisadora: Por que você tem certeza que não pode dar mil?

Joaquim: Porque até no total não dá mil.

Pesquisadora: Gente, quem vai perguntar para o Joaquim, para entender isso que ele está falando. Ele falou que não pode dar mil, "porque até no total não dá mil". O que será que é isso que ele tá falando? Quem acha que dá mil, e vai falar para o Joaquim, não eu acho que dá mil, por causa disso, disso e disso.

Antônio: Mas 300 mais 600 dá 900, daí você vai fazer 60 mais 40, que vai dar 1.000.

Pesquisadora: Olha, Joaquim, o Antônio está dizendo "Joaquim, 300 mais 600 dá 900, 60 mais 40 dá 100, aí dá 1.000". Agora você precisa dizer para ele por que você acha que não pode dar mil, se juntando esses números dá perto de mil.

Joaquim (falando baixo, para a pesquisadora)*:* Mas a conta não é de mais.

Pesquisadora: Fala mais alto, para o Antônio te ouvir.

Joaquim vira para o grupo, fala mais alto.

Pesquisadora: Por que você acha que não é de mais, Joaquim?

Joaquim: Porque o problema fala quanto comprou na loja e não o total.

Pesquisadora: Vocês viram isso que o Joaquim falou, gente? Olha, Antônio, o que você falou é verdade, se a gente fosse juntar 640 com 360, daria 1.000, você tem razão. Mas o Joaquim tá dizendo é que o problema não é de juntar. Ele só vai explicar melhor por que o problema não é de juntar.

Joaquim repete que o problema fala quanto comprou em uma loja.

Pesquisadora: E que informações tem aí para a gente descobrir quanto comprou em uma loja?

Helena: Tá dizendo que o total de réguas é 640, então não pode ser mais do que isso.

Bia: É que a gente não sabe quanto ela comprou na primeira loja. Na segunda a gente já sabe que é 460 – (Lendo) "quando contou o total de réguas viu que eram 640".

Manuela: Ele quer saber quanto ela já havia comprado. O tanto que ela comprou mais 360 vai dar 640.

Pesquisadora: Quem quer vir tirar outra estimativa?

Augusto: Três mil.

Pesquisadora: Conta para o pessoal por que você tem certeza que não pode dar 3.000.

Augusto: ...

Voz não identificada: É a mesma coisa que o Joaquim.

Pedro: Trezentos e vinte.

Pesquisadora: Por que você acha que não dá para dar 320. Conta para o pessoal.

Pedro: ...

Pesquisadora: Explica por que você acha que não pode dar 320.

Pedro: Eu acho que dá 320.

Pesquisadora: Ah, então espera um pouco, porque agora a gente tá falando das estimativas impossíveis. As que a gente acha que não é.

Clara: Mil e cem.

Carlos: Três mil.

Ângela: Quinhentos.

Pesquisadora: Explica para o pessoal por que não dá pra dar 500, Ângela?

Ângela: ...

Pesquisadora: Você tem razão, não dá para dar 500. Por quê?

Ângela (após alguns instantes): Porque só vai até 640.

Pesquisadora: Só vai até 640, olha. Porque todas as réguas juntas eram 640.

Helena: Quatrocentos e sessenta.

Pesquisadora: Por que não pode ser 460?

Helena: Se fosse 460, não dava para pôr 360, porque iria passar.

Pesquisadora: Passar do quê?

Helena: Dos 640, que é todas as réguas.

Pesquisadora: Vocês ouviram isso que a Helena falou, gente, que interessante? Quem ouviu?

Manuela: Ela falou que 460 mais 360 ia passar de 640, então não ia dar.

Pesquisadora: Isso, legal. É o mesmo motivo da Ângela, não é Ângela?

No fim do dia, Dona Marina conferiu suas compras e tinha 36 lápis a mais do que precisava. Se ela contou 1.048 lápis, quantos ela precisava ter comprado?

Estimativas

Houve 18 estimativas diferentes. Dessas, oito podiam ser consideradas adequadas (números entre 1.010 e 1.030) e dez podiam ser facilmente identificadas como inadequadas: sete por apresentarem valores abaixo de 1.000 e três por apresentarem valores iguais ou maiores do que 1.048.

Pesquisadora: Quem quer dizer uma estimativa que não pode ser a resposta e explicar por quê?

Cristiane: É que eu coloquei o meu errado, eu coloquei 1.048.

Pesquisadora: E por que você acha que não é 1.048, Cristiane?

Cristiane (indicando com o dedo como se fosse ler o enunciado) Porque já tinha aqui, olha.

Pesquisadora: Ah, o que que é o 1.048, então?

Rodrigo: Os lápis que ela comprou.

Pesquisadora: E o que está perguntando?

Cristiane: Quantos que ela precisava ter comprado.

Pesquisadora: Olha só, fala quantos lápis ela comprou e quer saber quantos ela precisava ter comprado. Como assim?

Eduardo: Tá falando aqui que ela comprou 1.048 lápis e quanto ela precisava ter comprado, porque ela comprou 36 lápis a mais.

Pesquisadora: Ah, então ela não comprou o tanto que precisava. Ela comprou a mais, não é isso?

Pesquisadora: Então você quer tirar, não é, Cristiane? Você quer pôr alguma coisa no lugar?

Cristiane: Quero.

Pesquisadora: Quanto você quer pôr?

Cristiane: ...

Pesquisadora: Bom, tem que ser quanto você acha que ela precisava ter comprado. Ela precisava ter comprado mais do que ela comprou, ou menos do que ela comprou?

Cristiane: ...

Rodrigo: Menos lápis do que ela comprou.

Pesquisadora: O Rodrigo acha que é menos lápis do que ela comprou.

Cristiane: ...

Pesquisadora: Qual você quer colocar?

Cristiane: Mil e dezenove.

Tem algum número aqui que vocês já sabem que dá para tirar? Levanta a mão quem quer tirar algum número dessa lista.

Francisco: Mil e oitenta e quatro.

Pesquisadora: Mil e oitenta e quatro. Por que você acha que não pode ser esse número, Francisco?

Francisco: Porque esse é um número alto, e ia passar da quantidade de lápis que ela tinha comprado.

Pesquisadora: Não é verdade, gente?

Vários alunos concordam, ninguém protesta.

Pesquisadora: Então vou tirar, tá bom?

Pesquisadora: Tem mais algum que não pode ser aqui?

Joaquim: Novecentos.

Pesquisadora: Por quê?

Joaquim: Não, ela pode sim.

Pesquisadora: Pode ou não pode?

Claudia: Não.

Pesquisadora: Por quê?

Claudia: Porque senão, por exemplo, tem 1.048. Aí eu vou tirar 48, vai ficar mil. Aí eu vou ter que tirar mais cem, e não vai tirar 36.

Pesquisadora (anotando na lousa): Olha o que a Claudia falou, gente. Está falando que ela comprou 1.048 lápis. E aí o que você falou mesmo?

Claudia: Que ela comprou 36 a mais do que precisava.

Pesquisadora: Ela comprou só 36 lápis a mais do que precisava.

Claudia: E aí se tirar o 48 daí, eu vou tirar o 48, e aí vou tirar mais 100 para dar 900.

A pesquisadora foi colocando os números ditos por Claudia em uma reta no quadro.

Pesquisadora: Então para a gente dizer que ela tinha que comprar 900, ela teria comprado quanto a mais do que precisava?

Crianças em silêncio.

Voz não identificada: Cento e quarenta e oito.

(...)

Pesquisadora: Quem quer tirar mais alguma?

Joaquim: Oitocentos.

Pesquisadora: Por quê?

Joaquim: ...

Pesquisadora: Você tem razão. Explica para o pessoal por que não pode ser 800.

Joaquim: Posso pedir ajuda?

Pesquisadora: Sim.

Joaquim pede ajuda para Claudia.

Claudia: Porque se colocar 800, vai ter tirado 248!

Pesquisadora: Não é verdade? A diferença fica maior ainda. Foi isso que você pensou, Joaquim?

Joaquim faz que sim com a cabeça sem demonstrar convicção.

Pesquisadora: O 800 está mais longe ainda do tanto de lápis que ela comprou, não tá?

Pesquisadora: Tem mais alguma estimativa que vocês acham que não pode ser?

Carlos: Oitocentos e cinquenta.

Pesquisadora: Por quê?

Carlos: Posso pedir ajudar?

Pesquisadora: Sim.

Eduardo: Se não pode ser 900, também não pode ser 840.

Pesquisadora: Alguém quer tirar mais um?

Joaquim: Cento e dez.

Pesquisadora: Por que, Joaquim?

Joaquim: Porque é mais longe ainda.

Outras crianças se sucederam eliminando todos os números menores do que 1.000 das estimativas possíveis. No entanto, mantiveram os três valores maiores do que 1.048, que também não eram estimativas possíveis.

Os dois problemas que seguem, no *Caderno de apoio e aprendizagem*, tratam de uma livraria que faz o seu balanço.

Na livraria, havia 2.200 livros de aventura, e alguns de terror. Se o total desses livros era 3.289, quantos eram de terror?

Estimativas

Houve 19 estimativas diferentes, sendo dez adequadas (entre 1.000 e 1.200) e nove inadequadas. Entre as inadequadas, cinco eram valores acima de 5.000, o que fez a pesquisadora supor que esses alunos adicionaram, ao total de livros, os livros de terror, desconsiderando o sentido da operação. As outras três (500, 1.400 e 1.500), embora provavelmente fossem fruto de uma tentativa de estimar a diferença, eram facilmente identificáveis como inadequadas, uma por estar acima de 1.200 e as outras duas por estarem acima de 1.000.

Para a discussão, a pesquisadora perguntou quem gostaria de propor a eliminação de uma das estimativas, justificando sua proposta.

Midian: Cinco mil e quinhentos.

Pesquisadora: Por quê?

Midian: Porque se o total é 3.290, como é que vai ser 5.000?

Pesquisadora: Olha o que a Midian disse: o total de livros era 3.289. O que tem dentro desse total?

Algumas crianças: Aventuras e terror.

Pesquisadora: E por que a resposta do problema não pode ser mais do que 3.289?

Francisco: Porque quando é conta de mais, a gente sempre coloca o maior em cima do menor, e o 5.500 é maior do que o 3.289.

Pesquisadora: Você não falou nada sobre os livros, sobre a pergunta do problema, então vamos pedir para alguém te ajudar.

Claudia: O total é o quanto não pode ter mais. Se esse é o total, não pode ter mais que o total, é tipo o máximo.

Pesquisadora: Ela está dizendo que se está escrito que esse é o total de livros, a resposta não pode ser mais do que isso. Isso é verdade, mas o que nos garante mesmo é a gente olhar o que o problema quer que a gente descubra.

Eduardo: O problema quer que a gente descubra quantos eram os livros de terror.

Pesquisadora: Ah, olha gente, a gente quer saber quantos eram os livros de terror.

Eduardo: Aí, se 3.289 é o total, não pode ser os livros de terror.

Manuela propõe eliminar 5.400.

Pesquisadora: Por quê?

Manuela: Porque não é uma conta de mais. A pessoa que colocou esse número deve ter pensado em fazer 3.289 + 2.00.

Pesquisadora: Ah, será que a pessoa que pensou esse número estava imaginando uma conta de mais?

Várias crianças: Sim.

Pesquisadora: E por que não pode ser uma conta de mais, Manuela?

Manuela: Porque tem o total de livros, e tirando 2.200 quer saber quanto tem. Mas tirando, não colocando mais.

