UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Faculdade de Educação

WAGNER MARCELO POMMER

A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais.

(*versão corrigida*)

SÃO PAULO

2012

WAGNER MARCELO POMMER

A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais.

Tese apresentada a Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Educação.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Profº Drº Nílson José Machado.

SÃO PAULO

2012

Catalogação na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

375.3 Pommer, Wagner Marcelo
P787c A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais / Wagner Marcelo Pommer; orientação Nílson José Machado. São Paulo: s.n., 2012.
235 p. ils.: tabs

Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

1. Matemática 2. Ensino e Aprendizagem 3. Números Irracionais e Transcendentes I. Machado, Nílson José, orient.

FOLHA DE APROVAÇÃO

Nome: POMMER, Wagner Marcelo

Título: A Construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais.

Tese apresentada a Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Educação.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Aprovado em : __/ __/2012

Banca Examinadora

Prof. Dr.: _________________________ Instituição: ______________________________
Julgamento: _______________________ Assinatura: ______________________________

Prof. Dr.: _________________________ Instituição: ______________________________
Julgamento: _______________________ Assinatura: ______________________________

Prof. Dr.: _________________________ Instituição: ______________________________
Julgamento: _______________________ Assinatura: ______________________________

Prof. Dr.: _________________________ Instituição: ______________________________
Julgamento: _______________________ Assinatura: ______________________________

Prof. Dr.: _________________________ Instituição: ______________________________
Julgamento: _______________________ Assinatura: ______________________________

AGRADECIMENTOS

Desejo expressar meus agradecimentos a todos que contribuíram para que este trabalho se realizasse.

A Deus, nosso pai, guia que viabiliza nossas opções, ilumina nossos caminhos e nos dá forças para prosseguir na jornada da vida.

Aos meus pais, que nesta vida sempre observavam a importância e me incentivaram a prosseguir nos estudos.

A minha esposa Clarice, pelas leituras, revisões, apoio, compreensão e paciência, que me ajudaram a prosseguir neste trajeto.

A meu orientador, Profº Drº Nílson José Machado, pelos esclarecimentos, conhecimentos e contribuições, assim como na dedicação quanto aos passos que me guiaram nesta jornada.

A banca examinadora do Exame de Qualificação, que através das ponderações realizadas, viabilizou contribuições para este trabalho.

Aos professores do Programa de Doutorado em Educação da FEUSP, pelos conhecimentos tão necessários à minha formação.

Aos colegas do grupo de estudo dos Seminários de Ensino da Matemática (SEMA), coordenados pelo Profº Drº Nílson José Machado, pelo ambiente propício para a troca de experiências e discussões enriquecedoras de conhecimentos.

Que a paz de Deus esteja com todos.

RESUMO

POMMER, W. M. **A Construção de Significados dos Números Irracionais no Ensino Básico:** Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais. 2012. 235 f. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Considerando-se como fonte primária os manuais escolares brasileiros de Matemática, o saber a ser ensinado ainda situa uma apresentação dual, polarizado no viés pragmático ou teórico, ao que se segue um procedimento temático padrão que privilegia o desenvolvimento operatório envolvendo contextos exatos, finitos e determinísticos. Em particular, essas características se acentuam gravemente no momento de introdução dos números irracionais no ensino básico, o que ocasiona uma abordagem restritiva. Para superar este quadro, Bruner (1987) fundamenta que não devemos adiar o ensino de assuntos essenciais com base na crença de que são difíceis demais, pois as ideias fundamentais de qualquer assunto podem ser ensinadas na escolaridade básica, porém demanda um trabalho para além dos aspectos técnicos, o que equivale a retomada de características ligadas à compreensão. Neste trabalho, tivemos por hipótese que os pares discreto/contínuo; exato/aproximado; finito/infinito, presentes na análise da evolução epistemológica dos números reais e descritos em Machado (2009), se constituem em pilares conceituais essenciais para fundamentar um panorama favorável a uma abordagem significativa do tema dos números irracionais, de modo a compor um amálgama entre os aspectos técnicos e semânticos. Em face da necessária reflexão, em nível educacional, em torno de tal tema, delimitamos inicialmente um contexto investigativo pautado em um estudo qualitativo orientado pela questão ‘Como são abordados os números irracionais no ensino básico, considerando-se como fonte o livro didático de Matemática?’, a fim de mapear a apresentação deste assunto no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio. O fundamento metodológico se inspirou nos núcleos de significação, descritos em Aguiar&Ozella (2006), que buscou apreender os sentidos que constituem o conteúdo do discurso expresso nos textos dos livros didáticos. O ‘percurso dos núcleos de significação’ confirmou que, nos livros didáticos analisados, a apresentação dos números irracionais ocorre de modo polarizado: alguns optam por um viés empírico e outros pela definição formal. Verificou-se que, após uma abordagem inicial, não ocorre intercâmbio destas opções, o que acarreta um rápido esgotamento das ferramentas para se desenvolver as temáticas, limitando a compreensão da complexidade dos números irracionais no ensino básico. A partir das hipóteses e da pesquisa empírica, nos propusemos a delinear as contribuições presentes no movimento dialético entre os pares discreto/contínuo, finito/infinito e exato/aproximado, cujas mútuas conexões permeiam um ‘espaço de significações’, um campo que possibilita organizar, tecer e ampliar a rede de significados, conforme Machado (1995), favorecendo um quadro de maior compreensão à apresentação dos números irracionais. O enfoque epistemológico realizado revelou uma multiplicidade de relações envolvendo os números irracionais e diversos assuntos do currículo de Matemática, não devidamente caracterizadas e exploradas no ensino básico, o que serviu de mote para a apresentação de algumas situações de ensino para ilustrar os aportes orientadores sugeridos. Acreditamos que o caminho epistemológico trilhado viabilizou uma abertura para ampliar o quadro de significados em relação a outros tópicos presentes na Matemática Elementar, considerando-se como suporte a potencialidade presente nos eixos discreto/contínuo; exato/aproximado; finito/infinito, assim como no par determinístico/aleatório.

Palavras-Chave: Números Irracionais; Significado; Discreto/contínuo; Exato/aproximado; Finito/infinito.

ABSTRACT

POMMER, W. M. **The Construction of Irrational Numbers Meaning on Basic School:** And approach proposal involving Real Numbers Axes constituents. 2012. 235 f. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Considering Brazilian mathematics school textbooks as a primary research source, the knowledge to be taught still has a dual presentation, polarized in a pragmatic or theoretical way, what follows a thematic procedure pattern that favors an operational development involving exact, finite and deterministic contexts. In particular, these characteristics are seriously accentuated by the time of irrational numbers introduction at basic education, which leads to a restrictive approach. To overcome this situation, Bruner (1987) states that we should not postpone teaching key issues based on the belief that they are too hard, because the fundamental ideas of any subject can be taught at basic education, but it demands a work that overcome technical aspects, considerations that are equivalent to the resumption with aspects related to understanding. In this work, we had by hypothesis that the tension inherent on discrete/continuous, exact/approximate, finite/infinite pairs, extracted from analyses on real numbers epistemological evolution and described at Machado (2009), constitutes an essential conceptual pillar to establish a helpful framework to enable a significant irrational numbers approach, in order to compose an amalgam between technical and semantic aspects. Considering the necessary educational discussion involving this theme, we initially delimited an investigative context based on a qualitative study guided by the question 'How irrational numbers are approached in basic education, considering mathematics textbook as a source?' in order to map this subject presentation at Middle and High School. The methodological foundation was inspired in 'meaning core', described in Aguiar and Ozella (2006), which aims to capture the sense that constitutes the speech content expressed inside mathematics scholar textbooks. The analysis from 'meaning core route' reveals that, in the textbooks examined, the most known irrational numbers introduction occurs in a polarized way: some opt for a pragmatic bias and others by formal definition. However, it was found that after an initial approach, there is no further relationship between these options, which causes a rapid depletion of the tools to develop these themes, which limits the complexity understanding of irrational numbers in basic education. From the hypotheses and the empirical research, we intended to delineate contributions presented on the dialectical movement between discrete/continuous, finite/infinite and exact/approximate pairs, whose mutual connections permeate a 'space of meanings', a field that allows to organize, to weave and to expand a 'network of meanings', as Machado (1995), favoring a framework for better understanding the irrational numbers development in basic school. The epistemological approach performed revealed a multiplicity of relationships involving irrational numbers and various subjects of mathematics curriculum, not properly characterized and exploited in basic education, references which served as contexts for the presentation of some teaching situations to illustrate the contributions guidance suggested. We believe that the epistemological path trodden enables an opening to increase possibilities of meanings in relation to other topics of Elementary Mathematics, considering as support the capability constituents presented in discrete/continuous, exact/approximate, finite/infinity axis, as well as in deterministic/random pair.

Keywords: Irrational Numbers; Meaning Camp; discrete/continuous; exact/approximate; finite/infinite.

RESUMEN

POMMER, W. M. **La Construcción de los Significados de los Números Irracionales em la escuela básica:** Una propuesta de abordagem envolvendo los ejos constituintes de los Números Reales. 2012. 235 f. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Teniendo como fuente primaria los libros brasileños de enseñanza de las matematicas, el saber que se enseña tiene una presentación polarizado en el viés pragmático o teórico, al qué si sigue un estándar temático que favorece el desarrollo de los aspectos operativos expuesto en contextos exactos, finitos y determinísticos. En particular, estas características se acentúan en el momento de la introducción de los números irracionales en la educación primaria y secundaria, lo que conduce a un enfoque más restrictivo. Para sobrepasar esta situación, Bruner (1987) señala que no debemos posponer la enseñanza de temas esenciales sobre la base de la creencia de que son demasiado difíciles, porque las ideas fundamentales de cualquier tema se puede enseñar en la escolaridad básica, pero exige un esfuerzo de trabajo para más allá de aspectos técnicos, lo que significa la recuperación de los rasgos de la comprensión. En este trabajo, tenemos por hipótesis que los pares discreto/continuo, exacto/aproximado, finito/infinito, regalos en la análisis de la evolución del epistemológica de los números reales, descrita en Machado (2009), si constituyen en los pilares conceptuales esenciales para basar un panorama favorable a un importante enfoque del tema de los números irracionales, para componer una amalgama entre los aspectos técnico y semántico. En vista de la necesaria discusión, en nivel de la educación, en torno a este tema, inicialmente se estableció un marco de investigación sobre la base de un estudio cualitativo, guiado por la pregunta. ¿Cómo se abordan los números irracionales en la educación básica, teniendo en cuenta el libro de texto como una fuente?, con el fin de asignar la presentación de este tema en la Educación Primaria y Secundaria. El referencia metodológico está inspirado en los ‘núcleos del significados’, como se ha descrito en Aguiar&Ozella (2006), que buscó captar los significados que constituyen el contenido del discurso expresado en los textos de los libros didácticos. El ‘camino de los núcleos de significados’ confirmó que en los libros didácticos examinados, la introducción de los números irracionales se produce de una manera polarizada: algunos optan por un sesgo empírico y otros hicieron uso de la definición formal. Se encontró que, después de la presentación inicial, no hay intercambio de estas opciones, lo que provoca un rápido agotamiento de las herramientas para desarrollar los temas, factor que limita la comprensión de la complejidad de los números irracionales en la educación básica. De las hipótesis y de la investigación empírica, nos dispusimos a delinear los regalos de las contribuciones en el movimiento dialético entre los pares discreto/continuo, exacto/aproximado, finito/infinito, cuyas mutuas conexiones impregnan un ‘espacio de significados’, un campo que hace posible organizar, tejer y extender la red de significados, señaló en Machado (1995), a favor de un marco para una mejor comprensión de la apresentación de los números irracionales. El enfoque epistemológico realizado reveló una multiplicidad de relaciones que implican los números irracionales y diversos temas del currículo de las matemáticas, pero no está bien caracterizado y explotado en la escuela básica, que sirvió como tema para la presentación de algunas situaciones de enseñanza para ilustrar a guisa de las contribuciones que se sugieren. Creemos que el enfoque epistemológico permeado hace posible una apertura para extender la proposición de los significados en relación con otros temas presentes en matemáticas elementales, teniendo en vista la actual potencialidad y capacidad de los ejes discreto/continuo, exacto/aproximado, finito/infinito, como en par determinista/aleatorio.

Palabras-clave: Números Irracionales; Espacio de los significados; continuo/discreto, finito/infinito; exacto/aproximado.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representações do diálogo entre Sócrates e um escravo [Fonte: Bekken (1994)] ..... p. 19

Figura 2 - Relação entre o lado do quadrado e a diagonal .... p. 21

Figura 3 - Gráfico da função $y = x^2$ [Fonte: Coleção A] .... p. 52

Figura 4- Problema da viga [Fonte: Coleção A] .... p. 54

Figura 5 - A reta real e os números inteiros [Fonte: Coleção A] .... p. 56

Figura 6 - A reta real e os números racionais (I) [Fonte: Coleção A] .... p. 56

Figura 7 - A reta real e os números racionais (II) [Fonte: Coleção A] .... p. 56

Figura 8 - A reta real e os números irracionais [Fonte: Coleção A] .... p. 56

Figura 9 - Problema da diagonal do quadrado [Fonte: Coleção A] .... p. 57

Figura 10 - Problema da espiral [Fonte: Coleção A] .... p. 57

Figura 11a- Quadrado ABCD [Fonte: Coleção B] .... p. 59

Figura 11b- Quadrado HEFG [Fonte: Coleção B] .... p. 59

Figura 12 - Representação de $\sqrt{2}$, na reta real [Fonte: Coleção B] .... p. 60

Figura 13 - Quadrado de lado unitário [Fonte: Coleção C] .... p. 61

Figura 14 - Inscrição e circunscrição de um quadrado [Fonte: Coleção A] .... p. 69

Figura 15 - Construção do octógono regular inscrito, a partir do quadrado [Fonte: Coleção A]... p. 70

Figura 16 - Obtenção do segmento áureo AF [Fonte: Coleção C] .... p. 73

Figura 17 - Obtenção do retângulo áureo ABEF [Fonte: Coleção C] .... p. 73

Figura 18 - O tapete de Sierpinski [Fonte: Coleção B] .... p. 80

Figura 19 - Quantos racionais existem entre 1 e 2? [Fonte: Coleção C] .... p. 81

Figura 20 - Gráficos das exponenciais $y = (1/2)^n$ e $y = -(1/2)^n$ [Fonte: Coleção C] .... p. 81

Figura 21 - O tapete de Sierpinski [Fonte: Coleção C] .... p. 83

Figura 22 - Os flocos de neve de Kock [Fonte: Coleção C] .... p. 83

Figura 23 - Exemplo de operação de contagem .... p. 111

Figura 24a- Relação biunívoca [Fonte: Caraça (1970)] .... p. 111

Figura 24b- Prevalência [Fonte: Caraça (1970)] .... p. 111

Figura 25 - Representação de segmentos comensuráveis .... p. 115

Figura 26 -	Representação geométrica da P.G. (1;1/2;1/4; 1/8;....)	p. 124
Figura 27 -	O processo da dicotomia	p. 126
Figura 28 -	Correspondência biunívoca proposta por Galileu	p. 128
Figura 29 -	Correspondência biunívoca y = 2x	p. 130
Figura 30 -	Correspondência biunívoca y = 2x+1	p. 131
Figura 31 -	Dispositivo da Prova da Diagonal de Cantor	p. 131
Figura 32 -	Visualização de um número irracional no segmento orientado AP	p. 133
Figura 33 -	Eixo real e um ponto genérico P	p. 134
Figura 34 -	Corte produzido pelo ponto P e constituído pelas duas classes (A) e (B)	p. 135
Figura 35 -	Representação geométrica da conjectura de Pedro	p. 153
Figura 36 -	Ilustração do processo de Ptolomeu, para a aproximação de polígonos inscritos a circunferência	p. 156
Figura 37 -	Corda genérica (cdr α), correspondente ao ângulo central α [Fonte: Aaboe (1984)]	p. 156
Figura 38a-	Representação geométrica da corda que correspondente ao ângulo central de 90º	p. 158
Figura 38b-	Corda correspondente ao ângulo central de 36º e 72º [Fonte: Aaboe (1984)]	p. 158
Figura 39 -	Ilustração do processo de inscrição de polígonos de Arquimedes	p. 160
Figura 40 -	Visualização da sequência de Leibniz [Fonte; Amaral (2005)]	p. 166
Figura 41 -	O processo de interpolação linear	p. 171
Figura 42 -	O número de Euler e a hipérbole eqüilátera	p. 179
Figura 43a-	Divisão de segmento em duas partes iguais	p. 180
Figura 43b-	Divisão de segmento em três partes iguais	p. 180
Figura 44 -	Divisão de segmento em duas proporcionais	p. 181
Figura 45a-	Retângulo áureo ABEF e CEDF	p. 183
Figura 45b-	Retângulo áureo CEDF e DEGH	p. 183
Figura 46 -	Esquema de construção dos infinitos retângulos áureos	p. 184
Figura 47 -	As quatro posições relativas canônicas dos planetas Terra e Marte [Fonte: Varella (2006)]	p. 198
Figura 48 -	Oposição entre dois planetas A e B [Fonte: Oliveira Filho; Saraiva (2003)]	p. 199
Figura 49 -	Periélios recentes da órbita de Marte em relação à Terra. [Fonte: Varella (2006)]	p. 199
Figura 50 -	Espaço de Significações, segundo Flanagan (2007)	p. 223

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 -	'Percurso dos núcleos de significação' para a análise de temas presentes no livro didático	p. 51
Quadro 2 -	A introdução conceitual nas coleções analisadas	p. 63
Quadro 3 -	O uso de linguagens nas coleções analisadas	p. 63
Quadro 4 -	O uso meios didáticos nas coleções analisadas	p. 64
Quadro 5 -	A articulação entre as diversas linguagens nos livros de Ensino Fundamental II	p. 65
Quadro 6 -	O uso da história da Matemática como recurso didático	p. 65
Quadro 7 -	O uso de meios didáticos para acessar o número PI	p. 76
Quadro 8 -	A abordagem introdutória para o número de ouro	p. 78
Quadro 9 -	A introdução conceitual do infinito	p. 85
Quadro 10 -	O uso de linguagens variadas nas coleções analisadas	p. 86
Quadro 11 -	Exemplo de correspondência unívoca	p. 111
Quadro 12 -	Valor de PI obtido indiretamente do Chui-Chang Suan-Shu	p. 152
Quadro 13 -	Valor aproximado de PI e comparação percentual	p. 154
Quadro 14 -	Valores aproximados de PI pelo método de Ptolomeu	p. 158
Quadro 15 -	Perímetro do hexágono inscrito e circunscrito a uma circunferência de raio ½	p. 161
Quadro 16 -	Erro apontado por planilha eletrônica [Fonte: Augusto (2009)]	p. 177
Quadro 17 -	Divisão do segmento geométrico contínuo AB em um número discreto de partes	p. 181
Quadro 18 -	Representação da medida 'x' que divide o segmento AB na proporção áurea	p. 183
Quadro 19 -	Algoritmo de Euclides	p. 190
Quadro 20 -	Relação de convergentes para o problema das engrenagens	p. 197
Quadro 21 -	Valores relativos às posições do periélio de Marte em relação à Terra	p. 200
Quadro 22 -	Algumas relações (reduzidas) entre as oposições Marte/Terra [Fonte: Varrela (2006)]	p. 201

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Aproximação para um intervalo de inteiros [Fonte: Coleção B] .... p. 59

Tabela 2 - Cálculo da raiz quadrada de 6 .... p. 118

Tabela 3 - Processo para verificar a opção do papiro de Rhind como valores otimizadores... p. 155

Tabela 4 - Parte de uma tabela de cordas, correspondente a determinado ângulo central [Fonte: Aaboe (1984)] .... p. 157

Tabela 5 - Resultados dos perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência .... p. 161

Tabela 6 - Representação da soma dos n primeiros termos da sequência de Leibniz .... p. 165

Tabela 7 - Sequência de valores de PI utilizando Wallis .... p. 167

Tabela 8 - Sequência de valores de PI utilizando Euler .... p. 168

Tabela 9 - Cálculo do agiota, para a aplicação de 1 dinar, a 100% a.a., com correção trimestral p. 172

Tabela 10 - Cálculo do agiota, para a aplicação de 1 dinar, a 100% a.a., com correção mensal ..... p. 173

Tabela 11 - Algumas potências inteiras de 2 .... p. 175

Tabela 12 - Série de valores que compõe a série de aproximações do número de ouro .... p. 186

Tabela 13 - Sequência de valores aproximados do número de ouro .... p. 187

Tabela 14 - Os termos do processo da divisão .... p. 188

Tabela 15 - Algoritmo da divisão de dois números inteiros .... p. 189

Tabela 16 - Sucessão de convergentes do algoritmo da divisão .... p. 190

Tabela 17 - Sucessão de convergentes de PI .... p. 193

LISTA DE MAPAS

Mapa 1 - Espaço de significações dos números irracionais .... p. 141

Mapa 2 - As múltiplas redes de conexões entre os números irracionais e os eixos constituintes dos números reais .... p. 143

Mapa 3 - Percurso dos núcleos de significação através do Espaço de Significações dos Números Irracionais.. p. 144

Mapa 4 - As frações contínuas como tema articulador no Espaço de Significações dos Números Irracionais .... p. 194

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO 15

A Pesquisa sobre os números irracionais 16

Os objetivos e as questões da pesquisa 34

CAPÍTULO I: Os Números Irracionais e o Livro Didático 36

As escolhas iniciais para a investigação nos livros didáticos 41

O referencial de análise dos Livros Didáticos: os 'núcleos de significação' 45

A descrição dos temas selecionados nos livros didáticos e a análise dos resultados de busca 51

Tema A: O surgimento das raízes enésimas irracionais 52

Coleção A 52

Coleção B 58

Coleção C 60

Coleção D 62

Coleção Extra 62

Análise e Síntese do Tema A 63

Tema B: O número PI, o número de Euler e o número de Ouro 69

Coleção A 69

Coleção B 71

Coleção C 71

Coleção D 74

Coleção Extra 74

Análise e Síntese do Tema B 76

Tema C: Aspectos essenciais do conhecimento matemático relacionados aos números irracionais 79

Coleção A 79

Coleção B 80

Coleção C 80

Coleção D 83

Coleção Extra 84

Análise e Síntese do Tema C 85

Análise comparativa entre as temáticas 87

CAPÍTULO II: As contribuições teóricas para a construção do significado dos Números Irracionais no ciclo básico 92

A importância, as acepções e os caminhos para significar os números irracionais 94

O enfoque através da História da Matemática 104

O eixo Discreto/Contínuo como ação fundadora 108

O exato e o aproximado: Uma interação entre os Números Racionais e os Números Irracionais 117

O eixo finito/infinito 122

A construção dos Números Reais 132

Os Eixos Constitutivos dos Números Reais e a construção de significado dos números irracionais 138

CAPÍTULO III: Explorando os Eixos Constitutivos dos Números Reais: Algumas Propostas de Situações de ensino. 148

O número π 150

O número de Euler 170

O número de ouro 180

Frações Contínuas: Um enfoque complementar e articulador dos números irracionais 187

Duas situações envolvendo as Frações Contínuas e a questão das aproximações .. 195

CONSIDERAÇÕES FINAIS/ EXPECTATIVAS FUTURAS 203

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 227

APRESENTAÇÃO

A Pesquisa sobre os números irracionais

APRESENTAÇÃO: A Pesquisa sobre os números irracionais

Platão considerava que nenhuma arte e nenhum conhecimento podem prescindir da ciência dos números. A Aritmética é um campo primordial no desenvolvimento da Matemática e presente há muito tempo nas escolas. Os números, o tema central da Aritmética, representam uma ideia fundamental da Matemática, ocupando histórica e logicamente uma posição privilegiada e essencial para o desenvolvimento da própria Matemática e das diversas Ciências.

No ensino atual de matemática, é usual a apresentação dos números como elementos oriundos do registro pictórico, que evoluíram para os algarismos e formaram os sistemas posicionais, originando assim processos de contagem e medida de natureza pragmática[1], regidos por certas leis de combinação, se comportando de maneira prédeterminada e previsível em processos operatórios próprios desta disciplina. Estas características podem ser sintetizadas numa concepção funcional:

> [...] onde o cálculo é tudo. [...] Desapareceram irremissivelmente todas aquelas particularidades, aquele caráter multicolorido, que os números apresentavam aos olhos dos gregos, para quem tinham mesmo um significado físico e uma personalidade (KARLSON, 1961, p. 45).

O movimento do ensino direcionado aos aspectos operatórios, exatos, determinísticos e finitos consiste numa tendência que encobre aspectos importantes e significativos envolvendo os números. Em particular, para compreender o contexto relacionado aos números irracionais, foco desta pesquisa, no ciclo básico, é fundamental retomar alguns aspectos ligados à noção de número, ocorridos ao longo do desenvolvimento histórico.

O amadurecimento do conceito de número ocorreu ao longo dos séculos, através de indagações e buscas provenientes de leigos, filósofos e matemáticos. No caminho marcado pelo desenvolvimento histórico surgiram alguns conjuntos numéricos de destaque, como os números naturais[2], os números inteiros[3], os números racionais[4], os números irracionais[5] e os números reais.

---

[1] Pragmático: Do grego *pragmatikós* e do latim *pragmaticu*, é um adjetivo relativo aos atos suscetíveis a ações e aplicações práticas, segundo Aurélio (2003).

[2] O conjunto dos números naturais é representado por N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}.

[3] O conjunto dos números inteiros é representado por Z = {..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}.

[4] O conjunto dos números racionais tem representantes na forma a/b, onde a e b são inteiros e $b \neq 0$, ou, de modo equivalente, são números na forma decimal exata ou dízima periódica.

[5] Os números irracionais são usualmente apresentados como a coleção de todos os números reais que 'não' são racionais. Esta definição circular, por exclusão ou negação, embora correta, inibe a exploração de algumas relações essenciais entre os números racionais e os irracionais, no ensino básico.

O surgimento destes conjuntos numéricos[6] não foi linearmente construído ao longo do percurso sócio-histórico-cultural. O desenrolar do conhecimento matemático revela imbricações ou conexões entre estes conjuntos numéricos, originadas e orientadas ora pelas atividades de subsistência do ser humano, ora pelas atividades de natureza intelectual, presente em civilizações, como o antigo povo grego.

No ensino, estes conjuntos são apresentados numa sequência que, em alguns momentos, difere da ordem cronológica do surgimento e do percurso ocorrido no movimento histórico de desenvolvimento deste campo de conhecimento[7].

Para localizar o movimento de construção e reconstrução dos conceitos numéricos ao longo do processo histórico, optamos por expor uma panorâmica, perpassando o conhecimento matemático envolvendo os números reais. Esta opção tem como finalidade reconstituir o percurso e pontuar a problemática dos números irracionais, como campo de saber a ser ensinado, na escolaridade básica. Este encaminhamento possibilita compor um painel em relação ao atual ensino deste tema, situando as consequências advindas das escolhas constituídas ao longo do tempo e, assim, propor um referencial alternativo norteador de situações de ensino, no ciclo básico.

Como quadro inicial retomamos os primórdios da história do homem, no período paleolítico[8], onde as pinturas nas cavernas se destacaram, revelando uma boa percepção do mundo bidimensional dos objetos geométricos como representação do espaço tridimensional. Em tal período não houve alusão aos aspectos numéricos.

Foi somente na transição do paleolítico (da caça e pesca) para o neolítico (idade da pedra polida), marcada pelo surgimento da agricultura e o pastoreio, há cerca de 10.000 anos atrás, que surgiram as primeiras manifestações dos números, de caráter qualitativo, caracterizada pela distinção de um, dois, três e muitos[9].

No referido percurso surgiram linguagens menos rudimentares e o desenvolvimento de termos numéricos simples, uma das ideias mais abstratas que o pensamento humano foi capaz de conceber.

> Desde o seu aparecimento na terra, o homem tem recorrido à Matemática: calculava, contava e media, mesmo no período em que seu espírito não tinha consciência de si mesmo e quando ainda sobre tais assuntos não existiam conceitos e convenções (KARLSON, 1961, p. 3).

---

[6] O ensino de Matemática Elementar também aborda os números complexos, assunto importante, mas que não é escopo deste texto.

[7] Neste texto utilizamos conhecimento como sinônimo de saber.

[8] Idade da pedra lascada, termo proveniente da fusão do grego *paleo* (antigo) e *lithos* (pedra).

[9] Ifrah (1989) destaca que *très* se associa a ideia de muitos, como, no francês *trois* (três) e *très* (muito).

Em relação à história da Matemática, Caraça (1970) aponta que os aspectos envolvendo as ações de contar e medir formaram a base dos conhecimentos envolvendo os números. Estes emergiram em decorrência do desenvolvimento econômico e cultural dos povos antigos, em situações pragmáticas ligadas às atividades de subsistência do ser humano como a agricultura, a criação de animais e a divisão das terras. Posteriormente, o aprimoramento das atividades de natureza monetária, tributária e mercantil incentivou o desenvolvimento de cálculos operatórios e a evolução na simbolização dos números.

Uma referência de destaque na evolução do campo numérico se encontra no antigo Egito, onde eram arrendadas terras aos nobres, o que provocou a necessidade da medição para remarcar os limites das propriedades, devido às enchentes periódicas do Rio Nilo. Os padrões de medidas oportunizam o fato de que é raro a unidade:

> [...] caber um número inteiro de vezes na grandeza a medir. Os medidores de então reconheceram que o instrumento numérico conhecido – os números inteiros – era insuficiente para exprimir as medidas o mais aproximado possível do real. [Então] foi forçoso subdividir a unidade num certo número de partes iguais. Tem-se aí o surgimento das frações da unidade. [...] Para suprir a impossibilidade dos números inteiros ante a medida, cria-se um novo instrumento numérico (LIMA, 1986, p. 82).

Os números racionais foram introduzidos por necessidades práticas, como no caso citado em relação à criação de sistemas de leis para controlar e fiscalizar propriedades. De modo geral, o campo dos números racionais emergiu nas antigas grandes civilizações, como no caso do povo egípcio e mesopotâmio, num viés utilitário, tendo como contexto o conhecimento empírico[10].

Diferentemente dos diversos povos antigos, que utilizavam os números como ferramenta envolvendo cálculos, os gregos concebiam os números inteiros como entidades abstratas e teóricas[11], com propriedades merecedoras de um estudo para muito além do pragmático.

Um característico representante desta época foi Pitágoras, fundador da seita onde todas as coisas podiam ser associadas aos números. A escola pitagórica acentuou um significado místico, considerando os números naturais (exceto o zero e o um) como originários dos deuses e imersos numa relação de direcionamento de todos os objetos.

O conhecido lema ‘tudo é número’ expressa para os pitagóricos a restrição e a associação de números somente aos inteiros ou a uma relação entre números inteiros.

---

[10] Empírico: Do latim *empiricu* e do grego *empeirikós*, é um adjetivo relativo a situações vivenciadas apenas na experiência ou relativo ao conhecimento oriundo da observação da realidade.

[11] Teórico: adjetivo relativo à teoria, termo que provém do grego *theoría*, denotando a ação de contemplar, examinar, estudar ou depurar, de modo a compor conhecimento especulativo, meramente racional, em sentido oposto ao conhecimento empírico, oriundo da observação da realidade.

Uma situação de fundamental importância para a compreensão dos números irracionais surgiu no estudo da relação entre a diagonal e o lado do quadrado, no século V a.C., momento que os pitagóricos perceberam que estes segmentos não eram comensuráveis. Dois segmentos são ditos *incomensuráveis* se a razão entre estes *não* puder ser expressa como uma razão de números inteiros (com denominador não nulo).

O problema da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado não sintonizava com a concepção filosófica grega, onde todo número é inteiro ou é composto de uma relação simples entre inteiros. Para tal povo esta situação era indizível ou indenominável, ou seja, impossível de ser expressa com palavras e também inimaginável, pois não podia ser representada numa razão de números inteiros, uma premissa essencial para os pitagóricos. Este episódio representou um momento que, bem posteriormente, foi denominado ‘A Crise dos Incomensuráveis’.

Gonçalves e Possani (2010) consideram a hipótese de que os antigos gregos lidavam com razoável naturalidade para a questão da relação entre a medida da diagonal e o lado do quadrado. Os autores apontam evidências, tomando como suporte fontes históricas, ponderando que a atual denominação ‘Crise dos Incomensuráveis’ se situa mais como “[...] uma criação historiográfica do que como um relato fidedigno” (GONÇALVES; POSSANI, 2010, p. 21), relativizando a descoberta da incomensurabilidade como um fator de crise para tal povo.

Independentemente desta questão[12], os pitagóricos contornaram o impasse gerado por esta situação com uma solução que veio constituir-se como característica típica da cultura matemática grega da época: a relação entre a diagonal e o lado do quadrado não deveria ser expressa por um número, mas por meio de elementos geométricos.

Uma referência a esta concepção cultural grega se encontra em Bekken (1994), que retrata um trecho dos *Diálogos*, de Platão, onde Sócrates desenhou um quadrado de dois pés de lado (ver figura 1a) e pede ao escravo de Menon que lhe mostre um quadrado com o dobro da área.

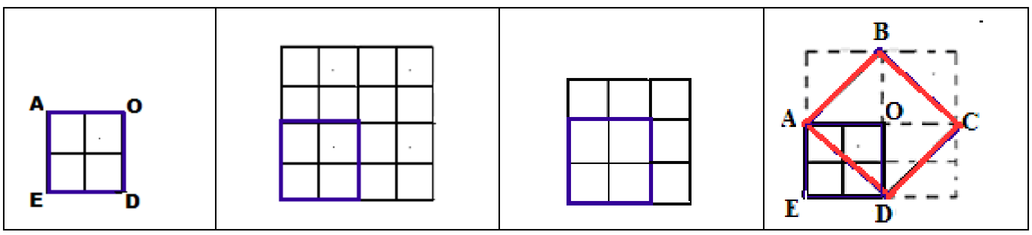


Figura 1a Figura 1b Figura 1c Figura 1d

Figura 1: Representações do diálogo entre Sócrates e um escravo [Fonte: Bekken (1994, p. 34-35)].

[12] A abordagem dos autores, no citado artigo, pode se constituir em aporte didático para ilustrar e desenvolver conceitos em cursos de licenciatura de Matemática, e, eventualmente, em alguns níveis mais avançados de desenvolvimento de conhecimento dos números irracionais no Ensino Médio.

No relato de Platão, o escravo argumentava que o quadrado deveria ter lado quatro pés e Sócrates desenhou esta resposta (figura 1b), o que revelaria que a área quadruplicaria. Ao perceber que a área tinha aumentado mais do que o solicitado, o escravo corrigiu a resposta, argumentando que o quadrado deveria ter lado três pés (figura 1c), o que ainda não resolvia a questão. Diante do impasse do escravo, Sócrates desenhou a solução do problema (figura 1d).

A narrativa de Sócrates, presente nos diálogos de Platão, ilustra a cultura típica dos gregos clássicos. Ao ser traçada a diagonal, o triângulo ADO resultante, retângulo e isósceles, possui metade da área do quadrado original. A construção proposta é composta de quatro triângulos retângulos e isósceles, equivalentes entre si. Então, a área do quadrado é equivalente ao quádruplo do triângulo ADO, ou seja:

$$\acute{A}rea\ \ ABCD = 4 * \acute{A}rea\, ADO = 4 * \frac{1}{2} * \acute{A}rea\, AEOD = 2 * \acute{A}rea\ \ do\ \ quadrado\ \ original.$$

Pode-se interpretar que a ‘Crise dos incomensuráveis’ propiciou uma alternativa, a moda grega, de articulação entre a Aritmética e a Geometria, representando a superação inicial, no âmbito histórico, de uma tensão presente na percepção da existência dos segmentos incomensuráveis pelos pitagóricos.

Bekken (1994) argumenta que esta solução geométrica encaminhada no diálogo entre Sócrates e o escravo de Menon, descrita em Platão, modernamente representa a solução da equação algébrica $x^2 = 2$. E se o foco se centrar na descoberta da medida do lado do quadrado, a situação recairia em um número irracional.

O confinamento dos números irracionais a Geometria promoveu imenso debate em relação à questão: os antigos gregos tinham a noção dos irracionais como números? Diante desta polêmica, Schubring (2005) pontua como negativa a resposta por grande parte dos matemáticos e historiadores atuais, posição que adotamos neste texto.

A crença nos números inteiros impeliu os gregos a ocultar os números irracionais. Este tipo de abordagem da cultura matemática grega gerou o conceito de número:

> [...] ligado à Geometria. Somente os números inteiros eram considerados números, enquanto que os outros números eram considerados áreas; particularmente as frações eram tidas como quantidades; e Euclides entendeu que até os números inteiros eram concebidos geometricamente, como segmentos de reta. Naquele tempo a Aritmética grega fazia parte da Geometria[13] (SCHUBRING, 2005, p. 17, tradução nossa).

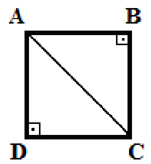
---

[13] […] tied to geometry. Only the integers were understood as numbers (a¬rijmóß) at all, while other number areas; in particular fractions, were understood to be quantities; and Euclid understood even the integers geometrically, as segments of straight lines. Arithmetic, at that time, formed an integral part of geometry.

Ao se depararem com a existência dos irracionais, os pitagóricos lhes atribuíram uma representação através da Geometria, contemplando em termos filosóficos os segmentos incomensuráveis como uma imagem concreta de algo inimaginável. Assim:

> [...] todo número podia ser expresso por um comprimento, mas existiam comprimentos que não correspondiam a nenhum número. [...] Jamais o [número] irracional teve na Grécia o valor de um número, e os gregos não possuíam símbolo para esta espécie de grandeza (KARLSON, 1961, p. 104).

Posteriormente, após muitos séculos, a relação entre a diagonal e o lado de um quadrado foi representada pelo símbolo $\sqrt{2}$, conforme se observa na figura 2.



$$\frac{AC}{AD} = \sqrt{2}$$

Figura 2: Relação entre a diagonal e o lado do quadrado.

Desde o surgimento da denominada ‘Crise dos Incomensuráveis’, por muitos séculos os números irracionais permaneceram marginalizados e incompreendidos na Matemática. No entanto, “[...] há um consenso que até o século dezoito não houve um esforço matemático para conceituar de modo satisfatório os números reais” (SCHUBRING, 2005, p. 16).

O tratamento, regulação e sistematização do conjunto dos números reais e, por consequência, os números irracionais no campo do saber matemático se consolidou há pouco mais de 100 anos. Porém, o mesmo não ocorreu no campo do ensino básico da Matemática, o que demanda alguns esclarecimentos sobre o tema.

O saber, elemento mediador do processo de ensino e aprendizagem[14], é passível de ser repensado em nível escolar. O conhecimento matemático dos números irracionais, adquirido através do movimento histórico e sistematizado pela comunidade de matemáticos, sofreu uma transposição didática[15] para ser ensinado em sala de aula. Além do conhecimento em si, para se efetivar esta tarefa são necessários referenciais que permitam orientar e fundamentar o modo como pode ocorrer tal tratamento.

---

[14] A interação no sistema de ensino ocorre segundo o sistema didático *stricto sensu*, que comporta três elementos - o aluno, o professor e o saber - partes constitutivas de uma relação dinâmica e complexa - a relação didática - que leva em consideração as interações entre professor e alunos (elementos humanos), mediadas pelo saber, elemento não-humano que é fundamental para a forma como as relações no sistema didático se estabelece, conforme sintetizam Chevallard; Bosch; Gascón (2001).

[15] Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001), transposição didática é o conjunto das transformações que sofre um saber científico, para se constituir em objeto de ensino compreensível ao aprendiz.

Leviathan (2004) nos relembra que os números inteiros e racionais são estudados cuidadosamente na escola básica. No Ensino Fundamental II, os números racionais usualmente são apresentados como uma relação entre números inteiros ou expressos na forma de um número decimal exato ou por um número decimal na forma periódica (dízima periódica).

É usual, nos livros didáticos do ensino básico, a introdução dos números irracionais por meio de três caracterizações básicas, que são:

> (a) Um número é irracional se não puder ser escrito na forma *a/b* com *a,b* Є Z e *b* não-nulo [ou] Irracional é o número que não pode ser escrito na forma de fração; (b) Irracional é o número cuja representação decimal é infinita e não-periódica [ou] Todo número escrito na forma de um decimal infinito não-periódico é um número irracional; (c) Os números irracionais positivos representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade (RIPOLL, 2001, p. 1).

A análise de livros didáticos presente em Santos, J. (2007) e Silva (2011b) indicou que, quando o assunto é abordado, a apresentação dos números irracionais geralmente enfoca situações pragmáticas, envolvendo a aproximação de resultados expressos através de calculadora.

Em caminho oposto, as autoras observam que certos manuais preferem a apresentação teórica, ora expondo um número irracional como sendo uma dízima não periódica, ora definindo como números irracionais os que não podem ser expressos por meio de uma razão entre números inteiros.

É usual a crença que os caminhos para a introdução dos números irracionais no ensino básico pressupõem a necessidade de uma “[...] completa compreensão dos números racionais pelos alunos”[16] (VOSKOGLOU;KOSYVAS, 2011, p. 129, tradução nossa). Ponderamos que essa observação dos referidos autores reforça uma posição simplista e incompleta da problemática, pois implicitamente incorpora uma desnecessária ‘concepção negativa’, colocando os números irracionais como os números não-racionais, um ponto de vista insuficiente para caracterizar este tema.

Uma dificuldade para a compreensão dos números irracionais está relacionada ao modo como o ensino realiza a transposição didática do tema dos números reais, exposto como a união de dois conjuntos disjuntos: os números racionais e os números irracionais ($\Re = Q \cup$ Irracionais). Porém, muitas vezes, logo em seguida, os números irracionais são apresentados como os números reais que não são racionais. Esse é o quadro da circularidade: quem são os números reais? Quem são os números irracionais?

[16] […] a complete understanding of rational numbers by students.

Rezende, W. (2003) destaca que esta apresentação circular envolvendo os números irracionais e os números reais representa uma simplificação, limitando o entendimento e não esclarecendo a importância do campo numérico dos irracionais e, consequentemente, dos números reais, ao ensino da Matemática.

O ensino dos números irracionais ainda se encontra imerso em um mistério profundo, expressão de Palis (2005) que nos relembra a necessidade de maiores estudos envolvendo tal tema. A ampliação do sistema dos números racionais para o sistema dos números reais é inicialmente abordado no 8º ou 9º ano do Ensino Fundamental. A introdução e tratamento dos números irracionais requerem "[...] um trabalho investigativo que abrange uma reflexão sobre como ensinar e como ensinar a ensinar números reais, uma das ideias fundamentais da matemática" (PALIS, 2005, p. 5).

A etapa de transição dos números racionais para os números reais não pode ocorrer sem a apresentação dos números irracionais. Neste sentido, como seria:

> [...] possível passar do sistema dos números racionais para o conjunto dos números reais sem descrever o conjunto dos números irracionais? Os números irracionais são parte de um sistema e ficam incompletos sem a conceituação dos números reais. Renegar os números irracionais é suficiente para derrubar todo o sistema. Isto é o que acontece hoje em dia[17] (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995, p. 30, tradução nossa).

Em relação às apresentações usuais presentes nos manuais didáticos, outra situação problemática em relação aos números irracionais é que tais coleções geralmente:

> [...] pressupõem a existência de outros números além do universo trabalhado até o momento pelos alunos (a saber, o de números racionais) - o que já é, no mínimo, incoerente, quando o que se quer é ampliar o conjunto dos números; fica pressuposta também a capacidade de um manejo com tais números que os permitam saber decidir se eles podem ou não ser escritos na forma de fração (RIPOLL, 2001, p. 1).

A autora destaca problemas com a abordagem circular envolvendo os números irracionais e os reais quando ao aluno são apresentados outros números. Na pesquisa realizada no 9º ano do Ensino Fundamental, Ripoll (2001) destaca que alguns alunos erroneamente afirmam que $\sqrt{-1}$ é um número irracional, pois não pode ser escrito na forma de fração.

Em situações que envolvam os números complexos, no Ensino Médio, podem ocorrer problemas. Por exemplo, os "[...] números imaginários não podem ser escritos na forma de fração, e nem por isso são irracionais" (RIPOLL, 2001, p.1).

[17] […] possible to pass from the rational numbers to the set of real numbers without describing the set of irrational numbers? The irrational numbers are a part of the system and without them the concept of real numbers is incomplete. It suffices to neglect the irrational numbers and the whole system falls apart. This is what happens today.

Vale relembrar que os números irracionais, tema desta pesquisa, representam uma ideia matemática sofisticada, não trivial e pouco intuitiva, dificultando a abordagem deste assunto em sala de aula. Esta intrínseca característica teórica remete a uma necessária busca de recursos didáticos e epistemológicos para discutir a problemática de introduzir esse campo numérico de modo significativo, no ensino básico.

> Pouca atenção é dada aos números irracionais na Matemática Elementar. A principal razão, em nossa opinião, é que a matemática da escola básica é essencialmente concebida como um conjunto de aplicação de técnicas[18] (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995, p. 29, tradução nossa).

Referências contidas nos PCN, Brasil (1998) citam que o trabalho com números irracionais no ciclo básico se encontra simplificado, limitando-se a apresentação de algumas raízes enésimas irracionais, na exposição de propriedades de radicais, em cálculos operatórios com radicais e na apresentação de π.

O mesmo documento recomenda que, no decorrer do ensino, o conhecimento deve ser construído num processo em que se enfatizem os números como instrumento:

> [...] eficaz para resolver problemas, e também como objeto de estudo em si mesmo, considerando-se, nesta dimensão, suas propriedades, suas inter-relações e o modo como historicamente foram constituídos. Nesse processo, o aluno perceberá a existência de diversos tipos de números (naturais, negativos, racionais e irracionais), bem como de seus diferentes significados, à medida que deparar com situações-problema envolvendo operações ou medidas de grandezas, como também ao estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento do conhecimento matemático (BRASIL, 1998, p. 50).

Diante de tais sugestões e reflexões surgem alguns questionamentos sob o ponto de vista didático e epistemológico. Se os números reais são pontuados como um objeto de estudo, em si mesmo, por que há uma tendência de tratamento como ferramenta no ensino básico, num viés de operações muitas vezes permeadas de regras, sendo pouco destacados os aspectos essenciais de sua concepção, estrutura e natureza?

Esta questão requer uma apreciável gama de pesquisas, em virtude da importância dos números reais e dos números irracionais para o ensino básico. Porém, no campo acadêmico, existem poucos trabalhos envolvendo estes temas no ciclo básico.

Destacamos, a seguir, os resultados apontados nas principais investigações realizadas em torno da temática dos números irracionais e dos números reais, de modo a situar as abrangências e as contribuições com relação ao ensino básico.

---

[18] Little attention is paid to the irrational numbers in school mathematics. The main reason, in our opinion, is that school mathematics is essentially conceived as an ensemble of solving techniques.

Pesquisadores como Fischbein; Jehian; Cohen (1995), Soares; Ferreira; Moreira (1999), Rezende, W. (2003), Zazkis;Sirotic (2004), Boff (2006), Sirotic;Zazkis (2007), Costa, L. (2009) e Silva (2011a) relatam a pouca ênfase dada ao ensino dos irracionais e também os escassos estudos e pesquisas educacionais focando explicitamente a conceituação de números irracionais no ciclo básico, se considerarmos a inerente e complexa problemática da aprendizagem do referido assunto.

Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), pesquisaram as dificuldades na conceituação dos irracionais em estudantes concluintes da educação básica e outros iniciantes do curso de Licenciatura em Matemática, em Telaviv. A pesquisa diagnosticou que a maioria dos estudantes apresentou concepções erradas com relação ao tema, descrevendo número irracional como sendo aquele que possui uma representação decimal infinita, porém periódica, ou como um número negativo, ou um número que não é inteiro. As respostas indicaram que os alunos pesquisados geralmente não diferenciaram números racionais de irracionais.

Os autores tinham como hipótese que a percepção das grandezas incomensuráveis e a propriedade de densidade[19] dos números reais se constituíam em obstáculos a compreensão do conceito, tal como ocorreu na história do conhecimento matemático. Os pesquisadores observaram que os resultados das pesquisas não confirmaram tal conjectura, permitindo aqui elencar uma questão: os resultados e obstáculos da história da matemática, por si só, podem constituir base para conceber situações de ensino, sem referenciais norteadores?

Outra recomendação se faz com relação ao entendimento conceitual dos diversos tipos de números, de modo que os autores consideram inaceitável que o currículo de:

> […] Matemática para o Ensino Fundamental e Médio não provém o conhecimento necessário em relação aos sistemas numéricos. Em nossa opinião, os conceitos de números naturais, racionais, irracionais e reais devem ser explicitamente e sistematicamente ensinados. Mas não estamos nos referindo somente aos conhecimentos técnicos, definições e procedimentos operativos. Também consideramos que a resolução de problemas propicia aflorar o pensamento intuitivo, sem o qual a Matemática se torna um mero esqueleto (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995, p. 43, tradução nossa).[20]

[19] A densidade é uma propriedade raramente abordada no ensino básico brasileiro. Segundo Caraça (1970), um conjunto numérico é denso se "[...] entre dois dos seus elementos quaisquer existe uma infinidade de elementos do mesmo conjunto" (p. 56).

[20] "[…] Mathematics for middle and high schools do not provide the basic knowledge of the number system. Our opinion is that the concepts of natural, rational, irrational and real numbers should be explicitly and systematically taught. But we do not refer to mere technical knowledge, definitions and solving procedures. We refer also to the problems raised by the intuitive background without which mathematics is a mere skeleton".

A posição de Fischbein, Jehiam e Cohen (1995, p. 37, tradução nossa) é que o estudo dos números reais requer a compreensão do papel da estrutura matemática, pois "[...] o entendimento exato e formal do termo 'número irracional' é perdido na totalidade da estrutura conceitual[21]".

Ponderamos que este parecer não encerra a complexidade da dificuldade da abordagem dos números irracionais na educação básica, pois a transferência do critério matemático (exato e formal) para o ensino também requer uma reflexão perante as possibilidades inerentes ao intrincado campo didático, histórico e metodológico.

A pesquisa de Arcavi *et al.* (1987 apud Sirotic;Zazkis, 2007) com professores, relata que os entrevistados acreditavam que o conceito de irracionalidade repousa exclusivamente sobre a representação decimal. Além dessa restrita concepção, os resultados revelaram dificuldades dos professores no reconhecimento da racionalidade ou irracionalidade de um número. Estes resultados da referida autora causam preocupação e nos motivam para a discussão da necessária ampliação do repertório de significados com relação ao tema dos números irracionais.

Peled e Hershkovitz (1999 apud Sirotic;Zazkis, 2007) realizaram pesquisa envolvendo licenciandos em Matemática. Os autores concluíram que estes conheciam a definição formal e as características de números irracionais, mas falhavam em tarefas que exigiam o uso com diferentes representações, assim como em situações envolvendo o valor limite de um processo.

Considerando-se agora a pesquisa de Dias (2007), esta visou observar e compreender as relações que "[...] pode haver entre a formação da imagem conceitual de número real, elaborada pelo professor, e os fundamentos lógico-históricos do desenvolvimento conceitual dos números reais que configuram as atividades de ensino [básico]" (p. 22).

Adquirir um conceito, para Tall e Vinner (1981 apud Dias, 2007), é formar uma imagem conceitual deste, que pode ser expressa por meio de representações mentais, impressões, experiências e propriedades, constituídas na estrutura cognitiva do individuo. Para Dias (2007, p. 21), "[...] é necessário um estudo que supere os limites da psicologia cognitiva realizada por Tall e Vinner".

---

[21] "[…] the exact, formal understanding of the term 'irrational number' which is missing in the entire conceptual structure".

A autora propôs o desenvolvimento da reta real na perspectiva lógico-histórica, visando à apropriação e objetivação dos conceitos teóricos dos números reais, sob os pressupostos da atividade orientadora de Moura (1996 apud Dias, 2007), que busca a compreensão do desenvolvimento humano organizado pelo meio sócio-histórico.

A referida pesquisa, na perspectiva Histórico-Cultural, utilizou a intertextualidade como meio de captar e evidenciar o movimento da imagem conceitual dos números reais. A análise situou que o pensamento numérico perpassa pelo discreto-denso-contínuo; comensurável-incomensurável; finito-infinito; cardinalidade-ordenação.

A pesquisa revelou contraposições no movimento do pensamento dos professores: análise/síntese; aparência/essência; empírico/teórico; forma/conteúdo; intuição/dedução; lógico/histórico. O trabalho realizado apontou indícios sobre as dificuldades, pelos professores, na abordagem conceitual e didática desse assunto. No processo de conscientização do modo de produção, a autora inferiu que “[...] por algumas manifestações nas discussões e avaliações, houve ao menos uma tomada de consciência desse processo” (DIAS, 2007, p. 243).

As dificuldades apontadas em Dias (2007) são preocupantes, pois as atividades foram aplicadas a professores com certa bagagem em relação aos números reais. E como se situariam as mesmas atividades perante alunos que desconhecem os números reais? Ainda, os referenciais situados seriam suficientes para trabalhar os números irracionais como saber a ser ensinado?

Os relatos de pesquisa realizada por Pinto e Tall (1996) e por Silva e Igliori (1998) com alunos do Ensino Superior, assim como o trabalho de Silva e Penteado (2010) junto a professores universitários, apresentaram resultados similares. Em particular, houve a indicação que poucos sujeitos de pesquisa conseguiram exemplificar, como número irracional, as raízes enésimas irracionais ou o número PI.

Voskoglou e Kosyvyas (2011) realizaram pesquisa com alunos do ciclo secundário, tendo como hipótese que as dificuldades intuitivas com relação ao entendimento e compreensão dos números irracionais estavam vinculadas às representações semióticas.

Um primeiro pressuposto dos autores foi que os alunos deveriam conhecer a equivalência entre as dizimas periódicas e as frações. O segundo quesito era que a definição de segmentos incomensuráveis deveria ser apresentada com grande cuidado e austeridade, a fim de evitar a incompreensão, pelos alunos, de que a operação de aproximação não corresponde a um número irracional.

A referida pesquisa, ao situar a hipótese na questão da semiótica, limitou a possibilidade de encaminhar modos alternativos para ensinar o tema dos números irracionais. Esta concepção de Voskoglou e Kosyvyas (2011) não leva em consideração que a palavra e os signos devem caminhar lado a lado para significar determinado conhecimento, conforme propõe Vygotsky (1998a,b).

Os pressupostos citados na pesquisa se distanciam de uma perspectiva realista de conhecimentos dos alunos. Deste modo, questionamos a posição do autor em considerar, como condição imprescindível, que o aluno deva dominar os conhecimentos prévios, no caso os números racionais, para acessar um novo conhecimento. Acreditamos que é possível estabelecer relações entre os novos conhecimentos e os anteriores, numa relação que permita a introdução do novo conhecimento associado à compreensão e ampliação de conhecimentos diversos e prévios.

Souto (2010) realizou pesquisa diagnóstica em livros didáticos envolvendo o tema dos números irracionais e dos números reais. O objetivo foi analisar de que modo o conceito de número irracional e de número real é organizado nos livros didáticos utilizados na escolaridade básica, no Brasil. O fundamento metodológico centrou-se na Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Duval (2003), para verificar quais registros de representação são empregados e na Teoria Antropológica do Didático, de Chevallard (1999), a fim de constatar como a organização do livro didático propõe a promoção da aquisição dos números irracionais e dos números reais.

A referida pesquisa pontuou a posição de Chevallard (1999), onde a aquisição de conhecimento (ou de toda atividade humana) é condicionada a uma vivência de organização praxeológica. Esta perspectiva considera essencial que as tarefas propostas:

> [...] nos livros didáticos valorizem não somente técnicas de solução, mas algum discurso racional que justifique e que esclareça tais técnicas, e que tal discurso racional esteja fundamentado em um discurso teórico, possibilitando assim a construção de uma organização praxiológica completa (SOUTO, 2010, p. 41).

O autor destacou que, “[...] de forma geral, nossa análise sugere que a abordagem dos livros didáticos privilegia: definições baseadas na representação decimal; tarefas envolvendo procedimentos como classificação em número racional e irracional e determinação de frações geratrizes; registros de representação simbólico-algébricos; notas históricas enfocando nomes e datas. Entretanto, tais atividades são tratadas de forma mecânica e com pouco ou nenhum aprofundamento conceitual” (SOUTO, 2010, p. ix).

Souto (2010) pontuou a elevada frequência da exposição de exemplos para justificar conceitos e propriedades, recurso principalmente utilizado na apresentação dos números irracionais, o que pode levar a uma falha de entendimento e conceitualização. Também, Souto (2010, p. 100) relatou que "[...] a praxeologia relacionada às tarefas envolvendo os números irracionais e reais é incompleta, valorizando técnicas relacionadas ao saber fazer".

Passamos agora a considerar a pesquisa de Boff (2007), que propôs a construção dos números reais pela régua decimal infinita, em atividades desenvolvidas a alunos do Ensino Fundamental e Médio, na própria sala de aula da pesquisadora. A régua decimal infinita parte da concepção da extensão do conjunto dos números racionais, utilizando a representação decimal pelo algoritmo da divisão e realizando truncamentos por aproximação, de acordo com a acurácia desejada.

Este procedimento construtivo é um método de preencher intervalos numéricos, permitindo escrever uma lista infinita e não periódica pela insuficiência dos números racionais, segundo os referenciais teóricos expressos em Ripoll (2001)[22]. A ideia é utilizar a noção de convergência de uma sequência de truncamentos numa expansão finita, seguida da representação na reta real. Leviathan (2004) considera que a régua decimal infinita alia o rigor matemático a uma apresentação construtiva e intuitiva, permitindo acessar conhecimentos prévios e introduzir novos conceitos.

Na sequência da pesquisa, a professora declarou: "Já sabemos que a diagonal de um quadrado de lado unitário não pode ser expressa por uma fração [de números inteiros]; então, como será produzida esta lista?" (BOFF, 2007, p. 169).

Os diálogos presentes na referida pesquisa, expressos como registros transcritos em forma de protocolos, não explicitaram como os alunos produziram a referida lista para o caso dos números irracionais. O texto da referida pesquisa citou que os "[...] alunos se contentaram com duas casas decimais e a seguir se manifestaram: Chega! Já entendemos" (BOFF, 2007, p. 171). Nesse momento a pesquisadora encerrou a questão.

Em termos práticos, a pesquisa de Boff (2007) revelou uma dificuldade intrínseca ao procedimento realizado. Os alunos limitaram-se à produção de uma lista finita para intentar a ideia da criação de um processo infinito. Mas, então, como aliar um processo construtivo e finito, à concepção da régua decimal infinita?

---

[22] Leviathan (2004) e Pasquini (2007) também realizaram pesquisas no mesmo enfoque.

Acreditamos que tal situação seja passível de ser abordada se forem considerados tanto o uso de recurso computacional como as experiências de pensamento[23]. O acesso a estas ferramentas pode favorecer o pensamento indutivo, o que propicia conceber ideias importantes, sem necessariamente envolver a elaborada escrita axiomática relacionada à temática, como pode ocorrer na intuição do conceito de convergência de séries.

Nesse sentido concordamos que o momento de apresentação dos números reais na "[...] escolaridade básica não deve começar com grandes ideias, mas eventualmente levará a tais ideias (séries e sequências convergentes), sendo desejável utilizar métodos de ilustração computadorizados[24] (LEVIATHAN, 2004, p. 3 p. 37, tradução nossa).

Em outra pesquisa, Silva (2011a) analisou livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, com a finalidade de ilustrar o modo como os manuais apresentam o tema dos números reais, com base nas categorias conceituação, manipulação e aplicação. A pesquisa revelou que os manuais carecem de explicações na apresentação:

> [...] dos números irracionais como o conjunto de todas as dízimas não periódicas, ou seja, todos os números que possuem representação decimal infinita e não periódica. Outra situação que evidenciamos é o pouco trabalho realizado com as representações decimais. O aspecto operacional dos números reais é pouco trabalhado, principalmente com os números decimais infinitos (SILVA, 2011b, p. 4-5).

Com base nos resultados na análise dos livros didáticos, a autora propôs atividades e analisou as imagens conceituais reveladas por alunos da 3ª série do Ensino Médio. O objetivo deste trabalho foi descrever os atributos relevantes e irrelevantes relacionados aos números racionais e irracionais, que possibilitassem a manifestação de exemplos protótipos e resultados lógico-analíticos, de acordo com Hershkowitz (1994), que, sob nossa perspectiva, se constitui em um critério essencialmente matemático.

Cada conceito possui um conjunto de atributos relevantes e de exemplos, onde "[...] os atributos críticos (ou relevantes) são aqueles que um exemplo deve ter de modo a ser um exemplo de determinado conceito. Os atributos não-críticos (ou irrelevantes) são aqueles que apenas exemplos particulares possuem" (HERSHKOWITZ, 1994, p. 68). A autora considera que as estruturas formadoras dos conceitos na Matemática podem ser constituídas por uma conjunção de atributos relevantes. Para Herskowitz (1994) é desejável que os alunos baseiem suas justificativas nos atributos críticos e superem as tendências visuais, mais propensas a equívocos nas categorizações.

---

[23] Conforme Machado (1991), o experimento mental remonta à tradição da filosofia grega e consiste em se estabelecer um raciocínio lógico envolvendo um experimento cujas conseqüências ou extrapolações podem ser ampliadas pela imaginação, mas a concretização da situação pode não ser realizável ou se efetivar.

[24] An introduction to real numbers at this early stage, should not start with 'big ideas', but should eventually lead to such ideas (convergent sequences/series); it is desirable that the method be illustrated using computerized programs.

A autora conjectura que o processo de aprendizagem dos conceitos deve se situar entre os julgamentos prototípicos e analíticos, que façam o aluno se apropriar dos atributos críticos pelos sucessivos retornos frente às tentativas realizadas.

Nas atividades desenvolvidas, os alunos apresentaram dificuldade “[...] na identificação de números racionais e irracionais e na elaboração de suas justificativas, nem sempre em consonância com a classificação” (SILVA, 2011b, p. 17).

Herskowitz (1994) descreveu um possível caminho para a abordagem das noções de incomensurabilidade e completude dos números reais. A autora aponta o algoritmo da divisão como mecanismo “[...] disparador para enunciar e compreender resultados importantes sobre frações” (SILVA, 2011a, p. 139). A proposta da autora consiste em definir o sistema de números reais como a totalidade das decimais infinitas: as decimais finitas são um caso especial onde a partir de certa casa os dígitos são representados por zero. Com isto, Herskowitz (1994) espera incrementar o repertório de exemplos positivos e negativos relacionados aos números racionais e irracionais.

Outro enfoque citado é a necessidade da exploração das noções de densidade e infinitude, em “[...] atividades que possibilitem o surgimento de processos que envolvam a passagem ao infinito, principalmente fazendo uso das sequências infinitas e convergentes e as divisões de números inteiros que gerem as dizimam periódicas” (SILVA, 2011a, p. 279).

Em síntese, algumas pesquisas diagnosticaram as dificuldades e concepções de alunos secundaristas, graduandos em exatas, licenciandos e professores de matemática de ensino básico, enfim, sujeitos de pesquisa que, apesar da variação em grau, de certo modo já possuíam algum conhecimento em relação aos números reais. Os resultados expressos destas pesquisas confirmaram que naturalmente estes sujeitos possuem dificuldades em representar ou expressar concepção a respeito dos números irracionais.

Em relação às demais pesquisas que analisavam o material didático destinado ao ensino básico, os resultados evidenciaram alguns elementos que contribuem, em maior ou menor medida, para dificultar a aprendizagem. Ainda, os autores apontaram algumas estratégias locais, com base nos referenciais propostos, para encaminhar soluções.

De modo geral, tais propostas contribuem para fomentar discussões, incentivar a busca de ideias e apresentar sugestões locais de encaminhamento e alternativas que certamente colaboram com o ensino de tal tema. Porém, as ponderações expressas nas análises realizadas pelos respectivos autores não convergem para um quadro mais amplo que considere uma perspectiva global para o ensino deste tema em sala de aula.

A revisão realizada compôs um quadro situando esta investigação no contexto da Teoria dos Números, considerando que os números irracionais e os números reais representam ideias matemáticas fundamentais, o que remete a necessidade de discussões em torno dos modos de abordagem e tratamento destes temas no ensino básico.

Consideramos aqui a perspectiva de Bruner (1987), que entende por ideia fundamental aquela que possui ampla e poderosa aplicabilidade, permitindo tornar a disciplina mais compreensível, favorecendo a transferência de aprendizagem, diminuindo a distância entre o conhecimento avançado e o conhecimento elementar, o que possibilita a reconstituição de caminhos e pormenores, na eventualidade da necessidade ou da viabilização da construção do conhecimento.

Inspirados ainda em Bruner (1987), este trabalho teve como prerrogativa a existência de uma abordagem significativa dos números irracionais, como conhecimento a ser ensinado na Matemática da escolaridade básica, do ponto de vista epistemológico.

A referência ao campo da epistemologia se faz perante a exploração da relação dialética presente no campo dos números irracionais com os números reais, pela possibilidade de explicitar as conexões que permeiam os pólos discreto/contínuo; exato/aproximado; finito/infinito, pilares que constituem ideias fundamentais que podem transcender os aspectos técnicos ainda presentes nos vários anos do atual ensino da Matemática Elementar.

De modo geral, vale destacar que desde o fim do século XIX até os dias de hoje o processo de educação "[...] afastou-se da ênfase na compreensão geral para a ênfase na aquisição de habilidades específicas" (BRUNER, 1987, p. 5).

Diante do quadro retratado, como opção inicial de investigação dirigimos o olhar para um aspecto fundamental referente ao recurso e ao modo como se situa o tema dos números irracionais no ensino básico: o livro didático.

O livro didático é uma fonte muito utilizada para nortear o trabalho em sala de aula. Acreditamos que a observação no modo como o discurso presente nos manuais é veiculado para efetivar o encaminhamento para introduzir e desenvolver o tema dos números irracionais se constituiu em um possível recurso para situar referenciais didáticos e epistemológicos que permitam encaminhar tal problemática.

As respostas advindas da análise inicial dos manuais escolares, proposta nesta pesquisa, tiveram a intenção de verificar se havia necessidade de discutir e encaminhar aportes teóricos para a efetivação de tratamento frente aos entraves apontados.

A análise dos manuais escolares verificou que ainda se encontra presente, no ensino básico, a concepção recorrente em se privilegiar e destacar aspectos associados ao finito e ao exato, ocultando os complementares: o infinito e valor aproximado.

A discussão das tensões inerentes aos pares finito/infinito e exato/aproximado, com as naturais implicações permitiu um enfoque enriquecedor, que utilizamos para administrar a complexidade da temática dos números irracionais no ciclo básico.

Esta pesquisa permeou o desenvolvimento histórico viabilizado pela construção do conhecimento matemático envolvendo os números reais. Esta opção possibilitou entender os condicionantes matemáticos envolvidos, sistematizar as conexões com a didática do ensino básico e esclarecer as possibilidades de abordagem deste tema.

Pelas considerações tecidas, foram encaminhados aspectos epistemológicos envolvendo os números reais que o caracterizaram como 'tema mapeador', pela possibilidade de estabelecer relações internas aos temas presentes no currículo vigente de Matemática, através da concepção da metáfora do conhecimento como rede, conforme Machado (1995). Tal enfoque, proposto como referência norteadora de ações, visou realçar os significados e enriquecer os conhecimentos matemáticos, que permite uma relação ensino e aprendizagem mais articulada e abrangente.

A via de abordagem visou compreender e situar os significados do conceito de número irracional, através dos eixos constitutivos do conjunto dos números reais, conflitantes por natureza, porém complementares e passíveis de interagir, representados pelos pares: finito/infinito; exato/aproximado; discreto/contínuo.

As relações de tensão e interação entre estes eixos situaram um 'espaço de significações' como um campo que permite o entendimento, a orientação e a viabilização de uma abordagem mais abrangente e significativa dos números irracionais na Matemática Elementar, assunto discutido no decorrer deste texto.

Um foco complementar deste trabalho foi fornecer elementos teóricos que possam contribuir para as aulas de Matemática de ensino básico, constituindo-se em ação para esclarecer o importante papel dos números irracionais e dos números reais para alicerçar ideias fundamentais desta disciplina.

A possibilidade de ilustrar algumas ideias em atividades situando alguns números irracionais mais destacados se constituiu em possível ação que possibilita a compreensão dos significados relativos à questão da aproximação e as relações com um processo infinito, conceitos inerentes ao tema dos números reais.

Os Objetivos e as questões da pesquisa

Em face das ponderações tecidas nesta pesquisa, destacando as limitações dos aspectos operatórios, determinísticos e exatos para a apresentação dos números irracionais, nossa hipótese se situa em Bruner (1987), que considera viável a abordagem de qualquer ideia fundamental da matemática nesta faixa de ensino, desde que respeitadas certas condições.

Consideramos que as mútuas conexões presentes na epistemologia do tema dos números reais - os pares discreto/contínuo; exato/aproximado; finito/infinito - se constituem em elementos necessários, essenciais e fundamentais para ampliar o leque de possibilidades de abordar de modo significativo os números irracionais no ensino básico.

Diante dos pressupostos apontados, o presente estudo teve por objetivos:

(a) mapear nos livros didáticos o discurso de apresentação e desenvolvimento dos números irracionais no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio;

(b) compreender os requisitos conceituais necessários e propor um referencial teórico que permita organizar e orientar a apresentação e o desenvolvimento significativo do tema dos números irracionais no ciclo básico;

(c) elaborar situações de ensino que possibilitem ilustrar meios de viabilizar e explorar os aportes teóricos propostos como recurso norteador da apresentação significativa dos números irracionais em sala de aula.

As ponderações feitas embasam as seguintes questões:

(a) Considerando-se como fonte o livro didático, como são apresentados do ponto de vista didático e epistemológico alguns temas envolvendo os números irracionais no ensino básico?

(b) Considerando-se aspectos didáticos, históricos e epistemológicos, quais referenciais teóricos são necessários e suficientes para introduzir e desenvolver de modo significativo os números irracionais no ciclo básico?

(c) Se e como é possível utilizar os aportes propostos em situações de aprendizagem, adequadas à faixa etária dos alunos do Ensino Fundamental e Médio?

