UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

CATHARINA DE OLIVEIRA CORCOLL-SPINA

Lógica *fuzzy*: reflexões que contribuem para a questão da subjetividade na construção do conhecimento matemático.

São Paulo
2010

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE EDUCAÇÃO

CATHARINA DE OLIVEIRA CORCOLL-SPINA

Lógica *fuzzy*: reflexões que contribuem para a questão da subjetividade na construção do conhecimento matemático.

Tese apresentada à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, como parte das exigências para obtenção do título de doutor em Educação, na Linha de Pesquisa Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Maria do Carmo Santos Domite.

São Paulo
Abril, 2010

Catalogação na Publicação
Serviço de Biblioteca e Documentação
Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo

375.3 Corcoll-Spina, Catharina de Oliveira
C793L Lógica Fuzzy: reflexões que contribuem para a questão da subjetividade na construção do conhecimento matemático / Catharina de Oliveira Corcoll-Spina; orientação Maria do Carmo Santos Domite. São Paulo: s.n., 2010.
165 p. il.; grafs. ; tabs.

Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática - - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo.

1. Educação matemática 2. Lógica Fuzzy 3. Raciocínio Fuzzy 4. Raciocínio (Aspectos matemáticos) 5. Subjetividade I. Domite, Maria do Carmo Santos, orient.

CATHARINA DE OLIVEIRA CORCOLL-SPINA

Lógica *fuzzy*: reflexões que contribuem para a questão da subjetividade na construção do conhecimento matemático.

Este exemplar corresponde à redação final da Tese de Doutorado em Educação de Catharina de Oliveira Corcoll-Spina submetida à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo - FE/USP – para obtenção do Título de Doutor em Educação, na Linha de Pesquisa: Ensino de Ciências e Matemática tendo sido aprovada, em ____/____/2010, pela seguinte Banca Examinadora:

BANCA EXAMINADORA

____

Prof(a). Dr(a). Maria do Carmo Santos Domite

FEUSP

____________________________ ____________________________

____________________________ ____________________________

Dedico este trabalho:

Aos meus pais
Juann (in memorian) e Clarice

A minha irmã
Nuria

A minhas filhas
Leticia, Lygia e Maria Luisa

AGRADECIMENTOS

Foram muitas as pessoas que colaboraram com este trabalho. Para algumas dessas pessoas o meu agradecimento é nominal uma vez que estiveram mais presentes em minha vida neste momento:

À professora Maria Do Carmo Santos Domite pelo incansável trabalho de orientação. Por ter me acolhido tão generosamente. Pelo apoio constante. Por ter compartilhado não apenas seus conhecimentos mas a sua amizade. Por tudo que aprendi durante estes anos.

Ao professor Rodney Carlos Bassanezi pelas inestimáveis contribuições generosamente oferecidas durante todo este percurso. Por ter sido o idealizador deste trabalho que me abriu novos horizontes, posso mesmo afirmar um co-orientador efetivo deste trabalho. Agradeço-o imensamente por ter confiado em mim.

Ao professor Geraldo Pompeu pelas valiosas sugestões no exame de qualificação.

Ao professor Lafayette de Moraes pelas valiosas sugestões e leitura cuidadosa do texto.

Á minha mãe e irmã queridas, por estar sempre ao meu lado me ajudando e dando força e carinho.

Às minhas filhas queridas cuja profundidade do elo afetivo é indicritível. Agradeço enormemente pelo incentivo e apoio.

Á Keli, companheira até o último momento na organização, formatação e correção do texto.

Á todos os alunos que participaram do trabalho de pesquisa, em particular ao Ricardo pela valiosa colaboração.

Aos inúmeros amigos que, de alguma forma, sempre estiveram presentes na elaboração do trabalho.

RESUMO

SPINA-CORCOLL, Catharina de Oliveira, **Lógica *fuzzy*: reflexões que contribuem para a questão da subjetividade na construção do conhecimento matemático.** 165 f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

A pesquisa de cunho qualitativo aqui apresentada tem como propósito discutir o valor e o papel da lógica *fuzzy* na solução de problemas reais, dada a característica de suas ferramentas para lidar com questões subjetivas, uma vez que as soluções de problemas provenientes do mundo real estão carregadas de relações construídas no mundo interno do resolvedor – são oriundas da subjetividade do sujeito resolvedor. Nosso trabalho teve como um dos objetivos responder às questões: Quais os pressupostos teóricos da teoria *fuzzy* e quais as possibilidades de reconhecimento de seu valor e de seu papel para a Educação Matemática? Como o pensamento matemático do aluno lida com o raciocínio *fuzzy*? Com essa perspectiva, aproximamo-nos dos alunos do Curso de Licenciatura das Faculdades Unificadas da Fundação Educacional de Barretos — UNFEB —, na busca de evidências, em termos de pesquisa, por meio de dois questionários e um minicurso ministrado pelo pesquisador, nesta ordem: questionário, minicurso e questionário. O primeiro questionário instigava o uso de variáveis subjetivas na solução de questões. O minicurso teve como foco central a resolução de um mesmo problema, utilizando matemática clássica e matemática *fuzzy*. O questionário final, de cunho avaliativo, verificava o uso, pelo aluno, das ferramentas da teoria *fuzzy* em problemas semelhantes aos anteriores. Os resultados da pesquisa indicaram a pouca experiência dos alunos com o raciocínio *fuzzy* – dada, talvez, a dominância da matemática formal/determinística; mostraram, também, evidências de que os mesmos problemas, resolvidos verbalmente, sem o uso da matemática, revelam-se especialmente desafiadores quando é solicitada uma solução matemática *fuzzy*.

Palavras-chave: Educação Matemática; lógica *fuzzy*; raciocínio *fuzzy*; subjetividade;

ABSTRACT

SPINA-CORCOLL, Catharina de Oliveira, **Fuzzy logic: reflections that contribute to the question of subjectivity in the building of mathematical knowledge.** 165 f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

The qualitative research here presented intends to discuss the value and the role of fuzzy logic in the solution of real problems, due to the characteristic of its tools to deal with subjective questions, since the solution of problems originated in the real world are loaded with relationships built in the resolver's internal world – they are originated in the subject-resolver's subjectivity. Our work had as one of its goals to answer the questions: Which are *Fuzzy* Theory theoretical assumptions and what are the possibilities of acknowledgement of its value and role to Mathematical Education?; How does the student's mathematical thinking deal with fuzzy reasoning**?** On this perspective, we approached the students of the Curso de Licenciatura das Faculdades Unificadas da Fundação Educacional de Barretos - UNFEB – searching for research evidences – by means of two questionnaires and a mini-course taught by the researcher, in the following order: questionnaire, mini-course and questionnaire. The first questionnaire incited the use of subjective variables in the solution of questions. The mini-course, after the questionnaire, had as main focus the solution of one (same) problem using classical mathematics and fuzzy mathematics. The final questionnaire, of evaluative nature, verified the student's use of fuzzy theory tools for problems similar to the previous ones. The research results indicated the students' little experience with fuzzy reasoning – maybe due to the dominance of formal/deterministic mathematics – as well as showing evidences that the same problems solved verbally without the use of mathematics were especially challenging when a fuzzy mathematics solution was requested.

Keywords: Mathematical Education; Fuzzy Logic; Fuzzy Reasoning; Subjectivity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 10. Representação de um número fuzzy triangular. 62

Figura 11. Representação de um número fuzzy trapezoidal...........................62

Figura 1a. Funções de pertinência de *presas*: conjunto *fuzzy* contínuo e discreto...82

Figura 1b. Funções de pertinência dos predadores: conjunto *fuzzy* contínuo e discreto...82

Figura 2. Esquema representativo do método de inferência de Mandani.......83

Figura 3. Diagrama representativo de um sistema dinâmico p-*fuzzy* 84

Figura 4. Diagrama representativo da dinâmica presa x predador 85

Figura 5. População de presas 87

Figura 6. População de predadores...87

Figura 7. Interação presa-predador 87

Figura 8. Tabela comparativa: valores do censo da população brasileira 89

Figura 9. Gráfico comparativo: valores do censo da população brasileira / solução modelo *fuzzy*..89

Figura 10. Diagrama representativo do modelo SI de epidemiologia 91

Figura 11. Fonte: Dados divulgados pela OMS e pela Secretarias de Saúde dos Estados brasileiros reportados nos *sites* dos portais Terra, Uol e Folha. 91

Figura12. Gráfico representativo do crescimento exponencial de infectados.92

Figura 13. Função de pertinência da população de infectados.......................92

Figura 14. Função de pertinência da variação da população de infectados. ..93

Figura 15. Base de regras do sistema SI...93

Figura 16. Solução de I do modelo SI, através de um controlador *fuzzy*........94

Figura 17. Conjunto de variáveis linguísticas utilizadas para quantificação das variáveis em estudo 95

Figura 18. Função de pertinência: densidade de pulgões 96

Figura 19. Expressão algébrica da função de pertinência de números fuzzy triangulares..96

Figura 20. Função de pertinência: variação da densidade de pulgões...........96

Figura 21. Função de pertinência: variação da densidade de pulgões...........96

Figura 22. Tabela: Base de regras 97

Figura 23. Esquema representativo do método de Mandani, de duas entradas e uma saída...97

Figura 24. Solução do sistema 98

Figura 25. Diagrama representativo do modelo para realização de diagnósticos médicos 99

Figura 26. Relação *fuzzy* sintomas X transtorno de comportamento (R)......101

Figura 27. Relação *fuzzy* pacientes X sintomas elaborados por especialista (S) 102

Figura 28. Relação *fuzzy* aluno ou paciente X transtorno de comportamento (T)...104

Figura 29. Tabela: base de conhecimento...105

Figura 30. Tabela: processo de inferência 106

Figura 31. Tabela: preferência de escolha...106

Figura 32. Representação do plano da fita..123

Figura 33. Conjunto *fuzzy* da dor..123

Figura 34.Tabela dos valores atribuídos pelo pesquisador a produção escrita dos alunos..144

Figura 35. Esquema representação do método de inferência de Mandani e funções...145

Figura 36. Base de regras linguísticas para avaliação dos trabalhos efetuados 146

Figura 37.Funções de pertinência ....…… 147

Figura 38. União das areas dos máximos da figura 37 …...........................148

Figura 39. Saída fuzzy do processo de avaliação……..................................149

Figura 40. Tabela dos valores - avaliação inicial e final…............................151

Figura 41. Gráfico comparativo das avaliações clássica e final 153

Figura 42. Gráfico comparative das medias fuzzy inicial e final 153

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO 17

CAPÍTULO 1. A PESQUISA: ESTRUTURA E CONTEXTO....................................26

1.1 – Área temática 26

1.2 – A origem do problema e o problema em si 27

1.2.1 – O ensino de matemática: alguns desafios da prática...........................28

1.2.2 – Modelagem e a Teoria Fuzzy: um encontro...30

1.3 – Objetivos 33

1.4 – O caminho da pesquisa...34

1.5 – Da fundamentação..38

1.5.1 – Da subjetividade e da Matemática...38

1.5.2 – Da Teoria Fuzzy...39

1.5.3 – Da Modelagem Matemática 40

CAPITULO 2. MATEMÁTICA: O DETERMINISMO EM DISCUSSÃO....................42

2.1 – Determinismo e o processo de conhecer...43

CAPÍTULO 3. UM POUCO DE TEORIA *FUZZY* 54

3.1 – Conjuntos *fuzzy* 55

3.2 – Números *fuzzy* 60

3.2.1. – Operações aritméticas envolvendo números fuzzy............................63

3.2.2. –Princípio de extensão de Zadeh 64

3.3 – Lógica Fuzzy 66

3.3.1. –Variáveis Linguísticas e Proposições Fuzzy...66

3.3.2. – Conectivos Lógicos..67

3.3.3 – Relações e Produto Cartesiano Fuzzy 69

3.3.4 – Sistema baseado em regras fuzzy **70**

3.3.5 – Fuzzificação **71**

3.3.6 – Módulo da base de regras **71**

3.3.7 – Módulo de inferência fuzzy **72**

3.3.8 – Módulo de defuzzificação **73**

3.4 – Medida *fuzzy* **75**

3.4.1 – Esperança fuzzy **77**

CAPÍTULO 4. QUANDO OS PROBLEMAS SE ESTABELECEM **80**

4.1 – Lógica *fuzzy* como processo de modelagem de situação-problema **80**

4.1.1 – O modelo presa -predador **84**

4.1.2 – O modelo malthusiano e o crescimento populacional **88**

4.1.3 – O modelo SI de epidemiologia **90**

4.1.4 – O modelo de controle de pragas **94**

4.1.5 – Modelo fuzzy para diagnóstico médico. **98**

4.1.6 – Sistemas fuzzy na escolha de projetos populares **104**

CAPÍTULO 5. A PESQUISA: O PLANO EM AÇÃO **109**

5.1 – Para interpretar o que se passou... .... **109**

5.2 – O desenvolvimento da pesquisa **111**

5.3 – Uma tentativa de análise **116**

5.4 – Buscando evidências... .... **117**

5.5 – Análise dos problemas/atividade inicial **118**

5.5.1 – Problema 1 .... **119**

5.5.2 – Problema 2 .... **121**

5.5.3 – Problema 3 .... **124**

5.5.4 – Problemas 4 e 6 .... **125**

5.5.5 – Problema 5 127
5.5.6 – Problema 7 129
5.5.7 – Problema 8 130
5.6 – Análise dos problemas/atividade final: 132
5.6.1 – Problema 1 133
5.6.2 – Problema 2 136
5.6.3 – Problema 3 138
5.6.4 – Problema 4 141
5.3 – Um processo de análise .... Erro! Indicador não definido.
CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES 157
REFERÊNCIAS 162
ANEXO A – RESPOSTAS AO QUESTIONÁRIO ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.

APRESENTAÇÃO

APRESENTAÇÃO

> As estruturas básicas do mundo material são determinadas, em última instância, pelo modo como observamos este mundo; e os modelos da matéria são reflexos de modelos da mente. (Crema, 1989)

Em diferentes situações do mundo físico e social existem inúmeras maneiras de representar e compreender as relações quantitativas e espaciais. De fato, as situações abaixo deixam-nos motivados a refletir e buscar respostas em torno de tais relações:

Interação entre duas espécies.

A relação presa-predador trata da interação entre duas espécies de animais, na qual uma delas (presa) dispõe de alimentos em abundância, e a segunda espécie (predador) tem como suprimento alimentar exclusivamente a população de presas. O que se passa durante esse processo?

No conjunto dos predadores, quem é mais predador: o filhote, o jovem ou o velho?

Se é filhote de presa é mais predado que uma presa adulta?

Quando é possível considerar homogêneo o conjunto de

O encontro das águas de dois rios.

No encontro das águas entre os rios Solimões e Negro, diferentes densidades, colorações e temperaturas criam uma “fronteira” difusa por quilômetros, rio Amazonas abaixo. A mistura das águas dá-se lentamente e de maneira não homogênea.

Quais as subjetividades envolvidas nesta situação?

Numa amostra de água da região fronteiriça, quanto pertence a cada rio?

Diagnóstico Médico.

O comportamento e a comunicação do paciente podem alterar a compreensão do médico diante da patologia?

O médico mais experiente tem mais conhecimento acumulado, no que se refere aos sintomas que estão em jogo para construção do diagnóstico. Tem o médico mais experiente mais ou menos sensibilidade e intuição diante dessa relação sintoma-comportamento do paciente?

O médico menos experiente certamente possui menos conhecimento acumulado, no que se refere ao jogo sintoma-comportamento. E quanto à sensibilidade e à intuição desse profissional mais jovem?

Sintomas semelhantes e doenças diferentes?

A casa própria é o sonho de muitas pessoas. Aquelas de menor renda, na escolha do projeto, pedem auxílio para prefeitura; outras utilizam a internet, onde hoje já é possível encontrar vários projetos prontos.

A opção por uma determinada planta está relacionada a necessidades pessoais e familiares, ao custo da construção, entre outros.

Como poderia se dar um processo de escolha orientado por uma atuação (previsível ou desejada) do arquiteto?

O que pesa mais numa escolha de casa: preço, beleza, comodidade, cor?

Se alguém encontra duas bicas d'água com as respectivas inscrições:

-"A probabilidade desta água estar contaminada é 10%"

- "O grau de contaminação desta bica é de 0,1"

Qual seria a fonte mais apropriada para matar a sua sede?

E, então, nas situações, nas imagens, nos grupos socioculturais apresentados, podemos perceber relações quantitativas e espaciais, ou seja, relações matemáticas? Se sim, como enunciá-las? Quem tem olhado para estas situações procurando ver matemática? Aqueles que buscam reconhecer relações matemáticas em situações do mundo físico-social — em geral, o matemático aplicado — como têm lidado com a solução dos problemas aí formulados?

De maneira geral, questões como estas são geradoras da nossa pesquisa e, de algum modo, o desenvolvimento desta investigação está direcionado a respondê-las.

Uma das tensões em torno do estudo destas situações e destas questões está na possibilidade de levar em conta os valores e as avaliações do resolvedor e, por isso, considerar que a solução evolui vinculada a instrumentos subjetivos. Em geral, há pontos de vista e opiniões que podem alterar o tratamento a ser dado aos problemas. Tais modos variam de acordo, por exemplo, com a maneira de o resolvedor refletir sobre a situação, com mais ou menos liberdade de levar em conta uma perspectiva própria, subjetiva, influenciando a maneira de compreender e encaminhar a solução por meio de um tratamento matemático.

Em outras palavras, a força motriz das soluções pode usar (ou não) uma matemática que lida (ou não) com fatores pessoais e, portanto, colocá-las em posições que podem (ou não) depender dos diferentes aspectos que estão em jogo na situação. Na própria história da humanidade, os fatores sociais, afetivos, biológicos, físicos, entre outros, entram em jogo para fazer ressurgir maneiras de pensar, compreender e atuar na sociedade. Como bem exemplifica Morin (2008, p. 56, grifo nosso):

> A primeira revolução científica de nosso século, iniciada pela termodinâmica de Boltzmann, deflagrada pela descoberta dos quanta, seguida pela desintegração do Universo de Laplace, mudou profundamente nossa concepção de mundo. *Minou a validade absoluta do princípio determinista*[1]. Subverteu a ordem do mundo, grandioso resquício da *divina Perfeição*, para substituí-la por uma *relação de diálogo* (ao mesmo tempo complementar e antagônica) entre ordem e desordem. Revelou os *limites dos axiomas identificativos da lógica clássica*. Restringiu o calculável e o mensurável a uma dependência do *incalculável e do imensurável*. Provocou

[1] Morin (2008) afirma que, no meio dos fenômenos deterministas, que obedecem a uma dinâmica não linear, há de fato uma incerteza para predizer, devido à ausência de informação completa sobre os estados iniciais ou sobre a emaranhada multiplicidade das interações. Segundo o autor, é o caos determinista.

> um *questionamento da racionalidade científica*, exemplificada pelas obras de Bachelard, Piaget, Popper, Lakatos, Kuhn, Holston, Feyerabend, notadamente.

Com efeito, o processo de conhecer não se sustenta em verdades absolutas — está, na verdade, em uma permanente articulação dialógica com certezas e incertezas, com opiniões, crenças e conhecimento mais elaborado. Ou seja, torna-se imprescindível, nos processos de construção de conhecimento, prestar atenção aos pensamentos refletidos nas palavras, assim como distinguir as crenças e os comportamentos em torno do conhecimento. É importante distinguir também o modo como os cientistas que estão dentro de uma rede poderosa veem o que está fora dela.

As construções mais subjetivas, em geral, estão no plano das crenças vistas, em Ponte, como uma parte do conhecimento relativamente pouco elaborada, predominando a elaboração mais ou menos fantasista e a falta de confrontação com a realidade empírica. Segundo o autor, no conhecimento mais elaborado de natureza prática, predominariam os aspectos experienciais e, no de natureza teórica, predominaria a argumentação racional. (PONTE, 1992, p. 195-196).

As crenças são, portanto, de ordem subjetiva, ou seja, falam mais sobre quem as sustenta do que sobre o assunto em questão propriamente dito; os *conhecimentos mais elaborados,* ao contrário, discutem o assunto em estudo propriamente dito e tendem a ser sempre mais objetivos. De algum modo, subjetividade e objetividade dizem respeito a conhecimento. De um ponto de vista filosófico, Morin (2008, p. 59) considera que:

> [...] o conhecimento nunca é um reflexo do real, mas sempre uma tradução e, portanto, comporta risco de erro, ou seja, é sempre uma aproximação do real; um fato é sempre tributário de interpretação e finalmente, decorre da crise dos fundamentos da certeza — em filosofia (a partir de Nietzsche), depois em ciência (a partir de Bachelard e Popper).

Em uma tentativa de refletir na práxis um problema matemático apresentamos a seguinte situação vivenciada por Leal Ferreira (2002, p. 56) junto à turma que lecionava na escola do Diauarum no Parque Xingu: “Se ontem à noite você pescou 10 peixes e deu 3 para seu irmão, quantos peixes você tem agora?”, obteve de um aluno a resposta: 13 peixes.

Ao analisarmos a resposta sob o ponto de vista da matemática acadêmica, podemos dizer que o aluno se equivocou ao encontrar o resultado. Entretanto, a resposta do aluno — ainda, talvez, no âmbito da matemática formal — foi assim justificada:

> *Indígena Suyá: Eu fico com 13 ou posso ficar com 7 ou pode ser que com 5.*
>
> *E o Suyá começou a explicar... eu fico com 13 porque sempre que eu dou alguma coisa para um parente ele me devolve em dobro.*
>
> *Eu fico com 7 porque ele pode não ter peixe.*
>
> *Eu fico com 5 porque ele pode ser daqueles...*
>
> (LEAL FERREIRA, 2002, p. 56)

Entretanto, de algum modo, subjetividade e objetividade dizem respeito a conhecimento propriamente dito. Morin (2008) considera a existência de três princípios de incerteza: o conhecimento nunca é um reflexo do real, mas sempre uma tradução, e, portanto, comporta risco de erro, ou seja, é sempre uma aproximação do real; um fato é sempre tributário de interpretação; e, finalmente, decorre da crise dos fundamentos da certeza — em filosofia, a partir de Nietzsche; depois, em ciência, a partir de Bachelard e Popper.

Podemos observar que a resposta do indígena Suyá, apesar de parecer estranha para um não indígena Suyá, não deixa de ser matematicamente correta para cada um dos grupos. Entretanto, a mesma situação seria, talvez, menos chocante para a matemática acadêmica, se a resposta do índio fosse em uma linguagem menos precisa, talvez assim: *se eu pesquei muito peixe, posso dar alguns para meu irmão — se ele também tiver pescado muito, vai me devolver mais do que lhe dei. Se ele não tiver peixe, ficarei com pouco menos do que tinha antes; mas, se ele for daqueles, vou ficar com menos ainda, pois ele não vai me dar mais!*

Observamos que esta linguagem é caracterizada pela subjetividade refletida nas palavras (variáveis linguísticas) *muito, pouco e alguns*, próprias das raízes culturais do conhecimento do índio suyá diante das questões que emergem da sua realidade.

Concordamos com Duarte (2006, p.198), que refletiu sobre essa situação, entre outras, e afirma que:

> [...] situações como esta indicam que impor uma determinada racionalidade através da Matemática acadêmica significa muito mais do que dar primazia a um modo de pensar, a uma lógica específica: significa a possibilidade de destruir os valores e significados que acompanham a racionalidade de outras culturas.

Desse modo, compreender um outro ponto de vista matemático segundo o qual a resposta dada pelo aluno estaria correta exigiria, por exemplo, levar em conta os valores e os significados que acompanham a racionalidade da cultura de seu povo, ou seja, os aspectos subjetivos de que são constituídas as coisas e as relações em si.

De todo modo, a Lógica *Fuzzy*, também denominada Nebulosa, de alguma maneira — inspirada na lógica clássica — vem sendo utilizada para abordar problemas em que modos de raciocínio aproximado, observados comumente na comunicação humana, são utilizados para expressar uma ideia, uma tomada de decisão ou para comunicar um resultado. Tal organização lógica, baseada na teoria dos conjuntos fuzzy, difere da lógica tradicional em diferentes características e detalhes, para ir ao encontro, por exemplo, do fato de que "quase todas as coleções de objetos que encontramos no mundo real não são definidas com precisão" (ZADEH, 1965). O autor, um dos precursores da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, observou:

> [...] a classe dos animais mamíferos — os cães, os cavalos, os veados etc. pertencem a esta classe — mas elementos como a estrela do mar possuem um classificação muito ambígua — os dois termos contraditórios "animais" e "não-animais". Do mesmo modo podemos citar os conjuntos "máquinas velhas" e "temperatura amena", que não apresentam uma definição precisa. (ZADEH, 1965, p.338)

Dessa forma, classes com contorno incerto permeiam a linguagem e o pensamento humano e têm papel fundamental/importante, na comunicação e na informação. A ideia de Zadeh foi de quantificar essa incerteza, que é devida não ao acaso, à probabilidade, mas à ausência de critérios bem definidos de pertinência a uma determinada classe ou conjunto. O substrato resultante da teoria dos conjuntos *fuzzy* usa a precisão rigorosa da matemática para tratar a imprecisão das expressões e do pensamento humano.

Se o artigo de Zadeh (1965) começa com uma afirmação óbvia, o que se segue é revolucionário.

É importante esclarecer, também, que, ao longo deste trabalho, procuraremos apresentar algumas ideias que precedem as tomadas de decisões, usando argumentos da teoria dos conjuntos *fuzzy* e dando ênfase ao pensamento complexo, quando as informações são parciais ou imprecisas, isto é, quando a racionalidade é baseada em fatos nebulosos. Assim se estrutura este texto:

No **Capítulo 1**, delinearemos o nosso trabalho de pesquisa, evidenciando os pressupostos teóricos, o problema de pesquisa, nossos objetivos e a trajetória percorrida, no sentido de validá-los (ou não). A pesquisa de campo e os métodos escolhidos para análise dos resultados obtidos também estarão ali registrados.

O **Capítulo 2**, de cunho mais filosófico, apresentará algumas considerações sobre as origens do pensamento matemático encontrado atualmente nas escolas e na universidade; passará por questões ligadas à precisão, ao rigor matemático e à subjetividade que permeia as mais diversas relações que ocorrem no nosso ambiente; culminará com o estudo de algumas ferramentas criadas para abordar diferentes tipos de subjetividade. Ainda nesse capítulo, daremos ênfase à estratégia de aprendizagem e ensino — Modelagem Matemática — escolhida por nós para este trabalho.

O **Capítulo 3** fará uma retrospectiva histórica sobre as origens da teoria dos conjuntos *fuzzy* e da lógica *Fuzzy*. Em seguida, definiremos conjunto *fuzzy* e as operações com subconjuntos *fuzzy*; números *fuzzy* e operações aritméticas com números *fuzzy*; relações *fuzzy*; noções da lógica *fuzzy*; sistemas baseados em regras *fuzzy*; equações relacionais *fuzzy* e princípio de extensão de Zadeh.

O **Capítulo 4** foi composto de várias situações problema, incluindo aquelas apresentadas na introdução, solucionadas a partir da utilização da teoria *fuzzy*. Em algumas situações, faremos a comparação dos resultados obtidos em matemática *fuzzy* e em matemática clássica.

No **Capítulo 5** descreveremos a pesquisa de campo realizada com os alunos de um curso de graduação em Matemática. Buscaremos nesse momento expor como esses alunos lidavam com algumas ideias fundamentais da teoria dos conjuntos *fuzzy* — conjunto *fuzzy*, variáveis linguísticas e base de regras. Em um primeiro momento apresentaremos o conjunto de questões e problemas oferecido aos participantes da pesquisa para que pudéssemos obter algumas informações sobre as concepções prévias dos alunos a respeito das ideias mencionadas. Em seguida, revelaremos como, a partir das questões e dos problemas iniciais, desenvolvemos um curso, composto por sete encontros, onde abordamos conceitos da teoria *fuzzy* – foco desta pesquisa. O capítulo apresentará, por fim, um outro conjunto de questões e problemas oferecido após o curso para detectar se houve alguma alteração nas percepções iniciais demonstradas pelos alunos.

Nas nossas análises, apresentaremos relatos dos alunos e a *avaliação fuzzy*, realizada para completar o processo diagnóstico. Destacaremos também alguns pontos relevantes desse tipo de avaliação.

Finalmente, apresentaremos algumas reflexões, nas **Considerações finais**, a respeito deste trabalho de pesquisa.

CAPÍTULO 1

A pesquisa: estrutura e contexto

CAPÍTULO 1. A PESQUISA: ESTRUTURA E CONTEXTO

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma configuração do nosso trabalho, um esboço dos processos esperados em um trabalho acadêmico educacional que podem, de algum modo, garantir um delineamento da unidade de análise e evidências para uma análise propriamente dita.

De modo a construir tal *configuração*, apresentaremos, de certa maneira, a *área temática* em que o tema está envolvido, as *razões* que nos levam a encaminhar tal investigação geradora da *gênese do problema de pesquisa* e o problema em si, assim como os *objetivos/finalidades* deste trabalho. A *fundamentação teórica* do estudo, em busca das diferentes contribuições científicas disponíveis sobre o tema, estará aqui apresentada como uma demanda do problema formulado e como suporte para a determinação dos objetivos, para as diferentes fases da pesquisa e para a elaboração da análise. O *método* escolhido para encaminhar esta construção deve mostrar-se diretamente ligado ao problema de pesquisa e, por isto, está dentro de uma vertente da pesquisa qualitativa. Estará também aqui enunciado o *trabalho de campo* que desenvolvemos, construindo/possibilitando evidências para análise, no Instituto Superior de Educação das Faculdades Unificadas da Fundação Educacional de Barretos, com alunos da graduação em Matemática. E, por final, exporemos os *fatores qualitativos da análise* e um prenúncio da análise em si.

1.1 – Área temática

De modo geral, a pesquisa está relacionada às discussões que tratam do desenvolvimento de uma dinâmica dialógica entre áreas de estudo – Filosofia, Lógica, Epistemologia da Matemática e Matemática – e da compreensão das relações de um núcleo desse tipo, de modo a encontrar nesse interior os fundamentos para uma Educação Matemática que se propõe partir de problemas do mundo real.

A preocupação central do trabalho está em examinar o valor e o papel da lógica *fuzzy* como uma ferramenta lógico-matemática a serviço das soluções de problemas (matemáticos) reais[2], pela necessidade de recursos não próprios de uma perspectiva matemática puramente formal. Cunha (2004, p.2) muito bem argumenta nesta perspectiva:

> O fato é que, nas situações da vida cotidiana, diferentemente dos contextos da Lógica Formal, para argumentar é fundamental interessar-se pela verdade das premissas, tanto quanto o é explicitar os nexos entre elas e a conclusão que se apresenta como verdadeira. E como o que se busca, em geral, é convencer os outros e persuadi-los a agir do modo que nos interessa, muitos recursos extra-lógicos, dispensáveis numa perspectiva puramente formal são utilizados pelos participantes de um debate, de uma discussão, de uma argumentação.

Em termos de área temática deste estudo, no âmbito da pesquisa em educação matemática, este pode ser compreendido como um estudo histórico e epistemológico do uso de uma lógica que lida com questões que argumentam no cotidiano, recorrendo a uma linguagem ordinária.

1.2 – A origem do problema e o problema em si

Parte do título aqui colocado, "origem do problema", é de algum modo uma maneira não tão acadêmica de expressar o que comumente tem sido apresentado como "justificativa" de um trabalho de pesquisa como este em questão. Nesta etapa, buscamos, em geral, explicar as razões da escolha do tema, assim como sua relevância e importância para transformação de um quadro que vem se mostrando pouco valioso para trazer benefícios aos processos de aprendizagem e ensino que tomam como ponto de partida problemas da realidade socioeconômica e cultural, entre outras.

---

[2] "Problema real" tem aqui a interpretação dada por Blum (1990), como uma situação aberta que pertence ao "mundo real" e, para a sua solução, alguma matemática pode ser útil. Blum entende por "mundo real", *the rest of the world*, fora da matemática, como por exemplo "disciplinas escolares ou universitárias diferentes da matemáticas, ou a vida do dia a dia e o mundo a nossa volta".

1.2.1 – O ensino de matemática: alguns desafios da prática

Desde as nossas primeiras reflexões como docente nos anos iniciais dos cursos de graduação, temos como perspectiva a transformação de um quadro que, de algum modo, pode ser delineado como segue.

De modo geral, os objetivos usualmente apontados para o ensino da matemática, em todas as suas modalidades, incluem o conhecimento dos fatos matemáticos e a capacidade de pensar de modo lógico/coerente; no entanto, na prática é possível perceber, cada vez mais e mais, que tais objetivos não têm sido alcançados de modo satisfatório. É consenso entre os educadores/professores de matemática, por exemplo, que, ao ingressar na graduação, o aluno não possui um pensamento matemático bem desenvolvido; apresenta inúmeras deficiências em relação ao conhecimento específico, bem como dificuldade de leitura, de interpretação de texto e de argumentação profícua.

Como conhecido, tais dificuldades originam-se no ensino fundamental e médio, em que as relações escolares com os processos de ensino e aprendizagem são atravessadas por inúmeras questões de natureza social, política e econômica, a ponto de comprometer o desenvolvimento das aprendizagens esperadas em cada momento da escolarização (BEZERRA, 2009; CARVALHO, 2003, 2008, 2009; SILVA, 2008). Embora existam várias ações dos governos e das universidades para a melhoria da qualidade da educação, tais como: a criação de mecanismos para garantia da formação continuada ao professor (de matemática); as iniciativas inovadoras na elaboração dos livros didáticos; e, em alguns casos, a melhoria das instalações e equipamentos para as aulas, podemos reconhecer que os alunos têm mostrado pouca motivação frente ao ensino e a aprendizagem da matemática. E podemos, até mesmo, dizer que são levados a aprender matemática por imposição — o que resulta em baixo desempenho, reprovações e evasões. (ARAUJO, 2005; FAGNANI, 2005; SOUZA; BRITO, 2008)

Com efeito, nos últimos anos tem sido possível perceber uma insatisfação cada vez maior e recorrente com relação aos resultados do processo de ensino e aprendizagem, de modo geral, por parte tanto dos sujeitos dos processos escolares — profissionais da educação, pais e alunos — quanto de outras esferas componentes do sistema. Tal insatisfação, aparentemente generalizada, com a qualidade do ensino é apontada por Tedesco (2007) como um fenômeno mundial: muitos países, ricos ou pobres, estão descontentes com a qualidade do ensino que praticam. O autor apresenta como exemplo o caso da Finlândia que, embora seja um país que ocupe, desde 2000, as primeiras colocações no *ranking* mundial das avaliações internacionais de matemática e ciência do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa)[3], vem questionando a qualidade do próprio ensino pelo fato de não haver mudanças significativas em seus indicadores, ao longo de um período de avaliações sistemáticas (informação verbal)[4].

O Brasil, nessas avaliações, tem ocupado as últimas posições do *ranking*[5]. Em 2006, por exemplo, ficou à frente apenas de países como Tunísia, Catar e Quirziquistão (PISA, 2006). Tais posições, largamente inferiores às da Finlândia nesse *ranking*, revelam que os resultados dos processos de ensino, de algum modo, não estão satisfatórios.

No bojo dessa discussão, agora analisando especificamente o caso do ensino de matemática, inclusive internacionalmente, vale destacar que D'Ambrosio (1991) vem assinalando com convicção que esta situação se deve em parte à matemática que estamos ensinando e à forma como a estamos ensinando; e, ainda, ao fato de que "[...] muito da matemática acadêmica é absolutamente inútil na sociedade moderna. Quando digo boa matemática acadêmica, estou excluindo o que é desinteressante, obsoleto e inútil, que, infelizmente, domina os programas vigentes". (D'AMBROSIO, 2000, p.151)

Em verdade, é sabido que nestes quase 20 anos algumas mudanças já ocorreram, porém ainda não foram incorporadas à prática docente do professor. Muitos tópicos relativos ao ensino da Matemática são, ainda hoje, influenciados pelas ideias da matemática moderna[6],

---

[3] O Pisa avaliou, em 2000, 43 países; em 2003, 41; e, em 2006, 57 países. A Finlândia obteve, nesses anos, respectivamente, nas avaliações das competências em Matemática, 6º, 2º e 2º lugares; em Ciências, 4º, 1º e 1º; e, em Leitura, 1ª, 1ª e 2ª posições.

[4] Informação fornecida por Juan Carlos Tedesco no Ciclo de Debates sobre "A qualidade da Educação Básica: as multideterminações da qualidade" realizada pela FE-USP e IEA no dia 22/06/07.

[5] O Pisa avaliou, em 2000, 43 países; em 2003, 41; e, em 2006, 57 países. A classificação do Brasil, respectivamente nesses anos, nas avaliações das competências de Matemática foi 42º, 41º e 54º; em Ciências foi 42º, 40º e 52º e de Leitura foi 39º, 38º e 49º.

[6] Os currículos de Matemática foram influenciados pela *Matemática Moderna*, que pretendia diminuir o descompasso existente entre o ensino da Matemática nas escolas de nível secundário e os últimos avanços científico-tecnológicos. Esse movimento – de rápida disseminação por todo o mundo - apresentava uma proposta baseada, de um lado, nos postulados estruturalistas de Jean Piaget; e, de outro, na forma axiomática

e os conteúdos continuam sendo, na maioria das escolas, aplicados rigidamente com base em definições, nomenclatura e exercícios repetitivos, privilegiando o desenvolvimento algébrico e a aplicação de regras. Exemplos e exercícios têm sido sugeridos ou escolhidos de modo a propiciar a aplicação direta de fórmulas, de maneira que os resultados obtidos sejam exatos.

Do nosso ponto de vista, a matemática assim ensinada não tem ajudado a convocar o aluno, com entusiasmo, para sua aprendizagem, e é possível reconhecer aqui uma das razões pelas quais o desenvolvimento da nossa pesquisa se justifica.

1.2.2 – Modelagem e a Teoria Fuzzy: um encontro

Alguns desafios do ensino de matemática observados em nossa prática docente, como os citados, foram nos mobilizando cada vez mais como educadora. Com o olhar mais e mais sensível e atento, iniciamos uma busca por alternativas para o ensino da matemática – em princípio no nível médio e posteriormente na graduação –, por meio da participação em cursos, encontros, seminários, palestras e congressos que ajudassem a refletir sobre a prática docente, diante da necessidade de convocar o aluno, com entusiasmo, para a aprendizagem da matemática.

Nesse movimento de reflexão sobre a prática e de continuidade da formação profissional, entramos em contato com discussões, aplicações e teorizações, das quais destacamos a Modelagem e a Teoria *Fuzzy*, que foram se constituindo, em nossas reflexões, como possibilidades de provocar algumas mudanças no que tange às escolhas tanto metodológicas, quanto de conteúdos curriculares naqueles níveis de ensino.