Pesquisadora: E por que será que tem que tirar, gente?

Manuela: Porque a gente quer saber quantos são os livros de terror.

Joaquim propõe eliminar o 5.000.

Pesquisadora: Por quê?

Joaquim: Pelo mesmo motivo.

Helena propõe eliminar 5.300, pelo mesmo motivo.

O problema seguinte, que apresenta uma transformação negativa com final desconhecido, foi oportunidade para mais uma discussão sobre o sentido da operação envolvida e um avanço nas discussões sobre estimativa.

Numa feira de livros, Sr. Fernando levou 568 livros e vendeu 234. Quantos livros sobraram?

Estimativas

De 15 estimativas diferentes, quatro eram números maiores ou iguais a 500, que apontavam para uma desconsideração do sentido da operação. Duas eram valores adequados (350, proposto por vários alunos, e 300) e as outras nove eram valores maiores ou iguais a 400, ou menores ou iguais a 250, que poderiam ser consideramos pouco elaborados.

Pesquisadora: Quem quer eliminar uma estimativa e explicar por que não pode ser aquele número?

Manuela: Seiscentos e cinquenta. Porque ele levou 568 livros. O que sobrar não pode ser mais do que ele levou.

Pesquisadora: Vocês concordam?

Várias crianças: Sim.

Pesquisadora: Por que não pode sobrar mais livro do que ele levou?

Claudia: Porque o total é 568, que ele levou.

Pesquisadora: Ué, mas e se ele tivesse ganhado livro?

Joaquim (rindo): Mas não fala isso.

Pesquisadora: O que é que fala?

Joaquim: Fala quantos livros ele...

Manuela (corta Joaquim): Fala que ele tinha 568 livros e **vendeu** (enfatiza) 234.

Vários alunos tentam falar ao mesmo tempo.

Pesquisadora: Ah, ele vendeu livro. Por isso que ele não pode ficar com mais do que tinha, né?

Francisco quer eliminar o 800, "por causa da mesma coisa que a Manuela falou, que ele sevou 568, e aí está 800".

André elimina 750, também "pelo mesmo motivo da Manuela".

Antônio: Quero tirar o 500.

Duas ou três vozes: Ah, mas ele levou 568...

Antônio: Por causa que sobraram... Por causa que tirou 234 e não pode ser 500.

Pesquisadora: Gente, o Antônio está dizendo que não pode ser 500, porque... Por que mesmo?

Antônio: Porque tirou 234.

Pesquisadora: De onde?

Antônio: Do que ele... Do que ele...

Carlos: Porque ele vendeu 234. Aí ficou, porque ele levou 568, aí se ele vendeu, ele vai ter que tirar, então não pode dar resultado de 500.

Pesquisadora: Ah, porque para sobrar 500 ele teria que ter vendido quanto?

Carlos e outras vozes: Sessenta e oito!

Pesquisadora: E ele vendeu mais do que 68, é isso Antônio?

Antônio: Sim.

Augusto: Quero tirar o 100. Por causa que ele levou 568 livros e que saber o quanto que vai dar, então não vai dar esse número, porque, para mim, a conta é de menos.

Pesquisadora: É, eu concordo com você. E eu acho que tem a ver com isso que você está falando, mas precisa explicar um pouco melhor por que você acha que não pode dar 100.

Augusto: Por que não pode dar 100...

Pesquisadora: Você acha que vai sobrar mais do que 100 ou menos do que 100 livros?

Augusto (alguns segundos de silêncio, depois falando baixinho): Mais.

Pesquisadora: Mais. Concordo com você. Por quê?

Augusto: Porque tem que... (alguns segundos de silêncio)

Pesquisadora: Quer pedir ajuda para alguém?

Augusto: Para Claudia.

Pesquisadora: Tá, Claudia, mas pensando no que o Augusto falou, tá bom?

Claudia: É que cinco menos dois vai dar três.

Pesquisadora: Mas cinco menos dois! Tem cinco aí?

Claudia: Tem. Tem cinco aqui, ó, do quinhentos.

Pesquisadora: Ah, então não é cinco menos dois. É o que?

Algumas crianças (baixinho): Quinhentos.

Pesquisadora: Quinhentos?

Claudia: Quinhentos menos 200 vai dar 300.

Pesquisadora: Ah, olha só, fez sentido isso que o Augusto e a Claudia falaram, gente?

Só *Carlos* responde: Fez.

Pesquisadora: Pode tirar o 100, mesmo?

Poucas crianças: Pode.

Pesquisadora: Certeza?

Carlos: Eu tenho certeza!

Victória quer eliminar 550, “por causa da mesma coisa que o Antônio falou”.

Pesquisadora: É mesmo, Victória. O que mesmo que o Antônio falou?

Victória: ...

Pesquisadora: Você consegue lembrar o que o Antônio falou?

Victória: Que nem ele falou da conta...

Pesquisadora: Ahã, vai falando.

Victória: Posso pedir ajuda?

Pesquisadora: Pode.

Victória: Para a Manuela.

Manuela: Ele falou assim, que 568 menos 234 dava... Não pode dar mais do que eu tirei.

Pesquisadora: Eu acho que não foi isso que o Antônio falou.

Manuela: Que nem a Claudia falou. Quinhentos menos 200 dá 300, se eu “tirar 568 menos 234” não pode dar 550!

Pesquisadora: Vocês acham, gente, que é isso?

Vários alunos: É.

Pesquisadora: A Izabel e a Manuela estão falando que pode eliminar o 550, e eu estou achando interessante essa ideia, só que ela não está muito bem explicada.

Carlos: Porque ele levou os 568 e vendeu 234. Aí 500 menos *dois* é 300, que nem a Claudia falou, mas não pode dar... qual mesmo?

Pesquisadora: Esse aqui.

Carlos: O 550. Só poderia dar se fosse 500 + 200. Aí tirava aqui do *três*, *um*, ficava dois aqui, tirava do...

Pesquisadora: O que, como assim, que dois, que três, que um?

Carlos: Não, 30.

Pesquisadora: Não entendi.

Claudia: O 550 só dava se eu 'tirasse 500 menos zero', cinco menos zero. Aí sim, ia dar cinco, ali na frente, que é o primeiro.

Pesquisadora (apontando para o 5 na posição relativa à centena, no 550, escrito no quadro): Ah, é verdade. Alguém consegue explicar melhor isso?

Helena: Professora, é assim. O tanto de livros que ele levou é 568. Ele tinha que vender menos do que 234 para dar 550.

Pesquisadora: Para dar 550. Esse 550 seria o que, o tanto de livro que o que, gente?

Voz não identificada: Que ele vendeu.

Manuela: Que sobrou do que ele tinha.

Pesquisadora: Sobra 550, então, o que tinha que ter acontecido?

Helena: Olha, ele tinha que vender menos para dar 500.

Pesquisadora: Tinha que vender menos! Tinha que ter vendido o que, pouquinho, para sobrar tudo isso, não é gente?

Carlos: É, no mínimo, deixa eu ver...

Manuela: Professora, ele tinha que vender 18 livros.

Pesquisadora: Só se ele tivesse vendido 18 livros podia sobrar 550, olha. Então acho que todo mundo tinha razão, não é?

Joaquim quer eliminar o 150.

Pesquisadora: Por quê?

Joaquim: Posso pedir ajuda?

Pesquisadora: Pode, mas podia tentar explicar um pouquinho.

Joaquim: ... eu não sei.

Manuela: Eu acho que ele pensou a mesma coisa que o Augusto.

Pesquisadora: O que o Augusto pensou, mesmo?

Manuela: Que 500 menos 300 ia dar 200, não podia dar 150.

Pesquisadora: Isso combina como o que você estava pensando, Joaquim?

Joaquim: Sim.

Tomando as discussões sobre os enunciados dos problemas suscitadas pela proposta e avaliação de estimativas pelo grupo, podemos ver emergir um modo de interagir específico, dentro do qual mais e mais crianças vão se mostrando à vontade. A possibilidade de se apoiar nas justificativas dos colegas se mostra como uma grande aliada para promover esse movimento, favorecendo o estabelecimento de relações entre o que um aluno está pensando e o que os colegas estão apresentando ao grupo.

6. DISCUSSÃO

Mesmo partindo de um esforço contínuo de apresentar recortes da atividade em sala de aula e de organizá-los tendo em vista os objetivos deste estudo, esses excertos, por sua complexidade, se apresentam quase que justapostos, demandando a partir daqui uma discussão argumentada, que possa construir relações a partir deles. Para isso, nos deteremos em primeiro lugar, na interdependência que se pode vislumbrar entre as categorias de análise assumidas (COBB et al, 1997; COBB et al, 2001; COBB; YACKEL, 1996). Em segundo lugar discutiremos a relação entre estratégias de cálculo e conhecimentos sobre número à luz da relação mais geral entre procedimentos e conceitos (BAROODY, 2003). Em terceiro lugar, refletiremos sobre como a experiência vivenciada pelos alunos durante esta pesquisa pode ter representado algum impacto no desenvolvimento de seu sentido de número (MCINTOSH et al, 1992; GREENO, 1992; GREENO, 1989).

6.1. Normas sociais, normas sociomatemáticas e práticas matemáticas: expressões de uma interdependência

O modelo de análise adotado nesta pesquisa (COBB et al, 1997; COBB et all, 2001; COBB; YACKEL, 1996b) é especialmente interessante por servir como um guia para as intervenções do professor em sala de aula. Ao analisar continuamente o trabalho sob a perspectiva das normas sociais, normas sociomatemáticas e práticas matemáticas, identificando papéis, crenças, valores, procedimentos e conceitos que espera que se tornem presumidamente compartilhados, o professor pode construir um instrumento de trabalho com foco específico e, ao mesmo tempo, flexível. Na experiência relatada neste trabalho, as transformações observadas nas ações dos alunos ao longo das sessões foram significativas e positivas. No entanto, não foi possível considerar as conquistas como presumidamente compartilhadas no grupo. Para refletir sobre esses avanços e seus limites, é útil apresentar primeiro as conquistas, de maneira geral.

Do ponto de vista das normas sociais, praticamente se inaugurou uma prática em que os alunos passaram a considerar que deveriam justificar seu raciocínio, ouvir e procurar compreender as explicações dos colegas, manifestar-se espontaneamente quando não compreendessem algo, formular perguntas e manifestar sua discordância, quando fosse o caso, justificando sua posição.

Do ponto de vista das normas sociomatemáticas, a negociação do que seriam soluções adequadas, diferentes e sofisticadas se deu em dois níveis. O primeiro, relacionado ao cálculo e conhecimentos sobre número, no qual foi se estabelecendo que uma solução adequada deveria lidar com os números considerando seu valor, e não simplesmente manipulando dígitos, e que uma solução sofisticada consideraria especificamente os números em pauta para a escolha do procedimento a ser empregado. O segundo, relacionado à resolução de problemas e aos sentidos das operações de adição e subtração, no qual progressivamente se considerou que uma justificativa adequada para uma resolução deveria se referir a relações entre informações fornecidas pelo problema e a pergunta formulada, e não a palavras chave do enunciado ou a justificativas como "porque eu acho que a conta é de menos".

Do ponto de vista das práticas matemáticas, passaram a ser apresentadas e discutidas estratégias de cálculo que levassem os alunos a estruturar seus conhecimentos sobre o sistema numérico e a expressá-los ao explicar e justificar seus procedimentos, o que levou muitos alunos ampliar sua compreensão do número e das operações de adição e subtração.