Apresentados os argumentos, o presente texto foi organizado em três capítulos.

No Capítulo 1 foi idealizada uma pesquisa diagnóstica em uma amostra de quatro coleções de livros didáticos de Matemática, para observar e analisar, se e como são introduzidos e desenvolvidos, em termos didáticos e epistemológicos, alguns temas essenciais envolvendo os números irracionais, nesta faixa de ensino.

No Capítulo 2 situamos a importância e as várias acepções do ato de significar, nos reportando a Vygotsky (1998b), que considera a formação de conceitos como um ato autêntico do pensamento, direcionando a atividade cognitiva para o uso da linguagem. Os aportes teóricos escolhidos situam aspectos históricos, epistemológicos e didáticos, de modo a delimitar as possíveis e necessárias abordagens no ensino básico. Tal encaminhamento recaiu na descrição, discussão e análise dos fundamentos teóricos dos eixos constitutivos dos números reais, representados pelos pares: discreto/contínuo; exato/aproximado; finito/infinito, explicitados em Machado (2009). O referencial norteador permitiu compor um 'espaço de significações', um campo que se caracteriza pela presença, impregnação e organização dos eixos norteadores discreto/contínuo; exato/aproximado/estimado e finito/infinito, cujas mútuas interações viabilizam e norteiam diversos caminhos para a tecitura de significados aos números irracionais. Isto traz implicações favoráveis ao atual ensino de Matemática, quando constatamos, no Capítulo 1, o aspecto unidirecional, separatista e fracionado em relação a somente um dos pólos do par empírico&teórico. A interação dialética inerente ao 'espaço de significações' expôs relações internas à própria Matemática, o que revaloriza assuntos presentes no atual currículo, favorecendo a atualização curricular pela discussão de temas geralmente abordados somente no Ensino Superior, mas que, com a devida escala, podem ser mapeados e trazidos para o ciclo básico, numa transposição didática adequada que permite a articulação de ideias matemáticas significativas.

No Capítulo 3 ilustramos as contribuições teóricas discutidas anteriormente, através de propostas de situações de ensino, abrangendo tanto o Ensino Fundamental II como o Ensino Médio. A ação teve como foco realçar as relações de complementaridade entre os Universos dos Números Racionais e os Números Irracionais, pela exploração das conexões entre os conhecimentos envolvidos na elaboração histórica do número PI, do número de Euler e do número de ouro, compondo uma rede de significados, conforme Machado (1995), a qual permite estabelecer relações entre os temas presentes no currículo da escola básica. Após a exposição dessas situações, acrescentamos uma possibilidade de atualizar o currículo, pela abordagem das Frações Contínuas, como um possível tema extensivo e enriquecedor à rede de relações intramatemáticas e interdisciplinares, de modo a ampliar o leque de possibilidades de significar os números irracionais.

Por último, apresentamos as conclusões deste trabalho, baseadas nas deliberações anteriores, permitindo então desenvolver reflexões e levantar questões, ponderações e implicações para futuras pesquisas nesta área de estudo.

CAPÍTULO 1

Os Números Irracionais e o Livro Didático

CAPÍTULO 1: Os Números Irracionais e o Livro Didático

Diante das dificuldades e obstáculos apontados na apresentação, com relação ao ensino dos números irracionais, na perspectiva de conhecimento a ser ensinado na escola básica, neste capítulo dirigimos a atenção para o recurso típico que representa o modo como se situa o tema: o livro didático.

De modo geral, é consenso que no material destinado ao ensino de Matemática há predominância da concepção dos números como ferramenta operatória para cálculos de natureza aritmética e em manipulações de expressões algébricas. Tal quadro representa uma simplificação, visto que o:

> [...] ensino dos números e das operações na educação básica não deve visar a aquisição de um conjunto de técnicas rotineiras, mas, sim, uma aprendizagem significativa ligada a uma compreensão relacional das propriedades dos números e das operações. Não basta aprender procedimentos, é necessário transformá-los em instrumentos de pensamento (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999, p. 47 apud COELHO, 2005, p.29).

Especificamente em relação à apresentação e desenvolvimento dos números irracionais e dos números reais, inicialmente apontamos alguns resultados obtidos nas pesquisas diagnósticas realizadas por Santos, J. (2007), Boff (2007), Souto (2010), Silva (2011a), em livros didáticos, que reforçam o quadro acima exposto e ainda destacam algumas particularidades.

Ao analisar a abordagem dos números reais nos livros didáticos, Santos, J. (2007) observou que a apresentação geralmente é realizada com enfoque algébrico. Em particular, a autora relata que os números racionais são abordados por dois modos: $Q_1 = \{x/\ x=a/b,\ a,b \in Z,\ b\neq 0\}$ ou $Q_2 = \{x/$ x é um número decimal exato ou x é dízima periódica$\}$, sendo que poucos livros mostram a equivalência entre essas duas formas. Quanto aos números irracionais ocorre um cenário idêntico: ou são apresentados por situações que podem ser representadas pela forma $I_1 = \{x/$ x não é da forma $a/b,\ a,b\in Z,\ b\neq 0\}$ ou como $I_2 = \{x/$ x é um número decimal infinito que não é dízima periódica$\}$. As pesquisas revelaram livros que sequer mencionam a existência dos números irracionais, posição dos autores de livros didáticos analisados que discordamos.

Esta exposição predominante nos livros didáticos confirmou a expectativa que “[...] a interface entre a representação decimal de um número irracional e sua representação geométrica não é realizada em momento algum do ensino de Matemática. Ao contrário, pode-se dizer que no processo didático coexistem duas definições de número irracional” (REZENDE, W., 2003, p. 331).

Em outra busca, Boff (2007) objetivou identificar e descrever todos os momentos em que são apresentados os números irracionais nos livros didáticos do Ensino Fundamental II e Médio, além de efetuar uma comparação frente às recomendações expressas nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

A autora transcreveu minuciosamente o conteúdo relativo aos números reais, presente nos manuais. Na pesquisa de Boff (2007), a metodologia consistiu na comparação do material presente nos livros didáticos com os Parâmetros Curriculares Nacionais baseando-se no conhecimento matemático envolvendo tópicos dos números reais, que a autora expôs na revisão bibliográfica.

Nos livros didáticos da citada pesquisa foram verificados dois aspectos essenciais: o "[...] número irracional definido como sendo um número cuja representação decimal é infinita e não-periódica" (BOFF, 2007, p. 52) e "[...] o exemplo $\sqrt{2}$ apresentado sem a demonstração de sua irracionalidade sendo, portanto, induzido que sua expansão decimal seja a descrita na definição" (BOFF, 2007, p. 52). Como conclusão final a autora relatou que muitos deles não atingem as mínimas recomendações expressas nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

A referida pesquisa acrescentou a análise de um livro europeu, equivalente ao 9º ano do Ensino Fundamental, no Brasil. Na descrição, destacaram-se algumas atividades onde os números reais são "[...] determinados por expansões decimais, sequência de intervalos encaixantes e pontos na reta numerada" (BOFF, 2007, p. 98), relato que expõe uma diferença significativa com relação às diversas propostas brasileiras.

O livro europeu propõe localizar o número $\sqrt{2}$ na reta real por intervalos de aproximação, para um dado intervalo [a, b], utilizando calculadora e expondo diversos intervalos encaixantes. A partir daí o manual define que tal sequência de intervalos:

> [...] é denominada seqüência de intervalos encaixantes, quando os comprimentos de intervalo se tornam *arbitrariamente pequenos*. Por arbitrariamente pequenos queremos aqui significar que, para cada número positivo tão pequeno quanto queiramos, existe, na seqüência um intervalo de comprimento menor do que este número. Podemos, então, garantir que para toda seqüência de intervalos encaixantes sempre existe exatamente um número que pertence a todos estes intervalos (apud BOFF, 2007, p.91-92).

Outra contribuição é o algoritmo de Heron, de aproximações sucessivas. O manual retoma $\sqrt{2}$, de modo a delimitar intervalos encaixantes para este número irracional notável. Após o trajeto acima delineado, o livro introduz a definição de número irracional, expondo que "[...] podemos associar a $\sqrt{2}$, através de uma sequência de intervalos encaixantes, uma lista decimal não-periódica" (apud BOFF, 2007, p. 97).

Deste exemplo particular e pelo uso de intervalos encaixantes, o livro didático europeu define números irracionais como aqueles que "[...] podem ser representados por expansões decimais infinitas não-periódicas" (apud BOFF, 2007, p. 98).

As propostas apresentadas pelo texto europeu trazem algumas contribuições na questão da aproximação de irracionais por meio de números racionais, conforme apontamos. Porém, Boff (2007) salienta que a abordagem proposta pelo livro já pressupõe o conhecimento prévio de $\sqrt{2}$ como um número irracional, além da utilização prototípica deste caso particular. A apresentação unidirecional dos números irracionais no manual europeu, por meio de raízes quadradas, restringe uma caracterização mais ampla, limitando o repertório de significação deste conhecimento, algo que buscamos ampliar no estudo epistemológico dos números reais, no próximo capítulo.

É importante se discutir a questão da aproximação no ensino básico, podendo constituir poderoso meio de abordar os números irracionais, além de permitir esclarecer as conexões com os números racionais. Com exceção do livro europeu, apontado em Boff (2007), o tema da aproximação tem desenvolvimento limitado ou simplesmente não ocorre, conforme os relatos presentes nas pesquisas anteriormente citadas.

A seguir, retomamos a pesquisa de Souto (2010), que analisou a estrutura de organização do livro didático com base na tipologia de Chevallard (1999), metodologia que se embasa em critérios matemáticos. O autor constatou elevada frequência na exposição de exemplos para justificar conceitos e propriedades. Este recurso, principalmente utilizado na apresentação dos números irracionais, pode levar a uma falha de entendimento e de conceitualização. Souto (2010) apontou que "[...] a praxeologia relacionada às tarefas envolvendo os números irracionais e reais é incompleta, valorizando técnicas relacionadas ao saber-fazer" (p. 100).

Os resultados apontados por Souto (2010), com relação à falta de um discurso racional e tecnológico que justifique e esclareça técnicas, procedimentos e propriedades, se centra no conhecimento matemático já estabelecido. Porém, ponderamos que para prover meios de tratar os números irracionais na escolaridade básica devem ser concebidos referenciais situados num ponto de vista teórico, que leve em consideração tanto o discurso presente na construção epistemológica do conhecimento matemático, quanto em aportes didáticos de ensino e de aprendizagem.

Em outra pesquisa envolvendo livros didáticos de Matemática, Silva (2011a) observou que há uma deficiência de explicações na apresentação dos números irracionais, de modo similar as outras pesquisas já citadas.

A referida autora observou que nos livros didáticos há predominância de valores prototípicos como $\sqrt{2}, \sqrt{3}\ e\ \pi$, geralmente abordados de modo sistematizado, reduzindo o repertório de exemplos, o que limita o entendimento deste tópico por alunos secundaristas.

Outro ponto a destacar é a tentativa de prover explicações ou introduzir conceitualmente os números irracionais à moda dos números racionais, ou seja, tomando como referência aspectos pragmáticos. Um exemplo disto foi "[...] a caracterização do número irracional π a partir de experiências relacionando o comprimento da circunferência de um objeto com seu diâmetro. Cabe ressaltar que esta abordagem, se não for tomado o devido cuidado, pode reforçar a atitude de identificar o número π com uma de suas aproximações" (SANTOS, J., 2007, p. 63).

Santos, J. (2007) destacou, nos livros analisados, a predominância do raciocínio circular na definição dos números reais. Nestas situações, a autora observou que o conjunto dos números reais fica caracterizado pela união dos conjuntos dos números irracionais e o conjunto dos números racionais. Mas, nos manuais didáticos, muitas vezes os números irracionais são apresentados como os números reais que não são racionais. Este modo de apresentação cria o problema da circularidade.

Dos resultados da pesquisa dos livros didáticos, Silva (2011a) destaca que os percursos expostos são cristalizados, não favorecendo a exploração de noções de densidade, incomensurabilidade, infinitude e completude dos números reais. Resultado similar também foi apontado por Santos, J. (2007).

Rezende, W. (2003) sintetiza a posição observada pelas autoras citadas descrevendo que o universo numérico dos nossos estudantes se restringe apenas aos números racionais acrescido de um conjunto enumerável de pouquíssimos números irracionais notáveis.

As pesquisas diagnósticas citadas descreveram os elementos matemáticos envolvendo o tema dos números irracionais no ciclo básico, revelando que os conteúdos estão expostos de forma simplificada. As análises e conclusões de tais trabalhos não permitem situar um quadro geral e indicativo que possa compor um referencial didático para tratar tal temática no ensino básico de forma globalizada. Nessa perspectiva, o presente capítulo relatou uma busca, em livros didáticos, a fim de verificar se e como são introduzidos e encaminhados alguns temas essenciais dos números irracionais no ensino básico.

As escolhas iniciais para a investigação nos livros didáticos

O livro didático está vinculado à questão do ensino e da Educação Matemática. No Brasil, o livro didático é um material de frequente adoção e assim, representa um objeto de influência considerável no processo de ensino e de aprendizagem.

O livro didático de Matemática, de modo geral, veicula um discurso pela exposição de definições, conceitos, propriedades, argumentos, provas, justificativas, atrelados a exemplos e tarefas de verificação dos conteúdos apresentados, geralmente em forma de exercícios[25]. A forma de abordagem usual encontrada nos livros didáticos raramente consegue escapar da apresentação convencional, que:

> [...] distingue com nitidez o momento da teoria do momento dos exercícios de aplicação; estes, por sua vez, quase sempre se limitam a problemas estereotipados, onde também se distingue com nitidez os dados — sempre os necessários e suficientes para a resolução — dos pedidos a serem determinados com a utilização dos dados. Tanto o momento da formulação do problema, a partir de uma situação concreta onde a questão a ser respondida ainda não está nitidamente formulada, quanto a etapa do reconhecimento dos dados que serão necessários para a resposta a tal questão costumam ser subestimados e simplificados excessivamente, fornecendo-se o problema pronto, bem formulado — às vezes, até equacionado —, carecendo apenas da aplicação da 'teoria' aprendida (MACHADO, 1996, p. 35-36).

Em princípio, os temas ou assuntos apresentados no livro didático são expostos de forma sequenciada, geralmente delimitada e indicada em currículos, documentos e orientações, ligados a algum órgão oficial. Os assuntos constantes dos manuais são influenciados ou algumas vezes até definidos por uma comunidade constituída de instituições reguladoras (geralmente governamentais), editores, autores e pesquisadores, constituindo saberes a serem ensinados. E nesta ação:

> [...] pedagógica de transformar o saber científico em saber ensinado, o principal apoio do professor é o livro didático, pois, entre outros aspectos, de maneira geral, estes apresentam, de forma mais ou menos organizada, aquilo que foram definidos como saberes a serem ensinados (COSTA, J., 2008, p. 17).

Estas características têm como consequência uma institucionalização generalizada do livro didático como principal, se não o único, instrumento a disposição do educador para estruturar a ação pedagógica em sala de aula[26].

---

[25] Observamos tal posição em Echeverría e Pozo (1998), que consideram exercício como a atividade que utiliza recursos, procedimentos e conhecimentos para obter uma resposta imediata. De modo diverso, um verdadeiro problema, para os autores, representa uma situação nova, diferente, difícil ou surpreendente, um verdadeiro obstáculo entre a proposição e a solução, não existindo um caminho rápido e direto que permita a solução.

[26] Perante essa realidade, Machado (1996) pontua que "(...) o livro didático precisa ter seu papel redimensionado, diminuindo-se sua importância relativamente a outros instrumentos didáticos, como o caderno, seu par complementar, e outros materiais, de um amplo espectro que inclui textos paradidáticos, não-didáticos, jornais, revistas, redes informacionais, dentre outros" (p. 32).

Deste modo, a realidade é que para muitos professores:

> [...] os livros didáticos se converteram de recursos auxiliares para o ensino, em quase que determinantes da prática pedagógica em sala de aula. Daí tamanha a importância da análise do livro didático, pois este determina tanto os saberes a serem ensinados, como a maneira pela qual devem ser ensinados (COSTA, J., 2008, p. 31).

Por constituir uma referência frequentemente presente em sala de aula, Barufi (1999) aponta que este recurso se configura atualmente como uma espécie de porto seguro, onde o professor ancora o curso evitando desvios de rotas**.**

A posição frequente em fundamentar no livro didático os conteúdos e a forma de ensiná-los indica importante perda de oportunidade e de privilégio do professor e da comunidade educacional em projetar os caminhos:

> [...] a serem trilhados, em consonância com as circunstâncias — experiências, interesses, perspectivas — de seus alunos, passando a conformar-se, mais ou menos acriticamente, com o encadeamento de temas propostos pelo livro didático. Tal encadeamento ora tem características idiossincráticas, ora resulta da cristalização de certos percursos, que de tanto serem repetidos, adquirem certa aparência de necessidade lógica (MACHADO, 1996, p. 31).

Baruffi (1999) acrescenta que um texto como o livro didático deveria prover uma negociação de significados através de problemas e situações motivadoras, de modo a instigar o desenvolvimento de ideias gerais, contrariamente aos livros que se prendem a uma sequenciação lógica e formal.

Apesar dos problemas apontados, o livro didático é um recurso de trabalho comum e frequente para o conhecimento matemático a ser abordado em sala de aula. Diante da referência que "[...] o livro didático não representa efetivamente o universo da sala de aula, mas é, com efeito, uma boa aproximação para ela" (SANTOS, J., 2007, p. 10), este tipo de material configura uma realidade e um fenômeno a ser considerado e pesquisado, constituindo assim importante meio para se observar como os saberes são apresentados e desenvolvidos no ensino básico.

Conforme expõem Lüdke e André (1986), a análise de documentos, como o livro didático de ensino básico, permite uma valiosa abordagem de dados num viés qualitativo, revelando aspectos de um tema. Os autores ponderam serem os documentos uma fonte natural estável para retirar evidências, confirmar hipóteses de pesquisa, além de fornecer indícios de situações que poderiam ser exploradas por outras perspectivas.

A investigação proposta neste capítulo situou-se na visão qualitativa de pesquisa, na forma de uma descrição e na análise didática de alguns temas matemáticos relacionados aos números irracionais, presentes em alguns livros didáticos de ensino básico, considerando-se o potencial desses para o desenvolvimento de ideias fundamentais da Matemática.

No Brasil, em face da existência de diversas coleções de livros didáticos de Matemática para o ciclo básico, consideramos como critérios para a seleção: a relação de livros aprovados pelo PNLD e PNLEM; autores com grande tempo no mercado editorial; autores que apresentam formação e interesse em pesquisa acadêmica; livros com grande veiculação em nível nacional.

Dentre as opções de livros didáticos que obedecem aos critérios acima, decidimos então, escolher uma amostra prototípica, representativa das possíveis abordagens dos tópicos delineados. Quanto ao item quantidade, uma amostra satisfatória consistiria em duas coleções de Ensino Fundamental II e duas coleções de Ensino Médio indicados pelo PNLD e PNLEM, a fim de verificar o modo como são introduzidos e desenvolvidos os números irracionais, do ponto de vista do conhecimento matemático e das escolhas realizadas pelas coleções para a abordagem didática nesta faixa de ensino.

Quanto aos livros do Ensino Fundamental II, a primeira opção foi a **coleção A**: Matemática para todos. Luis Marcio Imenes; Marcelo Lellis. 3. ed. São Paulo: Editora Scipione, PNLD 2008-2010. Os autores são membros da comunidade de educadores matemáticos e pesquisadores, costumeiramente apresentando inovações no segmento de livros didáticos.

A segunda escolha recaiu na **coleção B**: Matemática. Fazendo a Diferença. José Roberto Bonjorno; Regina Azenha Bonjorno; Ayrton Olivares. São Paulo: Editora FTD, PNLD 2008. Os autores são professores de tradição no ensino da Matemática e atuantes no ramo de publicação de livros didáticos.

No Ensino Médio, a referência foi a **coleção C**: Matemática. Katia Smole; Maria Inês Diniz. Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Editora Saraiva, PNLEM 2006-2008. A opção pela coleção levou em consideração a formação e experiência acadêmica das autoras, como também as contribuições em formação de professores, material didático e assessorias na área da Educação Matemática.

A outra opção com relação ao Ensino Médio incidiu na **coleção D:** Matemática Completa. José Ruy Giovanni; José Roberto Bonjorno. 2. ed. São Paulo: Editora FTD. PNLEM 2009. Os autores têm grande tradição no ramo de publicação de livros didáticos e no ensino de Matemática.

Para uma análise complementar, optamos por uma **coleção extra**: Fundamentos da Matemática Elementar. Gelson Iezzi et al. 10 volumes, São Paulo: Editora Atual, 2006. A coleção extra, composta por 10 volumes, serve como apoio ao professor e alunos que almejam um aprimoramento no conhecimento da Matemática Elementar.

O critério de inclusão da coleção extra foi o de análise complementar, pautado na possibilidade de busca em material considerado, por muitos colegas, de completude, no quesito conhecimento, ao apresentar tópicos de Matemática Elementar de modo mais rigoroso e amplo, em relação às coleções usuais. A escolha desta coleção proporcionou outra fonte para a busca de resposta às questões levantadas, sob um ponto de vista do conhecimento matemático mais formal.

Vale salientar que não pretendemos uma avaliação da qualidade do livro didático. Antes, a intenção foi lançar um olhar nas coleções escolhidas, que permitiu verificar, em termos descritivos e analíticos, se e como alguns temas essenciais referentes aos números irracionais são apresentados e desenvolvidos nos manuais escolares do ensino básico, sob o ponto de vista didático.

Com o objetivo de tecer uma panorâmica do tratamento dos números irracionais no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio, nos dispusemos a observar, nas coleções de Matemática descritas para análise, se e como são apresentados, em termos didáticos, três temas que consideramos relevantes para esta área do conhecimento, nesta faixa de ensino:

Tema A: O surgimento das raízes enésimas irracionais.

Tema B: O número PI, o número de Euler e o número de ouro.

Tema C: Aspectos essenciais do conhecimento matemático relacionados aos Números Irracionais.

A pesquisa teve como hipótese a apresentação simplificada desses três temas nos manuais didáticos, temas estes cuja viabilização didática é fundamental para a significação dos números irracionais. A análise dos resultados dos discursos expostos nos livros didáticos permitiu constituir hipóteses e encaminhar referenciais frente à problemática apontada na apresentação.

O referencial de análise dos Livros Didáticos: os 'núcleos de significação'.

Para a análise dos três temas elencados acima foram constituídos 'núcleos de significação', um referencial metodológico descrito em Aguiar e Ozella (2006). Esse modo de investigação se pauta em pesquisa qualitativa, usual na área da psicologia, voltada para a análise dos modos de manifestação dos sujeitos. Neste tipo de pesquisa os 'núcleos de significação' representam um modo de apreender os temas, conteúdos ou questões centrais expressas pelas falas e manifestação do discurso do sujeito.

A metodologia tem como aporte a Psicologia Sócio-Histórica, e tem como objeto de estudo "[...] os procedimentos de análise de material qualitativo, visando apreender os sentidos que constituem o conteúdo do discurso dos sujeitos informantes" (AGUIAR; OZELLA, 2006, p.1).

Optamos por uma adaptação desta metodologia, considerando essa abordagem como possível recurso de analisar o texto escrito objetivado nos registros do livro didático, manifestados nos modos de exposição de conteúdos e propostas de encaminhamento didático presentes no decorrer da obra.

Com base em Bakhtin (1986), o discurso contido no livro didático pode ser analisado, pois o livro veicula um modo de fala que utiliza o registro escrito e tem um sentido importante pelo fato de ser um meio concebido a partir de discursos sócio-históricos. Assim sendo, o livro, como um "[...] ato de fala impresso, constitui igualmente um elemento da comunicação verbal. Ele é objeto de discussões ativas sob a forma de diálogo" (BAKHTIN, 1986, p. 123).

O ponto chave para apreender o sentido do discurso do sujeito, em relação à metodologia apontada em Aguiar e Ozella (2006), provém dos 'núcleos de significação'. O referencial teórico deste tipo de pesquisa se encontra em Vygotsky (1998a;b). Para este autor, a essência reveladora do discurso do sujeito se encontra na palavra, que, inserida no contexto, pode alcançar significado.

> Consideramos que a palavra com significado seja a primeira unidade que se destaca no momento empírico da pesquisa. Partimos dela sem a intenção de fazer mera análise das construções narrativas, mas com a intenção de fazer uma análise do sujeito. Assim, temos que partir das palavras inseridas no contexto que lhes atribui significado, entendendo aqui como contexto desde a narrativa do sujeito até as condições sócio-históricas que o constituem (AGUIAR; OZELLA, 2006, p. 5).

A pesquisa com os ‘núcleos de significação’ fazem parte de um processo construtivo/interpretativo, e devem ser elaborados a partir de pré-indicadores que expressem os pontos centrais e fundamentais da apresentação das manifestações dos sujeitos. Os pré-indicadores são levantados, na pesquisa empírica, a partir:

> [...] de temas os mais diversos, caracterizados por maior freqüência (pela sua repetição ou reiteração), pela importância enfatizada nas falas dos informantes, pela carga emocional presente, pelas ambivalências ou contradições, pelas insinuações não concretizadas, etc. Geralmente, esses pré-indicadores são em grande número e irão compor um quadro amplo de possibilidades para a organização dos núcleos. Um critério básico para filtrar esses pré-indicadores é verificar sua importância para a compreensão do objetivo da investigação (AGUIAR; OZELLA, 2006, p. 5).

Em síntese, os autores ponderam que a escolha dos pré-indicadores ocorre pela similaridade, complementaridade ou contraposição das manifestações nos discursos, de modo a promover uma menor diversidade na quantidade de ‘núcleos de significação’.

Através do processo de aglutinação, este tipo de pesquisa busca gerar um conjunto de ideias denominados indicadores. Os critérios para aglutinação não são necessariamente isolados entre si. Podem ocorrer situações onde alguns indicadores podem ser complementares pela semelhança, do mesmo modo que pela contraposição. Considerando-se um fato que esteja identificado como:

> [...] pré-indicador, ao ser aglutinado, pode indicar o caráter impulsionador/motivador para ação em uma determinada condição. Inversamente, o mesmo fato pode funcionar como paralisador da ação em outro momento, mas ambos podem ser indicadores importantes no processo de análise (AGUIAR; OZELLA, 2006, p.6).

Aguiar e Ozella (2006) explicam que o processo de aglutinação tem suporte em Vygotsky (1998b), que destaca aspectos semânticos da fala interior. Para Vygotsky (1998a apud Aguiar; Ozella, 2006), quando diversas palavras são fundidas e aglutinadas, a nova palavra ou a combinação destas, além de expressar certa complexidade, também designa os diversos elementos isolados contidos nessa ideia.

A identificação dos indicadores é o passo decisivo que permite sintetizar os possíveis ‘núcleos de significação’. A etapa de organização e síntese dos ‘núcleos de significação’ é um processo complexo, que tem como critério os indicadores, considerados neste tipo de pesquisa como os elementos “[...] fundamentais para que identifiquemos os conteúdos e sua mútua articulação de modo a revelar e objetivar a essência dos conteúdos expressos pelo sujeito” (AGUIAR; OZELLA, 2006, p.8).

Para Aguiar (2002), a nomeação dos ‘núcleos de significação’ revela um momento de análise e interpretação, pois parte de uma organização dos conteúdos expressos pelos sujeitos e busca-se apreender os motivos, as necessidades e as determinações constituintes de tal forma de expressão.

Os ‘núcleos de significação’ devem possibilitar uma análise consistente, devendo ir além do mais elementar, do mais trivial, do aparente, permitindo considerar as condições objetivas, as subjetivas, as contextuais e as históricas.

A proposta deste modo de análise solicita um número reduzido de núcleos, que devem expressar os pontos centrais e fundamentais, para que não ocorra diluição das expressões dos sujeitos, permitindo um agrupamento das condições essenciais dessas expressões.

Para compor os ‘núcleos de significação’ devem ser considerados temas, conteúdos ou questões centrais explicitamente presentes ou simplesmente subentendidas no discurso do sujeito, menos pela frequência:

> [...] e mais por serem aqueles que motivam, geram emoções e envolvimento. Há também a possibilidade de criar um núcleo, por meio de outro critério: mesmo que alguma questão não tenha sido apresentada pelo sujeito como importante, mesmo que pouco apareça no discurso, o pesquisador pode avaliar que tal questão deveria ser destacada para ser analisada como núcleo, por acreditar que se constitui num aspecto fundamental para a compreensão da questão a ser pesquisada (AGUIAR, 2002, p. 135-136).

Aguiar (2002) pondera que a composição de diversos ‘núcleos de significação’ representa um modo de apresentar os vários aspectos presentes em uma dada realidade a se estudar. Este tipo de formação pode, à primeira vista, aparentar certa configuração linear e privada de conexões.

No entanto, a autora defende que a constituição de diversos ‘núcleos de significação’ é somente uma divisão didática. Dentro de uma perspectiva metafórica, os núcleos seriam como as peças de um dominó, que permitem ser colocadas em diferentes posições, de acordo com o andamento e as necessidades do jogo, ao invés de se ajustarem a uma única localização ou determinado encadeamento.

> Tais núcleos jamais poderiam ser analisados separados uns dos outros. Ao criar os núcleos, temos o objetivo de organizar nossos dados, de preparar a análise, de nos apropriar dos conteúdos expressos pelos sujeitos, sem fragmentar o discurso, sem romper ou ignorar a articulação das falas apresentadas. Sabemos que nada é isolado, que isolar um fato e conservá-lo no isolamento é privá-lo de sentido. Portanto, para compreender nosso objeto, que só pode ser visto como processo, devemos considerá-lo no conjunto de suas relações. Assim, separamos os ‘núcleos de significação’ para em seguida reintegrá-los no seu movimento para, aí sim, apreendê-los de forma mais global e profunda (AGUIAR, 2002, p.137).

Assim, Aguiar (2002) destaca que deve haver entre os vários núcleos uma interdependência que considere a formação complementar da realidade, de modo que as indicações de cada um deles estão imbricadas e estabeleçam referenciais mútuos.

Esta metodologia propõe iniciar a análise por um processo intranúcleo e, em seguida, realizar a articulação internúcleos. Este modo de análise permite explicitar:

> [...] semelhanças e/ou contradições que irão revelar o movimento do sujeito. Tais contradições não necessariamente estão manifestas na aparência do discurso, sendo apreendidas a partir da análise do pesquisador. Do mesmo modo, o processo de análise não deve ser restrito à fala do informante, ela deve ser articulada (e aqui se amplia o processo interpretativo do investigador) com o contexto social, político, econômico, em síntese, histórico, que permite acesso à compreensão do sujeito na sua totalidade (AGUIAR; OZELLA, 2006, p. 6).

Outro dado importante mencionado em pesquisas de campo é que a organização de informações para inferir o processo de aglutinação dos pré-indicadores permite perceber um conjunto de ideias que podem dar origem aos indicadores.

Diante das exposições, para esta pesquisa adaptamos a formação de 'núcleos de significação', considerando a necessidade de um discurso no livro didático que supere a visão pré-determinística, exata, operativa e finita do ensino de números irracionais.

Considerando-se que a "[...] multiplicidade das significações é o índice que faz de uma palavra uma palavra" (BAKHTIN, 1986, p. 130), o processo de síntese de cada núcleo levou em consideração a necessidade do processo de análise das várias palavras-chave ou frases que constituem a essência dos núcleos: os pré-indicadores. A determinação destes pré-indicadores foi inspirada no processo de revisão bibliográfica em relação aos números irracionais e, neste trabalho, é representada pela seguinte lista: aproximado; circularidade; completude dos números reais; compreensão relacional; concepção de números; contínuo; Crise dos Incomensuráveis; densidade; dificuldades de identificar; discreto; dízima periódica e não-periódica; empírico; estimado; exato; exemplificar e conceituar números irracionais; exemplos prototípicos (conjunto enumerável finito de pouquíssimos números irracionais notáveis); finito; infinito; lista de expansões decimais, números irracionais; números reais; o número PI; o número de ouro; o número de Euler; operações; pragmático; raízes enésimas irracionais; régua decimal infinita; representação decimal; representações semióticas; reta numerada; sequência de intervalos encaixantes; simplificação; teórico.

A releitura das palavras-chave listadas pelos pré-indicadores proporcionou oportunidade para a reorganização e a composição dos indicadores, assim como a designação dos 'núcleos de significação'.

No caso da nossa pesquisa, estes foram constituídos pela articulação de conteúdos aparentes, semelhantes, complementares ou contrapostos, de modo a responder se as obras analisadas expõem os elementos essenciais referentes aos números irracionais e como o discurso expresso nas escolhas didáticas presentes nos livros para a introdução e desenvolvimento possibilita a atribuição de significados aos conteúdos inerentes aos números irracionais.

Pensamos assim permitir a verificação das transformações e contradições que ocorrem no percurso de exposição dos temas essenciais envolvendo os números irracionais, no livro didático do ensino básico.

Tendo como suporte as descrições e resultados das pesquisas levantadas na revisão bibliográfica, aliada a experiência como professor secundarista em relação aos conteúdos expressos nos manuais didáticos, nas deliberações da metodologia escolhida e nas expectativas desta pesquisa, concebemos três 'núcleos de significação' e os respectivos indicadores[27].

No núcleo I, denominado 'O Processo de Inicialização dos Números Irracionais', foram constatados os modos como os números irracionais são inicialmente abordados no material do ensino básico. Isto pressupôs a constatação, nos livros didáticos:

I_1: no modo como ocorre a introdução conceitual dos irracionais;

I_2: das linguagens utilizadas para apresentação dos elementos básicos dos irracionais;

I_3: dos meios didáticos utilizados para o tratamento inicial dos irracionais: atividades manipulativas; uso de softwares, calculadora, planilha e outros meios eletrônicos; realização de simulações; apresentação e interpretação de textos.

O núcleo II, denominado 'O desenvolvimento e a amplitude conceitual dos números irracionais', pretendeu relatar se e como o material didático expõe um aprofundamento e tratamento didático dos números irracionais. Este núcleo permitiu verificar se há necessidade de complementos para possibilitar uma maior amplitude didática dos números irracionais.

[27] Para efeito de designação, os 'núcleos de significação' utilizaram numerais romanos (núcleo I, núcleo II e núcleo III) e os indicadores de cada núcleo por um índice i = 1, 2 ou 3.

O núcleo II requer do material a ser analisado um discurso que, além da apresentação dos elementos básicos, exponha os elementos mínimos, necessários e essenciais para a compreensão dos números irracionais, o que equivale a verificar, nos livros didáticos:

II_1: se, como e em que medida ocorre a articulação entre as linguagens;

II_2: se, como e em que medida lidam com informações, métodos, procedimentos e a problemática que surgiu no desenvolvimento histórico do conhecimento matemático. Em particular, será verificada se e como é tratada a 'Crise dos Incomensuráveis';

II_3: se há a reutilização e exploração dos números irracionais nos variados conteúdos e temáticas da Matemática.

A análise e a confrontação dos resultados pontuados e declarados nos dois núcleos permitiram expor o que já está consolidado na apresentação e desenvolvimento dos números irracionais nos livros didáticos analisados, o que ainda se encontra implícito ou não revelado neste processo de inicialização e, principalmente, o que ainda falta. O citado percurso permitiu verificar quais os pontos e em que níveis foi possível avançar nos patamares intermediários de significação dos irracionais.

Isso foi pontuado no núcleo III, denominado 'Síntese', que consistiu num contraponto aos dois núcleos anteriores. O núcleo III pretendeu verificar se e como o livro didático encaminha questões fundamentais para a composição de um quadro básico, necessário e suficiente para abordar os números irracionais no ciclo básico. Isto equivale a verificar, nos livros didáticos:

III_1: se e como é abordada a questão do infinito e a relação deste com os conjuntos enumeráveis e os não-enumeráveis;

III_2: como é abordada a questão do valor exato/valor aproximado.

A dialética[28] resultante do confronto intranúcleos, permitiu diagnosticar alguns aspectos e obstáculos presentes nas obras analisadas, o que orientou o mapeamento de alternativas para a abordagem didática frente à complexidade epistemológica dos números irracionais, condição que favoreceu proposições para o aprimoramento e entendimento dos números irracionais, de modo significativo, nesta faixa de ensino.

---

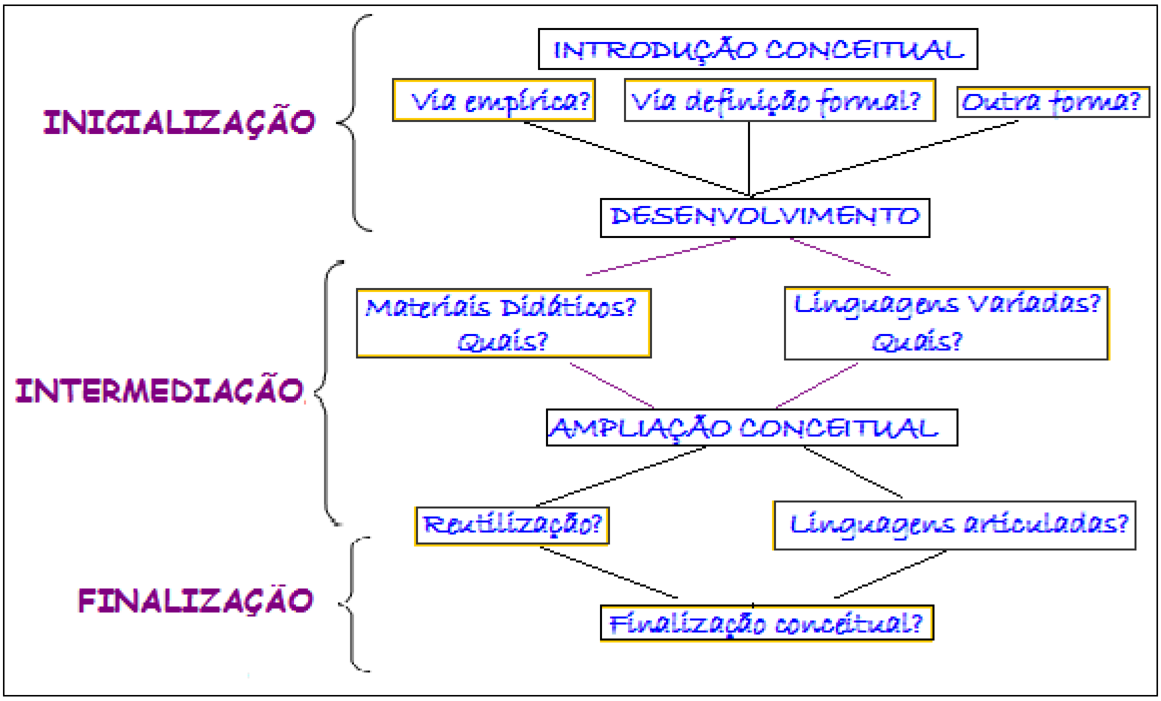
[28] Segundo Jerphagnon (2002), a dialética hegeliana é um método de diálogo cujo foco é a contraposição e contradição de ideias, de modo que os contrários são fundidos na unidade. A dialética hegeliana expressa a natureza verdadeira e única da razão e do ser/objeto que são identificados um ao outro e se definem segundo o processo racional da união incessante de contrários, a tese e antítese, que são sintetizados numa categoria superior, de modo a se obter a essência das coisas.

A descrição dos temas selecionados nos livros didáticos e a análise dos resultados de busca.

Expostas as questões e efetivadas as escolhas das coleções, a análise dos temas envolvendo os números irracionais no livro didático ocorreu em dois sentidos: a análise horizontal e a análise vertical.

A análise didática horizontal consistiu em descrever e situar cada um dos três temas elencados anteriormente, nos conteúdos que compõe cada coleção de livro didático. Esta ação foi efetivada no que denominamos de '*percurso dos núcleos de significação'* e que se encontra representado esquematicamente no quadro 1.

Quadro 1: '*Percurso dos núcleos de significação'*, para a análise de temas presentes no livro didático.



Após a descrição dos componentes apresentados em cada tema, foi feita uma análise vertical, comparando os resultados expressos em cada coleção, com argumentações orientadas pelas propostas aglutinadoras expressas através do percurso dos três 'núcleos de significação' anteriormente delimitados.

A seguir, passamos a descrição e análise nas coleções de livros didáticos dos três temas delimitados (O surgimento das raízes enésimas irracionais; O número PI, o número de Euler e o número de ouro; Aspectos essenciais do conhecimento matemático relacionados aos Números Irracionais) através do 'percurso dos núcleos de significação'.

Tema A: O surgimento das raízes enésimas irracionais.

Coleção A.

No livro do 8º ano, capítulo 7, no item ‘raízes’, este conceito é inicializado por meio da geometria e motivado pela questão: “Qual é a área de um quadrado em que cada lado mede 7 cm?” (p.123)[25]. Após a apresentação do resultado (49 cm^2), introduz-se a pergunta “Quanto mede o lado do quadrado que tem área igual a 81 cm^2?” (p.123), com a intenção de introduzir a raiz quadrada por analogia com aspectos geométricos. No mesmo mote, para introduzir o conceito de raiz cúbica, o livro faz a seguinte proposta: “Qual o volume de um cubo de aresta 5 cm?” e “Quanto mede a aresta de um cubo cujo volume é 64 dm^3?” (p. 124).

Em sequência, o manual apresenta uma série de exercícios para o cálculo de raízes quadradas, cúbicas, quartas, quintas, que recaem em números inteiros ou numa fração de números inteiros. Ainda no âmbito do discreto, destaca-se um exercício, no contexto da Física, para se determinar o tempo para um objeto cair, em queda livre, na ausência de atritos, através da expressão $t = \sqrt{\dfrac{h}{4{,}9}}$.

Após a introdução via empírica, utilizando a linguagem geométrica, aritmética e algébrica, os autores propõem outra abordagem conceitual através de um exercício, que solicita a determinação dos valores de $\sqrt{5}\ e\ \sqrt{10}$, através da observação do gráfico da função y = x^2, no intervalo $0 \leq x \leq 4$, em papel milimetrado, conforme ilustra a figura 3.

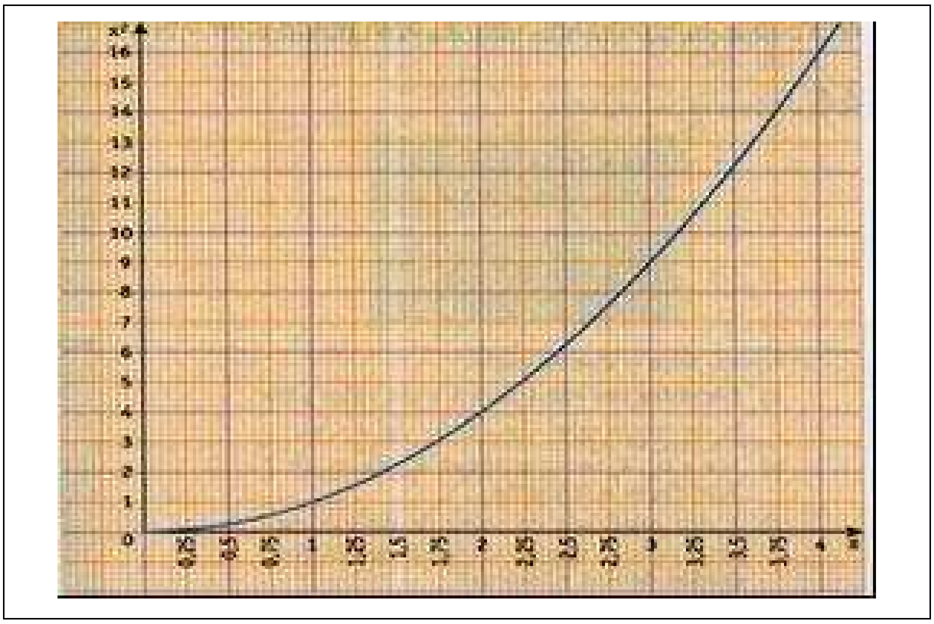


Figura 3: Gráfico da função y = x^2 [Fonte: Coleção A].

[25] Mencionamos somente a página nas citações dos livros didáticos analisados neste capítulo. Este desvio da norma ABNT 6023 visou não tornar repetitivas as referências para apresentar o discurso nas obras.

Este problema veicula uma articulação inicial entre as linguagens numérica e funcional, porém não há exploração do tema em cada linguagem. Ainda, o texto apresenta o conceito pela via empírica e não há explicação sobre os motivos que levam a aproximação para uma casa decimal.

È normal e de praxe, em Matemática, se aproximar para uma casa decimal? Por quê? Qual o significado do conceito de aproximação?

O recurso à aproximação, um conceito fundamental em Matemática, se constitui em um meio de acesso à natureza do número irracional. No caso dado por $\sqrt{12}$, explorado no livro-texto, não foi aproveitada a possibilidade da atividade para desenvolver a raiz como um novo tipo de número – os irracionais - cuja natureza fica velada, restringindo o contexto somente ao modo operacional, ou seja, a apresentação de uma nova operação: a radiciação.

A seguir, o livro desenvolve o tópico 'Raízes' por meio do uso de calculadora eletrônica, um meio didático de natureza empírica. Como exemplo, o texto expõe o processo de utilização da calculadora, no processo de cálculo de $\sqrt{5}$, ilustrando o resultado do mostrador (2,236067978) numa foto. Sem adentrar nas considerações da natureza desse resultado numérico, de modo simplificador, o livro comenta que "uma calculadora comum não extrai raízes cúbicas" (p. 130).

O que seria uma calculadora comum? A foto apresentada no texto para ilustrar o resultado de $\sqrt{5}$ é de uma calculadora científica, muito comum em uso cotidiano. Para que, então, é apresentado o resultado da calculadora? Para explicar que $\sqrt{5}$ não é um número inteiro?

A tese de Silva (2011a) aponta exemplos onde o uso de calculadora eletrônica ilude e confunde os alunos quanto à natureza de um número. A autora relembra que a calculadora não extrai uma raiz, mas apresenta no visor uma aproximação racional de uma raiz enésima irracional.

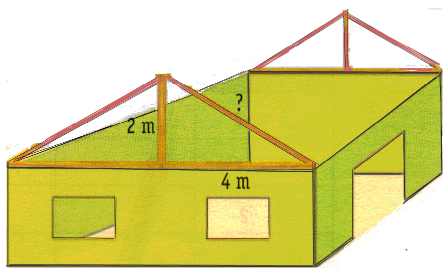
Ainda com relação ao resultado aproximado apresentado no mostrador da calculadora, o texto da coleção A desenvolve uma conceituação parcial ao não explicar a natureza deste, um número racional com número finito de casas decimais, nem sobre a natureza teórica das raízes enésimas, um número irracional com infinitas casas decimais não-periódicas. Isto pode induzir o leitor a caracterizar a raiz enésima irracional como um número racional, visto que até este momento o livro da coleção A nem sequer citou a denominação número irracional.

No livro do 8º ano, capítulo 12, intitulado 'Áreas e volumes', é abordado o Teorema de Pitágoras. São sugeridas atividades envolvendo a geometria, cuja aplicação do referido teorema resulta no cálculo de uma raiz quadrada. Constatamos boa distribuição nos exercícios propostos que recaem em resultados inteiros, como os triângulos retângulos de lados (3; 4; 5), (5; 12; 13) e os múltiplos destes resultados. Há outras propostas cujas respostas conduzem aos números irracionais, aproximados pelo uso da calculadora. Porém, novamente, a questão da aproximação não é discutida.

No livro do 9º ano, capítulo 1, é retomado o Teorema de Pitágoras, a partir das relações métricas no triângulo retângulo. Esta seção introduz atividades, no âmbito da Geometria, envolvendo o cálculo da diagonal de um retângulo ou de um dos lados de triângulos retângulos, o que em muitos casos recai em uma raiz enésima irracional, com radicando inteiro. No processo de resolução os autores propõem o uso de calculadora, assim como o processo da tentativa e erro, permitindo delimitar as raízes enésimas irracionais ao intervalo de inteiros sucessivos, por excesso e falta. Porém, o mesmo tratamento e a problemática que citamos ocorre com relação às aproximações e também com o contexto à geometria.

No capítulo 2, intitulado 'A quinta e a sexta operações', no item 'Conceito e propriedades da radiciação', os autores apresentam a radiciação como a operação inversa da potenciação. Um dos problemas desta seção solicita o comprimento da viga que compõe um telhado, resultando num número na forma de radical, representado na figura 4. A solução realizada pelo viés empírico utiliza uma calculadora eletrônica ou cálculos por aproximação, por tentativa e erro, com uma casa decimal.

Os autores argumentam que este procedimento é apropriado para as necessidades de um carpinteiro, de modo a delimitar um intervalo de números inteiros, no qual a raiz desejada fica confinada. Assim, "$\sqrt{20}$ está entre 4,4 e 4,5" (p. 42).



$$d^2 = 2^2 + 4^2$$
$$d^2 = 20$$
$$d = \sqrt{20}\ m.$$

Figura 4: Problema da viga[26] [Fonte: Coleção A].

[26] Nesta figura, assim como nas demais desse capítulo, houve tratamento de cores da imagem e realce de símbolos e formas para fins de impressão.

Há neste exercício do carpinteiro um contexto que poderia ser explorado quanto à questão da aproximação. Não fica(m) explicitado(s) o(s) motivo(s) pelo(s) qual(is) o resultado do cálculo deve ter uma casa decimal, ou seja, que o comprimento da viga deve estar situado entre 4,4m e 4,5 m. Por que o carpinteiro não utiliza, por exemplo, 4,47m ou 4,43m? O intervalo de resultados, proposto pelo texto, possibilitaria alguma discussão, principalmente com referência ao modo como este profissional lida na prática com esta medida e as relações com a Matemática, do ponto de vista teórico.

O carpinteiro geralmente corta a viga um pouco acima deste valor e ajusta o comprimento, com lápis e marcador, para então cortar em definitivo, o que configura uma aproximação suficiente para o artesão. Neste procedimento prático a medida serve como estimativa inicial, de modo a evitar perdas, para depois realizar uma aproximação maior, também de modo prático. Do ponto de vista da Educação Matemática, não há aproveitamento da questão levantada para iniciar uma discussão sobre a natureza das aproximações e das raízes enésimas irracionais, como ela é operacionalizada, quando ela é cabível e, principalmente, o que representa a realização de uma aproximação.

Os autores ressaltam que há problemas onde não é necessário obter o valor aproximado de uma raiz enésima irracional. Esta afirmação é simplista, pois em nenhum momento se discute quando é necessário aproximar. O referido mote é utilizado pelo livro para justificar a necessidade de introdução dos radicais, da forma $\sqrt[n]{a}$ (o radicando ***a*** e o índice ***n***). Após a exposição teórica, são descritas as operações de multiplicação e divisão com radicais, com base em exemplos numéricos, e, posteriormente, por raciocínio indutivo, descrevendo as propriedades operatórias, em forma literal.

O movimento de apresentação do conceito de raiz ocorre inicialmente pelo viés do empírico, pelos exemplos de apresentação de raiz quadrada e cúbica, pela introdução do teorema de Pitágoras, onde a aproximação com a calculadora é o meio didático para acessar o resultado do calculo operatório. Em sequência, os autores apresentam os aspectos teóricos dos radicais, exemplificando as propriedades e propondo exercícios de fixação utilizando o conceito de radiciação como ferramenta operatória. O acesso operacional está garantido, mas há uma janela conceitual entre a apresentação empírica e a teórica: o que representam estes novos números? Qual a relação destes novos números com os números racionais?

Em parte, estas questões são encaminhadas. Encontramos menção explícita desta relação no livro do 9º ano, capítulo 13, no item denominado ‘Classificação dos números’, onde é apresentada a reta numérica.

O texto apresenta inicialmente um gráfico de aquecimento de certa massa de gelo, questionando "[...] como se faz a correspondência entre números e pontos da reta?" (p. 252). Em seguida, o texto apresenta a reta numérica e representa números inteiros no intervalo -4 até 3 (figura 5). Argumenta, em seguida, que entre os inteiros indicados existem racionais não-inteiros, apresentando alguns exemplos e os localizando na reta numérica (figura 6).

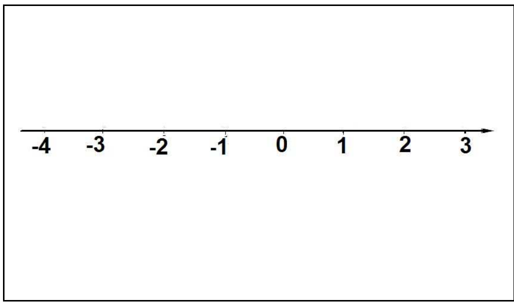


Figura 5: A reta real e os números inteiros [Fonte: Coleção A].

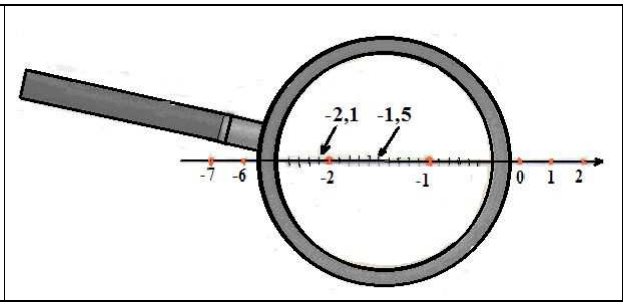


Figura 6: A reta real e os números racionais (I) [Fonte: Coleção A].

A ampliação realizada através da lupa é um recurso que ilustra um processo, onde:

> [...] a ideia é dividir cada distância unitária em um número adequado de partes iguais. Assim, marcamos até números como 0,0001. Basta dividir a distância entre 0 e 1 em 10 000 partes iguais. Quando isso é feito, na primeira marca, perto do zero, está o ponto correspondente a 0,0001 (p. 253).

Em seguida, os autores argumentam que "[...] os racionais parecem encher a reta, porque, dados dois números racionais, sempre há um terceiro no meio deles. [...] Por exemplo, entre o 0,006 e o 0,007 há 0,00065. E entre 0,0065 e 0,006 há a média aritmética entre eles [...] Podemos continuar assim, indefinidamente, colocando números racionais no meio de outros dois" (p. 253). Este processo, ilustrando o conceito de densidade dos racionais, pode ser visualizado na figura 7.

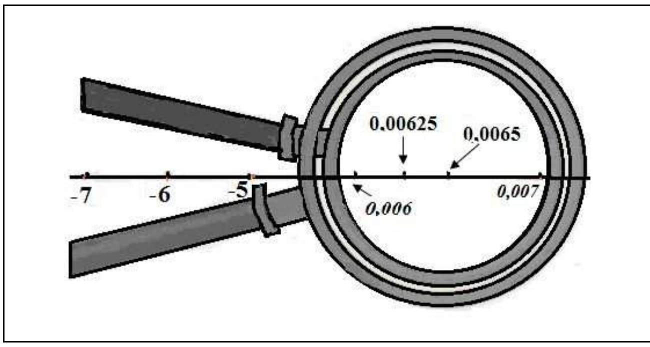


Figura 7: A reta real e os números racionais (II) [Fonte: Coleção A].

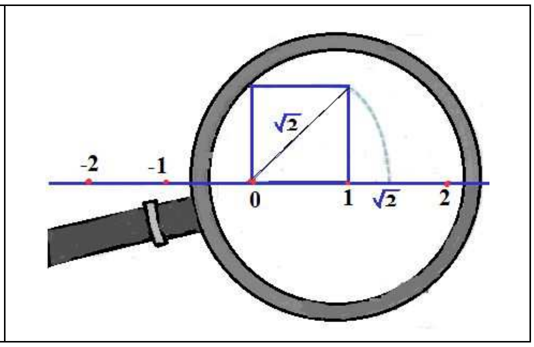


Figura 8: A reta real e os números irracionais [Fonte: Coleção A].

A seguir, o livro afirma que a representação dos números na reta real se esgota somente na aparência, concluindo ser fruto de muita reflexão dos matemáticos. Por último, localizam $\sqrt{2}$ na reta numérica, conforme ilustrado na figura 8.

Ainda no livro do 9º ano, nos exercícios propostos ocorre aplicação à geometria. Nestes, se destacam o cálculo da diagonal de um quadrado: “(a) Utilize o teorema de Pitágoras e mostre que a medida da diagonal de um quadrado é dada pela fórmula $d = l.\sqrt{2}$; (b) Use a fórmula obtida no item anterior e calcule d para $l = \sqrt{8}$" (p. 46), na figura 9. Também, há a proposta da espiral, obtida a partir de um triângulo retângulo isósceles, de lado unitário, conforme ilustra a figura 10.

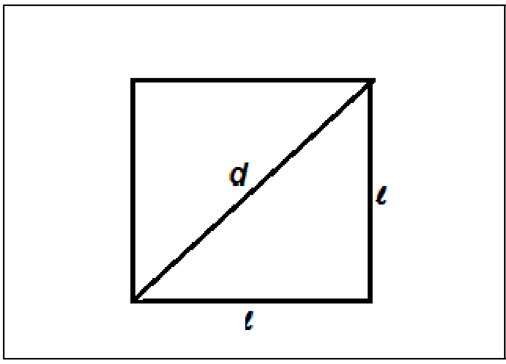


Figura 9: Problema da diagonal do quadrado [Fonte: Coleção A].

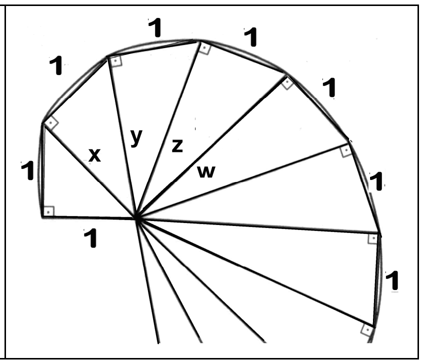


Figura 10: Problema da espiral [Fonte: Coleção A].

Estas duas representações remontam a recomendações expressas nos PCN, Brasil (1997b), que em outro momento destaca a importância da valorização do contexto histórico de certos conhecimentos matemáticos. Mas, pela forma de tratamento didático apresentado no texto, as possibilidades de exploração de tais temáticas têm um obstáculo no modo operatório de apresentação dos exercícios: utilização do teorema de Pitágoras, decomposição em fatores primos, racionalização dos resultados ou apresentação do resultado obtido através da calculadora. Sem dúvida, este trajeto é importante, mas seria também necessário explorar as ideias matemáticas para além do tratamento operatório.

Os contextos presentes na história da Matemática contêm situações que propiciam a constituição de significados dos conhecimentos. No caso da figura 9, o tema é a ‘Crise dos Incomensuráveis’, sequer comentado e explorado na riqueza conceitual do entorno epistemológico. É justamente este evento histórico que possibilita abordar a problemática do tema dos números irracionais e explorar formas de apresentação conceitual, momento que perpassa explicações sobre dois fundamentos da Matemática: o entendimento da questão da aproximação e o tratamento adequado do infinito.

Passando-se a fatoração de radicais, o livro utiliza o processo de decomposição e aplicação de propriedades, usual no ensino, e acrescenta o cálculo com valores aproximados, através do uso de calculadora eletrônica, porém vinculado somente ao mesmo procedimento operatório já citado.

Na racionalização do denominador que apresenta radical, o texto justifica que tal operação é um hábito dos tempos anteriores as calculadoras, visando facilitar cálculos. Isto leva a questão: além de aprimorar a técnica, por que atualmente é importante aprender a racionalizar raízes enésimas irracionais?

No livro observamos que a introdução das raízes enésimas irracionais é realizada principalmente por meio do recurso às situações ligadas ao contexto geométrico, priorizando o uso operatório de propriedades das raízes e apoiados na calculadora, somente ilustrando o resultado numérico aproximado.

Em síntese, a coleção A explora diversas linguagens matemáticas, mas não incentiva a articulação entre estas, não cita e nem desenvolve a problemática encontrada na história do conhecimento matemático conhecida como a 'Crise dos Incomensuráveis'. Também, a coleção A não explicita a importância da operação de aproximação, não elucida a limitação conceitual dos resultados mostrados na calculadora, de modo que o significado das raízes enésimas como número irracional se apresenta de forma restrita.

Coleção B.

No livro do 7º ano do Ensino Fundamental II, capítulo 3, no item denominado 'Cálculo da raiz por aproximações sucessivas', os autores apresentam um problema: "Vamos calcular a medida do lado de um quadrado cuja área é igual a 300 m^2" (p. 105). Para se calcular o resultado ($d = \sqrt{300}$), a abordagem ocorre inicialmente pela aproximação da área, dentro de um intervalo de números inteiros, dado por $17 < \sqrt{300} < 18$, por tentativa e erro, conforme indicado na tabela 1.

Ao delimitar o intervalo de inteiros consecutivos, a aproximação seguinte ocorre para o décimo, tendo como base a calculadora para obter valores aproximados para a área, por tentativa e erro, sem utilizar a tecla da raiz quadrada. Este procedimento reforça a metáfora geométrica, que associa a raiz quadrada a uma característica figural que, neste exemplo, é o lado de um quadrado de área dada. Porém, a alusão metafórica e a propriedade de potência para acessar um cálculo numérico aproximado somente iniciam um percurso de compreensão da natureza irracional deste número.

Tabela 1: Aproximação para um intervalo de inteiros [Fonte: Coleção B].

Tentativas	ℓ	$\ell \times \ell$	**Conclusão**
1ª	16	16x16 = 256	256 < 300; é pouco.
2ª	17	17x17 = 289	289 < 300; é pouco.
3ª	18	18x18 = 324	324 > 300; é muito.
Tentativas	ℓ	$\ell \times \ell$	**Conclusão**
4ª	17,5	17,5 x 17,5 = 306,25	306,25 > 300; é muito, mas está perto.
5ª	17,4	17,4 x 17,4 = 302,76	306,25 > 300; é muito, mas está perto.
6ª	17,3	17,3 x 17,3 = 299,29	299,29 < 300; é pouco, mas está mais perto.

Nos exercícios de fixação, o texto faz menção a essa mesma abordagem, incluindo os centésimos e milésimos. De modo semelhante à coleção A, as aproximações situam-se no contexto geométrico. Também, a coleção B não esclare como se faz ou o que se entende por aproximação, assim como fica limitada a explicação do significado das casas apresentadas no mostrador da calculadora eletrônica.

No livro do 8º ano, capítulo 1, no item ‘Números Reais’, são abordados pela primeira vez os números irracionais. Os autores informam que tais números foram sistematizados há cerca de cem anos, o que para o conhecimento matemático é considerado recente.

Para entender esta problemática os autores remetem ao exemplo de um quadrado ABCD de área 4 cm^2, implicando no lado igual a 2 cm (ver figura 11a).

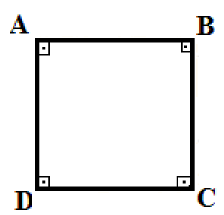


Figura 11a: Quadrado ABCD [Fonte: Coleção B].

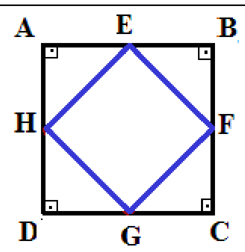


Figura 11b: Quadrado HEFG [Fonte: Coleção B].

A seguir, constroem outro quadrado, tendo como vértices os pontos médios dos lados do quadrado ABCD. A partir daí, propõem a questão de determinar a medida do lado do quadrado HEFG (figura 11b), expondo o resultado $\sqrt{2}$ e o aproximando, pelo mesmo processo citado na descrição do livro do 7º ano. Ao final, os autores argumentam que os algarismos resultantes são não periódicos, induzindo a existência dos números irracionais, um conceito teórico, por meio de um exemplo particular.

O livro-texto apresenta a representação geométrica de $\sqrt{2}$, na reta real, uma mudança de registro que permite introduzir nominalmente os números reais, modo ilustrado na figura 12.

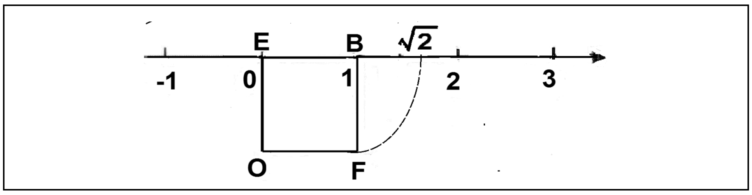


Figura 12: Representação de $\sqrt{2}$, na reta real [Fonte: Coleção B].

A abordagem geométrica, seguida da representação na reta real, incorpora uma importante apresentação na linguagem matemática. Porém, não é proporcionada continuidade a estas representações iniciais, não permitindo o prosseguimento do processo de significar o conhecimento envolvendo os números irracionais.

No livro do 9º ano, capítulo 1, no item denominado 'Raiz de um número real' é retomado o trabalho desenvolvido no manual do 8º ano, porém num viés excessivamente operatório. A revisão precede a introdução do teorema de Pitágoras e, em seguida, são exploradas as propriedades de potências de radicais, num quadro numérico e algébrico. Segue-se, no mesmo capítulo, o trabalho com os radicais, introduzindo as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação, racionalização e fatoração, num quadro algébrico. Tal procedimento, similar ao livro da coleção A, também apresenta uma lacuna entre o viés empírico e teórico, um problema discutido e encaminhado nos próximos capítulos.

Coleção C.

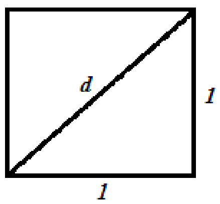
Na Unidade 1, volume 1, as autoras acentuam a intenção de revisão do assunto, logo no início da coleção de Matemática, visto que "escolheram como ponto de partida [...] os números, retomando algumas de suas propriedades e as operações com eles realizadas" (p. 9).

No item 'Números Irracionais', as autoras introduzem a questão "Como medir a diagonal do quadrado, utilizando seu lado como unidade de medida?" (p. 14), questão presente nas coleções de Ensino Fundamental II.

O texto faz menção à 'Crise dos incomensuráveis', quando discorre que "descobriu-se que há segmentos incomensuráveis, cuja razão entre medidas não pode ser expressa como divisão entre dois números inteiros. [...] Aí, surgiram os números'" (p. 14). Porém não há exploração das consequências da referida temática.

A seguir, o texto argumenta que “historicamente, a descoberta dos irracionais parece estar ligada à utilização do teorema de Pitágoras” (p. 14), reportando a representação exposta na figura 13, aplicando o Teorema de Pitágoras ao quadrado de lado unitário e obtendo $\sqrt{2}$ para a hipotenusa. Salientamos que, historicamente, não há indícios de tal procedimento ter sido utilizado e até parece ser bem provável que os gregos não utilizaram o teorema de Pitágoras para a descoberta da irracionalidade, conforme relata Ávila (1984).

Durante a argumentação das autoras há referência ao uso de calculadora, onde se expõe o valor aproximado de $\sqrt{2}$, com 31 casas decimais e acrescido das reticências, citando se tratar de uma dízima não-periódica. A seguir, há a apresentação da demonstração formal usual da irracionalidade de $\sqrt{2}$, por absurdo, supondo que tal número possa ser escrito na forma p/q (racional), com p e q primos entre si.



$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d^2 = 2$$
$$d = \sqrt{2}$$

Figura 13: Quadrado de lado unitário [Fonte: Coleção C].

A partir da apresentação de $\sqrt{2}$ o livro-texto argumenta existirem outros números irracionais: as raízes quadradas “cujos radicandos não sejam quadrados perfeitos” (p. 15), ou as raízes cúbicas “cujos radicandos não sejam cubos perfeitos” (p. 15), além de alguns exemplos que envolvem operações entre números racionais e irracionais.

O livro cita a ‘Crise dos incomensuráveis’, porém não explora as consequências dessa problemática. A demonstração formal da irracionalidade de $\sqrt{2}$, colocada em seguida a um exemplo numérico, não permite significar o conceito de número irracional. Ainda, a apresentação do resultado numérico de uma calculadora não elucida a questão da aproximação e nem das infinitas casas decimais não-periódicas. As exposições representam um salto didático, quando passa de uma abordagem empírica para a teórica, sem trabalhar o significado do número irracional envolvido, fato que implica em um trabalho introdutório simplificado.

Coleção D.

No volume 1, no item Geometria Métrica Plana, os autores reutilizam as raízes enésimas irracionais em aplicações do Teorema de Pitágoras, como o problema da determinação da diagonal do quadrado, já citado, dentre outros. Na mesma unidade, no item ‘Distância entre dois pontos do plano’, através de coordenadas cartesianas, é obtida a fórmula usual da distância na Geometria Analítica. O texto propõe vários exercícios, recaindo novamente no uso operatório de raízes enésimas irracionais.

Na Unidade denominada Trigonometria nos Triângulos, são propostos exercícios envolvendo cálculos operatórios que utilizam raízes enésimas irracionais e o uso dos valores tabelados das funções trigonométricas para ângulos de 30º, 45º e 60º, lei dos cossenos e área de algumas figuras planas.

Nesta coleção não ocorre uma apresentação conceitual básica dos conjuntos numéricos canônicos e somente há reutilização das raízes enésimas irracionais em exercícios de modo operatório. Também, a coleção não cita que as raízes são números irracionais, havendo poucas contribuições para o entendimento introdutório do significado de uma raiz enésima como um número irracional.

Coleção Extra.

No livro I (capítulo I) são apresentados os conjuntos canônicos: Naturais, Inteiros, Racionais e Reais. De modo oposto aos anteriormente analisados, utiliza propriedades e a apresentação das operações de adição e multiplicação para introduzir formalmente o conjunto dos números naturais. Por ampliação das operações apropriadas, introduz os outros conjuntos numéricos. Após a apresentação do conjunto dos Números Racionais, os autores abordam o conjunto dos Números Reais.

Introduzem o tema argumentando que “[...] dado um número racional *a/b* e um natural *n* nem sempre $\sqrt[n]{a/b}$ é racional. Por exemplo, $\sqrt{2} \notin Q$, o que é provado facilmente” (p. 46), do mesmo modo como ilustrado na coleção C. Segue-se a apresentação dos números e alguns exemplos numéricos, como $\sqrt{2} = 1{,}4142136...$; π = 3,1415926...; a = 1,010010001..... A partir deste ponto definem como:

> [...] conjunto dos Números Reais R aquele formado por todos os números com representação decimal, isto é, as decimais exatas ou periódicas (que são números racionais) e as decimais não exatas e não periódicas (chamadas números irracionais) (p. 46).