O encontro com a Modelagem deu-se na vivência durante o curso de especialização intitulado "Modelagem Matemática e Ensino-Aprendizagem", promovido pela equipe do

---

sistematizada pelo grupo Bourbaki, privilegiando os conjuntos, as relações e as estruturas, centralizando-se na linguagem e em justificações matemáticas rigorosas. **Nicolas Bourbaki** era o nome fictício de um grupo de matemáticos, na maioria franceses, cuja intenção era condensar toda a Matemática de seu tempo, em uma obra intitulada *Élements de mathématique* (MIORIM, 1998, p. 11).

professor Bassanezi da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) e realizado na Unifeb (Barretos) em 1996, no projeto Pró-Ciência. No referido curso, tivemos a oportunidade de conviver com professores atentos aos problemas da realidade e, acima de tudo, capazes de matematizá-los de modo a articular e integrar conhecimentos geralmente tratados pela escola de forma fragmentada.

Em verdade, nesse processo o que realmente nos envolveu foi a metodologia utilizada pelos professores formadores, própria da aplicação da Modelagem Matemática em contexto escolar, pelo fato de que os alunos-professores efetivamente se tornam sujeitos do processo de aprendizagem, ao criarem problemas a partir da realidade vivida ou pesquisada — no nosso caso, em Barretos, foram significativas as temáticas agrícolas, da piscicultura, da festa do peão, entre outras – ou ao viverem o processo de construção do conhecimento pela matematização dessa realidade.

De fato, a apropriação dessa ferramenta metodológica – que prioriza o desenvolvimento de conceitos – permitiu-nos vislumbrar outros modos de organização dos conteúdos curriculares que, em geral, são tradicionalmente tratados de modo rigidamente estruturado, com tópicos sequenciais e hierarquizados. Tal mudança acarretaria outras, como, por exemplo, a flexibilização no uso do livro didático que, com o emprego dessa metodologia, deixaria de ser instrumento central – por vezes único – e organizador do processo pedagógico e passaria a ser considerado fonte de informação e pesquisa. Além do quê, há ainda fatores de natureza afetiva que tal metodologia fez despertar nos cursistas, como sentimento de auto-realização, auto-estima, valorização pessoal e também da Matemática, que agora – sabia-se – poderia ser usada como instrumento de investigação e compreensão da realidade circundante. Encontramos aqui outra razão pela qual nossa pesquisa se justifica, dada a possibilidade de convocar o aluno com motivação para a aprendizagem matemática, com o uso das estratégias da Modelagem.

Essa experiência no curso com a Modelagem Matemática e, sobretudo, a possibilidade de aplicação no contexto escolar com significativas implicações para o processo de aprendizagem foi tão marcante a ponto de mobilizar algumas das nossas preocupações em torno da pesquisa acadêmica em 1999, quando iniciamos o Mestrado no Programa da Faculdade de Educação da Unesp, em Rio Claro. A dissertação teve como objetivo central sugerir a reintrodução das ideias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral – relação ou função, estabilidade, variação e área – nos currículos do Ensino Médio, como instrumento para a resolução de problemas não artificiais, que motivassem o desenvolvimento dos conteúdos tradicionais dessa modalidade de ensino, servindo como instrumento de motivação e mediação.

Mais tarde, especificamente no primeiro semestre de 2005, aproximamo-nos das teorizações da Lógica *Fuzzy*, ao cursar uma disciplina no Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (Imecc) da Unicamp. Durante o curso, delineou-se uma nova maneira de *ver* e *trabalhar* com teoria dos conjuntos e principalmente com algumas aplicações relevantes quando se modifica e/ou generaliza alguns conceitos clássicos da matemática. Nesse mesmo curso foram desenvolvidas, por meio da modelagem, várias situações-problema reais – tais como diagnósticos médicos, controle ambiental, propagação de doenças, problemas de engenharia – cuja resolução e formulação, com o auxílio da Matemática convencional, seriam muito complicadas ou praticamente impossíveis com modelos matemáticos convencionais. Como alternativa para explicitação e resolução dessas situações-problema, utilizou-se, com sucesso, elementos da Teoria *Fuzzy*.

De algum modo, a participação nesse curso mobilizou novamente reflexões em torno das nossas escolhas metodológicas e, sobretudo, dos conteúdos curriculares, agora dos cursos de graduação em Matemática. A partir de tais escolhas, passamos a questionar a ausência ou a presença pouco significativa, muitas vezes apenas em nível ilustrativo, no currículo deste nível de ensino, de conteúdos novos do ponto de vista acadêmico-educacional, mas já bem configurados como conhecimento científico — como, por exemplo, a teoria *fuzzy* —, que poderiam ser desenvolvidos desde o momento da formação inicial do futuro professor de matemática da educação básica.

Nesse sentido, nossas reflexões ultrapassam as fronteiras das ferramentas pedagógicas em si mesmas e apontam para suas implicações sociais, dadas as necessidades geradas pelo impacto das inúmeras mudanças tecnológicas nas sociedades do mundo moderno que, por conseguinte, alteram o cotidiano das pessoas, introduzindo rápidas transformações de modo cada vez mais intenso. Parece-nos que nunca, como agora, houve tanta necessidade de compatibilizar, adequar, ajustar ao modo de ser e conviver do homem no e com o mundo, uma mudança mesmo de valores, em uma ordem mundial em transição, na qual a cada dia se acumulam novas informações e demandas.

Desse modo, no que toca à educação, concordamos com o que já vem sendo preconizado pela LDB, desde 1996, que aponta para a necessidade do desenvolvimento de competências básicas, a fim de inserir os alunos na vida social e no mercado de trabalho, buscando um saber contextualizado e interdisciplinar, que estimule o raciocínio, a curiosidade intelectual e a vontade permanente de aprender. Sobretudo, acreditamos que de fato é importante, face ao atual cenário, tentar novos métodos e estratégias mais consentâneas com a velocidade e as características das mutações em curso — outro aspecto pelo qual nosso trabalho de pesquisa se justifica. Entendemos que esta deva ser uma busca fundamental da educação: facilitar o desenvolvimento de competências pelo indivíduo, para que se torne mais completo, com capacidade de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las, aprender, criar e formular.

Do considerado, nosso **problema de pesquisa** pode ser assim delineado:

Quais os pressupostos teóricos da Teoria *Fuzzy* e quais as possibilidades de reconhecimento do seu valor e seu papel para a Educação Matemática?

Outras duas questões, de algum modo sobrepostas à primeira, podem ser assim colocadas:

É possível compreender como e em que direção ou extensão o raciocínio *fuzzy* pode desenvolver o pensamento matemático?

Como o pensamento matemático do aluno enfrenta o raciocínio *fuzzy* e lida com ele?

1.3 – Objetivos

São dois os objetivos principais da pesquisa realizada:

- Construir uma discussão teórico-prática em torno do pensamento *fuzzy* que possa encaminhar os educadores matemáticos para reconhecer o papel e o significado desta modalidade de pensamento, em termos da solução (matemática) de problemas reais.

- Buscar meios e critérios para iniciar um processo de conscientização do valor, para o desenvolvimento do pensamento matemático — dos alunos-futuros professores —, quando se leva em conta a relação entre subjetividade diante dos problemas e soluções matemáticos e teoria *fuzzy*.

Há, porém, outros objetivos para esta pesquisa:

- Contribuir para uma formação reflexiva dos pesquisadores no estudo das possibilidades de inovação do professor de matemática.

- Fortalecer o conhecimento e a análise dos critérios de investigação da linha de pesquisa que envolve modos de quantificação da incerteza.

- Motivar um compartilhar contínuo de valores, práticas e construções, de modo a firmar a pesquisa em torno de inovações — de forma e conteúdo — no âmbito da educação matemática.

1.4 – O caminho da pesquisa

Em geral, quando se trata de fenômenos educacionais, não tem sido revelador utilizar os processos e os métodos próprios da pesquisa quantitativa, como se faz com os fenômenos das ciências físicas e naturais, ou seja, por meio de uma contagem de casos, isolando algumas variáveis, sem o objetivo de avaliar, separadamente, a influência de alguns casos. Isso não significa que seja de todo impossível submeter os fenômenos educacionais a um tipo de abordagem analítica quantitativa; no entanto,

> [...] ao tentar isolar algumas dessas variáveis está-se optando, necessariamente, por uma redução do enfoque do estudo a uma parte do fenômeno. Isso pode ser muito útil para fins de análises específicas, mas não resolve o problema da compreensão geral do fenômeno em sua dinâmica complexidade. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 5).

De fato, o emaranhado e a trama com que os fenômenos da educação se desenvolvem — socialmente contextualizados e historicamente determinados — dificultam o isolamento das variáveis envolvidas e, principalmente, a indicação clara dos responsáveis por determinados efeitos. Na verdade, quando se trata de fenômenos educacionais, há necessidade de captar a realidade dinâmica e complexa, em sua realização histórica, do objeto de estudo da pesquisa — o que se constitui em um grande desafio (LÜDKE; ANDRÉ, 1986).

Nas teorizações sobre a pesquisa em educação, é de consenso, entre os pesquisadores, que o destaque atribuído pela pesquisa qualitativa ao processo de compreensão do que almeja estudar leva ao entendimento de ser o instrumento de acesso aos dados/fatos, por excelência, constituído das descrições feitas pelos sujeitos da experiência que estão vivendo, ou que viveram, em relação ao fenômeno pesquisado (BOGDAN; BIKLEN, 1994; GARNICA, 2004; MODESTO, 2002).

No entanto, sendo a experiência humana mediada pela interpretação e elaboração do pesquisador, os objetos, as pessoas, as situações ou os acontecimentos não são dotados de significado próprio, tampouco os dados/fatos o são; o significado lhes é atribuído. Tal aspecto constitui um importante pressuposto metodológico e encontra-se pautado em uma perspectiva fenomenológica compatível com a abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 55).

Ao atribuir significados, a ênfase produzida em torno dos dados/fatos, segundo Modesto (2002, p. 22), dá-se a partir de

> [...] critérios que podem ser chamados de intersubjetivos, pois o significado atribuído à experiência relatada não é "só" do pesquisador, mas constituído numa trama de diálogo entre as vivências do depoente – que descreve a experiência – e as do pesquisador – que, a partir da descrição, atribui significados ao descrito, contemplando nisso suas próprias experiências vivenciais.

Com efeito, desenvolver uma análise qualitativa implica assumir o pesquisador como pertencente a uma comunidade sócio-historicamente situada, portador de valores e concepções que, de um modo ou outro, influenciam seu olhar e ficam refletidos em seu trabalho. Enfim, implica assumir o pesquisador em um papel de não neutralidade com relação ao contexto investigado, reconhecendo e lidando, porém, com os vieses que de tal papel decorrem. (BOGDAN & BIKLEN, 1994, p. 68)

Do exposto, optamos, então, por uma pesquisa do **tipo qualitativo** que levará o pesquisador a uma reflexão contínua sobre o valor e o papel de uma inovação no campo da matemática — lógica *fuzzy* —, cuja eleição do objeto de estudo é determinada por preocupações de cunho didático-pedagógico do investigador.

Como em toda pesquisa de cunho qualitativo, vale destacar que estamos convencidos de que o mecanismo de construção do processo da pesquisa como um todo é mais importante que o produto final, e as interpretações pessoais carregadas de valores, convicções e motivação próprias dos participantes da pesquisa e do pesquisador estarão dando o contorno fecundo para a análise. Ainda, tratando-se de uma pesquisa qualitativa, consideramos de modo antecipado a possibilidade do uso do raciocínio indutivo para algumas conclusões.

Com base nas considerações tecidas, apresentaremos a seguir as fontes e os procedimentos escolhidos para criar evidências a serem analisadas nesta investigação.

Ao longo da pesquisa, a significação de processos como subjetividade e imprecisão, entre outros, permearão o trabalho. Naturalmente, poderíamos, para tal compreensão, fazer simplesmente uma busca em um dicionário. Entretanto, ao assim procedermos, estaríamos deixando de contemplar as relações de cada um deles com os mais diversos contextos. Procuramos, na verdade, formas de explicitar o conteúdo de um pensamento, um raciocínio, uma sensação ou um discurso, para encontrar o que está por trás desse não explicitado discurso.

O nosso estudo focaliza as intervenções dos alunos do primeiro semestre do curso de licenciatura, diante das questões-problemas apresentadas pelo pesquisador. Trabalhamos inicialmente com uma turma de 33 alunos oriundos de diferentes cursos de graduação — Física, Química e Matemática — em uma disciplina da grade comum, assim organizada devido à formatação desses cursos nas Faculdades Unificadas da Fundação Educação de Barretos.

Como não poderia deixar de ser, a turma é bastante heterogênea e a maior parte dos alunos é oriunda de escola pública não só de Barretos, mas de várias cidades vizinhas, num raio de 200 km. São alunos do curso noturno, trabalhadores, que não possuem muito tempo para dedicar-se às disciplinas; alguns estão afastados da escola há mais de 10 anos, outros acabaram de concluir o Ensino Médio e um ou outro já possui uma formação técnica ou superior anterior. Nessa turma temos um percentual grande de alunos que pretendem seguir a carreira do magistério e, portanto, têm aceitado e participado bem das atividades propostas para a disciplina.

Tal escolha foi feita tanto pelo fato de que esta turma não cursaria uma disciplina específica sobre Lógica *Fuzzy* – como acontece, por exemplo, com as turmas da engenharia – quanto pelo fato de a pesquisadora ser a professora de uma das disciplinas iniciais, Fundamentos e Práticas Pedagógicas da Matemática I, na qual, entre outros conteúdos, os alunos têm contato com noções de lógica clássica e teoria dos conjuntos. Fizemos a opção por deixar livre ao aluno, sujeito desta investigação, a escolha de manifestar-se em relação às questões problema de modo individual ou em pequenos grupos.

Sendo assim, na perspectiva de buscar possibilidades de respostas às questões levantadas anteriormente sobre o tema de nossa investigação, cujo eixo principal é o reconhecimento do valor e do papel da Teoria *Fuzzy* para a Educação Matemática, escolhemos encaminhar nossa pesquisa, organizando-a segundo os seguintes aspectos relativos à coleta e ao tratamento de dados/fatos:

- ✓ Da coleta de dados/fatos:
    - o aplicação inicial de um rol de questões-problema;
    - o introdução dos conceitos da Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* e Lógica *Fuzzy* a partir de uma análise preliminar do rol inicial de questões-problema;
    - o aplicação de outro conjunto de questões-problema no momento final do curso.
- ✓ Do tratamento dos dados/fatos:
    - o leitura do rol de questões inicial e final de cada aluno;
    - o leitura mais aprofundada, buscando evidências em três eixos temáticos: da psicologia, da pedagogia e da matemática;

- abordagem, dentro do eixo temático “matemática”, de três conceitos-chave da Teoria *Fuzzy*, escolhidos *a priori*: conjunto *fuzzy*, variáveis linguísticas e base de regras.

1.5 – Da fundamentação

Apresentaremos brevemente, visto que o assunto será tratado com maior aprofundamento/detalhes em capítulos específicos, os pressupostos teóricos que dão suporte às hipóteses e à escolha metodológica assumidas na pesquisa aqui desenvolvida. Considera-se uma possível aproximação entre o conceito de subjetividade na Matemática, a Teoria *Fuzzy* e a Modelagem Matemática, delineando-se uma fundamentação teórica sob cuja perspectiva os resultados da pesquisa de campo realizada no âmbito desta tese possam ser analisados e discutidos.

1.5.1 – Da subjetividade e da Matemática

A concepção de que existe um mundo objetivo e independente das pessoas que nele vivem e dele falam pavimentou a via sobre a qual a ciência construiu seus procedimentos práticos e discursivos, afirmando a objetividade, a verificação e a mensuração (VAITSMAN, 1995).

Além da objetividade, a idéia de um conhecimento expresso através de leis universais que legitimariam as práticas científicas corretas — o conhecimento hegemônico, marca distintiva do paradigma newtoniano-cartesiano — prevaleceu até o início do século XX.

Dentro dessa concepção de neutralidade – que perdura, em grande parte, até os dias atuais na matemática –, a ciência unificada baseia-se em um único método científico que produz a verdade independente do objeto, e o matemático profissional (cientista) descobre algo que existe objetivamente fora dele, ou seja, independente de sua objetividade.

No nosso século, a valorização da autonomia, da subjetividade emerge como eixo de um novo paradigma, integrando-se à imagem do objeto da ciência. Uma nova forma de pensar a relação entre sujeito e objeto, bem como entre indivíduo, natureza e sociedade, desenvolve-se como parte de transformações da sociedade contemporânea.

Na Matemática também se observa uma tendência de redefinição de discursos articulados em torno da idéia de verdade/objetividade e falsidade/subjetividade para outros em que tais dicotomias não se colocam como definidoras das relações entre sujeito e objeto. O objeto, seja ele a sociedade ou a natureza, não existe *a priori*, objetivamente – ele é construído pelos sujeitos. Assim, para Morin (1977, apud VAISTMAN,1995), a racionalidade não seria mais sinônimo de certeza, nem a probabilidade significaria ignorância.

1.5.2 – Da Teoria Fuzzy

De acordo com Shaw e Simões (1999), a característica especial da Lógica *Fuzzy* (também referida como "lógica nebulosa" e "teoria de possibilidades") é oferecer aos pesquisadores um novo modo de manusear informações imprecisas, porém, de uma maneira bastante diferente do que faz, por exemplo, a teoria das probabilidades. Essa lógica traduz em valores numéricos expressões verbais, vagas, imprecisas e qualitativas, comuns na comunicação humana, permitindo converter a experiência humana em uma linguagem decodificável por computador.

Diferentemente da lógica clássica aristotélica – que é bivalente e admite apenas dois valores: falso ou verdadeiro —, a lógica *Fuzzy* é multivalente, pois reconhece uma multitude de valores, assegurando que "verdade" é uma questão de ponto de vista ou de gradação, definindo o grau de veracidade em um intervalo numérico [0,1]. Dessa maneira, consegue gerenciar incertezas, por meio de termos com um grau de confiabilidade situado num intervalo numérico [0,1], em que a certeza absoluta é representada pelo valor l.

Isso faz com que toda forma de tecnologia orientada por um "enfoque *fuzzy*" adquira valor prático, tornando possível incluir a experiência de controladores humanos de processos em formas de controle computadorizadas e possibilitando estratégias de tomadas de decisão em problemas complexos.

1.5.3 – Da Modelagem Matemática

O estudo de problemas e situações reais usando a linguagem matemática para compreendê-los, simplificá-los e solucioná-los, no sentido da busca de uma possível revisão e modificação do objeto em estudo, é parte do processo que tem sido chamado modelagem matemática. Nesses termos, com respeito ao ensino, o uso da modelagem matemática como caminho para a aprendizagem dos fatos matemáticos, em geral, envolve o estudo de uma situação-problema real.

Nesse sentido, Mendonça-Domite (2005) argumenta que o movimento da modelagem matemática como um método para levar à aprendizagem, que foi se configurando no início nos anos 1980 no Brasil, tem provocado transformações — sem retorno — em termos dos processos cognitivos e metodológicos dos pesquisadores e professores da educação matemática. A influência desse movimento/método em ensino e aprendizagem pode ser relacionada, pelo menos, a dois aspectos: a) a mudança de referencial **da matemática pura** para o referencial do **mundo real**, resulta em trabalhos do terreno da **matemática aplicada;** e b) o **problema,** utilizado como desencadeador do processo de aprendizagem, passa a ser formulado na perspectiva da experiência de vida dos educandos, ou melhor, passa a ser formulado por eles, a partir da **problematização** de situações que emergem da realidade social.

Devido à possibilidade de manipulação de informações incertas e de seu respectivo armazenamento em computadores, o tratamento *fuzzy* de variáveis linguísticas subjetivas, referentes ao sujeito, ganhou um espaço substancial na modelagem matemática, particularmente quando não dispomos de dados suficientes para uma estatística; ou então quando a situação não comporta medições e dependemos de informações subjetivas de especialistas.

CAPÍTULO 2

Matemática: o determinismo em discussão

CAPITULO 2. MATEMÁTICA: O DETERMINISMO EM DISCUSSÃO

A *certeza* ou a *verdade*, assim como a *dúvida* ou a *incerteza* têm estado no centro das atenções da epistemologia do conhecimento. Na filosofia grega, Platão localiza a *certeza* no "mundo das ideias", em contraponto com o "mundo sensível" (dos sentidos), no qual teríamos somente aproximações de resultados obtidos no mundo das ideias. Os sofistas, por exemplo, tinham como objetivo transformar modos de argumentação em *verdades* – uma postura cética diante do conhecimento como absoluto, objetivo.

Nesse movimento de busca da essência do conhecimento, a Matemática tem sido instrumento — uma linguagem — para esclarecer e analisar as teorizações. De todo modo, a busca da *verdade* ou da *certeza* tem levado, inúmeras vezes, ao desenvolvimento de evidências opostas, proporcionando estudos matemáticos de distintos tipos de *incertezas*. A *incerteza,* proveniente da aleatoriedade de eventos, ocupa um lugar de destaque no elenco da matemática, com ênfase na área de estudos probabilísticos. A Teoria da Probabilidade tem como foco central a explicação da possível ocorrência de cada evento, baseada numa distribuição de ocorrências passadas. Nessa perspectiva, quando modelamos certas situações da realidade, as variáveis linguísticas estão, muitas vezes, carregadas de subjetividade, e não dispomos de distribuições estatísticas ou aleatórias. Nesses casos, as qualificações de tais variáveis são distinguidas por meio de graduações ou de meias-verdades.

É nesse contexto de *incerteza* que a lógica *fuzzy* tem contribuído com sua linguagem conjuntista, na qual cada elemento é provido de um grau de pertinência ao conjunto. Tal ideia, formalizada por Zadeh em 1965, tem evoluído muito em termos de aplicações em problemas da realidade, dada a sua característica de graduar soluções, como medida de credibilidade. Assim, a solução de um modelo matemático não é reconhecida *boa* ou *ruim* — como na lógica aristotélica bivalente —, mas é aceita com algum grau de credibilidade pelo usuário.

Com efeito, a ideia central deste capítulo é a busca de evidências e de fundamentos para as questões abordadas, com intuito de propiciar a discussão e um maior entendimento sobre elas, do ponto de vista tanto da Matemática quanto do ensino desta, de acordo com os referenciais adotados por nós.

2.1 – Determinismo e o processo de conhecer

Antes de encaminharmos uma reflexão sobre a doutrina que vem recebendo a denominação "determinismo", consideramos importante refletir brevemente, em especial, sobre as duas questões: "O que é a Matemática?", "O que é a matemática ensinada na escola?", procurando respondê-las com um olhar mais voltado para a segunda. Nessa perspectiva, buscaremos respostas a tais perguntas nas discussões dos estudiosos da filosofia da educação matemática, com a consciência de que a definição de matemática e as propostas para a matemática a ser ensinada na escola mudam. Matemáticos e educadores matemáticos, em uma dada geração ou em um dado período, formulam uma definição ou uma proposta de acordo com seu entendimento. Assim, a matemática tem sido compreendida como um conjunto de disciplinas, mas também como uma atividade científica; ou ainda como produto sociocultural; e cada uma dessas interpretações caracteriza, a seu modo, a matemática ensinada na escola.

De fato, a crescente complexidade do mundo favoreceu a produção de novos conhecimentos, que se organizaram e deram origem a novas disciplinas. No caso particular da matemática, por exemplo, a palavra em si, hoje, tornou-se uma expressão genérica, a qual abrange um leque amplo de subáreas em desenvolvimento. Fernández de Carrera, Arralde e Mamut (2006), em seu texto intitulado "Matemática ou matemáticas? Indistintos ou distintos?", ao buscarem definições para a Matemática, argumentam que pensar sobre matemática significa pensar em diferentes modelos possíveis: os quantitativos, baseados no mundo dos números (aritmética); os de representação e descrição da realidade física e imediata (geometria); os de comparação e quantificação de grandezas; os de lógica; e muitos outros modelos específicos para descrever uma variedade de fenomênos ou situações (análise, probalidade, estatística etc.).

Ainda em termos de uma definição da matemática, Guzmán Ozámiz e Pérez (1993) dizem-nos que, especialmente a partir da visão falibilista discutida por Lakatos no final do século XIX, ocorreram mudanças profundas no campo das ideias sobre o que verdadeiramente é o fazer matemático. Guzmán Ozámiz e Pérez (1993, grifo nosso) afirmam que:

> […] a atividade científica em geral é uma exploração de certas estruturas da realidade, entendida esta em sentido amplo, como realidade física ou mental. <u>A atividade matemática lida com certas estruturas que se prestam a modos peculiares de tratamento, as quais incluem:</u>
>
> - Uma simbolização adequada que permite representar eficazmente, de um ponto de vista operativo, as entidades que maneja.
> - Uma manipulação racional rigorosa que permite o acesso daqueles que aceitarem as convenções iniciais.
> - Um domínio efetivo da realidade em questão, primeiro racional, no que diz respeito à construção do modelo mental, e logo, se se pretende, da realidade exterior modelada.

A matemática, como a ciência da quantidade e do espaço (DAVIS; HERSH, 1989, p. 31), não é incompativel com a de Guzmán Ozámiz e Pérez, que corresponde, como bem dizem os autores, ao estágio da matemática em que o confronto com a realidade se refletiu em dois aspectos fundamentais complexos, provenientes tanto da multiplicidade, que dá origem ao número — a aritmética—, quanto do espaço, que dá origem ao estudo das grandezas — a geometria —; e, no decorrer da história, outras realidades levar-nos-iam a lidar com:

> - A complexidade do símbolo (álgebra).
> - A complexidade da mudança e da causalidade determínistica (cálculo).
> - A complexidade proveniente da incerteza na causalidade (probalidade e estatística).
> - A complexidade da estrutura formal do pensamento (lógica matemática). (GUZMÁN OZÁMIZ; PÉREZ, 1993, p. 66)

O educador matemático Alan Bishop (1988, p.55), por sua vez, concebe a matemática como um fenômeno pancultural, no sentido de que ela ocorre em todas as culturas e, consequentemente, a Matemática de origem ocidental, como refere Kline (1972) em seu livro, *A Matemática na cultura ocidental*, é “uma variante particular da matemática desenvolvida ao longo dos tempos em diferentes sociedades”.

Nessa perspectiva, Bishop (1988) considera que alguns cognitivistas, como Jerome Bruner, têm argumentado que o homem evolui vinculado a sistemas instrumentais novos e externos, e não por meio de alterações morfológicas. Um dos tipos de sistemas instrumentais é composto pelo que Bruner (apud Bishop) chama de "amplificadores das competências cognitivas" os quais estão associados aos símbolos. O primeiro conjunto de símbolos está na comunicação oral, que precedeu a linguagem escrita e, portanto, a simbolização matemática. Nesse sentido, Bruner (apud Bishop) afirma que "a Matemática é um excelente exemplo de 'amplificador da capacidade de raciocínio humano' e, como um fenômeno cultural, tem um forte componente tecnológico [...] a matemática é essencialmente uma tecnologia simbólica".

D' Ambrosio e Domite (2007, p. 201) argumentam na mesma direção, ao considerar que:

> [...] diferentes relações e práticas podem ser geradas, organizadas e transmitidas informalmente para resolver necessidades imediatas, assim como ocorre com a linguagem. Desse modo, os processos de conhecimento estariam incorporados no coração do saber-fazer da comunidade e esses processos são parte do que chamamos cultura. Assim, a partir deste ponto de vista, a etnomatemática, por exemplo, diz respeito não somente às raízes culturais do conhecimento matemático, mas também às relações geradas dentro de uma comunidade/grupo a qual frequentemente compõe, mais adiante, o que tomamos por Matemática.

E como tem sido entendida a questão "O que é a matemática ensinada na escola?". Uma possível resposta a essa pergunta pode vir na esteira da reflexão de Davis e Hersh (1989, p. 31-32) quando, ao buscarem responder o que é a geometria ensinada na escola, procuram explicações do ponto de vista de duas vertentes:

> Trata, em parte, de problemas de medidas espaciais. Se eu traçar um certo segmento de reta, e um outro, qual será a distância entre seus pontos extremos? Quantos centímetros quadrados existem em um retângulo de 4 centímetros de comprimento por 8 centímetros de largura? A geometria também se ocupa com aspectos do espaço que possuem grande atrativo estético, ou um elemento de surpresa. Por exemplo, nos ensina que, em qualquer paralelogramo, as diagonais se cortam ao meio; ou que, em qualquer triângulo, as três medianas se cortam em um ponto comum. Diz-nos que um piso pode ser coberto por ladrilhos na forma de triângulos eqüiláteros ou hexágonos, mas não com pentágonos regulares.
>
> Mas a geometria, se ensinada de acordo com o modelo introduzido por Euclides em 300 antes de Cristo, possui outro aspecto vitalmente significante. Este é sua apresentação como uma ciência dedutiva. Partindo de um número de idéias elementares, que são supostas evidentes, e baseando-se em algumas poucas regras de manipulação matemática e lógica, a geometria euclidiana constrói uma urdidura de deduções de complexidade crescente. O que é salientado no ensino de geometria elementar não é somente o aspecto

> espacial ou visual do assunto, mas a metodologia pela qual a hipótese conduz à conclusão. Este processo dedutivo é conhecido como *demonstração*. A geometria euclidiana é o primeiro exemplo de um sistema dedutivo formalizado e tornou-se o modelo para todos tais exemplos.

Mais adiante, os autores enfatizam a força do aspecto dedutivo da matemática, argumentando, de modo irônico, que ela poderia tratar de qualquer assunto — que não somente o das quantidades e do espaço —, contanto que o tratasse segundo o padrão hipótese-dedução-conclusão. Davis e Hersh (1989, p. 33) bem ilustram tal argumentação:

> Sherlock Holmes observa a Watson, em *O sinal dos quatro,* que "a investigação é, ou deveria ser, uma ciência exata e tratada de uma mesma maneira fria e sem emoções. Você tentou cobri-la de romantismo, o que causa quase mesmo efeito que se você tivesse introduzido uma história de amor ou uma fuga no quinto teorema de Euclides". Conan Doyle está afirmando com ironia que a investigação criminal poderia muito bem ser considerada um ramo da matemática.

Esta ênfase crescente sobre o aspecto dedutivo desencadeada pelo modelo introduzido por Euclides é, de algum modo, a base da concepção determinista da Matemática, de resultados essencialmente precisos, isto é, em se tratando da solução de um problema de um ponto de vista da matemática tanto internalista quanto externalista[7], para a matemática determinística tudo pode ser descrito por uma equação. Schrödinger (2010) enfatiza, de modo exagerado, essa visão:

> Para quem defenda o determinismo há centenas de "então, quem manda no mundo?". Pode ser deus, Zeus, Bill Gates, Steve Jobs, Silvio Santos ou a matemática. A matemática diz que como o nosso Universo físico é feito de partículas que interagem de acordo com algumas regras, o que está aí é basicamente o que deveria estar aí mesmo, já que as partículas estavam apenas interagindo de acordo com suas regras, ponto.

---

[7] Em Domite (2003, p. 48): "Grosso modo, uma visão externalista da Matemática tem sido assim considerada: 1) sob a perspectiva da pesquisa, a Matemática não visa um fim em si mesma, e sim fora do seu campo estrito, ou seja, são dessas pesquisas que se estabelece as interações entre a Matemática e outros campos de estudo – é uma matemática a serviço do mundo; 2) no tocante ao ensino e aprendizagem, uma posição externalista da matemática requer que o professor/a, leve em conta o contexto sócio-cultural do grupo e suas relações de poder, no processo de aprendizagem/ensino dessa disciplina".

Aqui valem os questionamentos: “Quem manda nas outras áreas do conhecimento, já que elas funcionam de acordo com algumas regras (matemáticas)?” ou “Quanto de matemática há nas outras áreas do conhecimento como, por exemplo, na Biologia?”

Na verdade, não há matemática na Biologia ou na Química, mas, a cada dia, são concebidas novas formas de utilização de ferramentas da matemática, na tentativa de melhor compreender fenômenos de cada uma delas e de outras áreas. A taxonomia, segundo Schober (2010), pode ser considerada um exemplo antigo da matematização da biologia, com início na tentativa de Aristóteles de organizar de modo sistemático os seres vivos. Esse movimento interdisciplinar — matematização da biologia — não é algo recente quando se trata de Biologia e Matemática, que são áreas do conhecimento que sempre se complementaram para interpretar a natureza.

De todo modo, segundo Souza (apud Schober, 2010) a matematização da biologia é contestada por vários pensadores contemporâneos, entre eles o biólogo Ernst Meyer, o qual afirma que esta área do conhecimento não pode ser interpretada com o olhar determinista da matemática.

Com efeito, por ser uma construção histórica, a biologia adquire um caráter circunstancial e os fenômenos que aí se desenvolvem não podem — dada a necessidade de lidar com o acaso — ser previsíveis e testados de forma idêntica e repetidas vezes. Como bem exemplifica Souza (apud Schober, 2010):

> Não podemos repetir a origem da vida na Terra, que ocorreu por circunstâncias específicas. A vida é a apropriação de acasos sujeitos a fatos acontecidos na história que, se não tivessem acontecido, o mundo hoje seria completamente outro. Uma vida sujeita a toda essa aleatoriedade faz com que a matematização da vida fique restrita ao momento presente - onde todas as extrapolações são perigosas.

Para o biomatemático João Frederico Meyer (apud Schober, 2010), “a biologia apresenta à matemática uma série de difíceis desafios, como problemas descontínuos, instáveis, não-lineares, enfim, inesperados” e, nesse contexto, a modelagem matemática tem um papel crucial: alguns fenômenos podem ser quantificados em diferentes aspectos e tais “quantificações podem fornecer novas maneiras de ‘ver’ o problema que se está tentando compreender". O biomatemático chama também atenção para o aspecto transdisciplinar da ciência moderna, no sentido de que "diferentes olhos veem diferentemente o mesmo problema". Para ele, aplicar a matemática para entender fenômenos biológicos é muito instigante, uma vez que "as técnicas e os saberes da matemática ganham nova importância tanto teórica quanto instrumental"

E, mais uma vez, agora da perspectiva do matemático Meyer (apud Schober, 2010) – pesquisador da área de biomatemática –, o determinismo matemático é colocado em questão por "causar uma confusão de ideias quando se fala em compreensão de fenômenos biológicos, dando a ideia de que alguns cientistas pretendem, por meio da matemática, tornar a biologia uma ciência exata". Sobre essa questão, Meyer (apud Schober, 2010) salienta que a modelagem matemática de fenômenos biológicos não é capaz de prever ou fornecer resultados milimetricamente precisos, o que a modelagem pode fazer,

> [...] e o faz bem, é a avaliação qualitativa, ou seja, direções, possibilidades, tendências. Especialmente no sentido de se simularem fenômenos que estabelecem cenários que iriam resultar de estratégias adotadas - estes cenários não vão ser exatamente precisos, mas são suficientes para indicarem possíveis situações a adotar... ou evitar!

Ainda em torno da discussão sobre o significado e o papel do determinismo como solo filosófico da Matemática, esta doutrina foi, como já dito, o suporte da matemática clássica, no sentido de que este campo de conhecimento se mostrou essencialmente dedutivo na sua gênese histórica e epistemológica – e por isso há um passado que é fonte para perpetuação do modelo. As definições desta corrente filosófica, encontradas em três diferentes dicionários, podem melhor esclarecê-la:

> **Determinismo -** (Do al. Determinismus, pelo fr. Déterminisme) – teoria filosófica segundo a qual os fenômenos naturais e os fatos humanos são causados por seus antecedentes; encadeamento de causa-efeito entre dois ou mais fenômenos. (LAROUSSE CULTURAL, 2008, p.345)
>
> **Determinismo –** (biológico) concepção segundo a qual nossa herança genética condiciona e torna inevitável o nosso desenvolvimento como pessoas com múltiplas características. Na versão mais ridícula desta concepção postulam-se entidades como, por exemplo, um gene que predispõe as pessoas para a pobreza. Esta concepção é particularmente inimiga dos pensadores que salientam que os factores parentais, políticos e sociais determinam aquilo que somos (BLACKBURN, 1994, p. 108)

> **Determinismo –** Uma relação é determinada quando existe uma ligação necessária entre uma causa e o seu efeito; neste sentido, o **determinismo** é uma generalização do princípio da causalidade, que liga cada acontecimento a um outro (é esta causalidade que o cientista pretende conhecer estabelecendo leis). Aplica-se antes de mais nada aos acontecimentos da natureza e, enquanto necessidade cognoscível, opõe-se ao destino: este é uma lei cega que escapa ao homem, enquanto que "um fenômeno pode ser integralmente determinado permanecendo mesmo assim perfeitamente imprevisível [...]. O tempo que teremos dentro de seis meses não está escrito em lado nenhum: não está *ainda* determinado; mas sê-lo-á dentro de seis meses. Assim, o determinismo não é um fatalismo: não exclui nem o acaso nem a eficácia da ação. Ao contrário, permite pensá-los: daí a meteorologia e o guarda-chuva". (COMTE-SPONVILLE)

A partir das definições encontradas, podemos afirmar que o determinismo tem, na sua essência de construção, duas leis de formação básica, de algum modo sobrepostas, como doutrina filosófica: a) fenômenos e fatos são causados por seus antecedentes; e b) existe uma relação causa-efeito entre dois ou mais fenômenos/fatos.

A ideia de antecedência — e, grosso modo, a de causa-efeito — está diretamente ligada ao *raciocínio* de que os argumentos são meios para alcançar outro nível de *conhecimento,* que são as *consequências.* Os *conhecimentos anteriores* e os *novos conhecimentos* (ou proposições), eles próprios religam *ideias/noções,* em geral designadas por *conceitos.* Esse modo processual e encadeado de conhecimento está na essência dos estudos de *lógica clássica*, constituída na sua gênese pelo grande estudioso Aristóteles, da civilização grega.

O processo de estudo da filosofia da matemática esteve por muito tempo cristalizado em torno das questões ontológicas referentes à natureza e à verdade dos objetos matemáticos e das questões epistemológicas de como nós chegamos a conhecê-los. Matemáticos pertencentes a três importantes correntes do pensamento matemático — logicista, intuicionista e formalista — refletiram arduamente em busca de critérios para fundamentar essa matemática.

Essas três correntes, já bastante estudadas neste último século, interpenetram-se e têm prolongamentos, assim como mostraram incongruências da história mais recente — a suspeita, anunciada por Gödel, da inconsistência lógica interna de sistemas dedutivos e formais, quando estes possuem regras finitárias, é um dos grandes exemplos. Como bem conhecido, em 1931, quando ainda vigorava a proposta de Hilbert de obter a completa construção da teoria matemática através da lógica formal, Gödel publicou o seu trabalho "Sobre as proposições indecidíveis", pondo fim a essa expectativa.

Nessas perspectivas epistemológicas, vigorou por muito tempo a primeira interpretação de Platão a essas verdades, aquela de que os objetos matemáticos têm uma existência independente da mente humana — são entes pertencentes a um mundo ideal —, e as verdades sobre eles são descobertas ou acordadas. Esta é uma posição apriorística das mais radicais e, do nosso ponto de vista, a mais insatisfatória para orientar uma discussão em torno do valor e do papel da teoria *fuzzy*, visto que tem na sua essência, de modo radical, a perspectiva determinística, ou seja, a matemática como uma coleção de teoremas, o rigor e a precisão.