Considerando a heterogeneidade do grupo como ponto de partida, observam-se avanços no trabalho da maioria dos alunos. No entanto, os modos de participação e as práticas e conceitos matemáticos colocados em ação se manifestam em níveis de apropriação bastante variados. As observações sobre essa diversidade, apresentadas a seguir, são importantes para a pesquisa, pois expressam uma aprendizagem e podem indicar caminhos futuros, tanto de propostas quanto de intervenções do professor.

Quanto à primeira norma social, que os alunos explicassem e justificassem seu raciocínio, configurou-se progressivamente uma norma segundo a qual era permitido apoiar-se em explicações e justificativas dos colegas, tanto diretamente, quanto se remetendo a uma explicação dada por eles anteriormente. Esse foi um caminho encontrado pela pesquisadora e pelo grupo para incluir nessa norma alunos que se propunham a participar, mas afirmavam não saber formular uma explicação ou justificativa. Assim, ampliou-se o leque de alunos que participavam da discussão. Embora não se possa afirmar, seria coerente esperar que parte desses alunos, em um trabalho mais longo, passassem progressivamente a se apropriar dessas justificativas, empregando-as com autonomia cada vez maior.

A segunda norma social, que eles ouvissem e procurassem compreender as explicações dos colegas, pode ser considerada presumidamente compartilhada como *intenção*.

Isso porque, nas primeiras sessões de trabalho, quando a pesquisadora perguntava algo ao grupo remetendo-se a algo dito por um dos alunos, a classe não considerava o teor da pergunta, pois não sabiam recuperar o que o colega havia dito. Se a pergunta pudesse ser respondida com "sim" ou "não", formava-se um coro, engrossado por alunos que, por observações do trabalho individual, mostravam não ter formulado essa resposta, mas pareciam acompanhar uma "tendência" do grupo. Quando a pergunta não podia ser respondida com sim ou não, quem estava pedindo a palavra permanecia de mão levantada, "na fila" para apresentar sua solução ou justificativa, sem perceber que a pergunta se referia à fala do colega no turno anterior. Com o desenvolvimento do trabalho, essa direção exclusiva do diálogo professor – aluno foi se transformando, e as crianças mostravam saber o que havia sido dito pelo colega anterior na maioria das vezes. Quem estava apenas "na fila" abaixava a mão, outros levantavam e, ao se manifestar, efetivamente se referiam à fala dos colegas. Ou seja, a mão levantada ou abaixada durante a discussão mostrava alunos que estavam se esforçando para acompanhar todas as falas, não apenas as da pesquisadora. No entanto, o grupo de alunos que se propunha a comentar ou responder uma pergunta sobre essas falas se manteve bastante restrito até as últimas sessões. Nossa hipótese, fundamentada pelas atividades individuais ou em duplas, é de que muitos dos alunos que se mantinham em silêncio, mesmo acompanhando as discussões, não estavam compreendendo boa parte do que os colegas diziam.

A terceira norma social, que os alunos se manifestassem quando não compreendessem algo e, se possível, formulassem perguntas, foi claramente incorporada pelos alunos com melhor compreensão dos desafios. Eram eles que diziam que não haviam entendido determinada explicação e, algumas vezes, formulavam perguntas. Os alunos que demonstravam não compreender um desafio ou que tinham uma ideia de número muito pouco estruturada não costumavam se manifestar no coletivo, pedindo ajuda apenas em momentos de trabalho individual ou em duplas. Ao expressar suas dúvidas, elas geralmente não estavam formuladas como uma pergunta. Sua fala expressava mais um pedido genérico de ajuda para resolver determinada situação. A atuação da pesquisadora, nesses casos, era também de ajudá-los a formular uma questão, já que para isso é necessário alguma compreensão inicial do desafio. Os alunos atuantes nas aulas, com boa compreensão dos desafios e conhecimentos mais estruturados sobre número, por sua vez, costumavam formular suas dúvidas com um foco mais preciso.

A última norma, que os alunos se manifestassem quando discordassem de uma solução, foi incorporada apenas por alguns alunos, que aliavam uma boa compreensão do desafio a uma disponibilidade para se posicionar, mostrando-se seguros o suficiente para se contrapor a uma fala de outro aluno ou, mais raramente, da pesquisadora.

O que parece importante, aqui, é observar que essas expectativas amplas quanto à participação dos alunos não dependem apenas de uma mudança de atitude para sua realização. Elas também dependem, em grande parte, do quanto seus conhecimentos matemáticos lhes permitem compreender e formular soluções e perguntas. Ou seja, depende da adequação do desafio ao momento de aprendizagem dos alunos. Assim, embora esteja clara uma mudança do grupo em relação às normas sociais e crenças sobre o próprio papel e o papel do outro, essa mudança depende, em grande parte, das práticas e conceitos matemáticos dos quais os alunos se apropriam. Essas práticas e conceitos, por sua vez, se desenvolverão à medida que as crenças sobre seu próprio papel e o papel do outro favoreçam esse desenvolvimento.

A relação entre as normas sociomatemáticas e as práticas matemáticas expressam uma interdependência semelhante, se não mais estreita. Ao observar a valorização, pela pesquisadora, de soluções que lidassem com o valor do número, empregando decomposições e recomposições e suspendendo (temporariamente) o uso do algoritmo tradicional escrito, muitos alunos se lançam nessa empreitada. No entanto, mesmo nas últimas sessões, esse caminho permanece repleto de obstáculos, especialmente em relação aos conhecimentos sobre número. Assim, não são poucos os alunos que procuram se apoiar nos dois tipos de procedimentos (algoritmo pré estabelecido e estratégias que lidam com decomposições), propondo soluções que fazem pouco sentido. Tal situação chega a ser irônica quando o objetivo principal do trabalho está ligado à atribuição de sentido aos números e operações. Inversamente, no entanto, a oportunidade de estruturar esse conhecimento sobre números é dada justamente pela tentativa de uso de novas estratégias. A busca dessas estratégias se faz, de modo cada vez mais intenso, à medida que começam a se estabelecer as normas sobre o que vale como uma solução adequada, eficiente, diferente e sofisticada. Quanto à resolução de problemas e aos sentidos da adição e da subtração, o estabelecimento progressivo das justificativas pautadas em relações entre informações e pergunta do problema se contrapôs a uma norma inicial que parecia bastante estabelecida, de considerar a validade de uma solução pautada apenas pelo cálculo e por uma escolha pouco argumentada de uma operação a ser realizada. Abre-se, nessa perspectiva, um espaço importante de metacognição no qual, ao procurarem justificar as soluções que propõem, os alunos passam a observar incoerências ou a estruturar cada vez melhor essas justificativas, ampliando sua compreensão dos sentidos da adição e da subtração.

A dificuldade em considerar qualquer das normas sociais, normas sociomatemáticas ou práticas matemáticas como presumidamente compartilhadas levou, portanto, a uma reflexão sobre a relação entre essas categorias, considerando-a como sendo de estreita interdependência.

6.2.Estratégias de cálculo e conhecimento sobre número: esboçando um círculo virtuoso entre procedimentos e conceitos

Um dos objetivos anunciados na presente pesquisa foi o de procurar caminhos que pudessem nos levar a compreender de que maneira o uso, pelo aluno, de certos procedimentos de cálculo favorece o desenvolvimento do sentido de número. Da complexidade da situação de sala de aula, podemos apontar indícios desse processo e discutir conflitos e impasses vivenciados.

Baroody (2003) afirma que o debate sobre o que é mais importante para o ensino de matemática, se habilidades ("skills") ou compreensão ("understanding"), chegou a uma conclusão relativamente hegemônica de que ambos são importantes. "*No último quarto do século XX, o debate sobre o que é mais importante, se habilidades ou conceitos, foi substituído por um debate sobre a ordem do seu desenvolvimento*" (BAROODY, 2003, p. xx, tradução nossa). Inicialmente, esse debate foi dominado por duas correntes opostas, a saber: 1) a que defende que o desenvolvimento de habilidades matemáticas através de memorização de procedimentos pela imitação, prática e reforço precede o desenvolvimento de conceitos ("*skills-first*"); e 2) a que defende que os conhecimentos conceituais precedem e guiam a construção de procedimentos ("*concept-first*"). Mais adiante, duas outras posições se constituíram. Uma defende que conceitos e procedimentos se desenvolvem simultaneamente e de modo inseparável. A outra, que as relações entre conceitos e habilidades não são facilmente caracterizáveis em termos de "habilidades primeiro" ou "conceitos primeiro", mas podem ser pensadas como iterativas: "*o conhecimento conceitual pode levar a avanços no conhecimento procedimental, a aplicação de procedimentos pode levar a avanços conceituais, e assim por diante*" (BAROODY, 2003, p. xx, tradução nossa).

Ao focar conhecimentos procedimentais e conceituais na sala de aula, procuramos pensar nossa atuação desde essa última perspectiva, que vê conhecimentos conceituais levando a avanços no procedimento, e uso de procedimentos levando a avanços conceituais. Tomemos como exemplo a relação entre o conhecimento conceitual de que uma dezena tem dez unidades, uma centena tem dez dezenas, uma unidade de milhar tem dez centenas. O que significa um aluno dominar esse conhecimento? Pode significar muitas coisas diferentes: uma criança pode saber apenas declarar esse conhecimento; outra pode saber usá-lo para decompor uma centena em dezenas ou uma unidade de milhar em centenas; outra pode saber usá-lo para afirmar, sem pestanejar, que 1.000 menos 100 resulta em 900, ou que 1.000 menos 10 resulta em 990. Pensando nesses exemplos, é possível perceber que o grau de domínio dessa informação é crescente do primeiro ao último. Ou seja, não posso dizer que um aluno que declara que uma unidade de milhar tem dez centenas e uma centena tem dez dezenas saiba justificar que 1.000 menos 10 seja 990 pela compreensão que tem dessas ordens. Mas posso dizer que um aluno que, ao justificar o cálculo instantâneo de 1.000 menos 10, diz "*porque eu pego 100 do 1.000, fico com 900, daí tiro dez do 100, fico com 90*", sabe que dentro do 1.000 há dez "cem" e que dentro de cada um desses 100 há dez "dez". Assim, o uso de procedimentos de cálculo que lidam com os números baseando-se na contagem em intervalos e na decomposição e recomposição forma, com os conhecimentos sobre o sistema de numeração, um círculo virtuoso: quanto mais profundamente se compreende o sistema de numeração, mais eficazes se tornam as estratégias de cálculo mental; quanto mais são elaboradas, discutidas e justificadas as estratégias de cálculo mental, mais se aprofundam os conhecimentos sobre o sistema numérico. Nossa imersão na prática com esse grupo de alunos ilustra parcialmente essa relação, embora esse processo tenha apenas se iniciado.

Adotando a perspectiva iterativa, Baroody (2003) tece observações sobre a relação entre esses dois tipos de conhecimento. Essas observações também podem ser ilustradas por situações recorrentes ao longo das propostas em sala de aula descritas no presente trabalho.