A coleção faz uso da linguagem algébrica, através de uma apresentação formal, expondo definições e técnicas operatórias. Esta opção adotada na coleção E inibe a utilização de outros recursos didáticos, além de não citar ou explorar a problemática histórica. Acrescenta-se também o fato que as exemplificações ocorrem somente no contexto numérico conjuntista, configurando uma apresentação matemática formal, porém didaticamente simplificada e reducionista, o que dificulta significar os números irracionais nesta faixa de ensino.

Análise e Síntese do Tema A: O surgimento das raízes enésimas irracionais.

Observamos no núcleo I (O processo de inicialização dos números irracionais), de modo geral, nas coleções A e B, de Ensino Fundamental II, uma introdução conceitual das raízes num viés empírico, fazendo uso do contexto geométrico. A proposta comum às duas coleções foi partir do contexto da área de um quadrado para se determinar o lado desta figura geométrica, procedimento que representa o recurso metafórico para acessar a ideia da operação de radiciação. No âmbito aritmético, as coleções utilizaram áreas e lados que resultaram números inteiros, expandindo posteriormente para casos que recaem no cálculo de uma raiz enésima irracional, com radicando inteiro (ver quadro 2).

Quadro 2: A introdução conceitual nas coleções analisadas.

Coleção A	**Coleção B**	**Coleção C**	**Coleção D**	**Coleção Extra**
Viés empírico	Viés empírico	Viés empírico&teórico	Não introduz	Viés teórico
Utiliza exemplos numéricos de área e volume de figuras geométricas (quadrado e cubo).	Utiliza exemplos numéricos de área de figuras geométricas (quadrado).	Discute o problema de um quadrado de lado unitário, seguindo a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$.	Procedimento operatório de utilização das raízes enésimas irracionais	Via definição como operação inversa da potenciação.

No desenvolvimento do tema das raízes enésimas irracionais, as coleções de Ensino Fundamental II utilizam na exposição didática as linguagens: algébrica (A), funcional (F), geométrica (Geo), gráfica (Graf) e numérica (N), explorando as diversas possibilidades de conversão de registro. Porém, nas coleções de Ensino Médio, há menor variabilidade na utilização das linguagens (ver quadro 3).

Quadro 3: O uso de linguagens nas coleções analisadas.

Coleção A	**Coleção B**	**Coleção C**	**Coleção D**	**Coleção Extra**
Sim (todas)	Sim (A; Geo, Graf; N)	Sim (A; Geo, N)	Sim (A; Geo, N)	As vezes (A; Geo, N)

Quanto ao desenvolvimento do tema, com relação aos meios didáticos, os dois livros do Ensino Fundamental II fazem uso de calculadora eletrônica para determinar raízes enésimas irracionais, através do processo de aproximação (ver quadro 4). A opção de algumas coleções se restringiu ao uso da calculadora, algo que poderia ser ampliado, por meio de outros recursos didáticos (planilha eletrônica, régua decimal infinita e uso de recursos da História da Matemática).

Quadro 4: O uso meios didáticos nas coleções analisadas.

Coleção A	**Coleção B**	**Coleção C**	**Coleção D**	**Coleção Extra**
Uso de calculadora para efetuar aproximação por falta e por excesso.	Uso de calculadora para efetuar aproximação por falta e excesso, inicialmente para intervalo de inteiros e depois para a casa decimal.	Não há menção	Não há menção	Não há menção

A calculadora e outros meios como a planilha eletrônica são instrumentos utilizados para evitar cálculos repetitivos. As coleções, ao se limitarem à exposição do valor numérico aproximado de uma raiz irracional não exploram as possibilidades deste recurso. Considerando-se que o acesso a um número irracional se faz por meio de conceito de aproximação a um número racional, esta questão precisaria ser ampliada, através de um aprofundamento e tratamento didático adequado, algo não encontrado nas coleções.

Lima (1985) e Bonomi (2008) destacam o problema ocasionado pelas aproximações nas calculadoras, onde o mostrador dispõe os números na representação decimal finita, uma primeira aproximação de outro resultado aproximado, armazenado na memória, que possui uma limitação física e finita de alocar dados. O acesso as teclas como a raiz quadrada pode induzir os alunos no trato dos números apresentados no visor como se fossem decimais finitos e, portanto, racionais, não permitindo compreender a representação das dízimas não-periódicas, limitando o entendimento quanto ao acesso e significado de um número irracional, um conceito teórico.

Remetendo agora no núcleo II (O desenvolvimento e a amplitude conceitual dos números irracionais), os livros do Ensino Fundamental II realizam várias mudanças de linguagem, porém não há uma continuidade ou tratamento dos números irracionais no novo registro que situe e permita compreender o significado deste. O quadro 5 sintetiza esta posição.

Quadro 5: A articulação entre as diversas linguagens nos livros de Ensino Fundamental II.

Coleção A	Coleção B
Após introduzir o conceito de raiz, no caso de números inteiros, é realizada a abordagem funcional, através da representação gráfica ($y = x^2$) e leitura no eixo x, com aproximação de casa decimal. Porém não há desdobramentos em relação à discussão do resultado aproximado obtido por leitura gráfica e aproximação. Em seguida, a abordagem é realizada via representação geométrica, no caso de retângulos, com aplicação simultânea do teorema de Pitágoras, discurso que permite introduzir as raízes enésimas irracionais.	A abordagem contrapõe o discreto e o contínuo. Também há uso da representação geométrica, no caso de retângulos, com aplicação simultânea do teorema de Pitágoras. Por último, induz, por meio de um exemplo particular, a representação geométrica de $\sqrt{2}$, na reta real.

Após a apresentação das raízes enésimas irracionais, as coleções A e B, do Ensino Fundamental II, e a coleção extra, introduzem a radiciação como operação inversa da potenciação e apresentam as operações envolvendo radicais (adição, subtração, multiplicação, divisão, fatoração, racionalização). De modo geral, a abordagem é realizada em quadro numérico, ocorrendo passagem para quadro algébrico, de modo a sistematizar as propriedades.

Quanto à re-utilização das raízes enésimas irracionais, há predominância em situações no âmbito do teorema de Pitágoras e na Geometria Analítica. Nos demais tópicos a utilização dos números irracionais é evitada, preferindo-se o uso de números inteiros e poucas vezes recorrendo aos números racionais.

Os autores lidam com fatos surgidos no decorrer do desenvolvimento histórico do conhecimento matemático, mas raramente fazem referência ao mesmo ou não utilizam a problemática e procedimentos envolvidos no desenvolvimento histórico dos números irracionais para realizar uma viabilização didática (ver quadro 6)

Quadro 6: O uso da História da Matemática como recurso didático.

Coleção A	Coleção B	Coleção C	Coleção D	Coleção Extra
Apresenta o problema da diagonal do quadrado, de modo operatório, mas não há a exploração da problemática histórica. Não cita a 'Crise dos Incomensuráveis'.	Os autores recriam o problema da diagonal do quadrado, de modo operatório. Também não há a exploração da problemática histórica e não há menção a 'Crise dos Incomensuráveis'.	Aborda o problema da diagonal do quadrado pelo viés operatório e apresenta a demonstração, provavelmente não utilizada pelos gregos. O livro cita a 'Crise dos Incomensuráveis', sem explorar a problemática.	Não há menção	A abordagem é realizada pela definição formal, sem referências históricas.

No caso da 'Crise dos Incomensuráveis', o ocultamento dos números irracionais à moda dos gregos é citado somente na coleção C, porém esta não explora as consequências, base essencial para o entendimento e possível modo de introduzir os números irracionais no ciclo básico.

Em decorrência das observações apresentadas, sintetizamos que as coleções de Ensino Fundamental analisadas tratam a questão das aproximações de um modo simplista, num viés operacional e voltado implicitamente ao conjunto dos números racionais. Isto tem como consequência a não-caracterização dos números irracionais, deixando em aberto o entendimento da aproximação como meio de acesso de um número irracional por meio de um número decimal finito.

Estas considerações expostas podem ser observadas na coleção A, que apresenta um capítulo intitulado 'Medidas', no livro do 7º ano. Neste são descritos instrumentos de medidas e grandezas relativas à massa, distância, área, temperatura, volume e o sistema métrico. O contexto de medida seria propício para tratar a questão de aproximação, porém o livro-texto somente apresenta dois exercícios solicitando a aproximação de números inteiros para a unidade ou dezena, por uma via operacional.

Semelhantes considerações podem ser direcionadas ao livro do 9º ano, da coleção A. No capítulo intitulado 'Medidas' encontramos somente um exercício propondo a determinação da área aproximada do mapa do Brasil[25].

Quanto à coleção B, no livro do 6º ano, ocorre a proposta de aproximação pelo viés operacional no capítulo 3 (p. 37-40). As aproximações realizadas envolvem números inteiros de ordem de grandeza da dezena, centena, milhar mais próxima e outras combinações.

Na coleção C, unidade 1, volume 1, são apresentados exercícios de aproximação de raízes enésimas irracionais por racionais, para 1 ou 2 casas decimais, por excesso e por falta, sem o uso de calculadora. A proposta inicia-se pela aproximação para uma raiz enésima irracional, num intervalo situado com extremos inteiros. A seguir, adota o valor médio entre os extremos inteiros e, elevando-se ao quadrado, verifica quando falta (ou excede) para a igualdade com o radicando. O texto do livro faz uso recursivo de valores intermediários, através da exposição de quatro intervalos, induzindo que o valor faltante ou o excesso diminui, aproximando-se de zero, sem nunca atingi-lo.

[25] Santos, B. (2007) destaca nos mapas a utilidade da redução da realidade à própria essência desta. A discussão envolvendo essa característica se constitui num importante recurso didático, que poderia complementar os exercícios numéricos, foco não desenvolvido nesta e nas demais coleções analisadas.

A coleção D aborda a aproximação da diagonal do quadrado de lado unitário (d $=\sqrt{2}$) por excesso e por falta. O texto observa que, depois de efetuadas as aproximações para duas casas decimais, é possível repetir o:

> [...] processo para se obter quantas casas decimais quisermos, mas encontraremos sempre um valor aproximado para d, por falta, pois esse valor, elevado ao quadrado, é sempre um número menor que 2. Os matemáticos representam o valor exato para a medida da diagonal do quadrado de lado ℓ por d $=\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ = 1,414213562... Assim, $\sqrt{2}$ não é um número racional. É um número irracional (p. 93).

Na coleção Extra, no volume 8, intitulado 'Logaritmos', capítulo I, encontramos uma única abordagem teórica formal das aproximações, na referência às potências de expoente irracional. Através de um exemplo são expostos os resultados por aproximação de $\sqrt{2}$ e de $3^{\sqrt{2}}$, constituindo recurso didático para a exposição da definição formal. Pela definição formal, um número irracional α pode ser localizado e aproximado no intervalo $r < \alpha < s$, onde r e s são números racionais, de modo que a diferença s – r é menor que qualquer número positivo arbitrário. Esta abordagem, utilizando uma linguagem matemática sofisticada pelo recurso algébrico reporta à ideia de limite de uma função, tema não pertencente ao currículo da escola básica, demandando explicações. Assim, a apresentação teórica nada favorece a possibilidade de significar o tema das aproximações no ciclo básico.

Sintetizando, nas coleções analisadas a abordagem da questão da aproximação é simplificada, pela via empírica, não sendo aprofundadas para esclarecer o significado de um número irracional. Entendemos que não é possível lidar com a questão da aproximação somente como um conceito empírico, constatado em quatro das coleções analisadas ou, somente como um conceito formal, caso da coleção extra.

O discurso restrito a explicações das raízes enésimas irracionais recorrendo ao resultado numérico aproximado para o inteiro ou para determinado número de casas decimais simplifica o quadro da complexidade envolvendo o tema das aproximações, as condições que pode ocorrer e os benefícios que esta questão pode trazer para o entendimento dos números irracionais: um número irracional somente pode ser operado, em situações práticas, quando utilizamos uma aproximação decimal finita.

Mas o número irracional, na concepção teórica, tem natureza ligada ao infinito e ao aproximado, temas essenciais para significá-lo. Ao aproximar um número irracional, há uma implicação. Este tratamento de aproximação mascara um significado teórico básico dos números irracionais: infinitas casas decimais e não periódicas.

Em síntese, com relação às raízes enésimas irracionais, nenhum dos livros caracteriza estes objetos como números irracionais. Esta forma de discurso presente no material didático analisado não permite ao leitor identificar o tipo de número: natural, inteiro, racional ou será de outro tipo ainda não apresentado?

O tema da aproximação é tratado como noção paramatemática. Para Chevallard, Bosch; Gascón (2001) noções paramatemáticas são objetos de saber auxiliar, necessários ao ensino e que constam do currículo de Matemática. Nesta perspectiva, a abordagem das raízes enésimas irracionais nos livros didáticos configura a aproximação como ferramenta matemática auxiliar para resolver problemas geométricos, operacionalizando os resultados, mas não se constitui um aspecto fundamental da Matemática, merecedor de um estudo mais abrangente.

Em síntese, no tocante as raízes enésimas irracionais, alguns livros didáticos analisados nem mencionam que representam um novo tipo de número, tratando-o pelo viés empírico, pela abordagem de aproximação, transparecendo um número racional. Já em alguns outros manuais citam-no e fazem o tratamento pelo viés operatório, numérico e algébrico, sem maiores aprofundamentos das consequências deste aspecto tecnicista.

De maneira geral, em face das constatações presentes nos livros didáticos, onde há a predominância na técnica, concordamos com Machado (1990), que não considera oportuna a opção dicotômica – técnica versus significado. Ao contrário, trata-se de observar momentos adequados para dar ênfase ou prioridade a técnica, ao significado ou a ambos os aspectos.

Os antigos gregos ocultaram os números irracionais, renegando-lhes o papel de números e tratando-os como segmentos geométricos. Modernamente, de modo análogo, os números irracionais continuam ocultos, mas agora sob um novo enfoque: o ato de camuflar o significado e privilegiar a técnica, evitando a complexidade do tema.

Conforme destaca Machado (1990), a Matemática consiste num sistema de representação original, onde além da essencial aprendizagem de técnicas para operar com símbolos, relaciona-se com o desenvolvimento da capacidade de interpretar, analisar, sintetizar, significar, conceber e transcender o imediatamente sensível, extrapolar e projetar. Atualmente, o ensino de Matemática deve priorizar e tornar relevante:

> [...] a harmonia e alternância entre as etapas sucessivas, onde o funcionamento é tanto melhor quanto menos se distingue o término de uma e o início da seguinte. [...] A técnica alimenta o significado que alimenta a técnica .... e assim por diante (MACHADO, 1990, p. 116).

Tema B: O número PI, o número de Euler e o número de ouro.

Coleção A.

No livro do 8º ano, capítulo 13, no item denominado ‘Um Toque a Mais’, a primeira menção ao valor de PI envolve um texto relatando a descoberta do empuxo por Arquimedes. Este texto cita, em um parágrafo, dois trabalhos de Arquimedes: a fórmula do volume da esfera e de um método para determinar o valor de PI, mas não tece outras considerações a este respeito. Este tipo de abordagem nos faz indagar os motivos que levaram o livro didático a optar somente pela versão informativa.

O número PI é introduzido na seção seguinte, pela via empírica. No mesmo livro, no capítulo 14 denominado ‘Geometria Experimental’, o texto sugere o desenho de uma circunferência com o compasso, contorná-la com um barbante e dividir o comprimento do barbante pela medida do diâmetro, o que resulta 3,1 (um valor aproximado de PI). Sugerindo que a razão entre o perímetro da circunferência e o diâmetro de uma circunferência é invariável, sem maiores explicações, afirmam que métodos dedutivos permitem obter o valor de PI com maior precisão, expondo o valor $\pi = 3{,}1415926$. Este tipo de discurso implicitamente representa um salto do viés empírico para um argumento teórico.

No livro do 9º ano, capítulo 12, no item denominado ‘Círculo e Cilindro’, os autores retomam o número PI como sendo a razão entre o perímetro do círculo e o diâmetro correspondente. O livro-texto expõe a inscrição e circunscrição de polígonos regulares a uma circunferência de raio R, conforme exposto na figura 14, mencionando que para o caso particular de um quadrado, o intervalo é dado por: $2r^2 < \pi < 4r^2$.

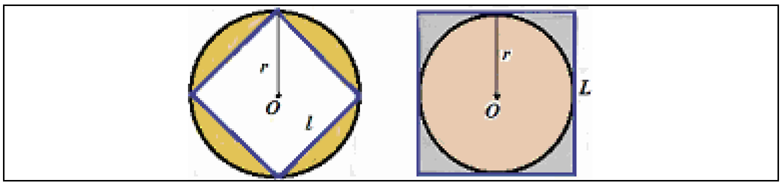


Figura 14: Inscrição e circunscrição de um quadrado [Fonte: Coleção A].

Em seguida, o livro cita que o processo consiste em subdividir o número de lados, para se obter polígonos inscritos e circunscritos de lados 16, 32, 64 e 128. A seguir, comenta que para um polígono inscrito e circunscrito de 180 lados o valor de PI fica delimitado entre $3{,}140 < \pi < 3{,}144$. Porém, o texto não explica como obter este intervalo, justificando: “Os cálculos são complicados, mas não é necessário que você os faça sozinho. Importante é compreender as ideias” (p. 230).

Também acreditamos que compreender ideias é importante. Este mote inicial poderia ser ampliado, por meio de uma situação de aprendizagem utilizando, por exemplo, uma planilha eletrônica e delimitando valores racionais para PI, por excesso e falta, dentro da proposta de inscrição e circunscrição de polígonos regulares a uma circunferência, expresso pelos autores. Isto possibilitaria um caminho trilhando patamares de evolução da significação do conceito de PI, viabilizando o acesso ao conceito teórico de um número irracional, a relação com o infinito e o contínuo, através da operação de aproximação.

O livro da coleção A traz contribuição ao relacionar o número π a um processo infinito, no caso de polígonos inscritos e circunscritos. O texto cita que, ao se dividir pela metade o número de lados do quadrado inicial, se obtém um polígono regular de oito lados, conforme ilustra a figura 15. Este processo, se realizado sucessivamente, leva a um processo infinito.

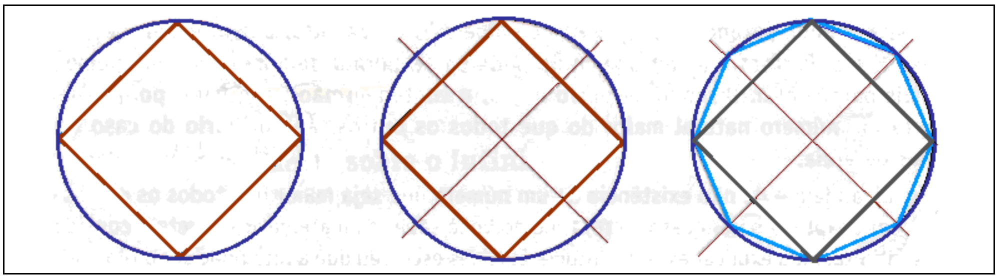


Figura 15: Construção do octógono regular inscrito, a partir do quadrado [Fonte: Coleção A].

O texto apresenta uma visão inicial do infinito, na forma potencial, no item 'Um toque a mais' do livro do 9º ano, capítulo 12. Parte-se da ideia de que, numa praia, há um grande, porém finito número de grãos. Os autores ressaltam que no conjunto dos números naturais, o conceito de sucessor permite a seguinte afirmação: "a contagem pode não parar porque não existe um número natural maior do que todos os outros, ao contrário dos grãos de areia" (p. 239).

A seguir, o texto apresenta outros contextos geométricos em relação ao infinito na forma potencial: a reta e o segmento de reta. No caso da reta, que não tem começo nem fim, esta pode ser prolongada indefinidamente. No caso do segmento de reta, os autores discutem um argumento dedutivo: "dados dois pontos diferentes, existe sempre um terceiro ponto entre eles. Essa sentença nos leva a um processo que é infinito" (p. 239).

Por último, no livro da 8º série, capítulo 13, no item 'Um Toque a Mais', há a exposição de alguns valores obtidos para PI, numa retrospectiva histórica.

Observamos que não há menção do número do Euler e do número de ouro.

Coleção B.

No livro do 7º ano do Ensino Fundamental II, capítulo 1, no item 'Um número irracional especial: π', os autores expõem uma simulação, a qual permitiria medir valores do perímetro pelo uso de barbante e do diâmetro de circunferências, o que viabiliza o cálculo de valores aproximados de PI.

No livro do 8º ano, capítulo 1, no item 'Números Reais', o número PI é apresentado através de exemplos, medindo o perímetro do círculo e dividindo-o pelo diâmetro (moeda, latinha cilíndrica e Compact Disk) e, em seguida aproximando-o para duas casas decimais. Por último, fazem breve relato da história de Arquimedes e a determinação de um intervalo para PI através de polígonos inscritos e circunscritos.

O conteúdo e o discurso desta coleção são apresentados de forma extremamente reduzida. Os autores se limitam a uma breve introdução, num viés empírico, que é um início viável, porém a questão não se encerra aí: existe a necessidade de um trabalho posterior desenvolvendo o conceito de PI.

Constatamos que não há menção ao número do Euler ou ao número de ouro.

Coleção C.

Na Unidade 1, volume 1, no item 'Números Irracionais', é apresentado o número PI: "Além dos números irracionais representados por radicais, existem outros números irracionais famosos, como o π (pi), obtido quando dividimos o comprimento da circunferência de um objeto qualquer e o diâmetro de uma circunferência" (p. 16). A seguir, o livro expressa que "[...] o valor de PI pode ser representado por uma dízima não-periódica aproximadamente igual a 3,141592654" (p. 16).

Na Unidade 4, volume 3, no item denominado 'Flash Matemático', é abordada a temática da quadratura do círculo. A explanação faz uma retrospectiva histórica, com argumentação jornalística, do problema até os dias atuais, citando um recorde atual de casas decimais. Mas não explica o significado ou importância de tal busca de casas decimais, nem esclarece a natureza irracional do número PI.

Ao final, há referência ao processo de exaustão, que consiste em inscrever e circunscrever polígonos regulares ao círculo, método que permitiu a Arquimedes "[...] mostrar que o valor de π estava entre 3 inteiros e $\frac{10}{71}$ e 3 inteiros e $\frac{10}{70}$, uma aproximação razoável que foi bem aceita durante quase dezoito séculos" (p. 121).

Nesta situação, não ficou claro o que as autoras subentendem por uma 'aproximação razoável': é no sentido do cidadão ou se referindo ao mundo tecnológico e científico, onde a natureza teórica de PI se mostra relevante? Esta importante situação merece ser explorada. Que conjecturas matemáticas, em nível de ensino básico, podem ser encaminhadas para tentar explicar como Arquimedes obteve estes valores?

No texto mencionado, também há referência crítica com relação à corrida para se determinar o maior número de casas decimais de PI: "Tal cálculo é inútil, pois, como observou o astrônomo americano Simon Newcomb (1835-1909), dez casas decimais são suficientemente precisas para dar o valor da circunferência do planeta Terra com erro inferior a uma fração de polegada; e trinta casas decimais dariam a circunferência do universo visível com extraordinária precisão" (p. 121).

Este texto veiculado no livro didático pode ser questionado: será que o discurso de um astrônomo, profissional que utiliza os números num viés pragmático, esgota o problema? Esta referência particular da astronomia é válida para todas as ciências e, ainda, é suficiente para tratar esta questão no âmbito da educação básica?

A sugestão do texto transparece o viés pragmático como essência de todas as áreas científicas no ciclo básico. Nossa posição é discordar: não podemos ocultar a essência teórica dos números irracionais aos alunos do ensino básico. A questão essencial que se deve discutir é como encaminhar tal problema, no ensino de Matemática Elementar.

Uma contribuição essencial para o ensino básico com relação a 'corrida ao PI' advém das ciências da computação. De modo básico, "[...] um computador, como toda máquina, precisa ser testado contra possíveis defeitos, antes de começar a funcionar. Uma maneira de fazer isso é mandá-lo calcular alguns milhares de dígitos de PI e fazê-lo comparar o resultado obtido com o que já se conhecia" (LIMA, 2000, p. 127). Deste modo, o cálculo de PI permite testar os modelos computacionais e delimitar a precisão dos próprios computadores, por meio de modelos matemáticos, de natureza teórica.

Além dessa explicação inicial, é possível acrescentar o significado de aproximar um número irracional. Isto implica entender a natureza racional, limitada e finita de operação dos computadores, mas que se constitui no único meio de acesso pragmático de um número irracional, cuja natureza é teórica e infinita. A memória dos computadores e calculadoras registra somente um número:

> [...] finito de dígitos; por maior que ele seja, sempre será um número finito. Considerando o universo dos números, porém, observamos que a maioria deles possui uma representação decimal infinita, o que toma impossível para qualquer máquina trabalhar com eles: somente poderão ser utilizadas aproximações (BONOMI, 2008, p. 1).

Considerando-se o número de Euler este é apresentado no livro texto ao final da Unidade 8, volume 1, no item 'Sistema de Logaritmos'. Como apêndice ao tema, o texto cita que existe um sistema de logaritmos na base **'e'**, descrevendo o valor aproximado 2,7182818, sem explicitar que o mesmo é um número irracional. Ainda, o manual relata que os logaritmos na base **'e'** são denominados logaritmos naturais ou neperianos, em homenagem a John Napier. Mas qual a relação da denominação 'natural' com o número de Euler? E por que o texto apresenta o valor aproximado?

Por último, o texto menciona o segmento áureo, representado pela letra grega 'fi' (ϕ), como a razão entre lados de um retângulo, conceito utilizado no campo artístico (figura 16).

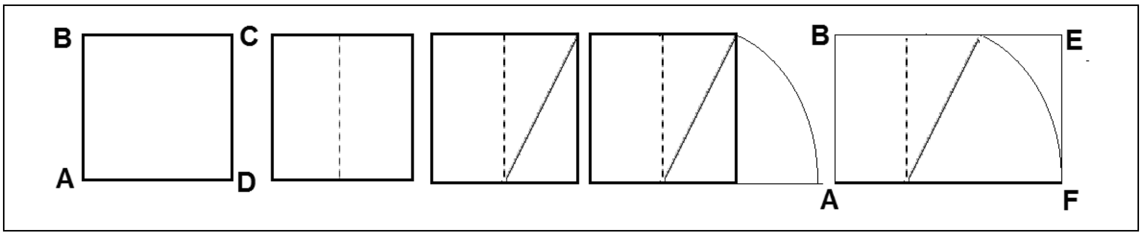


Figura 16: Obtenção do segmento áureo AF [Fonte: Coleção C].

O livro-texto expõe a construção do referido retângulo, e, a partir de argumentos geométricos, aplica o teorema de Pitágoras, obtendo o valor $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (figura 17).

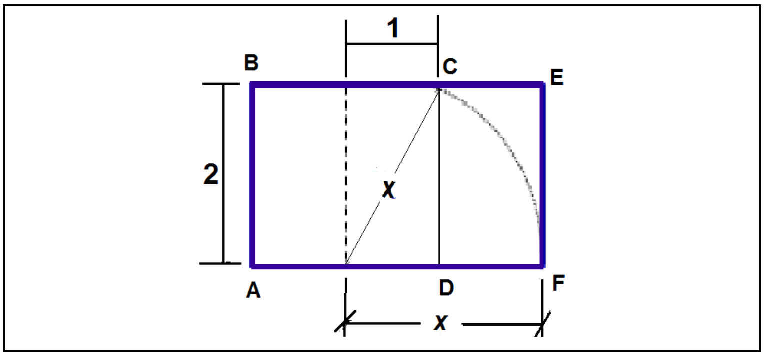


Figura 17: Obtenção do retângulo áureo ABEF [Fonte: Coleção C].

O livro retoma a questão do segmento áureo ao expor a sequência de Fibonacci, utilizando o conhecido problema da reprodução de coelhos, a partir de um único casal, que a cada mês gera um novo casal, que se torna fértil a partir do segundo mês de vida.

As variações de linguagens para expor o número de ouro constituem importante contribuição, mas não foram aproveitadas para explicar a natureza das aproximações e do processo infinito relacionado. Esta opção de discurso adotada pela coleção C não aprofunda o contexto teórico deste número irracional.

Coleção D.

No volume 1, no item Geometria Métrica Plana, no item Circunferência, é representado o número PI, numa analogia com a roda de uma bicicleta, pela definição de perímetro de uma circunferência. “Você já aprendeu que o comprimento de qualquer circunferência é dado pela fórmula C = 2π r, sendo π = 3,14151 ..., um número irracional” (p. 39).

O livro-texto apresenta vários exercícios para uso da expressão C = 2π.r, e considera “[...] π = 3,14 uma aproximação racional com duas casas decimais” (p. 39), sem maiores considerações sobre a natureza irracional de PI . Esta coleção também não explora o papel das aproximações e as implicações entre os dois conjuntos dos números racionais e dos irracionais.

Quanto ao número de Euler, este é apresentado como um apêndice aos logaritmos, como uma base de valor aproximado 2,718281828 ....., para o sistema de logaritmos denominado natural. Não há menção do número de Euler ser irracional. Notamos que a opção escolhida para representar as casas decimais (**1828**), para o valor indicado (2,7**1828***1828*), pode iludir o leitor a erroneamente crer que existe regularidade na formação das casas decimais. O texto ainda apresenta o número de Euler pela definição $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$, uma linguagem de difícil acesso neste ciclo.

Por último, o livro contém cinco problemas, não-resolvidos, indicando possíveis aplicações do valor do número de Euler. Os contextos das situações envolvem a curva de aprendizagem (p. 236), o decaimento radioativo (p. 252), o crescimento de populações (p. 257), o crescimento de uma mancha de petróleo devido ao vazamento de uma plataforma marítima (p. 258) e a estimativa pelo método de carbono 14 (p. 277).

Nestes problemas, os enunciados apresentam as leis de função, na forma algébrica, cuja expressão aparece explicitamente o número de Euler. Ao leitor cabe aplicar, de modo operacional, os conhecimentos matemáticos para obter as soluções pedidas. Apesar dos contextos variados apresentados, o modo operatório expresso na forma de proposição dos temas fica associado a exercícios rotineiros, que não é suficiente para significar o número de Euler.

Coleção Extra.

Quanto ao número PI, os autores apresentam-no no livro 9, capítulo XVII como a razão entre o perímetro e diâmetro do círculo. A seguir, para “ter uma noção do número

PI" (p. 231), apresentam uma tabela de tripla entrada, contendo as razões $\frac{p_i}{2R}$ e $\frac{p_c}{2R}$, onde p_i representa o perímetro interno ao círculo de raio R e p_c representa o perímetro externo ao círculo de raio R.

O livro não ilustra como surgem estas relações, se limitando a apontar o intervalo 3,14145 < π < 3,14188, apresentação que não condiz com o discurso "[...] assim vai 'nascendo' o número PI" (p. 231).

No volume 2, intitulado 'Logaritmos', no capítulo II, dedicado a Função Exponencial, os autores expõem a construção do gráfico da função $f(x) = e^x$, onde **'e'** é apresentado como o número de Euler, dado por **e** = $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$, com x ϵ R.

O texto contém uma tabela ilustrando alguns valores de x, no intervalo [-3;3] e localizados no plano cartesiano, o que acarreta o registro gráfico. É destacado que, para x = 1, o valor numérico da função $f(x) = e^x$ corresponde ao número de Euler (e = 2,7183), sem explicar que este valor apresentado é uma aproximação. A introdução formal tem contribuição limitada pelo uso de linguagem algébrica e exposição de conceitos sofisticados, principalmente ligados ao limite de uma função, tema cuja apresentação no Ensino Médio exige grande cuidado.

O volume 8 aborda o número de Euler. Após a apresentação da função $f(x) = (1+\frac{1}{n})^n$, no âmbito de N^*, o número de Euler é definido como $\lim_{x \to +\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$, denominado o limite exponencial fundamental, uma linguagem algébrica que dificulta o acesso ao significado do tema. O discurso apresentado neste livro pode criar no leitor a falsa percepção de que o acesso aos significados matemáticos necessita tão somente da sintaxe matemática, algo que discordamos quando se considera o ciclo básico.

O texto menciona que o número de Euler é um número irracional, cujo valor aproximado é 2,7182818284. Por último, seguem-se os habituais exercícios de aplicação, cujos resultados envolvem potências do número de Euler.

No volume 2 (Logaritmos), no capítulo III, após a introdução da definição canônica de logaritmos, e das consequências da definição, é apresentado o item 'Sistemas de Logaritmos'. No 5º parágrafo, é relatado que "[...] o sistema de logaritmos neperiano é o sistema de base **'e'** (e = 2,71828... [um] número irracional), também chamado de sistema de logaritmos naturais. O nome neperiano vem de John Neper [...]. O nome *natural* se deve ao fato de que no estudo dos fenômenos naturais geralmente aparece uma lei exponencial de base **e**" (p. 55).

O segmento áureo surge no livro 9, capítulo XVII, intitulado 'Polígonos Regulares', na definição formal $\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$, onde $\frac{x}{a}$ representa a razão áurea. Os autores aplicam um tratamento algébrico à definição, obtendo $x^2 + ax - a^2 = 0$, e expõe o resultado $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.a$, sem posteriores comentários.

Esta coleção utiliza várias definições, todas apresentadas de modo formal. Esta opção restringe o significado, pois privilegia somente a sintaxe, não elucidando termos e conceitos envolvidos, o que poderia ser realizado por meio de uma abordagem didática que expressasse ideias, utilizando maior diversidade de linguagens e meios didáticos para dar continuidade ao tratamento do tema.

Analise e Síntese do Tema B: O número PI, o número de Euler e o número de ouro.

O Número PI.

Observamos no núcleo I (O Processo de Inicialização dos Números Irracionais) que as coleções A e B fazem a introdução conceitual do número PI pela definição clássica: razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência, num viés geométrico e empírico. As coleções C e D realizam a introdução conceitual ao número PI num contexto dual: o modo empírico e pela definição. A coleção extra introduz a apresentação formal, sem acesso ao empírico.

Quanto ao uso de linguagens, os livros adotam a abordagem numérica, algébrica e geométrica. Com relação aos meios didáticos, os livros do Ensino Fundamental II se restringem ao uso de materiais empíricos, conforme se ilustra no quadro 7.

Quadro 7: O uso de meios didáticos para acessar o número PI.

Coleção A	Coleção B	Coleção C	Coleção D	Coleção Extra
Compasso; simulação com barbante e trena.	Compasso; simulação com barbante e trena.	---	---	---

Considerando-se para análise o núcleo II (O desenvolvimento e a amplitude conceitual dos números irracionais), os livros não fazem articulação entre as poucas linguagens utilizadas. Isto promove uma excessiva simplificação ao estudo de PI, o que culmina em lidar com poucas referências, acentuando assim, como função do livro didático, promulgar fatos sem remeter a maiores explicações.

A constatação fica elucidada ao observamos a exposição do processo de inscrição e circunscrição de polígonos a um círculo, delimitando um intervalo racional para o número π. Todos os livros analisados, com exceção da coleção D, fazem um breve relato do processo. Porém, somente a coleção A apresenta disposição em ampliar o discurso. Para isso, além de fornecer uma explicação inicial, a coleção A calcula a área do quadrado inscrito e circunscrito para a primeira parte do processo. Entretanto, o texto se limita a trabalhar uma possibilidade, não desenvolvendo as demais etapas do processo, justificando que os cálculos são complicados.

Porém, existem meios didáticos de acessar tal processo de modo a promover um maior desenvolvimento conceitual do tema. Um exemplo disso são as planilhas eletrônicas, que associadas à questão de aproximação ampliariam o repertório numa sequência que disponibilizaria tanto o discurso textual como a linguagem matemática específica. Vale ressaltar que o uso de recursos informáticos "[...] permite recuperar conceitos matemáticos ou mesmo facilitar a própria construção de muitos conceitos por meio de uma atribuição mais clara e visível de significação. E a consistência da construção significativa do conhecimento pode ser observada" (BONOMI, 2004, p. 7).

No núcleo III (Síntese), concluímos que os livros didáticos realizam uma apresentação simplificadora, que trunca o 'percurso dos núcleos de significação', não permitindo elucidar a natureza do número PI, como um número irracional.

A utilidade de inscrever e circunscrever polígonos à circunferência permitiria explorar um processo infinito onde a aproximação seria o recurso de acesso ao número irracional PI, que dialeticamente poderia ampliar a noção de aproximação. Uma boa aproximação é aquela que sempre pode ser melhorada e corresponde a uma necessidade pragmática. A natureza do número irracional é teórica e a aproximação é um recurso didático propício para se iniciar a discussão de tal natureza.

O Número de Euler.

No núcleo I, observamos que este número irracional é apresentado somente nas coleções C e D, de Ensino Médio, no tópico 'logaritmos', fazendo referência a condição deste número ser uma base natural e ter um valor aproximado, sem maiores explicações. Em nossa análise, concluímos que a coleção C não completa a introdução conceitual do número de Euler, se restringindo a uma abordagem informativa e complementar ao tópico 'logaritmos'.

A coleção D e a coleção extra utilizam a definição formal, não acrescentando significado a brevíssima apresentação do número de Euler. Uma exceção foi a coleção D que apresenta cinco pseudo-problemas envolvendo o número de Euler, por via instrumental de aplicação de fórmula dada no enunciado.

Este tema apresenta uma restrição inicial no 'percurso dos núcleos de significação', ficando a análise deste tema restrita ao núcleo I. Da forma veiculada, o discurso das coleções pouco ilustra o significado do número de Euler, não havendo possibilidade de haver ampliação conceitual (núcleo II).

O Número de Ouro.

Este irracional é apresentado somente nas coleções C e E. O quadro 8 indica as observações referentes ao núcleo I (O tratamento didático dos números irracionais).

Quadro 8: A abordagem introdutória para o número de ouro.

Coleção C	**Coleção D**	**Coleção Extra**
A introdução conceitual do número de ouro ocorre pela representação figural, a partir da construção de um quadrado. Posteriormente, é dado um tratamento algébrico para se determinar o valor de ϕ. São também apresentados alguns contextos de aplicação.	Não há menção	A introdução conceitual do número de ouro ocorre pela representação figural, seguida da definição $\frac{x}{a}=\frac{a-x}{x}$, e, por último em manipulações algébricas, de modo a obter $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Na análise deste núcleo destacamos o antagonismo da apresentação empírica no tratamento da coleção C e a introdução teórica da coleção extra, que tipifica a usual opção pendular de exposição do tema dos números irracionais nas coleções didáticas.

A coleção E apresenta um discurso formal, utilizando somente a linguagem algébrica. Em discurso oposto, a coleção C apresenta variedade de linguagens e de meios didáticos: utilização de textos jornalísticos, representações figurais, uso de cálculos aritméticos, algébricos e figuras geométricas, mobilizando diversos registros para a apresentação do tema. Porém, a predominância pelo empírico limita o desenvolvimento deste tema, não oportunizando a ampliação conceitual e significação do número irracional envolvido.

No núcleo II (O desenvolvimento e a amplitude conceitual dos números irracionais) somente a coleção C avança no 'percurso dos núcleos de significação' em direção a um desenvolvimento conceitual, pelo tratamento algébrico efetuado para se determinar a razão áurea. Porém, segue-se um retorno e fechamento do assunto pela via empírica, ilustrando os contextos das artes e a sequência de Fibonacci.

Considerando o núcleo III (Síntese), o discurso envolvendo o número PI, o número de Euler e o número de ouro limita-se a apresentar informações e sugestões de procedimentos surgidos na História da Matemática, porém não avançam no 'percurso dos núcleos de significação', restringindo a argumentação dos livros didáticos.

Nas coleções, de modo geral, há falta de uma abordagem situando e significando tais números como irracionais: os aportes teóricos são introduzidos ora via empírica, ora via formal, porém sem articulação entre estes modos. Torna-se necessário a construção de modos didáticos de exploração e desenvolvimento de canais entre o pólo empírico e o teórico para poder significar o tema dos números irracionais no ciclo básico.

Destaca-se que a coleção C apresentou o número de ouro de modo mais articulado que a apresentação de PI e o número de Euler, o que possibilitou maior incursão no 'percurso dos núcleos de significação'. Nos manuais escolares é intrigante a recorrente ausência de utilização de meios eletrônicos triviais (calculadora e planilhas eletrônicas) para viabilizar algumas situações de ensino que pudessem desenvolver uma caracterização mais ampla dos irracionais notáveis – o número PI, o número de Euler e o número de ouro - conectando os diversos conhecimentos matemáticos e científicos do currículo da escolaridade básica.

Tema C: Aspectos essenciais do conhecimento matemático relacionados aos números irracionais.

Coleção A.

A coleção A expõe e sintetiza o tema dos números reais no penúltimo capítulo da coleção, uma posição que propicia polêmica: quais os motivos de apresentar o tema dos números reais ao final da obra? Esta opção colabora com a aprendizagem dos alunos?

No capítulo 13, denominado 'Classificação dos números', são destacados os conjuntos numéricos canônicos. Após descrever o conjunto dos Números Naturais e o Conjunto dos Números Inteiros, há a exposição de seis exemplos (-0,333...; ¾; - 22,7; 2,777...; 0,001; $-5/_{1000}$), o que segue a apresentação dos números racionais: "Esses números são frações, números decimais finitos ou ainda dízimas periódicas" (p. 247).

A seguir, o livro didático introduz os números irracionais como os números reais em que o decimal é infinito e não periódico, ou números reais que não são racionais. O texto não menciona a equivalência entre estas duas apresentações e nem menciona a questão da circularidade presente na definição dos números irracionais e reais.

No decorrer da exposição, o manual cita poucos exemplos prototípicos como: "$\sqrt{2}$, π e 0,2020020002000020002...., que são apenas três exemplos de números com essa característica. Há infinitos outros! Por exemplo, a raiz quadrada de qualquer número primo é um número irracional" (p. 249). Ainda, o texto apresenta o conjunto dos Números Reais como a união entre o conjunto dos Números Racionais e o conjunto dos Números Irracionais.

Uma questão crítica neste item analisado é a objetivação em tratar os números reais somente no penúltimo capítulo do livro do 9º ano. Esta opção pode transparecer uma intenção de sintetizar, elucidar alguns aspectos ou pormenores, e acrescentar algumas considerações complementares ou não-essenciais. Esta escolha por uma apresentação simplificada não situa a temática dos números reais como eixo estruturador de um trabalho que deve perpassar os vários anos do Ensino Fundamental I e II e, posteriormente, do Ensino Médio.

Coleção B.

Uma breve referência se situa em um exercício envolvendo potências. O enunciado expõe uma sequência de quatro termos (figura 18), no livro do 9º ano, capítulo 1. Porém, o texto não menciona tratar-se do 'tapete de Sierpinski', assim como não são exploradas as possibilidades da infinitude do processo ou da soma finita de uma série infinita de termos.

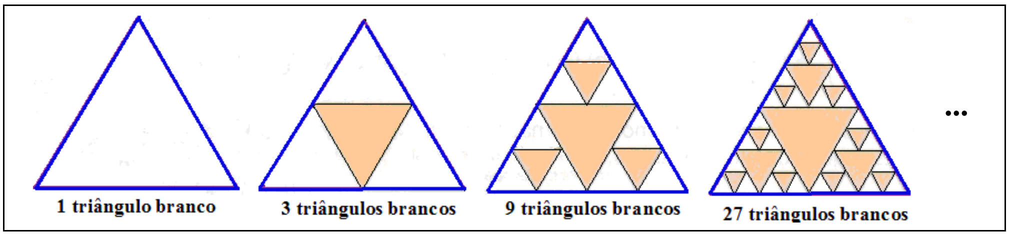


Figura 18: O fractal 'tapete de Sierpinski' [Fonte: Coleção B].

Coleção C.

Na Unidade 1, volume 1, são revisados os conjuntos canônicos, constituintes dos Números Reais: Números Naturais, Números Inteiros, Números Racionais e os Números Irracionais.

No item Números Racionais, são revisitadas as dízimas periódicas, que apresentam implicitamente a questão do infinito. A referência explícita ao infinito surge num recorte do texto denominado 'Flash Matemático'. O livro-texto, ao questionar quantos números racionais existem entre 1 e 2, faz uma representação na reta real de algumas possibilidades de números racionais, na forma decimal finita (ver figura 19).

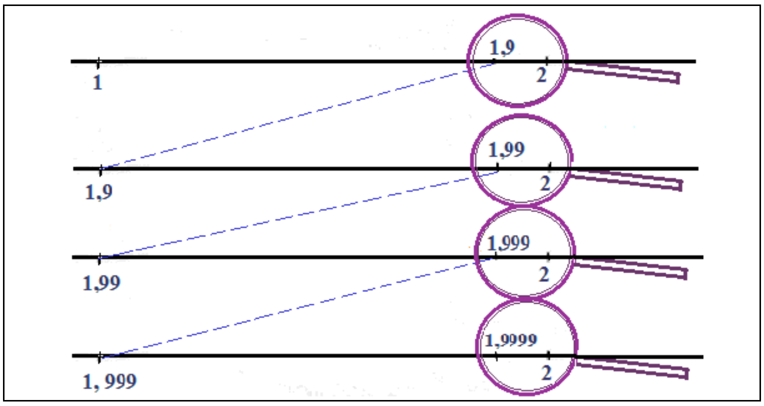


Figura 19: Quantos racionais existem entre 1 e 2? [Fonte: Coleção C].

A partir do intervalo [1;2], o texto considera um racional deste intervalo e sugere a construção de vários intervalos ([1,9;2]; [1,99;2], [1,999;2]), expondo que 'continuando o processo indefinidamente', pode-se afirmar que entre dois números racionais diferentes existe uma infinidade de racionais.

Na Unidade 1, no item 'Intervalos limitados', é apresentada a ideia de infinito, por analogia. O texto expõe um corpo lançado da Terra, ao espaço, com velocidade suficiente para escapar da órbita do nosso planeta que "[...] tenderá a se afastar cada vez mais da Terra. Com isso, sua distância em relação a ela aumentará indefinidamente. Considerando o momento do lançamento desse corpo, as distâncias vão se situar no intervalo [0; +∞[" (p. 30). Pela exploração desta narrativa, o livro cita que os "[...] símbolos +∞ (mais infinito) e -∞ (menos infinito) não são números reais. Eles apenas mostram que uma variável pode crescer indefinidamente (+∞) ou decrescer indefinidamente (-∞)" (p. 30).

Na Unidade 6, no item progressões geométricas, o texto representa graficamente as funções dadas pelas leis de formação $a_n = (\frac{1}{2})^n$ e $a_n = -(\frac{1}{2})^n$ (figura 20).

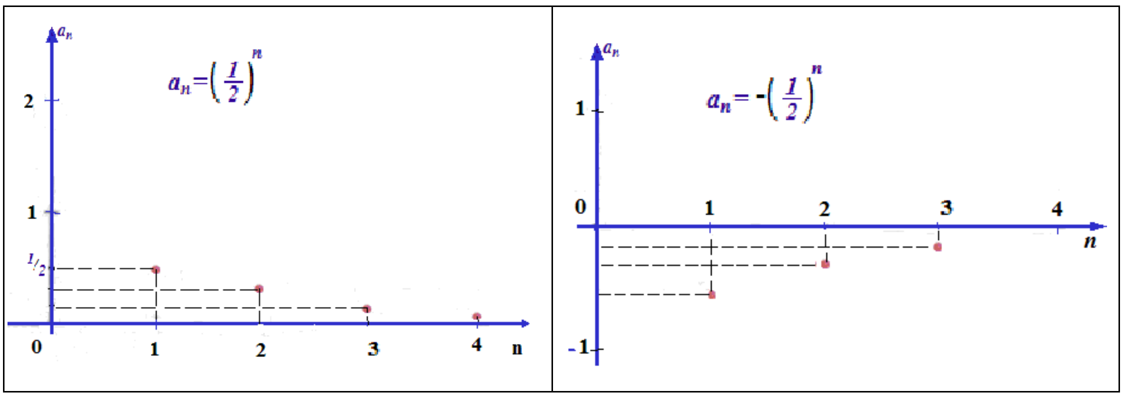


Figura 20: Gráficos das exponenciais $y = (1/2)^n$ e $y = -(1/2)^n$ [Fonte: Coleção C].

Em seguida, o texto argumenta que se *n* aumenta indefinidamente, ou seja, tende a infinito, os valores da função tendem a zero, apresentando intuitivamente a ideia de infinito na forma potencial. A seguir, o livro-texto expõe algumas sequências infinitas (convergentes), particularizando para as progressões geométricas do tipo (a_1, $a_1.q$, $a_1.q^2$,...) e determinando a soma dos infinitos termos, para o caso de $-1 < q < 1$: $S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

Na Unidade 11, volume 3, é retomada a questão do método da exaustão, no item 'Flash Matemático', em linguagem jornalística. O livro aborda o problema histórico de determinar a área sob um arco de parábola, recaindo na soma de infinitos termos $S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ...$ Também, é exposto que Arquimedes calculou tal soma convergindo para $4/3$. Em seguida, o texto retoma o tema das somas de infinitas parcelas, destacando que, para Cauchy, a soma $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ tende a 2, mas nunca chegava a este resultado. Porém, o texto elaborado não forneceu nenhum argumento para explicar tais resultados.

Em particular, as sequências indicadas no texto jornalístico representam a soma dos infinitos termos de uma P.G., assunto do currículo de Matemática Elementar e de apresentação não usual em exercícios de rotina. Isto configura uma perda de oportunidade para explorar as contribuições das sequências infinitas cuja soma representa um número discreto e finito.

Na Unidade 4, volume 2, o termo infinito é utilizado de modo intuitivo para designar as soluções de um sistema linear, de ordem 2, na forma indeterminada, pois "[...] existe uma infinidade de pares ordenados que verificam simultaneamente as duas equações" (p. 129).

No caso de um sistema linear, de ordem 3, no item 'Flash Matemático', na Unidade 4, volume 2, p. 137, o livro-texto fornece uma visualização geométrica no caso de um sistema linear (3x3) possível e indeterminado: planos que possuem uma reta comum ou coincidentes.

Outra contribuição da coleção C são os fractais. Na Unidade 3, volume 1, é apresentado o tapete de Sierpinski (figura 21), contextualizando as funções. A exposição inicia com a representação gráfica, elaboração de tabela e lei de formação, sem maiores explorações sobre o número infinito de termos e o resultado finito da soma da série, dentre outras implicações.

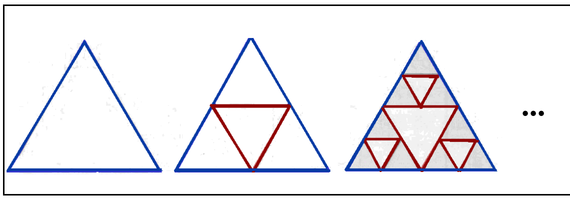


Figura 21: O tapete de Sierpinski [Fonte: Coleção C].

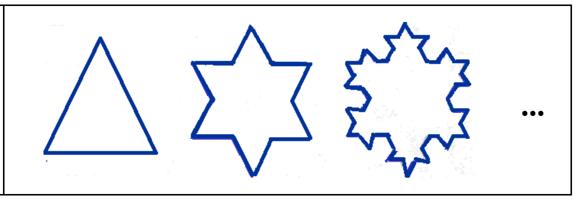


Figura 22: Os flocos de neve de Kock [Fonte: Coleção C].

A introdução da Unidade 6, volume 1, apresenta três configurações iniciais da curva de flocos de Neve de Kock (figura 22). A partir da questão “Você consegue descobrir como a segunda e terceira figuras foram obtidas a partir da primeira?” (p. 158), o livro-texto introduz o tema ‘Seqüências’.

Ao término da unidade, no item ‘Flash Matemático’ são retomados outros exemplos de fractais, sendo fornecidas explicações das várias formas possíveis, tomando como base registros de figuras geométricas e fotos, configurando uma visualização espacial para as sequências numéricas.

Na Unidade 8, volume 2, p. 266, o tema dos fractais é retomado, de modo jornalístico, destacando informações envolvendo aspectos topológicos: a dimensão das figuras geométricas. O texto informa que o ponto tem dimensão zero e a reta dimensão 1, mas um fractal do tipo dos flocos de Neve de Kock teria dimensão entre 0 e 1, mas os argumentos expostos não compõem um quadro suficiente para sustentar tais afirmações.

Coleção D.

No volume 1, no item das Progressões Geométricas, é proposto um exercício envolvendo o fractal ‘tapete de Sierpinski’ e outro envolvendo a Poeira de Cantor. Ambas as situações são passíveis de explicações referentes a sequências convergentes de infinitas parcelas e a relação discreto e contínuo[25], porém não há menção.

Para explicar que entre dois números racionais distintos sempre existe outro número racional, o texto situa dois números (zero e meio) e, utilizando o conceito de média aritmética, determina vários intervalos numéricos com extremidades compostas por racionais. Por tal raciocínio, “podemos imaginar que entre dois números racionais distintos existem infinitos outros números racionais” (p. 91). O discurso necessitaria ser mais explorado a fim desenvolver a ideia de densidade dos números racionais.

[25]A Poeira de Cantor e a relação discreto/contínuo estão desenvolvidas em Brolezzi (1996).

Coleção Extra.

No volume 8, intitulado 'Limites, Derivadas e Noções de Integral', o autores abordam o Infinito, como tema principal do Capítulo III. Introduzem tal assunto a partir da elaboração do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, atribuindo "[...] a x valores próximos de 1, à esquerda de 1, [...] e atribuindo a x valores próximos de 1, à direita" (p.54). O livro apresenta uma tabela com tais resultados, esboça a representação cartesiana da função e argumenta que "[...] podemos tornar f(x) tão grande quanto desejarmos, isto é, maior que qualquer número positivo, tomando valores para x bastante próximos de 1 e escrevemos: $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$, onde o símbolo $'+\infty'$ lê-se *mais infinito*" (p. 54).

Após esta introdução, através de um exemplo, os autores apresentam a definição formal, através da linguagem algébrica formal e sintética:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Por último, o livro didático observa que "o símbolo $'+\infty'$ não representa nenhum número real, mas indica o que ocorre com a função quando x se aproxima de *a*" (p. 55). Os autores expõem outros três exemplos para introduzir o que denominam símbolo $'-\infty'$, com a mesma forma.

Na sequência, o texto descreve as propriedades dos limites infinitos, partindo da linguagem formal descrita acima. Também apresentam e demonstram teoremas através de manipulações lógico-dedutivas, próprias de um curso de Cálculo Diferencial e Integral, em nível introdutório para o 3º grau. Assim, o infinito é tratado no decorrer do Capítulo a serviço dos limites. Vale relembrar que os limites constituem uma ferramenta desenvolvida por matemáticos para prover rigor ao tópico 'derivadas' e, portanto, deveria se ater a ocasiões para o desenvolvimento do conhecimento matemático, em nível de Ensino Superior.

Entendemos que essa forma de apresentação formal é uma opção didática que cria obstáculos a significação do tema dos números irracionais para o ensino básico, devido ao exagero e exclusividade na sintaxe e pelo uso dos sofisticados conceitos envolvendo o tema 'limites', representando assim sérios entraves à compreensão de ideias e a formação de significados para esta faixa de ensino.

Analise e Síntese do Tema C: Aspectos essenciais do conhecimento matemático, relacionados aos números irracionais.

Os encaminhamentos realizados envolvendo a exposição e esclarecimento dos aspectos essenciais do conhecimento matemático envolvendo os números irracionais e, por consequência, dos números reais aparecem de modo escasso nas coleções B e D. Isto representa uma simplificação e um ocultamento de ideias fundamentais ao ensino de Matemática Elementar. De modo geral, os livros-texto apresentam aos alunos:

> [...] somente rudimentos dos números reais e uma abordagem operatória, cotidiana e pragmática das funções. Porém, nos estudos posteriores a serem realizados no Ensino Superior as disciplinas necessitam de um estudo destes tópicos como objetos de ensino, não como noções paramétricas (BARUFI, 1999, p 50).

Uma exceção foi a coleção C, que teve preocupação em explorar discursos na forma de texto jornalístico, figuras e exercícios propostos envolvendo fractais e uma ideia intuitiva do infinito. Esta coleção enfatiza os fractais com linguagem predominantemente geométrica, propondo uma discussão inicial envolvendo os temas sequência, séries e convergência. O estudo usual adotado pelas autoras é a de resolução de problemas, ligados à progressão geométrica e a soma dos infinitos termos. Associam também possibilidades de tratamento funcional e aliam a descrição jornalística de alguns fractais. Porém, se atém ao mundo pragmático, sem explorar um discurso mais abrangente e teórico, esclarecedor e articulador com relação aos aspectos de séries infinitas: a convergência e a ideia de infinito.

Quanto ao núcleo I (O Processo de Inicialização dos Números Irracionais), o quadro 9 sintetiza as coleções que realizam um tratamento inicial ao infinito.

Quadro 9: A introdução conceitual do infinito.

Coleção A	Coleção B	Coleção C	Coleção D	Coleção Extra
A introdução conceitual do infinito contrapõe a ideia de conjunto finito, surgindo através da contagem, pela possibilidade da existência de sucessor no âmbito do conjunto dos números Naturais.	Sem menção	A ideia de infinito é introduzida por analogia à Física, onde a distância de um objeto, tipo foguete, lançado verticalmente, aumentará indefinidamente.	Sem menção	Introdução através de exemplo, onde o infinito surge na concepção de tornar um número tão grande quanto se queira. Segue-se uma definição formal.

Quanto a coleção A, o processo de inicialização aos aspectos essenciais do conhecimento matemático envolvendo os números irracionais se encontra reduzido a exposição de alguns exemplos prototípicos, para então definir os irracionais como números decimais infinitos não-periódicos ou números reais que não são racionais.

O discurso da coleção A recai na questão da circularidade, além de não explicar a equivalência destas duas conceitualizações. Outro problema que apontamos na coleção A é a opção de sistematizar o conhecimento no penúltimo capítulo.

Considerando-se a coleção C, há um processo de inicialização aos tópicos essenciais relacionados aos números irracionais com predomínio da apresentação pelo viés empírico, não havendo articulação com o teórico. O texto utiliza linguagens diversas, porém o desenvolvimento do tema fica limitado, não caracterizando avanços para a ampliação e articulação conceitual.

De modo oposto, a apresentação teórica e formal da coleção E dificulta a apresentação significativa deste tema. As coleções B e D praticamente se omitem em relação a este assunto.

Quanto ao uso de linguagens variadas, encontramos várias representações nas coleções de Ensino Fundamental I: funcional (F), geométrica (Geo), gráfica (Graf), reta numérica (R), sequência numérica (SN), simbólica (S) e textual (T), conforme sintetizado no quadro 10.

Quadro 10: O uso de linguagens variadas nas coleções analisadas.

Coleção A	**Coleção B**	**Coleção C**	**Coleção D**	**Coleção Extra**
F; Geo; R; SN; S; T	SN	Todas	SN	F; Graf; SN; S

Remetendo ao núcleo II (O desenvolvimento e a amplitude conceitual dos números irracionais), a coleção A expõe várias linguagens, contextualizando situações de conjuntos finitos, para então utilizar o conceito de sucessor de um número natural para introduzir a ideia do infinito através de um processo de contagem. Os autores da coleção A utilizam algumas ideias encontradas no conhecimento histórico da Matemática para abordar a questão do infinito, porém carecem de desenvolvimento e extensão, como, por exemplo, em um discurso que envolvesse a relação do infinito com os conjuntos enumeráveis.

Na coleção C, em relação ao núcleo II, ocorre uma diversidade de linguagens. Na maior parte dos exemplos e ilustrações, há o uso intuitivo do infinito na forma potencial. A referência explícita ao infinito ocorre na apresentação do intervalo [1;2] na reta real e nas inúmeras possibilidades de representar um número racional neste intervalo. Porém, não há uma relação explícita da relação do infinito com os conjuntos enumeráveis.

Na coleção extra ocorre tratamento axiomático do infinito, o que pode servir de busca a fatos e informações do saber matemático, mas apresenta poucas referências quanto a um tratamento didático adequado à faixa de ensino da Matemática Elementar.

De modo geral, o núcleo II (O desenvolvimento e a amplitude conceitual) apresenta um desenvolvimento parcial dos números irracionais no ‘percurso dos núcleos de significação’. Em síntese, concluímos que os livros didáticos analisados expõem de modo restrito os aspectos essenciais envolvendo os números irracionais, o que limita a possibilidade de uma abordagem significativa deste tema no ensino básico.

Análise comparativa entre as temáticas

De modo geral, a análise dos ‘percursos dos núcleos de significação’ realizada em relação aos três temas que nos propusemos a verificar nos livros didáticos - o surgimento das raízes enésimas irracionais; o número PI, o número de Euler e o número de ouro; aspectos essenciais do conhecimento matemático relacionados aos números irracionais - indica que as coleções analisadas poderiam apresentar maior ênfase e desenvolvimento diante da complexidade destes tópicos essenciais ao ensino básico.

Considerando-se que os irracionais representam a quase totalidade dos números, fato raramente abordado no ensino básico, e a circularidade envolvendo as definições de números irracionais e reais veiculadas nos livros didáticos, o entendimento do tema dos números irracionais perpassa o estudo de aspectos dos números reais.

Neste enfoque, vale relembrar que “[...] os números reais são provavelmente o objeto matemático mais amplamente utilizado durante os estudos universitários, mas eles não são introduzidos apropriadamente neste nível” (BARTHEL, 2010, p. 1).

Estas ponderações acentuam uma importante questão em nível educacional: por que se ensina o tema dos números reais no ciclo básico?

No ensino básico, o momento de introdução dos números reais equivale a marcar a disjunção entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. Porém, existem importantes relações entre os números irracionais e os números racionais, não devidamente caracterizadas e exploradas no ensino básico.

Uma conexão entre os racionais e irracionais é o ato de medir. No cotidiano, medir remete a uma comparação entre uma grandeza, de natureza contínua, com algum tipo de unidade padrão, onde o resultado por ser expresso por meio de um número racional.

A necessidade ou desejo de acessar um número irracional, ou seja, uma dízima não–periódica, ao mundo pragmático necessariamente implica em uma operação de aproximação. A aproximação de um número irracional corresponde à possibilidade de substituí-lo por um número decimal finito, de acordo com o grau de precisão desejado ou possível, face às características da atividade envolvida.

Posta desta maneira, a questão da aproximação pode ingenuamente transparecer que os números racionais são sempre suficientes para nosso mundo pragmático, não havendo espaço para os números irracionais. Realmente, nosso senso comum nos leva a crer que os "[...] resultados aproximados são úteis e razoáveis no mundo da engenharia, por exemplo, bem como no campo das simulações, de modo geral" (BARUFI, 2008, p. 1). Porém, a questão das aproximações não é suficiente para regular todas as atividades, surgindo algumas restrições, até mesmo em se considerando o aspecto pragmático.

Um mundo onde a questão das aproximações está sempre em relevo é a informática. O computador, essencialmente, é uma máquina que faz cálculos muito rápidos, utilizando números racionais finitos, desde a entrada de dados, o processamento destes e a saída dos resultados. Porém, apesar da extrema rapidez e possibilidade de armazenamento de uma grande quantidade de dados, as memórias deste instrumento têm uma capacidade limitada de armazenamento, ou seja, em cada memória é possível estocar um número finito de dígitos. A cada cálculo realizado e armazenado, uma operação de aproximação é realizada. Após uma grande quantidade de operações, o grau de precisão dos resultados pode não estar em conformidade com o desejo ou necessidade da atividade prática.

Este tipo de estrutura do computador faz com que sejam necessários testes para averiguar a confiabilidade desta máquina. Para isto, são utilizados algoritmos para obter o valor de algumas grandezas notáveis, como, por exemplo, o número PI, o número de Euler, dentre outras constantes matemáticas. Geralmente, os números utilizados para testes são números irracionais, de natureza teórica e infinita, o que requer uma grande compreensão das propriedades e natureza destes elementos.

Esta situação tipifica a insuficiência de se ater somente aos números racionais no mundo pragmático, assim como situa a necessidade de aprofundar o tema das aproximações. Nesse sentido, dialeticamente, no dia-a-dia, os números racionais não podem existir sem o respectivo complementar: os números irracionais.

Diante destas considerações iniciais, quanto aos aspectos de medidas e o par estimativa/aproximação, um lugar natural de se reportar aos números irracionais, os livros didáticos apresentam escassas propostas e uma abordagem didática reduzida.

Uma menção frequentemente encontrada nos manuais analisados foi que, a partir do resultado de uma raiz enésima irracional que aparece no mostrador de uma calculadora, esta ilustra a possibilidade de exprimir uma aproximação para um intervalo com extremidades de números inteiros, ou ainda para a casa decimal ou centesimal.

Porém, os usuários desconhecem a natureza do resultado numérico exposto no mostrador das calculadoras eletrônicas. Torna-se necessário um trabalho didático de esclarecimento e encaminhamento para compreender que os resultados aproximados ao acessar as teclas das calculadoras eletrônicas representam números racionais finitos. A explicação reduzida ou não realizada pode induzir e iludir os alunos no trato dos números irracionais como se fossem decimais finitos e, portanto, racionais. Aliam-se a estas considerações o desconhecimento da gênese e significado dos símbolos estampados no teclado das calculadoras, tal como o número π e o número de Euler, apontados por Machado (1994).

Os livros didáticos, não elucidando o contexto das calculadoras eletrônicas, reduzem a possibilidade de compreensão da natureza dos números irracionais. O uso da calculadora e do computador em sala de aula é um recurso que permite explorar o entendimento dos números irracionais, conciliando a leveza e a rapidez em:

> [...] cálculos sem o peso da repetição de algoritmos, que, sem a tecnologia, precisariam ser executados manualmente pelos alunos ou pelo professor. Toda essa parte é rapidamente solucionada. [...] Uma preocupação sempre presente não é apenas aquela da resolução de determinados problemas, mas também a observação, a análise crítica e a significação dos resultados (BONOMI, 2004, p. 7).

Ainda com relação às aproximações, após a enunciação dos resultados com uma, duas ou até três casas decimais, os livros didáticos citam que as raízes enésimas irracionais ou o número PI são números irracionais, possuindo infinitas casas decimais e não-periódicas, mas não justificam esta declaração. Quais os argumentos que garantem a não-periodicidade nos exemplos citados dos livros didáticos analisados? Ou ainda, quais fatos asseguram que o mesmo possui infinitas casas decimais?

Para a efetivação de um tratamento didático, a fim de superar o salto da apresentação simplificadora dos números irracionais presente nos livros didáticos, seriam necessárias argumentações, justificativas e provas para dar credibilidade às afirmações expressas.

Como observação geral, após nosso olhar voltado aos aspectos salientados nas análises das coleções didáticas, nos parece que houve, em algumas coleções, um esforço didático em adequar o tratamento dos números irracionais à faixa de ensino a que se destinam. Entretanto, tais aspectos não são suficientes para prover significado aos números irracionais.

Do ponto de vista global com relação aos três temas que elencamos – o surgimento das raízes enésimas irracionais; o número PI, o número de Euler e o número de ouro; aspectos essenciais do conhecimento matemático relacionados aos números irracionais - a síntese proporcionada pela incursão ao ‘percurso dos núcleos de significação’, revela que nos livros didáticos analisados há a introdução aos principais números irracionais de modo polarizado: ou se opta por um viés pragmático ou pela definição formal. Porém, após a abordagem inicial não ocorre um intercâmbio destas opções, o que acarreta um rápido esgotamento das ferramentas para se desenvolver as temáticas, representando um fator restritivo ao tratamento significativo dos números irracionais.

Considerando-se o viés empírico, optado em algumas coleções (A, B e C), em geral houve a exploração e uso de algumas linguagens matemáticas, mas que pouco dialogaram entre si. A falta de opções didáticas que promovam o intercâmbio entre linguagens não permite trilhar caminhos que avancem no ‘percurso de significação’ dos números irracionais.

Pela via oposta, nos livros que optaram pela introdução formal (coleção D e extra), via definição, observamos que a linguagem geralmente utilizada fica restrita ao registro algébrico, com posterior exemplificação situada no registro aritmético. Esta limitação de exploração de linguagens também trunca o desenvolvimento de utilização de outros modos, como a linguagem natural, assim como pela diversificação de contextos e recursos que possibilitariam o acesso do significado dos objetos.

Após o treinamento das definições, as obras utilizadas recorrem a exercícios de fixação, explorando o modo sintático de escrita matemática, porém sem encaminhar situações que enriqueçam o repertório e explorem os significados.

Também destacamos outra circunstância: os temas pesquisados aparecem em momentos pontuais no livro didático. Lembrando que significar um conhecimento remete a estabelecer uma rede de relações, a escassa retomada dos números irracionais em outros momentos no desenrolar dos assuntos tratados nos livros didáticos pesquisados não colabora para tecer conexões entre os assuntos que delineamos como o corpo de conhecimentos da Matemática.

Concluímos que os aspectos destacados nos livros didáticos somente iniciam um percurso de introdução aos números irracionais, vinculados principalmente às raízes enésimas irracionais e ao número PI, com algumas poucas menções a outros números irracionais.

Verificamos também uma lacuna entre a introdução inicial dos números irracionais e o posterior desenvolvimento: nas coleções que optaram pela via empírica, relatando situações práticas, assim como nos demais manuais que optaram pela definição formal, o trabalho posterior se pauta numa lista de exercícios ou exemplos modeladores, para treino dos elementos constituintes, destacando aspectos operatórios, determinísticos e finitos.

A síntese do 'percurso dos núcleos de significação' de temas essenciais envolvendo os números irracionais presentes em livros didáticos do ensino básico, fornece indícios da necessidade de expandir o universo atual de significações dos números irracionais, presentes nestes manuais escolares. Isto equivale a estabelecer um campo de significações, ou seja, delimitar uma série de fundamentos didáticos e teóricos que permitam ao leitor navegar pelo 'percurso dos núcleos de significação' e construir significados para determinados temas.

Considerando-se que o modo de apresentação dos assuntos é um fator de grande influência na sala de aula, "[...] um texto como o livro didático deve prover uma negociação de significados através de problemas e situações motivadoras procurando inicialmente trabalhar ideias gerais, contrariamente aos livros que se prendem a uma sequenciação lógica e formal" (BARUFI, 1999, p 50).