A discussão acima pode encaminhar um debate no sentido de esclarecer as ideias centrais da teoria *fuzzy*, ao confrontarmos a noção de *a priori*, da preexistência de uma matemática a ser apreendida. Com efeito, a matemática que estudamos, ao longo de nossa formação acadêmica, é uma matemática de verdades preestabelecidas e preexistentes, isto é "a doutrina que o conhecimento matemático é a priori – apriorismo matemático – tem sido articulada de diferentes maneiras durante o processo de reflexão sobre matemática" (KITCHER, 1984, p. 3). Na verdade, Kitcher coloca-se em oposição ao apriorismo, no que se refere ao conhecimento matemático como um pressuposto da epistemologia da matemática, que nega, entre outras coisas, qualquer justificativa pela experiência sensorial, assim como a possibilidade de cada indivíduo ou grupo delinear/construir seu próprio corpo de conhecimento matemático numa relação com outros meios — outros estudiosos/interlocutores e os livros — na escola, na comunidade, no trabalho, que lhes são impostos na sua trajetória de aprendizagem. O próprio desenvolvimento histórico da matemática sugere que "o conhecimento matemático é obtido pela extensão do conhecimento de geração anterior". (KITCHER, 1984, p. 5)

De modo geral, a *negação do apriorismo* tem sido também um dos focos da discussão filosófica de Ubiratan D'Ambrosio, destacando que, como uma das mais fortes correntes da filosofia da matemática, tem ditado, também, os modos de fazer educação matemática. Ao apresentar a posição de Kitcher contra o apriorismo matemático, D'Ambrosio (1990) destaca a implicação negativa, de algum modo semioculta, dessa barreira epistemológica para os currículos de matemática:

> Os especialistas demonstram sua capacidade produzindo soluções verificáveis para os problemas que nos deixam frustrados, produzem argumentos plausíveis contra nossas propostas (argumentos cujos planos estão bem disfarçados para serem desmascarados) e oferecem explicações psicológicas muito convincentes de nossos erros. (KITCHER, apud D'AMBROSIO, 1990, p. 28)

De todo modo, essa posição apriorística encaixa-se nos moldes da corrente epistemológica denominada *idealista*, que abrange os modos de conhecer metafísico e racionalista. Cortella (1998), ao discutir as contraposições entre o pensamento de Platão e de Aristóteles, apresenta uma síntese que nos ajuda a compreender a gênese da filosofia da matemática, a qual está submetida à matemática que aí está:

> Ambos os filósofos são **metafísicos** quanto à gênese divina do Conhecimento e da Verdade; o que vai diferenciá-los fundamentalmente é o método de descobri-la. Platão é um **racionalista**; a Razão independe da experiência deste mundo e o conhecimento verdadeiro deve ser buscado dentro de cada um de nós por intermédio de abstrações que partam de verdades gerais inatas, para depois serem deduzidos os conhecimentos mais específicos sobre a realidade. Aristóteles é um **empirista**; o conhecimento verdadeiro procede da experimentação e observação do mundo em suas particularidades e dessas (usando a Razão como ferramenta afiada pela Lógica) posso indutivamente chegar a verdades gerais [...] Essas duas linhas sobre o modo de desvelamento da *Verdade* preexistente (sobre como desocultar a **alétheia**) percorrerão a história do pensamento ocidental e delas vão se aproximar muitos pensadores desde a Antiguidade. (CORTELLA, 1998, p. 92-93, grifo do autor).

O papel a atribuir à experiência, aos dados dos sentidos e/ou à atividade do pensamento (empirismo *versus* racionalismo) na formação do conhecimento, em geral, e do conhecimento matemático, em particular, constitui um problema antigo, provocando vários debates. Este é, reconhecidamente um problema ainda por resolver, certamente sem uma solução única e completa e que desde sempre tem preocupado filósofos e matemáticos.

Algumas respostas foram encaminhadas, uma delas por Kant que, sem dúvida, elaborou fundamentos para quase todas as correntes epistemológicas da matemática.

Kant, sem dúvida, responde a tais questões, situando os objetos modernos do mundo no espaço e no tempo. Segundo ele, é como se os homens (matemáticos), ao buscar explicar/criar/conceituar os objetos matemáticos que emergem do (imperfeito) mundo empírico, tivessem dentro de si impressas as matrizes invariantes das abstrações tempo-espaço. E o modo de chegar a tais abstrações não se daria por meio dos sentidos, mas pela via da razão, do raciocínio (subjetivo).

Trata-se de "uma" posição dentro dessa tentativa de validação, mas tendo como base filosófica de explicações os preconceitos a respeito de espaço e tempo e – longe de ser questionada pelos filósofos – tem servido para as diferentes correntes epistemológicas do conhecimento matemático.

CAPÍTULO 3

Um pouco de Teoria Fuzzy

CAPÍTULO 3. UM POUCO DE TEORIA *FUZZY*

Neste capítulo apresentamos conceitos preliminares da matemática que estão no centro das atenções deste trabalho de pesquisa. A discussão das referidas noções, nesta etapa do trabalho tem como objetivo a melhor compreensão do tipo de matemática a ser utilizada na solução de algumas situações reais – matemática fuzzy - geradora de toda a construção deste trabalho.

Na verdade a grande preocupação em apresentar e discutir mais e mais estas noções está sempre na necessidade de destacar e dar significado ao fato de que o conhecimento proveniente da experiencia do sujeito é carregado de conclusões construídas nas relações do sujeito com o outro e consigo mesmo.

A psicologia e a filosofia utiliza a interferencia deste mundo interno composto por emoções, sentimentos e pensamentos – subjetividade- em geral, para compreender como se relacionam uns com os outros. Neste trabalho estaremos utilizando os processos de conhecimento subjetivo, usualmente ignorado, nos meandros do contexto (matemático) formal. Na verdade, o conhecimento subjetivo tem sido ignorado, no processos de formalização das mais diversas áreas do conhecimento mesmo que os profissionais/pesquisadores reconheçam que eles têm um peso intelectual/emocional significativo quando se omite um opinião , faz-se uma escolha ou uma avaliação.

Em um contexto de educação matemática institucionalizada a situação não é diferente. No entanto, atualmente, ainda que prevaleça a idéia do determinismo matemático, vem se configurando um cenário que abarca um conjunto de estudos e pesquisas que leva em conta a subjetividade do sujeito nas soluções de problemas (matemáticos). Tais estudos têm se apresentado sob o tema “Teoria dos Conjuntos Fuzzy”, “Lógica Fuzzy” ou “Teoria Fuzzy”.

O termo *fuzzy* significa vago,duvidoso, incerto, impreciso, subjetivo ,difuso ou nebuloso e a teoria associada a ele vem sendo utilizada parar dar tratamento matemático às informações, que uma situação/problema, quando esta é delineada através de informações fornecidas por seres humanos ao se comunicar e portanto, carregadas de termos vagos, subjetivos e vinculados ao contexto sobre qual se referem.

A busca de tratamento matemático para a incerteza e imprecisão, como salientamos no capítulo anteriore, nos remetem à Grecia com Aristóteles, Sócrates e Platão e atingem o século XIX quando Zadeh (1965) formaliza a idéia de quantificar informações transmitidas linguísticamente por meio de conjuntos (conjunto fuzzy) e suas respectivas funções de pertinência. Por meio de tais procedimentos Zadeh consegue captar e dar tratamento matemático à subjetividade (vaguesa, imprecisão) de forma diferenciada daquela fornecida pela teoria das probabilidades. Com efeito, entendemos por Teoria Fuzzy ao conjunto:

> da lógica fuzzy utilizada em um contexto lógico, expressando a teoria dos conjuntos nebulosos (fuzzy), a sua ligação com a teoria das possibilidades e o tratamento tanto da imprecisão quanto da incerteza de um conjunto de informações em um único ambiente formal. (Weber&Klein,2003.p.20)

3.1 – Conjuntos *fuzzy*

A ideia de conjunto *fuzzy* é simples de ser compreendida. Esta baseada no fato de que os conjuntos existentes no mundo real não possuem limites precisos. Logo, é compreendido como um agrupamento impreciso e indefinido,ou seja, não posuui contorno bem definido.

> Um conjunto *fuzzy* é caracterizado por uma função de pertinência (característica) onde a transição de não-pertinência para pertinência é gradual, não abrupta dentro de um intervalo entre zero e um. A noção de união, intersecção, complementar, relação, convexidade, etc, é extendida para tais conjuntos, e várias propriedades dessas noções no contexto dos conjuntos fuzzy estão estabelecidas. (Zadeh, 1965, p. 338)

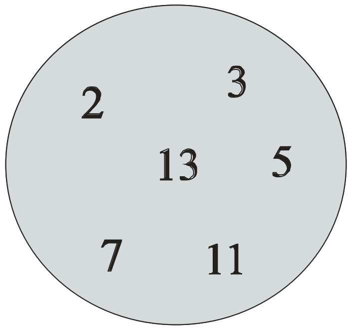
Por exemplo, se tomarmos o conjunto dos números primos,teremos que a função característica de $\mathbb{P}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é dada por

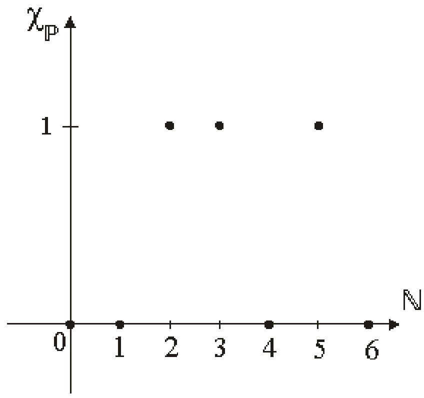
$$\chi_{\mathbb{P}}(n) = \begin{cases} 1, & se\ n\ for\ divisível\ por\ 1\ e\ por\ n \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Portanto, $\chi_{\mathbb{P}}(4) = 0$ e $\chi_{\mathbb{P}}(11) = 1$. Este é um conjunto fuzzy particular que corresponde ao conjunto clássico dos números primos

$$P = \{n \in N: n\ é\ primo\}$$

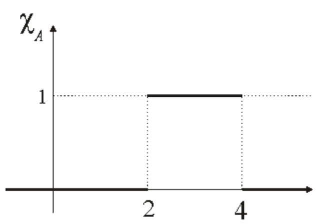
Isto gera uma metodologia para expressar leis operacionais de um sistema em termos lingüísticos em vez de equações matemáticas.





Consideremos, agora, o conjunto dos números reais entre 2 e 4. Na teoria clássica dos conjuntos escrevemos $A = \{x \in \mathbb{R}: 2 \leq x \leq 4\}$.

De forma equivalente, Na teoria dos conjuntos usuais fuzzy , o conjunto A é tem função característica $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & se\ \ 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & se\ x \leq 2\ ou\ x \geq 4 \end{cases}$ onde χ_A é denominada *função característica* do conjunto A.



Um outro exemplo, consideremos o conjunto dos números reais "*próximos* de 3".

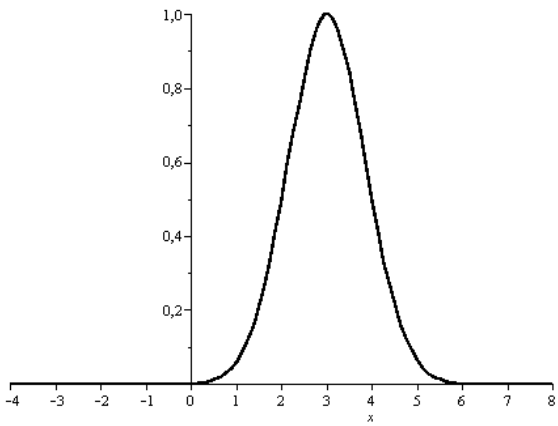
$$F = \{x \in \mathbb{R}: x \text{ é } próximo \ de \ 3\}$$

O número 3 pertence a esse conjunto? E o número 10000? Se considerarmos as idéias da lógica fuzzy, podemos dizer que ambos os números estão no conjunto, porém com diferentes graus de pertinência, de acordo com a propriedade que caracteriza o conjunto F.

A função que caracteriza o conjunto F deve ser coerente com o termo "próximo de 3". Existem infinitas funções que podem caracterizar este termo. Em particular, uma função destas é a seguinte:

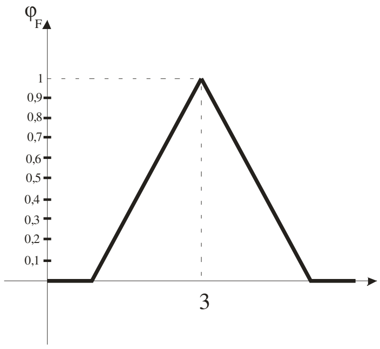
$$\varphi_F(x) = 2^{-(x-3)^2}$$

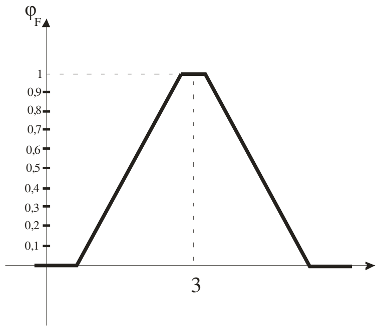
É fácil ver que esta função está de acordo com o termo "próximo de 3", uma vez que $\varphi_F(3) = 1$ e à medida que x se distancia de 3 ao longo da reta real a função $\varphi_F(x)$ vai se aproximando de 0.



Note que a escolha da função para descrever o subconjunto fuzzy F foi arbitrária. Em realidade, qualquer função $f: \mathbb{R} \to [0,1]$ tal que $f(3) = 1$ e $f(x)$ se aproxima de 0 à medida que x se afasta de 3 é uma função (função de pertinência) que pode ser representante do conjunto F.

A escolha da função de pertinência depende das variáveis características do problema, mas também é intuitiva/subjetiva, ou seja, depende de fatores como experiência, cultura, bom senso, percepção de quem analisa o problema.





Do que foi exposto até agora, podemos dizer que conjuntos fuzzy são uma generalização da teoria classica de conjuntos para dar tratamento matemático aos conjuntos descritos por meio de termos/valores subjetivos.

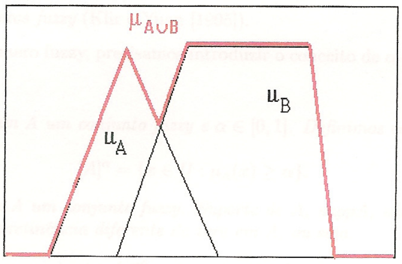
Para obter a formalização matemática deste tipo de conjunto, Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico pode ser bem descrito através de uma função chamada função característica $\chi: U \rightarrow \{0,1\}$, tal que, sendo A um subconjunto de um universo U, para todo $x \in U$, vale $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in A \\ 0, & se \quad x \notin A \end{cases}$

Posto isso, propõe-se que a noção de subconjunto fuzzy é dada ampliando-se o contradomínio de χ para o intervalo $[0,1]$. Assim, um elemento $x \in \mathrm{U}$ terá um grau de pertinência ao conjunto A em questão. Formalmente, esta afirmação pode ser bem caracterizada pela seguinte definição:

Definição 1 (Subconjunto Fuzzy) *Um subconjunto fuzzy F de um conjunto clássico X é caracterizado por um função $\mu_F: U \rightarrow [0,1]$, chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy F.*

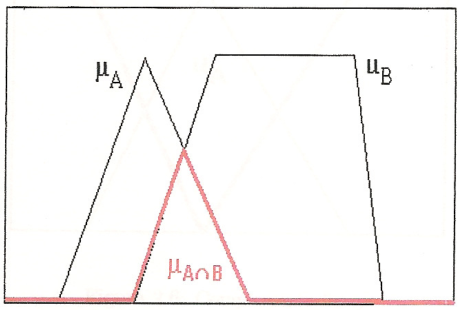
A seguir vamos extender as principais operações sobre conjuntos classícos para conjuntos fuzzy. Para isso, sejam A e B subconjuntos fuzzy de U.

Definição 2 (União) *A união entre A e B é o subconjuntos fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por* $\mu_{(A \cup B)}(x) = \max_{x \in \mathrm{U}}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.



Exemplo: Sejam os predicados *bonita* e *confortável* considerados na avaliação de uma casa. Seja A o conjunto formado pelas casas a serem avaliadas. Se a casa x é 0,5 *bonita* (mais ou menos bonita) e razoavelmente confortáve*l* com valor de *confortável* igual à 0,8, então $\mu_{(A\cup B)}(x) = \max_{x\in U}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$ = 0,8

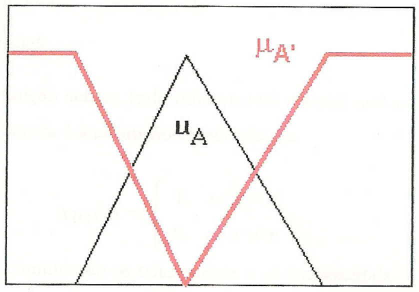
Definição 3 (Intersecção) *A intersecção entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por* $\mu_{(A\cap B)}(x) = \min_{x\in U}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$



Exemplo: Sejam os predicados *bonita* e *confortável* considerados na avaliação de uma casa. Seja A o conjunto formado pelas casas a serem avaliadas. Se a casa x é 0,5 *bonita* (mais ou menos bonita) e razoavelmente confortáve*l* com valor de *confortável* igual à 0,8, então $\mu_{(A\cap B)}(x) = \min_{x\in U}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$ = 0,5

Definição 4 (Complementar de um subconjunto fuzzy) *O complementar de A é um subconjunto fuzzy $A' \subset U$ cuja função de pertinência é dada por*

$$\mu'_A(x) = 1 - \mu_A, \quad \forall x \in U.$$



Exemplo: Seja os predicado *bonita* considerado na avaliação de uma casa. Seja A o conjunto formado pelas casas a serem avaliadas. Se a casa x é 0,5 *bonita* (mais ou menos bonita) então $\mu'_A(x) = 1 - \mu_A, \quad \forall x \in U.$ = 1 – 0,5 = 0,5 (a casa não é bonita nem feita)

Definição 5 (Igualdade) *Os subconjuntos fuzzy A e B de U são iguais se suas funções de pertinência coincidem, isto é se $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ para todo $x \in U$.*

3.2 – Números *fuzzy*

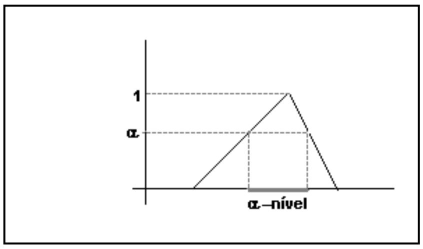
De modo geral podemos dizer que, em um problema concreto, muitos números são idealizações de informações imprecisas – "em torno de", "aproximadamente" - envolvendo valores numéricos. Matematicamente indica-se essas expressões por um subconjunto fuzzy F cujo domínio da função de pertinência μ_F é o conjunto dos números reais. Como o nosso objetivo é modelar problemas concretos, adotaremos como conjunto universo, ou domínio, o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

No que se refere a forma de x: a) para qualquer elemento x pertencente a U, a máxima altura da função de pertinência deve ter o valor 1, b) x deve ser convexo (funções de pertinência não-convexas não possibilitam unicidade na avaliação numérica do valor no eixo horizontal.

As seguintes definições são necessárias para entendê-los formalmente.

Definição 6 (α-nível) Seja F um subconjunto fuzzy de U e $\alpha \in [0,1]$. O α-nível de F é o subconjunto clássico de U definido por

$$[F]^{\alpha} = \{x \in X : \mu_F(x) \geq \alpha\} \quad para \quad 0 < \alpha \leq 1.$$



Definição 7 (Suporte) Seja F um subconjunto fuzzy de U, o suporte de F, o qual se denota por $supp\ (F)$, é o subconjunto de U cujos elementos têm grau de pertinência não nulos em F, isto é,

$$supp\ (F) = \{x \in X : \mu_F(x) > 0\}$$

Usaremos a notação $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ para denotar a família de subconjuntos fuzzy de $\mathbb{R}$, no qual os α-níveis são dados por

$$[F]^{\alpha} = \{x \in \mathbb{R} : \mu_F(x) \geq \alpha\}, \quad para\ todo \quad \alpha \in [0,1] \quad e$$

$$[F]^{0} = \overline{supp\ F}$$

são subconjuntos de R compactos e não vazios. Agora podemos definir um número fuzzy.

Definição 8 (Número Fuzzy) Um subconjunto fuzzy $F \subset \mathbb{R}$ é chamado de número fuzzy se satisfaz às seguintes condições:

1. F é um subconjunto fuzzy normal;
2. Todos os α-níveis são intervalos fechados de $\mathbb{R}$;
3. O suporte de F, $supp\ F = \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) > 0\}$, é limitado.

O conjunto fuzzy A definido pela função de pertinência, em forma de triângulo

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & se \quad a < x \leq b, \\ \dfrac{c-x}{c-b} & se \quad b \leq x < c, \\ 0 \quad caso \ \ contrário. & \end{cases}$$

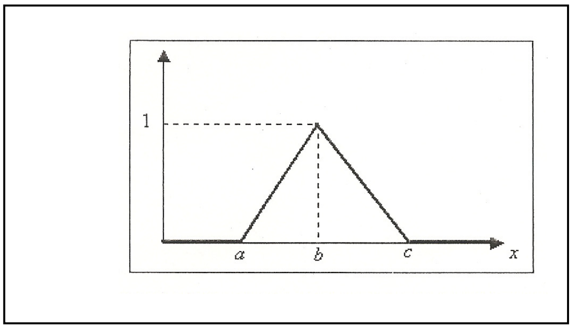


Figura 10. Representação de um número fuzzy triangular.

satisfaz as propriedades de um número fuzzy e é denominado número fuzzy triângular. Usaremos a notação $A = [a/b/c]$ para representá-lo, em que $\mu_A(a) = \mu_A(c) = 0$ e $\mu_A(b) = 1$.

No mesmo sentido, o conjunto fuzzy B, cuja função de pertinência tem a forma de um trapézio e é dada por

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & se \quad a \leq x < b, \\ 1 \quad se \quad b \leq x \leq c, & \\ \dfrac{d \quad x}{d-c} & se \quad c < x \leq d, \\ 0 \quad caso \ \ contrário. & \end{cases}$$

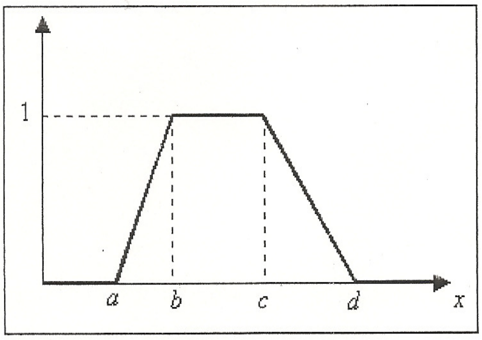


Figura 11. Representação de um número fuzzy trapezoidal.

também satisfaz as propriedades da Definição 1.10 e é chamado *número fuzzy trapezoidal*. Será comumente denotado por $B = [a/b/c/d]$ em que $\mu_B(a) = \mu_A(d) = 0$ e $\mu_A(b) = \mu_A(c) = 1$.

Exemplo 2 Em muitas oportunidades tem-se a necessidade de utilizar algum tipo de imprecisão no dia a dia. Quando se quer, por exemplo, marcar um encontro com outra pessoa, diz-se comumente, encontro-te ``por volta das 4 horas". Por volta das 4 horas é um número *fuzzy*, caracterizado por sua função de pertinência μ_4, a qual pode ser também caracterizada pela função

$$\mu_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3{,}8}{2} & se \quad 3{,}8 < x \leq 4, \\ \dfrac{4{,}2-x}{2} & se \quad 4 \leq x < 4{,}2, \\ 0 \quad caso\ contrário. \end{cases}$$

Note que o número fuzzy 4 poderia ser entendido como ``*em torno de* 4"

Outro exemplo, na primeira prova um aluno obtém uma nota em torno de 3 e na segunda uma próxima de 7 então, sua nota final seria próxima de 5 .

3.2.1. – Operações aritméticas envolvendo números fuzzy

As operações aritméticas envolvendo números *fuzzy* estão estreitamente ligadas às operações aritméticas intervalares. BARROS e BASSANEZI (2006,p.48) exemplificam estas operações para intervalos fechados de números reais.

Considerando que cada número real pode ser considerado como um intervalo fechado com extremos iguais, utilizando princípio de extensão apresentado na secção 3.2.2, podemos estender as principais operações aritméticas referentes a números reais aos números fuzzy.

Sejam $R: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma operação binária sobre $\mathbb{R}$ e $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, onde $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ é o conjunto dos números fuzzy reais. Pelo princípio de extensão, podemos escrever

$$\mu_{R(A,B)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{R(x,y)=z} \min(\mu_A(x); \mu_B(y)) \quad se \quad R^{-1}(z) \subset \mathbb{R}^2 \\ 0 \quad se \quad R^{-1}(z) \not\subset \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Assim, se considerarmos a operação R como a operação de adição $R(x,y) = x + y$ ou como a operação de multiplicação $R(x,y) = x \cdot y$, o Princípio de Extensão nos proporciona a adição e a multiplicação entre os números fuzzy A e B, dadas pelas seguintes funções de pertinência:

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{x+y=z} \min(\mu_A(x); \mu_B(y))$$

$$\mu_{A \cdot B}(z) = \sup_{x \cdot y=z} \min(\mu_A(x); \mu_B(y))$$

Estas funções representam os números fuzzy $A + B$ e $A \cdot B$, respectivamente .

Além dessas operações, o Princípio de Extensão nos permite estender praticamente todas operações conhecidas sobre números reais aos numéros fuzzy.

Com feito, dados dois números fuzzy $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e um número $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

Subtração. O número fuzzy $A - B$, denominado diferença entre A e B, é dado pela função de pertinência

$$\mu_{A-B}(z) = \sup_{x-y=z} \min(\mu_A(x); \mu_B(y))$$

Divisão. O número fuzzy $A \,/\, B$, denominado quociente de A por B, é dado pela função de pertinência

$$\mu_{A/B}(z) = \sup_{\frac{x}{y}=z} \min(\mu_A(x); \mu_B(y))$$

Produto por escalar. O número fuzzy λA é dado pela seguinte função de pertinência

$$\mu_{\lambda A}(z) = \sup_{\lambda x=z} \mu_A(x) = \begin{cases} \mu_A(\lambda^{-1} z) & se \;\; \lambda \neq 0 \\ 0 \;\; se \;\; \lambda = 0 \end{cases}$$

3.2.2. –Princípio de extensão de Zadeh

O Princípio de Extensão de Zadeh é uma das idéias básicas da teoria fuzzy que promove a extensão de conceitos matemáticos não fuzzy em fuzzy.

O princípio de extensão pode ser discrito da seguinte forma: a) o grau de pertinência de um valor do contradomínio é definido diretamente pelo grau de pertinência de sua pré-imagem, b) quando um valor do contradomínio é mapeado por vários do domínio, o seu grau de pertinência é obtido pelo maior dos graus de pertinência dos valores da entrada.

Seja f: X → Z uma função injetora e A um subconjunto fuzzy de X, enumerável (ou finito), e dado por

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{A(x_{i})/x_i}$$

Então, o Principio de Extensão garante **que** $\hat{f}$ (A), extensão da função f aplicada em A, é um subconjunto fuzzy de Z, dado por

$$\hat{f}(A) = \hat{f}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{A(x_{i})/x_i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{A(x_i}\text{)/f(xi)}$$

Portanto, a imagem de A por f pode ser deduzida do conhecimento das imagens de xi por f. O grau de pertinência de zi = f(xi) em $\hat{f}$ (A), é o mesmo de xi em A.

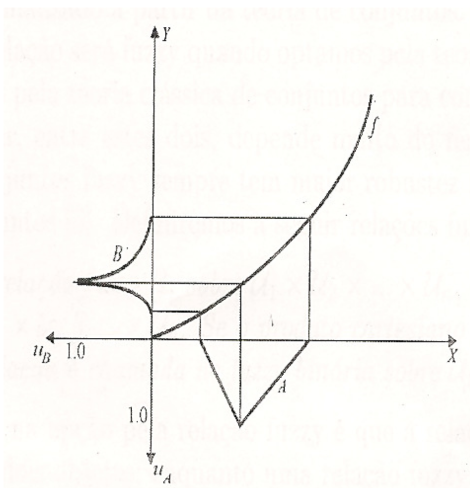


Figura representativa da imagem de um subconjunto fuzzy a aprtir do principio de extensão para uma função f.

3.3 – Lógica Fuzzy

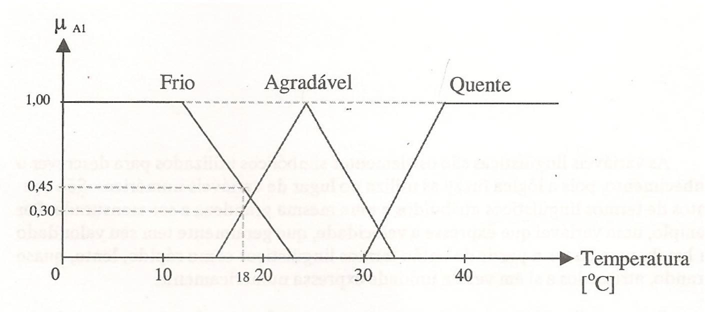
Um sistema lógico é um conjunto de axiomas e regras de inferência que visam representar formalmente um raciocínio válido. A lógica clássica trabalha com proposições que são verdadeiras ou falsas e se baseia na teoria clássica de conjuntos. Além disso, a lógica é um método de estudo que sugere a procura e entendimento da verdade.

Na lógica fuzzy, por sua vez, tendo como base a teoria de conjuntos *fuzzy,* uma proposição fuzzy do tipo ``*Se x é A e y é B, então z é C*'' é falsa ou verdadeira com um certo grau de certeza. Na tentativa de modelar os fenômenos que nos cercam existem situações nas quais a dicotomia verdadeiro-falso não é suficiente para representá-los, e nestes casos, a lógica fuzzy é útil, pois é capaz de traduzir em termos matemáticos as informações emitidas por meio de sentenças formuladas em linguagem natural com termos subjetivos ou ambiguos. Nesse sentido, Faz-se necessário, buscar uma maneira de fazer inferências e tomar decisões mesmo em ambientes onde tais características são predominantes.

3.3.1. –Variáveis Linguísticas e Proposições Fuzzy

Uma variável linguística X em um universo $\mathbb{U}$ é aquela cujos valores são subconjuntos fuzzy, que correspondem por sua vez a termos linguísticos. Podemos dizer que uma variável linguística é um substantivo enquanto seus valores são adjetivos.

Por exemplo ``temperatura'' é uma variável linguística que pode assumir os atributos (valores) ``*frio*'', ``*agradável*'', ``*quente*''.



Em nosso trabalho, por querermos modelar fenômenos onde a subjetividade é um fator preponderante, os valores assumidos pelas variáveis serão números fuzzy, nos quais o universo de discurso será o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Neste caso, teremos uma variável linguística real.

As sentenças em que aparecem variáveis linguísticas juntamente com seus valores subjetivos são chamadas *proposições fuzzy*. Elas são do tipo:

$$Se \text{ ``ESTADO''}, \quad então \text{ ``AÇÃO''}$$

Na figura X, pode-se visualizar uma representação fuzzy para a temperatura ambiente. Por exemplo, 18º C não é totalmente agradável. Pode-se dizer, contudo, que 18º C possui uma pertinência $\mu(18)$= 0,45 *frio* e, ao mesmo tempo, 0,30 *agradável.* Assim, 18º C está mais para frio do que para agradável, mas não deixa de ser um pouco agradável.

3.3.2. – Conectivos Lógicos

Para se traduzir matematicamente uma proposição fuzzy, faz-se necessário definir convenientemente os conectivos ``E" e ``OU", já que um estado pode comportar mais de uma variável.

Para tanto utilizaremos os operadores t-norma e t-conorma, os quais denotaremos respectivamente por $\wedge$ e $\vee$ e os definiremos a seguir.

É importante salientar que na teoria clássica de conjuntos, quando temos dois conjuntos A e B, se dissermos que um elemento x está em A ``E" está em B, a informação fornecida é a de que x está na intersecção de A e B.

De maneira análoga, associa-se intersecção de conjuntos fuzzy, para modelar o conectivo fuzzy ``E". Vejamos

Definição 9 (t-norma) *O operador binário* $\wedge: [0;1] \times [0;1] \rightarrow [0;1]$ *é uma t-norma, se satisfaz:*

1. *Comutatividade:* $x \wedge y = y \wedge x$;

2. *Associatividade:* $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;

3. *Monotonicidade:* se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x \wedge y \leq u \wedge v$;

4. *Condições de Fronteira:* $\wedge(1,x) = 1 \wedge x = x$ e $\wedge(0,x) = 0 \wedge x = 0$.

Exemplo 3 *São exemplos de t-norma:*

1. $x \wedge_1 y = \min\{x; y\}$;

2. $x \wedge_2 y = x \cdot y$;

3. $x \wedge_3 y = \max\{0; x + y - 1\}$.

Do mesmo modo, o conectivo ``OU", ao ser utilizado do ponto de vista da lógica clássica, na sentença ``x está em A `OU' x está em B" significa que o elemento x está na união de A e B. Daí agir-se de modo análogo para construir o conceito de t-conorma.

Definição 10 (t-conorma) *O operador binário* $\vee: [0;1] \times [0;1] \to [0;1]$ *é uma t-conorma, se satisfaz:*

1. *Comutividade:* $x \vee y = y \vee x$;

2. *Associatividade:* $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;

3. *Monotonicidade:* se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x \vee y \leq u \vee v$;

4. *Condições de Fronteira:* $\vee(1,x) = 1 \vee x = x$ e $\vee(0,x) = 0 \vee x = 0$.

Exemplo 4 *São exemplos de t-conorma:*

1. $x \vee_1 y = \max\{x; y\}$;

2. $x \vee_2 y = \min\{1; x + y\}$;

3. $x \vee_3 y = x + y - xy$.

3.3.3 – Relações e Produto Cartesiano Fuzzy

O conceito de relação matemática é formalizado a partir da teoria de conjuntos. Uma relação clássica indica se há ou não alguma associação entre dois objetos. Neste sentido, uma relação fuzzy, estende este conceito e além de indicar se há ou não tal associação, mostra também o grau desta relação.

O conceito matemático de relação fuzzy é formalizado a partir do produto cartesiano usual entre conjuntos clássicos, estendendo a função característica de uma relação clássica para uma função de pertinência.

Definição 11 *Uma relação fuzzy* $\mathcal{R}$ *sobre* $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ *é qualquer subconjunto fuzzy de* $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$*. Assim, uma relação fuzzy* $\mathcal{R}$ *é definida por uma função de pertinência* $\varphi_{\mathcal{R}}: U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \to [0;1]$

Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos $U_1 \times U_2$, a relação é chamada de *fuzzy binária* sobre $U_1 \times U_2$.

A partir destes conceitos, poderemos definir o *produto cartesiano fuzzy*. Esta definição será de grande importância para a construção de controladores fuzzy , base dos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy. Tecnicamente, esta operação é similar à intersecção de conjuntos fuzzy (Definição 3), com a diferença de que neste caso o conjunto universo não é necessariamente o mesmo. Formalmente temos a Definição 12 que segue.

Definição 12 *O produto cartesiano fuzzy dos subconjuntos fuzzy* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *de* $U_1, U_2, \ldots, U_n$*, respectivamente, é a relação fuzzy* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A$ *cuja função de pertinência é dada por* .

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge \ldots \wedge \varphi_{A_n}(x_n).$$

onde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ e $\wedge$ representa o mínimo.

Um exemplo de aplicação do produto cartesiano fuzzy pode ser encontrado no Capitulo 4, no problema envolvendo diagnóstico médico e escolha da casa própria.

3.3.4 – Sistema baseado em regras fuzzy

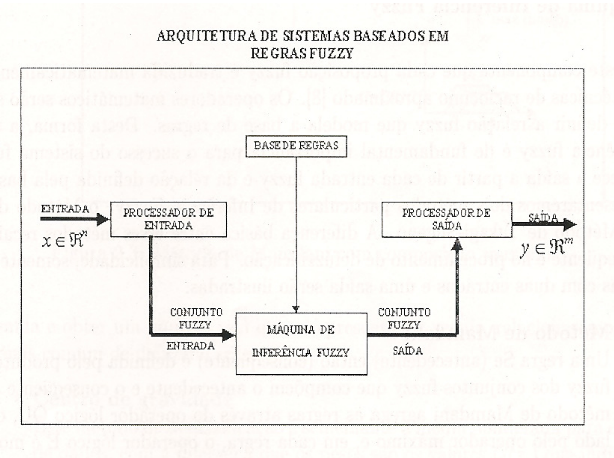
Vamos utilizar agora os conceitos aqui vistos para construir um sistema que de alguma forma simule as ações e decisões humanas, porém com um caráter mais formal.

Um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) é um sistema que se utiliza da lógica fuzzy para produzir saídas para cada entrada fuzzy. Em nossos estudos utilizaremos o Método de Inferência de *Mamdani*. A particularidade destes sistemas é que cada saída representa a ``ação'' correspondente à ``condição'' ou entrada da SRBF.

Os controladores fuzzy comandam as tarefas por meio de termos de linguagem usual. Neste sentido verificamos que variáveis linguísticas desempenham papel fundamental neste processo.. Estes termos, traduzidos por conjuntos fuzzy, são utilizados para transcrever a base de conhecimentos através de uma coleção de regras fuzzy, denominada base de regras fuzzy.

A partir desta base de regras obtém-se a *relação fuzzy*, a qual produzirá a saída (resposta, ação) para cada entrada (estado, condição). Por exemplo, ``Se a roupa é " *grossa"* e a sujeira "*difícil*", então lava-se *"muito tempo*''.

Um controlador fuzzy é composto basicamente de quatro módulos: o *fuzzificador*, a *base e regras*, o *método de inferência* e o *defizzificador*. O esquema do controlador pode ser visto na Figura X. A estrutura dos controladores fuzzy permite a transformação do domínio de nossos fenômenos (comumente os números reais) para o domínio dos conjuntos fuzzy, através dos números fuzzy. A partir de então é utilizado um método de inferência fuzzy nas regras pré-estabelecidas para que seja tomada uma decisão. Por fim, se faz a transformação inversa para o mundo real da decisão escolhida. Vamos analizar cada módulo em particular.



3.3.5 – Fuzzificação

Neste módulo cada entrada do sistema é transformada em um conjunto fuzzy, ou seja, se $x \in \mathbb{R}^n$ é uma entrada, o fuzzificador associa a esta entrada uma função de pertinência $\mu_x(a)$, ou em outros termos, associa um número fuzzy x$\in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Em muitos casos, a função $\mu_x(a)$ é a própria função característica de x.

3.3.6 – Módulo da base de regras

Este pode ser considerado como um módulo que faz parte do ``núcleo" do controlador fuzzy. Ele é composto pelas proposições fuzzy e cada uma destas proposições é descrita na forma linguística

Se x_1 é A_1 e x_2 é A_2 e $\dots$ e x_n é A_n, então y_1 é B_1 e y_2 é B_2 e $\dots$ e y_m é B_m,

onde A_i e B_i são conjuntos fuzzy que representam termos linguísticos das variáveis de entrada e saída, respectivamente. A expressão x_i é A_i significa que $\mu_{A_i}(x_i) \in [0;1]$. É aqui que as variáveis, agora linguísticas, e suas classificações (adjetivos) são catalogada e, em seguida, modeladas por funções de pertinência. A combinação destas regras é que gera uma saída y $\in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Abaixo ilustramos uma base de regras generalizada.