A primeira, de que o conhecimento conceitual comumente está subjacente a inovações procedimentais e de que, quando uma inovação acontece unicamente no nível procedimental, ela frequentemente resulta em erros (BAROODY, 2003). Como relatado na sessão sobre as práticas matemáticas deste trabalho, houve um movimento de muitos alunos de se apropriar da linha numérica vazia apenas no nível procedimental, sem que tivessem identificado as relações aritméticas que ela poderia ajudá-los a estabelecer. Quando a pesquisadora disse que, caso desejassem, poderiam usar a linha numérica vazia para resolver um problema de enunciado do tipo composição conceitual com final desconhecido (e que, portanto demandava uma adição), tinha em mente o uso flexível desse instrumento, que se presta igualmente a adições e subtrações. Ao acatar a sugestão, alguns alunos procuraram reproduzir o uso que outros alunos haviam apresentado em sessões anteriores, quando reiteradamente se calculou a diferença entre dois números. Pareciam ver esse instrumento amalgamado com o “passo a passo” que acompanharam no trabalho anterior dos colegas. Podemos pensar essa situação como a adoção de uma inovação procedimental sem que estivesse ligada a conhecimentos conceituais. De certa forma, essa opção dos alunos mostra-se coerente com sua vivência escolar anterior, de aprender rotinas de cálculo predeterminadas, assim como o modo de registrá-las.

A segunda observação é a de que a competência aritmética não pode basear-se apenas na compreensão de conceitos, mas deve se constituir também pela construção de relações entre conhecimento conceitual e procedimental, em uma progressiva integração entre eles. Em vez de um sério conflito entre o desenvolvimento de conhecimento procedimental e a busca de conhecimento conceitual, o autor nota que a distinção entre esses dois tipos de conhecimento se torna imprecisa e menos útil quando o objetivo do ensino é a aprendizagem de habilidades com significado (BAROODY, 2003). Quando Pedro fica em dúvida sobre o número que virá logo após 1.900 ao contar em intervalos de cem em cem, expressa um conhecimento muito pouco elaborado sobre os números. Muitas crianças conhecem a cantilena de dez em dez (ou seja, têm memorizada a sequência de palavras que se diz ao contar com intervalos de dez entre os números), mas não conseguem usá-la como ferramenta, para o cálculo. Ângela, por exemplo, precisa da ajuda do grupo para usar a contagem de dez em dez para fazer 650 mais 70, embora saiba contar “*50, 60, 70, 80...*”. Alguém sugere a ela que faça um “pulo” de 30, ela anota essa adição na reta, mas não sabe o que colocar como resultado. Também precisa da ajuda do grupo para saber quanto já adicionou depois de colocar 10, mais 10, mais 30. Essas situações colocam em foco a organização do sistema numérico em *sequências de multiunidades* (FUSON, 1992), aspecto da estrutura do número que precisa ser construído para que os alunos se apropriem do sistema. De modo semelhante, quando Carlos decompõe o número 152 em 100, 5 e 2, e essa tentativa é acompanhada pela classe e contestada por um colega, outro aspecto da estrutura do número é posto em evidência, o das *multiunidades agrupadas* (FUSON, 1992).

A observação do trabalho da maioria dos alunos, quando passaram a lidar com os números considerando seu valor e não apenas lidando com os dígitos de acordo com regras aprendidas, mostra um movimento em direção a essa estruturação do número, apresentado a seguir.

Entre as questões que emergiram desse olhar para a interdependência que se pretendia que os alunos construíssem entre os procedimentos de cálculo usados e os conhecimentos sobre número, destacam-se: 1) cálculo apoiado na contagem em intervalos; 2) cálculo pela decomposição de parcelas; 3) cálculo exato e cálculo estimado.

Cálculo apoiado na contagem em intervalos

No grupo em que se realizou esta pesquisa, mesmo a contagem em intervalos de dez e de cem como cantilena (ou seja, uma sequência de números que se sabe *decor*, sem necessariamente compreender as relações matemáticas nela envolvidas) não se mostrava disponível para mais da metade do grupo. A contagem em ordem decrescente é ainda mais desafiadora, especialmente quando se parte de um número "redondo". Quando Cristiane, contando de 10 em 10 em ordem decrescente, chega aos 600, não sabe o que fazer. Manuela mostra um caminho possível para pensar o problema: "*é porque se tirar do 600... vai ser mais difícil tirar do 600, porque já vai dar nos do 500, não vai mais dar 600*".

De acordo com Fuson (1992), a estruturação do número, observada em muitos sistemas numéricos, segue um esquema de agrupamentos: os números orais e as marcas escritas para números são compostos de multiunidades ("multiunits") maiores e maiores, compostas por certo número de unidades ou de multiunidades menores. "*Para compreender os números orais ou as marcas escritas de números de sua cultura, as crianças devem construir estruturas conceituais que reflitam os tipos de multiunidades usadas na interpretação dos números orais e marcas*" (FUSON, 1992, p. 263, tradução nossa). Como já mencionado, duas diferenças básicas entre os números escritos e os orais se fazem notar (os valores nos números falados são explícitos, enquanto os valores nos números escritos estão implícitos em suas posições; os valores nos números falados são absolutos, enquanto nos números escritos são retativos), mas os números escritos e falados usam as mesmas quantidades em cada tipo de multiunidades: dez, cem, mil, e assim por diante.

Relacionando essa estruturação do número a estratégias de cálculo na adição e na subtração, Fuson (1992) apresenta dois tipos de conceitos de multiunidades: *multiunidades agrupadas* ("collected multiunits") e *multiunidades em sequência* ("sequence multiunits").

O conceito de *multiunidades em sequência* se baseia em trechos multiunidades da sequência numérica, e requer a habilidade de contar em intervalos de dez, de cem, de mil e assim por diante. Essa contagem, que inicialmente pode ser apenas o recitar de palavras (números) em determinada ordem, precisa ser relacionada a quantidades para refletir o uso do conceito de multiunidades em sequência: é necessário saber que contar de dez em dez (por exemplo, 26, 36) é equivalente a contar dez unidades simples em sequência (26, 27, 28 , 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36). Assim, uma contagem ascendente de dez aumenta o número inicial em dez, e uma contagem descendente de dez diminui o número inicial em dez.

> Nesse conceito de multiunidades em sequência, um número multidígito é construído pela contagem na sequência numérica usando essas multinunidades em sequência (...). Cinco mil, seiscentos e oitenta e nove é pensado como o resuldado de cinco saltos de unidades-mil, seis saltos de unidades-cem, oito saltos de unidades-dez, e nove passos de unidades simples. (FUSON, 1992, p. 265, tradução nossa)

A principal estratégia de cálculo apresentada ao grupo baseava-se na contagem em intervalos, que podiam ser desse tipo (em multiunidades) ou de qualquer outro (acrescentar ou subtrair valores como 50). Inicialmente, pretendíamos que esse instrumento favorecesse o uso e compartilhamento, pelos alunos, de cálculos pensados de acordo com o número em questão, trabalhando na direção de inventar, aplicar e escolher estratégias eficientes, habilidades relacionadas ao sentido de número desenvolvido (MCINTOSH, 1992). Um exemplo desse tipo de estratégia documentado neste trabalho: ao calcular 650 + 70, um dos alunos propõe adicionar 50 primeiro, "porque fazendo mais 50 já vai chegar no 700", e depois adicionar 20. No entanto, soluções desse tipo tiveram pouco espaço. A maioria dos alunos sentia necessidade de contar em intervalos seguindo a sequência de multiunidades (FUSON, 1992), e essa contagem se mostrava organizadora.

O que vivenciamos durante este trabalho foi que, a cada oportunidade de usar o recurso da contagem em intervalos, mesmo com ajuda do grupo ou da pesquisadora, mais crianças passavam a incorporá-lo como ferramenta. Pedro, por exemplo, a cada novo desafio pedia ajuda individual para fazer o cálculo na reta – mesmo que, frequentemente, tenha feito um cálculo pelo algoritmo tradicional da adição ou da subtração antes – e foi se apropriando cada vez mais da contagem em intervalos e dos conhecimentos sobre número nela implicados.

Cálculo pela decomposição de parcelas

A outra estratégia de cálculo que aparece ao longo deste trabalho é a de decompor ordem a ordem os números referentes às parcelas em uma adição e, em seguida, adicioná-las. Essa estratégia se relaciona à outra estrutura apresentada por Fuson (1992), a de multiunidades agrupadas.

O conceito de *multiunidades agrupadas* se baseia em coleções de objetos em multiunidades agrupadas:

> Uma unidade-dez ("ten-unit") se faz agrupando dez unidades simples, uma unidade-cem ("hundred-unit") se faz agrupando 100 unidades simples, uma unidade-mil ("thousand-unit") se faz agrupando 1.000 unidades simples, e assim por diante. Um número multidígito é então conceitualmente composto de certo número de cada uma dessas multiunidades agrupadas. (FUSON, 1992, p. 265, tradução nossa)

Fica claro que essa é uma estruturação bastante inicial, pois um conceito de número flexível exige que se lide também com as relações entre as diferentes multiunidades, observando que uma unidade-mil será composta de dez unidades-cem e, num nível um pouco mais profundo, que uma unidade-mil será composta de cem unidades-dez.

Em suas primeiras tentativas de cálculo por decomposição, muitos alunos se confundem ao atribuir valor aos dígitos de acordo com a posição que ocupam. Assim, são comuns tentativas como a de Carlos, que acaba propondo 100, 5 e 2 como decomposição para 152. Quando essa decomposição deixa de ser um problema, observam-se erros específicos na adição ou na subtração nela apoiadas.

Na adição, um erro recorrente é deixar de adicionar parte de uma das parcelas, ou adicionar mais de uma vez parte de uma delas. O primeiro (deixar de adicionar parte de uma parcela), parece mais um lapso, pois geralmente os alunos o identificam e corrigem com facilidade, se advertidos para conferir se "o número está todo lá". O segundo (adicionar mais de uma vez parte de uma das parcelas), que costuma envolver o rearranjo dos números, muitas vezes expressa uma incompreensão de que as parcelas decompostas mantêm o valor original do número, distribuído de outra forma. Um exemplo desse tipo de impasse documentado entre as *práticas matemáticas* está no seguinte episódio com Pedro: para 152 + 260, ele fez 52 + 60=112, depois 260+112=372. Na conversa com a pesquisadora, esse erro não foi inicialmente:

Pesquisadora: De onde vêm esses dois números (60 e 52)?

Pedro (pensando por alguns segundo, com o olhar no enunciado): O 60 tá aqui (apontando 260 no enunciado) e o 152 tá aqui (apontando 152).

Pesquisadora: Então vamos ver. Quando você juntou 60 com 52, o 60 ficou dentro do 112, não é? Mas quando você pega o 260, você coloca o 260 todo outra vez, não é?

Pedro: ...

Pesquisadora: Vamos pensar uma coisa? Desse 152 aqui, quanto que você já pôs?

Pedro: Cinquenta e dois.

Pesquisadora: Isso. Então quanto falta você adicionar?

Pedro (depois de alguns segundos): Cento e doze?

No trabalho de muitas crianças se repete essa tendência de não conseguir seguir a "pista" do número, quando ele é decomposto e recomposto.

Na subtração, as dificuldades aparecem quando os alunos querem aplicar o procedimento que usaram ao adicionar em cálculos do tipo feito por Manuela: para 640 – 360, ela começa fazendo 600 – 300 = 300, depois 60 - 40=20. Chama a pesquisadora, intrigada:

Manuela: Ai, eu não sei, porque se tem 640, mas tira 360, ela tiraria quaren... sessenta do quarenta.

Parou, releu o problema, olhou por alguns instantes: "posso fazer a conta [pelo algoritmo tradicional]?"

Fez a conta e se surpreendeu com o resultado obtido (280): "eu tinha pensado que eram 320, porque eu fiz 600 menos 300, deu 300, e 60 menos 40, deu 20".