Aliado a esse fator seria importante que este tipo de texto viabilizasse um discurso que faça uso do pareamento entre o rigor das definições e conceitos matemáticos associados ao desenvolvimento da percepção e intuição, de modo a favorecer a compreensão das ideias inerentes aos números irracionais.

Isso tem como consequência uma posição onde haja sintonia entre a sintaxe própria da linguagem matemática e o uso da palavra: o conhecimento matemático não remete somente ao viés técnico associado aos aspectos operatórios, finitos, exatos e determinísticos, mas também requer a compreensão. Nas questões envolvendo a técnica e o significado, há a necessidade de uma concepção matizadora entre os aspectos sintáticos, essenciais para se efetivar a comunicação matemática, com os aspectos semânticos, que permitem uma importante abertura para a compreensão de ideias.

Estas ponderações equivalem à oportuna exploração da oralidade, através do recurso a narrativas, simulações, experiências de pensamento e contextualizações, num movimento intramatemático e interdisciplinar, imbuídos de um tratamento permeado por ideias fundamentais da Matemática presentes e características dos números reais: o infinito, o aproximado, o estimado, o discreto e o contínuo.

CAPÍTULO 2

As contribuições teóricas para a construção de significado dos Números Irracionais no ciclo básico.

CAPÍTULO 2

As contribuições teóricas para a construção de significado dos Números Irracionais no ciclo básico.

A pesquisa empírica realizada no capítulo anterior confirmou que as coleções de livros didáticos analisadas não exploram a riqueza das inúmeras relações existentes envolvendo os números irracionais, acarretando um desenvolvimento insuficiente de aspectos essenciais frente às possibilidades de exploração significativa de tal temática.

Em relação à análise dos 'percursos dos núcleos de significação' constatamos que a introdução e o desenvolvimento dos números irracionais se situam em um dos dois pólos: a conceitualização formal ou a abordagem pelo viés pragmático. Conforme indicado no capítulo anterior, estas opções restringem e dificultam o desenvolvimento dos números irracionais.

Na primeira concepção é usual introduzir os números irracionais por meio da definição, com posterior exemplificação e envolvendo exercícios de fixação para concluir a introdução do tema. Consideramos este tipo de abordagem inadequado frente às inúmeras dificuldades presentes no ensino dos números irracionais. Assim, nos posicionamos no referencial de Vygotsky (1998b), para o qual o treinamento ou a transmissão direta de:

> [...] conceitos é impossível e infrutífero. Um professor que tenta fazer isso geralmente não obtém qualquer resultado, exceto o verbalismo vazio, uma repetição de palavras pelo [ser], semelhante a um papagaio, que simula um conhecimento dos conceitos correspondentes, mas que na realidade oculta um vácuo (apud REGO, 2001, p. 78).

Na segunda concepção abordada nos livros didáticos, ocorre a introdução conceitual pelo viés pragmático. Este procedimento inicial e usual é eficaz no tratamento dos números racionais pelos manuais didáticos, validados principalmente levando-se em consideração a origem histórica deste conhecimento, revelados em episódios históricos ligados às necessidades da vida prática.

Existe um hiato entre a concepção pragmática de apresentação e desenvolvimento dos números racionais e a necessária significação dos números irracionais, um conceito abstrato e teórico, de difícil acesso no ensino básico.

Acreditamos que para favorecer um enfoque mais abrangente e permitir uma circulação dos temas referentes aos números irracionais pelo 'percurso dos núcleos de significação' expostos no Capítulo 1, buscamos referenciais para nortear o trabalho didático deste tema no ciclo básico.

Considerando as ponderações referidas na revisão bibliográfica, as investigações citadas pontuaram e diagnosticaram conhecimentos desenvolvidos por professores, alunos de licenciatura e alunos do ciclo básico que, oficialmente, já haviam tido contato com os números irracionais na escola. Relembrando que uma função primordial da escola é viabilizar modos de ensino que permitam a construção de conhecimentos, destacamos a importante e necessária reflexão em como situar referenciais para propor situações significativas para alunos que ainda desconhecem tal assunto.

Deste modo, a questão principal para o desenvolvimento deste trabalho foi: quais são os aportes teóricos que podem nortear a elaboração de situações de ensino que permitam apresentar e desenvolver, de modo significativo, os números irracionais no ensino básico?

A nossa preocupação em discutir e levantar parâmetros em relação aos números irracionais e dos números reais se acentua na medida em que, apesar do ensino de Matemática Elementar perpassar uma vivência de treze anos, estes temas não estão explicitamente viabilizados sob o ponto de vista didático nos livros analisados. Em vista de tais constatações, acreditamos que os números reais poderiam fundamentar questões e ressaltar princípios matemáticos a fim de estabelecer importantes conexões e vínculos entre inúmeros temas presentes no atual currículo de Matemática da escola básica.

Com base nas considerações tecidas anteriormente em relação à importância do tema, sinteticamente expressas na revisão bibliográfica realizada, assim como na análise de temas presentes nos livros didáticos, neste capítulo apresentamos referenciais didáticos, epistemológicos e históricos que situaram um campo de significações, constituindo norteadores para introduzir, desenvolver e ampliar o conceito de números irracionais no ensino básico.

A importância, as acepções e os caminhos para significar os números irracionais.

A importância anunciada sobre o tema se atualiza e se reafirma a partir de documento oficial, quando do lançamento da matriz de referências expressas no ENEM, Brasil (2009). Dentro dos cinco eixos cognitivos propostos no documento, há a designação de sete competências para a área de Matemática e suas Tecnologias. Na primeira delas há a menção explícita: “Construir significado para os números naturais, inteiros, racionais e reais” (BRASIL, 2009, p. 5).

Para uma visão inicial do termo 'significado' reportando-nos aos dicionários Aurélio (2003) e Houaiss e Villar (2008). Verificamos que na origem etimológica significar provém do latim *significare*, denotando querer dizer; expressar; constituir; dar indícios; relacionar um termo ou objeto a fim de compreendê-lo, seja por extensão ou por outros meios.

Vygotsky (1998b) realiza ampla e importante contribuição para o entendimento do termo 'significado'. Para este autor o significado depende tanto do uso que se faz do objeto, quanto do conteúdo semântico específico do conhecimento.

Em face das pesquisas que realizou, Vygotsky (1998b) situou o significado como um fenômeno onde a própria palavra pode ser dissecada e observada em seu aspecto interior. Para o autor, a atribuição de significado às palavras se altera a partir das transformações e evoluções das relações do homem com o meio natural e cultural, configurando o caráter de construção sócio-histórico dos significados. Pode-se considerar que:

> [...] o significado propriamente dito refere-se ao sistema de relações objetivas que se formou no processo de desenvolvimento da palavra, consistindo num núcleo relativamente estável de compreensão da palavra, compartilhado por todas as pessoas que a utilizam (OLIVEIRA, 1993, p. 50).

Especialmente no tocante aos números irracionais, tal tema carece de uma introdução conceitual que possa ser acessada não somente pela peculiar e complexa sintaxe matemática, mas também por meio da palavra. Se o tema dos números irracionais é um assunto complexo e teórico, por natureza epistemológica, não devemos renegar as dificuldades de acessá-lo ocultando-o ou evitando-o. Ao contrário, um dos modos de superar tais empecilhos é explicitá-lo através do ato de significar a palavra.

Vygotsky (2001) considera que a palavra desprovida de significado não é palavra. O significado das palavras representa a unidade entre o fenômeno da linguagem e do pensamento, ou seja:

> [...] representa um amálgama tão estreito do pensamento e da linguagem, que fica difícil dizer se tratar de um fenômeno da fala ou de um fenômeno do pensamento. Uma palavra sem significado é um som vazio; o significado, portanto, é um critério da 'palavra', seu componente indispensável (VYGOTSKY, 1998, p.150).

Para o autor, o pensamento se realiza na palavra e passa a existir através dela, pelas transformações que passa. Vygotsky (2001) compara o pensamento a uma nuvem descarregando uma chuva de palavras, pois um pensamento não é só a expressão da palavra. Entre a transição do pensamento para a palavra, há o significado. Considerado como um fenômeno do pensamento materializado na fala, o significado das palavras representa assim a união entre pensamento e palavra.

Nosso parecer incluiu concepções de Vygotsky (1998b) como modo de contribuição para compreender, situar e iniciar um processo que permita significar os números irracionais no ensino básico. Para o autor, o processo de generalização e o significado das palavras são sinônimos, o que configura a formação de conceitos como um ato específico, autêntico e indiscutível de pensamento. O processo de formação de conceitos não é um processo mecânico e passivo, mas um processo criativo que exige uma atividade cognitiva direcionada pelo uso de signos e também de palavras, de modo:

> [...] que um conceito surge e se configura no curso de uma operação complexa, voltada para a solução de um problema. [...] um conceito não é uma formação isolada, fossilizada e imutável, mas sim uma parte ativa do processo intelectual, constantemente a serviço da comunicação, do entendimento e da solução de problemas (VYGOSTKY, 1998b, p. 67).

Com base neste referencial, a abordagem matemática pode ser aprimorada no ciclo básico considerando-se a possibilidade de significar como um ato de explorar as relações entre pensamento e linguagem, conforme Vygotsky (1998b), em sintonia com a sintaxe própria e complexa da apresentação do conhecimento matemático, que no presente caso envolve os números irracionais. Este modo de concepção pode favorecer a inicialização dos números irracionais através do 'percurso dos núcleos de significação' no ciclo básico, o que representa uma possibilidade de viabilizar um caminho frente à problemática apontada nas análises dos livros didáticos, expostos no capítulo 1.

A seguir, passamos a considerar os estudos envolvendo a formação de conceitos, segundo Vygotsky (1998b). Este teórico estudou o modo como as crianças se apropriam das palavras, tendo percebido que este processo é constituído em diferentes níveis de significação, estabelecidos em pólos situados entre o nível pragmático e o nível teórico.

Para Vygotsky (1998b) os conceitos espontâneos (nível pragmático) são adquiridos por experiência pessoal e cotidiana das crianças. Em contrapartida, os conceitos científicos (nível teórico) são adquiridos e sistematizados nas interações escolarizadas de sala de aula, não sendo acessíveis por meio da pura observação ou manipulação direta pela criança.

Neste sentido, focamos aportes da psicologia cognitiva que considera e aceita a:

> [...] existência e a validade de numerosas formas de conhecimento e pensamento, e de não considerar o pensamento abstrato, formal e lógico como o hegemônico e o melhor para qualquer contexto e situação, pois ele não passa de um tipo específico de conhecimento, [...] que nasceu na antiga Grécia, em função de determinadas condições sócio-culturais e políticas. Sua finalidade, ao contrário do pensamento cotidiano, não é ser útil para um determinado contexto particular, mas transcender o particular para explicar a realidade mediante modelos mais gerais (GÓMES-GRANELL, 1997, p. 17).

Para Turkle e Papert (1992 apud Gómez-Granell, 1997, p. 21), a dicotomia pensamento cotidiano versus pensamento científico deve ser superada em prol de um pluralismo epistemológico, onde se valorizam os processos de construção do conhecimento num viés que priorize a integração e evolução dos processos intuitivos e do pensamento concreto com o pensamento formal, de modo a promover um contexto significativo de aprendizagem.

Nesse sentido, o conhecimento cotidiano não pode ser menosprezado, mas, ao contrário, se constituí numa forma representativa e uma possibilidade de acesso, uma porta de entrada para o indivíduo galgar níveis mais avançados na compreensão e conceituação dos objetos de estudo.

Deste modo, "[...] em um mesmo indivíduo poderiam coexistir e se inter-relacionar formas de pensamento cotidiano e de pensamento científico, que seriam concretizadas em função das exigências do contexto" (GÓMEZ-GRANELL, 1997, p. 19). Assim, a rede dialética entre conhecimento cotidiano e conhecimento científico é possibilitada pela convergência, complementaridade e continuidade do movimento entre o conceito empírico e o conceito científico.

Numa analogia processual aos estudos de Vygotsky (1998b), especificamente em relação à importância da palavra, acreditamos que o navegar pelo 'percurso dos núcleos de significação', considerando-se o transito pela etapa designada como núcleo I (O processo de inicialização dos números irracionais), deve ser realizado na transição e negociação entre o conceito empírico e o conceito científico, o que permite iniciar um movimento para a compreensão e evolução dos conhecimentos inerentes ao tema.

Outro referencial para a jornada envolvendo a viabilização do ato de significar pelo 'percurso dos núcleos de significação' advém da forma de organização e apresentação do trabalho escolar. Levando em consideração a compreensão e a significação dos números irracionais, inicialmente expomos uma retrospectiva em relação a alguns aspectos, em nível curricular, que contribuíram e possibilitaram superar alguns obstáculos no ensino de Matemática e que também apresentam relação com a abordagem do tema deste trabalho.

Pires (2000) destaca que na década de 80 surgiram movimentos de reforma curricular em vários países, que exibiram algumas propostas importantes. Estes documentos situaram algumas referências e apresentaram sugestões de organização do trabalho escolar, configurando significações para o conhecimento matemático e constituindo encaminhamento da problemática do ensino dos números irracionais.

Em particular, as Propostas Curriculares para o Ensino de 1º e 2º graus, em 1985, explicitam sugestões para a apresentação dos conteúdos em diferentes níveis de abordagem:

> [...] em que se procura respeitar a integração dos temas a serem trabalhados, bem como seu desenvolvimento em espiral. [...] Os elaboradores reiteravam a retomada de uma mesma noção em diferentes ocasiões, convenientes para permitir sua elaboração e re-elaboração por parte do estudante (PIRES, 2000, p. 50-51).

A proposta do currículo em espiral, inspirada em Bruner (1987), foi importante na medida em que promove abertura para a interação entre assuntos, configurando um dos possíveis modos de priorizar o resgate e a ampliação de conhecimentos. Porém, surgem algumas restrições a serem consideradas: como esta proposta mapeia possibilidades de novos assuntos serem tratados e relacionados a assuntos anteriores ou a outros temas? Quais são os aportes que norteiam as possíveis ligações entre os conhecimentos?

Para direcionar respostas a estas questões, as Propostas Curriculares para o Ensino de 1º e 2º graus, em 1985, propuseram alguns temas que podem contribuir para o encaminhamento das questões postas no parágrafo acima. Neste documento, na área de Matemática foram definidos os seguintes temas norteadores: a estimativa, as medidas, os números e a geometria. Porém, o avanço indicado para relativizar a sequência de conteúdos esbarrou na preocupação no esgotamento de cada eixo temático - as medidas, os números e a geometria – sem estabelecer as necessárias, importantes e fundamentais relações entre os mesmos.

Um momento de superação surgiu, segundo Pires (2000), a partir de 1995. Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicaram a necessidade de estabelecer conexões entre os blocos temáticos números&operações, espaço&forma, grandezas&medidas e o tratamento da informação.

Quanto ao primeiro bloco temático, os PCN de Matemática, Brasil (1998), enfatizaram que na faixa do Ensino Fundamental II, os números deveriam ser apresentados num viés instrumental, de modo operacional para a resolução de problemas e também como objeto de estudo em si mesmo, considerando as propriedades, as inter-relações entre os conjuntos numéricos estudados (Naturais, Inteiros, Racionais e Irracionais), situando os números através da concepção histórica.

O documento considerava que o trabalho do bloco temático em questão deveria permitir aos alunos compreender o significado dos números, abordados em situações-problema envolvendo medidas e operações, preferencialmente utilizando cálculos mentais e escritos. Neste ciclo:

> [...] os alunos devem ser estimulados a aperfeiçoar seus procedimentos de cálculo aritmético, seja ele exato ou aproximado, mental ou escrito, desenvolvido a partir de procedimentos não-convencionais, com ou sem o uso de calculadoras. [...] O importante é superar a mera memorização de regras e algoritmos (BRASIL, 1998, p. 67).

Além dessa indicação inicial, que representou indícios para considerar um estudo mais aprofundado e abriu possibilidades frente às contribuições do par exato/aproximado, através das questões surgidas ao longo do desenvolvimento histórico, nos PCN de Matemática, Brasil (1998), também houve referências às múltiplas representações utilizadas para expressar os números através de símbolos próprios da linguagem matemática e das relações entre estas grafias: inteira, fracionária, decimal, percentual, notação científica, radicais e símbolos especiais (PI e número de Euler).

Porém, o bloco grandezas e medidas, nos PCN, Brasil (1998), manteve acentuação no caráter pragmático, nos campos de trabalho e ciência, o que, a nosso ver, acarretou certo empecilho ao trabalho com os números irracionais, um tema que necessita de uma abordagem para além do pragmático, conforme foi apontado.

O mesmo documento salienta que a natureza de aproximação da medida constitui um aspecto numérico notório, merecedor de especial atenção, pois permite o desenvolvimento de estratégias de estimativa e discernimento do grau de exatidão necessário para uma dada situação particular.

As considerações nos documentos oficiais revelaram preocupação em estabelecer relações entre os blocos temáticos apontados - números&operações, espaço&forma, grandezas&medidas e o tratamento da informação - mas não trouxeram referências sobre como efetivar tais tessituras e nem em que medida estas poderiam contribuir para significar os conhecimentos matemáticos no ensino básico.

Aliando as considerações anteriores, que sem dúvida trouxeram ganhos para o tema, acrescentamos uma possibilidade de dinamizar a construção de significados. Machado (1995) destacou a necessidade de um olhar mais abrangente para o saber, propondo uma reorganização do processo de circulação do conhecimento como rede de significações.

Machado (2001) aponta que a organização do conhecimento escolar, nos diversos níveis de ensino, se baseia no encadeamento linear, refletindo e orientando as ações educacionais. Este fato pode ser notado pela análise de grades curriculares, onde em geral se observa uma:

> [...] certa cristalização de percursos, no tratamento dos conteúdos dos programas, o que conduz a uma aparência de ordem necessária dos assuntos apresentados. A ideia de que alguns assuntos devem ser ensinados antes de outros é freqüentemente superestimada, ignorando-se uma rica diversidade de contextos, de centros de interesse e de possibilidades de percursos (MACHADO, 2001, p. 3).

Para o autor, assim como ocorre na língua materna, os significados dos signos presentes nas linguagens científicas são construídos através de um feixe de relações. Para compreender algo é apreender a significação das relações deste objeto com outras coisas, ou seja, para compreender é necessário deixar-se envolver em relações.

Deste modo "[...] a idéia de conhecimento liga-se umbilicalmente à de significado; conhecer é, cada vez mais, conhecer o significado [...] os significados dos signos que circulam são construídos através de relações; eles constituem feixes de relações [...] os significados constituem-se, socialmente e no seio das linguagens, como uma rede de relações" (MACHADO, 1995, p.35).

Esse tipo de organização situa uma forma de maior compreensão no modo como o conhecimento se apresenta, se organiza e se constrói atualmente no mundo. A concepção do conhecimento como rede de significações constitui uma imagem emergente para a representação do conhecimento. Nesta perspectiva, conhecer é como:

> [...] enredar, tecer significações, partilhar significados. Os significados, por sua vez, são construídos por meio de relações estabelecidas entre os objetos, as noções, os conceitos. Um significado é como um feixe de relações. O significado de algo é construído falando-se sobre o tema, estabelecendo conexões pertinentes, às vezes insuspeitadas, entre diversos temas. Os feixes de relações, por sua vez, articulam-se em uma grande teia de significações e o conhecimento é uma teia desse tipo (MACHADO, 2001, p 4).

Machado (1995) coloca a rede como uma imagem de um diagrama em teia, constituída de nós e conexões. Nesta concepção, um nó resulta da conexão de diferentes fios e as conexões são caracterizadas pela confluência aos nós que interligam. Este tipo de trama permite que ocorra:

> [...] a diluição dos objetos em relações e, reciprocamente, a consubstanciação de relações em objetos. [...] À medida que perde força a distinção nítida entre objetos e relações, configura-se com mais clareza certa dualidade entre os elementos desse par, onde os objetos são percebidos/concebidos como feixes de relações e são transformados em novos objetos; onde as relações são determinadas por pares de objetos e cada objeto é caracterizado pelas relações nele incidentes ou dele emergente (MACHADO, 1995, p. 210).

As análises realizadas no capítulo 1 confirmam a panorâmica que "[...] certas práticas escolares como a forma de utilização do livro didático favorecem a cristalização de determinados percursos ao longo da rede, criando para eles a aparência de absoluta necessidade; romper com tais práticas exige uma consciência da dinâmica dos processos que a explicitação da metáfora da rede pode favorecer" (MACHADO, 1995, p. 141).

Para constituir um quadro mais favorável para abordar a temática dos números irracionais no ciclo básico, a ideia presente na metáfora da rede de significações se configura como um mapa[33] que abre e orienta uma multiplicidade de rumos e conexões, permitindo o livre trânsito pelos possíveis percursos, com fronteiras flexíveis, sem delimitar territórios.

Recentemente, na área de Educação, a ideia de mapa tem incorporado importantes releituras da realidade. Um destes aspectos é que a atual concepção de mapas permeia o terreno dos "[...] espaços de conhecimento ou das representações simbólicas significativas para o ser humano, nas mais diversas situações e nos mais diferentes contextos" (MACHADO, 2009, p. 186).

De modo geral, um mapa é concebido para ser visto ou lido, os para destacar aspectos figurativos ou mais abstratos, expressivos ou cognitivos. Na sociedade atual:

> [...] as informações – entendidas como dados com relevância, com propósito para alguém – são cada vez mais abundantes, e circulam de modo muito mais livre do que em qualquer outro período da história. [...] Entretanto, a fragmentação e a conseqüente efemeridade são a marca de tal pletora. A transformação das informações em conhecimento pressupõe uma articulação, uma interconexão das mesmas, tendo em vista a construção de redes de significações (MACHADO, 2009, p. 198).

Esta concepção permite configurar o conhecimento como um mapa de relevâncias, que abre caminhos para orientar e significar diversos temas escolares. Em particular, com relação a nossa pretensão de abertura de caminhos para a compreensão do tema dos números irracionais, a concepção de mapas de relevâncias para a abordagem deste tema fica atrelada a estabelecer uma abertura para uma variada rede de conexões, de modo a ser possível distinguir o que é relevante e o que é irrelevante.

Na análise dos livros didáticos, realizada no capítulo anterior, constatamos a polarização na apresentação dos números irracionais exclusivamente pela via empírica ou pela via formal. Do modo como estão veiculados nos manuais analisados, estes dois caminhos se esgotam pela restrita possibilidade de estabelecer uma rede de relações: a opção da mão única restringe as múltiplas conexões possíveis.

---

[33] Machado (2009) destaca que nas origens da história da cartografia, os mapas eram concebidos como instrumentos de representação para a localização de espaços e elemento orientador das rotas ou caminhos.

Para que haja compreensão do tema dos números irracionais, a concepção do mapa de relevâncias leva a necessária exploração das inúmeras possibilidades de percurso, para além destas duas opções geralmente presentes nos livros didáticos. Deste modo, o mapa de relevâncias solicita e torna essencial um estudo relativo ao conhecimento matemático inerente aos números irracionais, e, além disso, constitui um referencial didático que torna possível transformar tal conhecimento em uma apresentação acessível aos alunos do ciclo básico.

Nesta concepção, a ideia de rede de significados, expresso em Machado (1995), associada a concepção de mapas, conforme Machado (2009), permite navegar pelo ‘percurso dos núcleos de significação’ de modo mais diversificado e abrangente possível. Isto equivale a pesquisar outros meios de introduzir conceitualmente os números irracionais (núcleo I), assim como pela utilização de linguagens e materiais didáticos variados, permitindo mais possibilidades de trajetos. O caminho pelo núcleo II (O desenvolvimento e a amplitude conceitual dos números irracionais) fica flexibilizado se considerarmos o favorecimento do diálogo entre as diversas linguagens matemáticas (aritmética, algébrica, funcional, geométrica, gráfica), assim como pela reutilização em diversos contextos e situações permeando os temas matemáticos e extra-matemáticos.

Para efetivar didaticamente tal ação, podemos fazer uso de um importante tropo[34]: a metáfora. Etimologicamente, metáfora provém da justaposição do grego *metá*, denotando ‘além de’, ‘trans’, e do termo *pheréin*, significando ‘levar’ ou ‘transportar’.

Segundo Aristóteles “[...] a metáfora consiste em dar uma coisa o nome de outra coisa, produzindo como que uma transferência de significados, com base na analogia ou na semelhança” (apud MACHADO, 1994, p. 10).

Outra figura linguística importante para a Matemática são as alegorias, de *allós* (outro) e *agourein* (falar), ou seja, falar algo para dizer outra coisa. A alegoria, segundo Machado (1992) representa uma expressão lúdica, cheia de significação figurada e com abertura para engendrar relações, podendo ser utilizada para representar conteúdos didáticos. As alegorias possuem as características básicas das metáforas, podendo ser concebida como uma cadeia de metáforas.

Para Black (1962 apud Fichtner, 2010) a metáfora possibilita reunir áreas separadas, imbuídas numa relação que usa a palavra como se fossem óculos, denotando a permissão de se ver uma coisa através de outra. Isto implica gerir a imaginação, nos capacitando a perceber, diversificar, revigorar ou ampliar a concepção sobre um objeto.

[34] Provém do grego *trópos*, 'desvio', ou do latim *tropu*, denotando um recurso ou expressão linguística que emprega a palavra ou expressão em sentido figurado.

Para o autor, isto propicia a atribuição dos significados como um:

> [...] resultado de relações entre áreas originariamente separadas, não podendo ser anteriormente precedido ou posteriormente parafraseado em nível de prosa. Podemos comentar uma metáfora, mas a metáfora mesma não precisa e não nos convida para uma explanação. O pensamento metafórico é uma maneira diferente que parte da construção de um 'insight'. Nunca uma metáfora é construída como uma substituição ornamental de um pensamento linear (FICHTNER, 2010, p. 38).

A metáfora consiste na transferência ou mudança de um objeto desconhecido para um âmbito semântico que não é o do objeto que ela designa. Este modo figurado de linguagem operacionaliza uma comparação implícita entre dois elementos, sendo um deles considerado familiar, a partir do qual se buscam semelhanças e diferenças com o outro elemento considerado desconhecido.

Fichtner (2010) destaca que a metáfora é, dialeticamente, a consciência de uma igualdade e da própria desigualdade, da simultânea validade e invalidade de uma igualdade.

> Esta diferença semântica não é dissolvida ou anulada, mas fica presente como tensão e contradição. A metáfora pode ser compreendida como um resultado de uma interação cheia de tensão de elementos heterogêneos e opostos. Sua relação nesta interação não é um acaso, também ela não se completa por acaso. A metáfora é estritamente complementar, ou seja, os elementos ou lados se sustentam mutuamente pela tensão e contradição simultânea (FICHTNER, 2010, p. 39).

Estas considerações são importantes tanto no campo da epistemologia quanto no terreno da didática. Por ser um processo imaginativo, Machado (1992) considera que o uso de metáforas propicia uma transferência fecunda e favorece a aprendizagem, pois podem situar contextos mais adequados que promovam a compreensão e mudança de concepções sobre certo alvo, acrescentando significados às relações entre objetos.

Com relação ao desenvolvimento dos conceitos teóricos, essenciais aos números irracionais, a metáfora representa uma ligação muito importante pela possibilidade de efetuar referência indireta ao real. Assim, "[...] o núcleo de um conceito teórico atua como meio de seu próprio desenvolvimento e diferenciação, mas somente através das suas relações com outros conceitos, consegue relacionar-se com um objeto e/ou a realidade" (DAWYDOW, 1977 apud FICHTNER, 2010, p. 41).

Atualizamos, então, nossa posição em favorecer o navegar pelo 'percurso dos núcleos de significação' pelo estudo dos possíveis caminhos revelados pela própria epistemologia dos números irracionais. Esse viés é possível considerando-se questões de natureza didática, o que aumenta e enriquece o repertório de possibilidades de significação do discurso expresso pelos livros didáticos.

Frente à complexidade inerente ao ‘percurso dos núcleos de significação’ com relação aos números irracionais e, por consequência, dos números reais, delineamos nossa posição para abordar, discutir e referenciar o ato de significar tal tema, sob a luz da História da Matemática.

O enfoque através da História da Matemática

Uma primeira reflexão acerca destas ponderações principia no modo como ocorreu a apropriação histórica deste conhecimento. Olhar para a referência histórica dos conhecimentos envolvendo os números reais pode se constituir num apoio fundamental para encaminhar aportes que fundamentem uma visão de construção mais significativa dos números irracionais no ensino básico.

O desenvolvimento gradativo da noção de número natural surgiu a partir da experiência cotidiana dos povos, sucedendo uma série de regras de manipulação e propriedades das operações desenvolvidas ao longo dos séculos, caracterizando uma abordagem informal e empírica. Apenas recentemente, no século XIX, a partir do trabalho de Dedekind, ocorreu a formalização e estruturação dos números reais.

Este percurso informal se opôs ao desenvolvimento da Geometria, que foi formalizada e sistematizada por Euclides[35], na famosa obra *Os Elementos*, em cerca de 300 a.C. Nesta obra, as proposições geométricas foram ordenadas e propostas logicamente a partir de certas afirmações básicas, denominadas axiomas ou postulados.

Struik (1992) aponta que muitas contribuições advindas da história do conhecimento matemático se encontram simplificadas na concepção atual de ensino. A valorização e percepção do percurso histórico dos conhecimentos matemáticos e das circunstâncias em que foram produzidos possibilitam uma maior compreensão da importância do conceito de número real no ensino básico.

Para a construção de significados, a abordagem de temas no ensino básico com apoio em ideias historicamente construídas, permite uma abertura, um desconforto com práticas já adquiridas, configurando um repensar e uma ruptura que propiciam desejo e motivação para a composição de uma prática pedagógica de superação e consciência crítica com vistas à formação de conceitos, conforme destaca Vygotsky (2001).

---

[35] *Os Elementos,* de Euclides, é uma obra composta por dez livros envolvendo a Geometria e três volumes versando sobre a Aritmética. Esta última corresponde atualmente a teoria dos Números e a Álgebra, sendo esta última revestida de um viés geométrico (Álgebra Geométrica).

No âmago do desenvolvimento histórico do conhecimento matemático, que atravessou séculos, são encontradas respostas a diversas questões desafiantes e intrigantes que inquietaram muitos filósofos e ainda desafiam os matemáticos atuais.

O estudo dos aspectos históricos para nortear o desenvolvimento dos números irracionais não se submeterá a linearização e temporalidade dos fatos históricos. Os PCN destacam que essa:

> [...] abordagem não deve ser entendida simplesmente que o professor deva situar no tempo e no espaço cada item do programa de Matemática ou contar sempre em suas aulas trechos da história da Matemática, mas que a encare como um recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem reduzi-las a fatos, datas e nomes a serem memorizados (BRASIL, 1998, p 42).

Salientamos que a escolha da utilização do recurso à história da Matemática permite entender que o conhecimento matemático não se desenvolveu cronologicamente, mas sofreu oscilações, encontros, desencontros, retrocessos, retomadas e ampliações, em função do processo civilizatório particular que cada povo imprimiu aos assuntos cotidianos, culturais e científicos, favorecendo um mapeamento das dificuldades encontradas para a resolução dos problemas que as antigas civilizações se dispuseram a enfrentar. A História da Matemática foi construída:

> [...] como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática (BRASIL, 1998, p 40).

Nesse sentido, Mello (1999) aponta que a abordagem de aspectos históricos permite ao estudante adquirir uma visão mais ampla da Matemática no sentido cultural, propiciando oportunidade de entrever a dimensão de intercâmbio com todas as outras áreas do conhecimento e com o desenvolvimento da própria humanidade.

Levando-se em consideração os números irracionais, cujo aperfeiçoamento matemático levou séculos, a forma usual de apresentação deste tema em muitos dos livros didáticos de ensino básico, sem vínculos com a gênese "[...] histórica causa, no mínimo, um empobrecimento cultural para os nossos alunos, corroborando uma desvalorização do desenvolvimento da Matemática das diferentes épocas de toda humanidade" (PASQUINI, 2007, p. 22).

Nesse sentido, optamos por uma abordagem de História da Matemática com ênfase no desenvolvimento de ideias e conceitos matemáticos dos diversos povos, contrapostos à época atual.

Concebemos a citada vertente como o entendimento e a explicitação do modo como foram produzidos os conhecimentos matemáticos, situando-os quanto às relações sócio-econômico-culturais em cada época, assim como pelas relações internas que perfazem com outros temas da Matemática e nas conexões externas em relação a outras áreas do conhecimento.

Este olhar primordial, segundo Machado (1990), é necessário e permite em inúmeras situações revelar uma continuidade essencial com relação ao significado de temas tratados na escola básica.

> Ninguém pode ensinar qualquer conteúdo, das ciências às línguas, passando pela Matemática, sem uma visão histórica de seu desenvolvimento. É na História que se podem perceber as razões que levaram tal ou qual relação, tal ou qual conceito, a serem constituídos, reforçados ou abandonados (MACHADO, 2004, p. 103).

Um olhar mais generalizado sobre os desenvolvimentos ocorridos ao longo da história revela certo paralelismo entre a construção histórica e a construção de significados pelos alunos, permitindo antecipar possíveis obstáculos de ordem didática e epistemológica que advêm de seu ensino. Com relação a esta mútua impregnação história&ensino, os PCN destacam que o conhecimento:

> [...] matemático é historicamente construído e, portanto, está em permanente evolução. Assim, o ensino de Matemática precisa incorporar essa perspectiva, possibilitando ao aluno reconhecer as contribuições que ela oferece para compreender as informações e posicionar-se criticamente diante delas (BRASIL, 1998, p. 57).

Para Brolezzi (1991), no âmbito escolar não deve necessariamente haver semelhanças entre a sequência histórica e a forma de abordar o conteúdo na sala de aula. Diversos:

> [...] estudos históricos deixam muito clara uma distinção entre a forma lógica inicial, presente nas origens da Matemática, e sua posterior e paulatina sistematização. A lógica natural, presente na construção histórica do conhecimento matemático está novamente presente no processo de aprendizagem da Matemática Elementar. Para justificar esse fato, por vezes se faz referência à hipótese do paralelismo onto-filogenético, sugerindo que o processo de ensino/aprendizagem deva se pautar pela seqüência de construção do conhecimento fornecida pela História. Essa hipótese, porém, não é condição necessária para justificar o valor didático da História da Matemática. Inclusive, tomado literalmente, esse paralelismo pode conduzir a absurdos, pois não existe um princípio claro que determine a evolução da Matemática como um todo. Mas cada tópico específico pode ser logicamente estruturado segundo a Matemática em construção [...] O distanciamento propiciado pela História é, assim, imprescindível para se obter uma visão de conjunto do edifício matemático que se almeja construir no ensino elementar (BROLEZZI, 1991, p. 62-63).

Brolezzi (2004) aponta que a indeterminação histórica ou a ausência de um princípio claro que determine certa evolução histórica da Matemática, permitiria "[...] contrapor uma concepção linear evolutiva da Matemática com uma visão que inverta o sentido da História, pois isso revelaria uma multiplicidade de caminhos para a construção de significados no ensino" (p. 4).

Esta percepção da História da Matemática proposta por Brolezzi (1991), onde há possibilidades de se estruturar o trabalho didático numa multiplicidade de caminhos, se compatibiliza com a visão do conhecimento como rede de significados, conforme Machado (1995). Nesta concepção, o enfoque histórico fica atrelado a uma das propriedades fundamentais da rede - a metamorfose - não existindo uma melhor ordem ou preferencial na apresentação de um conteúdo.

Outra contribuição com relação a abordagem histórica da Matemática e a problemática no ensino envolvendo os números irracionais e reais foi resgatada no livro *As Idéias Fundamentais da Matemática*, de Amoroso Costa (1981) e na obra *Conceitos Fundamentais da Matemática*, de Bento de Jesus Caraça (1970).

Caraça (1970) e Costa, M. A. (1981) abordaram conjuntamente a história e desenvolvimento epistemológico da Matemática, inseridas numa visão didática peculiar. Estas propostas revelam uma preocupação no entendimento semântico dos números, um dos campos matemáticos mais antigos, como uma das ideias fundamentais da Matemática.

O texto apresenta a evolução do campo dos números naturais, perpassando o campo dos Racionais, Irracionais e Reais, além de outros resultados da Teoria dos Números e da Matemática em geral. A análise da exposição do percurso histórico delineado permite a compreensão do surgimento dos números, em diversos povos, ligado às necessidades cotidianas e pragmáticas em relação à contagem de objetos, de mensuração de terra, de operações numéricas ligadas ao comércio, às questões tributárias e a partilha de bens. Em contrapartida, há questões puramente abstratas da Matemática, como aquelas ligadas ao antigo povo grego[36], revelando conexões ao conceito teórico.

[36] Há no ensino da Matemática do ciclo básico a questão em como trabalhar a relação entre o concreto e o abstrato. Machado (1995) aponta que usualmente o sentido usual do discurso pedagógico é do concreto para o abstrato, mas na sala de aula o sentido é o oposto: há a exposição das teorias e conceitos, como algo pronto e acabado, para em seguida resolver exercícios. Porém, o ideal é que a dialética presente neste par não constitua começo ou fim para esta relação, mas que perpetue uma dinâmica: parte-se de uma situação concreta (contextualizada), apreendem-se os elementos constitutivos, abstraem-se propriedades, conceitos, relações, teorias, para novamente contextualizar, o que permite gerar um novo ciclo, para uma evolução do conhecimento.

Deste modo, o estudo do percurso histórico permite uma compreensão inicial do embate entre o pragmático e o teórico, questão crucial ligada ao entendimento da natureza dos números irracionais, possibilitando uma ponderação inicial para um tratamento didático mais adequado.

Destacamos nestes autores o estudo do par contagem/medida e o finito/infinito, que se constituem como possíveis contextos de significar os números irracionais se forem enfatizados e situados na problemática de ensino da Matemática no ciclo básico.

Vale destacar nos PCN a proposta de exploração de vários eixos de referência. Este documento considera que a matemática se desenvolve:

> [...] mediante um processo conflitivo entre muitos elementos contrastantes: o concreto e o abstrato, o particular e o geral, o formal e o informal, o finito e o infinito, o discreto e o contínuo. Curioso notar que tais conflitos encontram-se também no âmbito do ensino dessa disciplina (BRASIL, 1997b, p. 20).

As histórias e narrativas inerentes aos números reais permitem resgatar ideias e nortear princípios essenciais do conhecimento matemático, pouco destacados no ensino atual. A viabilização do uso da História da Matemática como recurso didático abre um leque de possibilidades para entrelaçar, tecer e esclarecer diversos aspectos internos a própria epistemologia envolvendo o conhecimento dos números reais.

Esta concepção se insere numa rede dialética que permite conectar diversos caminhos na intrincada malha para navegar pelos 'percursos dos núcleos de significação', de modo a ampliar a compreensão dos números irracionais no ensino básico.

A seguir, delineamos as contribuições presentes na epistemologia envolvendo o universo dos números reais, presente no discurso situado no desenvolvimento histórico dos povos. Este caminho constitui uma referência essencial e fonte de recursos para ampliar as discussões e sistematizar princípios norteadores, permitindo a compreensão da noção de número irracional, que fica irremediavelmente atrelada ao estabelecimento de uma salutar multiplicidade de conexões.

O eixo Discreto/Contínuo como ação fundadora.

O eixo discreto/contínuo é um par essencial tanto na Matemática quanto no campo didático do ciclo básico. Este par se refere, respectivamente, a duas ações fundamentais da Matemática, quais sejam: contar e medir, "[...] operações cuja realização a vida de todos os dias exige com maior freqüência" (CARAÇA, 1970, p. 29).

Fazemos menção ao estudo etimológico presente no par discreto&contínuo, onde:

> [...] *discreto* é aquilo que exprime objetos distintos, que se revela por sinais separados, que se põe à parte. Vem do latim *discretus*, particípio passado do verbo *discernere* (discernir), que significa discriminar, separar, distinguir, ver claro. [...] Já *contínuo* vem de *com-tenere* (ter junto, manter unido, segurar). Contínuo é o que está imediatamente unido à outra coisa (BROLEZZI, 1996, p. 1).

Em Matemática, uma grandeza é discreta quando ela for contável. Em oposição a uma grandeza discreta, uma grandeza é contínua quando for passível de ser medida.

No plano histórico, Brolezzi (1996) aponta que as antigas civilizações lidavam com a ideia genérica de número, num modo pragmático, como se fossem medidas contínuas, evitando a distinção entre o discreto e o contínuo. Estes povos:

> [...] tinham uma idéia de número que não era restrita aos racionais, pelo fato de utilizarem números para realizar medidas A Matemática pré-helênica dos egípcios e babilônios apresenta uma característica comum muito importante para o nosso estudo: a utilização de números racionais (ou aproximações de irracionais) tanto para contagem quanto para medida. A idéia de número se apoia assim na complementaridade entre as noções de discreto e contínuo (BROLEZZI, 1996, p. 14)

O autor pondera que somente em um período posterior surgiria uma tendência em separar o discreto e o contínuo. Essa oposição teve origem e justificativa na própria concepção filosófica grega e no modo teórico de abordagem dos problemas decorrentes. Foi no mundo grego que se:

> [...] estabeleceu a grande divisão entre as noções de discreto e contínuo, em termos de concepção filosófica, marcando profundamente a evolução da Matemática. É Euclides quem melhor registra essa dicotomia que caracterizava a mentalidade grega, dividindo em livros diferentes aquilo que se referia à *geometria* daquilo que se referia aos *números*. A Geometria seria o 'reino da continuidade', enquanto a Aritmética seria o 'reino do discreto' (BROLEZZI, 1996, p. 24).

A separação entre Geometria e Aritmética foi carregada durante muito tempo, como disciplinas estáticas e distintas no currículo escolar, denotando historicamente uma oposição entre o discreto e o contínuo. Mesmo após a criação da disciplina Matemática, no currículo escolar, até os dias de hoje, ainda encontram-se sinais de tal dicotomia no ensino.

Se no ensino atual ainda perdura uma visão estática e dicotômica entre a Aritmética e a Geometria, o par discreto&contínuo vem resgatar uma salutar interação, orgânica e viva, algo a se desejar no ensino da Matemática, conforme aponta Brolezzi (1996).

O referido autor atenta para a elegante e importante interação entre o par discreto&contínuo, apresentando várias situações que historicamente se constituíram e que poderiam ser exploradas no ensino da Matemática Elementar.

Brolezzi (1996) propõe a administração da tensão conceitual referente ao par discreto&contínuo, que traz contribuições importantes para o ensino.

> No ensino de Matemática elementar, muitas vezes constata-se a tendência de se tentar optar, em cada assunto, por um ou outro aspecto, sem explorar a relação entre eles. Dessa maneira de encarar o discreto e o contínuo como realidades completamente disjuntas surgem conseqüências graves para o ensino, e perde-se muito da riqueza da Matemática. Verifica-se assim a existência de um problema no ensino de Matemática elementar, ocasionado pela tendência de optar ora pelo discreto ora pelo contínuo, fazendo sucumbir um em função do outro (BROLEZZI, 1996, p. 2).

O reconhecimento da essencialidade e da complementaridade nas abrangências e abordagens relativas ao par discreto&contínuo foi discutido por Thom (2004). Para o autor, na Matemática existe uma aporia fundadora: o par discreto/contínuo.

A origem etimológica do termo aporia (sem saída) provém do grego *aporia* (a+poros). Para Aurélio (2003), aporia representa um conflito entre opiniões contrárias e inicialmente igualmente concludentes, em resposta a um mesmo questionamento.

Para fundamentar esta posição, Thom (2004) aponta que o curso fundamental das Matemáticas teve origem na Aritmética, ou numa linguagem mais moderna, na teoria dos Números, ramo que se constituí numa espécie de núcleo duro das Matemáticas.

Para Thom (2004), *aporia* significa uma contradição de fundo, uma oposição fundamental que permite emergir uma solução 'fantasmática'. O termo, cunhado pelo autor, representa soluções com validade até certo momento que, no decurso do tempo, são postas em debate, reconhecendo-se, então, o caráter ilusório da solução inicial.

Para delinear o entendimento da administração e interação do par discreto&contínuo como aporia fundamentadora, inicialmente destacamos aspectos históricos e epistemológicos da natureza envolvendo os diversos constituintes do conjunto dos Números Reais.

É muito difundida em livros e manuais didáticos a ideia de que, os números naturais, representados por N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}, tenham surgido da necessidade de contar coleção de objetos, pelos povos antigos, em suas atividades práticas, como, por exemplo, no ofício de pastoreio.

A contagem é uma operação que faz corresponder, a partir do primeiro elemento de uma coleção, uma anunciação de um número da sucessão natural do conjunto dos Naturais. No exemplo da figura 23, ao apontar para cada elemento, na ordem da esquerda para a direita, anuncia-se sucessivamente um, dois, três, quatro, cinco, seis, resultado que revela a contagem de seis elementos para a coleção.

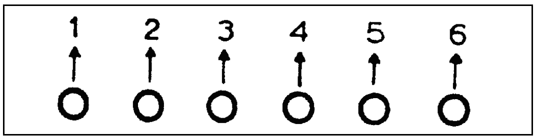


Figura 23: Exemplo de operação de contagem.

A operação em *fazer corresponder* dois objetos é essencial na Matemática e, em particular, no estudo dos números reais. Surge então um antecedente e um consequente, que no exemplo da figura 23, seriam, respectivamente os elementos da coleção e os números naturais indicados (1 a 6), o que faz surgir uma correspondência[37].

Considerando-se agora uma situação representada por uma lista de presença, onde cada aluno pode corresponder certo número (quadro 11). Assim, estabelece-se uma correspondência entre o número de chamada e o primeiro nome de um aluno, organizada em relação alfabética. Na Matemática, esta relação um-a-um, entre antecedente e consequente, nesta ordem, chama-se unívoca.

Quadro 11: Exemplo de correspondência unívoca.

número de chamada → primeiro nome de um aluno

Para estabelecer uma relação entre o primeiro nome dos alunos e o número de chamada, denominada correspondência recíproca, pode ocorrer que dois ou mais alunos tenham igual primeiro nome. Como nem sempre é possível estabelecer a relação um-a-um, estabelece-se a denominada correspondência um-a-vários, conforme Caraça (1970).

Em alguns casos específicos pode acontecer que a correspondência seja unívoca e sua recíproca também. Esta situação é denominada correspondência biunívoca, que significa comparar dois conjuntos, de modo que cada elemento de um corresponda a um elemento do outro, e vice-versa, conforme expresso na figura 24a.

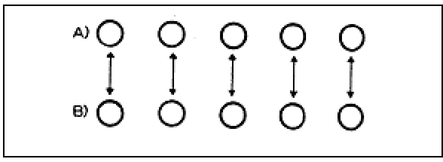


Figura 24a: Relação biunívoca.

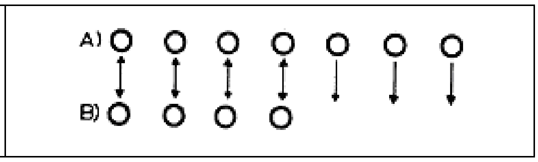


Figura 24b: Prevalência [Fonte: Caraça (1970)].

Não é o caso mais comum que duas coleções tenham igual número de elementos. Dados dois conjuntos numéricos finitos, A e B, se o número de elementos de A for maior que o número de elementos de B, então se diz que A é prevalente[38] em relação a B (figura 24b), de modo que, em conjuntos finitos, o todo é sempre prevalente a parte.

---

[37] Correspondência é considerada uma relação primitiva. Pela correspondência, podem-se deduzir as seguintes relações entre dois conjuntos: maior, menor e igual.

[38] Prevalência, cuja etimologia remonta o latim *praevalentia*, significa ter maior valor.

A ideia de desigualdade do número de elementos entre dois conjuntos viabilizou a percepção de que, em alguns casos particulares, os dois conjuntos envolvidos poderiam apresentar igual número de elementos. Neste caso, surge à noção de equivalência.

O homem antigo aprendeu a noção de maior/menor ao realizar comparações entre conjuntos com distintas quantidades de elementos, traduzida no conceito de prevalência. Assim, a afirmação que a contagem surgiu unicamente por meio do estabelecimento da relação biunívoca é insuficiente.

Brolezzi (1996) aponta que a concepção de número natural surgiu espontaneamente num estágio primário da civilização, relativamente com o desenvolvimento da prática da contagem e das medidas.

Medir se associa a uma comparação entre duas quantidades ou objetos, de modo a:

> [...] estabelecer uma ordem entre elas: maior ou menor tamanho, primeiro, segundo e terceiro lugar. Visando uma comparação de tamanho ou uma ordenação, é necessário constatar que alguma grandeza ou grupo de objetos é diferente de outro em termos de quantidade. Essa comparação das diferenças parece estar muito próxima da origem dos números, e sem referência a ela fica difícil explicar como o homem chegou a idéia, bem mais sofisticada, de comparação por igualdade numérica entre conjuntos (BROLEZZI,1996, p. 6).

Esta posição se baseia em indícios que o homem antigo intuiu a noção de ordem estabelecendo comparações, através do uso da oralidade e da percepção visual, de maior ou menor quantidade ou medida entre conjuntos de diferentes magnitudes.

Em decorrência do tempo ocorreu o desenvolvimento da ideia da igualdade de elementos entre dois conjuntos. O estudo antropológico de Thomas Crump envolvendo tribos indígenas e a cultura de povos primitivos revela que:

> [...] o homem primitivo tanto contava quanto media e, podemos dizer que não fazia uma coisa sem fazer também a outra. [...] Os números não surgem só como inteiros, mas através de uma rede conceitual formada pelo seu uso para lidar com as trocas, para o reconhecimento da dança e do ritmo, nos jogos, nas leis e costumes sociais, nas artes e na arquitetura, nas abordagens religiosas e nas visões cosmológicas, nas tentativas de descrição da vida e dos objetos. Em muitos desses empregos da noção numérica, a idéia de ordenação parece bem próxima da origem do número, e não só a idéia de correspondência um-a-um (BROLEZZI, 1996, p. 6).

Crump (1993 apud Brolezzi, 1996) apresenta um exemplo esclarecedor da relação entre o discreto e o contínuo. O autor faz referência à utilização de passos para medir distâncias, uma grandeza de natureza contínua, realizada através da contagem de passos, uma grandeza de origem discreta. Assim, o discreto, indicando a contagem e o contínuo, representado pelo medir se constituem em pólos dicotômicos e complementares, permitindo ao homem antigo formar a ideia de número natural.

Foi nesta base, através do desdobramento da natureza discreta do conjunto dos naturais, articulando com o contínuo, que foram sendo acrescidos e sedimentados muito do conhecimento matemático no decorrer da história da evolução das civilizações mais antigas até nossos dias.

A passagem dos números naturais para os números racionais não-negativos (Q_+) constitui uma necessária ruptura com algumas características inerentes ao conjunto dos Números Naturais. Historicamente, as frações surgiram pela insuficiência dos números naturais no trato de problemas práticos para regular as atividades econômicas e sociais que envolvem a divisão em partes de um todo, que não são necessariamente iguais.

Estas transações revelam como, por exemplo, no caso de um pastor que desejasse trocar um número 'x' de peles de carneiro com número 'y' de sacos de arroz com um agricultor, onde a razão x/y expressa uma fração de números inteiros, sendo 'x' não múltiplo de 'y'.

Outro exemplo característico remete aos demarcadores oficiais de terras, no antigo Egito, que utilizavam cordas com nós para as medidas[39] de comprimento e áreas. Nas medições efetivadas por este povo, nem sempre o resultado:

> [...] era um número natural de tamanhos da corda. Assim, resolveram marcá-la com nós. A medida podia ser expressa em certo número de cordas mais algumas subdivisões entre os nós. Mesmo assim, o resultado podia não envolver um número natural de intervalos entre os nós, gerando a necessidade de novas subdivisões. No decorrer da história, os números fracionários, em suas diversas representações, e os números naturais formaram o conjunto dos números racionais, que foi progressivamente agregando significados, à medida que o homem foi tornando mais complexa a sua relação com outros homens e com o meio natural (BATISTA; SILVA, 2004, p. 3).

Toledo e Toledo (1997) apontam que é usual em livros didáticos introduzir os números racionais na forma de fração própria, onde uma grandeza de natureza contínua (comprimento, área ou volume) é repartida em **n** partes iguais e, após serem destacadas ou coloridas **m** partes, por contagem, a fração correspondente é representada por **m/n**.

No ensino, é praxe estender esta definição para as frações impróprias e aparentes. Miguel e Miorim (1986) designam fração como o resultado da aplicação de duas operações sucessivas a um todo: a ação de dividir o todo em certo número ***n*** de partes iguais, seguida do ato de reunião, em um novo todo, de um número ***m*** de partes que pode ser *menor, igual ou maior que **n***. Na fração **m/n**, se **m**<**n**, temos o caso das frações próprias. Quando **m** = **n** ou **m** = k.**n**, onde k é inteiro, tem-se o caso das frações aparentes. Por último, no caso **m>n,** surgem às frações impróprias.

---

[39] Caraça (1970) expõe que medir consiste em comparar duas grandezas de mesma espécie.

Jahn et al. (1999) e Escolano;Gaírin (2005) criticam o uso exclusivo do modelo parte-todo pelo viés estático e visual, próprio da representação do modelo de hachurar/pintar, que não significa a fração como um novo campo numérico para os alunos, mas somente como uma relação entre dois números inteiros.

Ao se considerar o trato das frações como medidas, devemos considerar que:

> [...] em primeiro lugar trará o número para o domínio das relações espaciais, possibilitando a continuidade de exploração métrica do espaço com novos recursos. Dessa forma, o aluno perceberá que a Aritmética e a Geometria não são dois ramos completamente distintos da Matemática; eles se fundem e se complementam, um abrindo novos caminhos à compreensão do outro. Em segundo lugar, porque esse tema reforçará a compreensão do conceito da equivalência de frações, introduzirá o conceito de irredutibilidade de frações e dará uma maior amplitude ao conceito de fração aplicado a todos contínuos (MIGUEL; MIORIM, 1986, p. 123).

Ponte (2006) retifica a importante interação e complementaridade dos aspectos de contagem e medida, nas representações na forma decimal e fracionária:

> Os números decimais surgem de modo natural nas calculadoras e estão mais presentes no cotidiano dos alunos do que as frações. São certamente mais importantes na estimação e no cálculo mental. No entanto, não evidenciam de modo muito claro a natureza dos conceitos numéricos que representam. Por outro lado, a representação sob a forma de fração remete de forma mais direta para a natureza do número em causa, mas é menos prática para efeitos de cálculo exato ou para obter estimativa (PONTE, 2006, p.11).

Estas considerações constituem uma base para uma abordagem complementar com relação aos aspectos de contagem e medida, possibilitando ampliar a compreensão do conjunto dos Números Racionais. Neste sentido, uma conexão que se pode fazer é:

> [...] é entre frações e a questão da comensurabilidade de segmentos. Mais precisamente, o conceito de fração imprópria pode ser construído a partir do problema da comparação entre segmentos (segmentos comensuráveis) (HARIKI, 1993, p.21).

Hariki (1993) propõe que a comensurabilidade entre segmentos poderia ser apresentada com o seguinte problema: São dados dois segmentos *AB* e *CD* tais que *AB* é maior que *CD*. É possível medir *AB*, utilizando *CD* como unidade?

Caso a resposta seja afirmativa, CD caberia um número exato de vezes em AB e teríamos a representação do segmento CD em relação ao segmento AB em termos de números naturais.

Em caso contrário, caberia uma nova questão: é possível dividir *CD* num número finito de partes iguais, de modo que uma dessas partes coubesse um número exato de vezes no segmento *AB*?

Considerando-se o ponto de vista teórico, se ocorrer uma resposta afirmativa, surge uma fração imprópria ***m/n****,* com ***m>n***. Neste caso, os dois segmentos são ditos '*comensuráveis'* se for possível medi-los, com uma mesma unidade. Assim, existe um segmento ***u*** contido **m** vezes em AB ($m \in Z$) e **n** vezes em CD ($n \in Z$). Então AB = m****u*** e CD = n****u***. Dizemos que ***u*** é um *submúltiplo* comum de A e B.

Na figura 25, observam-se dois segmentos AB e CD, de comprimentos ***a*** e ***b***, respectivamente. Se uma unidade ***u*** puder ser estabelecida de modo que a unidade ***u*** cabe ***m*** vezes no segmento AB e ***n*** vezes no segmento CD, então temos: $\frac{AB}{CD} = \frac{a}{b} = \frac{m*u}{n*u} = \frac{m}{n}$, que remete a uma relação entre inteiros.

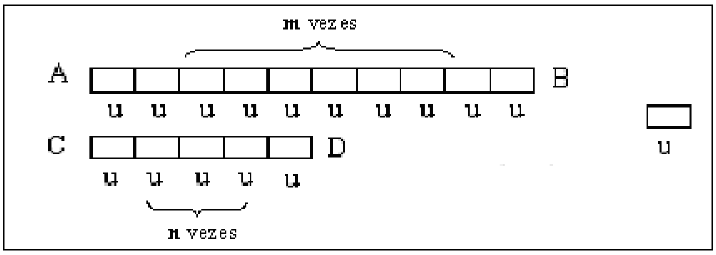


Figura 25: Representação de segmentos comensuráveis.

Ocorrendo uma resposta negativa à questão proposta por Hariki (1993), não é possível dividir *CD* num número finito de partes iguais, de modo que uma dessas partes caiba um número inteiro de vezes em *AB*. Esta situação representa o caso dos segmentos *incomensuráveis*. A resposta à questão, considerando-se o problema acima, associa o número como medida, permitindo explorar a complementaridade e interligação dos números racionais com outro conjunto numérico, pouco explorado e com parcas pesquisas acadêmicas no ensino básico: o conjunto dos números irracionais[40].

Conforme a análise dos livros didáticos realizada, um dos modos de introduzir os números irracionais no ciclo básico recai na definição: Os números irracionais são os números reais que 'não' podem ser expressos na forma a/b, onde a e b são inteiros e b ≠ 0.

Esta definição não abarca a complexidade relativa ao tema. A pesquisa realizada com os livros didáticos, no capítulo 1, aponta que algumas coleções fazem um breve comentário histórico informativo e simplista em relação à 'Crise dos Incomensuráveis', porém que necessitaria ser mais desenvolvido.

---

[40] Esta questão pode ser respondida considerando-se o ponto de vista teórico ou prático. Carvalho; Miguel; Mendes (2009) destacam que a construção dos segmentos incomensuráveis por meio de régua e compasso é uma ilusão. Essa via deve ser "[...] destruída, pois é através dessa ilusão que o novo conceito, até então inexistente, começa a fazer sentido para o estudante" (p. 295). Para os autores, a incorporação do conceito de segmentos incomensuráveis ao campo semântico que se pretenda produzir em sala de aula exige que ele seja acessado em um domínio diferente dos sentidos do mundo pragmático, como a visão.

A escola pitagórica, provavelmente no período entre 450-400 a.C, se satisfez na investigação dos irracionais tratando-os através da representação geométrica, como medida da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado, contornando o problema através do confinamento em segmentos e áreas, sem maiores desdobramentos.

A descoberta da incomensurabilidade, pelos gregos da escola pitagórica, representou um momento inicial de demarcação dos números irracionais e, por conseqüência, dos números reais, sendo considerada a primeira tentativa de ruptura entre o discreto e o contínuo.

Conforme relata Thom (2004), a ruptura provocada pela aporia fundadora que, na Matemática, é representada pelo par discreto&contínuo, constitui uma contribuição para emergir as contradições e as tensões entre crescimento e crítica, própria das ciências e da Matemática. Desse impasse originado pela 'Crise dos Incomensuráveis' emerge a necessidade de estabelecer outras relações envolvendo os objetos matemáticos.

Uma dessas relações está apontada em Caraça (1970). O autor argumenta que a essência dos números reais equivale ao trabalho com os números irracionais e encontra-se na 'Crise dos Incomensuráveis', que Caraça denominou o 'problema da medida'.

A questão da medida pode ser explorada considerando-se outro ponto de vista em relação à questão colocada por Hariki (1993): São dados dois segmentos *AB* e *CD* tais que *AB* é maior que *CD.* É possível medir *AB,* utilizando *CD* como unidade?

Se tal questão for analisada do ponto de vista prático, a resposta sempre seria sim. Tal situação pode ser encaminhada analisando que:

> [...] quando se aumenta o número de partes em que se divide CD, o comprimento de cada uma delas diminue e chega uma altura em que a precisão limitada dos instrumentos de divisão e de medida não nos permite ir além de certo comprimento mínimo [...]. A parte de alíquota comum existe, portanto, sempre; se não tiver sido encontrada antes, é o segmento de comprimento mínimo que praticamente se pode obter. Assim, este resultado impõe-se a nossa intuição (CARAÇA, 1970, p. 49).

A questão colocada por Hariki (1993) pode ser analisada do ponto de vista teórico e prático. As respostas obtidas revelam a possibilidade de se trabalhar a ideia de medida associada à exatidão ou a aproximação, que enriquece o repertório de conhecimentos ao situar e demarcar o conjunto dos números racionais e dos números irracionais.

Tal abordagem permite delimitar o que se entende por uma boa aproximação e quais as várias possibilidades de encaminhamento possíveis de serem propostas. Assim, o tema ‘medidas’ constitui um aspecto que resgata uma relação essencial entre o conjunto dos números racionais e dos números irracionais, porém não abordada em toda a plenitude, nos livros didáticos analisados: a aproximação.

A aproximação, uma ideia fundamental da Matemática, representa um importante fator que constitui a única via de acesso de um número irracional, um conceito teórico, ao nosso mundo pragmático, tema que passamos a discorrer de modo mais abrangente.

O eixo exato/aproximado: Uma interação entre Números Racionais e Irracionais.

É usual a abordagem Matemática no ensino básico, designando o conjunto dos números irracionais como os números complementares ao conjunto dos números racionais, no universo dos números reais. A primeira vista, o fato da disjunção dos dois conjuntos pode favorecer um quadro de inexistência de relação entre ambos.

Realizamos busca em documentos oficiais procurando indícios da relação entre os números irracionais e os racionais. Verificamos breves citações nos PCN, Brasil (1997a), na abordagem dos números irracionais através da relação da diagonal e o lado do quadrado, pela construção geométrica das raízes sucessivas não exatas de $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \ldots$ através do uso do Teorema de Pitágoras, assim como pelo cálculo aproximado através da representação decimal racional destas raízes não-exatas e do número π, sugerindo localizá-las na reta real.

O percurso sugerido pelos PCN Brasil (1997a) é realizado nos livros didáticos, conforme indica a pesquisa diagnóstica apresentada no capítulo 1, nas coleções A e B, do Ensino Fundamental II. Porém, estes manuais se restringem ao cálculo aproximado e a representação geométrica, não destacando a problemática do significado relativo ao conceito de aproximação, nem colocam em evidência a questão conceitual da incomensurabilidade, comentada anteriormente no par discreto&contínuo.

Diante desse quadro, investimos na procura de outras fontes para ampliar esta perspectiva inicial dos documentos. Encontramos, na história do desenvolvimento da Matemática, contribuições complementares que configuram pistas para tratar a questão.

A preocupação dos gregos pela descoberta da incomensurabilidade, ou seja, que a razão das medidas de dois segmentos nem sempre pode ser expressa por uma fração de números inteiros, não existia para os outros povos antigos.

Uma ilustração se encontra na Mesopotâmia Antiga (~1600 a.C.), num texto cuneiforme, da coleção de Yale, onde Boyer (1991) cita a representação de um quadrado e suas diagonais, cuja razão entre o comprimento da diagonal e do lado ($\sqrt{2}$) era dada por 1:24,51,10, ou seja, $\sqrt{2}=1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$ na base sexagesimal. O cálculo deste valor aproximado é 1,4142129, na nossa atual base dez, expresso com um erro de cerca de 1 milionésimo.

A base sexagesimal permite escrever boas aproximações de números irracionais, de elevada ordem de grandeza e com poucos algarismos sexagesimais, se comparados a base 10. Este fator permite uma maior quantidade de frações finitas na base 60, o que justifica a facilidade em se obter aproximações tão boas quanto fossem necessárias.

Os babilônios utilizavam um método interativo para o cálculo de raízes quadradas. Como exemplo, consideremos o cálculo de $\sqrt{6}.$ Para este povo, este cálculo remetia ao cálculo do lado de um quadrado cuja área valia 6 unidades, ou seja, $x^2=6.$ Uma primeira aproximação, bastante plausível, é considerar um retângulo de lados 2 e 3 unidades, ou seja, o valor de $\sqrt{6}$ representa um segmento de comprimento delimitado no intervalo $2<\sqrt{6}<3.$

O próximo passo seria calcular a média aritmética entre esses lados, ou seja, $x=\frac{1}{2}.(x_1+x_2)=\frac{1}{2}.(2+3)=2{,}5,$ como um dos lados. O outro lado é obtido pela razão entre a área e o lado, ou seja: 6/2,5 = 2,4. Deste modo, $2{,}4<\sqrt{6}<2{,}5.$

Uma nova aproximação é realizada, obtendo-se $\sqrt{6}=2{,}45,$ em notação atual (ver tabela 2). A aproximação pode ser continuamente melhorada, até quantas casas decimais for necessária ou desejada. Esta é a essência da operação da aproximação, permitindo a ação de acessar um número irracional para finalidades computacionais.

Tabela 2: Cálculo da raiz quadrada de 6.

lado	**lado**	**Área**
2	3	6
2,5	2,4	6
2,45	6/2,45= 2,45	6
⋮	⋮	⋮

Assim como os antigos babilônios e egípcios, os hindus não faziam distinção entre o exato e aproximado em relação aos cálculos numéricos, porém trouxeram contribuição na concepção dos números irracionais. Então, deve-se considerar:

> [...] que os hindus, diferentemente dos gregos, consideravam as raízes irracionais como números. [...] Mas é preciso lembrar que a contribuição hindu nesse caso foi resultado de inocência lógica. Vemos a ausência de distinção cuidadosa, da parte dos matemáticos hindus, entre resultados exatos e inexatos e era natural que não levassem a sério a diferença entre grandezas comensuráveis e incomensuráveis (BOYER, 1991, p. 160).

Estas situações históricas revelam que o exato e o aproximado conviveram durante séculos no cenário do conhecimento matemático. Porém, no ensino atual, a transposição didática do campo dos números irracionais foi realizada de modo a diluir a gênese do conhecimento matemático frente ao par exato&aproximado.

Esta opção assumida traz consequências até hoje. Ainda encontramos presente na atual cultura ocidental, um quadro do senso comum, onde aos "[...] olhos do leigo, nenhum conhecimento pode ser considerado tão bem assentado em suas bases como o matemático" (MACHADO, 1990, p. 32).

Este autor aponta limites sobre a concepção de exatidão da Matemática. Com relação aos números, a crença existente, no senso comum, é que estes são regidos por leis próprias e bem estruturadas. Esta visão parcial contribui para tecer uma panorâmica de extrema certeza e confiabilidade do mundo matemático, no qual os números constituem somente simples ferramenta operatória.

Os argumentos expostos questionam a pretensa exatidão inserida na conjuntura da Matemática, como campo escolar a ser ensinado. A questão da relativa exatidão da Matemática, associada aos processos envolvendo os aspectos de exato&aproximado e discreto&contínuo, pode ser melhor esclarecida se retomarmos a expressão de números com relação a duas concepções históricas básicas: a platônica e a aristotélica.

Para Platão, a realidade é um mundo de aparências, onde as entidades verdadeiras pertenciam ao mundo das Formas e das Ideias (as Formas Matemáticas e as Formas Morais), independendo da percepção sensorial e suscetíveis de uma definição precisa, concebendo assim um caráter exato aos objetos matemáticos, independentemente de qualquer verificação empírica. Nesta concepção, "[...] as verdades matemáticas e, em decorrência, as relações expressas através de números seriam, pois, essencialmente exatas" (MACHADO, 1990, p. 40).

Na trilha platônica, Frege (apud Machado, 1990) aponta que o número é um objeto com características especiais, regido por leis próprias, concebido pelo juízo analítico e exato a priori, não sendo possível concebê-los como algo abstraído dos objetos do mundo empírico, e nem como uma relação entre grandezas. Por esta via, os números são passíveis de serem descobertos e se relacionam com os aspectos de contagem, ou seja, de natureza discreta.

Contrariamente a Platão, Aristóteles (apud Machado, 1990) concebe a Matemática construída a partir do mundo das percepções sensoriais, configurando a forma e o conteúdo de um objeto matemático a partir da possibilidade de abstrair características, aproximando-o e adequando-o ao mundo empírico. Neste viés, Isaac Newton (apud Machado, 1990) concebe os números oriundos dos processos de medida, associado ao contínuo, configurando uma possível forma de compreensão deste conceito.

Porém, "[...] já não é mais possível uma distinção tão categórica entre concepções platônicas e aristotélicas. Há muito se desenvolveram concepções intermediárias que matizaram significativamente tais distinções" (MACHADO, 1990, p. 40).

Contrapondo dialeticamente o exato, o ensino deve também considerar aspectos referentes ao aproximado e ao estimado. Sabe-se que grande parte dos números que expressam medidas, de natureza infinita e ligada ao contínuo, provém de uma grandeza expressa por um número de natureza irracional, que pode ser aproximado para um número racional, de natureza finita.

Deste modo, tendo como referência a aporia fundadora envolvendo o par discreto/contínuo, a natureza não exata associada aos aspectos de aproximação e estimação configura uma oportunidade para um melhor entendimento das características dos números irracionais, a ser devidamente explorada na Educação Matemática.

Essencialmente, o ensino básico inicia a exposição dos números inteiros e racionais. Isto remete a razões pragmáticas, pois "[...] para nossas tarefas diárias usamos apenas os números inteiros e racionais. Surgem, porém, problemas mais abstratos e teóricos envolvendo, por exemplo, o próprio conceito de medida" (CERRI, 2006, p. 1).

A operação de medir é um ato que resulta de um confronto e do efeito da comparação entre duas grandezas de mesma espécie. Para tal, é necessário inicialmente estabelecer um padrão único, concebido como unidade de medida, permitindo comparar grandezas de mesma espécie e responder quantas vezes uma grandeza cabe na outra.

Porém, "[...] há no problema da medida três fases e três aspectos distintos – a escolha da unidade; a comparação com a unidade; a expressão do resultado dessa comparação por um número" (CARAÇA, 1970, p. 30).