R_1:``**Proposição fuzzy 1**"

ou

R_2:``**Proposição fuzzy 2**"

ou

$\vdots$

ou

R_k:``**Proposição fuzzy k**"

Podemos estabelecer a idéia, embora de forma simplificada, que os controladores fuzzy são sistemas especialistas para os quais cada proposição fuzzy tem a forma

Se ``condição'', então ``ação'',

em que cada ``condição'' e cada ``ação'' são estados assumidos por variáveis linguísticas que são por sua vez modeladas por conjuntos fuzzy. Os conjuntos fuzzy que compõem a ``condição'' são chamados *antecedentes* e os que compõem a ``ação'' são chamados *consequentes*.

Neste módulo é que as transformações do fenômeno a ser modelado são utilizadas para se definir a base de regras. Isso porque, para cada estado do sistema, definido a priori pelos termos linguísticos da variável de entrada, deve se ter uma regra que o comtemple. Desta forma, quanto mais termos linguísticos, mais informações são incorporadas ao modelo.

Com isso, quanto melhor se conhece o fenômeno, mais fácil será a tarefa de construir a base de regras. O auxílio do especialista é importante e a interação com o mesmo é facilitada pois a base de regras utiliza termos linguísticos. Isso significa que mesmo alguém sem conhecimentos matemáticos sobre lógica fuzzy pode auxiliar na construção das regras.

Um número maior de regras também pode, de certo modo, facilitar a representação da base para comtemplar melhor as informações matemáticas que se quer representar.

3.3.7 – Módulo de inferência fuzzy

É neste estágio que para cada valor assumido pelas variáveis de entrada são determinados, através de base de regras, os valores das variáveis de saída.

Como vimos, as sentenças da base de regras são ligadas por conectivos E e OU. O método de inferência traduz estas regras matematicamente, por meio das t-norma e t-conorma, gerando para cada regra de saída.

O método de inferência utilizado neste trabalho é conhecido como <u>método de inferência de Mamdani ou método MAX-MIN</u>. Além deste método existe o método de Larsen, no qual o operador de inferência é o Produto. Existe também o método de Tsukamoto que se baseia numa simplificação do método de Mamdani em que as funções de pertinência é monótonas. E por fim, temos o método de Takagi e Sugeno, no qual o mesmo é descrito por um conjunto de equações (Weber e Klain, 2003; Barros e Bassanezi, 2006).

O método de Mamdani segue o seguinte procedimento:

1. Em cada regra R_j da base de regras fuzzy, a condicional ``**Se** x **é** A_j, **então** y **é** B_j" é modelada pela aplicação $\wedge$ (mínimo);

2. Adota-se a t-norma $\wedge$ (mínimo) para o conectivo ``**e**";

3. Para o conectivo lógico ``**ou**" adota-se a t-conorma $\vee$ (máximo) que conecta as regras fuzzy da base regras.

Formalmente, a relação $\mathcal{R}$ é o subconjunto fuzzy de $X \times Y$ cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{\mathcal{R}}(x, y) = \max_{1 \leq i \leq k} (\mu_{R_i}(x, y)) = \max_{1 \leq i \leq k} [\mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y)],$$

onde k é o número de regras que compõem a base de regras e, A_i e B_i são os subconjunto fuzzy da regra i. Cada um dos valores $\mu_{A_i}(x)$ e $\mu_{B_i}(y)$ são interpretados como os graus com que x e y estão nos subconjuntos fuzzy A_i (entrada) e B_i (saída), respectivamente.

Exemplos ilustrativos do funcionamento do método de inferência de Mamdani, podem ser visualizados nos problemas resolvidos nos cap 4 e 5 deste trabalho.

3.3.8 – Módulo de defuzzificação

O papel do defuzzificador é converter a saída dada pelo módulo de inferência, que é um conjunto fuzzy, em número *crisp* (real) que bem o represente. Apesar de existirem muitos métodos de defuzzificação, exibiremos apenas três métodos de defuzzificação. São eles, o método do *centro de gravidade* ou centróide, o método do centro dos máximos e método da média dos máximos.

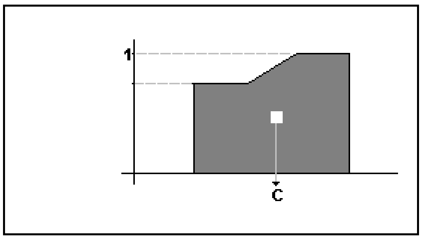
Defuzzificação - Centro de gravidade ou centróide

Este método é parecido com uma média aritmética para a distribuíção de dados, com a diferença que os pesos são os valores $\mu_C(z_i)$ que indicam o grau de compatibilidade do valor z_i com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy C.

O centro de gravidade oferece então a média das áreas de todas as figuras que representam o grau de pertinência de um subconjunto fuzzy. Entre todos os métodos de defuzzificação ele é o preferido.

Para um domínio discreto, temos

$$G(C) = \frac{\sum_{i=0}^{n} z_i \mu_C(z_i)}{\sum_{i=0}^{n} \mu_C(z_i)}$$



Para um domínio contínuo, representamos as somas acima na forma integral

$$G(C) = \frac{\int_{\mathbb{R}} y\mu_C(y)\,dy}{\int_{\mathbb{R}} \mu_C(y)\,dy}$$

Centro dos Máximos

Este é um procedimento radical, no sentido que são levados em conta apenas as regiões de maior possibilidade entre os possíveis valores da variável que modela o conceito fuzzy em questão. Neste caso, tem – se:

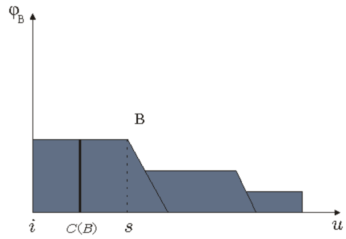
$$C(B) = \frac{i+s}{2},$$

onde

$$i = \inf\{u \in \mathbb{R}: \varphi_B(u) = \max \varphi_B(u)\} \quad \text{e}$$

$$s = \sup\{u \in \mathbb{R}: \varphi_B(u) = \max \varphi_B(u)\}$$

A figura ilustra esse defuzzificador:



Média dos Máximos

Para o domínio discreto é comum usar como defuzzificador a média dos máximos cuja definição é dada por

$$M(B) = \frac{\sum u_i}{\sum i}$$

onde u_i são os elementos de maior pertinência ao cojunto fuzzy B, isto é, para cada i tomamos $\varphi_B(u) = \max \varphi_B(u)$.

Como dissemos antes, via de regra, os controladores fuzzy são compostos de quatro módulos: fuzzificação, base de regras, inferência e defuzzificação. O método de Mamdani é um caso típico. No entanto, para algumas situações, o módulo de defuzzificação pode ser suprimido. Este é o caso do método de inferência de Kang-Takagi-Sugeno.

3.4 – Medida *fuzzy*

A σ-aditividade é uma propriedade definida em uma σ-álgebra.

Uma σ-álgebra é uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de um conjunto conhecido U satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\emptyset \in \mathcal{F}$$

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A' \in \mathcal{F}$$

$$A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$$

$$U \in \mathcal{F}$$

$$A_1, A_2, \dots, A_i, \dots \Rightarrow \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$$

Definiremos aqui somente o conceito de medida de probabilidade e posteriormente definiremos também o conceito de medida de possibilidade como uma medida fuzzy, pois são estes os conceitos que se fazem necessário para estabelecer os conceitos de integral fuzzy. Para uma descrição detalhada .sobre a Teoria da Medida ver [...].

Uma medida de probabilidade é uma aplicação $P: \mathcal{F} \to [0,1]$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1;$$

$$P(\mathcal{F}) = 1;$$

Se $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots \in \mathcal{F}$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$, então $P(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$

A propriedade 3 acima é denominada de σ-aditividade.

Uma medida fuzzy é uma medida que “flexibiliza a rígida propriedade da σ-aditividade exigida na medida clássica”(Bassanezi, 2006, p.175)

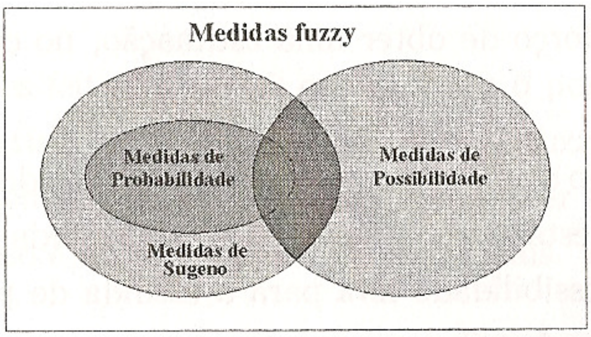
Definição 13. Seja $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de $U \neq \emptyset$. Uma aplicação $\mu: \mathcal{F} \to [0,1]$ é denominada uma medida fuzzy se

$\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(U) = 1$;

$\mu(A) \leq \mu(B)$ sempre que $A \subseteq B$.

Foi Sugeno, em 1974, que sugeriu a idéia de medida fuzzy, substituindo o axioma 3 da definição de medida de probabilidade pelo seguinte axioma

Se $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_i \subseteq \cdots$, então $P(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$



Vamos definir agora a medida de possibilidade que servirá para compararmos com as medidas de probabilidade.

Definição 14. Uma medida de *possibilidade* sobre U é uma função de conjuntos $\pi: \mathcal{P}(U) \to [0,1]$, satisfazendo:

$$\pi(\emptyset) = 0 \text{ e } \pi(U) = 1;$$

Para qualquer família $\{A_{i \in \mathbb{J}}\}$ de subconjuntos de U tem-se

$$\pi\left(\bigcup_{i \in \mathbb{J}} A_i\right) = \sup\{\pi(A_i) : i \in \mathbb{J}\},$$

onde $\mathcal{P}(U)$ é o conjunto das partes de U, ou seja, o conjunto de todos os subconjuntos (clássicos) de U, e $\mathbb{J}$ é um conjunto de índices.

3.4.1 – Esperança fuzzy

No nosso trabalho de campo do capítulo 5, para análise dos dados coletados utilizamos o conceito de esperança fuzzy. As nossas variáveis na discussão eram todas discretas e, portanto a esperança fuzzy é dada pela média ponderada dos valores médios obtidos.

$$EF = \frac{\sum x_i \varphi(x_i)}{\sum \varphi(x_i)}$$

onde x_i é um valor de entrada da variável e $\varphi(x_i)$ é o grau de pertinência correspondente a x_i. Se, por outro lado, as variáveis forem contínuas, a esperança fuzzy é dada pela integral de Sugeno

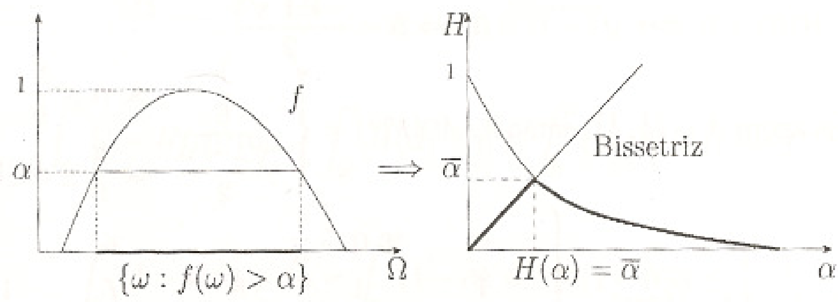
$$EF = \int_U f \, d\mu$$

Onde $f: U \to [0,1]$ é uma função de pertinência de U e μ é uma medida sobre U.

Esta integral corresponde ao ponto fixo da função $H(\alpha) = \mu\{\omega \in U: f(\omega) \geq \alpha\}$. Geometricamente, a integral de Sugeno acima é o ponto de intersecção da bissetriz do primeiro quadrante com a função $H(\alpha)$.

Assim, sendo $\bar{\alpha}$ o ponto fixo de $H(\alpha)$, temos

$$EF = \int_U f \, d\mu = H(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}$$



O nosso objetivo em apresentar aqui, em detalhes, as relações e ferramentas da teoria fuzzy tem, além da função de introduzi-la no campo da educação matemática, uma outra função: codificar e decodificar tais ferramentas no sentido de mostrar uma outra construção matemática, com outras características que são tomadas pelo resolvedor a partir de sua percepção e experiência do contexto fuzzy. De todo modo, vale mais uma vez ressaltar que seja qual for a ferramenta fuzzy utilizada pelo resolvedor, está, para nós, sempre presente a idéia de que a solução de um problema e o desejo de ir buscá-la está no estado de problematização em que se encontra o resolvedor – a qual é gerada por fatores emocionais, afetivos, cognitivos entre outros.

CAPÍTULO 4

Quando os problemas se estabelecem

CAPÍTULO 4. QUANDO OS PROBLEMAS SE ESTABELECEM

Neste capítulo apresentaremos e discutiremos alguns problemas do mundo real, os quais trazem na sua constituição, como problemas matemáticos, diferentes tipos de incerteza.

Como mencionado, quando procuramos interpretar matematicamente tais situações-problema – construir modelos matemáticos –, a subjetividade própria da variação linguística que se apresenta no raciocínio utilizado para a solução não permite, em geral, encaminhamentos de cunho estatístico.

Estaremos, aqui, de fato mergulhados em problemas do mundo real, ora discutindo a relação especialmente existencial "presa-predador", ora o desafio do "crescimento populacional", assim como a tensão das dinâmicas das "epidemias" e do "controle de pragas", entre outros.

A apresentação desses problemas carregados de questões sociopolíticas, estimulando a percepção e os modos de aplicação do pensamento subjetivo, frequentemente pode aproximar-nos da preocupação de vários autores contemporâneos que fazem da modelagem matemática um processo e/ou uma estratégia para atingir e discutir questões sociais. Em particular, podemos citar Mendonça-Domite (1999), a qual acredita que a prática pedagógica da matemática, a partir de problemas do mundo real pode ser:

> [...] um motivo fecundo para a transformação social - professor de matemática pode atuar não só no desenvolvimento do educando como ser cognitivo, mas também como ser social e político, aguçando-lhe o espírito crítico de modo a torná-lo capaz de contribuir para o desenvolvimento de uma sociedade democrática.

4.1 – Lógica *fuzzy* como processo de modelagem de situação-problema

Antes de passarmos ao estudo das situações problemas propostas para este capítulo, faremos uma síntese dos procedimentos característicos para a formulação e o estudo de modelos *fuzzy* discretos com base de regras, também denominados modelos p-*fuzzy*. Maiores detalhes sobre os conceitos e as ferramentas básicas desta teoria poderão ser encontrados no capítulo 3 deste trabalho de pesquisa.[8]

Como bem discutem Barros e Bassanezi (2006), no cotidiano, as ações humanas controlam os mais diversos sistemas do mundo real por meio de informações imprecisas. Cada indivíduo funciona como uma "caixa preta": recebe informações que são interpretadas segundo seus parâmetros e então decide qual atitude tomar.

Os sistemas baseados em regras *fuzzy* permitem o tratamento e a manipulação de informações incertas e imprecisas, as quais estão representadas por uma família de conjuntos *fuzzy*. Tais sistemas oferecem uma forma sistemática para a modelagem de processos a respeito dos quais as informações são fornecidas de forma qualitativa, particularmente quando não dispomos de dados suficientes para uma estatística ou quando a situação não comporta medições.

Dentro desse contexto, a representação do sistema pode ser feita através de variáveis linguísticas representadas por números *fuzzy* que expressam o comportamento do sistema.

Uma interação entre duas espécies de animais, por exemplo, designada como relação presa-predador[9], considera que, nas relações entre tais espécies, essas características podem estar associadas à sua idade. Isso significa que esses animais seriam considerados presas ou predadores com mais ou menos intensidade, de acordo com a idade de cada espécie. Sendo assim, o relacionamento entre presas e predadores depende da capacidade que cada elemento (como presa ou como predador) tem em seu grupo. Neste caso, podemos dizer que os conjuntos presa e predador são *fuzzy*. A preferência diferenciada de um predador por um tipo de presa (filhote, jovem ou adulto) pode caracterizar o grau com que cada elemento do grupo de presas se constitui em uma *presa*. Assim, um filhote pode ter grau de pertinência 0,6; um jovem, grau 0,4, enquanto um velho (ou fraco) seria o mais preferido dos *predadores*, com grau 0,9. A Figura 1a representa a função "grau de pertinência de *presas*".

---

[8] Para aqueles que se interessarem por outras aplicações, sugerimos as obras de Barros, Bassanezi, Gomide, Jafelice, Ortega.

[9] Os modelos de interação entre espécies tiveram origem com os trabalhos de Lotka (1925) e Volterra (1926). De maneira geral, modelos desse tipo são desenvolvidos através de sistemas não lineares de equações diferenciais ordinárias.

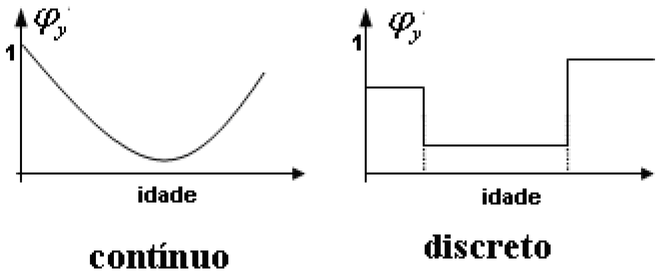


Figura 1a. Funções de pertinência de *presas*: conjunto *fuzzy* contínuo e discreto

Para o conjunto *predador*, situação análoga pode ocorrer, quando, num mesmo grupo, seus elementos comportam-se de maneiras distintas em relação ao fenômeno predação. Assim, um filhote ou um velho predam pouco, enquanto um jovem geralmente é o maior responsável por abastecer a família com alimentos provenientes do grupo das presas.

De maneira geral, nos conjuntos *fuzzy* a ideia de pertinência é flexibilizada, generalizando-se a função característica, que tem apenas dois valores (vale 1, se x pertence ao conjunto; e vale zero, se não pertence), em *função de pertinência*, de modo que esta possa assumir um valor qualquer no intervalo [0,1].

Na Figura 1a, representamos o conjunto *fuzzy presas,* referente ao sistema presa-predador já mencionado. A Figura 1b representa funções de pertinência, contínua e discreta, dos *predadores*.

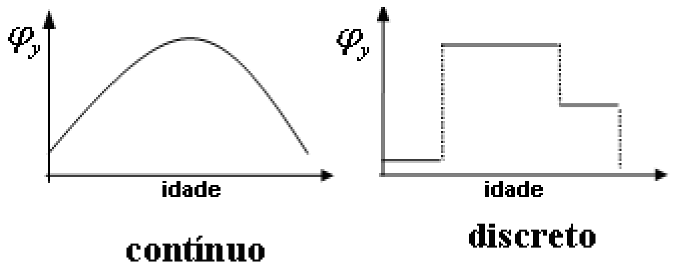
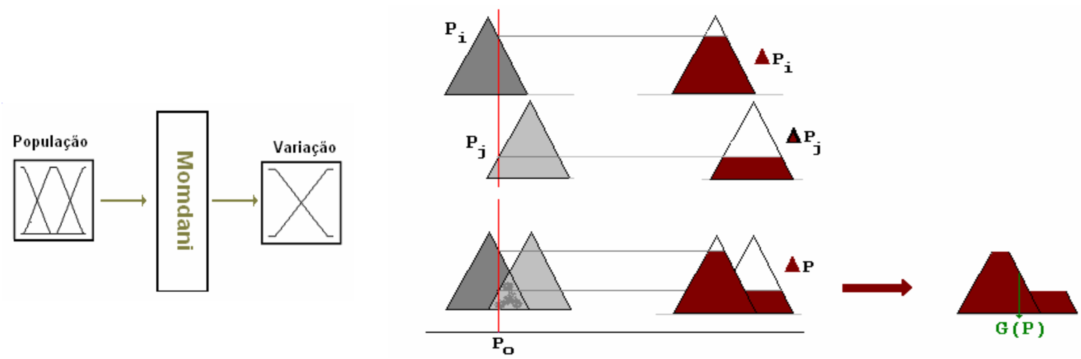


Figura 1b. Funções de pertinência dos predadores: conjunto *fuzzy* contínuo e discreto

Para descrever o conhecimento sobre fenômenos da realidade, contemplando sua subjetividade em estudo, utilizam-se variáveis linguísticas ou variáveis *fuzzy* para a formulação dos modelos. Esses termos, traduzidos por conjuntos *fuzzy*, estão relacionados através de uma proposição *fuzzy*. Tais proposições conectam as variáveis através de operadores lógicos, como: *e, ou, então* e compõem um conjunto de regras *fuzzy* conhecido como *base de regras*, a partir da qual é possível estabelecer relações ou operações que consistem em combinar um ou mais conjuntos *fuzzy*, visando à obtenção de um único, que comporia um conjunto solução, como uma espécie de média das variáveis linguísticas. As operações básicas referentes às relações *fuzzy* são especificadas similarmente àquelas definidas para os conjuntos *fuzzy*.

O raciocínio aplicado para obtenção do conjunto solução agrega por meio do operador lógico *ou*, modelado pelo operador máximo $\vee$; e, em cada regra, por meio do operador lógico *e*, que é modelado pelo operador mínimo $\wedge$. O processo descrito é denominado método de inferência de Mamdani para t-norma. Por fim, há uma transformação inversa do conjunto solução *fuzzy* para um número real ou média real ("defuzzificação") (SHAW; SIMÕES, 1999). Para uma "defuzzificação", pode-se utilizar o método do centro de gravidade. A Figura 2 ilustra esse processo para uma variável de entrada e uma saída.



$$B(u) = V_{\{x \in X\}}\{M(x,u) \cap A(x)\}$$

Figura 2. Esquema representativo do método de inferência de Mandani

Em um sistema dinâmico *fuzzy* ou sistema p-*fuzzy*, cada valor de saída (*variação*) "defuzzificada" ΔP_n é incorporado ao modelo discreto $P_{n+1} = P_n + \Delta P_n$, que atua como uma interação de recorrência para obter os valores sucessivos de P_n. O diagrama a seguir (Figura 3) representa um sistema dinâmico p-*fuzzy*.

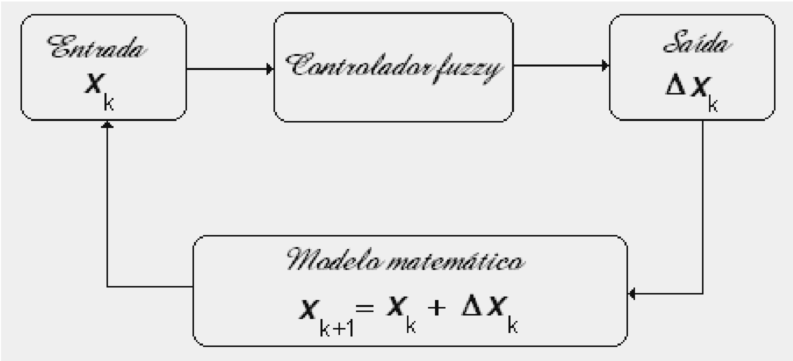


Figura 3. Diagrama representativo de um sistema dinâmico p-*fuzzy*

Com efeito, optamos por este tipo de modelo devido a sua abrangência e simplicidade para ser abordado, em contextos de ensino-aprendizagem, para estudantes ainda não familiarizados com esta teoria, com conteúdos matemáticos mais sofisticados.

4.1.1 – O modelo presa -predador

Neste exemplo, usaremos conceitos subjetivos de presas e predadores, considerando seus respectivos conjuntos *fuzzy* X e Y definidos anteriormente; neste caso, adotou-se a idade como o potencial destes conjuntos, para obter o valor de apenas um dos parâmetros do modelo determinístico. O esquema abaixo (Figura 4) ilustra a dinâmica presa-predador e os parâmetros (taxas) a serem considerados na elaboração do modelo.

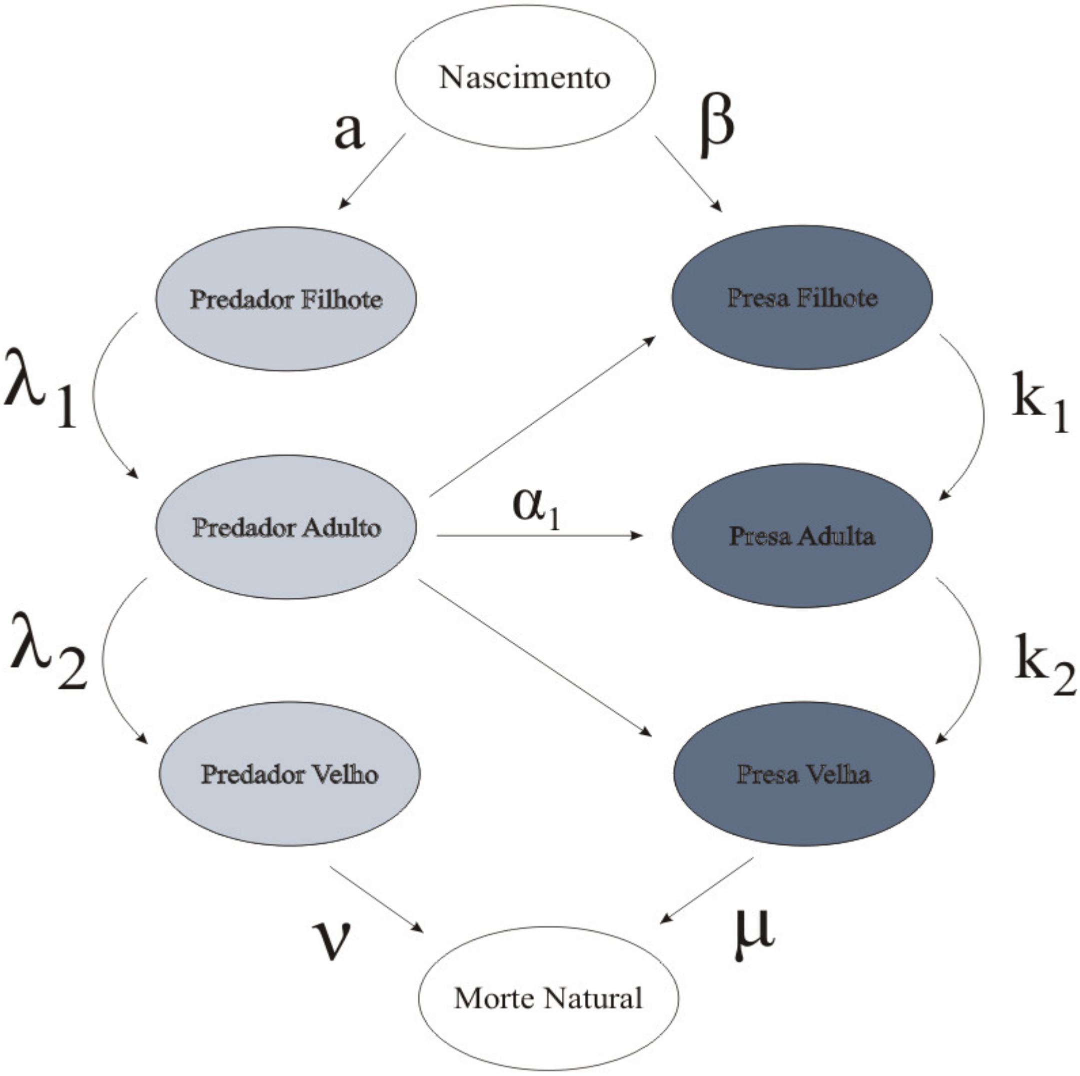


Figura 4. Diagrama representativo da dinâmica presa x predador

Na Figura 4, *a* é a taxa de natalidade de presas; αi**,** a taxa de comilança (mortalidade de presas em cada estágio i); *ki***,** a taxa de transferência do estágio i para (i+1) para presas; β**,** a taxa de natalidade de predadores (taxa de transformação de massa); λi**,** a taxa de transferência do estágio i para (i+1) para predadores; μ**,** a taxa de mortalidade natural das presas; υ**,** a taxa de mortalidade natural dos predadores; x_1 são filhotes de presa; $x_{2,}$ presas adultas ou jovens; $x_{3,}$ presas velhas ou doentes; $y_{1,}$ filhotes de predadores; $y_{2,}$ predadores jovens; e $y_{3,}$ predadores velhos.

Agora, para o conjunto *fuzzy* X *presas*, definimos seu potencial com tal propriedade, isto é,

$$P_x = P_{x_1} x_1 + P_{x_2} x_2 + P_{x_3} x_3,$$

em que $P_{x_i}, i = 1,2,3$ é o respectivo grau de pertinência da classe x_i no conjunto X.

O potencial de predador é dado analogamente por:

$$P_y = P_{y_1} y_1 + P_{y_2} y_2 + P_{y_3} y_3$$

Assim,

$$\alpha_i = \alpha P_y P_{x_i}$$

é a taxa de comilança e

$$\beta P_y \sum_i \alpha_i P_{x_i} x_i = f(y_2)$$

a taxa de transformação de massa (valor "defuzzificado").

As equações que modelam a dinâmica acima descrita podem ser formuladas por um sistema compartimental de equações de diferenças, em que apenas um dos parâmetros contempla a subjetividade dos conjuntos, estando já "desfuzzificado":

$x_1(i+1)=ax_2(i)-\alpha_1 x_1(i)-k_1 x_1(i)$ $\quad$ $y_1(i+1)=\beta P_Y \sum_i \alpha_i P_{x_i} x_i - \lambda_1 y_1(i) - \nu y_1(i)$

$x_2(i+1) = k_1 x_1(i) - \alpha_2 x_2(i) - k_2 x_2(i)$ $\quad$ $y_2(i+1)=\lambda_1 y_1(i)-\lambda_2 y_2(i)-\nu y_2(i)$

$x_3(i+1)=k_2 x_2(i)-\alpha_3 x_3(i)-\mu x_3(i)$ $\quad$ $y_3(i+1) = \lambda_2 y_2(i) - \nu y_3(i)$

Os gráficos das Figuras 5, 6 e 7 ilustram as soluções deste modelo.

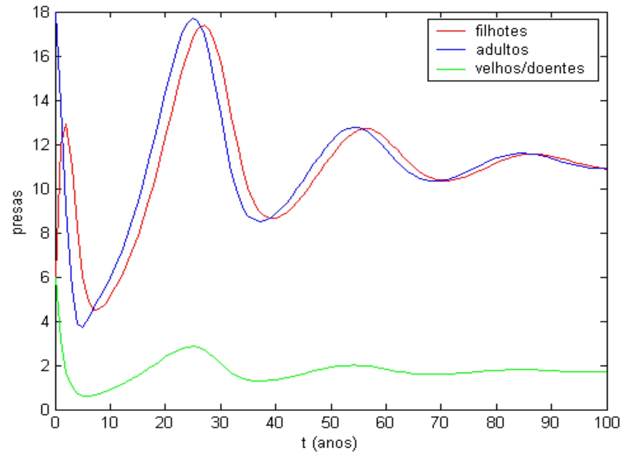


Figura 5. População de presas

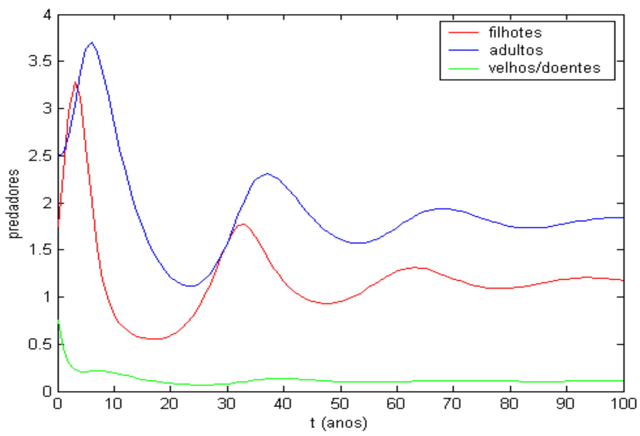


Figura 6. População de predadores

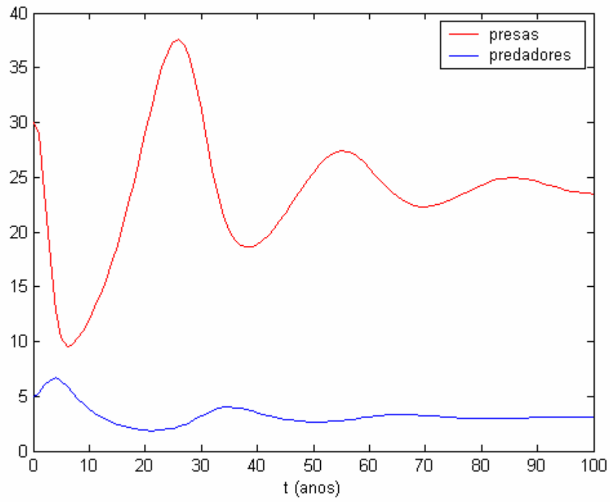


Figura 7. Interação presa-predador

4.1.2 – O modelo malthusiano e o crescimento populacional

Na coleção "Matemática Aplicada para o segundo grau", os autores, Imenes, Trotta e Jakubovic, (1979, p. 89), para contextualizar a utilização da função exponencial, utilizam o seguinte texto:

> Já por volta de 1800, Thomas Malthus, tendo em vista dados relativos à população norte-americana de 1643 a 1760, afirmava que as populações crescem em P.G. (progressão geométrica), enquanto que a produção de alimentos crescia em P.A. (progressão aritmética). Para Malthus, portanto, a função que descreve o crescimento de uma população é do tipo exponencial, sendo dada por:
>
> $$P = P_0 . a^t$$
>
> Com base nessas afirmações, Malthus e seus seguidores julgavam que os homens e o mundo estivessem sujeitos a leis rígidas, segundo as quais a miséria e a pobreza eram inevitáveis. [...]. Em 1838, P. F. Verhulst enunciava que o crescimento das populações se dá através de uma função do "tipo" exponencial (como dissera Malthus), enquanto houver condições favoráveis de espaço e alimentação (como as existentes nos Estados Unidos no período estudado por Malthus). Passada essa fase, no entanto, o crescimento populacional diminui e o número de habitantes tende a se estabilizar.
>
> O trabalho de Verhulst foi completamente ignorado durante 80 anos até que R. Pearl e L. J. Reed, desconhecendo tal trabalho, redescobriram sua lei.
>
> $$P = \frac{L}{1 + a . b^{-t}}$$
>
> onde *a*, *b* e *L* são constantes que dependem da população particular à qual se aplicará a fórmula.

A função exponencial é usualmente estudada no ensino médio e retomada na graduação sob um enfoque mais abrangente, contextualizado e rigoroso, convergindo para o estudo da curva logística. Neste trabalho, o objetivo é o de tentar despertar a curiosidade do professor e dos estudantes para a abordagem desta situação problema sob o enfoque da teoria dos conjuntos *fuzzy*.

Em uma pesquisa feita, tomamos o censo demográfico da população brasileira de 1940 a 2000. A partir desses dados, criamos um modelo *fuzzy* para estudo comparativo com os dados coletados.

Através da tabela e do gráfico (Figuras 8 e 9), comparamos a solução obtida através do modelo *fuzzy* com valores do censo da população brasileira. O resultado evidencia que, ao utilizarmos parâmetros subjetivos na modelagem desse fenômeno, obtemos resultados similares aos dados reais.

Períod -	Censo demog.	Modelo fuzzy
1940	41.236	41.236
1950	51.944	48.2607
1960	70.992	67.5385
1970	93.139	93.0035
1980	119.003	118.5385
1991	146.825	146.5885
1996	156.804	156.7885
2000	169	169.5385

Figura 8. Tabela comparativa: valores do censo da população brasileira

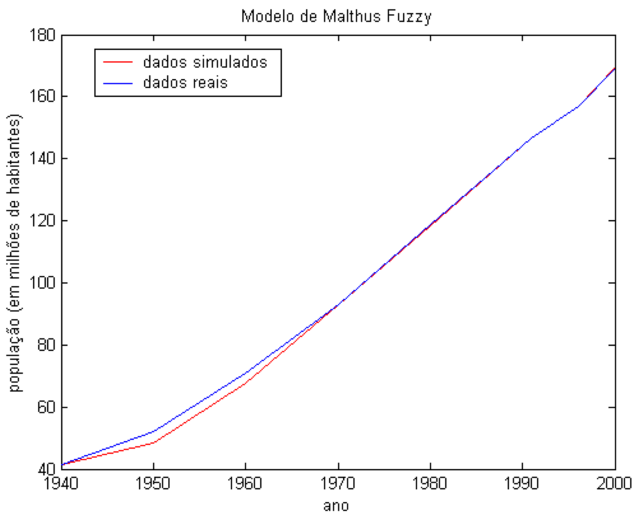


Figura 9. Gráfico comparativo: valores do censo da população brasileira / solução modelo *fuzzy*

Base de regras para modelar a variação da população com base na sua densidade, com oposição semântica[10].

R1: Se (x) é *baixa* (A1) então a variação é "*baixa positiva*" (B1)

R2: Se (x) é *média baixa* (A2) então a variação é *média positiva* (B2)

R3: Se (x) é *média* (A3) então a variação é *alta positiva* (B3)

R4: Se (x) é *média alta* (A4) então a variação é *média positiva* (B4)

R5: Se (x) é *alta* (A5) então a variação é *baixa positiva* (B5=B1)

R6: Se (x) é *altíssima* (A6) então a variação é *baixa negativa* (B6)

4.1.3 – O modelo SI de epidemiologia

O modelo SI de epidemiologia, utilizado para descrever a dinâmica de doenças transmitidas diretamente através da interação entre indivíduos suscetíveis e infectados, também pode ser modelado através de equações de diferenças, $x_{t+1} - x_t = f(x_t, \Delta x)$, em que a função $f(x) = \Delta x$ é definida por meio de variáveis linguísticas, operando (método de Mamdani) em uma base de regras em que se consideram os conjuntos fuzzy infeccioso e variação da doença.

O diagrama (Figura 10) representa este modelo, em que *S* é a proporção de indivíduos suscetíveis e *I* é a proporção de indivíduos infectados.

[10] Oposição semântica é caracterizada pela alternância de sinais nas variações (conseqüentes).Fatores como – alimentação, disputa por espaço, entre outros - desencadeiam um processo de "inibição" da população de modo que, para populações muito grandes, a variação é pequena ou mesmo negativa. Neste caso, a base de regras deve apresentar regras com oposição semântica nos conseqüentes . Barros e Bassanezi (2006, p249).

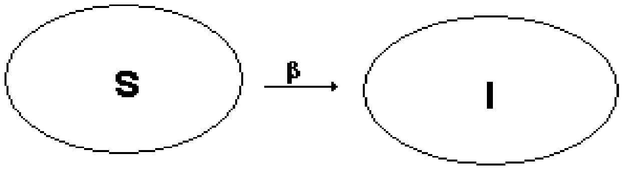


Figura 10. Diagrama representativo do modelo SI de epidemiologia

Um exemplo de aplicação deste modelo é apresentado por Soares (2009), ao fazer um estudo sobre a recente pandemia (2009-2010) influenza H1N1, popularmente conhecida como gripe suína.

A tabela (Figura 11) apresenta os números de infectados cumulativos da gripe suína no Brasil e as datas de divulgação pela Organização Mundial de Saúde (OMS).