O conhecimento conceitual que acaba se descolando do procedimento, nesse caso, tem a ver com o sentido da subtração, pois os alunos parecem repetir exatamente o procedimento que realizavam ao adicionar. Certa vez, uma criança em outra escola explicou algo mais ou menos assim: "quando a gente soma, tudo vai pro resultado mesmo, então eu posso colocar de qualquer jeito. Quando a gente vai tirar, não da para misturar o que estamos tirando com o que tem".

Cálculo exato e cálculo estimado

As menções ao cálculo estimado como justificativa para a solução de uma questão aparecem mais adiante no processo do grupo. Aparentemente, ainda são compreendidas por um número pequeno de alunos, que manifestam essa compreensão acompanhando as justificativas dos colegas. Alguns deles fazem considerações. No entanto, mesmo a pesquisadora acaba deixando esse objetivo de lado em muitas situações, por perceber o quanto os alunos precisam do cálculo exato para estruturar basicamente sua compreensão do número.

Uma proposta que se mostrou extremamente rica em relação à estimativa foi a de propor estimativas e, em seguida, uma crítica a essas estimativas. Partir da constatação de que uma estimativa é inadequada, procurando as razões dessa inadequação para explicá-la mostrou-se um caminho de aprendizagem para muitos alunos. Ao longo das sessões, observou-se um movimento de compartilhamento de estratégias para estimar, considerando os valores dos algarismos mais à esquerda do número primeiro e avaliando a possibilidade de a adição entre valores na mesma ordem compor ou não uma ordem acima.

6.3. Sentido de número e o trabalho em sala de aula

Como já mencionado na sessão dedicada aos *fundamentos*, o objetivo desta pesquisa, ao levar para a sala de aula a preocupação com o sentido de número dos alunos, não foi criar um conjunto de atividades específicas para desenvolver habilidades relacionadas ao sentido de número. Essa abordagem não poderia ser diferente, se concordamos com autores como Resnick (1989), que afirmam que sentido de número "**não** é uma coleção de coisas que alguém sabe sobre números ou de habilidades que alguém pode exercitar sobre número" (RESNICK, 1989, p. 36, tradução nossa, grifo da autora), e sim "um conjunto de coisas não totalmente previsíveis que alguém tende a fazer com números, sob determinadas circunstâncias, baseado em um corpo de conceitos inter-relacionados de números e no conhecimento de números específicos" (RESNICK, 1989, p. 36, tradução nossa).

Tendo essa ideia como pano de fundo, pudemos ver, na abordagem escolhida (COBB et al, 2001, COBB; YACKEL, 1997), uma forma de tratar as ações, argumentações e reflexões sobre números dos alunos como um conteúdo com o qual o professor lida permanentemente em sala de aula. É pensar, como bem diz Greeno (1989), "o cálculo mental flexível, o cálculo estimado e o julgamento quantitativo e inferências como sintomas de uma condição mais básica e geral do conhecimento no domínio conceitual dos números e quantidades" (GREENO, 1989, p. 44, tradução nossa). Pensando assim, o desenvolvimento do sentido de número não pode ser mais um entre os conteúdos previstos, a ser contemplado com atividades específicas. Pelo contrário, o modo de abordar todas as propostas de Matemática ao longo da escolaridade deveria contribuir para o desenvolvimento do sentido de número dos alunos.

No entanto, as práticas de muitos dos sujeitos desta pesquisa também argumentam no sentido oposto: quando se esperou que eles atribuíssem sentido a um número ou resolvessem um cálculo de modo flexível, lhes fez muita falta saber nomear números de vários dígitos, ter se apropriado de contagens em intervalos variados, ter tido a oportunidade de pensar em decomposições de números, saber décor as combinações de números de um algarismo que, adicionados, resultam em dez (e, por decorrência, as combinações de números de dois algarismos que dariam 100, e assim por diante).

De certa maneira, foi sobre alguns desse conhecimento que a pesquisa se debruçou, numa mudança de função: habilidades que se pretendia que os alunos usassem para desenvolver outras (estratégias flexíveis de cálculo, alguns números como âncora para o cálculo etc.) passaram a ser, elas mesmas, o foco de ensino e de reflexão sobre a prática. Isso aconteceu, por exemplo, com a leitura de números de vários dígitos, com a contagem em intervalos e com a decomposição de números. Nesse sentido, a pesquisa também apontou possíveis direções para a abordagem desses conteúdos em sala de aula: manter a perspectiva de negociação de significados, pela apresentação de justificativas, validação ou contestação de soluções e formulação de perguntas o mais específico possíveis, o que nos traz de volta à argumentação inicial.

Mas onde fica o saber décor as combinações de números de um algarismo que, adicionados, resultam em dez, e seus similares com dois e três algarismos? São conhecimentos que requerem certa prática ou repetição e não estiveram em foco na presente pesquisa, mas que também são importantes no contexto de um trabalho preocupado com sentido de número (ampliando-se o foco para outras operações e outros conjuntos de número, a lista aumenta um pouco). Ao discutir sua metáfora do desenvolvimento do sentido de número como uma aprendizagem relacionada ao conhecimento e uso de recursos em um ambiente, já apresentada nos *fundamentos* desta pesquisa, Greeno (1989), adverte: "*habilidades como reconhecimento imediato e geração de padrões ainda são necessárias para viver nesse ambiente e o desenvolvimento dessas habilidades ainda há de requerer certa prática*" (GREENO, 1989, p 55, tradução nossa). Os impasses gerados pelo longo processo de alguns alunos ao resolver situações simples, que demandassem alguns padrões observados e alguns resultados de cálculo memorizados nos parecem ilustrar bem essa afirmação.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desenvolver esta pesquisa representou, para mim, a oportunidade de voltar à sala de aula, em um trabalho que, afinal, representa uma reflexão sobre a minha própria prática. E essa oportunidade se concretizou à luz de um modelo de interpretação que se mostrou absolutamente coerente com os princípios e objetivos assumidos. De certa maneira, concluo esta pesquisa com um sabor de começo: a perspectiva teórica que conheci ao desenvolvê-lo abre infinitas possibilidades de estudo, sempre relacionando ações individuais e coletivas, descobrindo maneiras pelas quais os alunos expressam um conhecimento específico, fazendo parte da formação de uma comunidade de sala de aula.

As ações e interações que pude observar e das quais pude fazer parte mostraram-se bastante diferentes daquelas apresentadas pelos autores em quem me inspirei (COBB et al, 1997; COBB et al, 2001). Muitas das discussões traziam momentos de silêncio, que me gritavam, "não é por aí!". Muitas vezes esses silêncios eram quebrados por poucas crianças, sempre as mesmas, reforçando involuntariamente uma "norma sociomatemática" indesejada, a de que poucos alunos se apropriarão da matemática escolar. No entanto, muitas outras vezes um aluno pediu a palavra, sem saber ainda o que poderia dizer, e sua voz foi se tornando mais firme à medida que falava, com muitas pausas, elaborando uma ideia sobre aquele desafio. Ao longo de algumas sessões, os percursos eram diversos, mas todos estavam em movimento: Augusto aprendia a ler os números de mais de dois algarismos; Manuela organizava um cálculo bem argumentado, experimentando decomposições numéricas; Carlos ganhava ainda mais agilidade no cálculo e compreendia as relações implícitas nos algoritmos convencionais que sabia, ao mesmo tempo que se descolava deles; Cristiane, que sempre acabava por usar o algoritmo convencional escrito, tinha a oportunidade de constatar as conseqüências de não ter alinhar os números ordem a ordem na incoerência da solução que propunha; Joaquim usava sua lógica intuitiva para não desperdiçar nenhuma dica no jogo *Qual é o número*.

A intenção inicial da pesquisa, de documentar expressões do sentido de número dos alunos e oportunidades para que ele se desenvolvesse através do compartilhamento de estratégias de cálculo, modificou-se bastante ao longo do caminho. O foco se deslocou, na maior parte do tempo, para estruturações iniciais do número e do cálculo, nem por isso menos ricas em observações e questionamentos.

Mais do que relatar aprendizagens – o que é certo que houve – o intuito com essa pesquisa foi trazer a sala de aula e as vozes dos alunos para uma conversa em que, o tempo todo, as ações individuais construíam um jeito de funcionar coletivo, e esse jeito de funcionar coletivo transformava modos de individuais.

Essa pequena amostra de sala de aula indica possíveis caminhos de pesquisa vem acompanhada de duas sensações. A primeira, de que a complexidade da sala de aula escapa repetidamente ao esforço de análise da pesquisadora. Mas essa dificuldade, em vez de produzir desânimo, mostra-se mais e mais instigante à medida que se mergulha nesse universo. A segunda, que, me dizem, acompanha a maioria dos pesquisadores e, em última análise, qualquer tentativa de conhecer, é uma sensação de incompletude do trabalho. As duas sensações, combinadas, argumentam por mais pesquisas considerando o uso de estratégias da cálculo e os conhecimentos sobre número em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, S. Mathematics teaching and learning via problem solving, exploration, coding and decoding. In UBUZ, B. (Ed.). **Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Vol. 1, p. 249. Ankara, Turkey: PME, 2001.

ALVEZ-MAZZOTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais:** pesquisa qualitativa e quantitativa. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

BACKHEUSER, E. **A aritmética na "Escola Nova" (A nova didática da Aritmética).** Rio de Janeiro: Livraria Católica, 1933.

BARBOSA, H. H. J. **Sentido de número na infância:** uma interconexão dinâmica entre conceitos e procedimentos. Paidéia, 2007, 17(37), 181-194. Acesso em 09/02/2011 em www.scielo.br/paideia

BAROODY, A. The development of adaptative expertise and flexibility: the integration of conceptual and procedural knowledge. In BAROODY, A; DOWKER, A. (Eds). **The development of arithmetic concepts and skills** (1-34). Mahwah, NJ: Erlbaum, 2003.

BATISTA, R. M. F. **Uma análise do sentido de número a partir do conhecimento sobre medidas**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, 2009.

BAUERSFELD, H. Perspectives on classroom interaction. In: BIEHLER, R.;SCHOLZ, R. W.; STRÄBER, R.; WINKELMANN, B. **Didactics of Mathematics as a scientific discipline.** Dordrech: Kluwer Academic Publishers, 1994.

BOALER, J. Introduction: intricacies of knowledge, practice and theory. In: BOALER, J. **Multiple perspectives on mathematics teaching and learning**. Westport: Greenwood Press, 2000.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais :** introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf, acesso em 25 jan. 2011.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997a. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf, acesso em 25 jan. 2011.

BROCARDO, L. Desenvolvimento curricular: contributos de um projeto centrado no sentido de número. In: PONTE, J. P. et al. **Actividades de investigação na aprendizagem da**

Matemática e na formação dos professores. Coimbra: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2002.

BROCARDO, J.; SERRAZINA, L. O sentido do número no currículo de Matemática. In: BROCARDO, J.; SERRAZINA, L.; ROCHA, ISABEL. **O sentido de número:** reflexões que entrecruzam teoria e prática. Lisboa: Escolar Editora, 2008.

BUTTERWORTH, B. A featural analysis of preschoolers' counting knowledge. **Developmental Psycology**, 20, 607-618, 1999.

CASE, R. Fostering the development of children number sense. In: SOWDER, J.T.; SCHAPPELLE, B. P. **Establishing foundations on number sense and related topics: reports of a conference** (San Diego, California, February 16-17, 1989).Washington: National Science Foundation, 1989.

CASTRO, J. P.; RODRIGUES, M. O sentido de número no início da aprendizagem. In: BROCARDO, J.; SERRAZINA, L.; ROCHA, I. (org.). **O sentido de número:** reflexões que entrecruzam teoria e prática. Lisboa: Escolar Editora, 2008.