Caraça (1970) aponta que o primeiro e o terceiro aspectos estão interligados, pois a escolha de uma unidade depende de um fator de praticidade, de comodidade e de economia. Por exemplo, seria muito incomodo utilizar:

> [...] a légua como unidade de comprimento de tecidos para vestuário, assim como o milímetro como unidade de distâncias geográficas. E como se traduz essa exigência de comodidade? Nisto – que a expressão numérica da medição não dê números maus de enunciar e dos quais se não faça, portanto, uma idéia clara (CARAÇA, 1970, p. 31).

Historicamente, a primeira evolução da 'arte de medir' ocorreu pela insuficiência dos números naturais para expressar alguns resultados. A necessidade de exprimir o resultado de uma medida como um número propiciou a mudança do âmbito do conjunto dos naturais para os números racionais, uma consequência do princípio de extensão[41].

Ao se comparar algo com um padrão de medida faz-se uma aproximação, pois este processo raramente resulta em um número inteiro de vezes. Ao se aproximar resultados obtidos por um processo de medir, o número expresso geralmente assume a forma de um número racional, na forma decimal e finita, devido ao limite do padrão estabelecido ou da escala adotada, assim como no modo de representar a medida.

Nas situações práticas onde seja necessário operar com números, sejam estes racionais ou irracionais, o uso de instrumentos de medida obrigatoriamente conduz a uma operação de aproximação. Deste modo, um possível modo de apresentação dos números irracionais no ensino básico como uma dízima não–periódica se torna viável, em situações práticas e científicas, por meio da aproximação por um número racional.

Uma aproximação, segundo Beskin (1987), corresponde à possibilidade de substituir um dado objeto (como um número), por outro objeto do mesmo tipo, mais simples e suficiente próximo do primeiro. No âmbito dos números reais, uma boa aproximação é aquela em que a substituição pode ser realizada de modo suficientemente próxima, o que acarreta na possibilidade de ser melhorada, de acordo com o desejo do operador ou em conformidade com as condições de uma dada situação.

Retomamos, a seguir, um contexto atual onde a aproximação de números se faz necessária. Nos computadores, as memórias possuem grande espaço de armazenamento, porém sempre terão capacidade finita de registro de dados. Quem deseje entrar com dados no sistema operacional de um computador deverá utilizar um código binário[42], ou seja, uma representação de um número racional com um número finito de dígitos. Ao se trabalhar com um número irracional no computador (seja para introduzir dados ou calcular) o acesso, necessariamente, será realizado por meio de uma operação de truncamento, ou seja, através da aproximação racional finita.

---

[41] O *princípio da extensão* é um pilar que fundamenta os conjuntos numéricos. Segundo Caraça (1970), todo trabalho intelectual da humanidade é orientado por certos princípios. Para escolher novas definições de um modo conveniente, o princípio de extensão procura adequar definições antigas com o dispêndio da mínima energia, abarcando o caminho mais rápido e curto. O *princípio da extensão* revela a tendência do homem a adquirir, a completar, "[...] a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas conseqüências" (CARAÇA, 1970, p. 10).

[42] No início da era digital, os sistemas operacionais representavam objetos através dos códigos '0' e '1', do tipo binário, viabilizados respectivamente pelo bloqueio e pela passagem de corrente elétrica. Atualmente, a tecnologia evoluiu e os chips magnetizam ou não, porém o código continua binário.

A restrição própria dos computadores, em relação às manipulações operatórias, devido à capacidade finita das memórias, mostra os limites dos meios materiais e empíricos para a pretensa exatidão dos cálculos matemáticos. Os números irracionais:

> [...] somente existem, sobretudo nos computadores, por meio de suas aproximações racionais.[...] É importante destacar, no entanto, ao realizar aproximações, aquilo que torna uma aproximação legítima, tão digna de crédito quanto qualquer cálculo supostamente exato. O critério decisivo é o seguinte: uma aproximação é ótima se e somente se temos condições de melhorá-la, caso desejemos (SÃO PAULO, 2008, p. 51).

Medir é uma operação essencial no campo da Matemática, assim como imprescindível nas diversas ciências e em inúmeras aplicações cotidianas. Quem deseje realizar algum tipo de medida de um objeto, deverá expressar o resultado por meio de algum número, quer seja racional ou irracional.

A seguir, delineamos as contribuições do par finito&infinito, presentes nos relatos da história, permitindo ampliar o entendimento da problemática de significar o tema dos números irracionais, pela possibilidade de composição com o eixo discreto&contínuo.

O eixo finito/infinito.

Os filósofos dos antigos povos já se preocupavam com o infinito, porém não havia uma concepção clara desta temática. O infinito[43] é um conceito onde há conflito entre a concepção intuitiva e o conceito matemático. “Desde sempre, o infinito agitou o ânimo da humanidade mais profundamente que outra questão qualquer. [...] Porém, o infinito necessita de esclarecimento mais que qualquer outro conceito” (HILBERT, 1925, p.3).

Desde a Antiguidade Clássica, os gregos denominavam de *apeíron* o que literalmente significava o indefinido, sem limite. Os povos antigos utilizavam o ‘infinito’ para lidar em situações envolvendo um inconcebível número de elementos, erroneamente atribuindo características finitas ao infinito.

Uma exceção a esse quadro foi Arquimedes, que percebeu o problema citado e tinha noção que o fato de um número ser muito grande não significa que ele é infinito. Os números naturais enunciados ou enunciáveis:

> [...] nem por sonho são infinitos e mais ainda, não estão mais perto do infinito do que qualquer número natural. [...] Por mais que aperfeiçoemos os conhecimentos dos grandes números, admitindo-os cada vez maiores não chegaremos a um ponto em que o finito se torne infinito, [...] pois que, o finito e o infinito são de naturezas diferentes e não se pode aplicar as leis de um ao outro (MARQUES, 1993, p. 28-29).

---

[43] Do latim *infinitu*. Wallis, no século XVI, foi o primeiro a escrever o infinito, na grafia moderna (∞).

A filosofia da escola pitagórica se centrava nos números naturais, considerando que estes se constituíam em elementos imutáveis e tudo na natureza poderia ser representado por números. Para esta seita os objetos eram formados de pequenos corpúsculos de extensão nula, denominadas mônadas. Um segmento de reta (de medida finita) poderia ser subdividido em um número infinito de pequenos segmentos, cada qual composto por mônadas que correspondem a uma menor dimensão ou menor unidade de medida, configurando uma concepção discreta.

Zenão de Elea (~450 a.C.) atacou a Teoria das Mônadas, criando os famosos paradoxos[44], que causaram uma ruptura no modo de pensar grego acerca do infinito.

No paradoxo *a flecha*[45], o principal argumento de ataque de Zenão era que o movimento na concepção das mônadas era ilusão. Se, de acordo com os pitagóricos, a reta possuía um número infinito de mônadas, e se a flecha caminhasse sobre a reta, num dado instante, a ponta da flecha deveria estar sobre determinada mônada.

Como a distância entre as mônadas é nula e se nada pode acontecer entre uma mônada e outra, como a flecha poderia se mover? Ou seja, o movimento da flecha se tornaria uma série de imobilidades, o que contradiz a realidade.

O paradoxo da *flecha* implica que, se a reta for composta de unidades mínimas indivisíveis - as mônadas - estas teriam que ter extensão. Zenão argumentava que a reta não poderia ser composta de mônadas, pois entre dois corpúsculos deveria haver outro com tamanho maior que uma mônada, e caso contrário estes corpúsculos seriam coincidentes. Aplicando esse raciocínio, poderíamos colocar uma mônada entre duas outras indefinidamente, o que acarreta no seguinte problema: nestas condições, qual o número que se atribuiria a um segmento de reta ou a própria reta?

Para responder tal questão, Zenão propôs a *Dicotomia*[46] e *Aquiles e a Tartaruga*.

Na *Dicotomia*, Zenão faz o seguinte raciocínio: antes de percorrer todo o percurso, a pessoa que se movimenta teria que percorrer metade do percurso; para percorrer a

---

44 Paradoxo, termo proveniente do grego *parádoxos*, é uma afirmação que vai de encontro a sistemas ou pressupostos que se impuseram como incontestáveis ao pensamento numa determinada época, mas que são revistos em outra época.

45 Paradoxo da flecha: Para Zenão, se um objeto estiver em repouso quando localizado num local de dimensões iguais a si próprio, então uma seta em vôo deverá estar parada, pois um corpo em movimento ocupa exatamente um espaço igual às suas dimensões, em cada instante. Diante desse impasse, Zenão afirmava que o movimento é impossível, pois o objeto está em repouso.

46 Dicotomia, do grego *dichotomía*, se baseia na subdivisão sucessiva do espaço em duas partes iguais. O enunciado da Dicotomia, de Zenão, diz: “Suponha que me desloco de A para B, ao longo de uma linha. Para atingir B preciso primeiro percorrer metade da distância de A a B e, para alcançar B_1, a meio caminho entre A e B, preciso de atingir B_2, a meio caminho entre A e B_1. Isto continua indefinidamente, de modo que o movimento não pode mesmo se iniciar” (STRUIK, 1992, p. 81).

outra metade, a pessoa necessitaria antes que perfazer a metade dessa metade, ou seja, um quarto do percurso inicial; percorridos, então, três quartos do percurso, ainda faltaria completar o quarto restante do percurso, mas para tal, a pessoa teria que andar a metade desse quarto, que corresponde a um oitavo do percurso inicial; e assim sucessivamente. Assim, a pessoa teria de percorrer um número infinito de intervalos.

Para Zenão, se a reta contivesse um número infinito de mônadas, então a totalidade dos infinitos termos teria uma quantidade infinita. Consequentemente, o movimento seria impossível, pois não seria possível atravessar um número infinito de mônadas em um tempo finito. Este fato, aliás, se constitui um erro de Zenão, que confundiu uma distância infinita com uma distância finita infinitamente indivisível (entre dois pontos não há uma distância infinita, mas sim uma distância finita que podemos dividir infinitamente).

Atualmente, algumas séries infinitas que convergem em determinado número são assunto do ensino básico. Na Dicotomia, de Zenão, se considerarmos a primeira metade do percurso como sendo unitária, teríamos então a sequência de distâncias dada por (1; 1/2; 1/4; 1/8;....), uma Progressão Geométrica decrescente de razão 1/2, cuja soma de infinitos termos é dada por: $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

A sequência (1;1/2;1/4; 1/8;....), uma Progressão Geométrica formada por uma sucessão de frações originadas por números inteiros, pode ser representada como uma série de retângulos. Cada termo representa uma área, conforme ilustra a figura 26.

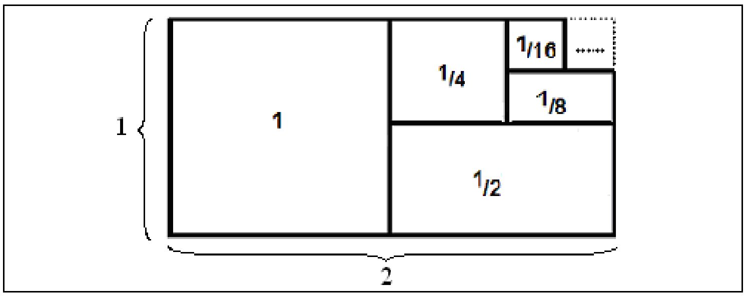


Figura 26: Representação geométrica da P.G (1;1/2;1/4; 1/8;....).

A soma dos infinitos termos tende a completar o retângulo de lados 1 e 2 unidades, convergindo para o valor finito S = 2. Os argumentos de Zenão representaram uma revisão crítica de conceitos fundamentais, tais como o infinito, o tempo, o movimento, a reta, o número, o discreto e o contínuo. Porém, faltava aos gregos um melhor entendimento do infinito e uma linguagem mais apropriada para abordá-lo.

Outro grego, Arquimedes, desenvolveu um método mecânico utilizado para cálculos de volumes e áreas, muito próximo da ideia de integração do moderno Cálculo. Struik (1992) pondera que este método se baseia na ideia de 'átomo geométrico', da escola de Demócrito[47] (séc. V a.C.), onde corpos de natureza contínua (segmento de reta, área ou volume) eram constituídos de um grande número finito de átomos indivisíveis, de natureza discreta. Deste modo, a operação da união destes elementos discretos gerava o objeto, ou seja, o contínuo.

Para Arquimedes, como acontecia para os gregos de modo generalizado, a geração desse contínuo era determinada por uma soma, porém num processo finito e aproximativo. A ideia do infinito era tabu, para os gregos e para Arquimedes, que:

> [...] nunca mencionou a palavra infinito. Se ele tinha em mente um processo infinito, e não resta dúvida de que tinha, ele foi cuidadoso em formulá-lo como um processo finito, que poderia ser repetido várias vezes, até que se conseguisse a precisão desejada (MAOR, 2008, p. 69).

Segundo Boyer (1991), os argumentos de Zenão afetaram a Matemática grega. No início da escola pitagórica as grandezas eram representadas por pedras (*calculus*), mas em Euclides há mudança de concepção e os números inteiros, as quantidades discretas, eram representados geometricamente por segmentos de reta, de natureza contínua.

A opção grega contornou e esvaziou o problema do infinito, operacionalizando a exclusão deste conceito dos raciocínios matemáticos. Conforme relata Boyer (1991) configurou-se para os gregos antigos um falso equilíbrio: o reino dos números era discreto, mas o mundo das grandezas era contínuo.

Os paradoxos de Zenão foram retomados por Aristóteles (séc. III a.C.), que introduziu duas novas representações complementares, cuja interação dialética influenciou o desenvolvimento da Matemática: o infinito potencial[48], visto como processo de crescimento em sequências não finitas ou de subdivisão sem final e o infinito real ou atual[49], visto como totalidade completa.

---

[47] Demócrito foi provavelmente o primeiro a tratar de problemas referentes aos infinitesimais, o infinitamente pequeno, de natureza discreta, para compor o todo, de natureza contínua.

[48] Em grego, *dynamei on.* O termo potencial foi dado posteriormente por São Tomas de Aquino.

[49] Este tipo de infinito, que trata os conjuntos infinitos como conjuntos completos, foi retomado, compreendido na plenitude e devidamente sistematizado na Matemática por Cantor (1845-1918), na teoria dos números transfinitos.

O *infinito*, na forma potencial, à moda de Aristóteles, remonta ao ato de questionar até onde se pode contar em conjuntos não-finitos. A ordenação do conjunto dos Números Naturais possibilita o acréscimo de mais um elemento, e este aspecto recursivo de contagem, de natureza discreta, propicia a oportunidade de experimentar intuitivamente o infinito, denominado de infinitamente grande.

Para Aristóteles, o modo potencial não se materializa, é suscetível de se tornar tão grande quanto se queira ou tornar-se maior que toda grandeza finita dada, não pode ser atingido e jamais se esgota[50].

Existe outra forma de infinito, relacionada com o conjunto dos pontos de um segmento de reta. Para Aristóteles, o segmento não se compõe por pontos, embora 'em potência' exista um número sem fim de pontos que estão nele, no sentido de existir uma possibilidade de se realizar, através de operações geométricas construtivas.

Consideremos um segmento de reta e dois pontos A e B. Conforme ilustrado na figura 27, podemos dividir o segmento AB ao meio, obtendo o ponto A_1. A seguir, dividimos A_1B ao meio, obtendo-se o ponto A_2. Procedendo-se de maneira análoga, obtemos uma sucessão de pontos A_i, com $i = 1, 2, 3, ...$, sendo sempre possível pensar numa nova divisão ao meio para se obter um novo ponto, por menor que seja o segmento obtido. O conjunto de pontos obtidos por este procedimento é infinito e de natureza diversa da sucessão de inteiros, não remetendo ao processo de contagem, de natureza discreta: é o processo denominado dicotomia.

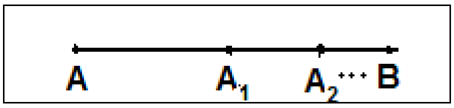


Figura 27: O processo da dicotomia.

O processo da dicotomia permite introduzir o infinitamente pequeno, ou infinitésimo. O processo conduz a divisão de um segmento (finito) indefinidamente, contrapondo, o infinito e a medida de um segmento, o *continuum* geométrico, ao infinitésimo, de natureza discreta.

A coleção C apresenta exemplos de funções $f(x) = (\frac{1}{2})^n$ e $f(x) = -(\frac{1}{2})^n$, conforme exposto anteriormente na figura 20, no capítulo 1, uma exploração inicial da questão do infinito, porém não desenvolvido na potencialidade inerente ao tema.

[50] Vale notar que em filosofia, o termo potência, segundo Aurélio (2003), remete ao que pode ser produzido, ou produzir-se, mas que ainda não existe ou se realizou, de modo semelhante ao que se expressa em Aristóteles.

A influência aristotélica da concepção de infinito potencial perdurou por séculos, até que Cantor esclarecesse o conceito de infinito. Hilbert (1925) destaca que o estudo do infinitamente grande e do infinitamente pequeno sempre aparece nas sucessões numéricas infinitas, especialmente naquelas que definem os números reais na concepção de uma totalidade presente, acabada e autônoma. Para:

> [...] caracterizar a nova concepção do infinito sugerida por Cantor, podemos dizer que na análise lidamos apenas com o infinitamente pequeno e o infinitamente grande como conceitos limitantes, como alguma coisa que está se tornando, resultando, se produzindo, isto é, lidamos com o denominado infinito potencial. Mas o infinito propriamente dito não é isso (HILBERT, 1925, p.6).

Assim, Hilbert (1925) ressalta que Cantor configurou o conceito de infinito atual, mostrando que este modo não se restringe apenas ao processo de contagem, ou a subdivisão de um segmento a maneira da Dicotomia, a moda discreta. O infinito atual:

> [...] se manifesta, quando, por exemplo, consideramos a própria totalidade dos números 1, 2, 3, 4, ... como uma unidade acabada ou quando encaramos os pontos de um segmento como uma totalidade acabada de coisas. Esse tipo de infinito é denominado como infinito atual (HILBERT, 1925, p.6).

Retomando o exemplo da Progressão Geométrica (1; 1/2; 1/4; 1/8;....), descrita na coleção C, o livro-texto poderia ter desenvolvido algumas ideias fundamentais, complementado o texto jornalístico.

Inicialmente, a abordagem poderia relacionar a expressidade geométrica, a moda grega, apresentada na figura 26, representação associada a uma mudança de quadro. Ainda, a visão desta P.G. poderia ser enriquecida com a discussão da questão da dicotomia, presente ao se subdividir o lado unitário ao meio, sucessivamente, o que remete ao infinitésimo. Assim, a enumeração presente implicitamente na sequência enunciada (1º termo, 2º termo,...), de natureza discreta, levada ao processo de divisão sucessiva e infinita, permite explorar a ideia de infinito, na forma potencial, visto que a soma tende a 2, ou ainda, na visão de infinito atual, quando encara-se o segmento como uma totalidade acabada, o valor da soma é exatamente 2.

Estas situações ilustradas e discutidas acima revelam que, em nível didático, o infinito potencial possui uma interpretação natural intuitiva. Se for considerado um objeto infinito, do ponto de vista potencial, como, por exemplo:

> [...] una línea que puede ser extendida indefinidamente tiene un significado *conductual*. Una operación potencialmente infinita también tiene un significado *conductual* (por ejemplo, dividir indefinidamente un segmento de línea). Un infinito actual no tiene un significado conductual, por tanto, no es congruente con una interpretación intuitiva (FISCHBEIN, 1982, p. 13 apud GARBIN; AZCÁRATE, 2002, p. 88).

Complementando as considerações em relação à compreensão da concepção atual, reportamos a existência de uma multiplicidade de infinitos. Cantor encontrou um meio de entender, comparar e relacionar a pluralidade de infinitos através do uso da relação de igualdade e de ordem, assim como na utilização de aspectos quantitativos, em contraposição a posição aristotélica qualitativa.

Para esclarecer a perspectiva da pluralidade ou os vários tipos de infinito existentes, situamos algumas análises. Por exemplo, na coleção A, há exemplificações de enumeração de conjuntos finitos e infinitos, elucidados pela ideia de contagem e de sucessor do conjunto dos Números Naturais, ilustrando a forma potencial de infinito e uma breve articulação entre os conjuntos infinitos e a questão da enumerabilidade, mas não há posteriores desenvolvimentos.

Para elucidar possíveis ampliações referentes ao trabalho dos livros didáticos, destacamos algumas contribuições da história da Matemática. Uma primeira referência remonta a era renascentista. Galileu[51] (1564-1642), em 1638, no livro *Diálogos sobre duas novas ciências,* exprimindo a existência de diversos infinitos e indivisíveis, ao perceber que era possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos naturais e o conjunto dos quadrados dos números naturais (ver figura 28).

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**........**	**n**	**........**
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	
1	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**........**	$\mathbf{n^2}$	**........**

Figura 28: Correspondência biunívoca proposta por Galileu.

Isto significa que os dois conjuntos são equivalentes e possuem infinitos pontos, apesar do conjunto dos quadrados dos números naturais estar contido no conjunto dos números naturais. Os dois conjuntos têm a mesma quantidade de elementos, pois estão em correspondência biunívoca, porém não possuem os mesmos elementos.

A percepção de Galileu delimitou o significado do postulado ‘o todo é maior que as partes constituintes’, válido somente para o universo finito dos conjuntos numéricos. Esta visão antecipatória de Galileu estabeleceu um marco, estabelecendo que os atributos matemáticos maior, menor e igual não cabem no universo dos infinitos[52].

---

[51] O pragmatismo de Galileu o afastou da tradição aristotélica. Isto teve como “[...] conseqüência um estreitamento do horizonte de respostas possíveis, e esta limitação, por sua vez, favoreceu a elucidação de conceitos centrais às leis fundamentais da natureza” (REZENDE, P. A. D., 1999, p.4).

[52] Esta é uma afirmação básica para o infinito, assim como os axiomas de Euclides são para o finito.

Em síntese, Cantor re-elabora o conceito de infinito potencial da metafísica de Aristóteles, para ressignificá-lo como uma:

> [...] medida de grandeza, relativa à existência de correspondência biunívoca entre conjuntos. O conceito de potência em Cantor generaliza o conceito de número como correspondência enumeradora em Aristóteles – o 'número com que numeramos' (*arithmos monadikos*) – onde a enumeração finita é substituída por uma função biunívoca entre conjuntos, finitos ou não (REZENDE, P. A. D., 1999, p. 8).

O significado de infinito potencial, a moda de Cantor, remonta ao ato de contar, que foi historicamente construído através da desigualdade entre elementos de conjuntos, evoluindo para o estabelecimento da equivalência, conforme destaca Brolezzi (1996).

O fato se relaciona com o conceito da correspondência biunívoca, uma das ideias fundamentais da Matemática apontada por Caraça (1970), indicando quantos elementos contém um conjunto finito formado por elementos de natureza discreta.

Ao comparar um conjunto finito com o dos Números Naturais ($N - \{0\}$), o enunciar da posição do último elemento do conjunto finito representa a quantidade de elementos do conjunto[53].

Uma situação interessante para confrontar as distintas características de conjuntos finitos e infinitos é o conhecido *Hotel de Hilbert*[54], cujo enunciado é: Um hotel tem uma infinidade de quartos assim numerados: 1, 2, 3, 4, 5, ... No final da tarde chega um hóspede e ouve do recepcionista a infeliz informação de que não há quartos disponíveis: todos os quartos estão ocupados. Ouvindo isto, o gerente diz que pode resolver a situação. Desloca o hóspede do quarto 1 para o quarto de número 2, o hóspede do quarto 2 para o quarto 3, e assim sucessivamente, tornando livre o quarto número 1.

Em relação ao desafio do hotel proposto por Hilbert, em uma situação cotidiana deste tipo é usual haver um número finito de quartos disponíveis. Assim, se o hotel estivesse lotado, alguém teria que desocupar um dos cômodos para que o novo hóspede ocupasse o quarto número 1. A pergunta a ser feita seria: E quem sairia? E a resposta deveria ser: como consequência da proposição enunciada pelo gerente, sairia do hotel o hóspede do quarto de maior numeração, algo que desagradaria este cliente.

---

[53] Em um conjunto finito, o numeral cardinal designa a quantidade absoluta ou número de elementos do referido conjunto.

[54] Esta curiosa e propicia alegoria de Hilbert (1862-1943) ilustra as ideias de Georg Cantor (1845-1918).

No Hotel de Hilbert a situação é diferente da habitual, pois o número de quartos é infinito. Na mudança proposta pelo gerente, como não há último número natural, a situação é cabível: basta compor uma função bijetiva, onde cada elemento x do conjunto A (hóspedes do hotel antes da chegada do novo hóspede) fazemos corresponder um elemento x+1 do conjunto B (a nova estrutura de hóspedes), ou seja: y = x +1.

Em uma nova situação, caso surja um ônibus com cem pessoas e solicite hospedagem, bastaria deslocar o hóspede do quarto número 1 para o quarto número 101, o do quarto número 2 para o quarto número 102 e assim por diante, através da função bijetiva y = x + 100.

A metáfora desencadeada pelo problema conhecido como *Hotel de Hilbert* exibe uma possibilidade de situações, que podem propiciar novas reflexões. Uma questão importante seria: E se aparecessem uma infinidade de novos hóspedes, ainda seria possível acomodar os infinitos hóspedes?

Uma solução comum seria transferir o hóspede do quarto 1 para o 2, o hóspede do quarto 2 para o quarto número 4, o hóspede do quarto número 3 para o quarto número 6 e assim por diante. Esta solução construtiva possibilitada pela metáfora do *Hotel de Hilbert* desencadeia a instrumentalização de um conhecimento matemático fundamental: a correspondência biunívoca entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números pares naturais, conforme ilustra a figura 29.

x	0	1	2	3	4	5	....	n	....
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	
y	0	2	4	6	8	10	....	2.n	....

Figura 29: Correspondência biunívoca y = 2x, com ‘x’ natural.

Estes conjuntos são equivalentes e possuem infinitos pontos, apesar do fato que o conjunto dos números pares estar contido no conjunto dos números naturais. Deste modo, esses dois conjuntos têm a mesma quantidade de elementos, porém não possuem os mesmos elementos.

A análise do problema do *Hotel de Hilbert* propicia uma solução típica e ilustra uma propriedade importante: Toda classe que pode ser colocada em correspondência biunívoca com o conjunto dos Números Naturais é dita enumerável.

Os conjuntos infinitos que são enumeráveis foram designados pela cardinalidade aleph-zero (χ_o), símbolo da primeira letra do alfabeto hebreu. Cantor também provou que o conjunto dos números racionais não-negativos é enumerável.

Retomando o problema do Hotel de Hilbert, podemos então considerar que sobrariam infinitos quartos numerados por 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... suficientes para alojar a infinidade de novos hóspedes. A bijeção f(x) = 2x + 1, indica que o conjunto dos números ímpares naturais também é enumerável (figura 30).

x	0	1	2	3	4	....	n	....
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	
y	1	3	5	7	9	....	2.n + 1	....

Figura 30: Correspondência biunívoca y = 2x+1, entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números ímpares positivos.

Cantor utilizou um dispositivo (ilustrado na figura 31) para mostrar que o conjunto dos Números Reais não é enumerável, ou seja, que não é possível colocar os elementos do conjunto dos números reais em correspondência biunívoca com os elementos do conjunto dos Números Naturais e, por consequência, com o conjunto dos Números Racionais. Cada número natural é colocado em correspondência biunívoca com um número real, entre 0 e 1, expresso na forma decimal infinita, representado por letras indexadas, cada qual correspondendo a um certo dígito entre 0 e 9.

1	$\leftrightarrow$	0,	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...
2	$\leftrightarrow$	0,	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	...
3	$\leftrightarrow$	0,	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	...
4	$\leftrightarrow$	0,	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	...
5	$\leftrightarrow$	0,	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	...

Figura 31: Dispositivo da Prova da Diagonal de Cantor

Cantor percebeu que a correspondência descrita não era suficiente para representar uma incontável quantidade de números reais. Por exemplo, ao traçar a diagonal, é possível escrever um decimal entre 0 e 1 da forma $\mathbf{r} = 0{,}r_1r_2r_3r_4$ ..., que não estará nesta lista, pois diferirá do primeiro número no primeiro algarismo ($\mathbf{r_1 \neq a_1}$), do segundo número no segundo algarismo ($\mathbf{r_2 \neq a_2}$) e assim por diante.

Assim, é possível exibir inúmeros valores que não constam da lista, o que demonstra a afirmação que a cardinalidade dos números reais é superior a cardinalidade dos números naturais. O conjunto dos reais (ou dos Irracionais) tem cardinalidade χ e Cantor conjecturou que não existem outros tipos de infinito entre χ_o e χ, conhecida como a Hipótese do Contínuo[55].

[55] Não há até o momento demonstração para a Hipótese do Contínuo.

Cantor superou os obstáculos finitistas, revelando a existência de uma pluralidade de conjuntos infinitos de 'tamanhos' diferentes, distinguindo entre conjuntos infinitos contáveis e incontáveis, especificando as relações de complementaridade existentes entre estas múltiplas manifestações. A comparação entre conjuntos infinitos formados por elementos pertencentes ao conjunto dos inteiros, ou a uma razão de números inteiros, como no conjunto dos números racionais, fornece os conjuntos infinitos do tipo enumerável. Em contrapartida, as comparações entre elementos do conjunto dos pontos da reta real, ou seja, os elementos do conjunto dos números reais fornecem o infinito de cardinalidade $\chi > \chi o$.

Em vista destes resultados apontados, Caraça (1970) adverte que é perigoso entrar no domínio do infinito unicamente armado somente da intuição ou do senso comum.

Parafraseando Machado (1990), a história do infinito é um exemplo de um importante assunto que mesmo tendo partido de ideias nada claras e apoiando-se durante quase dois séculos em indícios de fundamentação matemática, superou as próprias inconsistências e foi transformada em um tema fundamental da Matemática, em particular, num dos pilares da temática dos números reais.

Partindo-se da 'Crise dos Incomensuráveis', que representa o marco de surgimento dos números irracionais, uma dicotomia ficou pontuada entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. Os números racionais representam geometricamente segmentos comensuráveis ou elementos de um conjunto do tipo enumerável. Em contrapartida, os números irracionais representam segmentos incomensuráveis ou elementos de um conjunto não-enumerável com a cardinalidade dos números reais, superior a cardinalidade dos conjuntos enumeráveis.

A construção dos Números Reais.

Segundo Aaboe (1984), a descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ pelos gregos, historicamente situa o marco para a correta interpretação dos números reais. Karlson (1961) afirma que não há referência sobre a maneira que os gregos demonstraram a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado. Uma das hipóteses de demonstração é utilizando-se o teorema Fundamental da Aritmética[56]. Assim, supondo-se que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ é um número racional, então podemos obter $\frac{m^2}{n^2} = 2$.

[56] Seja ***a*** um inteiro diferente de 0, 1 e -1. Então, existem primos positivos $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ e inteiros positivos $n_1, n_2, \ldots, n_r$, tais que $a = E.p_1^{n_1}.p_2^{n_2}\ldots p_r^{n_r}$, em que E = ± 1, conforme ***a*** seja positivo ou negativo. Ainda, essa decomposição é única.

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, a decomposição de ‘2’ é única, assim como m^2 e n^2 deverão possuir um número par de fatores primos na decomposição. A operação de simplificação da fração m^2/n^2 deverá conter um fator par de números primos. Isto representa um absurdo, pois o resultado de $m^2/n^2 = 2$, apresenta uma só parcela, ou seja, um fator ímpar de parcelas[57].

Renè Descartes sistematizou as contribuições anteriores, originada a partir dos gregos, para o estabelecimento e compreensão da natureza dos números reais. Este filósofo afirmava que “[...] o irracional não lhe parece dever ser mais considerado como *números fictus*, mas como *numero verus* [...]. Tal a origem da noção mais ampla de número real, abrangendo [...] os números racionais e todas as classes de irracionais” (apud COSTA, M. A., 1981, p. 221).

Desde os antigos gregos, os números racionais eram concebidos como uma medida, um segmento de reta com um extremo na origem, comensurável ao segmento unitário.

Os números irracionais também eram concebidos como uma medida geométrica, porém correspondendo aos segmentos incomensuráveis ao segmento unitário conforme expresso na figura 32.

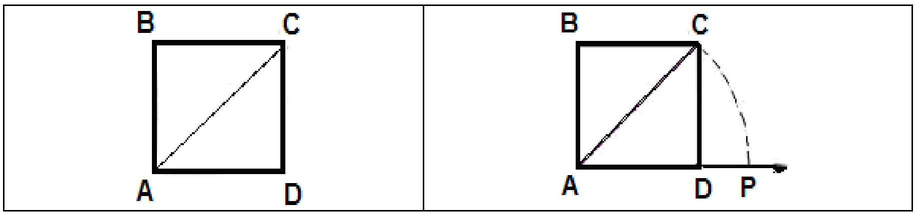


Figura 32: Visualização de um número irracional no segmento orientado AP.

A partir de um quadrado de lado unitário, com origem em A e raio AC, traça-se o arco AC, que encontra a reta em P. Como a diagonal AC e o lado AD são incomensuráveis, o segmento AP não pode ser um número racional.

Aplicando-se o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ACD tem-se: $\mathrm{AC}^2 = AD^2 + CD^2$. Como AD = CD = 1, tem-se: $\mathrm{AC}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ e $\mathrm{AC} = \sqrt{2}$. Daí segue que $\mathrm{AP} = A\mathrm{C} = \sqrt{2}$, que é a abscissa de P.

[57] Essa demonstração pode ser estendida para qualquer número primo e para os números compostos cuja raiz quadrada não seja um número inteiro.

Este tipo de construção permite visualizar o número irracional citado e iniciar o processo de compreensão da natureza destes e diferenciá-los dos números racionais. Na figura 33, tem-se o eixo com um ponto de referência O, onde OU representa um segmento unitário e seja P um ponto genérico.

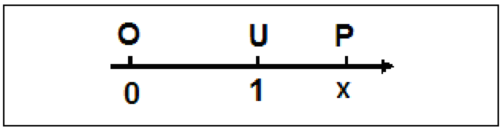


Figura 33: Eixo real e um ponto genérico P.

Todo ponto P da reta, distinto de O, a partir da condição que os segmentos OP e OU são comensuráveis, representam um número racional (Q), ou seja, números da forma m/n, com m e n inteiros e $n \neq 0$. Isto indica que existem infinitos pontos com esta característica, formando o conjunto dos números racionais. E a medida OP, obtida a partir dos infinitos pontos P da semi-reta, distintos de O, a partir da incomensurabilidade entre os segmentos OP e OU passam a representar o conjunto dos irracionais.

Nos livros didáticos, encontramos um exercício proposto na coleção A que se refere ao problema da diagonal, mencionado na figura 9, no capítulo 1. Porém, a discussão da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado, configurando uma relação entre o conjunto dos racionais e irracionais, não foi explicitada e nem desenvolvida.

Os livros didáticos analisados das coleções A e C representam o número irracional $\sqrt{2}$ na reta real. Porém, deste registro não emerge uma discussão maior entre o conjunto dos racionais e irracionais, nem reportam a questão do infinito, delineada a seguir.

Os números reais representam a coleção de todos os números associados aos pontos do eixo real, situados a alguma distância, medida com relação à origem deste eixo. Por construção, o conjunto dos Números Racionais e o conjunto dos Números Irracionais são disjuntos e a união entre eles forma o conjunto dos Números Reais.

Deste modo, o conjunto dos Números Racionais forma uma subclasse do conjunto dos Números Reais, ou seja, Q⊂ ®. A coleção dos números constituídos de modo que ® – Q são denominados números irracionais e não possuem símbolo próprio.

Todo número real ou é racional ou é irracional. Niven (1984) atribui a denominação número real à tradição passada, ponderando que a denominação números unidimensionais seria mais interessante, se considerarmos o ponto de vista conceitual.

Costa, M. A. (1981) argumenta que a definição cartesiana exposta traz dificuldade na medida em que se deve provar a possibilidade da realização das operações aritméticas sobre os números irracionais obtidos na reta real, do mesmo modo que é possível para os racionais.

Como modo alternativo para contrapor a localização operatória de pontos da reta real, como no caso de $\sqrt{2}$, presente em dois dos livros que analisamos, delineamos um argumento adicional. Recorremos, então, a epistemologia presente na noção de continuidade[58] geométrica, através do denominado postulado da continuidade de Cantor-Dedekind, onde o conceito de continuidade foi associado à metáfora do corte.

Se considerarmos uma reta e um ponto P sobre ela, conforme se observa na figura 34, todos os pontos da reta se dividem em duas classes: a classe à esquerda de P (classe A) e a classe à direita de P (classe B), sendo que o próprio ponto P pode ser colocado na classe A ou na classe B, dependendo da natureza do número envolvido.

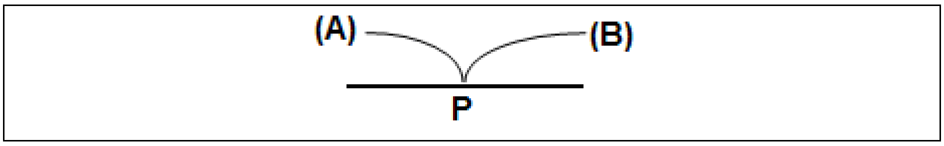


Figura 34: Corte produzido pelo ponto P e constituído pelas duas classes (A) e (B).

O ponto P da reta produz nela um corte. E a repartição de um ponto P da reta em duas classes deve obedecer a duas condições: nenhum ponto escapa a repartição; todo ponto da classe A esta à esquerda de todo ponto da classe B, representando-se este corte por (A, B).

E Richard Dedekind (1831-1916), pensou na afirmação recíproca, quando se considera na reta um corte, ou seja, quando existem duas classes nas condições acima expressa e questionou se sempre haveria um ponto P que produziria o corte. Dededink afirmou que tal princípio é um axioma e, assim, deve-se entender a continuidade.

Assim, Dedekind, baseando-se nas ideias de Eudoxo, construiu uma teoria dos Números Reais, fundamentado em aspectos aritméticos, independentemente de características geométricas.

[58] Segundo Caraça (1970), uma noção intuitiva e inicial de continuidade é aquela representada por uma linha ou curva contínua no plano cartesiano, sem saltos, que faz apelo a uma variação que ocorre por gradações insensíveis.

Dedekind separou o conjunto de todas as frações, ou seja, o conjunto dos racionais não-negativos (Q_+), em duas classes A e B, de modo que cada número racional pertença a A ou B e, ainda, que todo elemento de A seja inferior a qualquer elemento de B. Caso não exista em A um número que seja superior a todos os outros de A, ou não exista em B um número que seja inferior a todos os outros de B, isto representa o que Dedekind definiu como corte aberto, estabelecendo um critério para introduzir os números irracionais.

Um contexto clássico que esclarece o conceito de corte é o da 'Crise dos Incomensuráveis'. Seja a classe A, correspondendo as frações m/n tais que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 < 2$ (classe das raízes por falta) e a classe B, correspondendo as frações $\left(\frac{m}{n}\right)^2 > 2$ (classe das raízes por excesso).

Não existindo um maior elemento racional em A e nenhum menor elemento racional em B, nenhum número racional tem 2 como seu quadrado, resultando que o número $\sqrt{2}$ é irracional.

Para Dedekind, qualquer número racional ou irracional representa um corte na reta real. A possibilidade de todas as medidas de comprimentos serem expressas como números reais é conhecida como a propriedade da completeza. A ideia de continuidade, ligada aos aspectos quantitativos de medida, permitiu significar como número real:

> [...] ao elemento de separação das duas classes dum corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional a separar as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional; se não existe tal número, o número real denomina-se irracional (CARAÇA, 1970, p. 62).

Deste modo, uma compreensão inicial sobre a natureza dos números reais é possibilitada pela discussão dos conjuntos naturais, a extensão para os números racionais não-negativos, que desencadeou na 'Crise dos Incomensuráveis' e aos problemas acarretados ao horror grego ao infinito. De certo modo, tal caminho é realizado pelos livros-didáticos analisados, porém de modo simplificado. Porém, para introduzir a noção e efetivar o desenvolvimento significativo de número irracional:

> [...] tornam-se necessárias explicações sobre a continuidade da reta real, sobre o infinitamente grande e o infinitamente pequeno, assim como sobre as grandezas incomensuráveis. Tudo isso gira em torno das idéias de discreto e de contínuo, e não se pode falar de uma delas sem referenciar a outra (BROLEZZI, 1996, p. 3).

Quanto à continuidade, esta se revela intuitivamente através da representação gráfica por uma linha ou curva sem interrupção. A reta é a imagem arquetípica da continuidade, por não apresentar saltos ou buracos.

A continuidade é mais que uma coleção de infinitos pontos justapostos sobre a reta real. Numa perspectiva mais ampla, a continuidade é revelada pela possibilidade de se efetivar um corte na reta real.

Caraça (1970) expõe que este modo de definir os reais com base no conceito de corte de Dedekind mostra que os números irracionais não têm uma natureza tão elementar como os racionais.

> Enquanto que para definir um número racional bastam dois números naturais – o seu numerador e seu denominador – para definir um número real são necessárias duas infinidades de números racionais, visto que os elementos constitutivos [...] [das] duas classes (A) e (B) do corte [...] [tem] uma infinidade de números (CARAÇA, 1970, p. 63).

Pela análise que realizamos nos livros didáticos, a ideia de corte apresentada no desenvolvimento do conhecimento matemático permite ampliar a conceituação usual de número real na Matemática Elementar. Isto acarreta a possibilidade de aumentar o repertório de significação dos números irracionais, constituindo em contribuição passível de ser realizada no ensino básico.

E a questão da relação complementar entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais mais uma vez se revela, como uma interação entre o discreto e o contínuo, pois:

> [um número] racional ou [um número] irracional pode ser considerado como par de conjuntos infinitos de números racionais. E como o número racional se exprime em termos do número inteiro, a concepção de Dedekind nos permite finalmente conceber o número irracional como uma arquitetura de números inteiros (COSTA, M. A., 1981, p. 237).

Para Thom (2004), o modo como foi definido o conjunto dos Números Reais, a partir do conceito de corte, corresponde à 'solução fantasmática' atual. Esta se refere à opção de gerar o contínuo a partir do discreto. Este tipo de procedimento corresponde também à classificação dos diversos infinitos.

Assim, a sucessão de naturais, de natureza discreta, tornou-se o patamar para a construção do arquétipo da reta real, de natureza contínua. Uma posição que ilustra tal posição relata que o:

> [...] curso fundamental das matemáticas, desde a construção dos racionais, quase parece solicitar a definição dos reais. A história é bem conhecida: foi a geometria, com a demonstração 'pitagórica' da incomensurabilidade da diagonal e do lado do quadrado, que de fato impôs a introdução dos irracionais: a conquista do contínuo, a medida do espaço exigia esta extensão (THOM, 2004, p. 661).

Os Eixos Constitutivos dos Números Reais e a construção de significado dos números irracionais.

O tema dos números reais contribui para a introdução e desenvolvimento dos números irracionais no ciclo básico. Para alicerçar tal afirmação, apresentamos como argumento a essência presente nos fundamentos dos eixos constitutivos: discreto/contínuo; finito/infinito; exato/aproximado, relatados em Machado (2009).

Rememorando sinteticamente o percurso de ideias traçadas neste capítulo, a narrativa envolvendo o conhecimento dos números irracionais teve início com o discreto e o contínuo, que representam respectivamente as ações de contar e medir, duas noções fundamentais no campo da Matemática. O discreto e o contínuo se constituem em dois pólos dicotômicos, mas existe entre ambos a possibilidade de interação que pode enriquecer o ensino da Matemática, conforme destaca Brolezzi (1996).

No desenvolvimento do discurso deste assunto, ao estudarmos as possíveis relações presentes no par discreto&contínuo, emergiu a insuficiência dos números racionais para o que Caraça (1970) denominou de ‘problema da medida’, originada no seguinte contexto: é sempre possível dividir um dado segmento de reta (AB) em um número finito de partes iguais, de modo que uma dessas partes caiba um número inteiro de vezes em *AB*?

Se for considerado um ponto de vista pragmático a esta questão, é sempre possível medir um segmento dado, de modo aproximado, utilizando instrumentos com certa unidade como parâmetro, resposta que tem como suporte o mundo sensorial das diversas grandezas.

Porém, do ponto de vista teórico, existe a possibilidade da resposta a esta pergunta ser negativa, o que representa um momento de apresentar os números irracionais. Em termos históricos, esta situação correspondeu ao episódio conhecido mais atualmente como a ‘Crise dos Incomensuráveis’.

Diante do impasse apresentado em relação ao par discreto e contínuo, tendo como parâmetros o aspecto teórico e o viés prático, surge a possibilidade de examinar outro par: o exato e o aproximado.

O aspecto aproximado sempre coexistiu para os antigos povos pré-helênicos e para alguns posteriores, como os árabes e os hindus, cuja estrutura civilizatória essencialmente lidava somente com os aspectos pragmáticos. Para estes povos não cabia a distinção entre o discreto e o contínuo, nem entre o exato e o aproximado.

O ato de medir, no dia-a-dia, requer necessariamente uma aproximação. Nestas situações, o resultado da medida deve ser expresso por um número racional, decimal e finito, onde o grau de aproximação depende da limitação do instrumento utilizado nesta ação.

O viés prático envolvendo o fato que toda medida recai em um resultado representando um número racional, pode gerar a concepção errônea que os números racionais são suficientes para todas as ações matemáticas e das ciências.

Aliado ao contexto de aproximação, no senso comum há uma crença recorrente que considera os números e, de modo geral, toda a Matemática, regidos por leis próprias, determinísticas e totalmente estruturadas. Considerando-se esse contexto apresentado, como fica a pretensa exatidão da Matemática?

Um exemplo clássico para situar esta questão é o das calculadoras eletrônicas e dos computadores. Conforme foi exposto, Lima (1985) e Bonomi (2008) apontam que a própria natureza finita das memórias destas máquinas trunca os resultados armazenados e, a cada operação, realiza uma aproximação.

E, nestes casos, como é possível confiar nos resultados expressos por uma máquina, como as calculadoras eletrônicas e os computadores?

Um possível encaminhamento a esta questão se relaciona a essência teórica do conhecimento matemático e, em particular, considerando-se os números irracionais. Alguns irracionais notáveis, como o número PI, o número de Euler e o número de ouro permitem testar e determinar os limites de confiabilidade destas máquinas.

Este contexto usual, presente nos nossos dias, ilustra os limites dos meios materiais e empíricos para a pretensa exatidão dos cálculos matemáticos, o que motivou um estudo presente na dialética inerente ao par exato e aproximado. Deste modo, a operação de aproximação permite o acesso de um número irracional, ou seja, um número com infinitas casas decimais não-periódicas, ao mundo real e finito.

O infinito foi um assunto que inquietou e desafiou os povos antigos, situação que configurou um quadro de lentidão no desenvolvimento matemático. A dificuldade de entendimento deste campo matemático se associa, de certo modo, ao afastamento e simplificação da abordagem deste assunto nos manuais escolares do ciclo básico.

O *infinito*, na forma potencial, está intuitivamente associado à possibilidade de questionar até onde se pode efetivar a contagem, em conjuntos não-finitos, pelo acréscimo de mais um elemento. Este aspecto recursivo de contagem, de natureza discreta, propicia a intuição do infinitamente grande.

De outro modo, ao se subdividir um dado segmento de reta ao meio e, a cada segmento resultante proceder do mesmo modo, forma-se um conjunto de infinitos pontos. Este processo, denominado dicotomia, permite introduzir o infinitamente pequeno, ou infinitésimo. Deste modo, a dicotomia permite a divisão de um segmento finito, indefinidamente, contrapondo, o infinito e a medida de um segmento, o *continuum* geométrico, ao infinitésimo, de natureza discreta.

O discurso presente nesta narrativa que sintetizou as discussões que realizamos anteriormente, nas deliberações expostas neste capítulo envolvendo os eixos constituintes dos números reais – discreto&contínuo; exato&aproximado; finito&infinito - permitiram expor as tensões presentes a cada um destes eixos constituintes, complementares por natureza, e as inerentes relações entre os eixos.

Para situar as citadas conexões remetemos a Otte (1993), que coloca o conceito de complementaridade entre dois elementos como sendo a capacidade de cada um dos entes polares se diferenciar, assim como abranger o outro. Assim, nenhum dos dois elementos pode ser determinado sem o outro, apesar de que, em certos momentos, ambos os pólos assumem um papel distinto, relação que podemos aproximar da concepção de dialética de Hegel.

A ideia de complementaridade presente em Otte (1993), incorporada ao ensino de Matemática, permite retratar as possíveis conexões e interações entre os eixos discreto/contínuo; finito/infinito; exato/aproximado. O estudo que apontamos anteriormente em relação a estes eixos revela relações de complementaridade e interação entre os componentes dicotômicos do conjunto dos Números Reais: o conjunto dos Números Racionais e o conjunto dos Números Irracionais.

Estas conexões são expressas essencialmente por um estudo mais aprofundado em relação ao infinito e o aproximado. Os temas do infinito e do aproximado são passíveis e essenciais de serem apresentados no ciclo básico, se inseridos num mapeamento envolvendo uma escala propícia e orientada por referenciais norteadores, podendo se constituir em ingredientes de uma possível abordagem didática adequada e significativa para os números irracionais.

Para que um conhecimento seja significativo, segundo Machado (2009), é necessário mapear, ou seja, é fundamental escolher um discurso organizador desse conhecimento. Pela exposição realizada, o movimento de significar os números irracionais perpassa a possibilidade de estabelecer uma narrativa orientadora, guiada pela confluência dos pares constituintes dos números reais, ou seja, os eixos norteadores discreto/contínuo; exato/aproximado/estimado e finito/infinito.

Nesse contexto, o tema dos números irracionais pode ser abordado em um 'espaço de significações', que constitui uma espécie de campo caracterizado pela presença e organização dos eixos norteadores discreto/contínuo; exato/aproximado/estimado e finito/infinito, cuja natureza dialética possibilita interações que viabilizam e norteiam diversos caminhos para a tecitura de significados aos conhecimentos relativos aos números irracionais, ideia representada no mapa 1.

Mapa 1: Espaço de significações dos números irracionais.

Os eixos discreto/contínuo; exato/aproximado/estimado e finito/infinito constituem-se como elementos estruturais do ‘espaço de significações’ que permitem tanto orientar os rumos dos objetos neste campo, uma característica básica dos mapas instrumentais, conforme Machado (2009), como prover uma representação do conhecimento mediante a apreensão das características essenciais que confluem das várias conexões que o objeto pode realizar, na acepção do mapa-imagem.

Para o referido autor os mapas permeiam o terreno dos espaços de conhecimento ou das representações simbólicas significativas para o ser humano, recurso que suscita possibilidades diferentes, de acordo com uma escolha de escala.

Machado (2009) destaca que a melhor representação de um objeto deve ser feita ponto a ponto, mas isto muitas vezes é impossível. Metaforicamente, na Matemática, não é possível efetivar a transposição didática envolvendo o conhecimento dos números irracionais tal qual se encontra nos livros e compêndios dos cursos de Matemática de Ensino Superior. Para se efetivar uma transposição didática é necessário realizar escolhas, o que remete a busca de uma orientação, ou seja, um mapa que permita guiar e empreender uma representação do conhecimento acessível a alunos do ciclo básico.

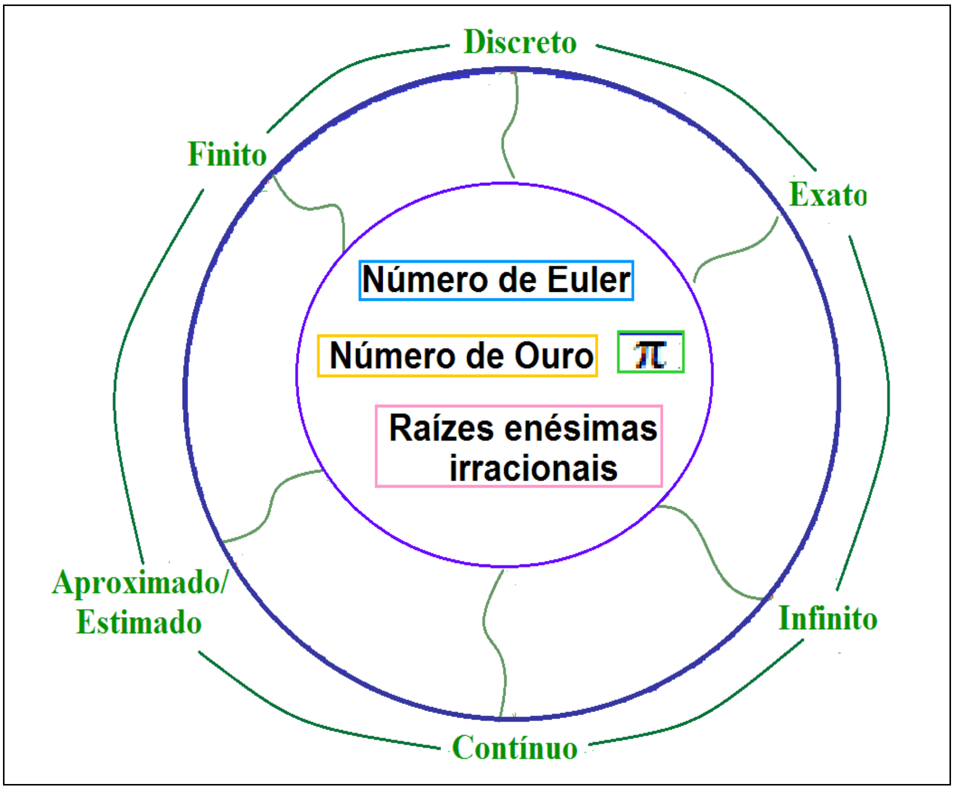
Considerando esta possibilidade, o tema dos números irracionais perpassa um mapa de relevâncias, viabilizado por diferentes conexões através das redes de conhecimento, de modo a distinguir o que é relevante e pertinente em face de uma aprendizagem significativa.

A análise realizada nos livros didáticos permitiu o mapeamento das dificuldades envolvidas no discurso presente em tais obras. O tratamento dos principais números irracionais que fazem parte do currículo da escolaridade básica - as raízes enésimas irracionais; o número PI, o número de Euler e o número de ouro – apresenta, nas obras analisadas, um ‘percurso de núcleos de significação’ simplificado e incompleto.

Para permitir um movimento favorável ao par conhecimento&significado com relação aos números irracionais, tornou-se essencial re-estabelecer relações epistemológicas constituídas ao longo do processo histórico presente nas civilizações, conforme destacamos neste trabalho.

As conexões que emergem do ‘espaço de significações’ entre os eixos polarizados discreto/contínuo, exato/aproximado e finito/infinito, pólos próprios e essenciais do tema dos números reais, com os números irracionais - as raízes enésimas irracionais; o número PI, o número de Euler e o número de ouro – estão representadas no mapa 2.

Mapa 2: As múltiplas redes de conexões entre os números irracionais e os eixos constituintes dos números reais.



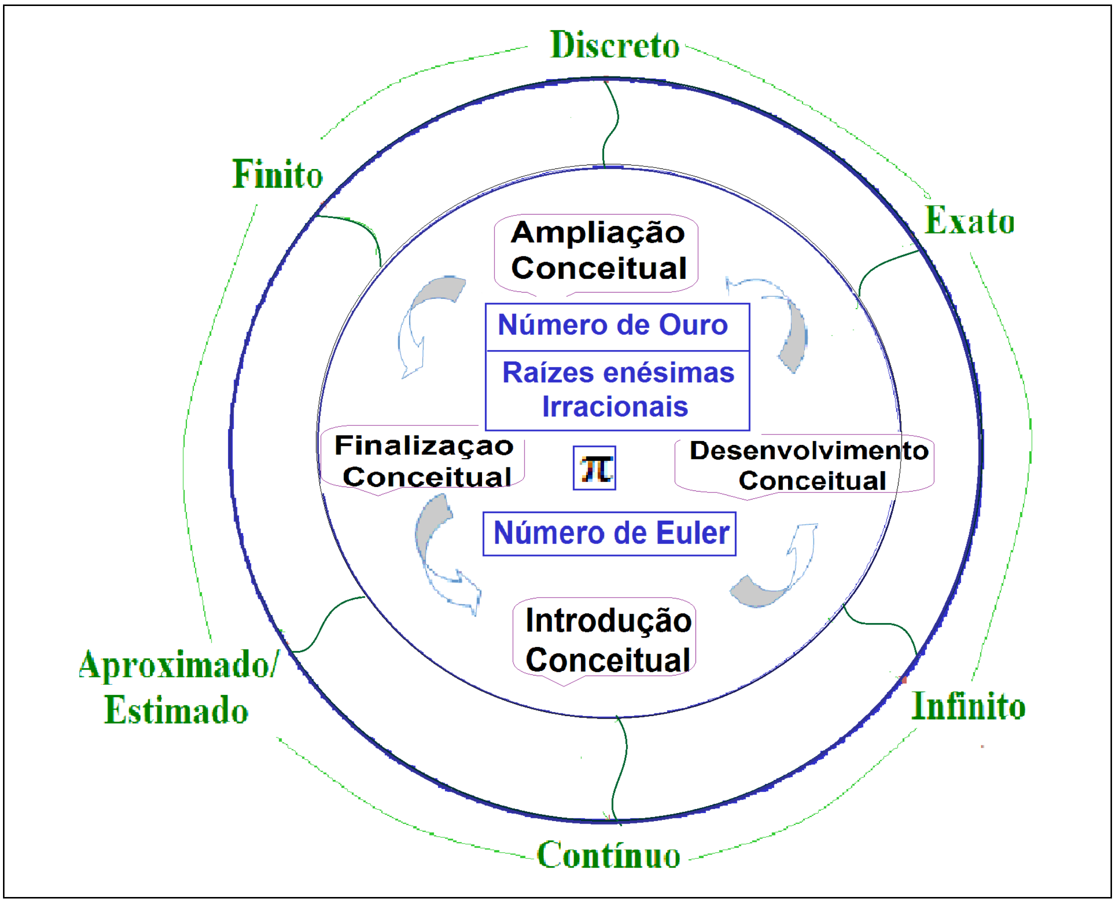
O mote que ilustra a sintonia inerente as relações dos temas envolvendo os números irracionais e o ‘espaço de significação’ organizado pelos eixos discreto/contínuo, exato/aproximado e finito/infinito se efetiva pela concepção da metáfora do conhecimento como rede de significados. Conforme Machado (1995), a rede se constitui em uma imagem onde o conhecer é possibilitado pela partilha de significados, através da busca de relações entre dados, objetos, fatos, noções, conceitos e informações.

No ensino atual, existe a tendência de tratar os números irracionais setorizando o ‘espaço de significações’, ou seja, quando o discurso para a abordagem deste tema opta pela polarização de qualquer um destes eixos, assim como em não considerar as relações entre os pares discreto/contínuo, exato/aproximado e finito/infinito.

Esta tendência ficou explicitada nos livros didáticos analisados no capítulo 1. O discurso exposto nestas coleções envolvendo os aspectos do aproximado e do infinito foi reduzido, de modo a inviabilizar o ‘percurso dos núcleos de significação’, não permitindo o acesso ao significado dos números irracionais.

Para desbloquear os acessos restritos permeados pelos manuais escolares, contrapomos as contribuições da metáfora da rede de significados, associada à concepção de mapas, conforme Machado (2009), sintetizadas no mapa 3.

Mapa 3: Percurso dos núcleos de significação através do Espaço de Significações dos números irracionais.



Neste modo de interpretação, o 'espaço de significações' viabiliza o trânsito dos temas envolvendo os números irracionais pelas diversas ligações, favorecendo o navegar pelo 'percurso dos núcleos de significação' de modo mais diversificado e abrangente possível, com conexões e fronteiras flexíveis.

Deste modo, o 'espaço de significações' permeia várias possibilidades de viabilizar um percurso de significações, conforme destacamos no capítulo 1. Isto equivale a introduzir conceitualmente os números irracionais, pela utilização de linguagens e materiais didáticos variados, o que permite encaminhar a apresentação inicial a um desenvolvimento e uma amplitude conceitual dos números irracionais, pela diversificação de linguagens matemáticas (aritmética, algébrica, funcional, geométrica, gráfica), assim como pela reutilização em diversos contextos e situações permeando os temas matemáticos e extramatemáticos.

Destacamos que a concepção de rede de significados abre espaço para a introdução de temas que atuem como centros de interesse[59] e que possibilitam um diálogo tanto externo quanto internamente a cada disciplina. Acreditamos que os centros de interesses podem ser estendidos para explicitar relações internas, fato essencial para articular e aproximar ideias fundamentais em cada ramo do conhecimento.

Pela própria natureza, os eixos constitutivos do 'espaço de significações dos números irracionais' revelam nuances do próprio mundo matemático. Isto possibilita uma articulação intradisciplinar, papel essencialmente adquirido no desenvolvimento histórico de Matemática, necessitando de explicitação no ensino elementar.

Atualmente, tal posicionamento se desloca quase de modo exclusivo, para a interdisciplinaridade e o uso da contextualização, cuja tendência de unilateralidade pode ter como consequência certo esquecimento, eclipsando a exploração das importantes conexões internas à própria Matemática.

Consideramos que os conteúdos essenciais não devem sofrer alteração, posto que constituem base fundamental e necessária para a construção do conhecimento. Este fato não impede a continuidade de investigações a respeito do tratamento e na forma de apresentação destes assuntos primordiais, como, por exemplo, pela exploração de temas que permitam valorizá-los, destacando-se sua importância e utilidade.

A proposição do 'tema mapeador' representado pelos pares constitutivos dos números reais – os eixos discreto/contínuo, exato/aproximado e finito/infinito - permite valorizar e atualizar os conhecimentos matemáticos do atual currículo, tornando-o mais dinâmico à medida que o insere na nova conjuntura de contextos sociais e do trabalho, realçando algumas conexões com as questões voltadas à cidadania e que fomente o desenvolvimento de competências essenciais. Relembramos que no ensino básico:

> [...] são apresentados aos alunos somente rudimentos dos números reais e uma abordagem operatória, cotidiana e pragmática das funções. Porém, nos estudos posteriores a serem realizados no ensino superior as disciplinas necessitam de um estudo destes tópicos como objetos de ensino, não como noções paramétricas (BARUFI, 1999, p 50).

[59] Os centros de interesse, de Decroly (1871-1932), propõem a escolha de temas que se relacionem com as necessidades, proximidades e desejos das crianças, de modo que os objetos possam ter sentido para elas.

O entendimento das questões propostas nesta pesquisa resgata e valorizará os números reais como tema matemático fundamental, configurando-se como uma janela que viabiliza a necessária atualização do próprio currículo de matemática, assim como permite significar os números irracionais.

Um ponto relevante na ideia do ‘espaço de significações’ como narrativa orientadora na apresentação e desenvolvimento dos números irracionais é o pareamento entre a sintaxe própria da linguagem matemática e o uso da palavra, uma extensão das ideias de Vygotsky (1998a;b). Este pesquisador acrescenta que os conceitos emergem em situações que demandam a solução de problemas, articulando pensamento e linguagem, imbuídos numa ação situada no movimento e confluência entre os conhecimentos cotidianos e os conhecimentos científicos.

O discurso que realizamos ao longo deste capítulo permitiu situar e esclarecer a natural relação do uso e articulação das várias linguagens matemáticas e o desenvolvimento epistemológico dos números irracionais, ideias que verbalizadas permitem estimular uma multiplicidade de conexões entre diversos conhecimentos.

Em particular, procuramos viabilizar um discurso imerso no uso da palavra, que se revelou essencial para tecer uma narrativa das ideias e conceitos presentes no conhecimento envolvendo os números irracionais, não tendo sido necessário enfatizar a sintaxe algébrica, que pode ser desenvolvida, posteriormente, no Ensino Superior.

A posição que assumimos em constituir um ‘espaço de significações’, um campo de narrativa orientadora do conhecimento envolvendo os números irracionais, implica naturalmente em considerarmos a importância da metáfora como uma figura de linguagem, cuja retórica se constituiu em agente que medeia as redes de relações apontadas anteriormente.

Em especial, no seio da Matemática se engendram “[...] legítimas metáforas, não-tópicas, possibilitando fecundas transferências globais de significados entre contextos bastante diversos” (MACHADO, 1992, p. 38). A Matemática se alimenta de diversas metáforas no sentido de “[...] um préstimo mútuo entre pensamentos, uma transação entre contextos, uma cooperação entre idéias” (OGDEN; RICHARDS, 1938 apud MACHADO, 1992, p. 11).

Destacamos, então, que podemos utilizar as metáforas e alegorias na explicitação de algumas situações como, por exemplo, na razão áurea, no Hotel de Hilbert, na ingênua ideia de continuidade com o traçado de uma linha geométrica contínua ou no corte produzido por um ponto na reta dos reais para introduzir a definição de continuidade em ®.

No entanto, destacamos que a metáfora mais abrangente deste estudo se encontra na própria rede de relações, tensões, contradições e complementaridade que podem se efetivar, internamente aos pares de eixos constituintes dos números reais, assim como nas mútuas impregnações entre esses três elementos, sintetizada na concepção de um ‘espaço de significações’ para o ensino dos números irracionais no ciclo básico.

Deste modo, o ato de contar e medir, dois pólos representando o discreto e o contínuo, uma aporia fundadora dos números, representam um conceito que compõem relações com os eixos finito/infinito e o eixo exato/aproximado, conceitos que constituem um ‘espaço de significações’, configurando um campo de interações e contextos complementares e dialéticos, que tem como função mapear e mediar conexões aos objetos matemáticos tratados neste trabalho: os números irracionais.

No próximo capítulo nos propusemos a ilustrar as ideias presentes neste capítulo. Para tal, apresentamos algumas situações de ensino baseadas nos principais temas dos números irracionais: o número de ouro, o número PI e o número de Euler.

CAPÍTULO 3

Explorando os Eixos Constitutivos dos Números Reais:
Propostas de situações de ensino.

CAPÍTULO 3

Explorando os Eixos Constitutivos dos Números Reais: Algumas Propostas de situações de ensino.

Neste capítulo ilustramos algumas formas de abordar alguns números irracionais, tendo como suporte os referenciais expostos. A escolha recaiu nos irracionais notáveis - o número PI, o numero de Euler e o número de ouro – tópicos analisados na pesquisa empírica realizada em torno do discurso expresso pelos livros didáticos, no capítulo 1.

O tema dos números irracionais é importante para o ensino básico, não somente pela possibilidade de compreensão da própria natureza desse assunto, como também pelas conexões que envolvem duas ideias fundamentais: o infinito e a aproximação.

Neste contexto, ressaltamos a interação e a complementaridade entre os números racionais e os números irracionais. A contraposição e conjunção entre as características dos números racionais e irracionais são essenciais para a constituição de uma rede de conhecimentos, apontada em Machado (1995), que articulados permitem a construção dos significados dos próprios números irracionais. Vale relembrar que a ideia de rede favorece a compreensão de um objeto, pois o conhecimento não se acumula:

> [...] em nenhum momento, mas vive sendo acrescido na dinâmica e construído na interação e construção, imerso numa rede de relações complexas e transformadoras, à medida que mais e mais conexões são efetivadas, num constante enriquecimento (BARUFI, 1999, p 34).

Um norteador para compor as situações propostas neste capítulo foi evidenciar os vínculos com a realidade concreta, historicamente situada. Conforme Machado (1990), não se deve subordinar a Matemática às exigências do dia-a-dia, relativas às sensações dos sentidos imediatos. O autor pondera que o âmago do trabalho do ensino situa as questões no palco das negociações entre as polarizações entre a teoria e a prática.

Estas diretrizes estão presentes nas questões envolvendo os números irracionais e os números racionais, reveladas na análise do livro didático e em considerações epistemológicas. No fluxo de desenvolvimento desta pesquisa, o mapeamento dos feixes de relações inerentes aos números reais revelou os pares discreto/contínuo, exato/aproximado e finito/infinito, cujas tensões são essenciais para fundamentar situações de ensino.

A concepção das atividades priorizou contextos de uso e articulação das diversas linguagens matemáticas – aritmética, algébrica, geométrica, natural, gráficos cartesianos e tabelas - num movimento intra-matemático e interdisciplinar, o que ampliou as diversas conexões inerentes aos próprios conhecimentos da Matemática.

Com base em tais fontes, as situações propostas buscaram enfatizar o uso da palavra, seja através de narrativas envolvendo a re-elaboração de ideias e procedimentos que se encontram no desenvolvimento epistemológico dos números irracionais, seja pela mediação e uso de metáforas e analogias. Esta escolha teve como intenção priorizar a articulação entre processos de construção de conhecimento que valorizem a integração e evolução do pensamento, de modo a promover um contexto significativo para um percurso favorável à compreensão da natureza dos números irracionais.

Em particular, algumas situações utilizaram como recurso a planilha eletrônica, uma via que permite explorar cálculos com maior rapidez e leveza, assim como propicia um posicionamento crítico com relação aos resultados obtidos. Ao mesmo tempo em:

> [...] que processos meramente algorítmicos podem ser realizados com rapidez, evitando situações repetitivas, puramente técnicas, esse tipo de tecnologia pode enriquecer a compreensão conceitual, desde que sua utilização passe pela crítica, abandonando a crença inabalável de que as máquinas não erram e seus resultados são corretos, inquestionáveis (BARUFI, 2008, p. 1).

Em síntese, para cada tema notável – o número PI, o número de Euler e o número de ouro – a concepção das atividades buscou viabilizar um ‘percurso de significações’. Isto equivale a introduzir os números irracionais envolvidos, utilizar e articular diferentes linguagens e recursos didáticos variados, propor contextos investigativos internos e exteriores ao campo da Matemática, de modo a ampliar a rede de relações no ‘espaço de significações’ envolvendo os temas dos números irracionais propostos.

O número π

O PI, a mais antiga constante matemática que se conhece, é um número irracional utilizado em diversos segmentos da matemática, assim como na área científica e tecnológica. Atualmente, o símbolo internacional adotado para PI é a letra do alfabeto grego π (minúscula).