Data	Número de brasileiros infectados
08/05	4
22/05	9
02/06	23
15/06	74
19/06	131
20/06	240
23/06	334
24/06	399
25/06	452
28/06	627
01/07	680
08/07	1027
15/07	1175

Figura 11. Fonte: Dados divulgados pela OMS e pela Secretarias de Saúde dos Estados brasileiros reportados nos *sites* dos portais Terra, Uol e Folha.

Como bem afirma Soares (2009, p. 78), no início de uma epidemia, o crescimento dos infectados costuma ser exponencial, uma vez que a quantidade de suscetíveis é muito grande. Dispondo os dados da tabela (Figura 11) no programa computacional Excel, obtivemos o gráfico exposto na Figura 12, que evidencia a afirmação acima.

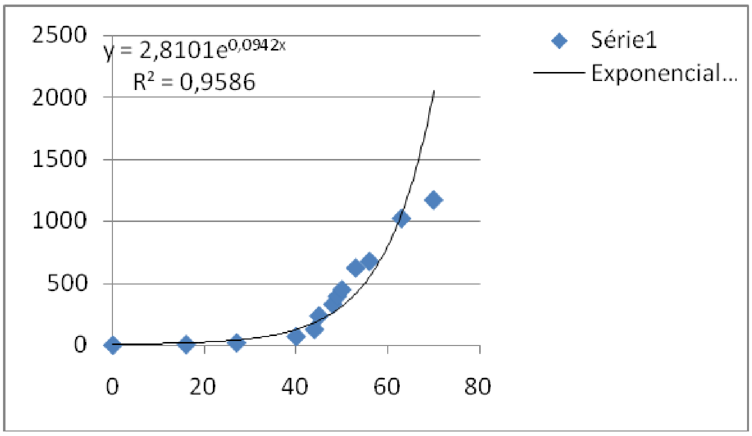


Figura12. Gráfico representativo do crescimento exponencial de infectados

Entretanto, se as condições de propagação do vírus forem adversas, tal comportamento tende a estabilizar-se. Através de um sistema p-*fuzzy* discreto, podemos estimar a solução do modelo epidemiológico clássico, sem precisar utilizar ferramentas matemáticas sofisticadas nem realizar cálculos exaustivos. A seguir, Soares emprega o sistema p-*fuzzy* discreto para construir a solução do modelo epidemiológico clássico.

Neste caso, a Figura 13 representa a função de pertinência da variável de entrada - população de infectados *I*; e a Figura 14 representa a variável de saída - população de infectados ΔI.

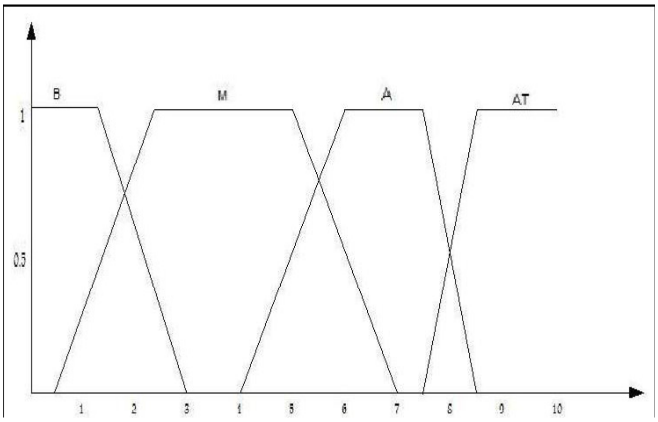


Figura 13. Função de pertinência da população de infectados

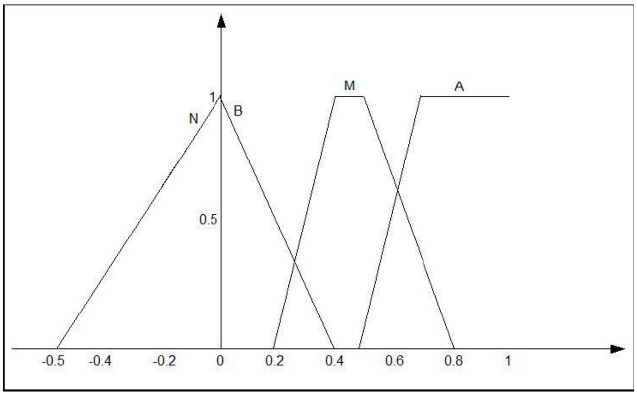


Figura 14. Função de pertinência da variação da população de infectados.

Soares (2009, p.81) complementa: a base de regras utilizada (Figura 15)

> [...] deve estar coerente com o modelo SI, onde a principal suposição é que, em cada instante t, a taxa de crescimento de infectados é diretamente proporcional à população de infectados, porém, para valores 'grandes' sem precisar utilizar ferramentas matemáticas de *I*, a taxa de crescimento sofre uma penalização.

R_1: Se infeccioso é baixo, então a variação é baixa.
R_2: Se infeccioso é média, então a variação é alta.
R_3: Se infeccioso é alto, então a variação é baixa.
R_4: Se infeccioso é altíssimo, então a variação é negativa.

Figura 15. Base de regras do sistema SI

Destacamos a fala da autora, com o objetivo de chamar a atenção para o fato de que, embora estejamos trabalhando com ideias revolucionárias em termos de conteúdo de matemática para ensino regular, ideias como crescimento, decrescimento e proporcionalidade também estão presentes neste contexto e poderão ser trabalhadas pelo professor, que terá como suporte uma aplicação atual e interessante desses conteúdos. O professor poderá trabalhar, ainda, análise de dados em tabelas e gráficos.

Finalizando, adotando o método de Mandani como método de inferência, o centro de área como "defuzzificador", combinado com o sistema p-*fuzzy* discreto, chegamos à solução estimada para o modelo SI, através de um controlador *fuzzy* (Figura 16).

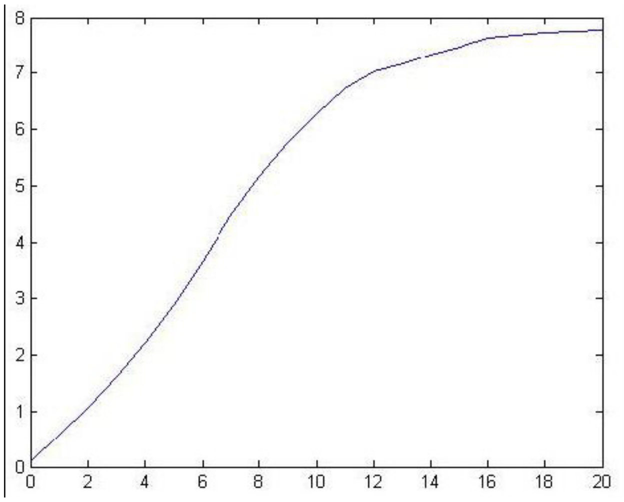


Figura 16. Solução de I do modelo SI, através de um controlador *fuzzy*

Podemos observar que o mesmo fenômeno, modelado com equações diferenciais (modelo determinístico), daria:

$$dI/dt = kI(N-I),$$

onde N é a população total; (N-I), a quantidade de suscetíveis; e I, de infecciosos.

Tal equação tem como solução a curva logística, que é bastante semelhante à solução obtida com conjuntos *fuzzy*.

4.1.4 – O modelo de controle de pragas

A seguir, desenvolveremos um exemplo completo do processo de modelagem através de um modelo *fuzzy* de controle de pragas, fazendo utilização de um controle químico.

Todavia, este modelo pode ser considerado, grosso modo, como uma extensão do modelo presa-predador (controle biológico), uma vez que

> o controle biológico de pragas utilizando insetos benéficos [...] tem sido evidenciado nos dias atuais devido ao incremento da necessidade da utilização racional de insumos agrícolas, como os agrotóxicos, e da condução das culturas agrícolas dentro de um contexto econômico, ecológico e social, premissas do manejo integrado de pragas. (GUERREIRO, 2004)

Com efeito, adotamos para variáveis de entrada a *Densidade de árvores infestadas:* P e a *Variação da densidade de infestação*: ΔP. As variáveis P e ΔP são dadas em porcentagens e podem assumir valores entre 0% e 100%.

A partir de informações obtidas com especialistas, definimos as variáveis em termos linguísticos e as modelamos por subconjuntos *fuzzy* triangulares como suas funções de pertinências. O conjunto de termos associados a cada variável *fuzzy* do processo é dado por:

Dens. árvores infestadas: P	Var. da dens. de infestação: ΔP	Controle da infestação: (C)
Densidade baixíssima (P_{bi}) Densidade muito baixa (P_b) Densidade baixa (P_m) Densidade média (P_{ma}) Densidade média alta (P_a) Densidade alta (P_{at})	Variação de densidade quase nula (V_O) Variação de densidade muito baixa (V_{bi}) Variação de densidade baixa (V_b) Variação de densidade média (V_m) Variação de densidade alta (V_a) Variação de densidade muito alta (V_{at})	Controle nulo (C_o) Controle muito baixo (C_{bi}) Controle baixo (C_b) Controle médio (C_m) Controle médio alto (C_{ma}) Controle alto (C_a) Controle muito alto (C_{at})
Variáveis de entrada do modelo		Variáveis de saída do modelo

Figura 17. Conjunto de variáveis linguísticas utilizadas para quantificação das variáveis em estudo

Funções de pertinência para controle de pulgões:

Densidade de pulgões

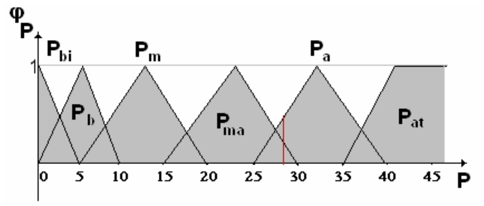


Figura 18. Função de pertinência: densidade de pulgões

$$\varphi_{P_{ma}^{(P)}} = \begin{cases} \dfrac{p-15}{7,5} & se \ \ p \in [15; \ 22,5] \\ \dfrac{30-p}{7,5} & se \ \ p \in [22,5; \ 30] \\ 0 & se \ \ p \notin [15; \ 30] \end{cases}$$

Figura 19. Expressão algébrica da função de pertinência de números fuzzy triangulares

Por exemplo, se 27% das árvores estão infestadas, tem-se que 0,27 é o grau de pertinência ao conjunto Pm e 0,4 é o grau de pertinência ao conjunto Pa (veja figura 20). Então, escrevemos: $\varphi_P(27) = 0,27 / \varphi_{P_{ma}} \oplus 0,4 / \varphi_{P_a}$

Variação da densidade de pulgões

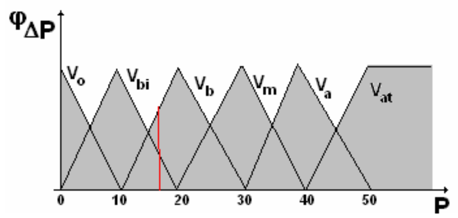


Figura 20. Função de pertinência: variação da densidade de pulgões

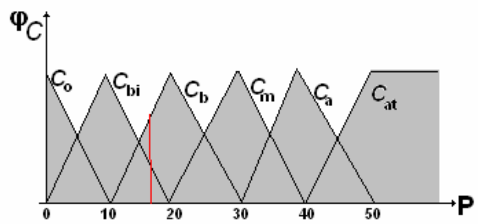


Figura 21. Função de pertinência: variação da densidade de pulgões

Se, no período estudado, a variação está entre 20% e 30% ($20 < \Delta p < 30$), então seu grau de pertinência será: $\varphi_{\Delta P}(\Delta p) = \frac{30 - \Delta p}{10} / V_b \oplus \frac{\Delta p - 20}{10} / V_m$

A base de regras *fuzzy* do sistema possui o seguinte formato: "Se P é densidade média alta (P_{ma}) e ΔP é variação densidade média (V_m), então o controle é médio alto (Cma)".

A tabela que sintetiza todas as possíveis regras é dada por:

$\Delta P/P$	P_{bi}	P_m	P_{ma}	P_a	P_{at}
V_o	C_o	C_{bi}	Cb	C_m	C_{ma}
V_{bi}	C_o	C_b	C_m	C_{ma}	C_a
V_b	C_o	C_b	C_m	C_{ma}	C_a
V_m	C_{bi}	C_m	**C_{ma}**	C_a	C_{at}
V_a	C_{bi}	Cm	C_{ma}	C_a	C_{at}
V_{at}	C_b	C_{ma}	C_a	C_{at}	C_{at}

Figura 22. Tabela: Base de regras

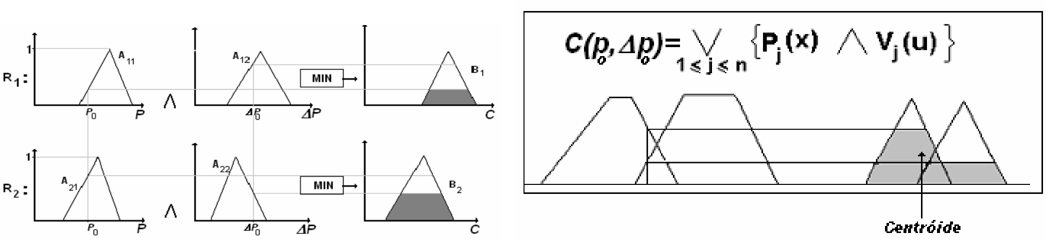


Figura 23. Esquema representativo do método de Mandani, de duas entradas e uma saída

As operações contidas nas Figuras 20, 21 e 22 têm o objetivo de ilustrar o processo de inferência *fuzzy* de Mandani (Figura 23). Por exemplo, se P=27, os únicos conjuntos *fuzzy* atingidos são P_{ma} e P_a. Para achar o grau de pertinência de 27% ao conjunto P_{ma}, utilizamos a função de pertinência dada pela expressão 1. Assim, para P=27, teremos $\varphi_{ma}(27) = \frac{30 - 27}{7{,}5} = 0{,}4$. Procedimento análogo é efetuado para obtenção dos demais graus de pertinência. O símbolo $\oplus$ não indica qualquer tipo de adição; apenas conecta os conjuntos atingidos. Em seguida, aplicamos o operador *max-min* para obtenção da resposta desejada. Observe o exemplo numérico a seguir:

Po=18 (18% das árvores estão infestadas em t_0)

φ p (18)=[0,27/ Pm + 0,4/ Pma]

Seja Δpo=38 (janeiro); então,

φ Δp(38)= [0,2/Vm + 0,8/Va].

Logo:

$$\varphi_{P_m} \cap_{V_m} = \min\{\varphi_{P_m}, \varphi_{V_m}\} = \min\{0{,}27;02\} = 0{,}2 / C_m$$
$$\varphi_{P_m} \cap_{Va} = \min\{\varphi_{P_m}, \varphi_{V_a}\} = \min\{0{,}27;0{,}8\} = 0{,}27 / C_m$$
$$\varphi_{P_{ma}} \cap_{V_m} = \min\{\varphi_{P_{ma}}, \varphi_{V_m}\} = \min\{0{,}4;0{,}2\} = 0{,}2 / C_{ma}$$
$$\varphi_{P_{ma}} \cap_{V_a} = \min\{\varphi_{P_{ma}}, \varphi_{V_a}\} = \min\{0{,}4;0{,}8\} = 0{,}4 / C_{ma}$$

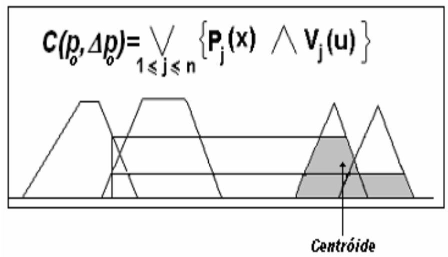


Figura 24. Solução do sistema

que dá origem a

$$\varphi_c(c) = \sup[\min\{\varphi_{P_m}, \varphi_{V_m}\}; \min\{\varphi_{P_m}, \varphi_{V_a}\}] / C_m \quad \oplus$$
$$\sup[\min\{\varphi_{P_{ma}}, \varphi_{V_m}\}; \min\{\varphi_{P_{ma}}, \varphi_{V_a}\}] / C_{ma}$$

Dessa forma, o controle a ser aplicado é dado por:

$c = [(0{,}2 + 0{,}27)\ \max\ C_m + (0{,}2 + 0{,}4)\ \max\ C_{ma}] / [(0{,}2 + 0{,}27) + 0{,}2 + 0{,}4)] = 35{,}6$, o que significa que, nas condições de infestação dadas, deve-se aplicar um controle que elimine 35,6% das pragas.

4.1.5 – Modelo fuzzy para diagnóstico médico.

Procurando dar uma maior abrangência à utilização das ideias contidas nesta teoria, dentro de um contexto de ensino regular, através de um exemplo de diagnóstico médico, podemos trabalhar a noção de produto cartesiano através de um produto cartesiano *fuzzy* e das principais operações (*max-min*) sobre matrizes, para compor os relacionamentos lógicos entre os termos das variáveis linguísticas.

Sintomas → Base de regras: R → Diagnóstico

Figura 25. Diagrama representativo do modelo para realização de diagnósticos médicos

A aplicação que veremos trata de estabelecer diagnóstico para transtornos de comportamento. Tal ideia surgiu da análise de problemas envolvendo diagnóstico médico em Jafelice, Barros e Bassanezi (2008).

Nossas alunas Angélica Gonçalves Ferreira e Juliana Borges Ribeiro, do curso de Lincenciatura em Matemática da Unifeb, desenvolveram como trabalho de conclusão de curso o estudo que apresentamos, parcialmente, a seguir.

Ao efetuarem o estágio supervisionado, detectaram, em diversos alunos, inúmeros problemas de comportamento que não pareciam ser de ordem exclusivamente disciplinar.

Inicialmente, as alunas fizeram uma pesquisa sobre transtornos de comportamento que pudessem ter influência na aprendizagem dos alunos. Dentre as diversas opções, selecionaram:

T1 = Depressão infantil

T2 = Transtorno de déficit de atenção e hiperatividade

T3 = Transtorno afetivo bipolar

T4 = Transtorno obsessivo compulsivo

A ideia básica é relacionar os sintomas ou sinais de alunos ou pacientes com as possíveis doenças, por meio de relações *fuzzy*. Utilizando os conhecimentos e as informações cedidas pela especialista[11], montamos a base de conhecimento também denominada *base de regras*, que representa os sintomas, s1, s2, s3, s4, s5, s6, s7, s8, s9, s10, s11, s12, s13, s14, s15, s16, s17, s18, s19, s20, s21, s22, s23, s24, s25, s26, s27, s28, s29, s30, s31, relacionados com os transtornos mencionados, T1, T2, T3, T4, para efetuar o diagnóstico de oito pacientes P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8.

Abaixo relacionamos os 30 sintomas selecionados pela especialista:

- s1 = tristeza
- s2 = irritabilidade
- s3 = perda de interesse ou prazer
- s4 = retraimento social
- s5 = alterações no apetite
- s6 = alterações no sono
- s7 = alterações psicomotoras (agitação ou retardo psicomotor)
- s8 = cansaço, fadiga
- s9 = sentimento de desvalia (baixa autoestima) ou culpa
- s10 = prejuízo na capacidade de pensar, concentrar-se ou tomar decisões
- s11 = pensamentos sobre morte, ideações suicidas
- s12 = desatenção
- s13 = inquietação, agitação
- s14 = impulsividade
- s15 = desorganização
- s16 = antipatia por atividades que exigem esforço mental
- s17 = queixas somáticas (cefaleias, dores abdominais)
- s18 = humor exaltado e euforia
- s19 = agressividade (auto e hetero)
- s20 = labilidade emocional
- s21 = paranoia, delírios de grandeza
- s22 = alucinações visuais e auditivas
- s23 = verificações
- s24 = obsessões: pensamentos, ideias ou imagens repetidos e indesejáveis
- s25 = compulsões: comportamentos repetitivos, estereotipados
- s26 = preocupação excessiva com o bem-estar de familiares
- s27 = ansiedade
- s28 = preocupação com limpeza, com contaminação
- s29 = organização
- s30 = medo

---

[11] Sabrina Almeida Rocha possui graduação em Psicologia pela Universidade Estadual Paulista – Unesp (2002); Especialização *latu sensu* em Psicologia Hospitalar pelo Hospital das Clínicas da Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo (2004) e cursou por um ano o programa de Residência Multiprofissional em Programa de Saúde da Família, parceria do Ministério da Saúde com a Faculdade e Hospital Santa Marcelina (2006).

- s31 = choro excessivo

A matriz/tabela (Figura 26) representa a relação *fuzzy* R, cujos valores indicam o grau em que cada sintoma está relacionado com a doença ou com o transtorno de comportamento.

S \ T	T1	T2	T3	T4
s1	0,9	0,3	0,8	0,7
s2	0,4	0,5	0,6	0,6
s3	0,8	0,2	0,4	0,5
s4	0,8	0,4	0,4	0,8
s5	0,7	0,1	0,5	0,3
s6	0,7	0,4	0,5	0,4
s7	0,7	0,7	0,6	0,4
s8	0,6	0,5	0,3	0,5
s9	0,8	0,4	0,5	0,7
s10	0,8	0,9	0,4	0,6
s11	0,5	0,1	0,7	0,6
s12	0,5	0,9	0,7	0,4
s13	0,2	0,9	0,4	0,6
s14	0,1	0,9	0,6	0,7
s15	0,4	0,7	0,2	0,2
s16	0,4	0,7	0,2	0,2
s17	0,7	0,2	0,6	0,7
s18	0,1	0,3	0,8	0,2
s19	0,3	0,4	0,9	0,6
s20	0,5	0,2	0,9	0,5
s21	0,1	0,1	0,8	0,3
s22	0,1	0,1	0,5	0,4
s23	0,1	0,1	0,1	0,8
s24	0,1	0,1	0,2	0,9
s25	0,1	0,1	0,1	0,9
s26	0,2	0,1	0,3	0,8
s27	0,3	0,6	0,8	0,8
s28	0,1	0,1	0,2	0,9
s29	0,2	0,1	0,4	0,7
s30	0,6	0,2	0,7	0,8
s31	0,6	0,2	0,5	0,4

Figura 26. Relação *fuzzy* sintomas X transtorno de comportamento (R)

A matriz/tabela (Figura 27) indica o grau em que cada sintoma se manifestou nos alunos ou nos pacientes. Os dados foram assim apresentados pela especialista.

s \ d	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
s1	0,7	0,8	0,7	0,6	0,9	0,9	0,2	0,4
s2	0,6	0,7	0,9	0,8	0,6	0,8	0,3	0,2
s3	0,3	0,6	0,5	0,5	0,8	0,7	0,2	0,6
s4	0,7	0,9	0,5	0,4	0,8	0,9	0,1	0,3
s5	0,6	0,6	0,4	0,3	0,7	0,5	0,1	0,6
s6	0,5	0,5	0,4	0,2	0,6	0,7	0,2	0,1
s7	0,3	0,5	0,7	0,8	0,4	0,6	0,5	0,8
s8	0,2	0,4	0,2	0,1	0,5	0,6	0,2	0,1
s9	0,8	0,8	0,7	0,6	0,8	0,9	0,2	0,4
s10	0,2	0,7	0,3	0,4	0,7	0,6	0,8	0,7
s11	0,4	0,9	0,5	0,3	0,5	0,6	0,1	0,1
s12	0,1	0,6	0,3	0,6	0,3	0,5	0,7	0,8
s13	0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,2	0,9	0,8
s14	0,3	0,5	0,5	0,6	0,1	0,3	0,8	0,8
s15	0,2	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1	0,7	0,9
s16	0,1	0,2	0,3	0,5	0,3	0,1	0,9	0,9
s17	0,5	0,8	0,8	0,8	0,6	0,5	0,2	0,4
s18	0,2	0,3	0,8	0,9	0,1	0,1	0,3	0,2
s19	0,6	0,8	0,9	0,9	0,3	0,5	0,3	0,4
s20	0,4	0,6	0,9	0,9	0,2	0,3	0,2	0,4
s21	0,2	0,1	0,6	0,8	0,1	0,1	0,1	0,1
s22	0,2	0,4	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1	0,1
s23	0,6	0,7	0,3	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
s24	0,9	0,9	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1
s25	0,9	0,9	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,1
s26	0,6	0,9	0,4	0,5	0,4	0,3	0,3	0,4
s27	0,8	0,8	0,8	0,9	0,4	0,6	0,6	0,5
s28	0,9	0,7	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2
s29	0,7	0,8	0,2	0,4	0,3	0,5	0,1	0,1
s30	0,6	0,8	0,3	0,5	0,8	0,7	0,4	0,5
s31	0,4	0,7	0,6	0,4	0,9	0,8	0,2	0,1

Figura 27. Relação *fuzzy* pacientes X sintomas elaborados por especialista (S)

Cada elemento da relação *fuzzy* **R = S^{-1}o T** indica o grau de envolvimento de cada sintoma com as diversas doenças consideradas. Como o modelo matemático que adotamos para diagnosticar foi o SoR, para obter o diagnóstico do paciente P_1, supondo que [P_1] seja a matriz com os sintomas do paciente P_1, basta calcularmos $[P_1]_o$R. Ou seja,

T1	Sintomas (tabela S x T)												
	0,9	0,4	0,8	0,8	0,7	0,7	0,7	0,6	0,8	...	0,2	0,8	0,8

	P1
(0,9; 0,7), min = 0,7	0,7
(0,4; 0,6), min = 0,4	0,6
(0,8; 0,3), min = 0,3	0,3
(0,8; 0,7), min = 0,7	0,7
(0,7; 0,6), min = 0,6	0,6
(0,7; 0,5), min = 0,5	0,5
(0,7; 0,3), min = 0,3	0,3
(0,6; 0,2), min = 0,2	0,2
(0,8; 0,8), min = 0,8	0,8
...	⋮
(0,2; 0,7), min = 0,2	0,7
(0,6; 0,6), min = 0,6	0,6
(0,6; 0,4), min = 0,4	0,4

Máximo dos mínimos = 0,8. Logo, este aluno possui um Transtorno Obsessivo Compulsivo (TOC) (ver equações relacionais detalhadamente no capítulo 3).

A matriz/tabela (Figura 28) apresenta a relação *fuzzy* dos alunos e dos pacientes com o transtorno de comportamento ou com a doença. .

P \ d	T1	T2	T3	T4
P1	0,8	0,6	0,7	0,9
P2	0,8	0,7	0,8	0,9
P3	0,7	0,7	0,9	0,8
P4	0,7	0,7	0,9	0,8
P5	0,9	0,7	0,8	0,8
P6	0,9	0,6	0,8	0,8
P7	0,8	0,9	0,7	0,7
P8	0,7	0,8	0,7	0,7

Figura 28. Relação *fuzzy* aluno ou paciente X transtorno de comportamento (T)

4.1.6 – Sistemas fuzzy na escolha de projetos populares

Apresentamos a seguir outra situação interessante, que expõe vários conceitos trabalhados nos currículos tradicionais e pode ser implementada, com facilidade, em contextos de ensino-aprendizagem com diferentes temas.

Esta proposta foi desenvolvida por Lima, em Guarapuava, Paraná, no projeto social denominado "Casa Fácil", em que são fornecidos projetos de casas populares para pessoas de baixa renda, sem custo para o proprietário. Dessa forma, surgiu a ideia de criar um banco de dados de projetos prontos que possam atender mais satisfatoriamente ao gosto e/ou à necessidade de cada família.

Para implementar o projeto, foi elaborado um banco de dados de dez projetos populares diversificados, que foram submetidos à opinião de especialistas (engenheiros/arquitetos/projetistas). Para tanto, foram determinadas nove características mais comuns no ramo de projetos, apresentadas a seguir, e dez projetos para orientar a entrevista com os profissionais especialistas.

A casa deve ser:

bonita;
simples;
moderna;
econômica;

arrojada;
flexível (em relação ao tamanho e formato do terreno);
versátil (em relação à facilidade de ampliação);
completa (em relação à diversidade de peças);
própria para uma família (em relação ao número de moradores);

Depois de obter as tabelas de cada especialista com os respectivos graus de pertinência em relação às características, a autora do trabalho utilizou a média aritmética como operador de agregação para construir uma matriz de pertinência que representasse a opinião de todos os especialistas consultados.

Considerando os seguintes conjuntos:

M= conjunto dos proponentes (proprietários);
N= conjunto das características;
P= conjunto dos projetos,

A matriz de conhecimentos (Figura 29) é a matriz da relação S: projetos e características.

	bonita	Simp.	mod.	econ.	arroj.	Flex.	Vers.	Comp.	fam.
casa1	0,90	0,39	0,81	0,39	0,69	0,48	0,40	0,84	0,46
casa2	0,73	0,60	0,73	0,66	0,68	0,66	0,61	0,83	0,56
casa3	0,19	0,80	0,31	0,91	0,23	0,73	0,72	0,39	0,44
casa4	0,79	0,58	0,83	0,64	0,63	0,63	0,70	0,69	0,49
casa5	0,46	0,63	0,72	0,71	0,79	0,85	0,76	0,58	0,74
casa6	0,16	0,81	0,26	0,94	0,13	0,74	0,77	0,38	0,38
casa7	0,79	0,55	0,74	0,62	0,54	0,65	0,62	0,53	0,46
casa8	0,84	0,34	0,48	0,32	0,66	0,44	0,37	0,80	0,53
casa9	0,60	0,62	0,68	0,60	0,67	0,72	0,75	0,54	0,49
casa10	0,63	0,63	0,73	0,52	0,68	0,79	0,74	0,82	0,71

Figura 29. Tabela: base de conhecimento

car/proj	casa1	casa2	casa3	casa4	casa5	casa6	casa7	casa8	casa9	casa10
bonita	0,90	0,73	0,19	0,79	0,46	0,16	0,79	0,84	0,60	0,63
simples	0,39	0,6	0,8	0,58	0,63	0,81	0,55	0,34	0,62	0,63
moderna	0,81	0,73	0,31	0,83	0,72	0,26	0,74	0,48	0,68	0,73
econôm.	0,39	0,66	0,91	0,64	0,71	0,94	0,62	0,32	0,6	0,52
arrojada	0,39	0,66	0,91	0,64	0,71	0,94	0,62	0,32	0,6	0,52
flexível	0,48	0,66	0,73	0,63	0,85	0,74	0,65	0,44	0,72	0,79
versátil	0,4	0,61	0,72	0,7	0,76	0,77	0,62	0,37	0,75	0,74
completa	0,84	0,83	0,39	0,69	0,58	0,38	0,53	0,8	0,54	0,82
fam.gr.	0,46	0,56	0,44	0,49	0,74	0,38	0,46	0,53	0,49	0,71

Figura 30. Tabela: processo de inferência

Supondo que o proprietário escolha as características:

simples (com grau de pertinência 0,8);
econômica (com grau de pertinência 1);
versátil (com grau de pertinência 0,7).

Aplicando a relação *max-min*, obtemos a tabela (Figura 31) que permitirá que o profissional possa auxiliar na escolha da residência que melhor se adapte às necessidades e às expectativas do proprietário, a partir de características fornecidas por este.

1 \ 2	casa1	casa2	casa3	casa4	casa5	casa6	casa7	casa8	casa9	casa10
simples econ. vers.	0,40	0,66	0,91	0,70	0,71	0,94	0,62	0,34	0,70	0,70

1 = característica escolhida pelo proprietário
2 = projetos

Figura 31. Tabela: preferência de escolha

Gostaríamos de finalizar este capítulo, evidenciando um pensamento de Morin (2008, p. 105) para educação escolar. O autor propõe que professores e alunos adotem, no cotidiano escolar, princípios que:

> [...] levem o pensamento para além de um conhecimento fragmentado que, por tornar invisíveis as interações entre um todo e suas partes, anula o complexo e oculta os problemas essenciais; levem, igualmente, para além de um conhecimento que, por ver apenas globalidades, perde o contato com o particular, o singular e o concreto.
>
> [...] permitam remediar a funesta desunião entre pensamento científico [...] e o pensamento humanista [...].
>
> [...] ensinem o aluno a enfrentar a incerteza e a se tonar cidadão.

CAPÍTULO 5

A pesquisa:
O plano em ação

CAPÍTULO 5. A PESQUISA: O PLANO EM AÇÃO

Antes de iniciar a busca de evidências e compreensões sobre o processo pelo qual os alunos passaram, ao serem provocados a lidar com o raciocínio *fuzzy*, mais especificamente com a subjetividade na matemática, faz-se necessário reconstruir o cenário no qual a atividade de pesquisa se desenvolveu.

5.1 – Para interpretar o que se passou...

De modo a realizar a pesquisa, trabalhamos com alunos do Curso de Licenciatura da Fundação Educacional de Barretos, em uma disciplina do núcleo comum às Licenciaturas de Matemática, Física e Química. Elegemos como cenário da pesquisa uma disciplina cuja ementa prevê o estudo de Teoria dos Conjuntos e dos Fundamentos da Lógica Clássica, esperando introduzir, em um primeiro momento do curso sobre os temas da referida disciplina, os fundamentos da Lógica *Fuzzy*. De algum modo, a nossa orientação como professor está apoiada em discussões da Psicologia Cognitiva, em especial, em Ausubel (1980), quando destaca que o indivíduo não pode construir conhecimento novo sem algum conhecimento anterior cognitivamente relacionado, a fim de conectar e suportar a nova informação. O grupo pesquisado constituiu-se de alunos dos cursos mencionados, matriculados no primeiro semestre da disciplina "Fundamentos e Práticas Pedagógicas de Matemática I", na qual ministramos aulas de fevereiro a junho de 2009.

De um modo geral, a pesquisa constituiu-se das seguintes etapas, aqui por nós denominadas questionário, material pré-instrucional e aplicação em sala de aula, cada uma delas realizadas como segue:

o questionário – foi feita a aplicação de um questionário composto por oito situações-problema elaboradas, tendo em vista as ideias/conceitos que envolvem o pensamento *fuzzy*;

o material pré-instrucional – procedemos à apresentação e à solução de problemas, em termos de aula, visando que o aluno confrontasse a resolução de um (mesmo) problema, utilizando matemática determinística, matemática clássica e não determinística, estocástica ou *fuzzy*;

a aplicação em sala de aula - quatro novas situações problema foram formuladas a partir das ideias trabalhadas nas atividades desenvolvidas nas etapas anteriores — conjunto *fuzzy*, variáveis linguísticas e base de regras —, segundo os processos e o raciocínio apresentados. A aplicação dessas questões teve como objetivo encaminhar e organizar o processo de análise, no sentido de compreender em que medida a aplicação da teoria *fuzzy* introduzida nos dois momentos anteriores levou os resolvedores à compreensão e à solução das situações propostas pela via da matemática *fuzzy*. Além disso, durante as aulas, foram consideradas, também, como pertinentes, mudanças de comportamento empiricamente observáveis, embora não passíveis de mensuração quantitativa.

Vale aqui, mais uma vez, destacar que todos os momentos da pesquisa foram construídos com grande preocupação da pesquisadora em compreender as concepções prévias dos alunos voltadas para a percepção da subjetividade na construção do conhecimento matemático. A partir de algumas evidências que emergiram do contexto dos encontros com os alunos nas três etapas da pesquisa, em uma articulação com as nossas expectativas nesta investigação, nossa atenção para o encaminhamento de uma análise esteve orientada pela organização de ordem psicopedagógica e matemática, ou seja, em torno de três eixos temáticos que podem servir de apoio para uma interpretação das produções e das relações que os alunos estabelecem — consigo mesmo e com os outros — diante da teorização matemática em estudo. Eis os eixos temáticos em cada um dos campos de conhecimento:

Da psicologia - a mobilização e a (re)significação do conhecimento matemático supostamente adquirido pelos alunos, a partir tanto da instrução escolar como de práticas cotidianas extra-escolares.

Da pedagogia - as mudanças de atitudes e de postura dos alunos diante das novas caracterizações de raciocínio matemático, tendo a subjetividade um papel crucial.

Da matemática - a produção matemática dos alunos, destacando principalmente modos de pensar e comunicar matematicamente os próprios raciocínios, procedimentos, conjecturas, assim como elaborar justificativa e argumentação para validar tais processos.

No que se refere ao terceiro ponto, estaremos ainda atentos para analisar as produções e as interpretações dos alunos, focalizando elementos de ordem essencialmente próprios da teoria *fuzzy*, tendo em vista as relações entre:

• o conceito-chave **conjunto *fuzzy*** e os outros conceitos identificados nas proposições dos registros escritos dos alunos;

• o conceito-chave **variáveis linguísticas** e os outros conceitos identificados nas proposições dos registros escritos dos alunos;

• o conceito-chave **base de regras** e os outros conceitos identificados nas proposições dos registros escritos dos alunos.

5.2 – O desenvolvimento da pesquisa

A nossa preocupação, no primeiro contato com os alunos era, naturalmente, envolvê-los e mobilizá-los para os nossos objetivos. Para tanto, antes de entregar os questionários, fizemos uma retrospectiva histórica sobre as origens da lógica, passando pela lógica clássica, a lógica booleana, apresentando os momentos da história da matemática em que o professor Lotfi A. Zadeh, por volta de 1965, publicou seu estudo sobre a matemática dos conjuntos *fuzzy*; e, em 1973, publicou os fundamentos da Teoria *Fuzzy* — Lógica *Fuzzy* —, introduzindo um novo pensamento matemático que integra a visão e a linguagem científicas à visão e ao pensamento aliado à experiência do sujeito, este aqui entendido como ser humano dotado de pensamento, sentimento, inteligência e experiências acumuladas.

Na segunda etapa da pesquisa, os alunos foram convidados a resolver problemas e desenvolver atividades — apresentados a seguir — previamente elaborados pela pesquisadora, juntamente com um roteiro para o registro de solicitações que, se seguidas, ajudar-nos-iam a compreender os modos de pensamento utilizados pelos alunos na resolução dos problemas.

Eis o que foi proposto aos alunos:

Problemas propostos para a atividade inicial

Caro aluno, abaixo você encontrará um conjunto de problemas a serem resolvidos. Para que possamos dar continuidade ao trabalho, é fundamental que você justifique cada resposta. Portanto, ***durante a solução dos problemas, fique atento ao seguinte:***

(a) Mencionar os recursos que você utilizou para encaminhar a solução (desenhos; relações numéricas, da mais simples para a mais complexa, entre outros), intuições que foram valiosas, raciocínio utilizado, entre outros.

(b) Indicar conteúdos matemáticos usados para a solução.

(c) Relatar a predisposição dos colegas (e sua) para buscar a solução.

(d) Atentar para o tempo gasto, aproximadamente, para responder cada problema.

(e) Observar o tempo gasto, aproximadamente, para resolver todos os problemas.

(f) Indicar se você resolveu os problemas sozinho ou com a ajuda de seus colegas.

(g) Caso tenha trabalhado em grupo, procure relatar: ajuda significativa que cada um pôde dar ao outro durante a solução e perguntas e dicas valiosas formuladas pelo grupo para o encaminhamento da solução.

Bom trabalho!

1. O excesso de velocidade é causa de multa. Numa rodovia onde o limite de velocidade é 120km/h, o que seria uma velocidade baixa, média, alta e altíssima? Justifique sua resposta.

2. A fita abaixo possui uma variação de cor que vai do vermelho para o amarelo. Imagine-se com dor de cabeça. Marque na fita um ponto para cada um dos seguintes sintomas: dor fraca, moderada e forte. Justifique como você fez para determinar a localização de cada um dos pontos.