CARRAHER, T. P.; CARRAHER, D. W.; SCHILIEMAN, A. Mathematics in the streets and in school. **British Journal of Developmental Psychology,** 3, 21-29, 1985.

CEBOLA, G. Do número ao sentido de número. In : PONTE, J. P. et al. **Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores.** Coimbra: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2002.

COBB, P. Implications of Ernst von Glasersfeld's constructivism for supporting the improvement of teaching on a large scale. **Constructivist foundations**, vol 6, n. 2, 2011. Disponível em http://univie.ac.at/constructivism/journal/6/2/157.cobb, acesso em 10 jan. 2012.

COBB, P. The importance of a situated view of learning to the design of research and instruction. In: BOALER, J. **Multiple perspectives on mathematics teaching and learning**. Westport: Greenwood Press, 2000.

COBB, P.; GRAVEMEIJER, K; YACKEL, E; MCCLAIN, K.; WHITENACK, J. Mathematizing and symbolizing: the emergence of chain of signification in on first-grade classroom. In: KIRSHNER, D.; WHITSON, J. (Ed.). **Social, semiotic and psychological perspectives**. Mahwah, New Jersey: Laurence Erlbaum Associates, Inc,. Publishers, 1997.

COBB, P.; STEPHAN, M.; MCCLAIN, K.; GRAVEMEIJER, K. Participating in classroom mathematical practices. **The Journal of the Learning Sciences**, 10, 113-163, 2001.

COBB,P.; YACKEL, E. Constructivist, emergent and sociocultural perspectives in the context of development research. **Educational psychologist**, 31 (3/4), 1996a.

COBB, P.; YACKEL, E. Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education.** Vol. 27, N^{o}. 4, pp. 458-477, 1996b.

DEHAENE, S. **The number sense:** how the mind creates mathematics. New York: Oxford University Press, 1997.

DOLK, M. Problemas realistas: um ponto de partida para uma sequência de oportunidades de aprendizagem. In: BROCARDO, J.; SERRAZINA, L.; ROCHA, ISABEL. **O sentido de número:** reflexões que entrecruzam teoria e prática. Lisboa: Escolar Editora, 2008.

DOMITE, M. C. S. Formulação de problemas e educação matemática: a quem compete? **Revista Movimento**.V. 14, p. 24-37. Niterói, 2009.

EDCKHARDT, C. A. **Fios e desafios para encontrar as trilhas apagadas pela imposição de uma lógica única nos algoritmos convencionais:** em busca de um conhecimento-emancipação. Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2005.

FERREIRA, E. A adição e a subtracção no contexto do sentido de número. In: BROCARDO, J., SERRAZINA, L., ROCHA, ISABEL. **O sentido de número:** reflexões que entrecruzam teoria e prática. Lisboa: Escolar Editora, 2008.

FONTES, C. G. **O valor e o papel do cálculo mental nas séries iniciais.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: FEUSP, 2010.

FUSON, K. Research on whole number addition and subtraction. In: GROUWS, D. A. (Ed.) **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** Reston: NCTM, 1992.

GARNICA, A. V. M. História Oral e educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GONÇALVES, H. A. **Educação matemática e cálculo mental: uma análise de invariantes operatórios a partir da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud**. Tese de Doutorado. Universidade Federal Fluminense, 2008.

GRAVEMEIJER, K. **Developing Realistic Mathematics Education**. Utrecht: Freudenthal Institut, 1994.

GREENO, J. G. Number sense as a situated knowing in a conceptual domain. **Journal for Research in Mathematics Education**. 22, 3, 1991, 170-218.

GREENO, J. G. Some conjectures about number sense. In: SOWDER, J.T.; SCHAPPELLE, B. P. **Establishing foundations on numer sense and related topics:** reports of a conference (San Diego, California, February 16-17, 1989).Washington: National Science Foundation, 1989.

GUIMARÃES, S. D. **A prática regular de cálculo mental para ampliação e construção de novas estratégias de cálculo por alunos do 4º e 5º anos do Ensino Fundamental**. Tese de Doutorado. Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2009

HEIRDSFIELD, A. Integration, compensation and memory in mental addition and subtraction. In: VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (Ed.) **Proceedings of 25th Conference of the International Group for the Psicology of Mathematics Education 3**, p.129-136. Ultrech: PME, 2001.

KAMII, C.; DOMINICK, A. The harmful effects of algorithms in grades 1 – 4. In: MORROW, L. J.; KENNEY, M. J. (org). **The teaching and learning of algorithms in school mathematics.** Reston, VA: National Council of teacher of mathematics, 1998.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G.). **Naturalistic inquiry**. Beverly Hills, CA: Sage Publications, 1985

MAGALHÃES, L. A. M. **O jogo Cara a Cara em crianças de 7 a 12 anos: uma análise construtivista.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: FEUSP, 1999.

MACEDO, L. Os jogos e sua importância na escola. In: MACEDO, L.; PETTY, A. L.; PASSOS, N. C. **Quatro cores, senha e dominó:** oficinas de jogos em uma perspectiva construtivista e psicopedagógica. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1997.

MACEDO, L.; PETTY, A. L.; PASSOS, N. C. **Aprender com jogos e situações-problema.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

MCINTOSH, M.; REYS, B.; REYS, R. A proposed framework for examining basic number sense. **For the learning of Mathematics** 12, 3, Novembro de 1992, 2-8; 44.

MENDONÇA-DOMITE, M. C. A intensidade dos algoritmos nas séries iniciais: uma imposição sócio-histórico-estrutural ou uma opção valiosa? In: **ZETETIKÉ**, V.4, n.5. Campinas: Faculdade de Educação/CEMPEM/Unicamp, p. 55-76, jan.-jun./1996.

MOREIRA, D. **As "contas" na vida de um bairro.** COMPLETAR

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. (1964). **A gênese do número na criança**. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston, VA: NCTM, 1989.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **The principles and standards for school mathematics.** Reston, VA: NTCM, 2000. Acesso em 05 mar. 2011 em http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=3454

NUNES, T. Etnomathematics and everyday cognition. In GROWS (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**, pp. 557-574. New York: Macmillan, 1992

RESNICK, L. B. Defining, assessing and teaching number sense. In: SOWDER, J.T.; SCHAPPELLE, B. P. **Establishing foundations on numer sense and related topics:** reports of a conference (San Diego, California, February 16-17, 1989).Washington: National Science Foundation, 1989.

REYS, R. E.; YANG, D. Relationship between computational performance and number sense amog sixth- and eighth-grade students in Taiwan. **Journal for Research in Mathematics Education** 29, 2, 1998, 225-237.

REYS, R.; RYBOLT, J. F.; BETSGEN, B. J.; WYATT, J. W. Processes used by good computational estimators. **Journal for Research in Mathematics Education**. 13, 183-201. 1982

RIBEIRO, L. M. C. **O sentido numérico em crianças:** um estudo comparativo entre crianças de escola pública e particular. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco, 2006.

SANTOS, M.P. (2004). **Encontros e Esperas com os Ardinas de Cabo Verde:** Aprendizagem e Participação numa Prática Social. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa. Acesso em 19 set. 2009 em http://madalenapintosantos.googlepages.com/doutoramento

SCHIFTER, D.; FOSNOT, C. **Reconstructing mathematics education.** Stories of teachers meeting the challenge of reform. New York: Teachers College Press, 1993.

SILVA, G. A. **Refletindo sobre a atividade matemática:** o cálculo mental de adição e de subtração nas séries iniciais do ensino fundamental. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco, 2000.

SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L. O diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática. In: MEIRA, L. L.; SPINILLO, A.G. (Org). **Psicologia cognitiva:** cultura, desenvolvimento e aprendizagem. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2006.

SOWDER, J. Estimation and number sense. In: GROUWS, D. A. (Ed.) **Handbook of research on mathematics teaching and learning.** Reston: NCTM, 1992.

SPINILLO, A. G. O sentido de número e sua importância na educação matemática. In: BRITO, M. R. F. (Org). **A solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas: Editora Alínea, 2006.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. (Ed.) **Research design in mathematics and science education**. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000. p.267-307.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. (Org). **Didática das Matemáticas.** Lisboa: Horizontes Pedadagógicos e Instituto Piaget, 1996. (Tradução portuguesa de VERGNAUD, G. (1990) **La théorie des champs conceptuels**. Recherches en didactique des mathématiques. V. 10, n. 13, p. 133-170).

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. In: GROSSI, E. P. (Org.) **Por que ainda há quem não aprende?** A teoria**.** Petrópolis: Vozes, 2003.

VERGNAUD, G. **El nino, lãs matemáticas y la realidad:** problemas de la enseñanza de las matemáticas em la escuela primaria. México: Trillas, 1991.

VERSCHAFFEL, L.; GREER, B.; DE CORTE, E. Whole number concepts and operations. In: LESTER, F. (Ed.) **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Greenwich: Information Age Publishing, 2007.

VOIGT, J. Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. **Educational Studies in Mathematics** 26: 275-298. Netherlands, 1994.

VON GLASERSFELD, E. An exposition of constructivism: why some like it radical. In: DAVIS, R. B.; MAHER, C. A.; NODDINGS, N. (Ed.) Constructivist views on the teaching and learning of mathematics. **Journal of research in Mathematics Education Monograph** 4: 19 – 30, 1990. Disponível em http://oikos.org/constructivism.htm, acesso em 10 nov. 2010.

ZANZALI, N. A. A.; GHAZALI, M. **Assessment of school children's number sense.** Disponível em http://math.unipa.it/~grim/ENoor8, acesso em 15 abr. 2011.

APÊNDICE A – Anotações de campo

2º semestre de 2010

Entrei em contato com uma coordenadora de uma Escola Municipal de São Paulo, que eu já conhecia, perguntando se ela achava que alguma professora de segundo ou terceiro ano se interessaria em desenvolver um trabalho relacionado a estratégias de cálculo na adição e na subtração e a conhecimentos sobre números. Fui até a escola e expliquei que seria um trabalho em sala de aula, e por isso só seria viável se a professora de fato se interessasse. Ela logo pensou em uma das professoras, sempre bastante interessada, e perguntou a ela se gostaria de participar da pesquisa. A professora concordou, e começamos a conversar sobre o trabalho. No entanto, era sempre difícil conseguir um horário para lhe explicar com calma os objetivos e as etapas gerais do trabalho. Tentamos marcar um dia para que eu conhecesse o grupo, mas houve festas na escola e outros imprevistos, e isso não foi possível. Embora a professora afirmasse que estava interessada em participar da pesquisa, eu percebia que ela não estava à vontade com minha presença, e ia postergando as conversas e adiando o momento de permitir minha entrada em sua sala de aula. Já era fim de outubro, e ficou inviável a realização do tipo de coleta de dados que a pesquisa exigia, pois era necessário acompanhar o trabalho dos alunos durante um tempo relativamente longo em classe.