A origem de π remonta a primeira letra da palavra grega ‘περιφερεια’ (peripheria), que significa perímetro ou circunferência. Porém, o símbolo π foi utilizado pela primeira vez por Welshman Willian Jones, matemático inglês, em 1706, que abreviou ‘periphery’ (perímetro) de um círculo de diâmetro unitário. Euler, em 1736, passou a também a utilizar esta notação, que então se estabeleceu como uma notação padrão.

No material didático analisado no capitulo 1 constatou-se que o número irracional PI é abordado empiricamente pela relação entre o comprimento de uma dada circunferência e o diâmetro correspondente. Este abordagem pragmática do número irracional PI, realizada pelo uso da definição adotada pelos matemáticos, simplifica a problemática teórica da apresentação de PI, como também eclipsa os registros de constituição e significado relacionado ao referido número.

Na Geometria Euclidiana, segundo Silveira (2001), existem quatro constantes que poderiam ser denominadas de π. Destacamos inicialmente o π de circunferências, tema usual no ensino básico, expresso como a constante de proporcionalidade na relação entre o perímetro e o diâmetro de um círculo:

$$\pi = \frac{\text{perímetro de uma circunferência}}{\text{diâmetro da circunferência}}$$

Em seguida, destacamos três outras possíveis definições. Uma segunda concepção é o π das áreas de círculos, expresso como a constante de proporcionalidade na relação entre a área de um círculo e o quadrado do raio, ou seja: $\pi = \frac{\text{área da circunferência}}{Raio^2}$.

Uma terceira concepção, em relação às esferas, apresenta PI como a constante de proporcionalidade na relação: $\pi = \frac{\text{área da esfera}}{4.Raio^2} = \frac{\text{área da esfera}}{\text{diâmetro}^2}$.

Por último, o π de volumes de esferas: $\pi = \frac{\text{volume da esfera}}{\frac{4}{3}.Raio^3} = \frac{3.V}{4.R^3} = \frac{6.V}{8.R^3} = \frac{6.V}{D^3}$.

A história do desenvolvimento matemático nas civilizações revela episódios da vida cotidiana onde cálculos, feitos por meio de regras práticas e aproximadas, utilizavam números inteiros e racionais e que implicitamente envolviam o número PI.

Com relação ao conhecimento empírico dos antigos povos, alguns historiadores fazem uso destes dados para calcular o valor de PI, de modo a traçar um percurso do valor numérico associado. Este fato parece não ter sido a preocupação dos povos antigos, visto não haver indícios de tal atitude em nenhum documento encontrado até recentemente. Considerando-se que a definição usual do número π:

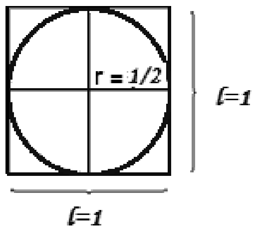
> [...] baseie-se na constância da razão circunferência/ diâmetro, muito provavelmente não foi essa a origem do PI. Com efeito, é difícil imaginarmos situações práticas reais onde, numa civilização incipiente, alguém tenha precisado calcular a circunferência de um círculo de diâmetro conhecido, ou vice-versa (SILVEIRA, 2001, p. 2).

Acreditamos que o uso deste recurso torna possível resgatar uma série de conceitos e relações que permitem significar o número PI. Por questão de tradição, historicamente foi feita uma escolha para trabalhar exclusivamente com o π da circunferência. Mas, em termos didáticos, podemos resgatar o percurso epistemológico envolvendo as ideias inerentes às várias possibilidades de definição do número PI.

Conforme Silveira (2001), os mais antigos documentos concretos que temos e que tratam explicitamente de π são tabletas mesopotâmicas (cerca de 2.000 a.C.), que utilizam a aproximação inteira π = 3.

Segundo Boyer (1991), no Chui-Chang Suan-Shu, ou Nove Capítulos sobre a arte Matemática, de 250 a.C., os chineses mencionam a regra para o cálculo da área do círculo, como três quartos do quadrado sobre o diâmetro, que equivale ao valor π = 3, conforme registrado no quadro 12.

Quadro 12: Valor de PI obtido indiretamente do Chui-Chang Suan-Shu.

	$\left.\begin{array}{r} \acute{A}rea = \pi.R^2 = \pi.(\frac{1}{2})^2 = \frac{\pi}{4} \\ \acute{A}rea = \frac{3}{4}.1^2 = \frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \pi = 3.$

Outra aproximação racional de PI pode ser obtida de uma tableta encontrada pelo grupo de Susa, na região da antiga Mesopotâmia, datada em cerca de 4000 mil anos. Segundo Boyer (1991), o escriba registra o valor 0;5736, em notação sexagesimal, como resultado da razão entre o perímetro do hexágono regular e o perímetro do círculo circunscrito ao hexágono, ou seja:

$$\frac{per\acute{\imath}metro\ do\ hex\acute{a}gono}{per\acute{\imath}metro\ da\ circunfer\hat{e}ncia} = \frac{6R}{2.\pi.R} = \frac{3}{\pi} = 0;5736 = 0{,}96 \to \pi = \frac{3}{0{,}96} = 3{,}125\ ou\ 3\frac{1}{8}.$$

Em linguagem algébrica atual, a expressão $l = (3 + \frac{1}{8}).d$ traduz o conhecimento empírico dos antigos povos, o que equivale a $\pi = \frac{l}{d} = (3 + \frac{1}{8}) = \frac{25}{8} = 3{,}125,$ podendo ser considerada uma primeira aproximação racional de π com uma casa decimal correta.

Segundo Boyer (1991), há uma referência no problema 50, do Papiro de Ahmes do antigo povo egípcio, do cálculo da área de um círculo de diâmetro 9, por equivalência em relação à área de um quadrado de lado 8. Em notação atual, a área de um círculo de diâmetro *d* expresso pelos egípcios equivale a $\mathrm{A} = (\mathrm{d} - \frac{\mathrm{d}}{9})^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2 = \frac{64d^2}{81}.$

Pode-se, com base nisso, obter uma aproximação para o valor de π dada por:

$$\pi.(\frac{9}{2})^2 = 8^2 \Rightarrow \pi = \frac{8^2.2^2}{9^2} = \frac{256}{81} = 3\frac{13}{81}\ (cujo\ valor\ aproximado\ \acute{e}\ 3{,}1604938).$$

Não se sabe como os egípcios chegaram a esta fórmula. Uma interessante abordagem didática consiste em fazer conjecturas para tratar o tema. Uma possível explicação para este cálculo se encontra num problema do mesmo Papiro. O escriba Ahmes formou um octógono a partir de um quadrado de lado nove unidades, dividiu os lados em três partes iguais, obtendo nove quadrados menores de lado 3. A área do octógono não difere muito da área de um círculo inscrito no quadrado de lado 8.

Neste contexto, propusemos a situação *'O Número π e o Papiro de Rhind':*

Um aluno, Pedro se interessou em estudar o modo de aproximação egípcia para se determinar a área de um círculo. Com base no problema 48 do Papiro, Pedro escreveu o seguinte procedimento: Dividi o lado de um quadrado em três partes iguais, resultando que o diâmetro do círculo inscrito é de 9 unidades. Daí, construí o octógono ABCDEFGH, não-regular, de modo que quatro de seus lados sejam iguais a hipotenusa do triângulo retângulo situado nas bordas. Visualmente, a área do octógono ABCDEFGH é aproximadamente igual a área do círculo de diâmetro 9.

A situação *'O Número π e o Papiro de Rhind'* está ilustrada na figura 35.

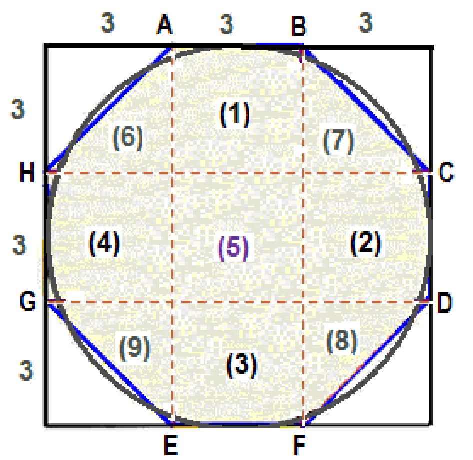


Figura 35: Representação geométrica da conjectura de Pedro.

Inicialmente, Pedro pode determinar a área do octógono ABCDEFGH (**A_1**). O cálculo desta área envolve a composição de quatro triângulos retângulos isósceles, de base 3 e altura 3, com cinco quadrados de lado 3 unidades. Deste modo:

$$A = 4.\frac{1}{2}.3.3 + 5.3^2 = 18 + 45 = 63 \ \textit{unidades de área.}$$

Para verificar a conjectura Pedro recorreu ao Papiro: a área de um círculo de diâmetro 9 é numericamente igual à área de um quadrado de lado 8, ou seja, A = 64 unidades de área.

Para comparar o resultado da área do octógono com a área do quadrado de lado 8, ou seja, para confrontar o resultado 63 com 64, pode-se recorrer a variação percentual. Este resultado é expresso por: $A = \frac{(64-63)}{64}.100\% = 1{,}56\%$. Esta diferença é pequena, podendo ser aceitável ou não, em certas condições, conforme a situação pragmática envolvida. Isto pode iniciar discussões envolvendo o que significa aproximar e em que condições esta pode ocorrer.

Podemos colocar outra questão. A área do octógono ABCDEFGH foi considerada aproximadamente igual a do círculo, por inspeção visual. Porém, que procedimento poderia ser utilizado para verificar se e em que grau esta afirmação pode ser feita?

Um modo de se efetivar a comparação é determinando o valor aproximado para o número PI, considerando-se a expressão para o cálculo da área de um círculo $A = \pi.R^2$, que os antigos egípcios não conheciam, e comparar com um valor atual aproximado de PI. Os resultados encontrados, expressos no quadro 13, representam outras aproximações para PI.

Quadro 13: Valor aproximado de PI e comparação percentual.

Figura	Valor de PI	Diferença percentual
Quadrado de área 64	$\pi = \frac{A_1}{R^2} = \frac{64}{(9/2)^2} = \frac{64.4}{81} = \frac{256}{81} = 3\frac{13}{81}$ *ou* 3,160494.	$\frac{(3{,}160494 - 3{,}141593)}{3{,}141593}.100\% = 0{,}60\%.$
Octógono de área 63	$\pi = \frac{A_1}{R^2} = \frac{63}{(9/2)^2} = \frac{63.4}{81} = \frac{252}{81} = 3\frac{9}{81}$ *ou* 3,111111.	$\frac{\lvert(3{,}111111 - 3{,}141593)\rvert}{3{,}141593}.100\% = 0{,}97\%.$

Esta situação exemplifica um possível modo de utilizar a abordagem do eixo exato/aproximado para vislumbrar e antecipar alguns números irracionais notáveis, interligando alguns conceitos matemáticos como a área de figuras geométricas, o cálculo percentual e uma abordagem da ideia de aproximação. Acrescenta-se a estas considerações que, "[...] em vez de identificar π simplesmente com o valor racional 3,14, o aluno poderia desenvolver outros procedimentos de aproximação, percebendo, através destes, as dificuldades intrínsecas a problemática do número irracional" (REZENDE, W., 2003, p. 331).

Outra possível questão a ser investigada seria o motivo da opção efetivada pelos egípcios, ou seja, o que poderia tê-los motivado a escolher um quadrado de lado 8 como aproximação para a área do círculo de diâmetro 9. Seria uma escolha arbitrária, ou seja, existiriam outros quadrados que seriam aproximações equivalentes ou até melhores que a expressa no enunciado do exercício anterior?

Para testar as possibilidades utilizamos a expressão A = $\pi.R^2$ e a *planilha eletrônica*, cujos resultados foram expostos na tabela 3. Assumimos valores inteiros para o lado do quadrado, no intervalo de 1 até 10 (coluna A). Na coluna B, foi calculada a área do quadrado de lado ℓ.

Tabela 3: Processo para verificar a opção do papiro de Rhind como valores otimizadores.

A	B	C	D	E	F	G
lado ℓ	$Área_{quadrado}$	$Raio_{equiv}$	$Diâmetro_{equiv}$	Diâmetro Arredondado	Área do círculo	Diferença %
$\ell = 1$	1	0,564190	1,128379	1	0,785	27,39
$\ell = 2$	4	1,128379	2,256758	2	3,14	27,39
$\ell = 3$	9	1,692569	3,385138	3	7,065	27,39
$\ell = 4$	16	2,256758	4,513516	5	19,625	18,47
$\ell = 5$	25	2,820948	5,65896	6	28,26	11,54
$\ell = 6$	36	3,385137	6,770274	7	38,465	6,408
$\ell = 7$	49	3,949327	7,898654	8	50,24	2,47
$\ell = 8$	***64***	***4,513516***	***9,027032***	***9***	***63,585***	***0,65***
$\ell = 9$	81	5,077706	10,155412	10	78,5	3,18
$\ell = 10$	100	5,641896	11,283792	11	94,985	5,28

Para a coluna C se determinou o raio do círculo de mesma área que o quadrado inicialmente escolhido e expresso em cada linha através da relação:

$$\pi.R^2 = \ell^2 \Rightarrow R^2 = \frac{\ell^2}{\pi} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{\ell^2}{\pi}} = \frac{\ell}{\sqrt{\pi}}.$$

Na coluna D foi obtido o diâmetro do círculo equivalente ($diâmetro_{equivalente}$ = $2.Raio_{equivalente}$). Na coluna E, o resultado da coluna D foi arredondado para o inteiro mais próximo, diante do fato que os antigos consideravam como números os inteiros ou as frações de inteiros.

Na sequência, a coluna F se efetivou o cálculo da área do círculo utilizando o valor do $diâmetro_{equivalente}$ na coluna E. Por último, na coluna G foi determinado o módulo da diferença percentual entre a área do círculo aproximado e o valor da área do quadrado inicial (64 u.a.).

A análise dos resultados expressos na tabela 3, que representariam os possíveis valores para o cálculo aproximado da área de um círculo através do quadrado, à moda do Papiro de Rhind, confirma que a opção egípcia representa a melhor aproximação dentre as dez ponderações registradas acima.

Esta situação exemplifica um possível modo de utilizar a planilha eletrônica em um contexto de conjectura e investigação, interligados a alguns conceitos geométricos, o cálculo percentual e um aprimoramento da concepção de cálculo aproximado.

Consideramos, no decorrer da sequência de atividades envolvendo o número PI, outro resultado histórico. Destacamos o trabalho de Ptolomeu, que permite trabalhar contextos diversificados e uma rede de relações expressivas, propondo a situação intitulada '*π e a tabela de cordas de Ptomoleu*'.

Segundo Aaboe (1984), Klaudius Ptolemaios viveu e trabalhou em Alexandria, escrevendo o *Almagesto* no século II d.C. Neste livro, este autor apresenta e explica uma tábua de cordas trigonométricas, um aprimoramento do trabalho de Hiparco, que permitiu obter para π o valor de $\frac{377}{120} = 3\frac{17}{120}$, aproximado para 3,1417, utilizando como base num polígono de 360 lados.

Ptolomeu retomou a ideia de Arquimedes, que consistia em um processo geométrico de aproximação do perímetro de uma dada circunferência, considerando uma sucessão de polígonos inscritos e circunscritos. A figura 36 visualiza um início do processo de aproximação, no caso dos polígonos inscritos, para se obter a medida aproximada do valor de PI, utilizando tabela de cordas.

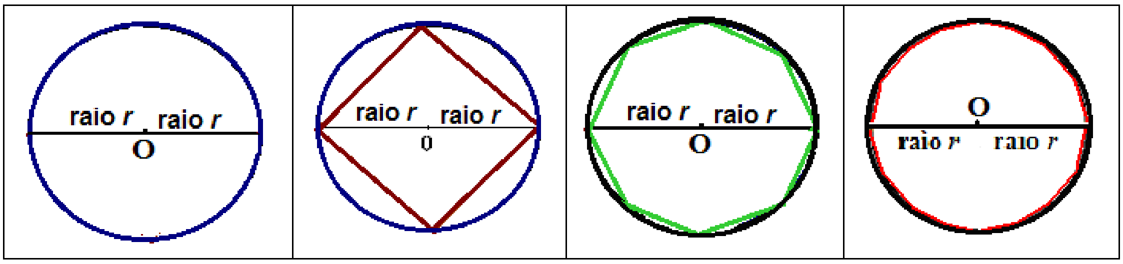


Figura 36: Ilustração do processo de Ptolomeu, para a aproximação de polígonos inscritos a circunferência.

Em um polígono de ***n*** lados, cada lado corresponde a corda de um ângulo central α. A corda correspondente ao ângulo **α** é representada pelo segmento de reta **cdr α**, conforme ilustra a figura 37.

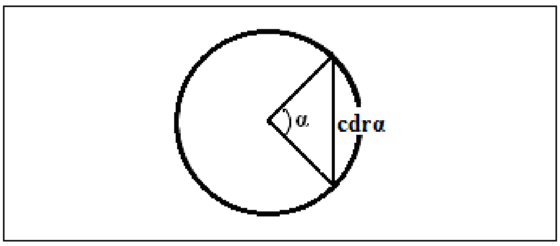
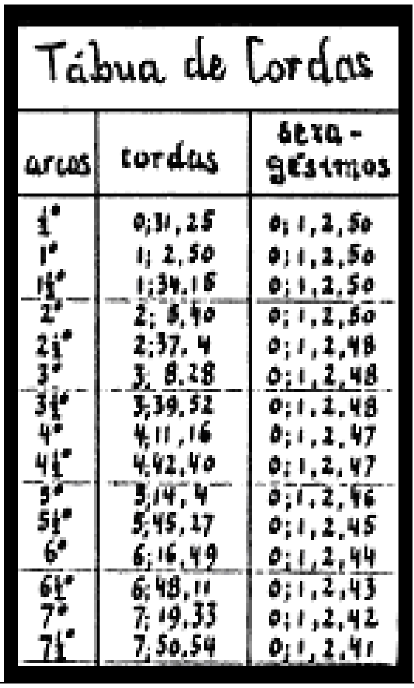


Figura 37: Corda genérica (**cdr α**), correspondente ao ângulo central α [Fonte: Aaboe (1984)].

A tábua de cordas trigonométricas, de Ptolomeu, era baseada no sistema sexagesimal, com raio do circulo trigonométrico de 60 unidades (ver tabela 4).

Tabela 4: Parte de uma tabela de cordas, correspondente a determinado ângulo central [Fonte: Aaboe (1984)].



Tábua de Cordas

arcos	cordas	sexagésimos
½°	0;31,25	0;1,2,50
1°	1;2,50	0;1,2,50
1½°	1;34,15	0;1,2,50
2°	2;5,40	0;1,2,50
2½°	2;37,4	0;1,2,48
3°	3;8,28	0;1,2,48
3½°	3;39,52	0;1,2,48
4°	4;11,16	0;1,2,47
4½°	4;42,40	0;1,2,47
5°	5;14,4	0;1,2,46
5½°	5;45,27	0;1,2,45
6°	6;16,49	0;1,2,44
6½°	6;48,11	0;1,2,43
7°	7;19,33	0;1,2,42
7½°	7;50,54	0;1,2,41

Tábua original, na base sexagesimal (60).

Tábua de Cordas
(na base decimal)

α (base decimal)	crd **α** (base decimal)
0,5º	***0,5236***
1º	***1,0472***
1,5º	***1,5708***
2º	***2,0944***
2,5º	***2,6178***
3º	***3,1411***
3,5º	**3,6644**
4º	***4,1878***
4,5º	***4,7111***
5º	**5,2344**
5,5º	**5,7547**
6º	**6,2803**
6,5º	**....**
7º	**....**

Tábua de cordas, na base dez.

A tabela de cordas de Ptolomeu pode ser utilizada para se determinar uma aproximação do valor de PI. A concepção de Ptolomeu era obter um processo que permitisse determinar o perímetro dos polígonos inscritos a uma dada circunferência, através da leitura do valor de **cdr α**, que neste texto está disponibilizado na tabela 4.

Daí, o perímetro do polígono seria obtido pela multiplicação do número de lados e a medida de **cdr α**, que representa a medida do lado do polígono em questão. E para se obter um valor aproximado de PI bastava realizar um cálculo, através da aplicação da expressão $\pi \cong \dfrac{perímetro\ do\ polígono}{diâmetro\ da\ circunferência}$.

Para se determinar o perímetro do quadrado inscrito, basta determinar o valor de cdr (90º) ou c_4 e multiplicar o valor de cdr (90º) por 4. Na figura 38a, aplicando Pitágoras: $c_4{}^2 = 60^2 + 60^2$, que resulta $c_4 = \sqrt{2}.60 = 84{,}8528$, representando o valor da corda na tabela de Ptolomeu.

O valor do perímetro do quadrado é dado por: perímetro = n.cdrα, ou seja, perímetro = 4. 84;51,10= 339,41111 e o valor de PI é calculado por $\pi \cong \dfrac{339{,}41111}{120} = 2{,}8284$.

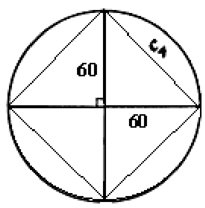


Figura 38a: Representação geométrica da corda que correspondente ao ângulo central de 90º.

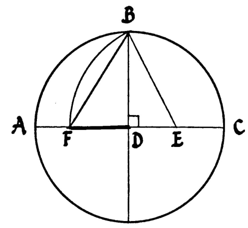


Figura 38b: Corda correspondente ao ângulo central de 36º e 72º [Fonte: Aaboe (1984)].

No caso do decágono regular, o valor de cdr (36º) é calculado com base na figura 38b. Na figura, BF= c_5, DF= c_{10}, DE= ½.raio = 30 e BD = raio = 60. Daí, aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo BDE, tem-se:

$$BE^2 = DE^2 + BD^2 \Rightarrow BE^2 = 30^2 + 60^2 = 4500 \Rightarrow BE = 67;4,55.$$

Por construção, BE = FE = 67; 4,55. Ainda: c_{10} = DF = FE - DE = 67; 4,55 – 30, ou seja, c_{10} = 37; 4,55. O quadro 14 sintetiza os resultados para o valor aproximado de PI pelo método de Ptolomeu.

Quadro 14: Valores aproximados de PI pelo método de Ptolomeu.

Polígono inscrito	**n**: nº de lados	α	cdrα (ver tabela 4)	Perímetro = n.cdrα	$\pi \cong \frac{perímetro}{diâmetro}$
quadrado	4	90º	84;51,10	4. 84;51,10 = 339,41111	$\pi \cong \frac{339,41111}{120} = 2,8284.$
Hexágono regular[60]	6	60º	60	60.6 = 360	$\pi \cong \frac{360}{120} = 3.$
Octógono regular	8	45º	45,9220	367,3760	3,0615
Decágono regular	10	36º	37;4,55.	10. 37;4,55 = 370,8194444	$\pi \cong \frac{370,8194444}{120} = 3,0901.$
Dodecágono	12	30º	31,0583	372,6996	3,1058
-	72	5º	5,2344	376,8768	3,1406
-	360	1º	1;2,50	360.1;2,50 = 360.1,0472222 = 377	$\pi \cong \frac{377}{120} = 3,1417.$

O processo desenvolvido por Ptolomeu para obter a aproximação 3,1417 para PI permite estabelecer uma série de conexões intramatemáticas, considerando aspectos da Geometria, da Trigonometria e da Teoria dos Números.

Assim, podemos representar os valores obtidos no quadro 14 na forma de uma sequência finita de sete termos, (2,8284; 3; 3,0615; 3,0901; 3,1058; 3,1406; 3,1417), que contém valores aproximados para PI, considerando-se quatro casas decimais.

[60] O valor de cdr (60º) é igual ao próprio raio, visto o triângulo formado ser equilátero.

Esta sequência de valores permite, em caráter local e finito, considerar a convergência de valores racionais, na forma decimal, como uma sequência finita de valores que acessam o valor de PI. A natureza da tabela de Ptolomeu não permite estender esta sequência de valores aproximados, pela limitação dos arcos (1/2º).

Esta explicação do processo de Ptolomeu para o cálculo aproximado de PI consiste em outro modo de abordar o eixo exato/aproximado, interligando o conceito aritmético de base, assim como os conceitos geométricos de raio, diâmetro e corda de uma circunferência, inscrição e circunscrição de polígonos a uma circunferência, assim como algumas propriedades de polígonos e o teorema de Pitágoras.

No livro Pauliśha Siddhānta, de cerca do século IV ou V d.C. há a menção ao valor $\pi = 3\frac{177}{1250} = 3{,}1416$, que se aproxima do valor de Ptolomeu obtido na forma decimal 3,1417. No século VI d.C., Aryabhata (chamado o primeiro) indica algumas vezes o valor 3,1416 para π (o PI hindu). Provavelmente houve influência dos resultados de Ptolomeu nestes valores hindus.

Os resultados e processos mencionados tinham origem no pragmático. Isso ocorreu para a maioria dos povos antigos, como os egípcios e mesopotâmios, onde não havia sentido discutir a natureza dos números.

Uma primeira diferenciação desta visão ocorreu na civilização grega. O aspecto filosófico dos números inteiros para o antigo povo grego culminou em não considerar as frações e os irracionais como números. Nos trabalhos desenvolvidos nos Elementos, de Euclides (300 a.C.), observa-se a recusa:

> [...] a qualquer consideração séria sobre os números irracionais. Como se sabe, não é possível pensar nos números irracionais como entidades individuais, mas apenas em sua relação com os racionais. Um irracional é definido através da seqüência de racionais que constituem suas aproximações, por falta ou por excesso, ou ainda, mais modernamente, através dos conjuntos de números racionais que o sucedem ou o antecedem (MACHADO, 1994, p. 12).

Um grego que realizou uma aproximação racional do número PI por racionais, foi Arquimedes, de Siracusa, em cerca de 240 a.C. Segundo Boyer (1991), no livro *Sobre as medidas do Círculo, o* autor determinou o perímetro de dois polígonos, o inscrito e o circunscrito, a uma dada circunferência. Este estagirita começou o processo com o hexágono regular inscrito e circunscrito, calculando o perímetro dos polígonos obtidos ao se dobrar sucessivamente o número de lados. A figura 39 ilustra o início do processo das sucessivas subdivisões das áreas inscrita e circunscrita do polígono, que se aproximavam, por falta e por excesso, da área do círculo de raio r.

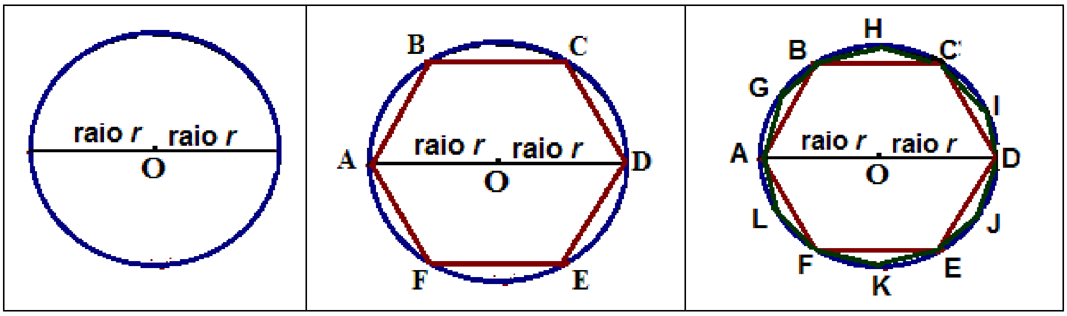


Figura 39: Ilustração do processo de inscrição de polígonos de Arquimedes.

Arquimedes construiu duas sequências de números racionais aproximados de PI, com termos denominados inferiores e superiores, diferindo e sendo aproximado o quanto se queira. Essa técnica de pré-concepção do número irracional pode ser considerada "[...] a origem da noção de número irracional definido como limite de uma sequência de números racionais" (COSTA, M. A., 1981, p. 220).

Arquimedes obteve $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ como intervalo de valor de PI. É deste resultado que muitos autores utilizam a aproximação $\pi = 3\frac{1}{7}$. Estas considerações serviram de base para a proposição de uma terceira situação: *'O Número π e Arquimedes'*.

Não há registros do método de aproximação utilizado por Arquimedes. Estamos assumindo tais posições especulativamente, tal como é relatado na 'coleção extra' dos livros didáticos analisados, no processo que se denomina algoritmo de Arquimedes.

Este consiste em escrever a sequência (P_n, p_n, P_{2n}, p_{2n}, P_{4n}, p_{4n}, ...), onde P_n representa o perímetro do polígono regular circunscrito e p_n o perímetro do polígono regular inscrito de *n* lados a uma dada circunferência. A partir de P_n, p_n, os outros termos são calculados pela média harmônica e média geométrica, conhecida pelos gregos, que modernamente pode ser escrito pelas expressões: $P_{2n} = \frac{2.P_n.p_n}{P_n + p_n}$ e $p_{2n} = \sqrt{P_{2n}.p_n}$.

E o valor de PI fica confinado a:

$$\frac{Perímetro\ \ do\ polígono\ \ inscrito}{2.raio\ \ da\ \ circunferência} < \pi < \frac{Perímetro\ \ do\ \ polígono\ \ circunscrito}{2.raio\ \ da\ \ circunferência}.$$

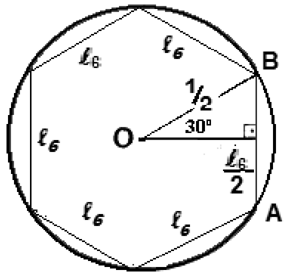
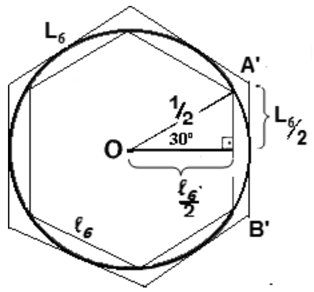
Adotando-se para o raio da circunferência o valor r = ½, tal relação fica:

$$\boxed{Perímetro\ \ do\ \ polígono\ \ inscrito < \pi < Perímetro\ \ do\ \ polígono\ \ circunscrito.}$$

Não utilizamos o algoritmo descrito, mas os conceitos básicos de funções trigonométricas elementares, pelo contexto próximo dos conteúdos do currículo de Matemática do Ensino Médio. Esta opção permite estabelecer conexões entre os conceitos do ciclo básico, e também propicia compreender as ideias de Arquimedes.

Analogamente a Arquimedes, iniciamos o processo calculando o perímetro do hexágono inscrito e circunscrito a circunferência de raio r = AB = ½, conforme exposto no quadro 15.

Quadro 15: Perímetro do hexágono inscrito e circunscrito a uma circunferência de raio ½.

<table>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$sen30^o = \frac{A'B'/2}{1/2} = A'B = \frac{1}{2}$</td><td>$Perímetro = 6.\frac{1}{2} = 3.$</td><td>$\tan 30^o = \frac{A'B'/2}{1/2} = A'B = \frac{\sqrt{3}}{3}$</td><td>$Perímetro = 6.\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hexágono inscrito de lado AB, com perímetro = 3.</td><td colspan="2">Hexágono circunscrito de lado A'B', com perímetro = 3,4641.</td></tr>
</table>

Na tabela 5, recorremos a expressão $sen\frac{\alpha}{2} = AB,$ sendo $\alpha = \frac{2.\pi}{n}$, com *n* indicando o número de lados do polígono inscrito, obtendo-se $sen\frac{\pi}{n} = AB,$ valor que representa o lado do polígono inscrito. No caso dos polígonos circunscritos o cálculo foi realizado considerando-se $\tan\frac{\alpha}{2} = A'B'$ ou $\tan\frac{\pi}{n} = A'B'.$

Sintetizamos, na referida tabela 5, uma sequência de valores, até o número de 192 lados, conforme Arquimedes, e complementamos com outras subdivisões de lados.

Tabela 5: Resultados dos perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência

n	AB = sen (π/n)	Perímetro do polígono inscrito	A'B' = tan (π/n)	Perímetro do polígono circunscrito
6	0,5	3	0,577350269	3,464101615
12	0,258819045	3,105828541	0,267949192	3,215390309
24	0,130526192	3,132628613	0,131652498	3,159659942
48	0,065403129	3,139350203	0,065543463	3,146086215
96	0,032719083	3,141031951	0,03273661	3,1427146
192	***0,016361732***	***3,141452472***	***0,016363922***	***3,14187305***
384	0,00818114	3,141557608	0,008181413	3,141662747
768	0,004090604	3,141583892	0,004090638	3,141610177
1536	0,002045306	3,141590463	0,002045311	3,141597034
3072	0,001022654	3,141592106	0,001022654	3,141593749
6144	0,000511327	3,141592517	0,000511327	3,141592927
12288	0,000255663	3,141592619	0,000255663	3,141592722
24576	0,000127832	3,141592645	0,000127832	3,141592671
49152	6,39159E-05	3,141592651	6,39159E-05	3,141592658
98304	3,19579E-05	3,141592653	3,19579E-05	3,141592655
196608	1,5979E-05	3,141592653	1,5979E-05	3,141592654
393216	7,98948E-06	3,141592654	7,98948E-06	**3,141592654**

Por este processo pode-se determinar uma sequência com aproximações inferiores, dos polígonos inscritos a circunferência de raio ½ e a outra com aproximações superiores, dos polígonos circunscritos.

Um mérito na concepção de Arquimedes é que o algoritmo permite utilizar conhecimentos do próprio currículo de matemática do ensino básico, inserindo a questão numa multiplicidade de conexões. Outro ponto a favor é que tal processo tem rápida convergência, permitindo obter nove casas decimais precisas após dezessete interações.

Na tabela 5, um simulação do processo de Arquimedes, foi utilizado o valor aproximado 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058 para π, nas expressões $sen\frac{\pi}{n} = AB$ e $\tan\frac{\pi}{n} = A'B'$. Isto representa um problema de circularidade, visto que estamos utilizando cálculos da função seno e tangente, que implicitamente remetem ao valor numérico aproximado de PI.

Os valores dos perímetros determinados pelo processo de Arquimedes permitem aproximações que diferem no grau: quanto maior o número de subdivisões do polígono, maior a precisão para a determinação do perímetro da circunferência, ou seja, em cada subdivisão a precisão avança em termos de melhor determinação na próxima casa decimal exata. Porém, as limitações da circularidade deste processo restringem o avanço na determinação de casas decimais pelo uso da planilha eletrônica.

A circularidade presente no processo de Arquimedes minimiza as limitações do meio eletrônico. Isso permite discutir que um algoritmo não se reduz a uma aplicação de cálculos recursivos, mas remete a compreensão de ideias presentes no âmbito da própria matemática. Assim, a restrição maior é devido à natureza do próprio algoritmo, o que relativiza a natureza finita do instrumento de cálculo, no caso, a planilha eletrônica.

Uma importante contribuição da ideia de Arquimedes para calcular uma aproximação do valor de PI se associa a definição de número irracional, feita num período histórico bem posterior ao grego. Um irracional é definido através da sequência de racionais, que constituem suas aproximações, por falta ou por excesso, ou ainda, mais modernamente, através dos conjuntos de números racionais que o sucedem ou o antecedem.

Esta oportunidade de introduzir a abordagem de Arquimedes enriquece o repertório do conhecimento dos números irracionais, ao revelar uma conexão com os números racionais, com aspectos presentes na trigonometria e na geometria.

Isto representa um ponto favorável que contribuiu com o estabelecimento de uma rede de conhecimentos envolvendo os números irracionais, que contrapõe o inevitável problema da circularidade, em face dos conteúdos disponíveis no ensino básico. Deste modo, o processo de Arquimedes representa um modo de se discutir o que representa a própria circularidade e também aproveitar o potencial inerente ao método.

Um dos modos de contornar a circularidade é utilizar o algoritmo que apontamos na coleção extra. Porém, os cálculos remetem ao uso de radicais, o que torna o processo operacional demasiadamente algébrico e complexo para alunos do ensino básico. De qualquer modo, ambos os processos conduzem a aproximações numéricas similares e a dificuldade dos cálculos com radicais, que acentua um caráter operatório excessivo para o ciclo básico, restringe a possibilidade indicada pela coleção extra.

Considerando-se os resultados da antiga Matemática chinesa, Boyer (1991) aponta para π os valores 3,1547; 92/29; $\sqrt{10}$ e 142/45. Liu Hui (cerca de 263 d.C.) utilizou procedimento análogo a inscrição e circunscrição de círculos por polígonos, a moda de Arquimedes, mas de modo independente, obtendo para π o valor 3,14, para o polígono com 96 lados e 3,14159 para 3072 lados.

Outro valor aproximado de PI foi obtido por V. Otho e Adrien Anthoniszoom, de modo independente. Este valor corresponde a $\pi = \frac{355}{113}$, conhecido como o número de Meltius, pela divulgação de Adrien, filho de Anthoniszoom[61] (cerca de 1580 d.C.).

Os resultados e ideias expressas em Ptolomeu e Arquimedes permitem compreender uma primeira contribuição da aproximação: o uso de intervalos racionais para a determinação do valor do número π permite definir melhores contornos para os números irracionais.

Esta interface envolvendo os números racionais e os números irracionais constitui importante contribuição para o ensino de Matemática, ao permitir enriquecer o entendimento de ambos os conjuntos e também ampliar as características dos números irracionais, objeto deste trabalho.

---

[61] Depois da divulgação de Adrien de Meltius, Stewart (2010) aponta os valores $103993/33102$ e $104348/33215$ como as seguintes melhores aproximações racionais para o número PI.

Destacamos que a aproximação Arquimediana influenciou a matemática de diversos povos. Os antigos árabes, com a habilidade computacional própria de seus representantes matemáticos, obtiveram o valor de π com aproximação de dezessete casas decimais, usando polígonos inscritos e circunscritos numa circunferência, por volta do século XV.

Ainda na mesma linha arquimediana, utilizando os polígonos inscritos e circunscritos, o matemático Ludolph Van Ceulen (1539-1610), determinou 35 casas decimais para o valor de π. Este foi o início de uma corrida para se determinar o valor de π, com maior número de casas decimais, que tem a favor a busca e o desenvolvimento de novas metodologias e de novos conteúdos, motivando as interconexões do conhecimento matemático em torno do número π.

Struik (1992) aponta outras importantes conexões ligadas à operação de aproximação, no Renascimento Europeu, inicialmente na Itália, através do desenvolvimento da teoria das equações, que permitiu desencadear técnicas computacionais. Dentre essas concepções envolvendo o número PI e processos infinitos[62], Viète[63], em 1592 e em 1593, e de Wallis, desenvolveram as expressões:

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\text{......}\ \text{(Viète)}\ \text{e}\ \frac{2}{\pi}=\frac{1.3}{2.2}.\frac{3.5}{4.4}\frac{5.7}{6.6}\text{......}\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n.2n}\text{....}\ \text{(Wallis).}$$

Maor (2008) destaca nas expressões de Wallis e Viète o registro de um número irracional como uma arquitetura de números inteiros. Além disso, tais expressões representam um processo infinito, que pode ser aproximado para um processo finito, expressando assim resultados da operação de aproximação, na concepção que esta pode ser melhorada o quanto se deseje ou se necessite.

Estas considerações envolvendo um processo infinito serviram de contexto para a elaboração de uma quarta situação, denominada ‘o número π e o infinito’.

Um primeiro exemplo de uma série infinita é o algoritmo de James Gregory, redescoberto por Gottfried Wilhem von Leibniz, dado por $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-....$, ou $\pi=\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}-....$.

[62] Segundo Maor (2008), Viète empregou pela primeira vez uma fórmula para descrever um processo infinito. Ainda, é de Viète a notação de reticências para indicar um processo contínuo, levado ao infinito.

[63] Segundo Boyer (1991), Viète foi um dos primeiros a utilizar a palavra análise e foi um dos primeiros analistas no sentido moderno, ou seja, alguém que pesquisa sobre processos infinitos.

A tabela 6 indica aproximações desta expressão obtidas em planilha eletrônica.

Tabela 6: Representação da soma dos n primeiros termos da sequência de Leibniz.

Soma dos termos	**Sequencia de valores aproximados de PI, por falta.**	**Sequencia de valores aproximados de PI, por excesso.**
S_2	$\frac{4}{1} - \frac{4}{3} = 2{,}666667$	
S_3		$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} = 3{,}466667$
S_4	2,895238	
S_5		3,339683
S_6	2,976046	
S_7		3,283738
S_8	3,017072	
S_9		3,252366
S_{10}	3,04184	
S_{11}		3,232316
⋮	⋮	⋮
$\mathbf{S_{25}}$	**3,1**81576685	
$\mathbf{S_{26}}$		**3,1**03145313
⋮	⋮	⋮
S_{100}	3,131592904	
S_{101}		3,151493401
⋮	⋮	⋮
$\mathbf{S_{627}}$	**3,14**3187549	
$\mathbf{S_{628}}$		**3,14**0000298
⋮	⋮	⋮
S_{1000}	3,140592654	
S_{1001}		3,142591654
⋮	⋮	⋮
S_{1500}	3,140925987	
S_{1501}		3,142258876

Indicou-se por S_n a soma dos n primeiros termos da sequência. O recurso a planilha eletrônica permite visualizar alguns termos da sequência de valores por falta, que representa valores menores que P em ordem crescente, e por excesso, que indica os valores maiores que PI, em ordem decrescente.

Cada par constituído pelos valores consecutivos da sequência por falta (termos pares) e por excesso (termos ímpares) representam sucessivos intervalos encaixantes. A sequência revela uma lenta convergência: a primeira casa decimal surge após o 25º termo e a segunda casa decimal na 627º posição. Esta extrema lentidão na convergência é inerente ao próprio algoritmo de Leibniz, dificultando a percepção da tendência dos valores obtidos nas duas séries numéricas.

Por outro lado, o uso da planilha permite vivenciar o processo de construção das sequências por falta e excesso, uma ideia essencial para se intuir um processo infinito, pelo viés potencial. A compreensão deste procedimento pode servir para que, num momento posterior, seja viável definir um número irracional, visto que uma das maneiras de se caracterizá-lo é pela sequência de números racionais que constituem suas aproximações, por falta ou por excesso, ou ainda, mais modernamente, através dos conjuntos de números racionais que o sucedem ou o antecedem.

Além disso, a expressão escrita por Leibniz permite entrever um padrão de regularidade, conferindo certa previsibilidade na arquitetura de números inteiros. Esta característica pode ser também visualizada por uma expressão geométrica, representada na figura 40.

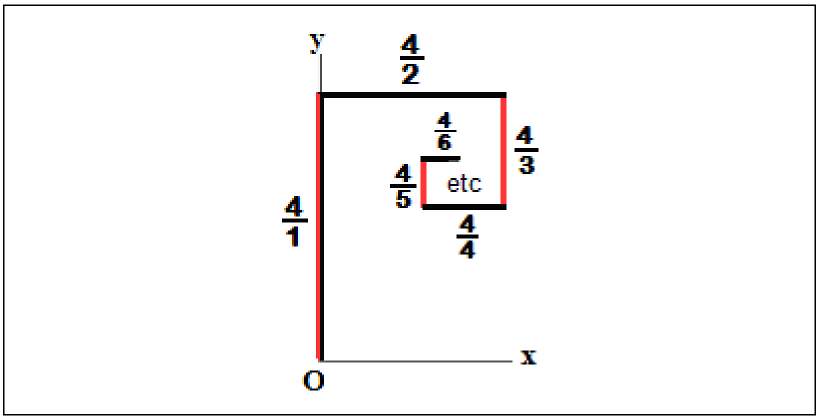


Figura 40: Visualização da sequência de Leibniz [Fonte; Amaral (2005)].

Para compreender esta construção, a partir dois eixos das coordenadas x e y da origem:

> [...] traça-se para cima um segmento sobre o eixo y de comprimento 4/1; do extremo deste paralelamente ao eixo para a direita, x traça-se um segmento de comprimento 4/2; do extremo deste paralelamente ao eixo y para baixo, traça-se um segmento de comprimento 4/3; do extremo deste paralelamente ao eixo x para a esquerda traça-se um segmento de comprimento 4/4; do extremo deste paralelamente ao eixo y para cima traça-se um segmento de comprimento 4/5; e assim sucessivamente, com o segmento de ordem n tendo o comprimento 4/n. [O] extremo livre do último segmento traçado [...] vai seguindo uma espiral retangular e se aproximando de um determinado ponto. Quando o número de segmentos tender ao infinito, a ordenada (valor y) do referido ponto tende justamente a π (AMARAL, 2005, p.1).

A expressão de Leibniz, que representa uma soma de termos, num processo infinito, pode ser avaliada por um processo finito, pela possibilidade de se efetuar uma aproximação, de acordo com a escolha efetivada para o número de casas decimais que desejamos truncar.

A representação gráfica dada na figura 40 permite visualizar geometricamente a sequência de termos do número irracional PI, para qualquer aproximação desejada. De outra forma, o valor aproximado do número PI pode ser representado numericamente, conforme expressa a tabela 6, por um número decimal finito.

A confluência destas duas formas de representação – a numérica e a geométrica - indica uma interação entre o número racional expresso por um número finito de termos determinado pela operação de truncamento de uma série potencialmente infinita e de um número irracional, resultado teórico se o processo da soma dos termos for, por recorrência, levado ao infinito.

Considerando-se, a expressão de Wallis, $\frac{2}{\pi}=\frac{1.2}{2.2}.\frac{3.5}{4.4}\frac{5.7}{6.6}......\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n.2n}....$, ou seja, $\pi = 2.[\frac{2.2}{1.3}.\frac{4.4}{3.5}\frac{6.6}{5.7}\frac{8.8}{7.9}......\frac{2n.2n}{(2n-1)(2n+1)}....]$, foram expostos na tabela 7 os resultados que representam uma possível sequência de valores para PI.

Tabela 7: Sequência de valores de PI utilizando Wallis.

n	**Valor aproximado de PI**
1	2,666667
2	2,844444
3	2,925714
4	2,972154
5	3,002176
⋮	⋮
18	3,099429
19	3,101577
⋮	⋮
493	3,139998
494	3,140002
⋮	⋮
1325	3,141
1326	3,141001
⋮	⋮

O valor aproximado de PI com uma casa decimal necessita de 494 operações e 1326 interações para uma precisão de duas casas decimais. Estas séries infinitas apresentam o mesmo problema de convergência lenta, porém ilustram o processo para determinar as casas decimais do número PI pela sequência de números racionais que tendem ao número PI, quando o número de interações aumenta ilimitadamente.

Atualmente, é usual determinar aproximações de π com milhões de casas decimais fazendo-se uso dos computadores. Estas máquinas, apesar de processar milhões ou bilhões de cálculos com extrema rapidez, ainda se constitui num processo finito.

O uso de resultados em séries infinitas que convergem para um determinado valor representa um conhecimento a ser explorado no ensino básico, além de revelar outra conjunção entre números racionais e irracionais. Na discussão que se segue, estaremos nos baseando em cálculos realizados em planilha eletrônica, como uma simulação do trabalho do computador possível de ser realizada em sala de aula.

Um último exemplo de série a ser destacada é um resultado de Euler, dado por $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...$, ou seja, $\pi = \sqrt{\frac{6}{1^2} + + \frac{6}{2^2} + \frac{6}{3^2} + \frac{6}{4^2} + ...}$., com alguns resultados expressos na tabela 8.

Tabela 8: Sequência de valores de PI utilizando Euler.

n	Valor aproximado de PI
1	2,44949
⋮	⋮
6	2,991376
7	3,011774
⋮	⋮
22	3,098868
23	3,100697
⋮	⋮
599	3,139999
600	3,140002

Segundo Rezende, W. (2003), o uso de tecnologias como as calculadoras gráficas e planilhas eletrônicas são modos de criar novos centros de interesse, redirecionando o sentido atribuído a certos tópicos. O autor cita a possibilidade de redimensionar processos numéricos envolvendo estimativa e cálculos aproximados, assuntos que até pouco tempo eram associados exclusivamente a rotina.

Em síntese, as ideias apresentadas na exposição do tema do número PI ressaltam a necessidade do uso da palavra, associada a contextos e narrativas embasadas nos conhecimentos inerentes ao processo histórico de desenvolvimento dos números irracionais. Acresce-se ao discurso exposto o uso de várias linguagens e a articulação entre estas formas de expressão como possível contribuição para exibir uma série de relações entre os diversos conhecimentos presentes no currículo de matemática.

As quatro situações envolvendo o número PI revelam a saudável existência de uma multiplicidade de caminhos para abordar as características deste número irracional. As diversas incursões embasadas na questão de aproximação que estão imersas no processo histórico de desenvolvimento do número PI, presentes nos diversos registros da cultura dos antigos povos enriqueceram os contextos e propiciaram diálogos inerentes às características dos pares finito/infinito; exato/aproximado; discreto/contínuo. Isto permitiu um percurso de acesso ao 'espaço de significações' pela possibilidade de iniciar a caracterização dos números irracionais pela sequência de valores por falta e excesso, constituindo intervalos encaixantes, cujos extremos são as várias aproximações de números racionais finitos.

As situações expuseram diversas conexões pelo 'percurso de significações' do número PI, interligando vários conteúdos presentes no currículo de matemática. Ainda, a linguagem de comunicação pode se situar em diversos registros, como o figural, o numérico, a palavra, sem necessariamente enfatizar a linguagem algébrica.

Aliam-se a estas considerações a possibilidade da utilização da planilha eletrônica. Um dos modos destacados por Lima (1985), Bonomi (1999; 2008) e Rezende, W. (2003) é o uso de calculadoras e planilhas eletrônicas como instrumentos motivadores que permitem cálculos mais rápidos, possibilitando um eficiente modo para determinadas tarefas e investigações, que abriram um leque de caminhos para a construção de significado aos números irracionais.

Ao acessar uma calculadora eletrônica, o número π é visualizado como um número racional com casas decimais finitas. Com base em conhecimentos matemáticos teóricos, atualmente sabemos que há infinitas casas decimais, mas as calculadoras têm limitação física para armazenar e operar com dados numéricos, assim como para mostrá-los visualmente. De modo geral, os computadores veiculam processos empíricos, que não são suficientes para provar que não há periodicidade nas casas decimais do número PI. A determinação de maior número de casas decimais de PI chamou a atenção e abriu uma porta para a discussão teórica da natureza irracional do número PI, pela inesgotável sequência de intervalos encaixantes.

Esta questão pode somente ser resolvida por meio da demonstração de que π é um número irracional. Na Matemática uma primeira prova foi obtida em 1766 por *Lambert*, e posteriormente por *Legendre,* em 1855, de forma completamente rigorosa. Porém, tal demonstração não é passível de ser abordada no ensino básico.

Acreditamos que outro modo de configurar maior amplitude a natureza irracional de PI são as frações contínuas, assunto que retomamos ao final deste capítulo.

O número de Euler

Nos manuais didáticos analisados no capítulo 1 constatamos que o número de Euler é brevemente mencionado no tema ‘logaritmos’, como uma possível base ‘natural’. Alguns livros citam este tópico ao final do capítulo, na exposição dos Sistemas de Logaritmos, como se fosse um apêndice, um pequeno acréscimo de informação, apresentando o número de Euler como um número aproximado por 2,718281 (com mais ou menos casas decimais) e, às vezes, referido como um irracional.

Esta opção de contexto das coleções didáticas - as poucas casas decimais possibilitadas pela leitura de uma calculadora eletrônica - restringe o entendimento do número de Euler como um número irracional e, dialeticamente, desperdiça uma oportunidade de caracterização dos próprios números irracionais.

Na hipótese que a exposição das diversas relações envolvendo o número de Euler possibilita abertura para discutir e significar os números irracionais no ensino básico, a seguir, apresentamos e situamos alguns contextos históricos.

Numa panorâmica inicial, o número de Euler[64] era utilizado de modo implícito e não intencional, pelos povos antigos, por meio de situações de ordem prática, antes que qualquer estudo formal tivesse sido efetivado.

Um primeiro momento relaciona o número de Euler com a Matemática Financeira. Um tablete de argila dos antigos babilônios, datada de cerca de 1700 a.C., propõe um problema envolvendo um investimento: “Quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20 por cento de juros compostos anualmente?” (MAOR, 2008, p. 41).

Em linguagem atual, ao final de cada ano, o capital inicial deverá ser multiplicado por um fator 1,2, ou seja, em **x** anos, o capital será $1{,}2^x$. Como o problema solicita em quanto tempo o capital dobra, isto implica resolver a equação exponencial $1{,}2^x = 2$.

A resposta a esta questão recai num número irracional. Na época dos antigos babilônios, tal problema foi resolvido por aproximação, sem qualquer conhecimento sobre a natureza do resultado.

Se o prazo for de três anos o capital será de $1{,}2^3 = 1{,}728$, e em quatro anos passa a valer $1{,}2^4 = 2{,}076$. Assim, o tempo estimado se encontra confinado num primeiro intervalo, situado entre os extremos de três e quatro anos, ou seja, $3 < x < 4$ anos.

[64] O uso do símbolo e remonta a Euler, em 1728, em um simpósio de resultados matemáticos. Tal notação foi posteriormente adotada pela comunidade, como uma homenagem a este matemático.

Segundo Maor (2008), para melhorar esta aproximação, os antigos babilônios utilizavam o processo da interpolação linear, que consiste em realizar uma aproximação através da relação de proporcionalidade direta.

Observando a figura 41, em linguagem atual, constrói-se o gráfico da função $y = 1{,}2^x$ e, no intervalo $3 < x < 4$ aproxima-se a curva por um segmento de reta. Assim, pode-se estabelecer a proporção direta: $\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} \rightarrow \frac{1{,}2^x - 1{,}2^3}{x-3} = \frac{1{,}2^4 - 1{,}2^3}{4-3}$. Fazendo-se $1{,}2^x = 2$, tem-se: $\frac{2 - 1{,}728}{x-3} = \frac{2{,}076 - 1{,}728}{4-3} \rightarrow x = 0{,}7816\ ano \cong 9\ meses\ 11\ dias.$

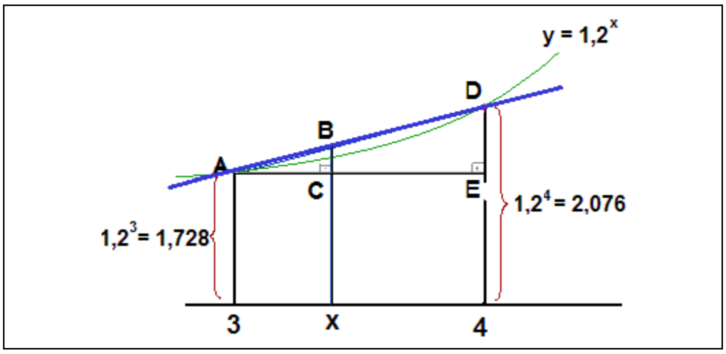


Figura 41: O processo de interpolação linear.

Este valor encontrado pelos babilônios, pelo processo da interpolação linear, é bem próximo do valor exato, obtido pela atual técnica da logaritmação:

$$1{,}2^x = 2 \Rightarrow \ln 1{,}2^x = \ln 2 \Rightarrow x.\ln 1{,}2 = \ln 2 \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}2} = 3{,}8018\ anos \cong 3\ anos\ 9\ meses\ 18\ dias.$$

Este procedimento dos babilônios representa uma estratégia fundamental de base para a resolução do problema proposto e que ainda envolve um importante raciocínio: a aproximação e o uso da estimativa.

De modo geral, em problemas financeiros envolvendo juros compostos, o cálculo do valor futuro ou Montante (S) em função do capital inicial (P), aplicado a uma taxa de juros compostos (r), aplicado durante uma unidade de tempo (t) é dado por $S = P.(1+r)^t$.

Geralmente, a taxa de juros não é dada no mesmo período que o tempo t de aplicação. Assim, para equalizar o intervalo de tempo, digamos em *n* períodos, encontramos um divisor de ambos estes valores, de modo a obter uma taxa de juros dada por **r/n** e o tempo de aplicação **n.t**. Por exemplo, consideremos a taxa de juros de 100% ao ano (r = 100% ao ano) e que se deseje conhecer o montante após 1 ano e meio de aplicação (t = 1 ano e 6 meses).

Podemos equalizar o período em meses, de modo que **r/n** = 100/12 = 8,33 % ao mês e o tempo t = 18 meses. De modo geral $S = P.(1 + \frac{r}{n})^{n.t}$. Uma primeira constatação implícita do número de Euler surgiu em problemas de juros compostos.

> Alguém – não se sabe quem ou quando – deve ter notado o fato curioso de que se um capital *P* é composto *n* vezes por ano, durante *t* anos, a uma taxa de juros r e se permitirmos que *n* aumente sem limites, a soma de dinheiro *S*, obtida a partir da fórmula $S = P\ (1 + r/n)^{nt}$, parece aproximar-se de um certo limite. O limite para *P=1*, *r=1* e *t=1*, é aproximadamente 2,718. [...] Assim, as origens do número *e* [...] pode muito bem estar ligado a um problema mundano: o modo como o dinheiro aumenta com o passar do tempo (MAOR, 2008, p. 13).

Nesta perspectiva, para uma abordagem inicial do número de Euler, nos reportamos a uma narrativa, no contexto financeiro envolvendo juros compostos. Um agiota empresta 1 dinar[65] a juros de 100% ao ano a uma pessoa[66]. Ao final de um ano, a pessoa encontra o agiota, devolvendo 1 + 1 = 2 dinares. O agiota, achando injusta tal situação, argumenta que tal valor é incorreto.

Se dividirmos o ano em dois semestres, a pessoa deveria pagar, depois de seis meses, a quantia de 1 dinar + 50% de 1 dinar = 1½ dinar. Em mais um semestre, o valor acrescido de juros seria 1½ dinar + 50% de 1½ dinar = 2,25 dinares.

Porém, o agiota continua argumentando que, se o ano fosse subdividido em 4 trimestres, teríamos que a pessoa deveria, após a computação de juros ao final de cada trimestre, o valor de 2,4414063 dinares, conforme destacado na tabela 9.

Tabela 9: Cálculo do agiota, para a aplicação de 1 dinar, a 100% a.a., com correção trimestral.

trimestre	Montante
1º	1 dinar + 25% de dinar= 1,25 dinares
2º	1,25 dinares + 25% de 1,25 dinares= 1,25.1,25= $1,25^2$ = 1,5625 dinares
3º	1,5625 dinares + 25% de 1,5625 dinares= 1,5625.1,25 = $1,25^3$ = 1,953125 dinares
4º	1,953125 dinares + 25% de 1,953125 dinares= $1,25^4$ = 2,4414063 dinares

Continuando a especulação, supondo agora a correção mensal, os novos valores seriam os ilustrados na tabela 10, o que perfaz uma dívida de 2,6034 dinares.

---

[65] A palavra 'dinar' deriva de denário, moeda romana, sendo atualmente utilizada em alguns países asiáticos.

[66] Segundo O'Connor e Robertson (2001), Jacob Bernoulli estudou o problema dos juros compostos, em 1683, utilizando a expressão $(1 + {}^{1}/n)^{n}$, com *n* tendendo ao infinito. O uso da expansão binomial favoreceu Bernoulli a encontrar um valor do número de Euler entre 2 e 3, uma primeira aproximação recorrendo ao infinito, na forma potencial. Observamos que esta opção de trabalho com investimentos está desvinculada do desenvolvimento dos logaritmos, o que didaticamente permite um olhar complementar em relação ao número de Euler, enriquecendo o contexto da rede de conhecimentos para significar este número irracional.

Tabela 10: Cálculo do agiota, para a aplicação de 1 dinar, a 100% a.a., com correção mensal.

Período	Montante
1º mês	1 dinar + 8,33% de dinar= 1,083 dinares.
2º mês	1,083 dinares + 8,33% de 1,083 dinares= 1,083. 1,083 = 1,17289 dinares.
3º mês	1,172889 dinares + 8,33% de 1,172889 dinares= $1{,}083^2$.1,083 = 1,27024 dinares.
$\vdots$	$\vdots$
12º mês	$1{,}083^{12}$ = 2,6034 dinares.

A uma taxa de 100/360 = 0,278% ao dia, o devedor teria que pagar $1{,}00278^{360}$, ou seja, 2,7166825 dinares. Deste modo, a $\frac{100}{360.24} = 0{,}011574\%$ a hora, teríamos que a pessoa, ao final de um ano, deveria pagar $1{,}00011574^{360.24}$ = $1{,}00011574^{8640}$ = 2,7181236 dinares.

Se considerarmos a taxa por minuto, teríamos $\frac{100}{360.24.60} = 0{,}00019290$ % ao minuto, o que resulta numa dívida de $1{,}000001929^{518400}$ = 2,7182618 dinares.

Cada vez que a divisão de tempo aumenta e o intervalo de tempo se torna mais diminuto, ou seja, quando o tempo de composição dos juros tende a zero, os resultados da dívida parecem tender a certo valor. E, se isto for verídico, qual seria este número?

Levantada esta conjectura, podemos verificá-la utilizando a fórmula binomial de Newton, uma ferramenta comumente apresentada no Ensino Médio.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}.a^n.b^0 + \binom{n}{1}.a^{n-1}.b^1 + \binom{n}{2}.a^{n-2}.b^2 + ... + \binom{n}{n-1}.a^1.b^{n-1} + \binom{n}{n}.a^0.b^n.$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = \binom{n}{0}.1^n.(\frac{1}{n})^0 + \binom{n}{1}.1^{n-1}.(\frac{1}{n})^1 + \binom{n}{2}.1^{n-2}.(\frac{1}{n})^2 + \binom{n}{3}.1^{n-3}.(\frac{1}{n})^3 + ... + \binom{n}{n}.1^0.(\frac{1}{n})^n$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n.(\frac{1}{n}) + \frac{n.(n-1)}{2!}.(\frac{1}{n})^2 + \frac{n.(n-1).(n-2)}{3!}.(\frac{1}{n})^3 + ... + (\frac{1}{n})^n$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n.(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n.(n-1).(n-2)}{n^3} + ... + (\frac{1}{n})^n$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n}{n}.\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{n}{n}.\frac{(n-1)}{n}.\frac{(n-2)}{n} + ... + (\frac{1}{n})^n$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}.\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}.\frac{(n-1)}{n}.\frac{(n-2)}{n} + ... + (\frac{1}{n})^n$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}.(\frac{n}{n} - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}.(\frac{n}{n} - \frac{1}{n}).(\frac{n}{n} - \frac{2}{n}) + ... + (\frac{1}{n})^n$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}.(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}.(1 - \frac{1}{n}).(1 - \frac{2}{n}) + ... + (\frac{1}{n})^n$$

Após o desenvolvimento do termo, quando o número **n** assume valores cada vez maiores, a parcela 1/n tende a valores próximos de zero. Nessa situação:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}.(1-0)+\frac{1}{3!}.(1-0).(1-0)+.... = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.... = 2{,}718281828....$$

Utilizando-se uma planilha eletrônica podemos constatar que este número tende a 2,718281828....

Acreditamos que este tipo de abordagem inicial[67] por meio de um problema pragmático de matemática financeira, permite a introdução do número de Euler de modo a superar o obstáculo de considerar o infinito como um número grande, o que possibilitaria a pensar que $1^{\infty} = 1$. Para um estudante iniciante, a observação ingênua do:

> [...] comportamento peculiar da expressão $(1 + 1/n)^n$ para valores grandes de n deve parecer de fato intrigante. Suponha que se consideremos apenas a expressão dentro dos parênteses, $1 + 1/n$. à medida que n aumenta, $1/n$ fica cada vez mais próximo de 0 e assim $1 + 1/n$ fica cada vez mais próximo de 1, embora seja sempre maior do que 1. Assim, podemos ser tentados a concluir que para um valor grande de n 'realmente grande' [...] a expressão $1 + 1/n$ pode ser substituída por 1. Agora, elevado a qualquer potência é sempre igual a 1. Portanto, parece que $(1 + 1/n)^n$ para valores grandes de n deve se aproximar do número 1 (MAOR, 2008, p. 47).

Destacamos, por meio desta citação de Maor (2008), que a conjunção da base $\left(1+\frac{1}{n}\right)$, que tende a 1 quando n tende a infinito, presente na potência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, remete a essência do número de Euler.

Para entender tal posição retomamos inicialmente aspectos históricos. O número de Euler é reconhecido no estudo desenvolvido por Napier, de forma indireta, em 1618, com relação aos logaritmos. Na época em que foram criados, os logaritmos eram concebidos como ferramenta para agilizar cálculos, como, por exemplo, na Astronomia.

A ideia básica para a construção da tábua de logaritmos fornece um enfoque para se compreender o número de Euler. Napier queria escrever qualquer número como uma potência de algum número fixo (base). Deste modo, multiplicar (ou dividir) dois números seria equivalente a somar (ou subtrair) os expoentes das potências.

Um exemplo para situar esta situação é efetuar 128x32 utilizando uma tabela das potências de 2 (tabela 11), onde trocamos 128 por 2^7 e 32 por 2^5. Daí: $128x32 = 2^7 x 2^5 = 2^{12} = 4096$, pela propriedade de soma dos expoentes de uma potência qualquer.

---

67 Esta situação propõe um contexto pragmático que permeia a ideia associada ao infinito potencial: quando n tende a infinito, 1/n tende a zero. Em linguagem matemática mais formal poderíamos escrever $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828....$ Consideramos tal linguagem sintática desnecessária no ensino básico.

Tabela 11: Algumas potências inteiras de 2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384

Atualmente não se faz mais assim. Porém, na época de Napier não existia calculadora eletrônica e a tabela era de grande ajuda nos cálculos. Então, ele produziu uma tabela que completava os espaços entre as potências de expoente inteiro. E qual era o critério de Napier para se completar os espaços?

Para completar os intervalos entre as potências de números inteiros, Napier utilizou um fator próximo de 1. A escolha dele recaiu em $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$. Esta ideia de utilizar um fator próximo a 1 permite entender o número de Euler, cuja base remonta a $(1 + 1/_n)$.

O trabalho de Napier ajudou os cálculos computacionais dos usuários da época: os astrônomos. Hoje não faz mais sentido utilizar os logaritmos para finalidades de cálculos. Posteriormente, Briggs fez uma série de melhorias no trabalho de Napier, apresentando uma aproximação numérica para o logaritmo de '**e**' na base dez, mas não fez referência ao significado deste resultado.

Em 1668, Mercator, no livro *Logarithmotechnia,* utilizou a nomenclatura logaritmo natural, para se referir a base '**e'**, porém o número de Euler ainda é uma referência implícita ao desenvolvimento dos logaritmos.

Vale destacar observação em Maor (2008), que a explicação mais comum no ensino básico, para comentar a respeito do número de Euler, como base dos logaritmos, historicamente foi obra posterior, devido a Leonardo Euler, no século XVIII.

A expressão do número de Euler, dada por $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.... = 2{,}718281828....$ representa uma soma de infinitos termos.

O item 'séries infinitas' é importante assunto a ser abordado no ciclo básico, dentro dos temas usuais do currículo de matemática, porém raramente é apresentado. Será que a soma da série representando o número de Euler é convergente?

Para verificar esta outra conjectura, inicialmente determinamos um limite inferior. Isto pode ser feito pelo uso de desigualdades, em relação a cálculos numéricos simples, uma importante ferramenta a ser mais explorada. Pelo uso da expressão $\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.... > 1+1 = 2 \Rightarrow 2 < e.$

Para determinar se existe um limite superior para o número de Euler, tem-se que:

$$\frac{1}{n!}=\frac{1}{1.2.3.4...n}=\frac{1}{1}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}....\frac{1}{n}<1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}....\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\mathrm{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=a_1+a_2+a_3+...+a_n+....=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}+...<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+....$$

$$\mathrm{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}<1+1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+....}_{\text{Progressão Geométrica de razaõ } 1/2}.$$

Nesta P.G. de infinitas parcelas, primeiro termo ½ e razão ½, no intervalo para -1<q<1, tem-se: $Soma=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...=\frac{\mathrm{a}_1}{1-\mathrm{q}}=\frac{1/2}{1-1/2}=1.$

Daí: $\mathrm{e}<1+1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+....=1}_{\text{Progressão Geométrica de razaõ } 1/2}+1+1=3\Rightarrow \mathrm{e}<3.$

O número de Euler fica limitado pelo intervalo inicial 2 < **e** < 3 e pode ser expresso por $\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, para $\mathrm{n}\in\mathrm{N}$.

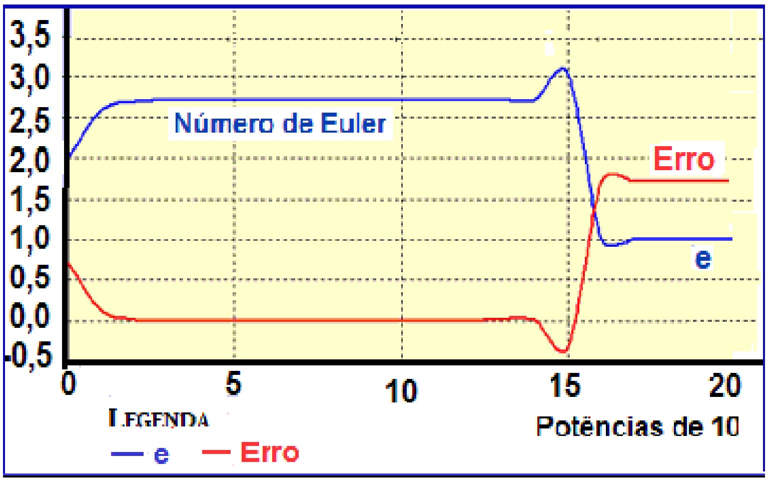
Esta expressão permite aproximar o número de Euler, um número irracional, a partir de infinitas parcelas compostas de números racionais, o que configura uma importante relação entre estes dois conjuntos.

Utilizando-se calculadoras científicas usuais, onde o mostrador contém limitadas casas decimais, um primeiro olhar (ingênuo) para o resultado do número de Euler (e = 2,718281828...) parece mostrar certa regularidade na parte decimal (8281). Para verificar esta conjectura em relação ao número de Euler, poderíamos recorrer a uma planilha eletrônica, como a Excell. Porém, para *x* maior do que 10^7 e menor do que 10^{11}:

> [...] o resultado é dado pela planilha com erro de 10^{-7}. Acima de 10^{11}, o erro começa a aumentar até que o resultado se torna unitário a partir de 10^{16}. O que percebemos é que, obviamente, a planilha calcula inicialmente o número *(1+1/x)*, e depois o eleva a *x*. Para $x>10^{16}$, o resultado para *1/x* é tão pequeno que a planilha simplesmente o arredonda para zero, obtendo-se e=1, pois o número 1 elevado a qualquer número é também igual a 1 (AUGUSTO, 2009, p.3).