3. Fazer uso do facho de luz alta dos faróis em vias providas de iluminação pública é considerado uma infração leve, média, grave ou gravíssima? Justifique sua resposta.

4. Uma viagem de ônibus da cidade A até a cidade B demora aproximadamente seis horas e meia. Se tomarmos o ônibus que deve sair às 23h da cidade A, mas está quase sempre atrasado, a que horas chegaremos na cidade B? Justifique sua resposta.

5. A fotografia ao lado mostra o encontro das águas dos Rios Negro e Solimões. Identifique quando a água destes dois rios se encontram. Justifique sua resposta.

6. Diga se o raciocínio está correto ou não. Justifique sua resposta.

“Os paranaenses moram perto da Argentina. Maria não veio do Paraná. Logo, ela não pode morar perto da Argentina”.

“Se o paranaense está perto da Argentina, então o que se pode dizer do gaúcho, do catarinense e do paulista?"

7. O ar condicionado da sua sala de aula possui um controlador de temperatura que mantém o ambiente a uma temperatura constante escolhida por você. Como ele consegue manter a temperatura constante? Justifique sua resposta.

8. Você está com sede e depara-se com duas fontes de água. Em cada uma delas existe uma placa com os seguintes dizeres:

A probabilidade de contaminação desta água é de 10%.

A possibilidade de contaminação desta água é de 10%.

De qual fonte você beberia água? Justifique sua resposta.

Na segunda etapa, apresentamos e desenvolvemos com o grupo as ideias fundamentais dessa lógica, conforme o cronograma abaixo:

Licenciatura - noturno		
Dia	Período	Assunto
29/05	20:50 às 22:30	Entrega dos problemas/atividades para os alunos
04/06	20:50 às 22:30	Início do curso - introdução e comentário sobre os problemas
05/06	19:00 às 20:40	Conjuntos *fuzzy* e variáveis linguísticas
08/06	19:00 às 20:40	Números *fuzzy* e funções de pertinência
15/06	19:00 às 20:40	Criação de regras, inferência *fuzzy*, esquema geral de um sistema *fuzzy*
18/06	19:00 às 20:40	Aplicação - resolução completa do problema sobre controle de temperatura
19/06	20:50 às 22:30	Avaliação final.

Para finalizar, entregamos um outro conjunto de problemas —apresentados a seguir —, contendo as mesmas orientações do primeiro, para serem resolvidos pelos alunos. Esta etapa é de vital importância para fundamentar as nossas percepções e as conclusões do trabalho desenvolvido.

Problemas propostos para a atividade final

Caro aluno, abaixo você encontrará um conjunto de problemas a serem resolvidos. É importante que você ***justifique cada uma das respostas****. Portanto, durante a solução dos problemas procure:*

(a) Mencionar os recursos que você utilizou para encaminhar a solução (desenhos, relações numéricas da mais simples para mais complexa, entre outros), as intuições que foram valiosas, o raciocínio utilizado, entre outros.

(b) Indicar os conteúdos matemáticos usados para a solução.

(c) Revelar a predisposição dos colegas (e a sua) para buscar a solução.

(d) Indicar o tempo gasto, aproximadamente, para responder cada problema.

(e) Mencionar o tempo gasto, aproximadamente, para resolver todos os problemas.

(f) Indicar se você resolveu os problemas sozinho ou com a ajuda de seus colegas.

(g) Caso tenha trabalhado em grupo procure relatar: ajuda significativa que cada um pôde dar ao outro durante a solução e perguntas e dicas valiosas formuladas pelo grupo para o encaminhamento da solução;

Bom trabalho!

1. De acordo com o aproveitamento em um curso, os alunos podem ser considerados “fracos”, “médios” e “bons”.

(a) Se a avaliação do aproveitamento é feita por notas de 0 a 10, como deve ser o critério de aprovação neste curso?

(b) Se a nota final do aluno é 4,8, ele deve ser considerado mais médio que fraco; neste caso, ele seria aprovado? E o que você diria, se a nota do aluno fosse 4,5? E o que você diria, se a nota fosse 5,2?

(c) Usando a subjetividade própria do fenômeno “avaliação”, defina um critério de aprovação rígido e um flexível.

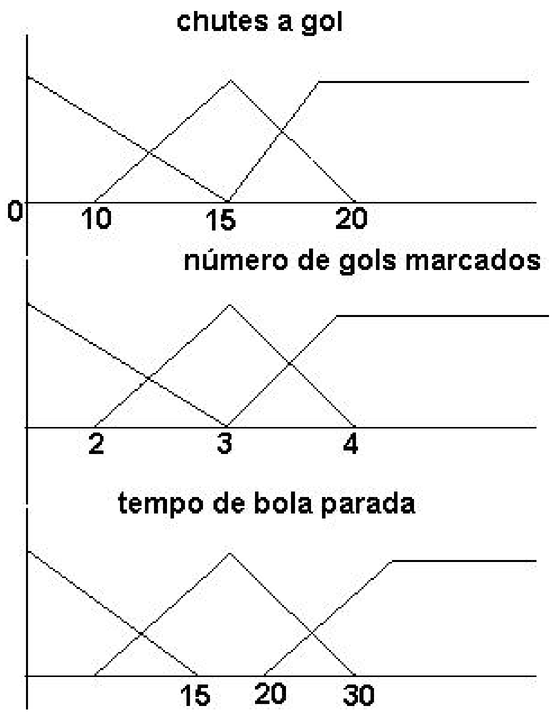
2. Fazer uso do facho de luz dos faróis em vias públicas pode ser considerado uma infração leve, média, grave ou gravíssima.

(a) Defina as subjetividades e as respectivas funções de pertinência do fenômeno.

(b) Monte uma base de regras que auxilie na aplicação da infração.

3. No campeonato brasileiro de futebol, os jogos podem ser classificados como “bons”, “razoáveis” e “fracos”. Os critérios adotados para tal classificação são: “chutes a gol”, “gols marcados” e “tempo de bola parada”. Estas variáveis podem ser classificadas como “alto”, “médio” e “baixo”, segundo seus graus de pertinência (Veja figuras).

Pede-se:



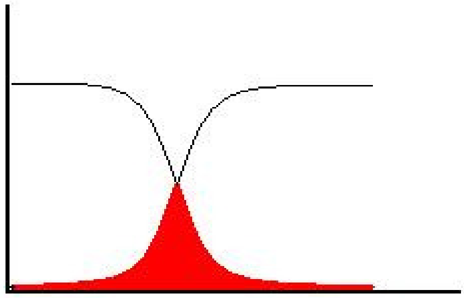
(a) Construa uma base de regras, usando estas três variáveis para classificar um jogo, lembrando que, quanto mais chutes a gol e mais gols marcados, melhor é o jogo e, quanto mais tempo de bola parada, pior é o jogo.

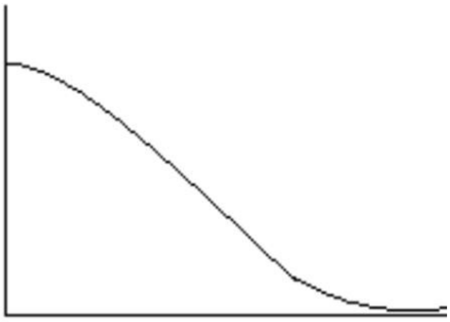
(b) Se um jogo teve 25 chutes a gol, 2 gols marcados e 20 minutos de bola parada, como você o classificaria? E se, dos 25 chutes a gol, tivessem sido marcados 4 gols, como você classificaria esse jogo?

(c) O que seria um jogo pior e um melhor?

4. No caso do encontro dos rios Negro e Solimões, o que se pode afirmar com relação aos itens (a) e (b)?

(a) Com base no enunciado faça a interpretação da situação representada na figura ao lado.





curva normal gaussiana

(b) Após o encontro dos dois rios, o conjunto fuzzy mais adequado para a função de pertinência seria uma curva normal (gaussiana), uma vez que, por menor que seja a pertinência da água de um rio no outro, ela sempre vai existir. Com base no exposto, defina as subjetividades e as respectivas funções de pertinência do fenômeno.

5.3 – Uma tentativa de análise

Da nossa expectativa, nesta pesquisa de cunho acadêmico-educacional, os dados e os fatos coletados devem retratar o estado de compreensão e os modos lógicos de pensamento em que o educando se encontra. Ou seja, isto de algum modo conseguido, no caso da nossa pesquisa, ajuda-nos a saber *se tal estado* é satisfatório ou vantajoso na direção do pensamento *fuzzy*. Dessa forma, esperamos ir ao encontro de um dos objetivos da nossa pesquisa, qualificando de algum modo o *desenvolvimento do pensamento fuzzy* dos alunos, manifestado na solução dos problemas. Nesse processo de recolhimento e interpretação inicial dos dados, estaremos orientados pelas categorias prévias mencionadas, as quais, por sua vez, estão, como, já discutido, apoiadas em vertentes da matemática, da pedagogia e da psicologia.

Assim, importam, para a prática da análise das soluções e das relações feitas pelos sujeitos pesquisados, tanto os tipos de problemas apresentados para emersão das evidências para análise, como o planejamento pedagógico que fizemos. Os problemas propostos orientam a prática da pesquisa, e o planejamento pedagógico pode fazer a mediação entre a teoria matemática e a prática de aprendizagem e ensino. Sem estes dois, a pesquisa aqui em discussão pode ficar sem sustentação.

O caminho tomado para análise teve, de início, a nossa observação — de aluno por aluno — ao tratamento dado à solução de cada um dos problemas. Naturalmente, nosso olhar esteve voltado não para algo mais rigoroso em termos de acertos e erros, porém para uma atitude do resolvedor que levasse em conta nuances deste outro pensamento matemático — pensamento *fuzzy*. Nesse sentido, cada solução foi por nós interpretada como tendo o resolvedor a potencialidade de usar os recursos do pensamento *fuzzy* na resolução de um problema, mas estando mais ou menos perto de tal uso. Esse distanciamento— ou essa proximidade — foi por nós qualificado, tendo como inspiração a teoria da "zona de desenvolvimento proximal" elaborada por Vygotsky, a qual define a distância entre o *nível de desenvolvimento real*, determinado pela capacidade de resolver um problema sem ajuda, e o *nível de desenvolvimento potencial*, determinado pela resolução de um problema sob a orientação de um professor ou em colaboração com outros companheiros. No nosso caso, focalizaremos as informações nas quais o resolvedor mostra potencialidade para lidar, por exemplo, com graduações diante de uma mesma situação, mas ainda não alcançou um processo tal que permita formalizá-lo.

Com base na teorização descrita acima, será possível realizar uma organização das respostas para análise. Essa organização será apenas inicial, uma vez que será na observação do processo todo que construiremos uma compreensão mais aprofundada dos eventos, abrindo-se aí a possibilidade de selecionar outros episódios ou sessões.

5.4 – Buscando evidências...

A respeito da análise do material recolhido ao longo de uma pesquisa acadêmica MARTINS (2004, p. 292) apresenta uma verdadeira síntese do que pode ser passar neste momento:

> A variedade de material obtido qualitativamente exige do pesquisador uma capacidade integrativa e analítica que, por sua vez, depende do desenvolvimento de uma caapacidade criadora e intuitiva.[...] A intuição aqui mencionada não é um dom, mas uma resultante da formação teórica e dos exercícios práticos do pesquisador.

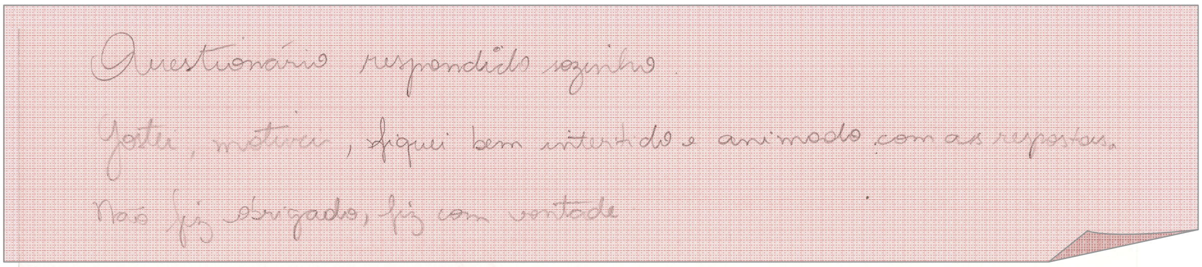
Assim, o movimento de busca de evidências deve estar em consonância com as concepções que se tem do objeto em estudo e da prática investigativa adotada. No caso, embora em cada aula tenha sido explorado um conceito da lógica fuzzy alguns procedimentos de ordem geral fizeram parte da rotina das aulas como: percorrer a classe enquanto os alunos estavam resolvendo os problemas procurando observar seus métodos e o diálogo trocado com outros colegas, conduzir o curso atráves de diálogo reflexivo-condutor; estimular a participação de diferentes alunos; apresentação para a classe dos registros/resolução do problema por alguns colegas e finalmente análise da produção escrita dos mesmos.

Para encaminhar e efetivar a análise adotaremos o seguinte procedimento: a partir do questionário inicial discutiremos questão por questão, introduzindo algumas falas – dos alunos – captadas na sala de aula, bem como parte dos registros escritos dos mesmos no decorrer da intervenção pedagógica e, finalmente, faremos uma análise comparativa entre os questionários. Naturalmente, consideramos a manifestação dos alunos e tais questionários uma importante fonte de dados para o estudo.

5.5 – Análise dos problemas/atividade inicial

Vale aqui destacar que ao eleger o grupo que fez parte do trabalho de pesquisa, informamos os mesmos sobre as atividades – assegurado-lhes sigilo na divulgação dos resultados – mas, não fornecemos nenhuma característica da teoria/idéias matemáticas que poderiam ser uitlizadas, bem como a forma como os encontros seriam conduzidos.

Ao final do trabalho - alguns dos participantes registram a sua opinão a respeito das questões, as quais seguem abaixo:


Questionário respondido sozinho.
Gostei, motivei, fiquei bem interessado e animado com as respostas.
Não fiz obrigado, fiz com vontade

Outro aluno se expressa da seguinte forma:

> Opinião: É muito interessante esse tipo de questão
> pois desperta dúvidas e questionamentos, além de que
> as perguntas são interpretadas de formas diferentes,
> gerando conflitos de respostas. Gostei muito de
> fazer isso.

Ao caminharmos pela sala, enquanto os alunos resolviam as questões, vários deles manifestaram um certo incômodo, tal como:

- Professora, isto é alguma pegadinha?

Outra aluna retruca:

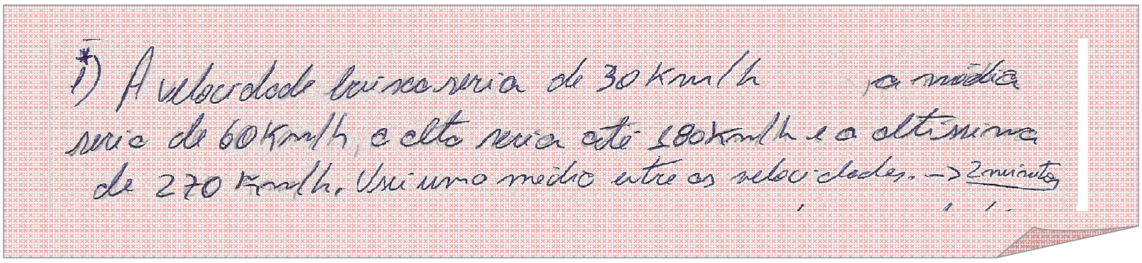
- Resta saber o objetivo disto.

Encaminhamos, então, um estudo mais detalhado sobre as respostas elaboradas pelos alunos.

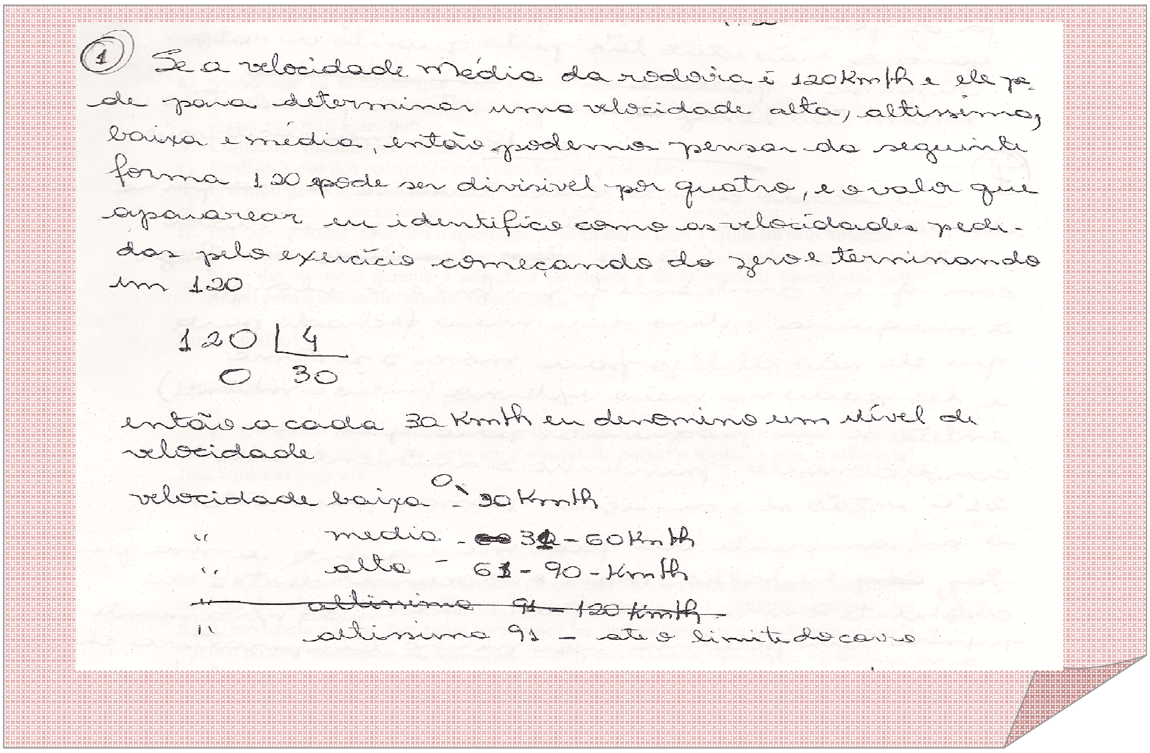
5.5.1 – Problema 1

O excesso de velocidade é causa de multa. Numa rodovia onde o limite de velocidade é 120km/h, o que seria uma velocidade baixa, média, alta e altíssima? Justifique sua resposta.

De enunciado bastante simples o problema apresenta uma situação corriqueira - excesso de velocidade e infração – quantificada por meio das variáveis lingüísticas *baixa, média, alta e altíssima*. Selecionamos três exemplos significativos em termos da semelhança das soluções apresentadas pela maior parte da turma, as quais tiveram papel orientador na nossa intervenção junto ao grupo e nos caminhos tomados durante o curso.



1) A velocidade baixa seria de 30 Km/h a média seria de 60 Km/h, a alta seria até 180 Km/h e a altíssima de 270 Km/h. Usei uma média entre as velocidades. → 2 minutos

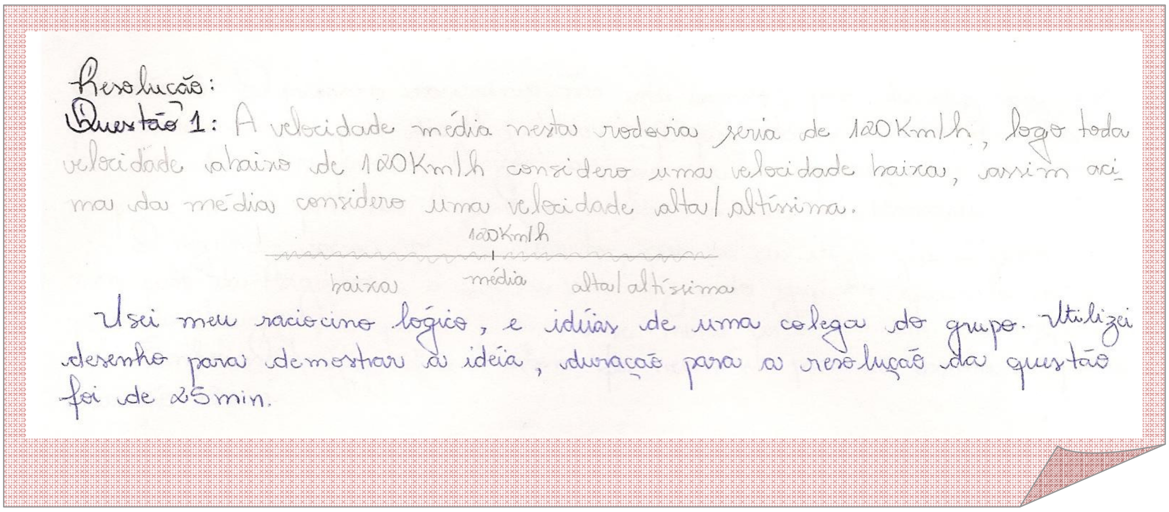


1) Se a velocidade média da rodovia é 120 Km/h e ele pede para determinar uma velocidade alta, altíssimo, baixa e média, então podemos pensar da seguinte forma 120 pode ser divisível por quatro, e o valor que aparecer eu identifico como as velocidades pedidas pelo exercício começando do zero e terminando em 120

$$
\begin{array}{r|l}
120 & 4 \\
\hline
0 & 30
\end{array}
$$

então a cada 30 Km/h eu denomino um nível de velocidade

velocidade baixa 0 - 30 Km/h
" médio - ~~00~~ 31 - 60 Km/h
" alto - 61 - 90 - Km/h
~~" altíssimo 91 - 120 Km/h~~
" altíssimo 91 - até o limite do carro



Resolução:
Questão 1: A velocidade média nesta rodovia seria de 120 Km/h, logo toda velocidade abaixo de 120 Km/h considero uma velocidade baixa, assim acima da média considero uma velocidade alta/altíssima.

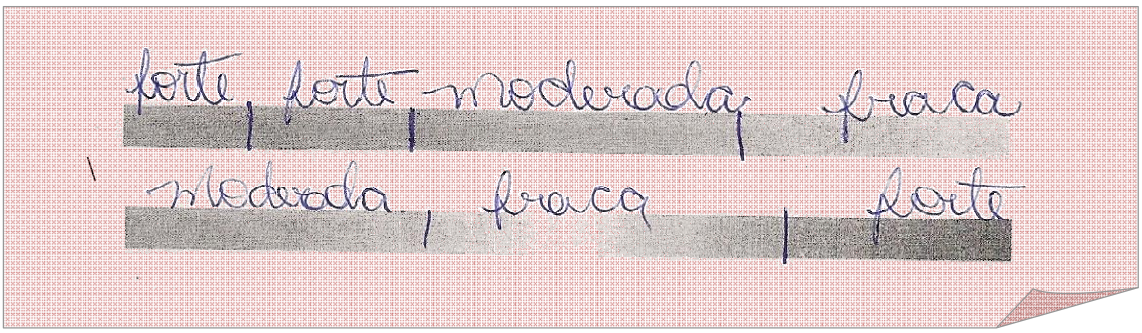
Usei meu raciocino lógico, e idéias de uma colega do grupo. Utilizei desenho para demostrar a idéia, duração para a resolução da questão foi de 25 min.

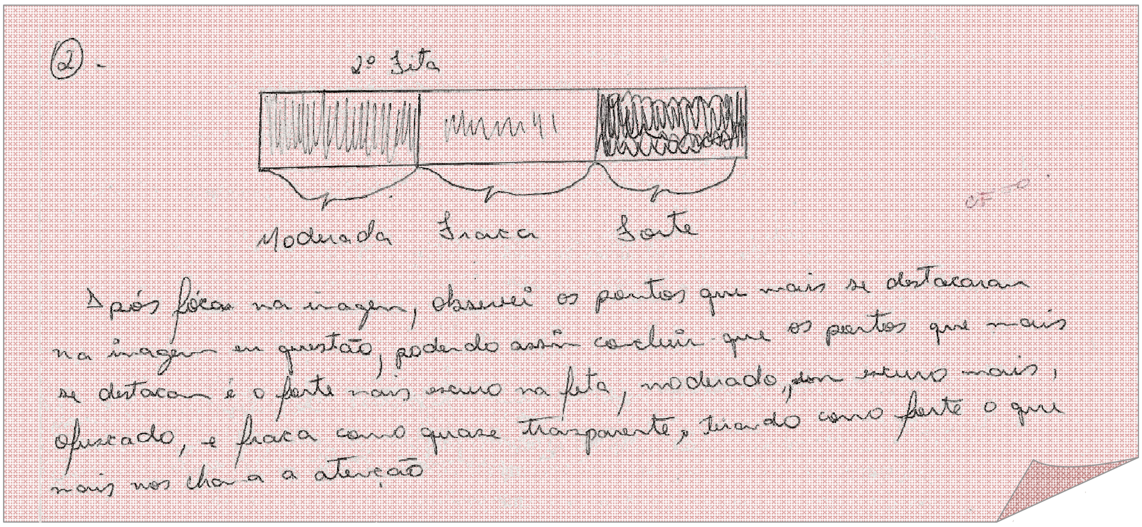
Em termos de conteúdo matemático pudemos observar que os alunos se utilizam das relações de divisibilidade e média aritmética. Um fato que nos chamou a atenção foi como alguns alunos determinam os intervalos entre uma velocidade e outra (velocidade baixa: 0 - 30km/h, velocidade média: 31 – 60km/h...), procedimento que levamos em conta como discussão para iniciamos o segundo encontro, colocando questões sobre o reconhecimento da passagem (abrupta) da velocidade de 30km/h para 31km/h e da diferença/sensação, em termos práticos, quando o carro anda a 29km/h, 30km/h ou 31km/h?

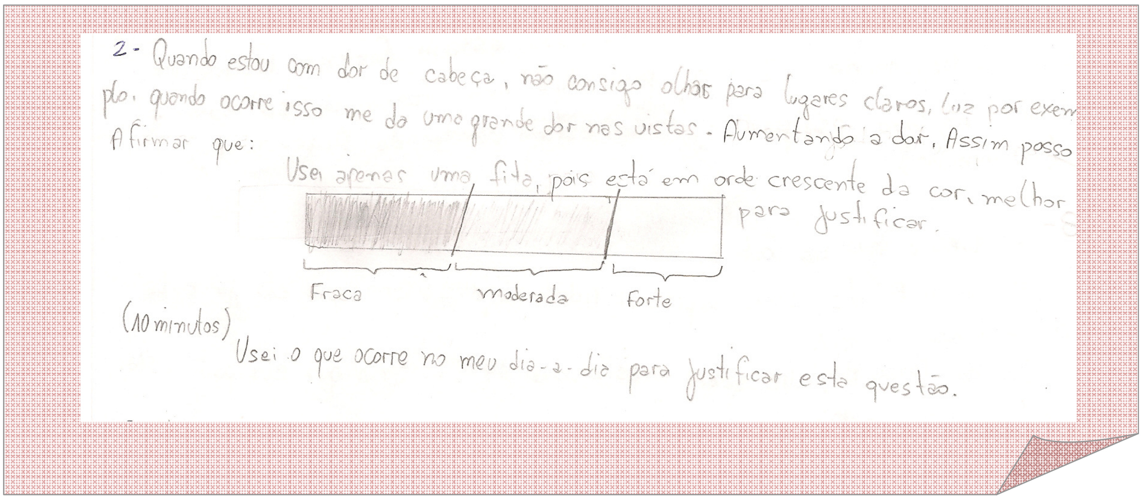
5.5.2 – Problema 2

A fita abaixo possui uma variação de cor que vai do vermelho para o amarelo. Imagine-se com dor de cabeça. Marque na fita um ponto para cada um dos seguintes sintomas: dor fraca, moderada e forte. Justifique como você fez para determinar a localização de cada um dos pontos.

Esta questão propõe a quantificação de uma dor utilizando uma fita colorida. Este é um método muito usado na pediatria para auxiliar a criança a se expressar/quantificar a dor que está sentindo.Aqui, mais uma vez, apesar dos alunos perceberem que existe uma zona em que as cores se misturam lentamente eles se utilizam de uma representação dicotômica Shakespereana (ser ou não ser) própria da sua formação em matemática tradicional, norecorte das avaliações de dor – dor forte ou fraca para eles depende de um limiar bem definido.







Da manifestação do aluno logo acima, notamos que ele relaciona a dor sente com a claridade, um exemplo dos fatores subjetivos dos encaminhamentos das respostas às situações cuja definição não possue características precisas/claras. E, aqui vale um destaque em termos do foco central desta pesquisa: afirmações sobre as quais não se pode ter certeza absoluta necessitam de uma abordagem diferenciada, na qual os conjuntos fuzzy – nebulosos, difusos – têm um papel relevante para análise e compreensão das mesmas.

Nesta etapa, sugerimos uma representação - do desenho da fita – no plano cartesiano, um registro possível e valioso para este problema do ponto de vista da teoria dos conjuntos fuzzy.

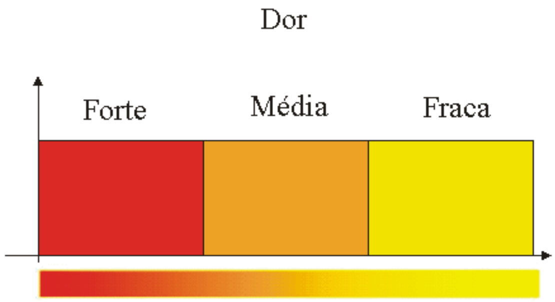


Figura 32. Representação do plano da fita

Na representação da figura 32 os conjutos possuem contornos bem nítido, não se interceptam intersecção e cada elemento nitidamente definido no sentido de pertencer ou não ao conjunto, ouseja: Maria possui dor forte logo ele pertence ao conjunto vermelho, José possui dor média logo ele não pertence ao conjunto vermelho.

A figura 33, apresenta uma configuração fuzzy para a representação anterior. A zona achureada, denominada *nebulosa* na teoria fuzzy pode ser comparada, grosso modo, na teoria clássica de conjuntos com a intersecção entre dois conjuntos - entretanto o significado é diferente daquele da primeira, uma vez que um elemento pode pertencer a um mesmo conjunto com graus de pertinência diferentes, agora no ambiente fuzzy.

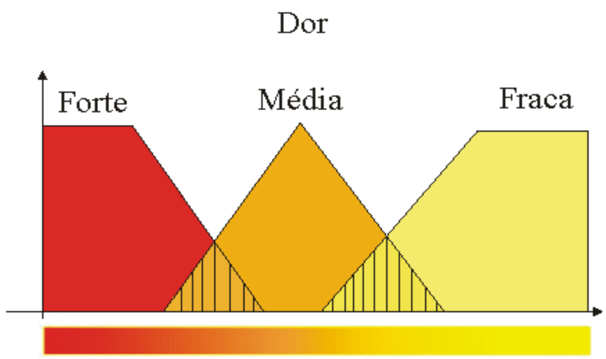


Figura 33. Conjunto *fuzzy* da dor

Como dito, no conjunto fuzzy os termos *forte, médio e fraca* são quantificadores da dor e um elemento pode ser pertencer ao conjunto apenas parcialmente. Isto se dá, também como já explicado, porque a cada conjunto fuzzy associamos uma função de pertinência que determina o grau com que um determinado elemento pertence ao conjunto dentro do intervalo [0, 1]. No caso, Maria pode pertencer ao *conjunto dor forte* com um grau de pertinência 0.8 e ao *conjunto dor média* com um grau de pertinência 0.2 e josé ao *conjunto dor média* com grau de pertinência 1 e portanto pertencer ao *conjunto dor forte* com grau de perinência 0.

Assim, vale mais uma vez destacar que o que diferencia a teoria dos conjuntos fuzzy e a teoria clássica dos conjutos é o fato de podermos mapear a pernitência de um determinado elemento a um conjunto com infinitos valores - entre zero e um.

5.5.3 – Problema 3

Fazer uso do facho de luz alta dos faróis em vias providas de iluminação pública é considerado uma infração leve, média, grave ou gravíssima? Justifique sua resposta

No **problema 3** como não havíamos especificado o tipo de avenida houve uma variedade grande de respostas e os alunos foram unanimes em afirmar que a resposta havia sido elaborada de acordo com o código de trânsito.

Ao colocar este problema pensamos na possibilidade do aluno descrever as várias possibilidades lógicas do tipo: **Se** luz é *alta* **E** via *iluminada* **Então** infração é *leve*

Como vimos, denominamos ***Base de Regras*** ao conjunto de proposições lógicas que descrevem uma determinada situação - discutido no capitulo 3 – aqui representando as informações do especialista (estudioso das regras de trânsito) que constitue a base de conhecimento de um sistema fuzzy.

Vale aqui comentar que a mesma situação-problema foi novamente apresentada no questionário final para melhor analisar as respostas dos alunos após a realização do minicurso.

5.5.4 – Problemas 4 e 6

Em ambos os problemas nosso propósito estava em dar significado matemático a expressões como: *em torno de ... , por volta de ... ,aproximadamente ... ,mais perto que ..*

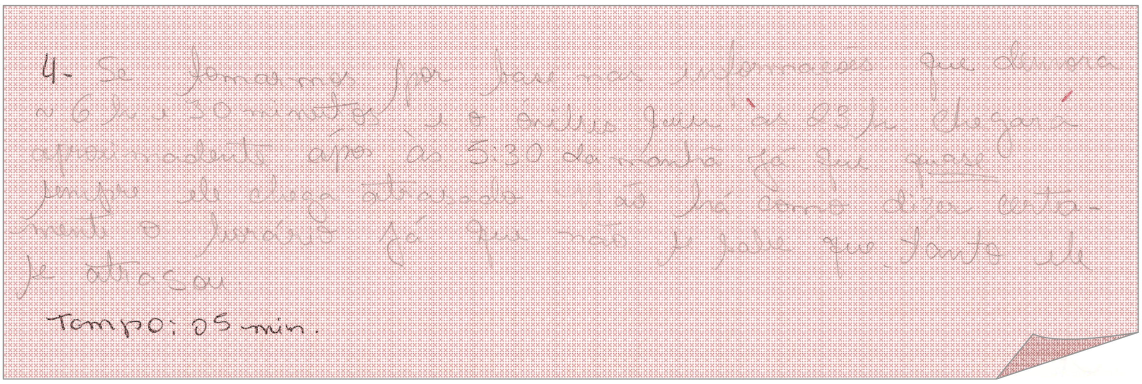
Uma viagem de ônibus da cidade A até a cidade B demora aproximadamente seis horas e meia. Se tomarmos o ônibus que deve sair às 23h da cidade A, mas está quase sempre atrasado, a que horas chegaremos na cidade B? Justifique sua resposta.

O problema 4 proposto pede que o leitor faça uma previsão de chegada do ônibus ao seu destino, uma vez que este esta sempre atrasado.

Aqui, como nos exemplos anteriores, os alunos apresentam modos diversos de raciocínio. Uma aluna comenta:

- Meu marido é motorista de onibus, até onde eu sei eles nunca podem sair adiantado e somente saem atrasados se houver um motivo muito forte. Também, durante a viagem eles devem manter uma velocidade padrão – isto faz com que raramente cheguem muito atrasados, ou seja, chegam sempre em torno do mesmo horário..

Relato de um outro aluno frente ao problema 4.


4- Se tomarmos por base nas informações que demora a 6 h e 30 minutos e o ônibus sair às 23 h chegará aproximadamente após às 5:30 da manhã já que quase sempre ele chega atrasado. Não há como dizer certamente o horário já que não se sabe quanto ele se atrasou.

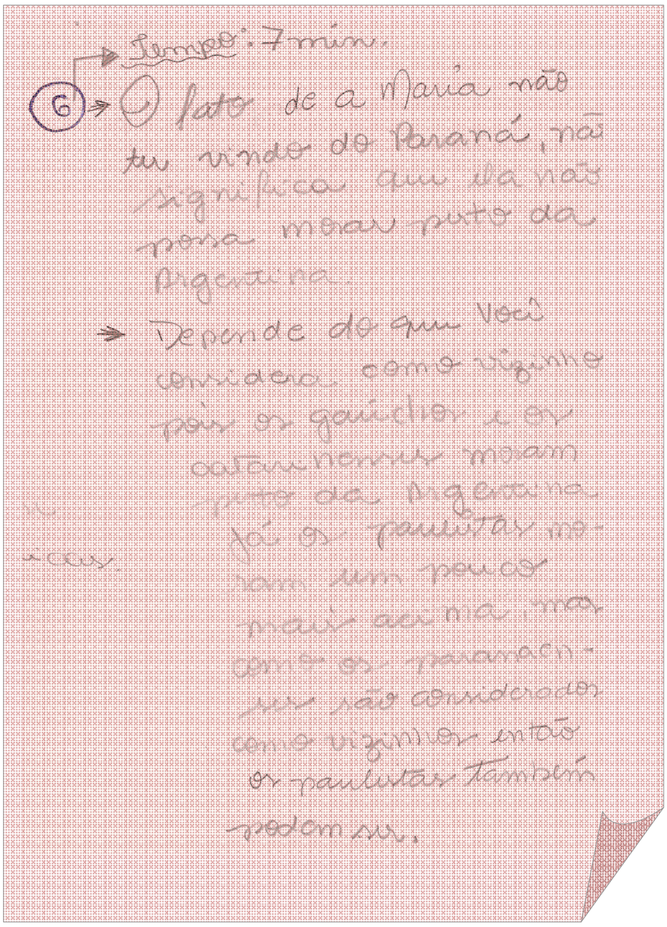
Tempo: 05 min.

Diga se o raciocínio está correto ou não. Justifique sua resposta.

"Os paranaenses moram perto da Argentina. Maria não veio do Paraná. Logo, ela não pode morar perto da Argentina".

"Se o paranaense está perto da Argentina, então o que se pode dizer do gaúcho, do catarinense e do paulista?"

O **problema 6**, propõe uma situação que envolve idéias de localização geográfica e proposições lógicas,diante da qual as respostas foram triviais sem questionamentos significativos para análise.


Tempo: 7 min.

6 → O fato de a Maria não ter vindo do Paraná, não significa que ela não possa morar perto da Argentina.

→ Depende do que você considera como vizinho pois os gaúchos e os catarinenses moram perto da Argentina já os paulistas moram um pouco mais acima, mas como os paranaenses são considerados como vizinhos então os paulistas também podem ser.

5.5.5 – Problema 5

A fotografia ao lado mostra o encontro das águas dos Rios Negro e Solimões. Identifique quando a água destes dois rios se encontram. Justifique sua resposta.

Vale aqui destacar que, do nosso ponto de vista, esta questão parece ter sido uma das que mais chamou a atenção dos alunos, talvez,porque poucos deles possuíam algum conhecimento sobre o tema. Para a maioria dos alunos o. *encontro das águas dos rios Negro e Solimões* era um tema especialmente novo. Logo de início alguns alunos começaram a levantar hipóteses sobre os diferentes aspectos que podem influenciar o fenômeno. Da curiosidade e reflexão de alguns alunos em um mesmo momento:

- Professora, mas a velocidade dos dois rios é a mesma?