Em novembro, lembrei-me de uma colega de trabalho que, além de trabalhar na escola particular, fazendo parte do grupo que coordeno, também é professora de uma EMEI, que certa vez havia me convidado: "vem fazer um trabalho lá na nossa EMEI". É uma professora muito especial, que reflete constantemente sobre seu trabalho e procura manter a coerência entre os objetivos que pretende alcançar (e que revê sempre que necessário), as atividades que propõe, as intervenções que faz, e os critérios com que avalia. Por conhecê-la nesse outro contexto, sabia que seria bastante tranquilo, para ela, receber-me em sua sala de aula na EMEI. No entanto, a pesquisa que vinha esboçando se direcionava para os anos inciais do Ensino Fundamental, quando as crianças já estavam se tornando capazes de calcular, abrindo mão da contagem para resolver operações. Por isso eu havia respondido: "Paula, vou fazer um trabalho lá na 'sua' EMEI quando acabar a pesquisa do doutorado". No entanto, ao perceber que não conseguiria fazer a pesquisa com a outra professora, resolvi perguntar à Paula se poderia ir à EMEI. Isso demandaria uma grande mudança no trabalho, que manteria algumas referências metodológicas e teóricas, mas passaria a investigar a observação, pelas crianças, de regularidades na sequência numérica escrita.

Fizemos três encontros para planejar as observações em classe, que foram feitas em cinco sessões de aproximadamente 1 hora, filmadas por mim. No entanto, tivemos alguns problemas técnicos e o material produzido não se configurou como um bom material para análise. No entanto, essa vivência permitiu-me aprender algumas coisas sobre esse tipo de coleta de dados:

1) Mais do que uma boa relação com a professora de classe, é preciso haver confiança, empatia e objetivos comuns (mesmo que seja impossível compartilhar todos os objetivos, a professora também deve ter seus próprios objetivos ao desenvolver o trabalho);

2) Mesmo em uma pesquisa que precisa ter uma estrutura aberta, é necessário garantir alguns marcos e estruturar melhor algumas situações.

3) Para o tipo de pesquisa que pretendo desenvolver, as reuniões entre professora e pesquisadora precisam ser bastante frequentes, pois o significado que cada uma atribui ao que está acontecendo na sala de aula – fala dos alunos, intervenções, etc. – muitas vezes é bastante discrepante.

Acabei o ano ainda mais próxima da professora Paula, mas precisava pensar melhor na coleta de dados que faria. Em janeiro, ainda durante as férias escolares, perguntei se ela teria uma colega para me indicar, que trabalhasse nos anos iniciais do EF e tivesse todo aquele entusiasmo com a possibilidade de fazer pesquisa em sala de aula. Ela não conhecia nenhuma professora, mas conhecia uma diretora que tinha esse entusiasmo, e que certamente me indicaria alguém. Conversei com a diretora, Joelma, que me disse: tenho essa pessoa, vou falar com ela, me ligue na quinta-feira.

03/02/2011 – Primeira reunião com a professora Márcia

O primeiro contato entre a pesquisadora e a professora da classe a ser acompanhada aconteceu na própria escola, em uma conversa informal, na semana que antecedia a primeira semana de aula. A diretora havia conversado com a professora, perguntando se ela se interessaria em desenvolver um trabalho junto com uma pesquisadora da Universidade. Ela se mostrou muito interessada e marcamos a primeira conversa.

Márcia, antes, quis saber o que eu fazia e o que pretendia com a pesquisa. Esse primeiro pedido já me deixou bastante animada, pois percebi em seu jeito de perguntar e conversar que ela se colocava dentro da situação, como a professora da sala e, portanto, uma das principais atuantes no trabalho. Mostrou-se bastante entusiasmada e comentou que o trabalho interessava a ela porque olhava além da resposta dos alunos. Enquanto comentava as características que esperava que seu novo grupo tivesse, informou-me que receberia uma classe de 5º ano (em minha conversa com a diretora, eu havia entendido que seria um grupo de 4º ano), e demonstrei alguma preocupação. Comentei que a pesquisa dependia do uso, pelos alunos, de procedimentos não convencionais de cálculo, e boa parte do grupo provavelmente já teria se apropriado do algoritmo convencional. Disse a ela que suspeitava que, para as crianças com compreensão mais limitada das operações e dos números, poderia ser difícil abrir mão de um procedimento que lhes daria segurança e a resposta final. A resposta de Márcia me deixou tranquila em relação à parceria que firmaríamos: "é, mas tudo depende do que a gente 'cobra' deles. Tenho colegas que corrigem as atividades com um papel ao lado, em que estão escritas as respostas, colocando certo e errado sem olhar o percurso do aluno. Os alunos de algumas delas, eu acho que não se interessam por pensar outros jeitos de resolver. Eu sempre olho como eles resolveram as questões, e meus alunos do ano passado estavam o tempo todo procurando um jeito diferente do dos colegas para me mostrar". Mesmo que eu ainda queira discutir o valor desse "diferente" – pois nem todo diferente é melhor, depende das oportunidades de aprendizagem que cada procedimento proporciona ao aluno que a emprega – percebi que a regra implícita na classe de Márcia provavelmente se alinharia com o que pretendia para a pesquisa: falar sobre o que pensou, como fez, o que deu certo, o que não deu certo.

Outro ponto fundamental, nessa primeira conversa informal, foi o entusiasmo que Márcia mostrou pelo trabalho, se posicionando realmente como parceira, como "dona" também do que faríamos.

Combinamos que, após a primeira semana de aula e a definição dos horários, Márcia me ligaria para marcarmos uma nova reunião, em que conversaríamos um pouco mais sobre as ideias subjacentes à proposta de trabalho que eu gostaria de desenvolver, eu apresentaria as primeiras atividades e discutiríamos sobre o que estaria em pauta nelas.

Em breve conversa com a diretora da escola, ficou combinado que eu deveria comparecer à reunião de pais para explicar brevemente os objetivos do trabalho, me colocar à disposição para perguntas e entregar o termo de consentimento para a participação dos alunos na pesquisa (Apêndice B).

17/02/2011 – Segunda reunião com a professora Márcia

Assunto principal: atividade para avaliação do sentido de número do grupo.

Levei o material que preparara para uma primeira aproximação: lemos juntas questão a questão, conversando sobre os conhecimentos os quais eram esperados que os alunos pusessem em jogo ao resolver cada uma delas, de acordo com o modelo para sentido de número proposto por McIntosh (1992).

O primeiro ponto sobre o qual conversamos foi o do modo como eu pretendia propor a atividade, restringindo o tempo para cada questão a fim de que os alunos precisassem usar seu sentido de número para escolher a resposta, e não fosse possível fazer o cálculo exato pelo algoritmo convencional escrito. Quando comecei a dizer que pretendia propor as questões no retroprojetor, e dar às crianças apenas a folha de resposta, antes mesmo que eu falasse da restrição ao tempo, Márcia completou: "*vai ter tempo, né?(...)porque eles tendem, se ficar à vontade, a fazer a conta*".

O segundo ponto foi sobre quem proporia as primeiras atividades. Foi uma falha que eu, como pesquisadora, não tivesse tocado nesse ponto durante meu primeiro encontro com ela, mas a idéia inicial da pesquisa era que a professora de classe conduzisse as primeiras atividades. Márcia, no entanto, pediu que nas primeiras sessões eu fizesse isso, até que ela se sentisse um pouco mais à vontade com as propostas. "*Eu acho legal você propor. Porque eu acho que o seu objetivo vai ser mais atingido. Porque, é... como posso te explicar. Eu não to preparada, por exemplo, principalmente agora no começo, para absorver todas as suas ideias e objetivos para chegar logo de cara e propor; talvez uma palavra minha possa mudar o significado, eu não sei, eu tenho um pouco de receio. Eu queria que você começasse, aí quando eu estiver mais entrosada, eu posso até... fazer*". Achei que isso não seria um grande problema, uma vez que o foco de análise da pesquisa não é o trabalho da professora, e sim o dos alunos.

O terceiro ponto foi discutir se as atividades de sondagem seriam um desafio para a classe. Comentei que a ideia não era que todos dessem conta de todas as questões, mas sim que tivéssemos uma ideia do conhecimento das crianças sobre número, cálculo mental aproximado e significado das operações de adição e subtração. Comentei que a ideia do trabalho era, durante as aulas que se seguiriam, propor que os alunos explicitassem seus modos de resolver, compartilhando procedimentos e, ao fazer isso, expressando também conhecimentos sobre números e operações. Ao final das aulas, proporíamos uma atividade de avaliação semelhante, com a qual avaliaríamos o que mudou, mesmo que o objetivo principal fosse analisar o processo.

Por fim, conversamos sobre todas as questões, comentando os conhecimentos necessários para resolver cada uma delas. Enquanto passávamos por todas as questões, voltamos ao tópico do tempo: combinamos que esse tempo não seria preestabelecido, e sim que nós observaríamos, durante a aplicação, o desenrolar do trabalho da turma, e mudaríamos de questão quando percebêssemos que os alunos que estavam usando o cálculo mental e as aproximações já haviam resolvido as questões.

Durante a discussão, Márcia observou que as crianças tendem a focar determinadas “palavras-chave” ao resolver um problema. *“Então, sabe o que acontece com os alunos, Lucia? Igual a nesse problema aqui. Eles se focam muito em algumas palavras. Então, tipo, comeram. Ah, se comeram vai ser uma conta de menos. E aí eles fazem a conta de menos, e não entendem o resto. Que com o que o problema quer saber, eles têm que fazer uma adição”.* Comentou, também, que os alunos, de posse de um procedimento, tendiam a repeti-lo em um problema que tivesse características semelhantes, mesmo que não se aplicasse à situação: *“Então, eu passei três probleminhas para os meus alunos, com adição e subtração combinadas. E você vê. Tinha um que era assim: num aquário tinha tantos peixinhos, a menina comprou mais alguns, e nasceram mais alguns. [Eles deveriam descobrir] quantos peixinhos ficaram. Então, como que alguns resolveram: pegaram o total, colocaram o que a menina comprou, deu um resultado, depois colocaram os que nasceram, deu o resultado. Eu perguntei: ‘alguém resolveu de outra forma?’. Só um disse ‘eu, professora. Eu juntei os que nasceram com os que a menina comprou, primeiro...’, entendeu? Então aí eu vi que a sala não é aquela sala, assim, ‘nossa, dá pra fazer desse jeito’. Aí eu comentei, mostrei os dois jeitos, coloquei na lousa. Aí tinha um outro problema que era assim: num estacionamento tinha um tanto de carros, aí saíram alguns e outros entraram. Mas são coisas diferentes! Como eu havia explicado aquilo, automaticamente juntaram os que saíram com os que entraram, entendeu, olha só, e tiraram do total.”* Comentou, então, que essa classe, diferentemente da que ela tinha no ano anterior, não era tão “boa” na compreensão dos problemas.

Pedi a ela que me ajudasse a identificar três crianças para entrevistar, uma com bastante facilidade frente aos desafios matemáticos, outra parecida com a maioria da classe, e outra com dificuldades em relação à maioria.

Combinamos também que faríamos um “aquecimento”, usando o retroprojetor e a folha de respostas, para que os alunos pudessem experimentar o modo de funcionamento da atividade. Márcia comentou que achava esse aquecimento importante, porque considera que seus alunos deste ano são “inseguros”, e talvez essa primeira atividade os deixassem mais à vontade.

18/02/2011 – Terceira reunião com a professora Márcia

Márcia disse que queria me perguntar uma coisa e, para isso, comentou rapidamente o momento da escola em relação às avaliações externas.