A evolução do erro de cálculo apontado por Augusto (2009) está representada no quadro 16 e remonta a um problema da ordem da natureza finita do equipamento computacional. Ao operar com um processo infinito, a natureza finita das memórias induz a um resultado errado. Somente a compreensão teórica a respeito da função dada por $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ permite situar o erro da planilha eletrônica.

Quadro 16: Erro apontado por planilha eletrônica [Fonte: Augusto (2009)].



x	$y = (x+1/x)^x$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,593742
100	2,704814
1000	2,716924
$1{,}0.10^6$	2,718280
$1{,}0.10^9$	2,718282
$1{,}0.10^{12}$	2,718523496
$1{,}0.10^{15}$	3,035035207
$1{,}0.10^{16}$	1

Deste modo, como o material empírico/concreto naturalmente constitui somente um acesso inicial ao tema, recorremos ao recurso da prova para verificar que o número de Euler é um número irracional. Pode-se demonstrar a irracionalidade do número de Euler utilizando argumentos simples e acessíveis a alunos do ensino básico: desigualdades algébricas envolvendo frações, fatorial, sequências infinitas, progressão geométrica, binômio de Newton e manipulações algébricas básicas.

A prova da irracionalidade do número de Euler se faz pela demonstração por absurdo. Supondo **e** = **p**/**q**, com **p** e **q** números inteiros e **q** não nulo.

De $e = \frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{(q-1)!} + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$, onde q < n.

Multiplicando-se por **q!,** membro a membro, obtém-se:

$$e.q! = \frac{p}{q}.q! = 1.q! + 1.q! + \frac{1}{2!}.q! + \frac{1}{3!}.q! + ... + \frac{1}{(q-1)!}.q! + \frac{1}{q!}.q! + \frac{1}{(q+1)!}.q! + \frac{1}{(q+2)!}.q! + ... + \frac{1}{n!}.q! + ...$$

$$\frac{p}{q}.q! = q! + q! + \frac{1}{2!}.1.2.3.4.5.6..q + \frac{1}{3!}.1.2.3.4.5.6..q + ...\frac{1}{(q-1)!}.q.(q-1)! + \frac{1}{q!}.q! + \frac{1}{(q+1).q!}.q! + \frac{1}{(q+2).(q+1).q!}.q! + ...\frac{1}{n!}.q! + ...$$

$$p.(q-1)...3.2.1 = [q! + q! + 3.4.5.6...q + 4.5.6...q + ...q + 1] + \frac{1}{q+1} + .\frac{1}{(q+2).(q+1)}... + \frac{1}{n!}.q! + ...$$

$$p.(q-1)...3.2.1 - [q! + q! + 3.4.5.6...q + 4.5.6...q + ...q + 1] = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2).(q+1)} + ...\frac{1}{n!}.q! + ...$$

No 1º membro (lado esquerdo) as parcelas são números inteiros, pois q ≥2.

No 2º membro (lado direito), as parcelas são frações e, ainda, como q ≥2, implica em $\frac{1}{q} \le \frac{1}{2}$, e:

$$\frac{1}{q+1} \leq \frac{1}{3};$$

$$\frac{1}{(q+2).(q+1)} \leq \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$$

$$\frac{1}{n!}.q! \leq \underbrace{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}......\frac{1}{3}}_{n-(q+1)\ vezes} = \frac{1}{3^{n-(q+1)}}$$

Daí, no 2º membro: $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2).(q+1)} + ...\frac{1}{n!}.q! + ... \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{n-(q+1)}} + ...,$

surge uma progressão geométrica de infinitas parcelas, 1º termo 1/3 e razão 1/3. A soma destas parcelas é:

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2).(q+1)} + ...\frac{1}{n!}.q! + ... \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{n-(q+1)}} + ... = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, o número de Euler não pode ser um número racional.

Em meados do século XVII o número de Euler é incorporado e estudado pelo Cálculo Diferencial e Integral. A partir daí, este número tornou-se importante e surgiu em diversas áreas, como a Biologia, a Economia, as Engenharias e a Física.

Os logaritmos, "[...] que inicialmente eram instrumentos fundamentais para a simplificação de cálculos, hoje não se destinam precipuamente a isso, sendo imprescindíveis no estudo das grandezas que variam exponencialmente" (SÃO PAULO, 2008, p. 50).

Um exemplo disso é a relação do número de Euler e a hipérbole equilátera. Segundo O'Connor e Robertson (2001), em 1647, Saint-Vicent calculou a área sob a hipérbole equilátera, a função y = 1/x, com x>0, mas possivelmente não a relacionou com os logaritmos. Posteriormente, em 1661, Huygens explicitou a relação entre a área mencionada e os logaritmos.

No século XVII os logaritmos eram concebidos de modo operatório e não conceitualmente como uma função. Provavelmente, há indícios que foi Jacob Bernoulli ou James Gregory, no século XVII, que estabeleceu a relação entre a função exponencial como o inverso da função logarítmica.

Assim, de certo modo, a história do número de Euler situa-se num paralelo com a história do cálculo integral e diferencial. Nos processos de calcular a área da hipérbole equilátera, Newton e Leibnitz, no século XVII, se depararam com o número de Euler.

A figura 42 representa graficamente a função $\mathrm{y} = \frac{1}{\mathrm{x}}, x > 0,$ e a área sob a curva representa graficamente o logaritmo natural de um número real positivo.

Na função y = 1/x, usual no Ensino Médio, contínua com exceção de x = 0, o número de Euler representa o valor da abscissa x para o qual a área sob a função y = 1/x é unitária, uma interface do tema função e o conceito de número irracional.

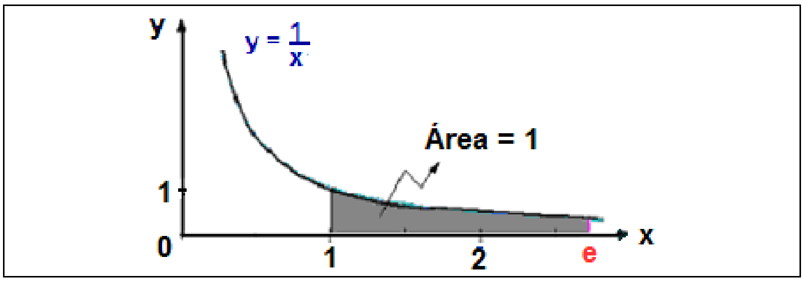


Figura 42: O número de Euler e a hipérbole equilátera.

Se a função y = 1/x é contínua em intervalos controlados, a área sob essa curva também é uma função contínua. Vários matemáticos tentaram, sem conseguir, calcular a área sob essa curva. Esse problema só foi resolvido com o advento do cálculo diferencial e integral.

Como no ensino básico o cálculo diferencial e integral é uma restrição, a apresentação do número de Euler através da área unitária sob a curva y = 1/x se atém a uma abordagem conceitual. Podemos, entretanto, calcular a área através de retângulos inscritos e circunscritos a curva y =1/x, o que permite delimitar um intervalo para o número de Euler, e, por aproximação, por falta e excesso, estimar um intervalo de valores para o número de Euler.

Esta abordagem utiliza uma importante ideia do cálculo integral: a obtenção da área de uma figura pela aproximação da soma das áreas de retângulos inscritos e circunscritos, com a medida da base tomada com valores tão pequenos quanto se queira, ou seja, tendendo a zero.

Há vários modos de se definir o número de Euler. No ciclo básico é possível entendê-lo e introduzi-lo, através da interligação de vários conceitos matemáticos da Matemática Elementar do próprio currículo do ciclo básico e, ainda, ilustrar e relacionar a outros conceitos, normalmente abordados em Ensino Superior.

As várias possibilidades de abordagem do número de Euler, tema vinculado à valorização da ideia de aproximação através de números racionais, utilizadas em algumas áreas da ciência, como na Teoria dos Erros e no moderno computador, permite entender a extensão da tensão entre os conjuntos dos Números Racionais e o conjunto dos Números Irracionais, que leva necessariamente a questão em como administrá-la em favor do ensino e da aprendizagem significativa em Matemática.

A seguir, abordamos algumas situações de ensino envolvendo o número de ouro.

O número de ouro

O número de ouro ou razão áurea "[...] é denotada pela letra grega Phi que é a inicial do nome de Fídias, escultor e arquiteto encarregado da construção do Parthenon, em Atenas. Construído entre 447 e 433 a.C., o Parthenon Grego ou o Templo das Virgens, templo representativo do século de Péricles e uma das obras arquitetônicas mais admiradas da antiguidade, [provavelmente] expressando a razão de ouro no retângulo que contêm a fachada (Largura/Altura). Esta razão está presente também na fachada da Catedral de Notre Dame (em Paris) e a Basílica de Santa Maria Novella (em Florença)" (CERRI, 2006, p. 6).

Apesar de ser usual a introdução ao estudo dos números irracionais através da abordagem da relação entre a medida da diagonal e a medida do lado de um quadrado, conforme observamos nas coleções de livros didáticos analisadas, este não é o único par de segmentos incomensuráveis. Muitos:

> [...] acreditam que esse foi o primeiro par de segmentos incomensuráveis descoberto. Existe uma vertente que defende a tese de que a descoberta dos incomensuráveis está relacionada ao pentagrama, que é o símbolo dos pitagóricos, pois a razão entre o lado de um pentágono regular com a sua diagonal resulta na *razão áurea* que é dada pelo número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (CERRI, 2006, p. 4).

No ensino básico é usual apresentar uma situação concreta onde ocorre a divisão de um segmento geométrico contínuo dado (AB) em um número inteiro de partes iguais. Por exemplo, seja a divisão do segmento AB em duas partes iguais, que origina o ponto médio M, conforme ilustrado na figura 43a.

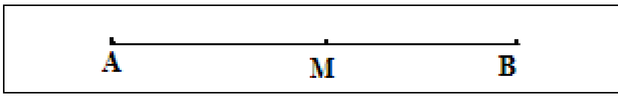


Figura 43a: Divisão de segmento em duas partes iguais.

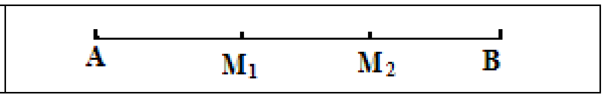


Figura 43b: Divisão de segmento em três partes iguais.

Pela escolha realizada, é imediato que AM = MB, ou seja, $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{1}=1$ e $\frac{MB}{AB}=\frac{1}{2}$.

A seguir, efetua-se a divisão do segmento AB em três partes iguais, conforme a figura 43b. Podemos tomar algumas razões entre segmentos como $\frac{AM_1}{AB}=\frac{1}{3}$, $\frac{AM_2}{AB}=\frac{2}{3}$ e $\frac{AM_2}{M_2B}=\frac{2}{1}$.

O quadro 17 mostra algumas relações pragmáticas obtidas pela divisão do segmento contínuo AB em partes iguais.

Quadro 17: Divisão do segmento geométrico contínuo AB em um número discreto de partes.

subdivisões de AB	$\frac{AB}{AM_i}$	$\frac{AM_i}{MB}$	$\frac{AB}{AM_i} = \frac{AM_i}{MB}$?
2	$\frac{AB}{AM} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{1} = 1$	não
3	$\frac{AB}{AM_1} = \frac{3}{1} = 3$; $\frac{AB}{AM_2} = \frac{3}{2}$	$\frac{AM_1}{M_1B} = \frac{1}{2}$; $\frac{AM_2}{M_2B} = \frac{2}{1} = 2$	não
4	$\frac{AB}{AM_1} = 4$; $\frac{AB}{AM_2} = 2$; $\frac{AB}{AM_3} = \frac{4}{3}$	$\frac{AM_1}{M_1B} = \frac{1}{3}$; $\frac{AM_2}{M_2B} = 1$; $\frac{AM_3}{M_3B} = 3$	não

Uma análise preliminar sobre estas poucas tentativas iniciais geradas pela subdivisão de um dado segmento geométrico contínuo AB em partes inteiras conduz a uma primeira indagação: Das várias divisões do segmento dado AB em partes discretas, existiria algum ponto M_i situado entre as extremidades AB para o qual $\frac{AB}{AM_i} = \frac{AM_i}{MB}$?

A questão proposta se situa num quadro geométrico, um modo usual de abordagem no antigo povo grego, assim como se encontra situada numa concepção pragmática. A busca de solução por tentativa e erro, de alguns casos particulares, conforme identificada no quadro 17 pode levar a um impasse: não se encontrando solução por este processo de tentativa e erro, qual método ou prova podemos disponibilizar para procurar uma resposta para a questão proposta e que se situe nos conhecimentos do ensino básico?

Para encaminhar uma solução para a questão, podemos usar a linguagem algébrica, o que configura um quadro teórico mais geral. Consideramos o ponto genérico M, situado a uma distância x do vértice A, com AM necessariamente não igual a AB (ver figura 44).

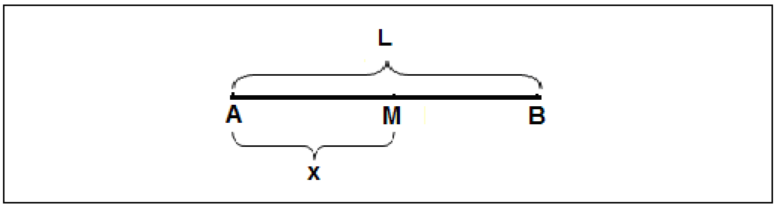


Figura 44: Divisão de segmento em duas proporcionais.

Supondo-se a condição de igualdade da tese, na relação expressa por $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}$, fazemos as substituições AM = **x**; AB = **L** e MB = **L–x,** vem $\frac{L}{x} = \frac{x}{L-x}$ (I). Desenvolvendo esta expressão se obtém $x^2 = L^2 - L.x \Rightarrow x^2 + L.x = L^2$.

Dividindo-se ambos os membros da expressão por x^2: $\frac{x^2}{x^2}+\frac{L.x}{x^2}=\frac{L^2}{x^2}\Rightarrow 1+\varphi=\varphi^2\Rightarrow\varphi^2-\varphi-1=0$, onde **φ** representa a razão L/x.
Aplicando-se o método resolutivo para a equação de 2º grau $\varphi^2-\varphi-1=0$ obtém-se:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = 1+4=5.$$

$$\varphi=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\left\{\begin{array}{l}\varphi_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi_1=1{,}6180339887....\\ \varphi_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\varphi_2=-0{,}6180339887....\end{array}\right..$$

O valor $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}6180339887...$ foi denominado por Euclides como número de ouro ou razão áurea do segmento AB. Isolando a variável ‘x’ obtém-se:

$$x=\frac{L}{\varphi}=\frac{L}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{2L}{\sqrt{5}+1}=\frac{2L}{\sqrt{5}+1}.\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}=\frac{2L(\sqrt{5}-1)}{4}=\frac{L(\sqrt{5}-1)}{2}=L.0{,}6180229887.....$$

Desenvolvendo a expressão $\varphi^2=\varphi+1\Rightarrow\varphi=\frac{\varphi+1}{\varphi}\Rightarrow\varphi=1+\frac{1}{\varphi}\Rightarrow\frac{1}{\varphi}=\varphi-1.$
Substituindo o valor do número de ouro $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, obtém-se:
$\frac{1}{\varphi}=\varphi-1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-1=\frac{1+\sqrt{5}-2}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

O valor de ‘x’ representa a medida que o ponto M dista do extremo A. Deste modo, encontramos uma solução representando geometricamente uma divisão do segmento AB em duas partes distintas e proporcionais, mas não iguais como inicialmente proposto na questão que deu início a essa discussão.

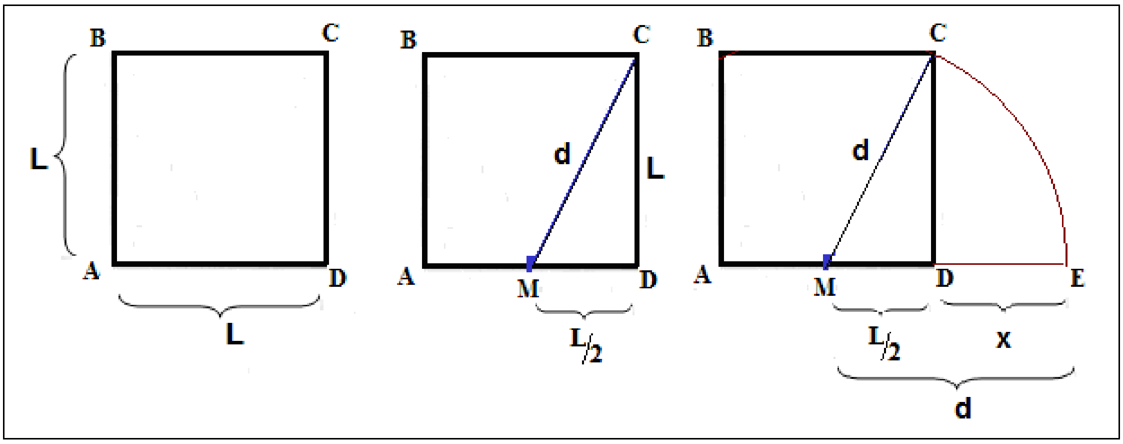
Neste ponto, podemos tecer considerações envolvendo a natureza dos números encontrados, aproveitando o conceito de medida, que permite acesso ao significado dos números irracionais. Nesse viés, os resultados de $x=\frac{L(\sqrt{5}-1)}{2}$ e $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, expressam uma razão de números inteiros de partes?

Retornando ao quadro geométrico, podemos representar a solução $x=\frac{L(\sqrt{5}-1)}{2}$ por construção geométrica, conforme expresso no quadro 18.

A solução geométrica, a moda grega, consiste em partir de um quadrado de lado genérico **L**. Dividindo-se a base AD em duas partes iguais obtém-se o ponto médio M.

Determina-se o segmento **d**, de medida $d=\frac{L\sqrt{5}}{2}$, por aplicação do teorema de Pitágoras. Traçando-se o arco CE, de centro em M, no sentido horário, obtém-se o ponto E, encontro do arco CE com a reta suporte do lado AD.

Quadro 18: Representação da medida x que divide o segmento AB na proporção áurea.



A medida 'x' representa a distância $DE = d - \frac{L}{2} = \frac{L.\sqrt{5}}{2} - \frac{L}{2} = \frac{L.(\sqrt{5}-1)}{2}$ (quadro 18).

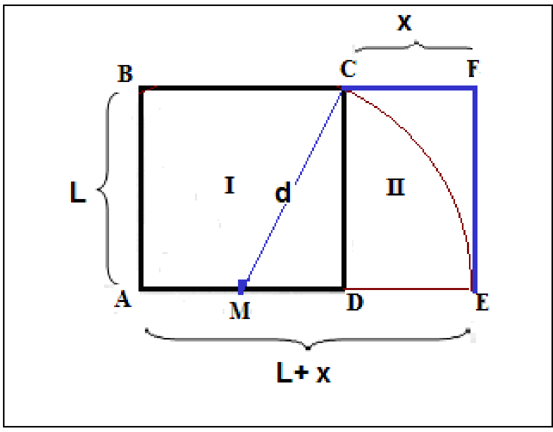


Figura 45a: Retângulo áureo ABFE e CEDF.

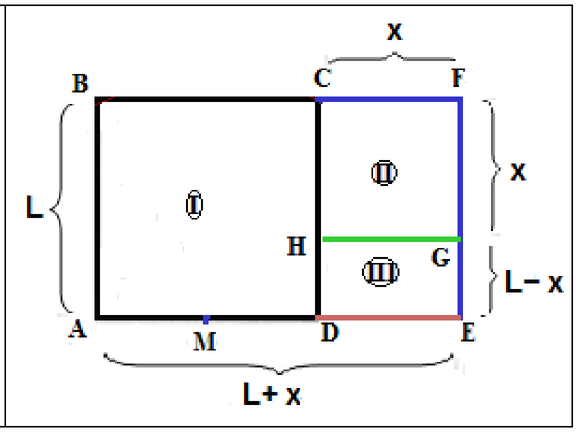


Figura 45b: Retângulo áureo CEDF e DEGH.

A partir da representação geométrica do quadro 18 podemos construir o retângulo áureo observado na figura 45a.

Da relação (I) dada por $\frac{L}{x} = \frac{x}{L-x}$, aplicando-se propriedades das proporções tem-se $\frac{L}{x} = \frac{x}{L-x} = \frac{L+x}{x+L-x} = \frac{L+x}{L} (II)$. Observando-se a relação $\frac{L}{x} = \frac{L+x}{L}$ podemos verificar uma proporção entre o retângulo ABEF e o retângulo CDEF.

De (I) podemos afirmar que o retângulo CDEF é semelhante ao retângulo DEGH, conforme expresso na figura 45b. Esta possibilidade remete ao denominado *retângulo áureo* de um retângulo CDEF que possui a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado, como CFGH, o retângulo restante DEGH, será semelhante ao retângulo original CDEF.

Com uso da relação (I), dada por $\frac{L}{x}=\frac{x}{L-x}$, podemos aplicar propriedade das proporções e obter uma sucessão de retângulos áureos, ou seja: $\frac{L}{x}=\frac{x}{L-x}=\frac{L-x}{2x-L}$, ou $\frac{x}{L-x}=\frac{L-x}{2x-L}=\frac{2x-L}{2L-3x}=\frac{2L-3x}{5x-3L}$, e assim por diante.

Tal sucessão remete a possibilidade de se obter uma sequência infinita de termos expressa por (L+x; L; L–x; 2x-L; 2L-3x; 5x-3L; 5L-8x; ....), dada pelos lados dos retângulos áureos, onde as medidas de cada termo são cada vez menores, por construção, ou seja, tendem a zero. Geometricamente, esta sequência pode ser visualizada por uma série de retângulos áureos, conforme ilustrado na figura 46.

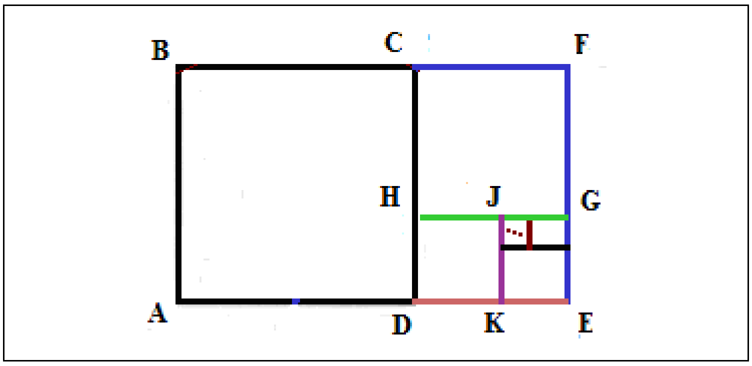


Figura 46: Esquema de construção dos infinitos retângulos áureos.

Para provar que os lados de um retângulo áureo são grandezas incomensuráveis utilizamos a demonstração por absurdo[68]. Se os lados do retângulo ABFE fossem comensuráveis estes teriam um submúltiplo comum τ: AE = (L + x).τ e AB = L.τ.

Como consequência, os valores de ‘L’ e ‘x’ seriam inteiros, o que também implicaria serem inteiros e positivos todos os números da sequência (L+x; L; L–x; 2x-L; 2L-3x; 5x-3L; 5L-8x; ....). Como não é possível existir uma sequência infinita e decrescente de números inteiros positivos, concluí-se que os lados de um retângulo áureo são incomensuráveis. Deste modo, os valores de ‘x’ e do número de ouro representam números irracionais.

Partindo-se de uma situação concreta (existiria algum ponto M_i situado entre as extremidades AB para o qual $\frac{AB}{AM_i}=\frac{AM_i}{MB}$?), foram tecidas algumas conexões envolvendo a linguagem algébrica e a geométrica, do ponto de vista teórico, o que levou a demonstração que os lados de um retângulo áureo são grandezas incomensuráveis.

---

[68] Esta demonstração utiliza argumentos presentes no atual currículo de matemática do ensino básico: propriedades dos números inteiros, sequência numérica infinita e comensurabilidade entre segmentos.

Do resultado obtido $\varphi = 1,618034.....$ podemos questionar como tal número irracional pode ser aproximado por uma razão de números inteiros e, posteriormente, como exibir um processo que aplicado de forma recorrente possa mostrar uma sequência de números aproximados, na forma de razão entre dois números inteiros, de modo que cada termo da sequência representa uma melhor aproximação que a anterior.

A aproximação de números irracionais é assunto pouco trabalho e merece ser valorizado, principalmente por permear algumas ideias essenciais entre os números racionais e os irracionais. A representação decimal dos números irracionais é necessariamente infinita e não periódica. A única via de acesso a um número:

> [...] irracional é a utilização de aproximações sucessivas através de números racionais. [...] Ainda hoje, [isto] parece desconcertar todos os que enfrentam os irracionais. [...] Negando o estatuto de números as razões entre grandezas que conduziam aos irracionais, foi possível aos gregos viver praticamente ao largo de tais objetos indesejáveis. Há muito se sabe, no entanto, que a maioria absoluta, a quase totalidade dos Números Reais existentes é constituída por números irracionais. Os outros, os racionais, constituem uma ínfima minoria, a despeito de o homem comum não ter contato senão com uns poucos números irracionais, ao longo da vida (MACHADO, 1990, p. 43-44).

Usualmente, os livros didáticos mostram aproximações sem maiores aprofundamentos. Ao se questionar sobre a forma de abordar o número de ouro como razão entre dois inteiros emerge alguns conceitos presentes na escolaridade básica envolvendo os números racionais na forma decimal e fracionária.

Inicialmente, poderíamos apontar algumas respostas como 8/5 (1,6); 81/50 (1,62), 1,818, dentre outras, que constitui uma abordagem inicial por tentativa e erro.

Porém, ao prosseguirmos no 'percurso de significação' do número de ouro, um caminho fundamental é questionar sobre um possível processo para exibir uma sequência de aproximações de um número irracional, na forma de fração, onde cada termo representa uma aproximação melhor que a anterior. Isto equivale a introduzir a necessária abordagem teórica. A conexão necessária para se encaminhar tal questão faz uso da linguagem algébrica.

De $\varphi^2 = \varphi + 1$, obtém-se $\varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\varphi + 1}{\varphi}$, e, por último $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. Por recorrência, podemos substituir no 2º membro a expressão $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. Assim, obtemos $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}}$. Aplicando este recurso sucessivamente, chega-se ao resultado:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}} \quad (I).$$

O uso da expressão (I) permite obter uma sequência de valores aproximados, pelo truncamento sucessivo dos termos da expressão (**n**), o que pode ser visualizado na tabela 12. Por meio deste processo, obtém-se a série de valores por aproximação sucessiva, ou seja, (1; 2; 3/2; 5/3; 8/5; 13/8; 21/13; ...), ou, em termos de valores decimais (1; 2; 1,5; 1,66...; 1,6; 1,625; 1,615385; ...).

Tabela 12: Série de valores que compõe a série de aproximações do número de ouro ($\varphi = 1{,}618034.....$)

n	Aproximação	distância (em módulo)
1	$a_1 = 1$	0,618034...
2	$a_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$	0,381966...
3	$a_3 = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$	0,11803...
4	$a_4 = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} = 1{,}666666.$	0,048632...
5	$a_5 = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6.$	0,01803...
6	$a_6 = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{3}{5}} = \frac{13}{8} = 1{,}625.$	0,006966...
7	$a_7 = \frac{21}{13} = 1{,}615385$	0,00265...

Para se verificar que as aproximações são cada vez melhores faz-se uso do conceito da distância. A distância representa a diferença (em módulo) entre o valor do número de ouro e a razão obtida em cada aproximação. A análise da última coluna da tabela 12 aponta que as distâncias diminuem, revelado pela série decrescente de valores que tendem a zero, indicando que as aproximações são cada vez melhores.

Tabela 13: Sequência de valores aproximados do número de ouro ($\varphi = 1{,}618034.....$)

n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
razão	1/1	2/1	3/2	5/3	8/5	13/8	21/13	34/21	55/34	89/55	144/89	233/144
razão	1	2	1,5	1,666..	1,6	1,625	1,615385	1,619048	1,617647	1,618182	1,617978	1,618056

Destacamos a arquitetura de números inteiros, expressa em (I), que representa um número irracional. A operacionalização de (I) nas tabelas 12 e 13 indicam aproximações racionais. Quando se avança para valores sucessivos da sequência, ou seja, quando n tende para o infinito, as aproximações dadas na forma de razão entre dois números inteiros tende para o número de ouro, um número irracional. Este problema possibilita explorar uma nova linguagem no ensino básico - a do infinito potencial – assim como a abordagem de um novo tema complementar e articulador: as frações contínuas.

Frações Contínuas: Um enfoque complementar e articulador dos números irracionais.

O tema das frações contínuas representa um assunto cuja própria construção epistemológica está imersa na tensão conceitual presente nos eixos constituintes do ‘espaço de significações’, assim como permeia uma série de conexões que viabilizam um ‘percurso de significações’ mais abrangente com relação aos números irracionais.

A explicitação do desenvolvimento de algumas ideias inerentes as frações contínuas se constitui num modo complementar de representar e apresentar em nível de escola básica alguns números irracionais de destaque, como as raízes não-exatas, o número de ouro, o PI e o número de Euler.

No decorrer do ‘percurso de significações’ do número de ouro, uma natural consequência do desenvolvimento deste tema foi obtida através da expressão

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}} \, (I).$$

O número de ouro (φ) representa a mais simples e bela fração contínua simples, ilustrando a arquitetura e essência deste tema. Uma fração contínua simples[69], com a_0 inteiro e os demais termos (a_i, i>0) naturais não nulos, é um número representado na forma:

[69] A fração contínua simples basicamente se assemelha a uma arquitetura de frações unitárias sucessivas, exibindo um pouco do uso e composição de frações unitárias pelos egípcios.

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots]$$

As frações contínuas simples representam uma arquitetura de números inteiros, que pode ser finita ou infinita. As:

> [...] frações contínuas constituem um exemplo interessante de procedimento que é finito, quando operado sobre números racionais, e infinito, quando o número dado é irracional. A origem das frações contínuas está na Grécia, onde as frações, para efeito de comparações, eram todas escritas com numerador '1'(CUNHA, 2007, p. 3).

Qualquer número real pode ser escrito como uma fração contínua. Uma importante contribuição das frações contínuas simples para este estudo decorre da seguinte propriedade: as frações contínuas finitas representam números racionais e as frações contínuas infinitas representam um número irracional. O pareamento - finito/número racional e infinito/número irracional – representa um fator de fácil distinção e situa as frações contínuas como um possível tema para compor o 'espaço de significações' dos números irracionais.

A demonstração[70] da propriedade que os números racionais possuem representação em fração contínua finita é acessível a alunos do ciclo básico e consiste na aplicação do conceito de fração e do algoritmo de divisão de números inteiros.

Sendo **p** e **q** naturais, o algoritmo da divisão entre dois números inteiros propõe os passos indicados na tabela 14. Se $p = a_0.q + r_0$, então, $\frac{p}{q} = a_0.\frac{q}{q} + \frac{r_0}{q} \rightarrow \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q}$, onde $0 < r_0 < q$, com $a_0 = \left[\frac{p}{q}\right]$, onde o símbolo '[ ]' indica a parte inteira[71] do resultado expresso pela divisão p/q.

Tabela 14: Os termos do processo da divisão

Divisão	quociente	resto
$p:q$	a_0	r_0
$q:r_0$	a_1	r_1
$r_0:r_1$	a_2	r_2
...	...	...

[70] A demonstração pode ser encontrada em Beskin (1987) e em Andrade e Bracciali (2005).

[71] A função maior inteiro $[x] = n$ é aquela que para todo real x, existe um único inteiro n tal que $n \leq x < n+1$. Em outras palavras, a função maior inteiro é a função cujo domínio é Real e o contradomínio pertence aos números inteiros, de modo que $[x] = \max \{ n \in Z / n \leq x \}$.

Se $r_1 = 0$, então p/q é um número inteiro e o processo termina. Caso contrário tem-se que: $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} \Rightarrow \frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}}$, com $0 < r_0 < q$.

Repetindo-se o procedimento com q/r_0 obtém-se $\frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0}$, com $0 < r_1 < r_0$. Se $r_1 = 0$, então o processo termina e assim $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}} \Rightarrow \frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1}$ *ou* $\frac{p}{q} = [a_0; a_1]$.

Se $r_2 \neq 0$, então o processo continua. O processo termina para algum resto r_i na sequência $q > r_0 > r_1 > r_2 > ...$, que representa uma sucessão decrescente de inteiros positivos. A escrita correspondente a operação de divisão de p por q é dada na tabela 15.

Tabela 15: Algoritmo da divisão de dois números inteiros.

$p = a_0.q + r_0$	$0 < r_0 < q$	$\frac{p}{q} = a_0.\frac{q}{q} + \frac{r_0}{q} \rightarrow \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q}$
$q = a_1.r_0 + r_1$	$0 < r_1 < r_0$	$\frac{q}{r_0} = a_1.\frac{r_0}{r_0} + \frac{r_1}{r_0} \rightarrow \frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0}$
$r_0 = a_2.r_1 + r_2$	$0 < r_2 < r_1$	$\frac{r_0}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}$
$r_1 = a_3.r_2 + r_3$	$0 < r_3 < r_2$	$\frac{r_1}{r_2} = a_3 + \frac{r_3}{r_2}$
.....	.....	.....
$r_{s-3} = a_{s-1}.r_{s-2} + r_{s-1}$	$0 < r_{s-1} < r_{s-2}$	$\frac{r_{s-3}}{r_{s-2}} = a_{s-1} + \frac{r_{s-1}}{r_{s-2}}$
$r_{s-2} = a_s.r_{s-1}$	$r_s = 0$	$\frac{r_{s-2}}{r_{s-1}} = a_s$

A tabela 15 ilustra que cada fração imprópria (1º membro) é igual a soma de um coeficiente inteiro (a_i) e uma fração própria, esta última desenvolvida em cada etapa seguinte, na forma inversa. Podemos aplicar este procedimento às etapas do algoritmo da divisão, obtendo a sucessão de aproximações das frações contínuas simples, denominadas convergentes, representadas na tabela 16.

Tabela 16: Sucessão de convergentes do algoritmo da divisão.

1º convergente	$\frac{p}{q} = a_0$
2º convergente	$\frac{p}{q} = a_0 \cdot \frac{q}{q} + \frac{r_0}{q} \to \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q} \Rightarrow \frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}}$
3º convergente	$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_0}} \Rightarrow \frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r_0}} \to \frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}}$
4º convergente	$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}} \to \frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}}} \to \frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}}$
.....	.....
(n+1) ésimo convergente	$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}} \to \frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}}} \to \frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots \frac{1}{a_n}}}}.$

Pode-se complementar a demonstração argumentando verbalmente em relação ao algoritmo da divisão de dois números inteiros, citando alguns exemplos numéricos.

Nesse contexto, uma ilustração interessante é o caso de dízimas periódicas, como $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = [1;1,2]$ ou $\frac{2}{3} = 0 + \frac{2}{3} = 0 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = [0;1,2]$, dentre outras.

O algoritmo de Euclides consiste em outro argumento para viabilizar a escrita das frações contínuas. Este processo, apesar de constar do programa oficial de ensino é muito pouco utilizado no ciclo básico[72].

Para descrever a fração 32/9 em termos de fração contínua, primeiramente efetuamos a divisão segundo o algoritmo de Euclides, exposto no quadro 19.

Quadro 19: Algoritmo de Euclides.

	3	**1**	**1**	**4**
32	9	5	4	1
5	4	1	0	

[72] O Algoritmo de Euclides pode ser utilizado para se determinar o m.d.c. entre dois números inteiros e para se determinar as soluções de uma Equação Diofantina Linear, dentre outras aplicações.

Os coeficientes a_i estão indicados como os quocientes da divisão euclidiana de **p** por **q**, ou seja: $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_3 = 4$, de modo que $\frac{32}{9} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}} = [3; 1, 1, 4]$.

A ideia básica não é exercitar a técnica de transformação de registro numérico em fração contínua, mas na percepção que uma fração contínua finita representa um número racional, e, por conseguinte, que uma fração contínua infinita representa um número irracional.

Rezende, W. (2003) destaca que é usual definir um número irracional por exclusão, ou seja, como um número real que não é racional, assim como definir o conjunto dos números reais pela reunião dos conjuntos dos números racionais e irracionais, que recai no problema da circularidade. A apresentação das frações contínuas evita estas duas situações.

No caso dos números irracionais, ilustramos a abordagem segundo as frações contínuas simples no caso particular de $\sqrt{2}$. De modo geral, podemos escrever $\sqrt{2} = 1{,}4142136 = 1 + \frac{1}{x_1}$. Ainda:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1},\ \textit{que racionalizado resulta}: x_1 = \sqrt{2} + 1.$$

Daí, $x_1 = \sqrt{2} + 1.$ *Como* $\sqrt{2} > 1$, *então*: $x_1 = \sqrt{2} + 1 = 1 + 1 + \frac{1}{x_2} = 2 + \frac{1}{x_2}$.

Assim: $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_2}}$.

De: $x_1 = \sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = x_1$.

Assim, por substituições sucessivas:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_2}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_3 + \ldots}}} = [1;2,2,2,2,\ldots] = [1;\overline{2}].$$

Este algoritmo exemplifica que esse número irracional tem representação infinita na forma de fração contínua simples periódica. Acredita-se que o uso de frações contínuas remonta aos séculos XVI, XVII e XVIII, porém há indícios que outros povos antigos, como os gregos, já tivessem rudimentos sobre esse tema.

Segundo Boyer (1991), Pietro Antonio Cataldi (1548-1626), de Bolonha, escreveu algumas raízes quadradas na forma de frações contínuas.

Um terceiro procedimento, também de natureza algébrica, para expressar o número $\sqrt{2}$ na forma de uma fração contínua, consiste em escrever a equação polinomial $x+1=\sqrt{2}$. Elevando-se ao quadrado ambos os lados, desenvolvendo o 1º membro e ordenando os termos em ‘x’ no 1º membro, tem-se: $(x+1)^2=2 \Rightarrow x^2+2x+1=2 \Rightarrow x^2+2x=1$.

O próximo passo é fatorar o 1º membro e isolar ‘x’, de modo que: $x^2+2x=1 \Rightarrow x(x+2)=1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2+x}$.

Deste modo, no denominador do 2º membro está presente a incógnita ‘x’, que novamente pode ser substituída, de modo recorrente, resultando a expressão em forma de fração contínua.

$$x=\frac{1}{2+x} \Rightarrow x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}} \Rightarrow x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}} \Rightarrow x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}}} \Rightarrow x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}.$$

Como $x+1=\sqrt{2}$, então:

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}} \Rightarrow \sqrt{2}=x+1=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}=[1;2,2,2,....]$$

Outro procedimento para expressar uma fração contínua é dado por Bombelli (séc XVI) e consiste no uso da expressão:

$$x=\sqrt{N}=\sqrt{a^2+b}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+.....}}}.$$

A demonstração, que utiliza argumentos possíveis a alunos de ensino básico, é descrita abaixo.

$$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+b}, tem-se: N=a^2+b \Rightarrow N-a^2=b \Rightarrow (\sqrt{N}-a).(\sqrt{N}+a)=b \Rightarrow (\sqrt{N}-a)=\frac{b}{\sqrt{N}+a}$$

Mas: $\sqrt{N}-a=\dfrac{(\sqrt{N}-a).(\sqrt{N}+a)}{\sqrt{N}+a}=\dfrac{N-a^2}{\sqrt{N}+a}=\dfrac{b}{\sqrt{N}+a}=\dfrac{b}{2a+\sqrt{N}-a}$.

De modo recursivo, tem-se:

$$\sqrt{N}-a=\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\sqrt{N}-a}}=\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\ldots}}}\Rightarrow\sqrt{N}=a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\cfrac{b}{2a+\ldots}}}.$$

Aplicando-se tal procedimento para representar $\sqrt{2}$ como fração contínua simples:

$$\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1}=1+\cfrac{1}{2.1+\cfrac{1}{2.1+\cfrac{1}{2.1+\ldots}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}=[1;2,2,2,\ldots]=[1;\overline{2}].$$

Outros números irracionais apontados neste texto são PI e o número de Euler, com uma possível expansão em frações contínuas simples dada por: $\pi=[3,7,15,1,292,1,1,1,2,\ 1,3,1,14,\ldots]$ e **e** = [1, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10,...].

Considerando-se o número $\pi=[3,7,15,1,292,1,1,1,2,\ 1,3,1,\ \ldots]$, apresentamos na tabela 17 alguns convergentes que ilustram alguns valores aproximados do número PI.

Tabela 17: Sucessão de convergentes de PI.

1º convergente	$c_1=3.$
2º convergente	$c_2=3{,}141592654=3+0{,}141592654=3+\frac{1}{7{,}062513285}=3\frac{1}{7}.$
3º convergente	$c_3=3{,}141592654=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}=3+\cfrac{1}{\frac{106}{11}}=3+\frac{11}{106}=3\frac{11}{106}=\frac{329}{106}.$
4º convergente	$c_4=3{,}141592654=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16}}=3+\cfrac{1}{\frac{113}{16}}=3\frac{16}{113}=\frac{355}{113}.$

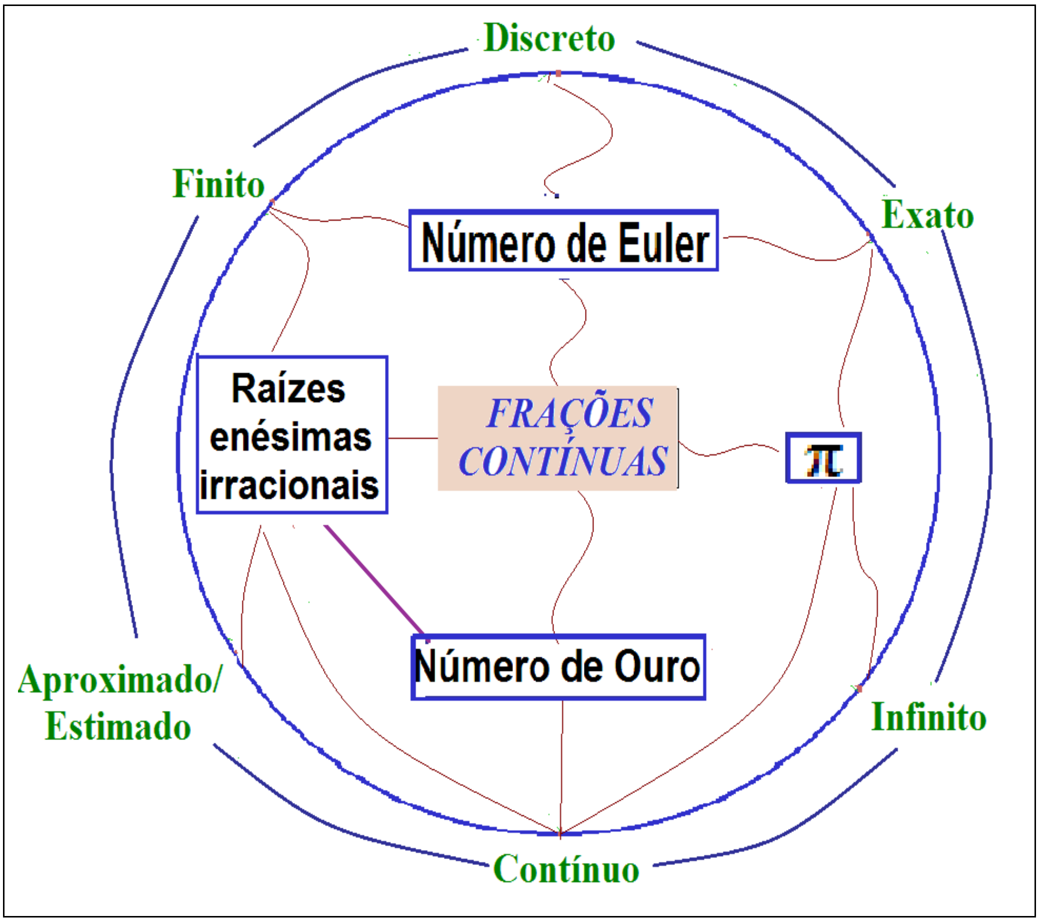
O segundo convergente representa uma aproximação do resultado de Arquimedes, apresentado usualmente em vários livros de história da Matemática. O quarto convergente é número de Meltius, citado anteriormente.

Na alusão metafórica a que havíamos nos referido em capítulos anteriores, delineada em Santos, B. (2007) e em Machado (2009), a concepção dos números reais como 'tema mapeador' do conhecimento envolvendo os números irracionais permitiu, numa escala reduzida, escolher dentre alguns temas mais pontuais do universo da Matemática, aqueles que funcionariam como 'temas articuladores'.

A exposição realizada possibilitou situar as frações contínuas como um possível ‘tema articulador’ para significar o conhecimento envolvendo os números irracionais. As situações propostas tornam esta abordagem complementar articuladora, pois se situaram numa escala plausível aos conhecimentos presentes no currículo de Matemática Elementar.

O potencial representado pelas frações contínuas como ‘tema articulador’ revela-se na possibilidade de expressar os números irracionais notáveis: o número de Euler; o número PI, a razão áurea e as raízes enésimas irracionais, conforme expressa o mapa 4.

Mapa 4: As frações contínuas como tema articulador no
‘Espaço de Significações dos Números Irracionais’.



O mapa 4 ilustra as frações contínuas como ‘tema articulador’ que permite ampliar as conexões para navegar na rede cujos nós são os conceitos matemáticos vigentes no atual currículo, o que favorece o movimento intradisciplinar.

Além da natural abertura intramatemática envolvendo o tema dos números irracionais, as frações contínuas possibilitam uma via de abertura para propostas de integração interdisciplinar, que passamos a exibir a seguir.

Duas situações envolvendo as Frações Contínuas e a questão das aproximações

Após a exploração das atividades que situaram relações intradisciplinares, nossa intenção foi ilustrar possibilidades do movimento interdisciplinar. A seguir, destacamos algumas situações que implicam no uso das aproximações em contextos diversos. Esta questão se constitui numa importante operação a ser desenvolvida no ensino básico, estando em estreita relação com as frações contínuas e, assim, reportando as tensões entre o conjunto dos números racionais e os números irracionais.

Um primeiro contexto que ilustra o quadro delineado remonta ao século XVI. O físico holandês Christiaan Huygens utilizou as frações contínuas para a construção de instrumentos científicos, e, em particular, elaborou um modelo reduzido do sistema solar. Para a construção do modelo mecânico necessitava das relações de transmissão entre as engrenagens, o que permitiria reproduzir as órbitas planetárias numa escala adequada para ser exposto numa sala de exposição.

Vamos re-editar o problema de determinar o modelo da órbita do planeta Saturno em relação ao Sol. Na época de Huygens, acreditava-se que o tempo necessário para o planeta Saturno orbitar o Sol era de 29,46 anos. Atualmente sabe-se que esse tempo é de 29,43 anos, valor que utilizamos para modelar este sistema, onde foram utilizadas duas engrenagens, uma com ‘x’ dentes e a outra com ‘y’ dentes, de modo que $\frac{x}{y} = 29{,}43$.

As primeiras aproximações racionais para a razão 29,43 são $\frac{29}{1}, \frac{59}{2}, \frac{206}{7}$. Este último valor permite uma escolha apropriada de engrenagens: 7 e 206 dentes. Esta escolha esta associada a aspectos práticos, pois, em termos operacionais, é difícil usinar engrenagens com um número muito pequeno ou muito grande de dentes[73].

Para verificar como obter estes valores utilizamos o procedimento aritmético.

O 1º convergente é dado por $c_0 = a_0 = 29$.

O 2º convergente é dado por $c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}$, ou ainda,

$$c_1 = 29 + 0{,}43 = 29 + \frac{1}{2{,}32558} = 29 + \frac{1}{2} = \frac{59}{2} \approx 29{,}5\,.$$

[73] Caso utilizássemos o valor 29,46 anos (relativo a época de Huygens) teríamos obtido $324/11$.

O 3º convergente é dado por:

$$c_2 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = 29 + \frac{1}{2{,}32558} = 29 + \frac{1}{2 + 0{,}32558} = 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} = \frac{206}{7} \approx 29{,}43.$$

O 4º convergente teria como resultado a fração $\frac{2737}{93}$, uma aproximação melhor que as anteriores, mas que resulta em número de dentes excessivo para esta aplicação.

Esta situação ilustra, de modo simples, alguns motivos pelos quais as frações contínuas representam a melhor aproximação de números irracionais em situações práticas, assim como indica uma alternativa para iniciar uma exposição deste assunto, em nível didático.

No ensino básico, a definição dos números irracionais como os números reais que não podem ser expressos por uma fração de números inteiros pode levar a simplificações e ao não entendimento pelo aluno do significado inerente aos irracionais.

Para ilustrar tal aspecto, passamos de um contexto astronômico a uma situação mais pragmática.

<u>Situação 1</u>: Um fabricante de relógios precisa produzir dois tipos de rodas dentadas na razão[74] $\sqrt{2}:1$. É impraticável que estas rodas tenham mais que 100 dentes. Encontre a melhor possibilidade para os números de dentes das rodas que irão aproximar a razão desejada. [Adaptado de Sanches; Salomão (2003)].

A Relação de transmissão, da coroa (engrenagem maior) para o pinhão (engrenagem menor), pode ser representada por $\frac{x}{y} = \sqrt{2}$, onde ‘x’ representa o número de dentes da coroa e ‘y’ representa o número de dentes do pinhão, com **‘x’** e **‘y’** inteiros positivos.

Para representar a raiz na forma de frações contínuas, a primeira solução que encaminhamos é o que denominamos procedimento aritmético. Este consiste em escrever, sequencialmente, os convergentes, até se obter uma fração que responda a questão, ou seja, que respeite a condição de contorno dada pelo limite de 100 dentes, para a engrenagem maior (coroa), conforme expresso no quadro 20.

---

[74] A escolha da razão $\sqrt{2}:1$ como variável didática foi a familiaridade da escola básica com este irracional, permitindo traçar um paralelo histórico com a Crise dos Incomensuráveis, além de viabilizar um tratamento numérico com valores de pequena ordem de grandeza. Poderíamos utilizar outros números irracionais, como o número PI, o número de Euler ou o número de ouro, ilustrados neste trabalho.

Quadro 20: Relação de convergentes para o problema das engrenagens.

.	Valor da relação entre número de dentes entre coroa e pinhão	Diferença
1º	$c_o = 1$	29,289 %
2º	$c_1 = \sqrt{2} = 1{,}4142136 = 1 + 0{,}4142136 = 1 + \dfrac{1}{2{,}4142136} \approx 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$	6,066 %.
3º	$c_2 = 1 + 0{,}4142136 = 1 + \dfrac{1}{2{,}4142136} = 1 + \dfrac{1}{2 + 0{,}4142136} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2{,}4142133}} \approx \dfrac{7}{5}.$	1,005%.
4º	$c_3 = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2{,}4142133}} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + 0{,}4142133}} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2{,}4142151}}} \approx 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}}} \approx \dfrac{17}{12}$	0,174 %.
5º	$c_4 = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2{,}4142151}}} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}}}} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{2}{5}}} \approx 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{5}{12}} \approx \dfrac{41}{29}$	0,029%.
6º	$c_5 = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}}}}} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{2}{5}}}} = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{5}{12}}} = \dfrac{99}{70}$	0,005%.

Um processo por tentativa poderia produzir uma aproximação do tipo $\sqrt{2} = 1{,}4 = \dfrac{14}{10} = \dfrac{7}{5}$, que recairia no 3º convergente e a aproximação $\sqrt{2} = 1{,}41 = \dfrac{141}{100}$, que extrapolaria a razão desejada.

O 6º convergente revela que o nº de dentes da coroa seria 99 e o do pinhão 70, com aproximação dada por 99/70 = 1,41429, o que proporciona uma diferença percentual muito pequena para uma situação pragmática de um par de engrenagens.

Observando-se a sequência de valores constituída pelas aproximações dos convergentes revela que a diferença percentual diminui e tende a zero. Levando-se este processo, por recorrência, cada convergente representa uma melhor aproximação que a anterior, o que situa a essência das aproximações: uma boa aproximação é aquela que sempre pode ser melhorada, correspondendo a uma necessidade pragmática ou em acordo com alguma acurácia desejada.

Deste modo, o uso dos convergentes das frações contínuas constitui um processo otimizador para determinar a relação de transmissão adequada às condições de contorno e, por conseqüência, estabelecer o melhor número de dentes do par de engrenagens para esta situação específica, que envolve conceitos acessíveis a alunos secundaristas.

Ao ser possível estabelecer uma série de convergentes – aproximações expressas por um número racional na forma fracionária – que delimitam uma sequência de truncamentos, as frações contínuas permitem um meio de acesso à natureza do número irracional.

Um ramo que utiliza as aproximações de números irracionais por racionais é a astronomia. Um problema interessante está apresentado a seguir.

> Situação 2: No final de agosto de 2003, tivemos a melhor ocasião para observar o planeta Marte em relação ao próprio século XXI. Marte esteve em oposição ao Sol em 28 de agosto e, no dia anterior, na sua menor distância à Terra dos últimos 60.000 anos! Seu brilho excepcional superou, nessa ocasião, o de todas as estrelas do céu noturno. Essa oposição repetiu, em condições muito mais favoráveis, a oposição de 23 de agosto de 1924, quando Marte esteve a 55,78 milhões de quilômetros da Terra [Adaptado de Varella (2006)]. É possível prever qual será a ocasião seguinte em que tal fenômeno ocorrerá? Justifique.

Essa situação necessita de explicações envolvendo a geometria das possíveis posições entre o Sol, a Terra e Marte, ilustradas na figura 47. As órbitas elípticas dos planetas foram aproximadas a circunferência e consideradas coplanares (a excentricidade da maioria dos planetas do Sistema Solar é próxima a unidade, com exceção de Mercúrio e do atualmente rebaixado Plutão). O termo oposição, segundo Varella (2006), em Astronomia, revela uma situação que indica o alinhamento do Sol, da Terra e de Marte, nessa ordem, sendo uma posição onde ocorre a menor distância do planeta em relação a Terra.

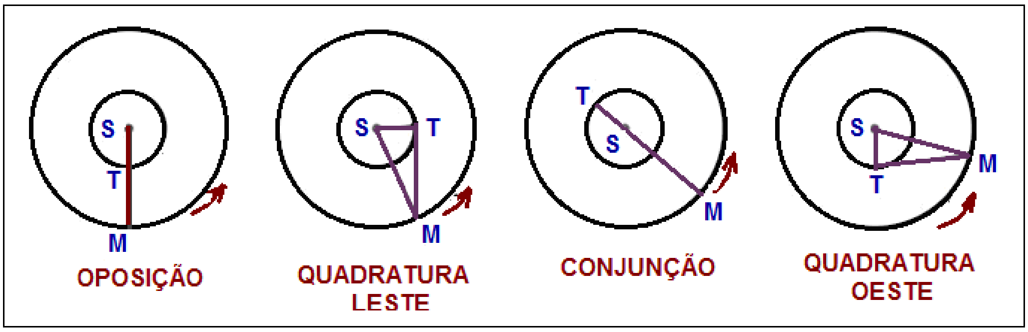


Figura 47: As quatro posições relativas dos planetas Terra e Marte [Fonte: Varella, (2006)].

O período sinódico (S), do grego synodikós**,** é o intervalo de tempo decorrido entre duas configurações iguais consecutivas, quando um astro reaparece no mesmo local, em relação ao astro da órbita mais interna. Este período é denominado revolução aparente do astro (Marte), em relação ao astro de referência (Terra).

Em contrapartida, o período sideral é o intervalo de tempo que um astro percorre uma órbita completa em torno de outro, tendo como referência as estrelas fixas. É o período real de translação de um astro, relativamente a uma estrela fixa, como o Sol.

Deste modo, o período sinódico difere do sideral pelo fato de haver o movimento de translação do astro em relação a estrela fixa. Por exemplo, no caso do sistema Terra/Lua, a Lua tem um período sideral de 27,3 dias e um período sinódico de 29,5 dias. O período sinódico da lua é o mês lunar, que corresponde às observações das fases da Lua, que deram origem aos calendários lunares e luni-solares.

De modo mais generalizado, considere dois planetas, A e B, sendo que o planeta B está em oposição em relação a um observador posicionado no planeta A (figura 48). O planeta A possui maior velocidade orbital, ou seja, move-se mais rápido por estar viajando numa curva de menor valor de raio orbital, de modo a possuir um período de revolução menor.

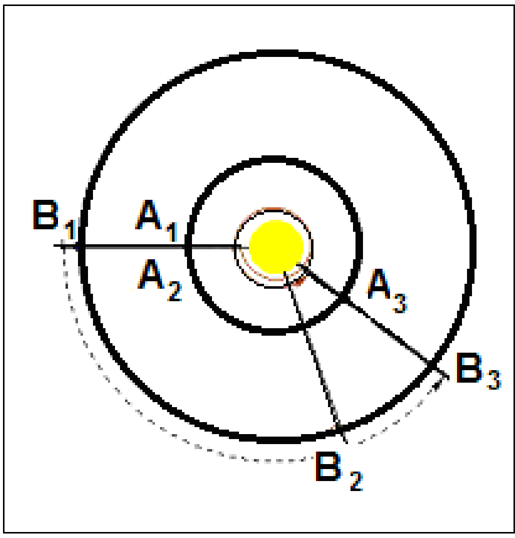


Figura 48: Oposição entre dois planetas A e B [Fonte: OLIVEIRA FILHO; SARAIVA, (2003)].

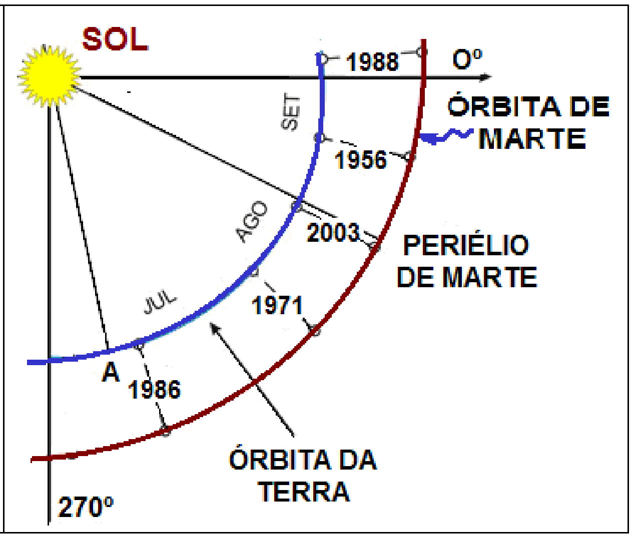


Figura 49: Periélios recentes da órbita de Marte em relação a Terra. [Fonte: Varella, (2006)].

No início, os planetas A e B encontram-se em oposição em relação ao Sol (posições A_1 e B_1). Considerando-se a primeira revolução do planeta A em torno do Sol (A_1=A_2), o planeta B terá uma posição genérica B_2, distinta da reta suporte que liga o Sol e B_2.

Continuando o movimento orbital, o planeta A terá uma nova oposição com o planeta B, como ilustrado na posição A_3B_3. Para efeito de simbologia, vamos considerar o período sideral dos planetas (P_i: período sideral do planeta interno e P_e: período sideral do planeta externo) e o período sinódico (S), que é o mesmo para os dois astros.

Considere que em um dia o planeta interior move-se $\frac{360^o}{P_i}$ e o planeta exterior percorre $\frac{360^o}{P_e}$. Assim, após um dia, o planeta interior terá avançado um ângulo de $\frac{360^o}{P_i} - \frac{360^o}{P_e}$, em relação ao planeta exterior. Esse ganho é equivalente ao período sinódico, ou seja, $\frac{360^o}{S} = \frac{360^o}{P_i} - \frac{360^o}{P_e} \Rightarrow \frac{1}{S} = \frac{1}{P_i} - \frac{1}{P_e}$.

No caso particular do sistema Terra/Marte[75], sabe-se que Marte leva cerca de 780 dias para nascer quando o Sol se opõe duas vezes seguidas, ou seja, para estar em oposição com a Terra. Para comprovar-se o valor deste período, levamos em consideração que a Terra apresenta período sideral P_T = 365d 6h 09m 10s ou aproximadamente 365,256363 dias e Marte P_M = 686,979852 dias. O período sinódico de Marte será calculado através da expressão:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P_T} - \frac{1}{P_M} = \frac{1}{365,256363} - \frac{1}{686,979852} \rightarrow S = 779,936\ 096\ dias.$$

Entretanto, observou-se que duas oposições consecutivas não ocorrem nos mesmos pontos de suas órbitas. A figura 49 apresenta as mais recentes posições com relação a posição do periélio de Marte em relação à Terra.

No caso do sistema Terra/Marte, as oposições ocorrem em 2 anos, 15 anos, 32 anos, 47 anos, dentre outras. Representamos, no quadro 21, os cálculos relativos às posições que podem ser observadas na figura 48.

Quadro 21: Valores relativos as posições do periélio de Marte em relação à Terra.

Ano	**Diferença em relação a 2003**	**convergente**
1956	2003 – 1956 = 47 anos.	**47**/22
1971	2003 – 1971 = 32 anos.	**32**/15
1988	2003 – 1988 = 15 anos.	**15**/7

[75] Para visualizar o sistema Marte/Terra, há uma simulação da oposição no site http://astro.if.ufrgs.br/p1/node3.htm.

O quadro 21 mostra que as diferenças em relação ao período de 2003 são os denominadores dos convergentes, que relacionam as observações do fenômeno com as melhores aproximações, indicando a melhor estimativa para a questão proposta.

Em decorrência das análises realizadas, encaminhamos a resolução com foco na determinação em qual seria a próxima oposição do planeta Marte (em relação a 2003).

Considerando-se que o período sideral da Terra é cerca de $P_T = 365{,}256363$ dias (tempo que a Terra retorna ao mesmo ponto de sua órbita) e para Marte o período sinódico é $S = 779{,}936096$ dias, então, dado que ocorreu uma oposição, as próximas ocasiões nos mesmos pontos de suas órbitas ocorrerão num intervalo de tempo que seja um múltiplo comum de P_T e S. Assim, o problema consiste em determinar dois números inteiros **m** e **n** que satisfaçam a seguinte relação: $m.S = n.P_T$, ou seja, $m.779{,}936\,096 = n.365{,}256\,363$, o que aproximadamente resulta $n/m = 2{,}135311146$. Para obter os inteiros **m** e **n,** faz-se uso do método das frações contínuas, conforme o quadro 22.

Quadro 22: Algumas relações (reduzidas) entre as oposições Marte/Terra.

convergente	Valor da aproximação
1º	$c_0 = 2{,}135311146 = 2 + 0{,}135311146 = 2.$
2º	$c_1 = 2{,}135311146 = 2 + 0{,}135311146 = 2 + \frac{1}{7{,}390374182} \approx 2 + \frac{1}{7} = \frac{15}{7}.$
3º	$c_2 = 2{,}135311146 = 2 + \frac{1}{7{,}390374182} = 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\mathbf{2}{,}561644814}} = 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2}} \approx \frac{32}{15}.$
4º	$c_3 = 2{,}135311146 = 2 + \frac{1}{7{,}390374182} = 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{\mathbf{2} + \frac{1}{1{,}780484703}}} = 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{3}} \approx \frac{47}{22}$
5º	$c_4 = \frac{79}{37}.$

Tendo como suporte as observações destacadas na figura 49 e sintetizadas no quadro 21, é razoável se considerar $\frac{S}{T} = \frac{n}{m} = \frac{79}{37}$ e supor como 2082 (2003 + 79 = 2082) como uma data para a próxima repetição do fenômeno.

O calendário gregoriano não utiliza o período sideral da Terra, mas o período do retorno das estações do ano, que tem o valor médio e aproximado de 365,25 dias para o ano. Assim, o período de 79 anos corresponde a aproximadamente 79 x 365,25 dias = 28.854,75 dias.

Para os 37 períodos sinódicos de Marte tem-se 37 x 779,936096 dias = 28.857,63555 dias, que corresponde a uma pequena diferença de aproximadamente 2,9 dias do nosso calendário. Com estes dados pode-se prever a próxima oposição, que deverá ocorrer em agosto de 2082.

Esta situação, proposta num contexto de um fenômeno em astronomia, utiliza recursos de simples conceituação: considerações elementares do campo da Geometria, o conceito de múltiplos, o cálculo operatório com frações; o conceito de melhor aproximação dado pelo recurso as frações contínuas, representando um elo entre as representações de números inteiros e os números irracionais envolvidos.

Complementando essas considerações ao apresentarmos duas situações envolvendo as frações contínuas e a questão das aproximações, nossa intenção foi ilustrar a articulação e conexão de elementos intramatemáticos e interdisciplinares. Tais situações enriquecem o papel da Matemática, ao valorizar tanto os aspectos técnicos, considerando-se que as operações usuais com frações de números inteiros apresentam poucas opções de fácil acesso aos alunos como veículo de ilustração das ferramentas que o meio científico utiliza, assim como pela possibilidade de destacar o papel semântico.

Nesse sentido, as frações contínuas fornecem as melhores aproximações e, nos dois casos tratados neste texto, permeiam uma série de explicações envolvendo uma relação pragmática entre o número de dentes de um dispositivo simplório (as engrenagens), até as instigantes manifestações celestes presentes num fenômeno natural que remonta a séculos da criação de nosso sistema solar, fatos que poderão articular projetos ou situações interdisciplinares de aprendizagem nos meios escolares.

CONSIDERAÇÕES FINAIS
&
EXPECTATIVAS FUTURAS

CONSIDERAÇÕES FINAIS/ EXPECTATIVAS FUTURAS

Passamos a delinear as conclusões deste trabalho, situando e finalizando as reflexões desenvolvidas sobre os números irracionais, objeto de ensino em nível básico.

Inicialmente retomamos o percurso realizado por esta investigação para verificar o movimento dos números irracionais no ensino básico, como saber a ser ensinado. Escolhemos como ponto de partida evidenciar o modo como este tema se encontra registrado e desenvolvido em algumas coleções de livros didáticos do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio.

A busca empírica teve como indicador o discurso presente nas manifestações dos manuais escolares. Este recurso didático buscou as evidências do uso da palavra escrita como elemento de mediação e comunicação do conhecimento matemático entre o sistema de ensino e a pessoa do professor e do aluno.

Com base em Bakhtin (1986), consideramos que o discurso expresso nos livros didáticos pode ser analisado, pois se constitui num ato de fala impresso, um elemento da comunicação e de expressão de idéias.

Para compreender e analisar o modo subjetivo presente na mediação que perfaz o livro didático consideramos Aguiar (2002), que se inspirou no referencial de Vygotsky (1998a; 2001). Esta autora discorre sobre a necessidade de apreender os elementos ou conteúdos do discurso, observando o não-observável ou o não-explicitado. Fundamentando nas ideias presentes em Vygotsky (1998a, 2001), o modo de investigação que a autora propõe considera as palavras/signos como essência para se constituir a subjetividade do sujeito do discurso.

> Para compreender a fala de alguém não basta entender suas palavras; é preciso compreender seu pensamento [...], é preciso apreender o significado da fala. O significado é, sem dúvida, parte integrante da palavra, mas é simultaneamente ato do pensamento, é um e outro ao mesmo tempo, porque é a unidade do pensamento e da linguagem (AGUIAR, 2002, p.130).

Baseando-se na metodologia dos núcleos de significação, descrita em Aguiar e Ozella (2006), constatamos que, no discurso dos conteúdos disponibilizados nas coleções de livros didáticos do ensino básico prevalece uma polarização na apresentação dos temas envolvendo os números irracionais. Nas obras analisadas, o percurso de exposição didática se situa em um dos pólos – empírico ou teórico – com parcas ou mesmo sem mútuas conexões.

Com relação ao discurso polarizado no modo pragmático, manifestado em algumas coleções, a apresentação dos temas envolvendo os números irracionais é realizada pela exposição de algumas situações e exemplos particulares. Depois de esgotadas as possibilidades de um tipo de discurso situado no viés pragmático e inserido em determinados contextos particulares, a generalização conceitual dos livros didáticos analisados encerra breves citações, sem aproveitar o mote inicial para realizar um aprofundamento semântico.

Esse viés pragmático representa uma solução de continuidade da exposição usual de apresentação dos números racionais, nas séries anteriores. Naturalmente, para os números racionais esta opção pragmática se viabiliza, em parte, pela própria natureza do assunto. Porém, no caso dos números irracionais – um conceito teórico – o repertório inicial do discurso pragmático rapidamente se esgota e o encaminhamento seqüencial realiza um salto didático para o conceito teórico, dos exemplos para a definição e para a operacionalização, permanecendo neste lado da via durante o restante da jornada, o que inviabiliza modos de compreensão do tema dos números irracionais.

Pela via oposta, as demais coleções iniciam a apresentação dos números irracionais por um viés teórico, por meio de definições e conceitos, expressas na peculiar sintaxe matemática. No decorrer do texto, a exposição dos manuais escolares propõe uma série de exercícios de aplicação imediata, embasada nos números como ferramenta operatória para cálculos de natureza aritmética e manipulações algébricas, privilegiando assim aspectos sintáticos, em detrimento dos aspectos semânticos.

Consideramos que a abordagem teórica provoca um verdadeiro conflito entre a cultura do pragmático, estabelecida pelos textos de Matemática Elementar que transitam nos ciclos I, II e III do Ensino Fundamental e a corrente de autores que defendem a abordagem dos objetos matemáticos através da concepção formal. Esse choque de culturas promove um descompasso na aprendizagem da Matemática, acentuando a crença errônea que os números racionais são passíveis de construção, porém os números irracionais não o são, algo que não concordamos.

As coleções que promovem uma apresentação teórica parecem acreditar na impossibilidade de uma construção significativa dos números irracionais, pela própria natureza teórica do tema. Este fator representa uma dificuldade adicional em relação aos livros com viés pragmático, pois há uma tendência mínima ou mesmo nenhuma preocupação em estabelecer relações com a realidade mais próxima dos sentidos imediatos, o que restringe a possibilidade de significar tal tema.