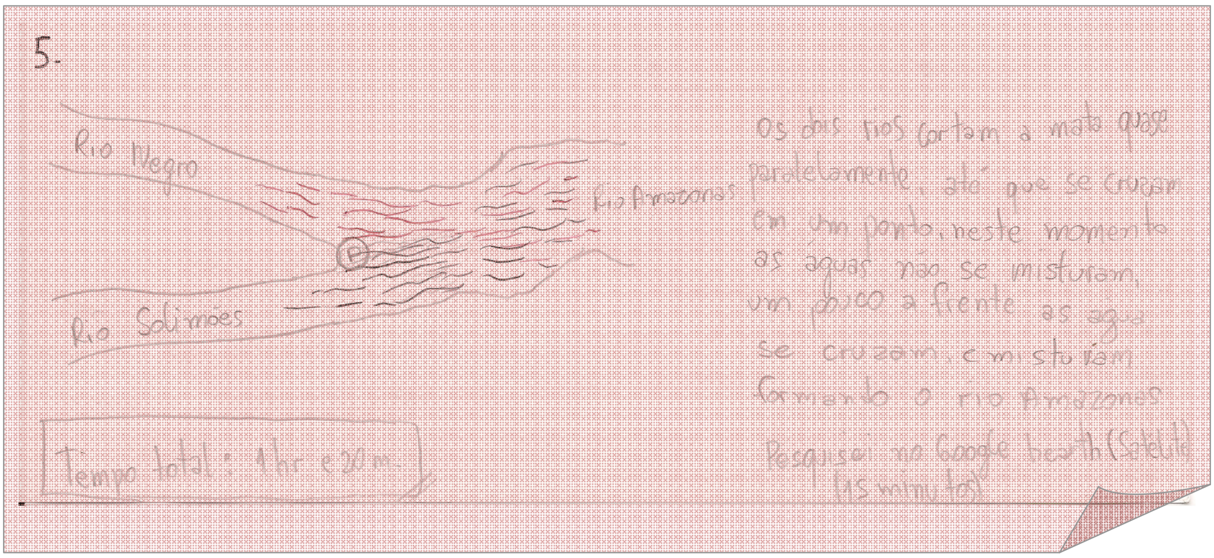
- Ouvi dizer que um deles possui águas barrentas. Então, a densidade da água não vai atrapalhar?

- Se for assim então tudo atrapalha, ventos, temperatura, entre outros.

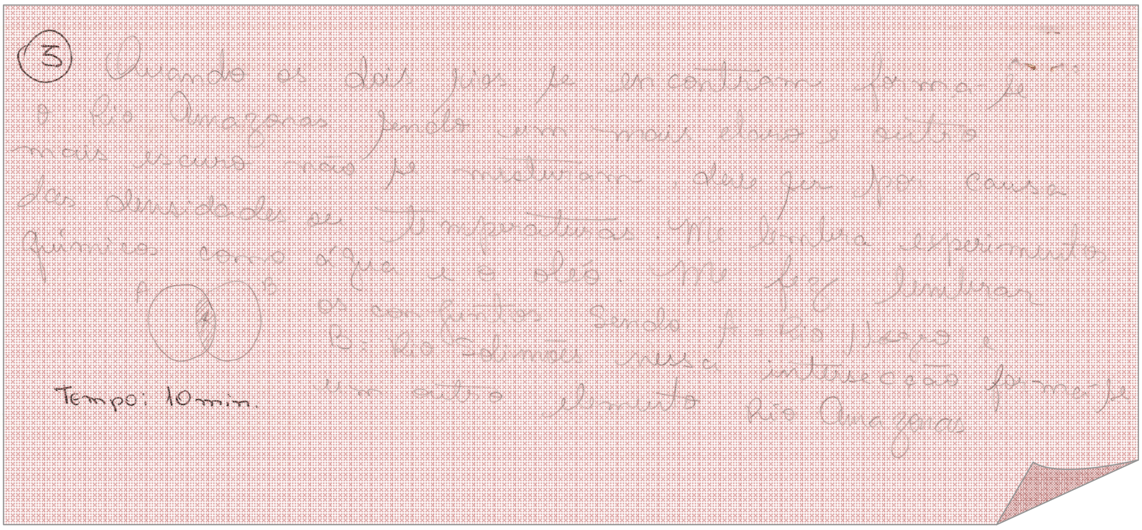
- Não é possível resolver a questão pois a professora não apresentou dados suficiente.

Nesta etapa da discussão alguns alunos que haviam levado notebook para sala de aula foram a internet fazer uma busca ao assunto obtendo algumas imagem via satélite que ilustram lindamente o encontro desses dois rios.

A seguir colocamos a representação feita por um dos alunos.



Outro aluno discute esta questão apoiado,de algum modo,em recursos utilizados na solução de situações-problema semelhantes, ou seja, ele representou, em matemática, o encontro dos rios usando o diagrama de Venn e, da química ele utiliza o conceito de mistura.


3 Quando os dois rios se encontram forma-se
o Rio Amazonas sendo um mais claro e outro
mais escuro não se misturam deve ser por causa
das densidades e temperaturas. Me lembra experimentos
químicos como água e o óleo. Me fez lembrar
os conjuntos. Sendo A = Rio Negro e
B = Rio Solimões nessa intersecção forma-se
um outro elemento Rio Amazonas
A B
Tempo: 10 min.

Esta questão foi retomada nos problemas/atividade final.

5.5.6 – Problema 7

O ar condicionado da sua sala de aula possui um controlador de temperatura que mantém o ambiente a uma temperatura constante escolhida por você. Como ele consegue manter a temperatura constante? Justifique sua resposta.

Apresenta uma situação de controle térmico da sala de aula[12]. Como esperado, grande parte dos alunos encaminhou a solução com base em processos intuitivos e conhecimentos práticos, de algum modo, adquiridos em situações outras que a da sala de aula como bem vemos, em uma das soluções:

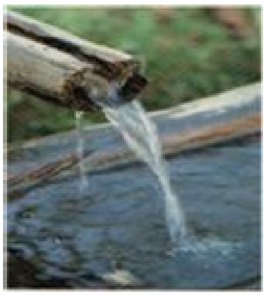
---

[12] Vale aqui destacar que a solução de uma situação sobre controle térmico de água –especialmente semelhante a esta enquanto problema – apresenta-se detalhadamente resolvida em WEBER & KLEIN,2003.p.57) por meio de recursos da matemática fuzzy.

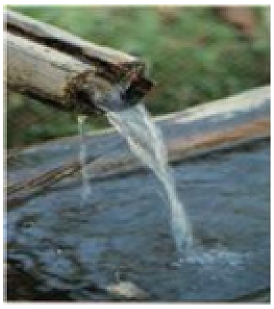
f- Através do equilíbrio térmico: ar quente
quando mais ar quente queremos, mais trabalho
ar frio retira-se da sala, mandando-se Sala → ar frio
a sala quente e vice-versa.
tempo gasto ≅ 5,6 min.

5.5.7 – Problema 8

Você está com sede e depara-se com duas fontes de água. Em cada uma delas existe uma placa com os seguintes dizeres:



A probabilidade de contaminação desta água é de 10%.



A possibilidade de contaminação desta água é de 10%.

De qual fonte você beberia água? Justifique sua resposta.

Neste último problema da referida lista nosso propósito foi trabalhar as idéias de probabilidade e possibilidade[13] esta última, como exposto um conceito importante da teoria

[13] Vale aqui destacar que a discussão de uma situação em termos de possibilidade e probabilidade apresenta-se de modo detalhada em BASSANEZI, KOSKO.

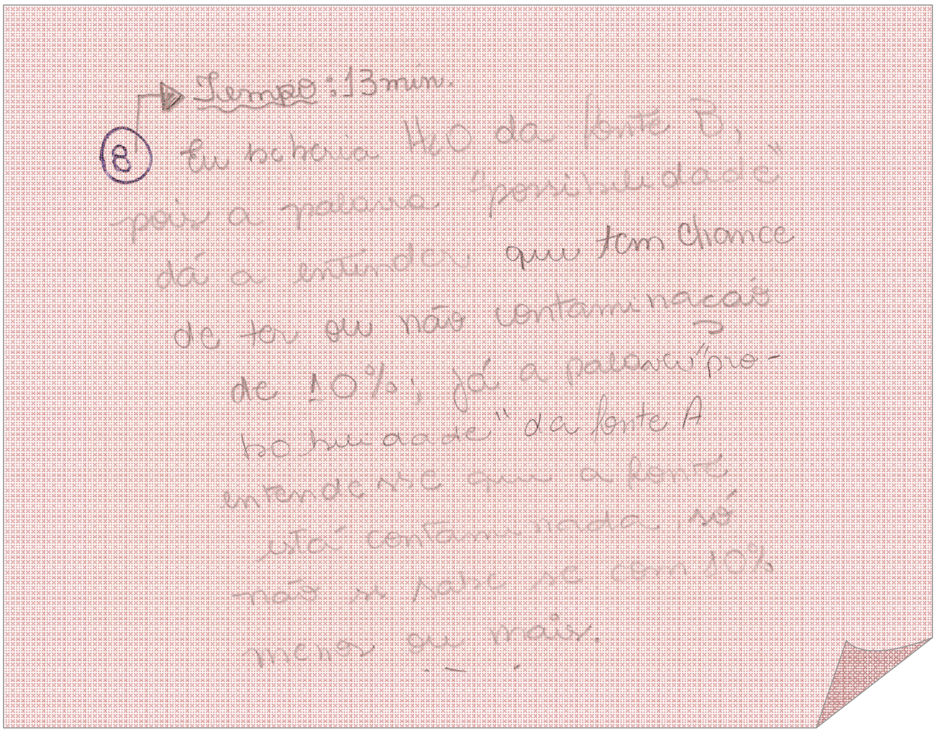
fuzzy. Assim que o grupo leu a questão, alguns deles verbalizaram que os professor de química e física já haviam mencionado esta distinção/questão. Apesar disto houve uma grande quantidade de diferentes respostas,fato que não nos surpreendeu uma vez que como professores um conteúdo apresentado – mais ou menos cuidadosamente pelo professor – pode levar o “outro” (aluno) a diferentes representações/significados. Das respostas ao problema 8:

8) Não beberia água de nenhuma das fontes, pois a probabilidade de estarem contaminadas é a mesma, logo eu poderia adquirir alguma doença tomando água de uma das duas.
Tempo: 1 minuto

8 - Da fonte b, pois a A, tende a contaminar, pois nela ocorre uma probabilidade ou seja, é uma <u>certeza</u> que está contaminado, mas não uma certeza de ser 100%, já na fonte b, existe a possibilidade de contaminação, ou seja a uma "dúvida" em questão, ou seja, <u>pode</u> ser que esteja.

tempo gasto $\cong$ 10 min

Tempo total: $6+4+3,5+4+3+5,6+10 = 35,9$ min



Tempo: 13 min.

8 Eu beberia H_2O da fonte B, pois a palavra "possibilidade" dá a entender que tem chance de ter ou não contaminação de 10%; já a palavra "probabilidade" da fonte A entende-se que a fonte está contaminada só não se sabe se com 10% menos ou mais.

E, aqui, sentimo-nos mais a vontade em traçar um perfil desta realidade, do encontro desta sala de aula com as questões propostas na direção de soluções envolvendo matemática fuzzy. Pudemos dizer, então, que foi possível perceber que: a) todos os alunos tinham algum conhecimento – mais ou menos elaborabo – que permitiu que os mesmos emitissem opiniões e se mobilizassem na direção das soluções e, b) os alunos do grupo pesquisado não possuia conhecimento prévio algum da teoria matemática – fuzzy - proposta neste trabalho.

De uma maneira geral os alunos se mobilizaram frente aos problemas propostos, uns com mais entusiasmo que outros, uns mais reflexivos, outros mais intuitivos, outros ainda, fazendo relações que levavam a inferências importantes do ponto de vista cognitivo/epistemológico em termos da teoria fuzzy.

5.6 – Análise dos problemas/atividade final:

Após o desenvolvimento do minicurso, apresentamos quatro questões com o objetivo de buscar evidências - mais consistentes - que nos permitissem responder as questões da pesquisa em desenvolvimento..

Todas as questões solicitaram de forma, mais ou menos indireta, que o aluno reconheça as colocações/tensões de ordem subjetiva no decorrer das soluções e a interpretação destas por meio das ferramentas da teoria fuzzy.

5.6.1 – Problema 1

De acordo com o aproveitamento em um curso, os alunos podem ser considerados “fracos”, “médios” e “bons”.

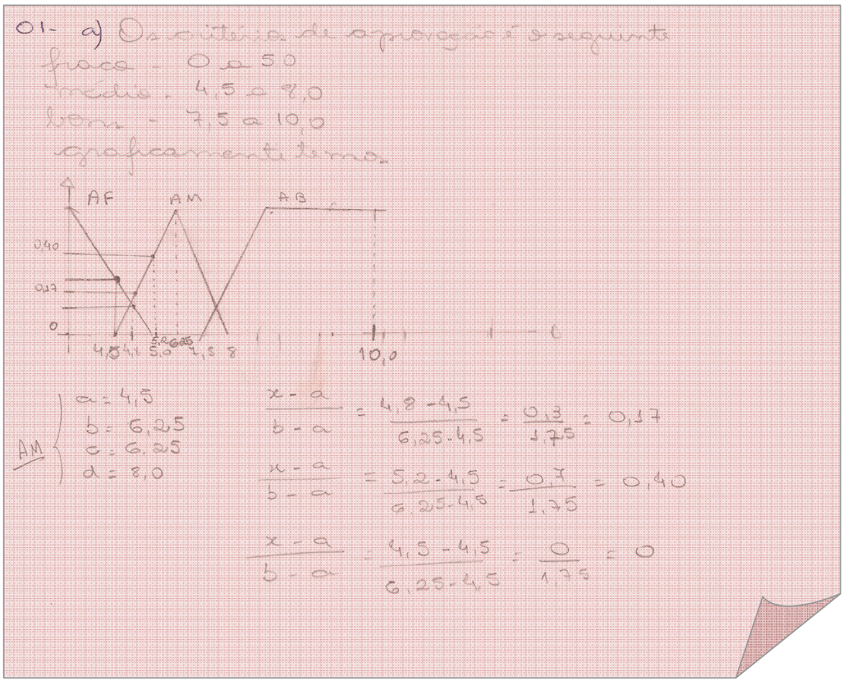
(a) Se a avaliação do aproveitamento é feita por notas de 0 a 10, como deve ser o critério de aprovação neste curso?

(b) Se a nota final do aluno é 4,8, ele deve ser considerado mais médio que fraco; neste caso, ele seria aprovado? E o que você diria, se a nota do aluno fosse 4,5? E o que você diria, se a nota fosse 5,2?

(c) Usando a subjetividade própria do fenômeno “avaliação”, defina um critério de aprovação rígido e um flexível

No **problema 1** o aluno deve elaborar dois critérios de aprovação – um rígido outro flexível – e responder as questões formuladas no sentido de nos ajudar a compreender sobre a apreesão de tais idéias pelos alunos.

As respostas apresentadas a seguir foram selecionadas tomando como critério a contribuição significativa em cada uma delas para a análise da pesquisa.

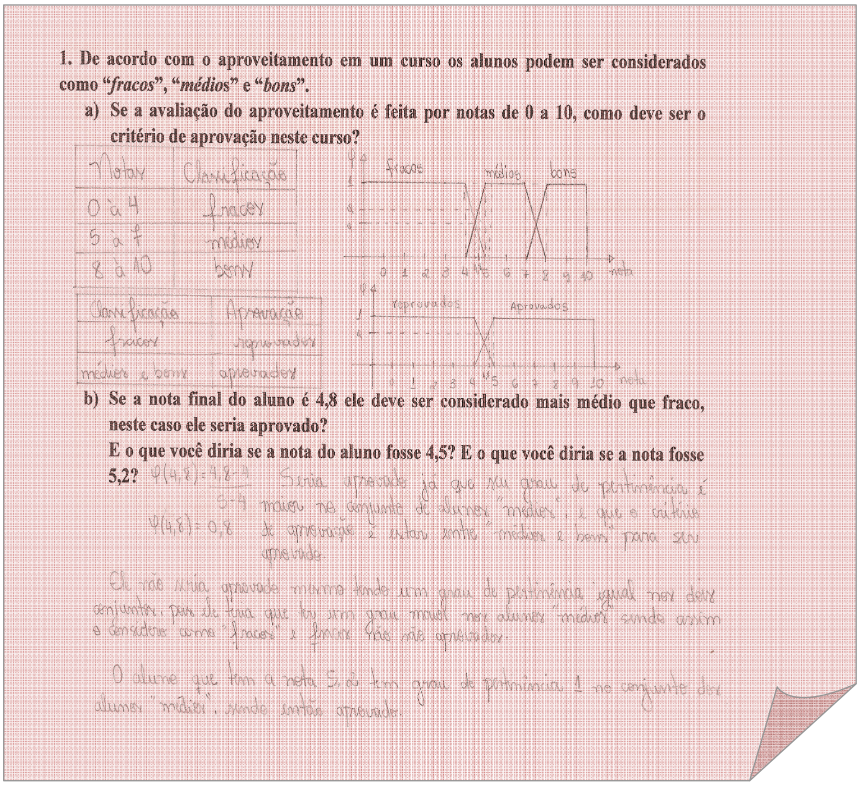


As relações apresentadas na produção escrita desse aluno parece refletir uma melhar apropriação da noção de conjunto fuzzy e de variável lingüística esta mais e mai. Este aluno parece, ainda, ter conseguido utilizar tais noções em um outro contexto – aprovação escolar - diferente do apresentado na atividade inicial.

A resolução do mesmo problema por outro aluno também demonstra uma evolução significativa na maneira de resolvê-lo, assim como, na utilização de ferramentas da teoria dos conjuntos fuzzy.

Com efeito, diante das situações escolhidas a ser resolvidas, os alunos, apresentam modos diversos de raciocínio, os quais devido a abrangência da teoria em discussão se mostram corretos uma vez que neste contexto matemático se leva em conta as opiniões e pensamentos próprios do resolvedor.

Outro exemplo de solução:



1. De acordo com o aproveitamento em um curso os alunos podem ser considerados como “*fracos*”, “*médios*” e “*bons*”.

a) Se a avaliação do aproveitamento é feita por notas de 0 a 10, como deve ser o critério de aprovação neste curso?

Notas	Classificação
0 à 4	fracos
5 à 7	médios
8 à 10	bons

Classificação	Aprovação
fracos	reprovados
médios e bons	aprovados

b) Se a nota final do aluno é 4,8 ele deve ser considerado mais médio que fraco, neste caso ele seria aprovado?
E o que você diria se a nota do aluno fosse 4,5? E o que você diria se a nota fosse 5,2?

$\varphi(4,8) = \frac{4,8-4}{5-4}$

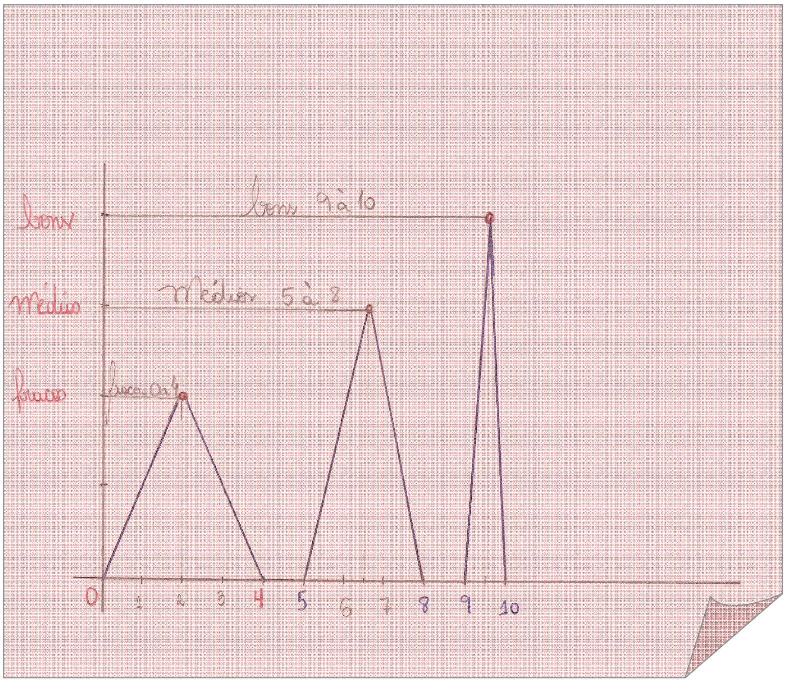
$\varphi(4,8) = 0,8$

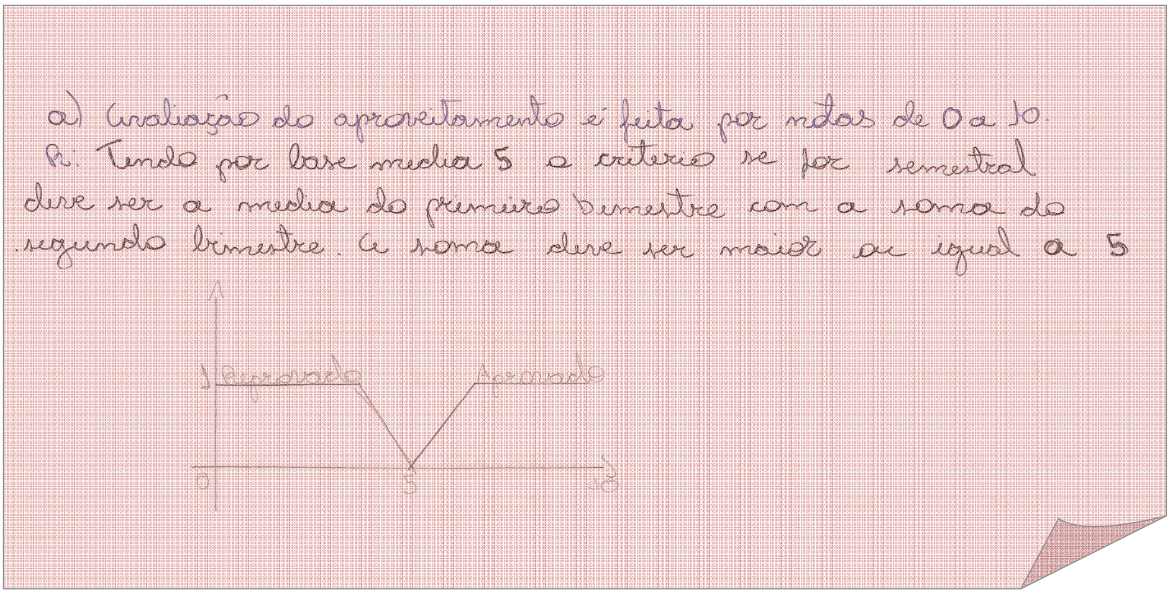
Seria aprovado já que seu grau de pertinência é maior no conjunto de alunos "médios", e que o critério de aprovação é estar entre "médios e bons" para ser aprovado.

Ele não seria aprovado mesmo tendo um grau de pertinência igual nos dois conjuntos, pois ele teria que ter um grau maior nos alunos "médios" sendo assim o consideramos como "fracos" e fracos não são aprovados.

O aluno que tem a nota 5,2 tem grau de pertinência 1 no conjunto dos alunos "médios", sendo então aprovado.

É conhecido que em situações de ensino e aprendizagem nem todos os alunos conseguem atingir o mesmo estágio de compreensão das idéias propostas – quero falar que as causas são difíceis de serem determinadas neste primeiro trabalho com o tipo de abordagem feita – mas que, como podemos observar da reposta dos alunos a seguir, deram um passo na direção desejada por nós.




a) Avaliação do aproveitamento é feita por notas de 0 a 10.
R: Tendo por base media 5 o criterio se for semestral deve ser a media do primeiro bimestre com a soma do segundo bimestre. a soma deve ser maior ou igual a 5

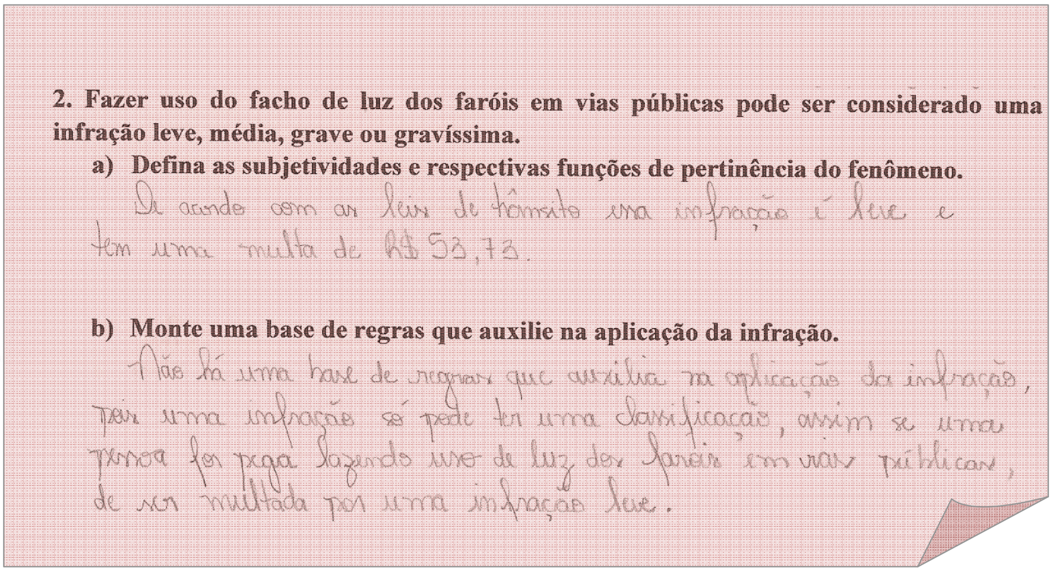
5.6.2 – Problema 2

Fazer uso do facho de luz dos faróis em vias públicas pode ser considerado uma infração leve, média, grave ou gravíssima.

(a) Defina as subjetividades e as respectivas funções de pertinência do fenômeno.

(b) Monte uma base de regras que auxilie na aplicação da infração.

O **problema 2** analisado na primeira atividade e apresentado novamente neste momento é possivel observar por meio da produção escrita dos alunos que que apesar de ocorrido um melhor entendimento do problema este ainda permanece obscuro – confuso, nebuloso.



2. **Fazer uso do facho de luz dos faróis em vias públicas pode ser considerado uma infração leve, média, grave ou gravíssima.**

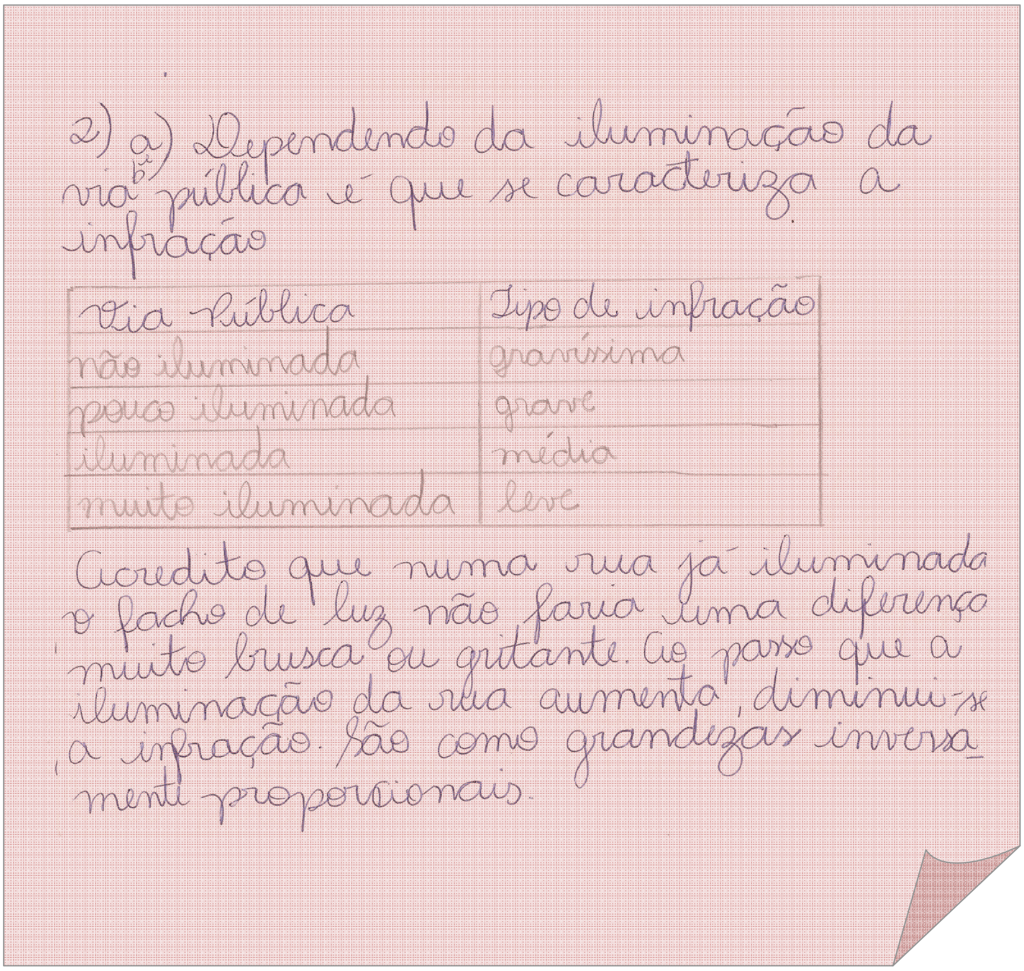
a) **Defina as subjetividades e respectivas funções de pertinência do fenômeno.**

De acordo com as leis de trânsito essa infração é leve e tem uma multa de R$ 53,73.

b) **Monte uma base de regras que auxilie na aplicação da infração.**

Não há uma base de regras que auxilia na aplicação da infração, pois uma infração só pode ter uma classificação, assim se uma pessoa for pega fazendo uso de luz dos faróis em vias públicas, de ser multada por uma infração leve.

Outro aluno:



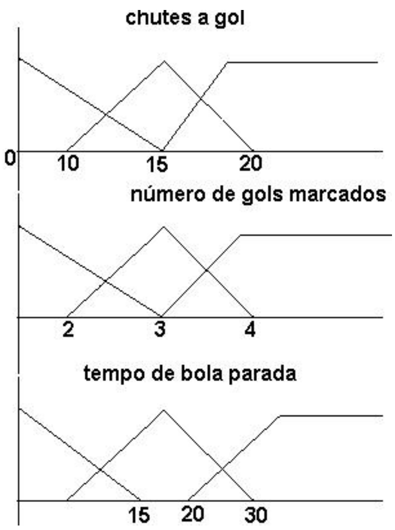
2) a) Dependendo da iluminação da via pública é que se caracteriza a infração

Via Pública	Tipo de infração
não iluminada	gravíssima
pouco iluminada	grave
iluminada	média
muito iluminada	leve

Acredito que numa rua já iluminada o facho de luz não faria uma diferença muito brusca ou gritante. Ao passo que a iluminação da rua aumenta, diminui-se a infração. São como grandezas inversamente proporcionais.

5.6.3 – Problema 3

No campeonato brasileiro de futebol, os jogos podem ser classificados como "bons", "razoáveis" e "fracos". Os critérios adotados para tal classificação são: "chutes a gol", "gols marcados" e "tempo de bola parada". Estas variáveis podem ser classificadas como "alto", "médio" e "baixo", segundo seus graus de pertinência (Veja figuras). Pede-se:



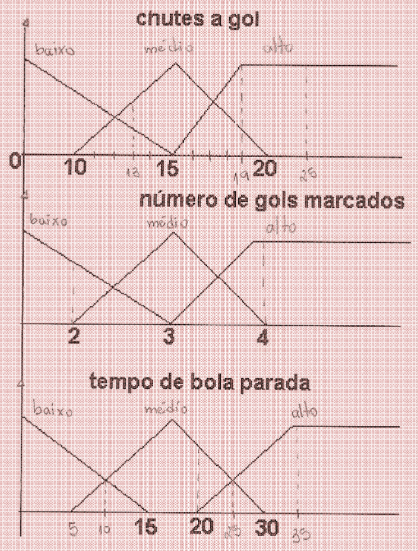
(a) Construa uma base de regras, usando estas três variáveis para classificar um jogo, lembrando que, quanto mais chutes a gol e mais gols marcados, melhor é o jogo e, quanto mais tempo de bola parada, pior é o jogo.

(b) Se um jogo teve 25 chutes a gol, 2 gols marcados e 20 minutos de bola parada, como você o classificaria? E se, dos 25 chutes a gol, tivessem sido marcados 4 gols, como você classificaria esse jogo?

(c) O que seria um jogo pior e um melhor?

Neste momento, achamos necessário propor uma situação problema em que o resolver tivesse que percorrer um caminho inverso ao percorrido até agora,.assim, aqui, a interpretação gráfica é parte do enunciado do problema. Apresentamos a produção de três alunos em diferentes níveis de aprendizagem embora todos eles apresentem respostas significativas e positivas na direção da nossa proposta.

3. No campeonato brasileiro de futebol os jogos podem ser classificados como "*bons*", "razoáveis" e "*fracos*". Os critérios adotados para tal classificação são: "chutes a gol", "gols marcados" e "tempo de bola parada". Estas variáveis podem ser classificadas como "alto", "médio" e "baixo" segundo seus graus de pertinência (veja figuras).



Pede-se

a) Construa uma base de regras, usando estas três variáveis, para classificar um jogo, lembrando que quanto mais chutes a gol e gols marcados melhor é o jogo e, quanto mais tempo de bola parada pior é o jogo.

Um jogo para ser considerado "bom" é necessário haver 19 ou mais "chutes a gol", 4 ou mais "gols marcados" e até 10 minutos de "bola parada".

Um jogo para ser considerado "razoável" é necessário haver de 13 à 17 "chutes a gol", 3 "gols marcados" e de 10 à 25 minutos de "bola parada".

Um jogo para ser considerado "fraco" é necessário haver de 0 à 3 "chutes a gol", de 0 à 2 "gols marcados" e 25 ou mais minutos de "bola parada".

b) Se um jogo teve 25 chutes a gol, 2 gols marcados e 20 minutos de bola parada como você classificaria este jogo?
E se dos 25 chutes a gol, tivessem sido marcados 4 gols como você classificaria este jogo?

Classificaria como um jogo "fraco", pois apesar de terem um número de "chutes a gol" alto, marcaram poucos gols e permaneceram um tempo considerado "médio" de "bola parada".

Classificaria como um jogo "bom", pois os "chutes a gol" e "gols marcados" são números considerados "alto".

c) O que seria um jogo pior e um melhor?

Um jogo pior, seria um jogo com menor número de "chutes a gol" e "gols marcados" e maior tempo de "bola parada", já um melhor jogo, seria o contrário deste.

Outros dois alunos (responderam as questões em grupo):

<u>Respostas Exercício 3</u>

a) **Se** o jogo teve chutes a gol, **então** o jogo foi razoável.
Se o jogo teve gols, **então** o jogo foi razoável.
Se o jogo teve chutes a gol e gols, **então** o jogo foi bom.
Se o jogo teve chutes e gol, gols e bola, **então** o jogo foi razoável.
Se o jogo teve muita bola parada, **então** o jogo foi fraco.

b) Classificávamos com bom, houve muitos chutes, e gols marcados e apenas 20 minutos de bola parada o que representa 18% do tempo do jogo

90 – 100
X – 20
100x = 90.20
100x = 1800
$X = \frac{1800}{100}$
X= 18%

Foi pouca bola parada e um jogo bem movimentado, com 25 chutes e 4 gols o jogo seria muito melhor que o primeiro, classificamos como bom.

c) **Um pior jogo** - Imagine o clássico entre São Paulo e Palmeiras o ano passado, o jogo teve 12 chutes ao gol, nenhum gol marcado e 32 minutos de bola parada. Um jogo fraco.

Um melhor jogo - Outro clássico Corinthians x Santos no primeiro jogo da final deste ano, o jogo teve 36 chutes a gol, 4 gols marcados e 22 minutos de bola parada. Um jogo bom.

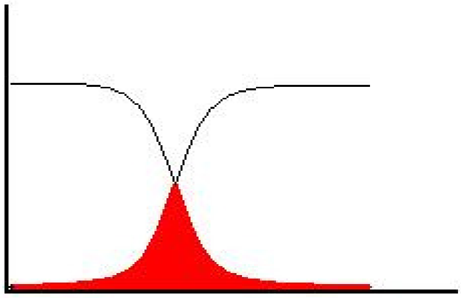
Chegamos a conclusão com base numéricas e com um conta de regra de três. Procuramos resultado de jogos passados para fazer as comparações, usamos resultados reais e o conhecimento em futebol de nos dois

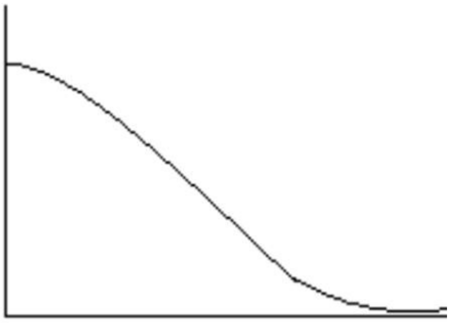
Tempo gastos: 45 minutos.

5.6.4 – Problema 4

No caso do encontro dos rios Negro e Solimões, o que se pode afirmar com relação aos itens (a) e (b)?