"Aqui na escola, quando vieram os resultados da Prova São Paulo e da Prova Brasil, que geralmente quem faz é o 2º ano... na verdade 2ª série e 4ª série, que hoje seriam 3º ano e 5º ano, né? E veio que a nossa escola foi bem. Mas a nossa média em Matemática ficou abaixo do esperado. Assim: se você for comparar com todas as escolas, a nossa escola foi bem. Mas por quê, porque todas as escolas ficaram abaixo do esperado. Então nós mudamos a meta da escola para Matemática. E com isso algumas professoras saíram para fazer o curso, mas o curso só pode ser fora do horário de trabalho, o que impossibilita muita gente que acumula a fazer o curso (...) a maioria não teve condições de fazer, por ser fora do horário de trabalho. E a gente começou, então, a investir mais em Matemática. Então, até foi um dos motivos que a Joelma veio conversar comigo, que de repente você poderia ser uma ajuda além, já que a gente tá tentando melhorar os índices nossos na avaliação de Matemática. E o que a gente vê, é que nas provas São Paulo, Prova Brasil, vem muito isso mesmo, de aproximação, raciocínio, análise de números, e que talvez essa seja nossa maior deficiência aqui na escola. Que a gente vem trazendo aquela herança de mecanização, de sistematizar, e de repente a gente deixa essa outra parte de lado. Então, assim, o que eu queria saber de você: a gente tem o conteúdo, tem o planejamento, nosso conteúdo; nosso planejamento só vai ser fechado em março, dias 18 e 19, que vão ser os dias da jornada pedagógica aqui, mas como a gente tem o livro didático, a gente já sabe mais ou menos que o planejamento é fechado em cima do livro didático. Porque os Cadernos de apoio *[e aprendizagem, da Prefeitura de São Paulo] só chegam depois, depois que as aulas começam, depois que a gente já fez o planejamento. Então a gente não faz planejamento em cima dos* Cadernos de apoio e aprendizagem. *E o que aconteceu ano passado foi isso: o nosso planejamento já estava pronto, o caderno de apoio foi uma novidade, porque não tinha até então, e a gente viu que era totalmente diferente, que se você fosse seguir o* Caderno de apoio e aprendizagem, *ele não batia com o nosso planejamento (...) e aí a dificuldade de trabalhar talvez seja essa, porque o livro didático dá um enfoque totalmente diferente do Caderno de apoio. Então, antes de começar, eu falei 'eu preciso sentar com a Lucia', porque como nós vamos fazer o nosso em março, eu preciso saber como nós vamos trabalhar, se você vai trazer a aula para mim, e aí eu posso incluir*

isso, porque eu quero que conste no planejamento, mesmo porque eu acho que ele vai muito ao encontro do Caderno de apoio que vai chegar".

Respondi que, se coubesse no planejamento, eu gostaria de levar as atividades, e tinha pensado em aproveitar algumas propostas do Caderno (já que a ideia é fazer um trabalho pensando no que as crianças precisam fazer na escola). Mas comentei que não eram aulas que se pode planejar muito antes. Comentei que, a partir da atividade inicial, eu pretendia elaborar as primeiras propostas e, depois, cada proposta viria a partir da anterior. Propus que traria as propostas de duas em duas, a cada semana, para discutirmos na reunião da quinta-feira, e trabalhar nas duas aulas disponíveis para isso. Márcia comentou que imaginava mesmo que as propostas seriam detalhadas à medida que o trabalho fosse avançando, e disse que, como o planejamento seria feito apenas nos dias 18 e 19 de março, até lá teríamos conhecido um pouco melhor as crianças, trazendo a expectativa de que até lá eu trouxesse um planejamento das atividades, ainda que flexível. Também mostrou preocupação por ter dito que não gostaria de conduzir o primeiro contato, imaginando que isso talvez comprometesse algo na pesquisa. Respondi que tinha mesmo imaginado que iríamos conversando a cada duas aulas e ela conduziria o grupo, pois eu traria cada proposta antes, nós discutiríamos, adaptaríamos alguma coisa que fosse necessário, porque achava que era nessa conversa sobre cada proposta específica que ficaria mais explícito o que está por detrás das atividades. Porque uma proposta geral é trabalhar com os jeitos de fazer, pensando como que os jeitos de fazer ajudam a criança a entender conceitos que estejam por detrás, conceitos sobre números e operações. A outra ideia geral é como um esquema de aula em que existe uma primeira parte para que as crianças trabalhem em duplas, ou individualmente, ou em pequenos grupos (a gente decide isso ao planejar cada aula), enquanto elas estão trabalhando, assim a gente vai circulando, tem uma conversa rápida entre nós duas para combinar a segunda parte, que é uma conversa com o grupo todo. Então a gente pode, pela observação da primeira parte, decidir: olha, na segunda parte nós vamos chamar fulano, sicrano e beltrano; ou a gente vai pegar essa ideia tal e propor uma pergunta. Uma coisa de 5 minutos que a gente vai afinando, daqui a pouco fica muito rápido. A gente tem essas coisas gerais, só que tem um monte de coisinhas específicas que, na hora em que a gente vai pensando cada atividade, vai se abrindo um mundo para a gente: quais são as referências que as crianças vão usar, quais são as estratégias que as crianças vão usar, o que significa não conseguir perceber que, se estou lidando com uma situação em que algo aumentou, mas quero saber como estava no começo, eu vou fazer a operação inversa. O que significa a criança não entender isso? Como que a criança expressa o que ela conseguiu ver, pra gente poder partir do que ela conseguiu ver, e seguir em frente. É tudo partindo do pequenininho, essa que é a ideia da pesquisa, mesmo para mim, porque eu vi várias coisas até agora que me dão um panorama, mas eu não sei o que eu vou ver nessas crianças. O que ficou meio esquisito para mim foi que, na hora que você for fazer seu planejamento, você vai se preocupar em ensinar fração, trabalhar com o campo multiplicativo, e eu acabei achando que, pelo menos para trabalhar com essa coisa do sentido de número, talvez fosse melhor começar com números inteiros, sem dúvida, e a adição e subtração. Mas também acho que, dependendo de como as coisas andarem, talvez a gente possa mexer um pouco com o campo multiplicativo, especialmente com a ideia de proporção, que é uma ideia muito organizadora para as crianças.

Comentei então algumas atividades do *Caderno de apoio e aprendizagem* que trazem essa abordagem, e como ela ajuda às crianças a darem sentido a muitas coisas. Márcia comentou, então, que, no caderno de apoio do 4º ano, que havia usado (em parte) no ano anterior, havia muitas atividades daquele tipo, e seus alunos (cinco deles estão agora na classe com que iremos trabalhar) se deram muito bem. Mostrou as atividades, e comentei que, com essa conversa estava começando a achar que deveríamos trabalhar com "tudo" (ê, ansiedade). Em seguida, recuei, vendo que seria muito amplo. Comentamos alguns pontos relacionando o trabalho com frações, a proporção etc.

Márcia comentou que esperava que, mesmo que fizéssemos o trabalho só com adição e subtração, já ajudaria muito. *Porque a nossa dificuldade, aqui na escola, era trabalhar justamente o cálculo mental. Para você ter uma ideia, quando os alunos chegam ao quarto ano, muitas salas têm que colocar a tabuada ali, porque eles não sabem nem a tabuada, e sem a tabuada eles não resolvem nada. E com a adição e subtração acaba acontecendo a mesma coisa. A dificuldade que eles têm para pensar, têm que colocar no lápis, têm que fazer o rascunho. De repente, a gente trabalhando na adição e subtração, vai abrindo a cabeça deles para quando a gente for trabalhar multiplicação, divisão, fica melhor, entendeu. Eu espero ter a vivência de você trabalhando isso, para que eu aprenda [...] eu acho que a gente aqui está carente disso mesmo. De repente, chegou um material muito bom, e que a gente teve que começar a pensar 'como é que eu vou explicar isso, como é que eu vou explicar aquilo outro'. Porque a gente tem que sair daquela proposta convencional, que é o que a gente tinha até então, e aí aquilo é cobrado, porque o que veio aqui foi cobrado na Prova São Paulo, na Prova Brasil. A gente sabia que eram coisas que iam cair na prova, e que o aluno* *de repente, o aluno quer o resultado exato, porque a gente trabalhou pouco esse conceito de aproximação, de intervalo, do que está entre um número e outro..."*

Comentei que a primeira coisa do cálculo mental é que era necessário explicitar o caminho. Que pouca gente explicitava o caminho, ou ajudava a criança a explicitar o caminho dela para a outra criança. Fica uma coisa assim, "o cálculo mental é da sua cabeça". Sim, ele é, e é muito pessoal, tem gente que gosta mais de fazer de um jeito, sei lá, de arredondar e compensar, tem gente que gosta mais de ir adicionando aos poucos. Isso é pessoal, só que existem algoritmos também, é um jeito diferente, mas existem jeitos. Então uma ideia é falar disso, fazer isso ficar compartilhado no grupo – essa é uma das ideias da pesquisa. E a outra é o papel, às vezes, ele é bom para isso, para anotar um resultado intermediário. Dei um exemplo de uma criança usando o papel para organizar as etapas de uma estratégia de cálculo mental: o uso da reta vazia, por exemplo, que vai deixando no papel o histórico do cálculo mental. Aí o papel está a serviço do cálculo mental. Como que eu fiz. Em seguida, dei um exemplo na multiplicação.

Acabamos combinando que, mesmo que, para a tese, eu restringisse o recorte, eu me comprometeria a acompanhar, como contrapartida para escola, um trabalho com o cálculo mental e o sentido de número no campo multiplicativo.

Márcia: *"eu sei que você tem que fazer a tese, eu não quero atrapalhar sua tese, mas eu quero um trabalho bom para os meus alunos"*.

Voltou então à questão da condução, e ficou combinado que haveria uma alternância nesse papel, e uma de nós ficaria com a filmadora enquanto a outra conduziria, variando de acordo com o combinado a cada semana.

Não fechamos nada sobre a entrada ou não do campo multiplicativo, e combinamos de começar com adição e subtração, e que decidiríamos primeiro pelo critério da pesquisa, depois, caso não fosse entrar no campo multiplicativo, eu acompanharia um trabalho nesse campo apenas para a escola.

APÊNDICE B – Termo de consentimento

Prezados pais

No decorrer do primeiro semestre deste ano, o 5º ano ___ participará de uma pesquisa desenvolvida pela professora Lucia do Amaral Mesquita de Magalhães. As atividades acontecerão às quintas de sextas-feiras, em parceria com a professora da classe, __________________,durante parte do período escolar, com o consentimento da direção da escola. Terão como objetivo o desenvolvimento de uma noção abrangente e flexível de número, assim como de estratégias de cálculo mental na adição e na subtração.

As aulas e algumas entrevistas individuais com três dos alunos do grupo serão filmadas, já que comporão a coleta de dados para a pesquisa de doutorado desenvolvida pela professora Lucia, sob orientação da professora Maria do Carmo Domitte, na Faculdade de Educação da USP.

O consentimento para a participação na pesquisa significa que os alunos participantes e seus pais permitem, através deste documento, que suas falas, suas manifestações e os materiais que venham a produzir durante essas aulas sejam utilizados na pesquisa.

Nós, educadores e pesquisadora, assumimos os seguintes compromissos éticos:

- As filmagens serão usadas somente para a produção de relatórios escritos sobre o desenvolvimento do trabalho e/ou em contextos de discussão de resultados da pesquisa;
- Como decorrência do item anterior, as imagens não serão divulgadas por nenhum meio de comunicação;
- Não serão divulgadas informações que permitam identificar os participantes; no texto da tese, nos referiremos às crianças através de nomes fictícios.

Pesquisadora   Professora da classe   Diretora da escola

TERMO DE CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAÇÃO NA PESQUISA

Eu,____, responsável

pelo(a) aluno (a)____,

permito sua participação na pesquisa descrita acima, de acordo com as condições apresentadas.

São Paulo, 18 de fevereiro de 2011.

____

(assinatura do responsável)