Em síntese, o discurso presente nos manuais escolares indica a ausência de modos de intercâmbio entre o pragmático e o teórico. A polarização por um desses extremos, revelada na análise realizada junto aos livros didáticos, simplifica e dificulta possíveis contribuições no tocante a aspectos que permitam a compreensão de ideias e conceitos fundamentais da Matemática.

O contexto de aprendizagem envolvendo a construção de significados para os números irracionais requer um campo de referências mais intrincado do que efetivar a transferência do discurso matemático por uma das vias de mão única: definir/exemplificar/operar ou exemplificar;contextualizar/definir/operar.

Em ambas as opções unilaterais – pelo viés empírico ou através da exposição teórica – há a valorização de aspectos operatórios, finitos, exatos e determinísticos, o que equivale a estabelecer a predominância da técnica sobre o significado. Esta prevalência no discurso presente na grande maioria dos livros didáticos são concepções que não permitem caminhar para desvelar e mapear uma construção significativa do conhecimento matemático e, em particular, pouco contribuem para a apresentação e o desenvolvimento dos aspectos essenciais e semânticos da concepção, estrutura e natureza do tema dos números irracionais no ensino básico.

Não é suficiente para os livros didáticos somente definir os números irracionais, apresentar alguns exemplos numéricos e realizar um tratamento matemático operatório em exercícios e problemas de aplicação imediata, na esperança que estes elementos ou seqüência de discurso componham um quadro didático com abrangência suficiente para tecer um entorno significativo para o trabalho deste conhecimento em sala de aula.

No contexto das teorias formais[77] a definição é passo fundamental para inicializar o processo de caracterização de um objeto matemático. Porém, no campo educacional a situação é mais elaborada, o que exigiu uma reflexão dos diversos fatores envolvidos.

Atualmente não faz mais sentido privilegiar somente um momento para apresentar e designar um objeto matemático. A intenção da construção do conhecimento requer que um "[...] conceito está permanentemente em fase de construção e, nessa mesma construção encontra-se a parte mais problemática e, consequentemente mais rica do seu significado" (D'AMORE, 2005, p. 46).

---

[77] Uma teoria formal "[...] consta de termos primitivos, regras para formação de fórmulas a partir deles, axiomas ou postulados, regras de inferências e teoremas" (MACHADO, 1994, p. 30).

Um pressuposto que permeia a comunidade acadêmica na área de Educação é que a aprendizagem de um objeto:

> [...] matemático é muito mais amplo do que a sua definição, não é uma ação localizada como a expressão ou um registro lingüístico. É necessário recorrer a outros conceitos e teorias que podem revelar novos saberes que o aluno deve aprender que a definição não é capaz de expressar, [ou seja,] conceituar exige muito mais do que apenas definir (SOUTO, 2010, p. 38).

De modo geral, as análises reveladas nas coleções de livros didáticos envolvem um saber-fazer sem uma compreensão mais ampla, sem qualquer explicitação ou reflexão do que se faz. Este *modus operandi* traz no bojo a crença, ainda presente atualmente no sistema educacional brasileiro, que se deve inicialmente treinar a técnica, e, tão somente a partir do domínio da técnica, seria possível realizar um trabalho para designar os significados dos objetos.

Esses materiais didáticos se assemelham ao que Machado (1990) denomina de metáfora do usuário. Ao leitor caberia apenas utilizar a Matemática como um saber fazer, sem a necessidade de atribuição de significados às ações que executam.

> Existe um consentimento disseminado quanto ao tratamento da Matemática como um assunto cujo significado não é facilmente apreensível para a maioria das pessoas, o que abre caminho para que se estabeleça, sempre que possível, certo distanciamento voluntário ou então uma resignação à condição de usuário. Muitas das dificuldades com o ensino desta disciplina parecem decorrer de tal resignação (MACHADO, 1990, p. 115).

Para delinear um percurso que permita significar os números irracionais no ensino básico é necessário fundamentar um trabalho didático que considere tanto os aspectos sintáticos quanto os semânticos, numa negociação que evite polarizar um dos extremos.

Emprestamos de Vygotsky (1998a, 2001) referencias que permitiram esclarecer a importância e transportar para o universo da Matemática o pareamento entre as peculiares manifestações sintáticas dos registros matemáticos em conjunção com os aspectos semânticos. Esse posicionamento situa o pensamento e a linguagem como fios condutores que confluem para a constituição de níveis de transição entre o pragmático e o teórico, de modo a se viabilizar caminhos para o ato de significar os números irracionais, algo raramente explorado nos manuais escolares analisados.

Para Vygotsky (1998a), o significado se constitui nas interações entre o meio e o ser humano, sendo a palavra o instrumento que articula e expressa o pensamento, aprimorando o desenvolvimento da linguagem, que dialeticamente provê significado às palavras.

O autor destaca a importância da palavra para além da simples dicionarização, remetendo a formação de conceitos, um meio específico e original do modo de expressão do pensamento.

> O conceito é impossível sem palavras, assim como o pensamento em conceitos é impossível fora do pensamento verbal; em todo esse processo, o movimento central, que tem todos os fundamentos para ser considerado causa decorrente do amadurecimento de conceitos, é o emprego específico da palavra, e o emprego funcional do signo como meio de formação de conceitos (VYGOTSKY, 2001, p. 170).

A importância da palavra como meio de ascensão aos significados é retomada por Machado (1990), ao discutir as relações entre a Matemática e a Língua Materna. Para o autor, a fala é uma característica marcante da natureza humana e que acrescenta uma dupla função para a palavra: a manifestação/expressão do eu e a comunicação com o(s) outro(s). A língua consiste num sistema de signos que exprimem ideias, tendo como função expressar e comunicar.

> O que importa, de fato, é a consideração do amálgama comunicação-expressão [...] englobando o desenvolvimento da capacidade de descrever o mundo, mas também de interpretar, criar significados, imaginar, compreender e extrapolar (MACHADO, 1990, p. 92).

Novamente com relação ao livro didático, a palavra inserida num discurso vivo e com significado apresenta várias possibilidades de caminhos, inserindo o leitor numa jornada, sem necessariamente conduzir por determinadas rotas, mas levando-o a refletir sobre alternativas e modos diversos, incentivando e indicando fontes de referências e pesquisas, para abrir novos canais de expressão e de comunicação.

Um livro deve proporcionar modos para o leitor pensar. Raths et al. (1977) atenta para uma crença no ensino onde o aluno deve em primeiro lugar aprender os fatos para depois ser solicitado a pensar a respeito. Porém, muitas situações e problemas se tornam significativas quando as operações de pensamento são acessadas, pois “[...] pensar é uma forma de aprender. Pensar é uma forma de perguntar pelos fatos, e se o pensamento tem algum objetivo, os fatos assim encontrados serão significativos para esse objetivo” (RATHS et al., 1977, p. 15).

Estas considerações nos levam a crer que um livro que não explicita as diversas possibilidades de apresentar ou introduzir um tema restringe ou limita a capacidade lingüística de comunicação-expressão de ideias. Isto tem como conseqüência que a responsabilidade de interpretação passa a ser tarefa do leitor.

Esse papel de interpretante se torna árduo para um leitor iniciante, como os alunos do Ensino Fundamental, com pouca autonomia e vivência para suprir as lacunas textuais. E se considerarmos alguém já habituado com uma determinada interpretação textual ou discurso, como os alunos do Ensino Médio, a apresentação limitada de comunicação-expressão dos manuais escolares cria uma barreira para tecer uma rede de significados aos conhecimentos matemáticos.

A partir da análise crítica do discurso presente no livro didático, encaminhamos referenciais teóricos de suporte para constituir modos de significar a apresentação e desenvolvimento dos números irracionais no ciclo básico.

A apreensão de significados através da palavra pela área de Matemática muito tem a ganhar com uma área correlata: a Língua Materna. Nesta vertente "[...] o ponto de partida são as unidades da primeira articulação – as palavras – prenhes de significações" (MACHADO, 1990, p. 109).

Mas a palavra com significado é ponto de partida, não contendo a totalidade. Por significação, Bakhtin (1986) compreende os elementos abstratos da enunciação que são reiteráveis e idênticos cada vez que são repetidos, ou seja, fundados sobre convenções e, portanto, dicionarizáveis. O objetivismo favorece arbitrariamente a unicidade, a fim de prender a palavra em uma acepção dicionarizada.

> A medida que a linguagem se desenvolveu [...] as significações começaram a estabilizar-se segundo as linhas básicas e mais freqüentes na vida da comunidade para a utilização temática dessa ou daquela palavra (BAKHTIN, 1986, p. 130).

Para 'soltar a palavra' é preciso apreender os elementos do texto, promovendo uma rede de conexões para abranger a totalidade de significações do discurso.

> Etimologicamente, texto é tecido; reporta-se à antiga técnica de tecer. O que justifica a propriedade da metáfora têxtil, aplicada ao signo textual, está longe de ser a hierarquia dos 'fios'. O ponto de analogia é antes a ação de combinar, de enredar, de construir redes de relações cuja somatória resulta no tecido. Do ponto de vista etimológico, nada impede que diferentes códigos estejam relacionados numa mesma combinação textual capaz de exprimir uma unidade significativa da cultura. O texto surge, assim, como um produto cultural híbrido, que une diferenças, em vez de separá-las. O que importa é a capacidade de significar e não os elementos que, enredados, levam a significação (MACHADO, I., 1999, p. 42).

Em face das polarizações efetivadas pelos livros didáticos, que não permitem enraizar os significados dos números irracionais, contrapomos neste trabalho a necessária demanda para a tessitura de meios de negociação e transição entre a abordagem empírica e a teórica.

As deliberações acima permitiram situar um ‘espaço de significações’ para os números irracionais, um campo onde os signos próprios da Matemática se articulam com a ascensão da palavra inserida em múltiplas conexões dentro do discurso matemático, que vai além da simples definição e operacionalização de um conceito matemático.

Deste modo, para se criar modos de promover a confluência entre a técnica e o significado, inicialmente inserimos a questão num ponto de vista do aprimoramento da relação entre a Matemática e a Língua Natural, ou seja, entre os signos específicos da Matemática e a pluralidade de expressão e comunicação que naturalmente a palavra possui.

Esta relação se complementa na medida em que a Matemática e a Língua Materna “[...] constituem sistemas de representação, construídos a partir da realidade e a partir dos quais se constrói o significado dos objetos, das ações, das relações. Sem eles, não nos construiríamos a nós mesmos enquanto seres humanos” (MACHADO, 1990, p. 83).

Outro fator que agregou elementos para significar os números irracionais como saber matemático no ensino básico foi encontrado no campo histórico-cultural. Brolezzi (1991, 1996) destaca a importância do entendimento do movimento histórico para que seja possível situar abordagens que componham um quadro estruturador de um trabalho didático na Matemática a ser ensinada.

A análise dos elementos presentes na movimentação e constituição histórica do conhecimento dos números irracionais e dos números reais revelou um natural entrelaçamento entre esses campos. Este olhar norteou a hipótese de que os elementos constituintes da epistemologia dos números reais se constituem em aporte para embasar uma abordagem mais esclarecedora e significativa do conhecimento dos números irracionais no ensino básico.

A referência ao campo da epistemologia permitiu entender o surgimento, a evolução e a natureza dos campos numéricos constituintes dos números reais: os Números Racionais e os Números Irracionais. Os aspectos dicotômicos presentes no campo dos Números Racionais e dos Números Irracionais, resolvidos do ponto de vista do conhecimento matemático, perpassam uma vivência problemática nos diversos anos do ensino da Matemática Elementar, dificuldades indicadas neste trabalho através das expressões presentes no discurso dos manuais escolares.

O conjunto dos Números Racionais apresenta uma abordagem pragmática no Ensino Fundamental, de modo similar ao que ocorreu no percurso de desenvolvimento histórico-cultural deste campo. De modo oposto, os números irracionais essencialmente desfrutam de uma natureza teórica, originando um descompasso com a essência pragmática dos racionais.

Para a compreensão dos elementos constituintes e fundamentais que estão no âmago de uma abordagem significativa dos números irracionais, tecemos considerações em relação à importância dos fundamentos dos eixos constitutivos dos números reais - discreto/contínuo; finito/infinito; exato/aproximado - relatados em Machado (2009).

A consideração das tensões e composições inerentes a cada par de eixos constituintes dos números reais, complementares por natureza, permitiu caracterizar um 'espaço de significações', um campo onde as ações advindas do movimento dialético entre os eixos norteadores guiam e organizam interações que viabilizam diversos caminhos para explicitar e compor uma tecitura de significados dos conhecimentos relativos aos números irracionais, favorecendo várias relações interiores e exteriores a Matemática.

A consideração de aspectos históricos, epistemológicos e didáticos envolvendo os números irracionais e reais permitiu explorar diversos feixes de relações, inseridos na concepção do conhecimento como rede de significações. Para Machado (1995), o conhecimento não se acumula em determinado objeto, mas agrega valor pela dinâmica expressa no feixe de relações que podem ser constituídas no entorno do referido objeto.

Nesta metáfora proposta por Machado (1995), as redes são constituídas por nós, de onde saem novas ligações que possibilitam diversos percursos. A apreensão de um conhecimento ocorre pelas possibilidades de caminhos, pelas relações estabelecidas e pelo enriquecimento do repertório de compreensão, que conduz a uma significação dos objetos que compõe a rede, não somente por justaposição de conhecimentos, mas pela possibilidade de propiciar a complementaridade, a proximidade, a mobilidade e o enriquecimento dos assuntos tratados. Deste modo, novas relações são estabelecidas, os conhecimentos emergem destas relações e circulam em diversas representações, conectados às concepções historicamente desenvolvidas.

Os referenciais teóricos propostos neste trabalho serviram de embasamento e orientação para a elaboração de situações de ensino, descritas no capítulo 3. Estas propostas objetivaram exemplificar algumas formas, de uma gama variada de possíveis modos de abordar e significar o conhecimento proposto para o ciclo básico.

Vale destacar que nossa intenção, com as situações apresentadas no capítulo 3, não é instituí-las como modelo ou sequenciamento de exposição, nas diversas séries escolares. Antes, o objetivo de evidenciar tal conjunto de atividades é elucidar alguns modos de abordagem dos referenciais teóricos expostos no capítulo 2.

Com relação à escolha dos números irracionais mais destacados – o número PI, o número de Euler e o número de ouro – esta opção não esgota outras possibilidades de abordagens interessantes. Existem também diversos números irracionais possíveis de serem tratados no ensino básico: a constante de Liouville[78], a constante de Euler-Mascheroni[79], $\xi\,(2)$ [80] e a constante de Apéry[81], dentre outros.

O repertório temático optado para exposição no capítulo 3 constituiu alguns dos possíveis percursos de significação dos números irracionais. Existem outros modos de tecitura de significados, que podem ser abordados dependendo do momento de exposição dos conteúdos da grade curricular, das diretrizes e projetos das inúmeras escolas, assim como dos interesses e possibilidades de desenvolvimento dos alunos.

As relações possíveis de serem tecidas, numa escala reduzida, permearam um micro-espaço de possibilidades em torno de determinada temática dos números irracionais. Este contexto pode ganhar amplitude se forem considerados os aspectos presentes na dialética dos pares finito&infinito; exato&aproximado; discreto&contínuo.

As possíveis conexões entre os eixos norteadores, explicitadas no capítulo 2, serviram de referência para estimular e reativar motivações surgidas no decorrer do desenvolvimento histórico dos números irracionais, de modo a ampliar o ‘percurso de significações dos números irracionais’, gerando um macro-espaço de significações, se considerarmos uma escala mais abrangente.

Os aspectos presentes na dialética dos eixos constitutivos dos números reais - finito&infinito; exato&aproximado; discreto&contínuo - serviram de embasamento a fim de estimular e reativar motivações surgidas no decorrer do desenvolvimento histórico dos números irracionais.

---

78 A constante de Liouville representa um número irracional expresso por $\alpha = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{24}} + \frac{1}{10^{120}} + ...$

79 Segundo Figueiredo (1985), a constante de Euler-Mascheroni é uma sequência que converge para o irracional $\varsigma\,(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \log\, n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n-1} - \log n = 0{,}577.....$

80 Segundo Figueiredo (1985), este irracional é dado por $\xi\,(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$

81 Alves (1999) destaca que a constante de Apery é um número irracional dado por $\varsigma\,(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + ...$ e de valor decimal $\xi\,(3) = 1{,}20205\ 69031\,59594\,28539\ ......$

A elaboração da atividade relativa ao número PI no capítulo 3 inspirou-se na possibilidade de destacar o que representa um processo de aproximação, processo elucidado a partir da história do conhecimento dos números irracionais. Esta concepção remonta a possibilidade de “[...] em vez de identificar π simplesmente com o valor racional 3,14, o aluno poderia desenvolver outros procedimentos de aproximação, percebendo, através destes, as dificuldades intrínsecas a problemática do número irracional” (REZENDE, W., 2003, p. 331).

Outro aporte fundamental na concepção da referida atividade foi explicitar as relações de aproximações envolvendo a razão de números inteiros pelos diversos povos antigos. Os números irracionais, surgidos na ‘Crise dos Incomensuráveis’ são expostos no trabalho de Euclides, que utiliza processos de:

> [...] aproximações por valores racionais, fazendo uso simultaneamente de seqüência de valores inferiores quanto de seqüência de valores superiores a medida do segmento incomensurável. Tal procedimento influenciou R. Dedekind (1872), conforme revelou o próprio matemático alemão, na elaboração de sua teoria dos números reais a partir de ‘cortes’ de números racionais (REZENDE, W., 2003, p. 91).

As situações envolvendo o ‘número de ouro’ e ‘o número de euler’ foram motivadas para situar a relação empírico&teórico de modo mais abrangente. Nos livros didáticos os números irracionais ficam basicamente associados à localização de alguns valores de destaque na reta real, numa associação geométrica, detendo certo prejuízo a outras áreas da matemática. Nesse sentido, há relato com relação ao prejuízo da aritmética, que tem influência na noção fundamental do número.

> Excetuando os números naturais, que são construídos a partir do problema histórico da contagem, os demais (inteiros, racionais e irracionais) estão associados à ‘construção da reta numérica’. Os números reais são dessa forma uma ‘medida’ na reta numérica, e as suas representações decimais ou são finitas ou são ‘aproximadas’: $\pi = 3{,}14$; $\sqrt{2} = 1{,}4$ etc. Assim, os números irracionais continuam no processo pedagógico, tal como em seus tempos de outrora, ‘nebulosos’, ‘surdos’, números que ‘não dizem nada’ e que não possuem uma posição na reta numérica – ‘estão sempre andando na reta’. Sua existência é assumida apenas potencialmente no universo da ‘matemática abstrata’ (REZENDE, W., 2003, p. 329).

Nas situações tematizadas no ‘número de ouro’ e no ‘número de euler’ optamos por percursos que compreendiam idas-e-vindas no entorno do pragmático&teórico, explorando a interação entre as diversas linguagens matemáticas – aritmética, algébrica, gráfica, funcional, reta numérica, textual, simbólica, geométrica, computacional – e que incluíram a possibilidade de demonstrações, fazendo uso de argumentação e discurso acessíveis a alunos secundaristas.

De modo geral, as situações de ensino apresentadas situaram e articularam conhecimentos presentes no atual currículo de matemática, o que revalorizou inúmeras relações que se encontram presentes na epistemologia dos assuntos, fato geralmente não observado nos manuais escolares analisados. É usual no ensino apresentar os conhecimentos matemáticos como se fossem departamentos autônomos, sem maiores interligações conceituais.

A proposta em apresentar temas envolvendo os números irracionais articulou e abrangeu diversos conhecimentos situados no próprio território da Matemática. Essa visão intradisciplinar permeada pela rede de relações estabelecidas permitiu valorizar a Matemática e a possibilidade desta mapear temas interessantes, motivadores e revitalizadores do próprio campo de domínios.

Com relação às contribuições delineadas, os números reais possuem uma essência que articula e revela nuances do próprio mundo matemático, papel adquirido no desenvolvimento histórico e que buscamos retratar neste trabalho. Este viés característico permitiu situar o conhecimento dos números reais como 'tema mapeador' que medeia um 'espaço de significações' para os números irracionais, onde os eixos constituintes discreto/contínuo, exato/aproximado e finito/infinito orientam as relações e permeiam as negociações entre os signos próprios da matemática e o uso da palavra, constituindo níveis intermediários para as diversas relações entre o empírico e o teórico, harmonizando a confluência entre a exploração da técnica e a construção do significado.

A proposta da escolha dos números reais como tema encontra ressonância nas considerações presentes em Bakhtin (1986). Em se tratando se propiciar conexões, o autor aponta que a multiplicidade das significações é o índice que faz de uma palavra uma palavra. Para o autor, somente a dialética pode resolver a contradição aparente entre a unicidade e a desejada pluralidade da significação.

> O tema constitui o estágio superior real da capacidade lingüística de significar. De fato, apenas o tema significa de maneira determinada. A significação é o estágio inferior da capacidade de significar. A significação não quer dizer nada em si mesma, ela é apenas um potencial, uma possibilidade de significar no interior de um tema concreto. A investigação da significação de um ou outro elemento lingüístico pode, segundo a definição que demos, orientar-se para duas direções: para o estágio superior, o tema; nesse caso, tratar-se-ia da investigação da significação contextual de uma dada palavra nas condições de uma enunciação concreta. Ou então ela pode tender para o estágio inferior, o da significação: nesse caso, será a investigação da significação da palavra no sistema da língua, ou em outros termos a investigação da palavra dicionarizada (BAKHTIN, 1986, p. 131).

Além do que se estabelece usualmente no currículo do ciclo básico, no seio da própria matemática existem outros assuntos que permitem explorar de modo mais abrangente a natureza e concepção dos números reais. Estes temas geralmente são abordados no Ensino Superior, que por uma visão simplista, são classificados como inadequados para utilização no ciclo básico, por serem considerados demasiadamente abstratos e carecerem de vínculo com a realidade.

Machado (1990) aponta não fazer sentido classificar qualquer conhecimento como abstrato, visto que é possível se conceber vias que ativem conteúdos de significação[82]. A dimensão dos conteúdos de significações, de natureza não palpável, revela aspectos de concretude de um assunto, que se encontra nos aspectos semânticos e podem ser acessados através de narrativas, textos escritos e representações pictóricas, dentre outras formas.

Na superfície dos assuntos tratados, existem temas matemáticos que inicialmente parecem carecer de vínculo com a realidade. Porém:

> [...] o recurso à evolução histórica das noções envolvidas conduz a uma visão mais orgânica das relações em questão, revelando um núcleo epistemológico de onde emerge uma continuidade insuspeitada pelos que se detêm na aparência (MACHADO, 1990, p. 22).

Um olhar mais abrangente para aspectos historicamente desenvolvidos ao longo da construção do edifício matemático revela conceitos matemáticos deixados à margem no ensino básico. A utilização destes temas colabora para o currículo de Matemática do ensino básico, na medida em que além de atualizar o conhecimento matemático, permite valorizar e interligar tópicos que já estão inclusos na problemática deste ciclo, incrementando o percurso de significações dos números irracionais.

As considerações tecidas neste texto revelaram possibilidades de abordagem das frações contínuas simples, assunto inicialmente desenvolvido pelos gregos, que foi sendo enriquecido ao longo do desenvolvimento histórico.

A análise desse percurso histórico nos fez perceber alguns nós da teia tecida considerando o tema e abordando aspectos fundamentais em relação à natureza e estrutura dos números reais. Propomos, assim, as Frações Contínuas como tema articulador, que permite revelar a complementaridade entre os Universos dos Números Racionais e os Números Irracionais, acessando outro modo de representação e significação destes conhecimentos na escolaridade básica.

---

[82] Segundo Machado (2004), a dimensão material é uma importante (e a mais conhecida) componente da noção de concreto, embora não esgote seu significado.

Uma propriedade essencial relacionada aos números reais é que todo número irracional pode ser bem aproximado por números racionais. A aproximação de números irracionais por racionais é uma questão de grande importância em diversas situações e permeia uma importante articulação entre os conjuntos dos Números Racionais e o conjunto dos Números Irracionais.

Do ponto de visto da Teoria dos Conjuntos, os Números Racionais e os Números Irracionais são conjuntos disjuntos. Esta concepção matemática pode induzir, numa visão simplista, a inexistência de relações a serem tratadas no ensino básico. A caracterização das possíveis relações entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais, pela abordagem da aproximação compôs um contexto propício a ser explorado no atual currículo de matemática do ensino básico, conforme expusemos nos capítulo 2 e 3.

As considerações tecidas neste texto revelaram possibilidades de abordagem do tema das Frações Contínuas Simples no ensino básico, considerando-a como uma oportunidade de atualização do currículo de Matemática.

Além disso, a própria natureza das frações contínuas permite articular vários conhecimentos inerentes a processos algébricos e numéricos, próprios do currículo da escola básica, além de fornecer uma explicação simples, objetiva e positiva envolvendo a natureza dos números racionais e irracionais: se a fração contínua for finita o número representado é racional e se a fração contínua for infinita o número é irracional.

Esta forma de abordagem evita o problema da circularidade, discutido por Rezende, W. (2003) e que ainda está presente no discurso dos livros didáticos do ensino básico, conforme a análise realizada na revisão bibliográfica.

Outro fator que o tema das frações contínuas proporciona é estabelecer uma ponte entre os dois conjuntos acima citados, pois as melhores aproximações de números irracionais são os diversos convergentes que podem ser escritos pela aplicação recursiva do algoritmo. O tema das frações contínuas fornece um processo que possibilita diversas aproximações racionais, de modo prático, sequencial e previsível, num contexto onde uma aproximação pode ser melhorada o quanto se desejar, inserindo a questão dos números irracionais num quadro mais abrangente.

Além das boas aproximações, a natureza das frações contínuas é propícia para esclarecer e ampliar o próprio conceito um número racional, presente na interação entre a natureza finita dos termos da fração contínua que representa um número racional, em contrapartida com os infinitos termos constitutivos de um número irracional.

Em síntese, as frações contínuas representam um viés interessante de ilustrar os números irracionais no ciclo básico: um número é irracional se a representação em forma de fração contínua for infinita; caso a representação seja finita, o número é racional. Esta abordagem positiva elimina o citado problema de circularidade, delimitando os aspectos finitos e infinitos, exatos e aproximados, discretos e contínuos, de forma simples e envolvendo conteúdos acessíveis aos alunos do ciclo básico.

Em relação às contribuições de ordem didática, o recurso às frações contínuas como 'tema articulador' permitiu ilustrar a operação de aproximação de números irracionais, na forma de raízes enésimas irracionais, em áreas da ciência e do cotidiano.

Aliado a este fator, as frações contínuas favorecem explorar uma série de procedimentos alternativos no ensino secundário. As situações envolvendo frações contínuas ilustraram a exploração de diversas estratégias, articulando a abordagem aritmética e o uso da estratégia algébrica como otimizadora e reguladora de conceitos, o que favorece o desenvolvimento de competências em situações de sala de aula.

Deste modo, reafirmamos nossa posição em considerar as frações contínuas no ensino básico não pelo estudo sistemático e algoritmizado[83], mas como uma temática capaz de resgatar propriedades fundamentais dos números reais, permeando um contexto que promova uma articulação dos assuntos já estabelecidos no atual currículo.

Um pressuposto básico para a atualização curricular deve considerar que o conteúdo matemático a ser tratado na escola básica é apenas um veículo para o desenvolvimento das ideias fundamentais, de acordo com Machado (1990).

O ensino de Matemática deve considerar a aquisição e uso intuitivo de idéias fundamentais. As escolas estão desperdiçando tempo ao adiar o ensino de assuntos:

> [...] importantes com base na crença de que são difíceis demais. [...] Os fundamentos de qualquer assunto podem, de alguma forma, ser ensinados a quem quer que seja, em qualquer idade. Embora essa proposição possa parecer de início surpreendente, sua intenção é sublinhar um ponto essencial [...]: o de que as idéias básicas que se encontram no âmago de todas as ciências e da matemática, e os temas básicos que dão forma à vida e à literatura, são tão simples quanto poderosos. Ter essas idéias básicas ao seu dispor, e usá-las eficientemente, exige constante aprofundamento da compreensão que delas se tem, o que se pode conseguir aprendendo a utilizá-las em formas progressivamente mais complexas. Apenas quando tais ideias básicas são propostas em termos formalizados, como equações ou conceitos verbais elaborados, é que ficam fora do alcance da criança, se ela não as tiver primeiro compreendido intuitivamente e não tiver tido a oportunidade de experimentá-las por conta própria (BRUNER, 1987, p. 11-12).

---

[83] As *Frações Contínuas* foi tema do currículo de Matemática no Brasil até a década de 30 (séc. XX).

Deste modo, ao sabor das ilustrações e modos de reconstituição de ligações e elos histórico-culturais, as situações de ensino que propusemos recriaram ambientações didáticas para permitir a compreensão diversa do fenômeno e a exploração das inúmeras relações que estão envolvidas no ato de significar os números irracionais, embasadas na metáfora da rede de significados, conforme Machado (1995).

Uma característica da rede de significados é a abertura para uma multiplicidade de percursos. Esta concepção se contrapõe ao obstáculo situado em "[...] certas práticas escolares como a forma de utilização do livro didático, [que] favorece a cristalização de determinados percursos ao longo da rede, criando para eles a aparência de absoluta necessidade; romper com tais práticas exige uma consciência da dinâmica dos processos que a explicitação da metáfora da rede pode favorecer" (MACHADO, 1995, p. 141).

Deste modo, a multiplicidade de percursos serviu de parâmetro para a proposta de construção da conceitualização através do percurso de significação e a imersão dos conhecimentos numa rede de significados, em permanente estado de atualização, agregando novos elementos, realizando novos percursos, de modo a não esgotar as possibilidades de definir ou conceituar os números irracionais.

Machado (1995) pondera que navegar na rede de significação não nega o papel estruturador, nem os procedimentos algorítmicos e hierárquicos presentes nas disciplinas. Para enfrentar o perigo de se perder pela multiplicidade de nós e relações "[...] será sempre necessário um mapeamento que oriente e articule os caminhos a seguir, que apresente um espectro não-hierárquico e acentrado de opções" (MACHADO, 1995, p. 155).

Acreditamos que navegar pela rede de conceitos associados aos irracionais deve ter como orientação os eixos constitutivos dos números reais – o discreto/contínuo, o exato/aproximado, o finito/infinito – inseridos num 'espaço de significações' que viabiliza o movimento entre conceitos empíricos e científicos.

Uma situação que ilustrou tal posição ocorreu com relação ao surgimento dos Números Irracionais e a relação com os Números Racionais. Em alguns dos livros didáticos analisados a abordagem no ensino básico ocorreu pelo viés teórico, que assim define o conjunto dos números irracionais como os números reais que não pertencem ao conjunto dos números racionais. A primeira vista, esta definição circular pode transparecer que não existe qualquer tipo de relação entre os números irracionais e os racionais. Mas a história do desenvolvimento da Matemática nos mostra outra visão, onde o número irracional é concebido:

> [...] como o limite de uma sequência de números racionais, no entanto, esses números possuem propriedades diferenciadas. Weierstrass pretendia estabelecer a Análise com base apenas no conceito de número. Para isto, precisou dar uma definição de número irracional independente da noção de limite. Weierstrass ‘resolveu’ a questão da circularidade presente na definição de número real identificando o número com a própria seqüência que ‘converge’ para ele. Assim, $\sqrt{2}$ não é definido como o limite da seqüência (1; 1,4; 1,41; 1,414; ...), mas como sendo a própria seqüência que converge. Tal atitude foi, com efeito, a primeira solução normal para a anomalia apresentada na definição de número real (REZENDE, W., 2003, p. 252).

Para Machado (1995), conhecer um objeto está relacionado com as essências e as diferenças do próprio objeto, estando o acesso aos significados possibilitado pelas inúmeras relações deste objeto com outras coisas e objetos.

Consideramos que estudar os números irracionais ajuda a melhor entender os racionais, e como os alunos carregam muitas dúvidas sobre frações ou decimais, este trabalho busca um modo de provocar o movimento de ir-e-vir, que motive a renegociação dos conhecimentos anteriores, em novos contextos e relações, evidenciando diferenças e essências, de modo a revitalizar a ação transformadora, aliando-se ao já estabelecido, mas permitindo a evolução de ideias e conceitos.

Passamos, a seguir, a delinear reflexões sobre os modos de ampliar o campo de abrangência para viabilizar o ato de significar os números irracionais no ensino básico, as expectativas futuras em relação ao tema da aprendizagem significativa, num entorno mais abrangente e as possibilidades de pesquisas futuras.

Acreditamos que uma primeira ponderação seria quanto ao campo interdisciplinar, metodológico e cultural. A própria epistemologia envolvendo os números reais antevê uma possibilidade de conversa entre a Matemática e outras áreas que normalmente parecem, a primeira vista, um tanto distanciadas, mas se aproximam numa interface ao perpassar o elo do Universo da Educação.

Atualmente:

> [...] no campo da Educação Matemática, as discussões e investigações quanto a práticas pedagógicas indicam a necessidade de superação da visão fragmentada e a-histórica da matemática. A partir de certas metodologias pode-se propiciar uma formação mais ampla do aluno, observando-se os aspectos lógicos, históricos e culturais das produções matemáticas. Pretende-se um ensino de matemática que permita reflexões, análises, investigações e generalizações, de forma a desenvolver um cidadão criativo, crítico e responsável socialmente (VAILATI; PACHECO, 2008, p. 2).

Considerando-se a importância da História da Matemática para o campo da Educação, voltamos nossa reflexão para algumas concepções e metodologias ligadas a História, que podem trazer alguma contribuição ao encaminhamento dos aspectos semânticos, presentes no tema dos números reais no ensino básico.

Na década de 70 ocorreram críticas ao modo estrutural-funcionalista da História, conforme ressalta Ginzburg (2007), na mesma época em que se iniciaram críticas ao movimento da Matemática Moderna. Nessa época, discutia-se qual é o sujeito que faz a História e quem a registra, criticando-se a visão determinística que utiliza a estatística para valorizar os dados, o que desencadeou uma valorização da cultura.

Destacamos o método indiciário, presente Ginzburg (1991). Tal como realizam artistas e psicanalistas, como Freud, importantes descobertas são realizadas a partir de relatos secundários, sintomas desapercebidos ou marginais. Nesse entorno, Ginzburg (1991) propõe que a narrativa ocupe o papel de preencher as lacunas dos documentos históricos, como uma maneira de construir o conhecimento. Isto é um modo de superar o estranhamento, sem inventar fatos, mas permitindo um modo alternativo de apresentação da história, dentro de um estilo que promova a inteligibilidade.

Utilizamos tal metodologia na situação proposta intitulada 'PI e o Papiro de Rhind', pela proposição de um processo para estudar o modo de aproximação egípcia e o processo conjecturado para se verificar os valores otimizadores que constam do citado papiro. Outro aspecto que assemelha uma maneira alternativa de construção do conhecimento é o uso de conhecimentos antigos, baseados em regras pragmáticas, e o uso da definição moderna de PI, como a razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência para se determinar o próprio valor de PI, fato que os documentos da história da Matemática revelam não ser a preocupação dos povos antigos.

Acreditamos que a elaboração de tais situações pode contribuir para a dinâmica do ensino dos números reais no ciclo básico, configurando uma proposta alternativa enriquecedora ao situar um contexto de busca de conjecturas para a aquisição de conhecimentos matemáticos e o estabelecimento de diversas relações internas e externas à Matemática.

Com relação ao estranhamento, Gynzburg (2001) destaca fala do imperador Marco Aurélio, que concebia o estranhamento como meio para superar as aparências e alcançar uma compreensão mais profunda da realidade, ou seja, é um modo de "[...] ver as coisas mesmas e penetrá-las totalmente, até discernir, qual seja a sua verdadeira natureza, [...] libertando-se de idéias e representações falsas" (GYNZBURG, 2001, p. 34).

Para Ginzburg (2001), para um olhar mais abrangente, completo e crítico sobre um objeto, devemos nos afastar do objeto para buscar seus princípios causais, observando-os como se fosse à primeira vez, quando o objeto não parecia ter sentido, como se fosse uma advinha. Deste modo, podemos retirar o pesado fardo da repetição, dos hábitos e convenções, a artificialidade que nos leva a um empobrecimento qualitativo da experiência e nos fazem esquecer o estranhamento inicial, apagando os fragmentos contraditórios que uma vez compuseram nossa percepção do objeto e o fascínio original pelo desconhecido.

A partir de Ginzburg (2001), poderíamos estender esse conceito ao campo educacional e ao ensino de Matemática. A primeira vista, pode parecer inadequada a idéia da inclusão de temas usualmente tratados no Ensino Superior, como as frações contínuas. A possibilidade de inclusão de temas atuais ao currículo é possível se consideramos um olhar através da metáfora do conhecimento como rede, conforme Machado (1995).

Uma característica destacada pelo autor é que as redes de significações estão "[...] em permanente estado de atualização, ou de sua natural historicidade [...] a construção do conhecimento é permanente, é viva, nunca se pode fundar em definições fechadas, nunca é definitiva [...] [se configurando em] uma contínua metamorfose" (MACHADO, 1995, p. 336).

Acreditamos que essa proposta de atualização de temas do currículo de matemática é perfeitamente compatível dentro da visão educacional bipolar transformação/conservação. Tal situação ocorre, por exemplo, no Ensino da Biologia, onde a nova revolução da genética, assunto complexo, se mostrou passível de ser introduzido para o cotidiano da sala de aula numa abordagem acessível a alunos do ensino básico, sem afetar o currículo básico de biologia.

As duas situações envolvendo as frações contínuas propostas se constituíram em uma transposição didática que ressaltou aspectos semânticos, reduzindo a abordagem sintática aos aspectos essenciais dos temas, de modo que o entendimento aproximou e enredou assuntos usuais do currículo da escola básica.

Em um encontro de matemáticos, tematizada no 'infinito', um colega direcionou a seguinte questão ao palestrante: "O senhor apresentaria tais conceitos no Ensino Médio?". O renomado colega respondeu: "Poderia discutir tais assuntos somente se algum aluno solicitasse, mas tal abordagem causaria um estranhamento".

O referido estranhamento que o palestrante cita se refere principalmente pelo fato de que os conteúdos expressos nos livros e manuais didáticos carregam uma tendência pendular, ao apresentar geralmente aspectos de cálculos de caráter exato, determinístico e exato, privilegiando a técnica em detrimento dos significados, conforme analisamos no capítulo 1.

Todo e qualquer assunto é possível de ser abordado, desde que haja a adequação que leve em consideração o nível de escolaridade, através de um mapear de relevâncias, um espectro de referencias teóricas norteadoras, associado a um tratamento didático. Na essência, os números reais trazem aspectos relacionados ao aproximado, ao infinito, do discreto e do contínuo. Ao considerar tais aspectos, a abordagem de temas se enriquece e pode acrescentar significações para o ensino de Matemática.

Enfatizando novamente a ideia de aproximação História&Matemática, a interdisciplinaridade fica engrandecida pela possibilidade de ampliação, ao envolver novos objetos de atuação em comum, para se estabelecer uma cultura matemática. Vale destacar que, para se estabelecer uma cultura interdisciplinar na escola, deve-se considerar como fundamentação que toda atividade humana pode ser cultura, mas ela não o é necessariamente, pois, "para que haja cultura, não basta ser autor das práticas sociais; é preciso que essas práticas sociais tenham sentido para aquele que as realiza" (CERTEAU, 1994, p. 142).

Uma reflexão final sobre o tema dos significados pode ser realizada ampliando-se o domínio de análise do campo educacional para o campo das ciências sociais e ciência natural. Flanagan (2007) situa a questão do significado como um nível extremamente relevante na atual sociedade. O autor apresenta o significado como um estado ou uma maneira como os objetos e situações acrescentam ou agregam valor em um grande esquema de coisas. Para Flanagan (2007), o significado no mínimo envolve uma avaliação verdadeira da questão: o que uma existência terrena finita acrescenta ao ser humano?

O autor se apóia na concepção filosófica de Sellars (1960 apud Flanaggan, 2007), que busca entender como as coisas, no sentido mais abrangente possível, se combinam ou se harmonizam.

Como resposta, o autor propõe que alcancemos a 'e*udaimonia*', uma palavra grega que significa florescer. A 'e*udaimonia*' se revelou uma área empírica, estudando a natureza, causas e condições do florescimento humano, num viés filosófico, o que provém uma estrutura de pensamento unificado.

Dentro desta concepção, Flanagan (2007) propõe um sexteto, que compõe o que o autor denomina de 'espaço de significações do século XXI', a saber: arte, ciência, tecnologia, ética, política e espiritualidade, conforme descreva a figura 50.

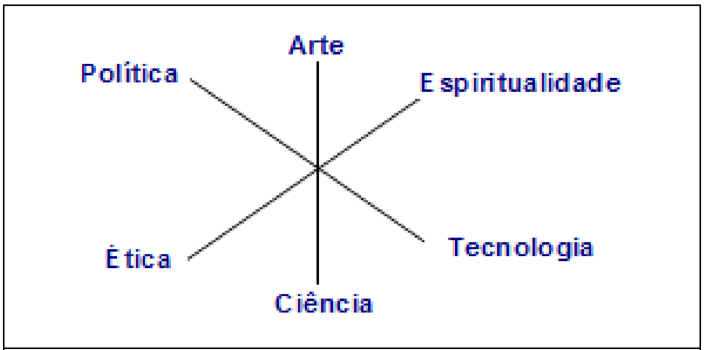


Figura 50: Espaço de Significações, segundo Flanagan (2007).

O autor coloca como idéia básica a realização de esforços para se efetivar tal espaço de significações. Os espaços de significação seguem a mesma recomendação, ou seja, nos vivemos nestes espaços e nos entenderemos melhor se compreendermos cada um deles e a interação inerente aos outros espaços, numa rede dialética.

Em nossa exposição sobre um número irracional - o número de ouro - podemos associar este conhecimento matemático a uma representação no espaço da arte, pois:

> [...] o número de ouro está presente em muitos lugares que despertam a nossa experiência estética. Em produções ligadas à arte, principalmente na pintura, como nas obras renascentistas de Leonardo da Vinci, a exemplo do quadro Mona Lisa. Desenhando um retângulo à volta da face o retângulo resultante é um retângulo de ouro (CERRI, 2006, p. 6).

Outro contexto utilizado neste trabalho foi a calculadora e a planilha eletrônica, que situam uma relação entre o espaço de tecnologia e os números irracionais. A aula de Matemática:

> [...] constitui um conjunto de circunstâncias extremamente conveniente para os estudantes aprenderem a utilizar as ferramentas tecnológicas. Pois é nesse contexto que, usando calculadoras até mesmo programáveis, interagindo com os mais variados *softwares,* cada vez mais sofisticados, eles poderão verificar a pertinência e relevância dos conceitos, não mais apenas resolver problemas de aplicação, mas avaliando se os resultados rápida e visivelmente apresentados pelas máquinas estão corretos, tem significação, são consistentes e coerentes. (BARUFI, 2004, p. 6-7)

Com relação ao espaço da Ciência, apresentamos situações embasadas em contextos da Astronomia. No espaço da Política, que engloba a Filosofia, encontram-se as concepções gregas em relação aos números inteiros, que representou um marco histórico do surgimento dos números irracionais e a 'Crise dos Incomensuráveis'.

Em síntese, numa analogia com as ideias presentes em Machado (2004), ponderamos que para significar os números irracionais são necessárias duas ações: estranhar e harmonizar.

Com relação ao estranhamento, proposto por Ginzburg (2001), configurado inicialmente como um instrumento literário, psico-analítico, artístico, assim como deslegitimador nos níveis político, social e religioso, ou seja, multicultural por natureza, revela mais uma face, ao contribuir como procedimento para uma maior compreensão do ensino de Matemática.

O estranhamento proposto por Ginzburg (2001) pode contribuir como um olhar para superar as aparências e alcançar uma compreensão mais profunda da realidade no campo educacional. O estranhamento se faz como uma perspectiva alternativa para olhar o currículo, pelo incentivo e possibilidade de maior enfoque para a abordagem de temas matemáticos propícios para uma tessitura de significados.

Esse olhar de estranhamento permitira mapear o centro de projeção dos objetos de ensino e vislumbrar possibilidades. Santos, B. (2007) aponta que o centro de projeção de um mapa implica na escolha de um tipo de representação, o que remete a um compromisso associado a diversos aspectos. Um primeiro critério seria a de ordem técnica – os conhecimentos advindos da didática, da história e da epistemologia - conforme destacamos no capítulo 2. Um segundo fator seria a faceta ideológica, onde o autor destaca que cada projeção possui um centro, que impõe e privilegia certo contorno ou vizinhança, atribuindo menor destaque aos aspectos periféricos.

Acreditamos que, ao colocar os aspectos operatórios, determinísticos, exatos e finitos como centro do desenvolvimento da Matemática no ensino básico, o material didático privilegia um tipo de projeção extremamente tendencial da realidade envolvendo o conhecimento dos números irracionais.

Nossa proposta consiste em evidenciar os aspectos intrínsecos aos pares discreto/contínuo, exato/aproximado, finito/infinito, eixos constituintes do tema mapeador representado pelos números reais. A dialética presente nestes pares permite que o centro de projeção se alterne a cada instante, indicando uma determinada face dos objetos matemáticos, que, no conjunto da obra, permite compor uma visualização mais completa e ampliada, situando um tom equilibrado de apresentação do conhecimento matemático.

Com relação a harmonização, proposto por Flanagan (2007), o significado situado num grande consenso da vida pode ser colocado em narrativas semânticas, conectadas ao que representa o bom, o belo e o verdadeiro.

A Matemática pode contribuir com estas relações, ampliando o repertório de relações causais próprias da ciência, pois existem "[...] relações aritméticas, geométricas e lógicas. Existem relações estatísticas, estéticas, pessoais e semânticas (significado e referência) (…) e assim por diante[84]" (FLANAGAN, 2007, p. 13-14, tradução nossa).

Parafraseando o autor, se os números racionais, um assunto presente há muito tempo em pesquisas, ainda constituem um problema na sala de aula, o problema atual do ensino de Matemática realmente árduo é trazer para o ambiente escolar os significados das questões envolvendo os números irracionais.

Nesse sentido, a proposta da utilização dos números reais como tema mapeador permitiria aos livros didáticos de ensino básico, assim como aos compêndios de História da Matemática aflorar relações não percebidas e não explicitadas dos conhecimentos matemáticos.

A abordagem usual de temas presentes nos livros didáticos se faz mediante tratamento com base em algoritmos otimizadores de tempo e procedimentos de maior eficácia. Conforme sugestão metodológica de Gynzburg (2001) e filosófica de Flanagan (2007) poderíamos ter um olhar mais abrangente, completo, crítico e harmonioso sobre os objetos matemáticos.

O estranhamento e a harmonização, como forma de abordagem dos conhecimentos matemáticos em sala de aula, permitiriam análises diversas e múltiplas interpretações dos eventos, uma maior compreensão dos aspectos semânticos, melhorando as relações entre ensino e aprendizagem, o que também pode significar e enriquecer as aproximações internas e externas a Matemática.

Acreditamos que as manifestações, ações e constatações expressas neste trabalho possam constituir um repensar em relação à importância e valorização de propostas a serem desenvolvidas em sala de aula, envolvendo o âmbito dos números reais.

---

[84] […] arithmetic, geometrical, and logical relations. There are statistical relations, aesthetic relations, personal relations, semantic (meaning and reference) […] and so on.

A própria natureza e essência dos números reais se constitui em um tema que possibilita não somente organizar o conhecimento dos números irracionais, como procuramos mostrar, mas também permeia conceitos envolvendo os demais conjuntos canônicos constituintes: os Números Naturais, os Números Inteiros e os Números Racionais.

Em geral, o caminho escolhido na escolaridade básica é o 'das partes para o todo'. O Ensino Fundamental I privilegia a jornada do conhecimento matemático iniciando com os elementos dos Números Naturais, introduzindo no decorrer da exposição dos assuntos os Números Racionais não-negativos. Já nas séries seguintes do Ensino Fundamental II ocorre a abordagem dos Números Inteiros e o complemento dos Números Racionais. Neste percurso, é usual não ocorrer a menção da relação de inclusão destes conjuntos em relação a um todo maior: os números reais.

A questão a ser abordada não é o ato simplório de citar o contexto maior, mas em desenvolver futuras pesquisas que desenvolvam a possibilidade e a potencialidade dos elementos constituintes e essenciais dos números reais – os eixos discreto/contínuo; exato/aproximado; finito/infinito – como elementos estruturadores de uma abordagem didática mais ampla, compreensível, significativa e mapeadora da Matemática, desde as séries iniciais do Ensino Fundamental I.

Neste contexto do tema mapeador dos números reais há a possibilidade de realizar pesquisas que envolvam as áreas da Aritmética e da Geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental I e início do Ensino Fundamental II, integrando aspectos referentes as medidas, as aproximações e o infinito.

Os caminhos percorridos e os referenciais expostos podem permitir ressignificações e ampliações do tema da presente pesquisa, nos aspectos de abrangência de contextos em outros assuntos da própria matemática, que poderiam se beneficiar da estrutura proposta.

Diante de tais considerações, encerro o relato desta pesquisa, mantendo uma intenção de contribuir e, principalmente, de ter aprendido com as possibilidades surgidas no decurso e encaminhamento deste estudo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Referências Bibliográficas

AABOE, A. **Episódios da História Antiga da Matemática.** São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

ALVES, A. F. **Algumas importantes constantes em Matemática**, 1999. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

ANDRADE, E. X. L.; BRACCIALI, C. F. **Frações Contínuas**: Propriedades e Aplicações. São Paulo: Editora Plêiade, 2005.

AGUIAR, W. M. J. A pesquisa em psicologia sócio-histórica: contribuições para o debate metodológico. In: BOCK, A. M. B.; GONÇALVES, M. G. M.; FURTADO, O. (org.). **Psicologia sócio-histórica:** uma perspectiva crítica em psicologia. 2. ed. São Paulo: Cortez Editora, 2002, p. 129-140.

AGUIAR, W. M. J.; OZELLA, S. **Núcleos de significação como instrumento para a apreensão da constituição dos sentidos.** Psicologia: ciência e profissão, Brasília, 2006. v. 26, n. 2.

AMARAL, L. C. M. **Obtendo-se o número PI** , 2005. Disponível em: <http://64.233.169.104 /search?q=cache:-obGrNgnGFQJ:tecnociencia.jor.br/tecnico /index.php%3Foption%3 Dcom_content %26task%3Dview%26id%3D229%26Itemid%3D143+O+n%C3%BAmero+PI&hl=pt-BR&ct=clnk&cd=29&gl=br>. Acesso em 17 ag. 2009.

AUGUSTO, A. **Esses engenheiros fantásticos e suas calculadoras maravilhosas**, 2009. Disponível em: <http://alvaroaugusto.blogspot.com/2007/02/esses-engenheiros-fantsticos-e-suas.html>. Acesso em: 18 jan. 2010.

AURÉLIO. **O Dicionário da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 2003. CD-ROOM.

ÁVILA, G. **Grandezas incomensuráveis e números irracionais**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, RPM, 2 sem. 1984. n. 5, p. 6-11.

BAKHTIN, M. **Marxismo e Filosofia da Linguagem**. 3. ed. Tradução de Michel Lahud e Yara F. Vieira. São Paulo: Editora Hucitec, 1986.

BARTHEL, L. **A COMPUTERIZED INTERACTIVE APPROACH TO REAL NUMBERS AND DECIMAL EXPANSIONS**. Proceedings of ICME 10, 2010.

BARUFI, M. C. B. **A construção e negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** Doutorado em Educação (Universidade de São Paulo), São Paulo, 1999.

BATISTA, C. O.; SILVA, E. B. **O Ensino/aprendizagem das medidas e de números decimais.** Brasília, 2004. Disponível em: <http://www.redebrasil.tv.br/ salto/boletins2004/ cm/tetxt3.htm>. Acesso em 15 mar. 2008.

BEKKEN, O. B. **Equações de Ahmes até Abel**. Tradução de José Paulo Quinhões Carneiro. Universidade de Santa Úrsula, 1994.

BESKIN, N. M. **Frações Contínuas.** Tradução de Pedro Lima**.** Editora Mir, Moscou, 1987.

BOFF, D. S. **A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NA ESCOLA BÁSICA**. Dissertação de Mestrado Profissionalizante. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. A.; OLIVARES, A. **Matemática.** Fazendo a Diferença. São Paulo: Editora FTD, 4 volumes, PNLD 2008.

BONOMI, M. C. **Ensino de Matemática:** Novas tecnologias, novos problemas. SEMA, 2004.

______________. **Os números irracionais e as calculadoras.** São Paulo: SEMA/USP, 1 sem 2008.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** 9. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1991.

BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: SEMT/MEC, 1997a.

_______. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental.** Brasília: SEMT/MEC, 1997b.

_______. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: 3° e 4° ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_______. Ministério da Educação. **Matriz de Referência para o ENEM**. Brasília, 2009.

BROLEZZI, A. C. **A Arte de Contar**: Uma Introdução ao Estudo do Valor Didático da História da Matemática. Dissertação de Mestrado: São Paulo, Faculdade de Educação da USP, 1991.

______________. **A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática.** 1996. Tese (Doutorado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo.

______________. **Epistemologia e História:** anotações para uma História da Matemática às Avessas. SEMA, 2004. Disponível em: <texto_Brolezzi_semin_rio_Nilson_versao_3.doc>. Acesso em 17 dez. 2011.

BRUNER. S. J. **O Processo da Educação**. 8. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1987.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5. ed. Portugal: Lisboa, 1970.

CARVALHO, D. L.; MIGUEL, A.; MENDES, I. A. **História da Matemática em Atividades Didáticas**. Editora Livraria da Física, 2009.

CERRI, C. **Desvendando os Números Reais**. IME-USP, 2006.

CERTEAU, M. **A invenção do cotidiano**: Artes de fazer. Petrópolis: Vozes, 1994.

CHEVALLARD, Y. **L'analyse de pratiques enseignantes em théorie antropoligique du didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, 1999. v. 19, n, p. 221-226.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas**: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: ArtMed, 2001.

COELHO, M. P. F. **A MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS NO 'ÁBACO DOS INTEIROS':** UMA INVESTIGAÇÃO COM ALUNOS DO 7.º ANO DE ESCOLARIDADE. 2005, Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade do Minho, Braga.

COSTA, J. R. **A Importância do Manual do Professor na Transposição Didática da Matemática,** 2008. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática). Centro de Ciências Exatas. Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

COSTA, L. V. C. **Números Reais no Ensino Fundamental:** Alguns Obstáculos Epistemológicos. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo.

COSTA, M. A. **As Idéias Fundamentais da Matemática e Outros Ensaios**. 3. ed. São Paulo: Edusp, 1981.

CUNHA, M. O. **Sobre a idéia de algoritmo**. São Paulo: SEMA/USP, 2007. Disponível em: <www.educarede.org.br/.../2007-06-01-Sobre_o_conceito_de_algoritmo.doc >.

D'AMORE, B. **Epistemologia e Didática da Matemática**. Trad.de Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Escrituras, 2005.

DIAS, M. S. **FORMAÇÃO DA IMAGEM CONCEITUAL DA RETA REAL**: Um estudo do desenvolvimento do conceito. 2007. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.) **Aprendizagem em matemática:** Registros de Representação Semiótica. 2. ed. Campinas: Papirus, 2003. Cap 1, p.11-33.

ESCOLANO, R. V.; GAÍRIN, J. M. S. **Modelos de Medida para la enseñanza del número racional em educación primária**. Zaragoza: Revista Iberoamericana in educación Matemática, 2005. n. 1, p. 17-35 Disponível em: <http://www.fisem.org/>. Acesso em 12 jan. 2010.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO, J. I. (org). **A Solução de problemas**: Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998. Cap. 1, p. 13-42.

FIGUEIREDO, D. G. **Números Irracionais e Transcendentes**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

FLANAGAN, O. J. **The Really Hard Problem**. Cambridge, MA: MIT Press, 2007.

FICHTNER, B**. Introdução na abordagem histórico-cultural de Vygotsky e seus Colaboradores**, 2010.

FISCHBEIN, E.; JEHIAM, R.; COHEN, D. **The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers.** Educational Studies in Mathematics. jul. 1995, v. 29, n. 1, p. 29-44. Disponível em: <www.jstor.org/stable/3482830>. Acesso em 12 dez. 2011.

GARBIN, S.; AZCÁRATE, C. **Infinito Actual e Inconsistencias**: Acerca de las Incoherencias en los Esquemas Conceptuales de Alumnos de 16-17 Años. Universidad Autònoma de Barcelona, Enseñanza de las ciencias, p. 87-113, 2002.

GINZBURG, C**. Apontar e citar:** a Verdade da História. Campinas: UNICAMP, Revista de História, 1991.

______________. Estranhamento: Pré-história de um procedimento literário. In: **Olhos de Madeira:** Nove Reflexões sobre a distância. São Paulo: Cia das Letras, 2001.

______________. **O Fio e os Rastros.** São Paulo: Cia das Letras, 2007.

______________. **Mitos, emblemas, sinais**. São Paulo: Cia das Letras, 1989.

GIOVANNI J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática Completa**. São Paulo: Editora FTD, 3 volumes, PNLEM 2009.

GÓMEZ-GRANELL, C. Rumo a uma epistemologia do conhecimento escolar; o caso da educação matemática. In: RODRIGO, M. J.; ARNAY, J. **Domínios do Conhecimento, Prática Educativa e Formação de Professores:** A construção do conhecimento escolar. São Paulo: Editora Ática, 1997. p. 15-41.

GONÇALVES, C. H. B.; POSSANI, C. **Revisitando a Descoberta dos Incomensuráveis da Grécia Antiga.** Matemática Universitária, n. 47, 2010. Disponível em: < http://www.each.usp.br/bgcarlos/publications/Gon%C3%A7alves_C_H_B_Possani_C_2010_Revisitando_a_Descoberta_dos_Incomensur%C3%A1veis.pdf>. Acesso em 06 dez. 2011.

HARIKI, S. **Sobre Frações Próprias, Impróprias e Aparentes.** Revista do Professor de Matemática, IME-USP, São Paulo, 1993, n. 23, p. 19-22.

HERSHKOWITZ, R. **Aspectos Psicológicos da Aprendizagem da Geometria e Visualização em Geometria**: as duas faces da moeda. Boletim Gepem, v. 32. Rio de Janeiro, 1994.

HILBERT, D. Sobre o Infinito. Tradução de Marcelo Papini. p. 1-11. In: **Encontro de Matemáticos**. Sociedade de Matemática de Westfalen: Münster, 1925, p. 161-190.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. S. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2008.

IEZZI et al. **Fundamentos da Matemática Elementar**. 10 volumes, São Paulo: Editora Atual, 2006.

IFRAH, G. **Os Números**: A história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1989.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática para Todos**. São Paulo: Editora Scipione, 4 volumes, PNLD 2008-2010.

JAHN, A. P. et al. **Lógica Das Equivalências.** 1999. Disponível em:< http://paje.fe.usp.br/~anped/Textos22/jahn.pdf>. Acesso em 15 jun. 2010.

JERPHAGNON, L. **História das grandes filosofias**. Trad. Luís Eduardo de Lima Brandão. São Paulo: Martins Fontes, 1992.

KARLSON, P. **A Magia dos Números**. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1961.

LEVIATHAN, T. **Introducing real numbers:** when and how? Proceedings of ICME 10, 2004.

LIMA, E. L. **Deve-se usar máquina calculadora na escola?** Revista do Professor de Matemática, IME-USP, São Paulo, 1985, n. 7, p. 20-22.

__________. O que é número PI? In: **Portal MEC**. Geometria, Cap 3, 2000. p. 126-129. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_icap3.pdf>. Acesso em 06 dez. 2011.

LIMA, J. M. F. Iniciação ao Conceito de Fração e o Desenvolvimento da Conservação de Quantidade. In: CARRAHER, T. N. **Aprender Pensando:** Contribuições da Psicologia Cognitiva para a Educação. 4. ed. Rio de Janeiro: Editora Vozes, 1986, Cap. 5.

LINZ, R. C. Matemática: monstros, significados e educação matemática. In: BICUDO, M. A.; BORBA, M. C. **Educação Matemática**: cultura em movimento. São Paulo: Editora Cortez, 2004. p. 93-94.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

MACHADO, I. A. Texto&Gêneros: fronteiras. In: DIETZSCH, M. J. M. **Espaços da Linguagem na Educação**. São Paulo: Humanitas, 1999, Cap. 2, p. 41-61.

MACHADO, N. J. Ação do professor: Quatro verbos fundamentais (tecer, mediar, mapear, fabular). In: MACHADO, N. J. **Conhecimento e Valor.** São Paulo: Editora Moderna, 2004, Cap. 5, p. 65-98.

______________. **A Universidade e a organização do conhecimento: a rede, o tácito, a dádiva**. Estudos Avançados, São Paulo, v. 15, n. 42, 2001. Disponível em<http://www. scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40142001000 200018&lng=en&nrm=iso>. Acesso em: 20 ag. 2008.

______________. **Educação:** Projetos e Valores. São Paulo: Escrituras, 2004.

______________. Notas sobre a ideia de mapa. In: MACHADO, N. J. **Educação:** competência e qualidade. São Paulo: Escrituras, 2009. Cap.5, p. 183-199.

______________. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez Editora, 1995.

______________. **Matemática e Educação:** Alegorias, tecnologias e temas afins. São Paulo: Editora Cortez, 1992.

______________. **Matemática e Língua Materna.** São Paulo: Editora Cortez, 1990.

______________. **Matemática e Realidade**. 3. ed. São Paulo: Editora Cortez, 1994.

______________. **Sobre alguns desequilíbrios na apresentação da Matemática básica**: discreto/contínuo, finito/infinito, exato/aproximado, determinístico/aleatório. São Paulo: IME-USP, 2009.

______________.**Sobre Livros Didáticos:** quatro pontos. Em Aberto, Brasília, ano 16, n. 69, jan./mar. 1996, p. 29-38.

MAOR, E. **e:** A História de um Número. 5. ed. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.

MARQUES, J. F. C. **Introdução à Teoria dos Números.** Piracicaba: Editora UNIMEP, 1993.

MELLO, S. B. **A compreensão do conceito de número irracional:** uma radiografia do problema e uso da História como uma alternativa de superação, 1999. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal Rural de Pernambuco, Pernambuco.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. Â. **O Ensino de Matemática no Primeiro Grau**. 7. ed. São Paulo: Editora Atual, 1986.

NIVEN, I. **Números Racionais e Irracionais**. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

OLIVEIRA, M. K; **Vygotsky:** Aprendizado e desenvolvimento: Um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1993. 111 p.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **The number *e*.** Setembro, 2001. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/e.html>. Acesso em 19 out. 2009.

OLIVEIRA FILHO, K.; SARAIVA, M. F. O. **Período Sinódico e Sideral dos Planetas**. IAG/USP, 2003. Disponível em: < http://astro.if.ufrgs.br/p1/node3.htm>. Acesso em 03 set. 2009.

OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. **O número *e*.** Lisboa, Depto de Educação da Faculdade de Ciências. 1998. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/ icm/ icm99/icm17/numeroe.htm>. Acesso em: 12 ag. 2009.

OTTE, M. **O Formal, o Social e o Subjetivo**: Uma Introdução à Filosofia e à Didática da Matemática. São Paulo: Editora Unesp, 1993, Cap. 10, p. 219-236.

PALIS, G. L. R. **Educação Matemática:** entrelaçando pesquisa e ensino, compreensão e mudança. Revista Educação On-Line, n.1, 2005. Disponível em: <http://www.maxwell. lambda.ele.puc-rio.br/rev_edu_online.php?strSecao=show11&fas=12>. Acesso em 12 jan. 2012.

PASQUINI, R. C. G. **UM TRATAMENTO PARA OS NÚMEROS REAIS VIA MEDIÇÃO DE SEGMENTOS:** UMA PROPOSTA, UMA INVESTIGAÇÃO, 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

PINTO, M.; TALL, D. **Student Teachers' Conceptions of the Rational Numbers.** Proceedings of PME 20, Valencia, 1996, v. 4, p. 139–146.

PIRES, C. M. C. **Currículos De Matemátic**a: Da Organização Linear à Idéia de Rede. São Paulo: FTD, 2000.

PITOMBEIRA, J. B. **Euclides, Fibonacci e Lamé.** Revista do Professor de Matemática, IME-USP, São Paulo, 1993, 2 sem, n. 24, p. 32-40.

PONTE, J. P. **Números e Álgebra no Currículo Escolar**. Lisboa, 2006. Disponível em: <http://www.spce.org.pt/sem/2jp.pdf>. Acesso em 12 fev. 2007.

RATHS, L. E. et al. **Ensinar a Pensar**. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 1977.

REGO, T. C. **Vygotsky:** Uma perspectiva histórico-cultural da educação. 12. ed. Petrópolis, Rio de Janeiro: Editora Vozes, 2001.

REZENDE, P. A. D. **A crise nos fundamentos da Matemática e a teoria da Computação**: Qual é a natureza da verdade matemática? Palestra Proferida no Seminário de Filosofia da UnB, 1999.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo:** Dificuldades de Natureza Epistemológica. 2003. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo.

RIPOLL, C. C. **A Construção dos Números Reais nos Ensinos Fundamental e Médio**. UFRGS, 2001.

SANCHES, C. F. M.; SALOMÃO, L. A. D. **A Expansão Do Número e em Frações Contínuas**. Uberlândia: FAMAT em Revista, n.1, dez. 2003. Disponível em: <http://www.famat.ufu.br/ revista/revistadez2003/artigos/ArtigoCarolinaSalomao.pdf>. Acesso em 15 nov. 2007

SANTALÓ, L. A. Matemática para não-matemáticos. In: PARRA, C.; SAIZ, I.: **Didática da Matemática:** Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. Cap. 1, p.11-25.

SANTOS, B. S. **A crítica da razão indolente:** contra o desperdício da experiência. 6. ed. São Paulo: Editora Cortez, 2007.

SANTOS, J. C. **NÚMEROS REAIS:** UM DESAFIO NA EDUCAÇÃO BÁSICA. CENTRO DE ESTUDOS GERAIS, INSTITUTO DE MATEMÁTICA. Niterói, 2007.

SÃO PAULO. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo**: Matemática/ Ensino Fundamental (ciclo II) e Médio. São Paulo: SEE, 2008.

SCHUBRING, G. **Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition:** Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century. France and Germany: Springer, 2005.

SILVA, A. L. V. **NÚMEROS REAIS NO ENSINO MÉDIO**: IDENTIFICANDO E ANALISANDO IMAGENS CONCEITUAIS, 2011a. Tese (Doutorado em Educação). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

_____________. **NÚMEROS REAIS NO ENSINO MÉDIO**. 2011b. Disponível em: <http://www.anped.org.br/app/webroot/34reuniao/images/trabalhos/GT19/GT19-1115%20res.pdf>. Acesso em 20 dez. 2011.

SILVA, B. A.; IGLIORI, S. B. C. **O que número real para estudantes que iniciam a Universidade?** E para os que a finalizam? Caracas. Ed. Universidade Nacional da Venezuela. Anais do III Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, 1998.

SILVA, B. A.; PENTEADO, C. B. **A densidade dos números reais:** concepções de professores da educação básica. Paradígma. [online], 2010, v. 31, n.1, p.123-140. Disponível em: <http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512010000100007&lng=es&nrm=iso>. Acesso em 15 ago. 2011.

SILVEIRA, J. F. P. **Cálculo das constantes elementares clássicas:** o caso do PI. 2001. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/aplcom1a.html>. Acesso em: 11 jan. 2009.

SIROTIC, N.; ZAZKIS, R. **IRRATIONAL NUMBERS**: THE GAP BETWEEN FORMAL AND INTUITIVE KNOWLEDGE. Educational Studies in Mathematics, 2007. p. 49–76. Disponível em: <http://blogs.sfu.ca/people/zazkis/wp-content/uploads/2010/05/2007-irrationals-gap-formal-intuitive.pdf>. Acesso em: 11 ago. 2011.

SMOLE, K.; DINIZ, M. I. **Matemática:** Ensino Médio. São Paulo: Editora Saraiva, 3 volumes, PNLEM 2006-2008.

SOARES, E. F., FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. **Números Reais:** Concepções dos Licenciandos e Formação Matemática na Licenciatura. ZETETIKÉ-CEMPEM. FE/UNICAMP, v. 7, n. 12, p. 95-117, jul-dez. 1999.

SOUTO, A. M. **Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica,** 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

STEWART, I. **Incríveis passatempos matemáticos**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 2010.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas.** 2. ed. Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1992.

THOM, R. **A Aporia Fundadora das Matemáticas**. In: Enciclopédia Einaudi, 2004, v. 43, p. 650-664.

THOMPSON, E. P. Folclore, Antropologia e História Social, 1976. In: THOMPSON, E. P. **As Peculariedades dos Ingleses e Outros Artigos.** Campinas: UNICAMP.

_______________. A História Vista de Baixo. 1966. In: THOMPSON, E. P. **As Peculariedades dos Ingleses e Outros Artigos.** Campinas: UNICAMP.

TOLEDO, M; TOLEDO, M. **Didática da Matemática**: Como Dois e Dois: A Construção da Matemática. São Paulo: Editora FTD, 1997.

VAILATI, J. S.; PACHECO, E. R. **Usando a História da Matemática no ensino da Álgebra**. 2008.

VARELLA, I. G. **Periodicidades nas Oposições de Marte.** Revista Astronomia e Astrofísica, n. 22, dez. 2006.

VOSKOGLOU, M; KOSYVAS, G. **A study on the comprehension of irrational numbers.** Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics), n. 21, 2011. Disponível em: <http://math.unipa.it/~grim/Voskoglou%20Kosyvas_Q21.pdf>. Acesso em: 11 ago. 2011.

VYGOTSKY, L. S. **A formação Social da Mente.** 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998a.

_______________. **Construção do Pensamento e da Linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 2001.

_______________. **Pensamento e linguagem.** 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998b.

ZAZKIS, R.; SIROTIC, N. **MAKING SENSE OF IRRATIONAL NUMBERS:** FOCUSING ON REPRESENTATION. Proceedings of the 28th Conference of the International. Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004. v. 4 p. 497–504. Disponível em: <http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR082_Zazkis.pdf>. Acesso em: 08 ago. 2011.