(a) Com base no enunciado faça a interpretação da situação representada na figura ao lado



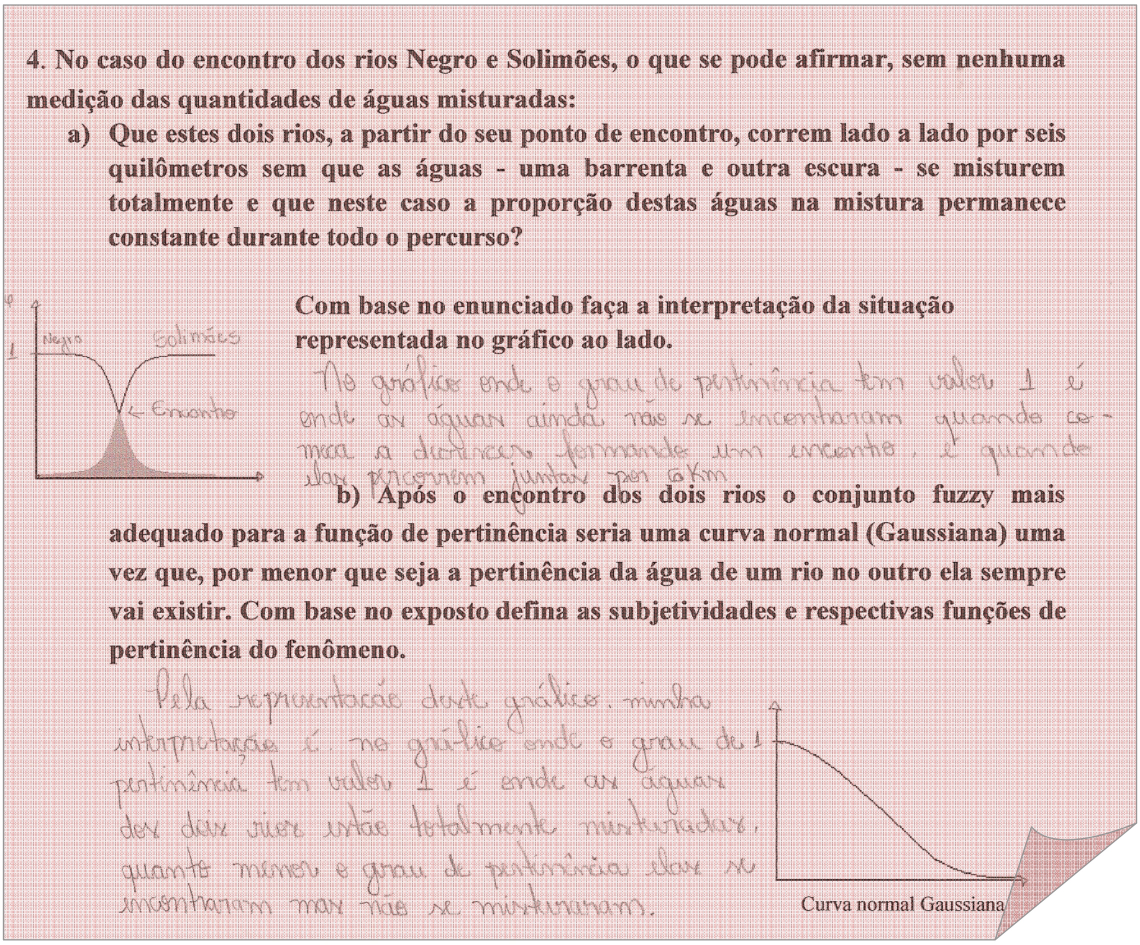


curva normal gaussiana

(b) Após o encontro dos dois rios, o conjunto fuzzy mais adequado para a função de pertinência seria uma curva normal (gaussiana), uma vez que, por menor que seja a pertinência da água de um rio no outro, ela sempre vai existir. Com base no exposto, defina as subjetividades e as respectivas funções de pertinência do fenômeno.

Finalmente o **problema** 4 retoma a questão do encontro dos rios Negro e Solimões.

Aqui, mais uma vez, é possível perceber pela produção escrita dos alunos que houve um avanço substancial e significativo no tratamento e compreensão das questões propostas e no sentido da validação do nosso trabalho. A seguir apresentamos os relatos de alguns alunos:


4. No caso do encontro dos rios Negro e Solimões, o que se pode afirmar, sem nenhuma medição das quantidades de águas misturadas:

a) Que estes dois rios, a partir do seu ponto de encontro, correm lado a lado por seis quilômetros sem que as águas - uma barrenta e outra escura - se misturem totalmente e que neste caso a proporção destas águas na mistura permanece constante durante todo o percurso?

Com base no enunciado faça a interpretação da situação representada no gráfico ao lado.

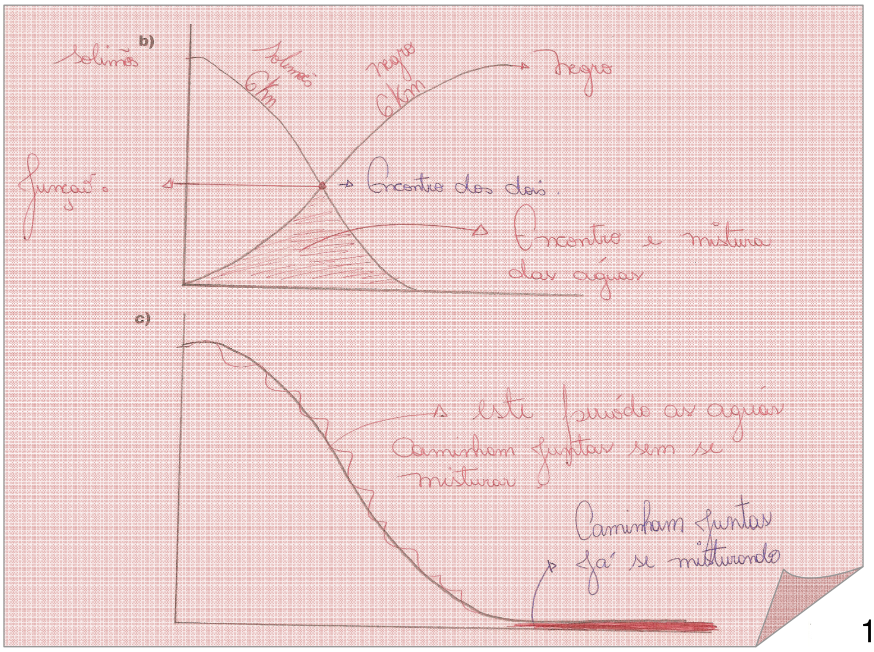
No gráfico onde o grau de pertinência tem valor 1 é onde as águas ainda não se encontraram quando começa a diminuir formando um encontro, é quando elas percorrem juntas por 6Km

b) Após o encontro dos dois rios o conjunto fuzzy mais adequado para a função de pertinência seria uma curva normal (Gaussiana) uma vez que, por menor que seja a pertinência da água de um rio no outro ela sempre vai existir. Com base no exposto defina as subjetividades e respectivas funções de pertinência do fenômeno.

Pela representação deste gráfico, minha interpretação é: no gráfico onde o grau de pertinência tem valor 1 é onde as águas dos dois rios estão totalmente misturadas, quanto menor o grau de pertinência elas se encontraram mas não se misturaram.

Curva normal Gaussiana

Produção escrita de outro aluno:



5.3 Avaliação Fuzzy

Estamos a todo momento,de alguma forma, emitindo juízo de valor sobre as coisas que nos cercam, sobre as mais variadas situações enfrentadas ou fatos observados denominando este processo como avaliatórios. Na escola a avaliação têm se caracterizado como um dos fatores de evasão escolar uma vez que a avaliação do rendimento escolar do aluno é feita tomando-se como base procedimentos rígidos de aferição de valor a situações que estão muito longe de serem lineares, imutáveis e predefinidas.

As questões que envolvem o ensino e aprendizagem bem como aquela que envolvem processos cognitivos têm se tornado objeto de estudo de vários filósofos, psicologos e educadores. Consequentemente avaliar se um aluno aprendeu ou não um determinado conteúdo é tarefa complexa/complicada uma vez que a compreensão das características/ natureza das variáveis envolvida neste processo não posuuem contorno bem definido sobretudo porque elas diferem em detalhes de pessoa para pessoa.

A este respeito o professor Voskoglou (2009) comenta que a aprendizagem/conhecimento que os estudantes tem sobre vários conceitos é usualmente imperfeita, apresentada por diferentes graus de compreenção. Por outro lado existe também por parte do professor dificuldade de precisar o grau de conhecimento adquirido pelo aluno uma vez que para o autor a aprendizagem é substancial

> Quando a maior parte do processo envolve categorização, i.e. a informação fornecida é interpretada em termos de classes de conhecimentos existentes. Então o individuo está apto a relatar/descrever uma nova informação através das suas estruturas de pensamento/conhecimento por muitos descritas como seus esquemas. (Voskoglou (2009,p38)

O autor no mesmo artigo sugere uma avaliação fuzzy e agrupa os alunos segundo quatro estágios de aquisição do conhecimento denominados por ele de ***interpretação, generalização e categorização.*** A função de pertinência é definida como:

$$A_i = \left\{\left(x, \frac{n_{ix}}{n}\right): x \in U\right\}$$

onde A_i, i = 1,2,3, representa os estágios de aquisição do conhecimento mencionados anteriormente - atendido, baixo, intermediário, alto e completo - de cada estágio de desenvolvimento; n_{ix} representa o número de estudantes que atingiram um dos determinados níveis de conhecimento e n representa o número total de alunos.

Tecidas as considerações acima, considerando que o processo de avaliar é extremamente subjetivo e, como temos salientado nos vários capítulos deste trabalho de pesquisa, a teoria dos conjuntos fuzzy foi criada para dar tratamento matemático para situações vivenciadas por nós e que não possuem contornos bem definidos optamos pela modelagem de uma **avaliação fuzzy** das atividades realizadas com os alunos através do uso de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF).

Antes de iniciarmos, lembremos que uma variável lingüística é uma variável cujos valores são nomes de conjuntos fuzzy (Gomide,1995:4). Com efeito, tomaremos como variáveis lingüísticas as seguintes idéias, ``**conjunto fuzzy**'', ``**variável lingüística**'' e ``**base de regras**'' que aqui representam as variáveis de entrada.. Tais variáveis poderão assumir os seguintes valores ``**distante**'', **próximo**'' e **muito próximo**'' uma vez que o que se deseja comprovar é quão próximo os alunos pesquisados estão de utilizar o **pensamento fuzzy**'' na resolução dos problemas propostos. Inicialmente, estes valores serão descritos por intermédio de conjuntos fuzzy trapezoidal e triangular.

Logo, a partir da análise dos problemas/atividade inicial e final dos alunos atribuímos um valor para cada variável em estudoe para cada um dos aluno apresentados na tabela (figura 34)

	Problemas/Atividades Inicial				Problemas/Atividades Final		
Alunos	CF	VL	BR		CF	VL	BR
A1	4	8	3		2	2	2
A2	2	7.3	3		4,5	8	5
A3	0	3	1		0	0	0
A4	1	6.5	4		9	8	2
A5	1	3	1		7	7	5,5
A6	1	2	3		9	8	2
A7	1	3	3		6	8	8
A8	1	2	1		4	6	4
A9	1	2	4		8	7	3
A10	0	1	1		3	0	0
A11	0	1	1		9	5	0
A12	1	1	1		7	5	0
A13	1	2	3		3	4	1
A14	0	3	3		4	4	0
A15	0	1	2		8	5	0
A16	0	2	2		0	0	0
A17	3	4	4		6	2	0
A18	0	2	1		4	6	4
A19	3	2	2		6	2	0
A20	1	2	2		7	2	0
A21	0	1	1		5	6	3
A22	3	5	2		3	3	0
A23	3	5	2		3	3	0
A24	1	4	1		1	1	0
A25	0	2	1		3	2	0
A26	0	2	2		2	2	1
A27	0	1	0		2	2	1
A28	0	2	2		4	4	3
A29	3	4	3		7	6,8	7,5
A30	4	8	4,5		0	0	0
A31	0	1	1		4,5	5,5	5,0
A32	0	1	1		6	6,6	6
A33	1	2	3		0	0	0

Figura 34 - Tabela representativa dos valores atribuídos, pelo pesquisador, ao conjunto de soluções apresentadas por cada aluno na resolução dos problemas/atividades inicial e final onde CF = conjunto fuzzy, VL = váriáveis linguísticas e BR= base de regras.

Em seguida, por meio do programa computacional MATLAB/FUZZY TOOBOX estabelecemos um critério de vavaliação que nos pareceu coerente com as nossas expectativas e determinamos/criamos as funções de pertinência trapezoidal e triangular para cada uma das variáveis de entrada e de saída – avaliação e como método de inferência o método de **Mandani.** (figura 35)

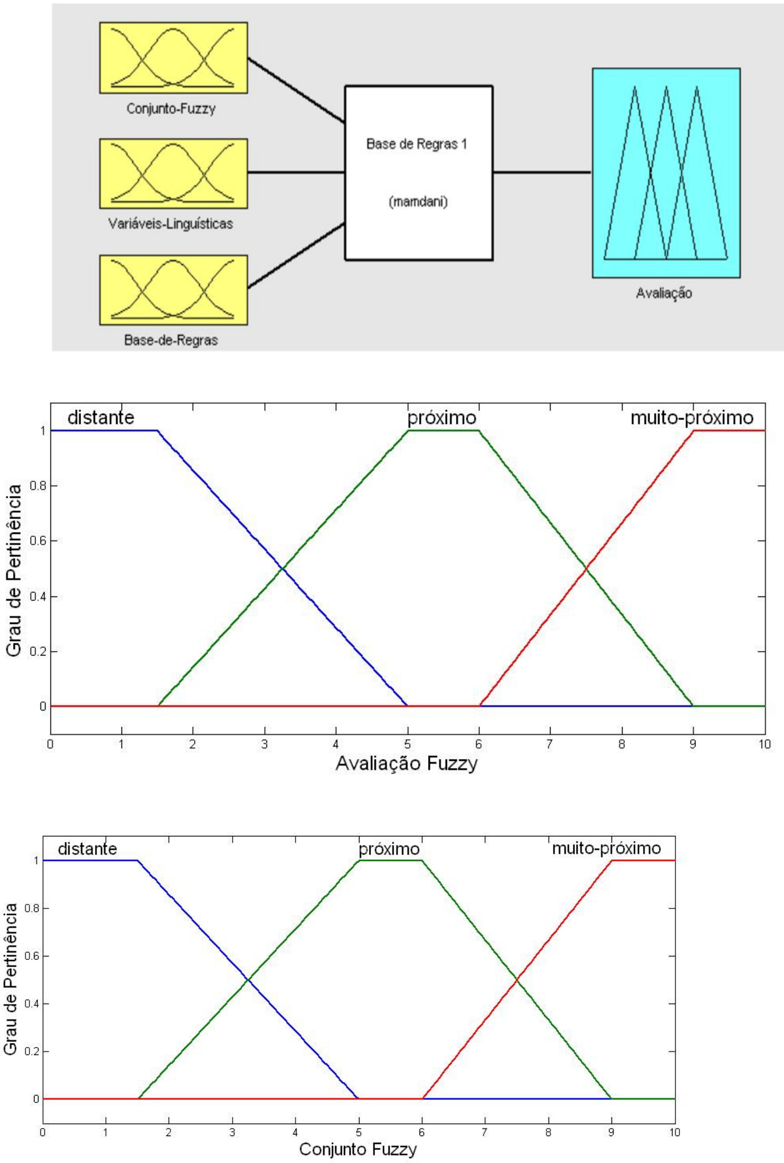


Figura 35: Funções de pertinência de entrada e saída da variável em estudo (avaliação)

As regras lógicas elaboradas, levando em conta as percepções/experiências do pesquisador, tem a seguinte forma:

R_9: **SE** a compreensão do aluno em relação à idéia de conjunto fuzzy *está próxima* **E** a compreensão do aluno em relação à idéia de variável lingüística está *muito próxima* **E** *a* compreensão do aluno em relação à idéia de base de regras é *distante* **ENTÂO** a avaliação final é *próximo.*

O quadro abaixo, denominado base de regras, contempla todas as possíveis implicações lógicas para este processo de avaliação.

Se	Conjunto *Fuzzy*	e	Variáveis Lingüísticas	e	Base de Regras	Então	Avaliação
R1	Muito Próximo		Muito Próximo		Muito Próximo		Muito Próximo
R2	Muito Próximo		Muito Próximo		Próximo		Muito Próximo
R3	Muito Próximo		Muito Próximo		Distante		Próximo
R4	Muito Próximo		Próximo		Muito Próximo		Muito Próximo
R5	Muito Próximo		Próximo		Próximo		Muito Próximo
R6	Muito Próximo		Próximo		Distante		Próximo
R7	Próximo		Muito Próximo		Muito Próximo		Muito Próximo
R8	Próximo		Muito Próximo		Próximo		Muito Próximo
R9	Próximo		Muito Próximo		Distante		Próximo
R10	Próximo		Próximo		Muito Próximo		Muito Próximo
R11	Próximo		Próximo		Próximo		Próximo
R12	Próximo		Próximo		Distante		Próximo
R13	Distante		Muito Próximo		Muito Próximo		Próximo
R14	Distante		Muito Próximo		Próximo		Próximo
R15	Distante		Muito Próximo		Distante		Próximo
R16	Distante		Próximo		Muito Próximo		Próximo
R17	Distante		Próximo		Próximo		Próximo
R18	Distante		Próximo		Distante		Distante
R19	Muito Próximo		Distante		Muito Próximo		Próximo
R20	Muito Próximo		Distante		Próximo		Próximo
R21	Muito Próximo		Distante		Distante		Próximo
R22	Próximo		Distante		Muito Próximo		Próximo
R23	Próximo		Distante		Próximo		Próximo
R24	Próximo		Distante		Distante		Distante
R25	Distante		Distante		Muito Próximo		Próximo
R26	Distante		Distante		Próximo		Distante
R27	Distante		Distante		Distante		Distante

Figura 36. Base de Regras Linguísticas para Avaliação dos trabalhos efetuado

Uma vez percorridos os passos descritos anteriormente, para exemplificar o processo, efetuaremos a avaliação inicial do aluno denominado A_2.(Figura 37)

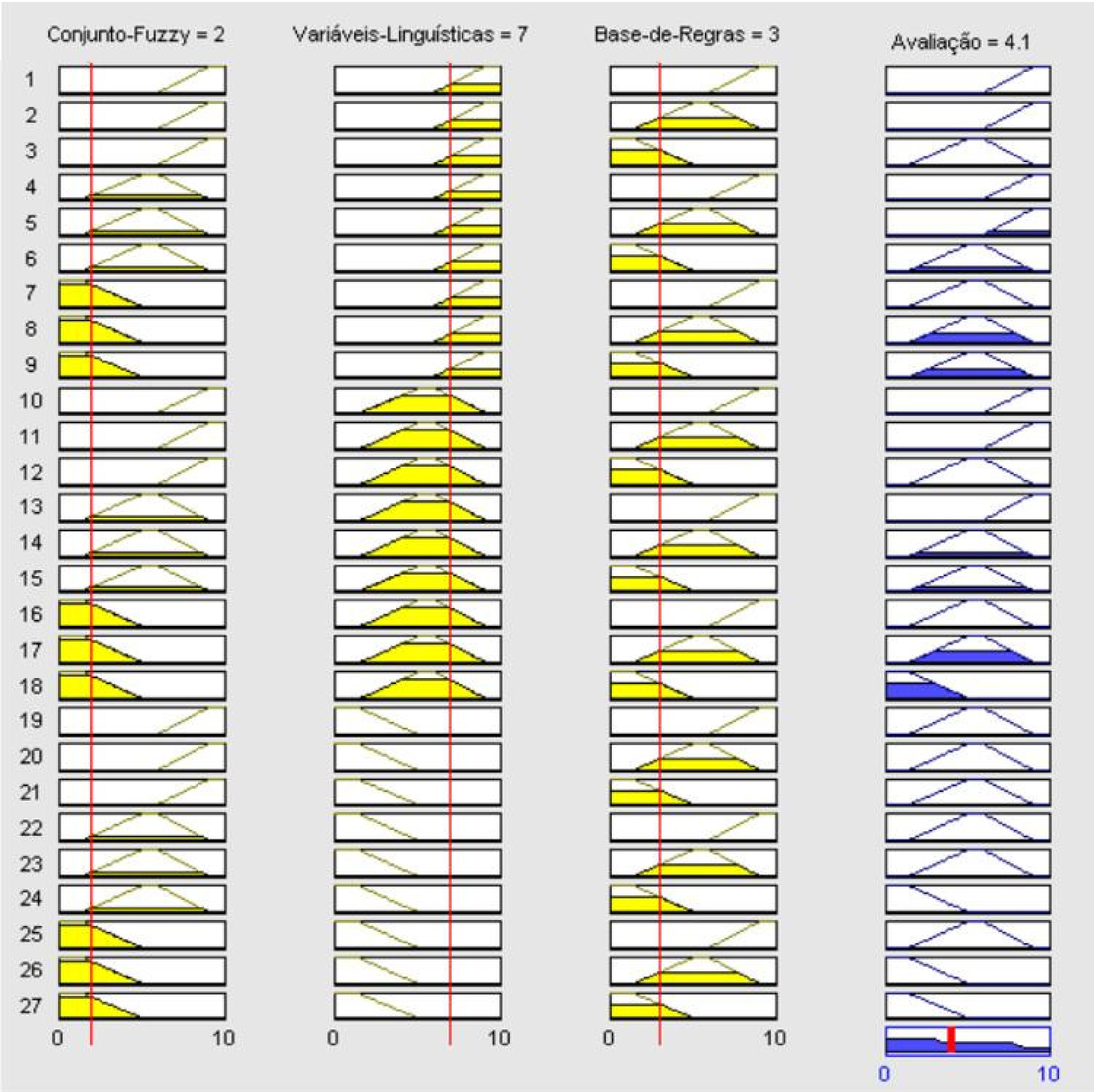


Figura 37: Avaliação Inicial - Aluno A_2

Na figura 37 a nota, atribuída ao aluno após a defuzzificação - transformar o valor fuzzy obtido em um número real - é 4,1.

Chamamos a atenção para o fato de que a Figura 37 apresenta graficamente a base de regras (Figura 36) modulada pelas seguintes funções de pertinência:

$$\varphi_d(A_i) = \begin{cases} 1 \quad para \quad 0 \le A_i \le 1{,}5 \\ \dfrac{5 - A_i}{3{,}5} \quad para \quad 1{,}5 < A_i < 5 \\ 0 \quad para \quad A_i \ge 5 \end{cases} \qquad \varphi_p(A_i) = \begin{cases} 0 \quad para \quad A_i \le 1{,}5 \quad e \quad A_i \ge 9 \\ \dfrac{A_i - 1{,}5}{3{,}5} \quad para \quad 1{,}5 < A_i < 5 \\ 1 \quad para \quad 5 \le A_i \le 6 \\ \dfrac{9 - A_i}{3} \quad para \quad 6 < A_i < 9 \end{cases}$$

$$\varphi_{mp}(A_i) = \begin{cases} 0 \quad para \quad A_i \le 6 \\ \dfrac{A_i - 6}{3} \quad para \quad 6 < A_i < 9 \\ 1 \quad para \quad A_i \ge 9 \end{cases}$$

Onde $\varphi_d, \varphi_p, \varphi_{mp}$ são as funções de pertinência dos estados de compreensão *distante*, *próximo* e *muito proximo*, respectivamente.

Exemplificando,para a regra R_9 da base de regras, o grau de pertinência deste aluno para o estado de compreensão *distante* da variável linguística *conjunto fuzzy* é 0,86;

$$\varphi_d(2) = \frac{5 - 2}{3{,}5} = 0{,}86$$

e conseguentemente para o estado de compreensão *muito próximo* da variável linguística v*ariáveis linguísticas* é o,33;

$$\varphi_{mp}(7) = \frac{7 - 6}{3} = 0{,}33$$

e para o estado de compreensão *distante* da variável linguística *base de regras* é 0,57

$$\varphi_d(3) = \frac{5-3}{3,5} = 0,57$$

Pelo método de Mamdani escolhemos então, o mínimo entre os três graus de pertinência encontrados para a regra considerada obtendo como resultado 0,33 para o estado próximo.

$$\varphi_d(2) \cap \varphi_{mp}(7) \cap \varphi_d(3) = \min\{0,86; 0,33; 0,57\} = \varphi_{R_8} = 0,33/\ próximo$$

Este método repete este procedimento para as 27 regras explicitadas para depois escolher o maior dos valores mínimos obtidos para cada uma das variáveis, *distante*, *próximo* e *muito próximo*.

Assim, a partir da quarta coluna da Figura 37, montamos as seguintes tabelas para simular o resultado final obtido.

distante	R_i	R_{18}	R_{24}	R_{26}	R_{28}
	μ_{Ri}	0,45	0	0	0

próximo	R_i	R_3	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{12}	R_{14}	R_{15}	R_{16}
	μ_{Ri}	0	0,14	0	0,33	0,33	0	0,14	0,33	0

próximo	R_i	R_{17}	R_{19}	R_{20}	R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{25}
	μ_{Ri}	0,42	0	0	0	0	0	0

muito próximo	R_i	R_1	R_2	R_4	R_5	R_{10}	R_{11}	R_{13}
	μ_{Ri}	0	0	0	0,14	0	0	0

$$\varphi(u) = \frac{0{,}45}{distante} \oplus \frac{0{,}42}{próximo} \oplus \frac{0{,}14}{muito\ \ próximo}$$

Cuja representação gráfica é dada por

Figura 38. união das áreas máximas da figura 37

Para defuzzificação, utilizamos o método do centro de área (ver cap 3) e obtivemos como resultado da avaliação do aluno A2, média $\overline{x}_F = 4{,}1$ denominada por nós média fuzzy

Somente a título de comparação calculando, agora a média aritmética convencional para os valores atribuídos a este mesmo aluno, verificamos que este obteve a seguinte média $\overline{x} = \frac{3+2+7}{3} = 4 < 4{,}1 = \overline{x}_F$. Observa-se que ambas as médias são muito próximas.

Com este valor obtido voltamos novamente à função de pertinência da avaliação e procuramos o grau para tomada de decisão.

Neste caso verificamos que o valor $4{,}1$ possui um grau de pertinência de $0{,}7$ para a variável linguística próximo e $0{,}29$ para a variável linguística distante, permitindo que o avaliador conclua que este aluno possui algumas noções iniciais a respeito das idéias que iremos desenvolver.

Finalmente na avaliação efetuada após o curso ministrado, o mesmo aluno A_2 para as entradas $x_1 = 4{,}5$, $x_2 = 8$ e $x_3 = 5$ obteve como resultado da avaliação $x = 6{,}67$, conforme a Figura 39.

O gráfico deixa evidente que houve um crescimento no grau de compreensão deste aluno $\varphi(x) = 0{,}7$ para a variável próximo e $\varphi(x) = 0{,}29$ para a variável muito próximo.

Entretanto, inspirados na teoria da ``zona proximal de desenvolvimento" avaliamos que a aprendizagem potencial do aluno em relação ao pensamento fuzzy aumentou, mas ainda está distante de uma aprendizagem real.

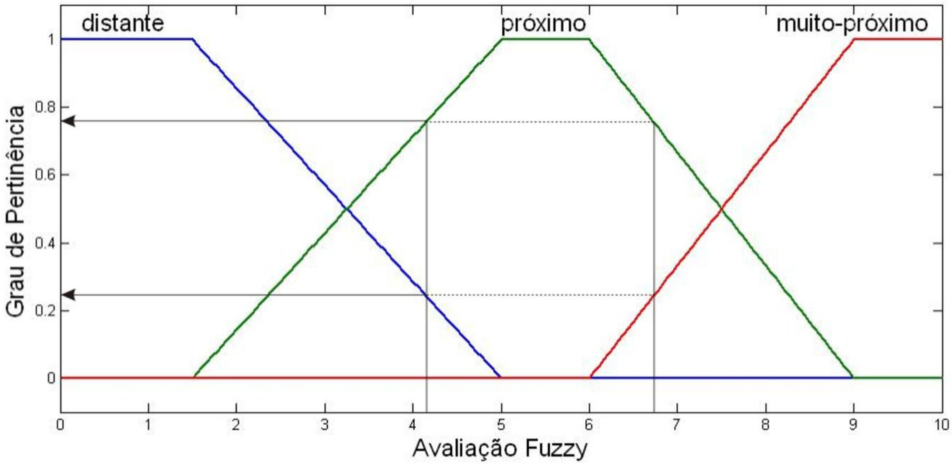


Figura 39. Saída do processo de avaliação.

O processo feito para o aluno A_2 deve ser feito para todos os alunos, antes e depois de ministrado o curso em questão. A Tabela (Figura 40) mostra os resultado da avaliação dos alunos antes e depois do curso.ministrado.

A análise eftuada acima mostra que diversos fatores, que diversos fatores tais como funções de pertinência, método de defussificação, forma das funções de pertinências influem no cálculo da média dos alunos. Desta forma estes fatores considerados conjuntamente aliados a aspectos práticos podem fornecer várias opções ao avaliador em relação às suas expectativas.

	Problemas/Atividades Inicial							Problemas/Atividades Final					
Alunos	CF	VL	BR	$\overline{x}_F$	$\overline{x}$	$\lvert\overline{x}-\overline{x}_F\rvert$		CF	VL	BR	$\overline{x}_F$	$\overline{x}$	$\lvert\overline{x}-\overline{x}_F\rvert$
A1	4	8	3	5,37	5	0,37		2	2	2	2,622	2	0,62
A2	2	7.3	3	4,1	4	0,1		4,5	8	5	6,64	5,6	1,04
A3	0	3	1	2,02	1,33	0,69		0	0	0	1,75	0	1,75
A4	1	6.5	4	4,73	3,83	0,9		9	8	2	5,52	6,33	0,81
A5	1	3	1	2,02	1,66	0,36		7	7	5,5	5,82	6,5	0,68
A6	1	2	3	2,8	2	O,8		9	8	2	5,52	6,3	0,78
A7	1	3	3	3,81	2,33	1,48		6	8	8	6,71	7,3	0,59
A8	1	2	1	1,83	1,33	0,5		4	6	4	4,37	4,66	0,29
A9	1	2	4	2,62	2,33	0,29		8	7	3	6,02	6	0,02
A10	0	1	1	1,75	0,66	1,09		3	0	0	2,02	1	1,02
A11	0	1	1	1,75	O,66	1,09		9	5	0	5,34	4,66	0,68
A12	1	1	1	1,75	1,00	O,75		7	5	0	5,32	4	1,32
A13	1	2	3	2,8	2	0,8		3	4	1	3,87	2,66	1,21
A14	0	3	3	3,81	2	1,81		4	4	0	4,72	2,66	2,06
A15	0	1	2	1,83	1	0,83		8	5	0	5,32	4,33	0,99
A16	0	2	2	2,48	1,33	1,15		0	0	0	1,75	0	1,75
A17	3	4	4	4,65	3,66	0,99		6	2	0	2,48	2,66	0,18
A18	0	2	1	1,83	1	O,83		4	6	4	4,73	4,66	0,07
A19	3	2	2	2,96	2,33	0,63		6	2	0	2,48	2,66	0,18
A20	1	2	2	2,48	1,66	0,82		7	2	0	3,5	3	0,5
A21	0	1	1	1,75	0,66	1,09		5	6	3	5,31	4,66	0,65
A22	3	5	2	3,87	3,33	0,54		3	3	0	3,81	2	1,81
A23	3	5	2	3,87	3,33	0,54		3	3	0	3,81	2	1,81
A24	1	4	1	1,94	2	0,06		1	1	0	1,75	0,66	1,09
A25	0	2	1	1,83	1	0,83		3	2	0	2,8	1,66	1,14
A26	0	2	2	2,48	1,33	1,15		2	2	1	2,48	1,66	0,82
A27	0	1	0	1,75	0,33	1,42		2	2	1	4,65	3,66	0,99
A28	0	2	2	2,48	1,33	1,15		4	4	3	6,2	7,1	0,9
A29	3	4	3	3,87	3,33	0,54		7	6,8	7,5	6,2	7,1	0,9
A30	4	8	4,5	6,25	5,5	0,76		0	0	0	1,75	0	1,75
A31	0	1	1	1,75	0,66	1,09		4,5	5,5	5,0	5,34	5	0,34
A32	0	1	1	1,75	2,66	1,09		6	6,6	6	5,59	6,2	0,61
A33	1	2	3	2,8	2	0,8		0	0	0	1,75	0	1,75

Figura 40. Tabela de avaliação inicial e final dos alunos onde,

$\overline{x}_F$= média *fuzzy* ou esperança *fuzzy*, $\overline{x}$= média aritmédica

Finalmente, a partir dos dados da tabela (figura 40) construímos os seguintes gráficos para melhor analisar os resultados obtidos da atividade desenvolvida.

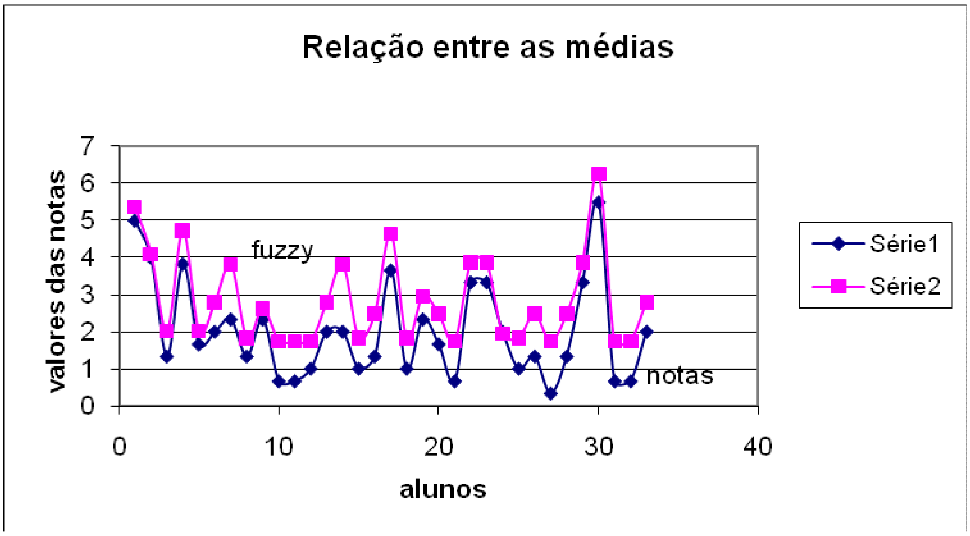


Figura 41.Gráfico comparativo entre a média clássica (série 1) e a média fuzzy (série 2) na avaliação inicial.

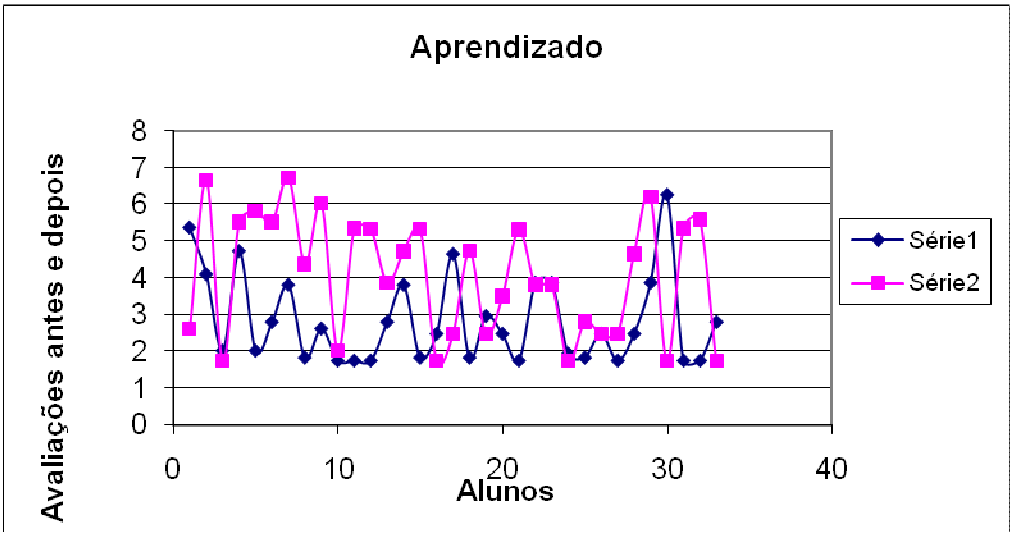


Figura 42. Gráfico comparativo entre as médias fuzzy inicial (série 1) e final (série 2)

Dos gráfico podemos concluir: a)as avaliações fuzzy são superiores às notas para cada alunos, b) houve um aprendizado significativo, embora em alguns casos o estudo formal tenha prejudicado a intuição própria do aluno.

CONSIDERAÇÕES

CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Ao longo deste trabalho apresentei muitas informações sobre a Teoria Fuzzy, das especificidades das questões tratadas para compreendê-la destacando uma semelhança estrutural de natureza matemática com a matemática formal determinística, procurando apontar as dificuldades e facilidades ao tomar o caminho de uma ou de outra em situações de ensino. Como todo trabalho de pesquisa de cunho acadêmico educacional, este também é resultado de um olhar da pesquisadora sobre o tema em um dialogo permanente com diversos interlocutores. Cabe agora nessa etapa de conclusão retomar algumas questões especialmente relevantes no processo de análise como um todo e, se possível, encaminhar sugestões para futuras pesquisas na área.

De modo a encaminhar as considerações finais do trabalho – aqui denominadas "preliminares" dada a nossa certeza que há muito que estudar sobre o tema – consideramos importante fazer um retrospecto do caminho percorrido para encontrar respostas às nossas questões de pesquisa assim como construir/elaborar o movimento que levou aos resultados.

Numa primeira etapa procuramos mostrar o nosso plano de pesquisa – em especial, os pressupostos teóricos que poderiam dar sustentação para responder o problema formulado – assim como traçar uma justificativa para a investigação em foco de cunho qualitativo e destacar os objetivos da mesma. Os fatores quantitativos da análise, por sua vez, estavam já apontados na direção de perceber o pensamento matemático - dos alunos pesquisados mais ou menos alinhado na direção do pensamento fuzzy.

Algumas considerações de cunho filosófico sobre as origens do pensamento matemático, o rigor da matemática formal – determinística – foram discutidos numa etapa seguinte, assim como aqueles que consideram o pensamento intuitivo proporcionando estudos matemáticos de distintos tipos de *incerteza.* Uma etapa seguinte desta trajetória da pesquisa tratou especialmente da apresentação de modo formal alguns conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos fuzzy e da Lógica Fuzzy, a qual situa as raízes e os rumos deste trabalho, isto é, as questões da lógica fuzzy são não somente o meio desta pesquisa como o fim da mesma.

De modo a responder as questões principais da pesquisa " Quais os pressupostos teóricos da Teoria *Fuzzy* e quais as possibilidades de reconhecimento do seu valor e seu papel para a Educação Matemática?" e "Como o pensamento matemático do aluno lida com o raciocínio fuzzy**? "** nos aproximamos dos alunos do Curso de Licenciatura das Faculdades Unificadas da Fundação Educacional de Barretos - UNFEB por meio de dois questionários e um mini-curso ministrado pelo pesquisador, nesta ordem questionário, mini-curso e questionário. O primeiro questionário instigava o uso de variáveis subjetivas na solução de questões. O mini-curso, posterior ao primeiro questionário, teve como foco central a resolução de um (mesmo) problema utilizando matemática clássica e matemática fuzzy. O questionário final, de cunho avaliativo, verificava o uso pelo aluno das ferramentas da teoria fuzzy em problemas semelhantes aos anteriores.

Assim , um dos pilares desta investigação tratou do estabelecimento de relações (matemáticas) realizadas pelos alunos num ambiente de sala de aula, o qual serviu, por um lado, como organizador da nossa visão frente aos indícios de apreensão dos instrumentos fuzzy pelo aluno e, por outro lado, passou a ser um critério para obtenção de evidências em termos de análise, dado o contexto em termos de ensino e aprendizagem próprio da pesquisa.

Vale aqui destacar que, durante todo o processo de investigação estivemos colocados em um estado de reflexão sobre a possibilidade de perceber *o valor e o papel da lógica fuzzy na solução de problemas reais*, dada a característica das suas ferramentas para lidar com questões subjetivas, uma vez que a solução de problemas provenientes do mundo real está carregada de relações construídas no mundo interno do resolvedor – do sujeito-resolvedor consigo mesmo.

Desse modo, consideramos que assim como têm sido notada as controvérsias sobre a matemática que os alunos devem aprender, por que razões a deveriam aprender e como é que ela devia ser ensinada – de modo a exercitar as capacidades intelectuais de cada um e ganhar confiança no próprio raciocínio matemático - aqui também a apresentação da matemática fuzzy impulsionaram os nossos argumentos para incluí-la nos currículos matemáticos, mantendo ou eliminando outras matemáticas.

Na verdade, como educadores matemáticos "escutamos" os matemáticos – em especial, os matemáticos aplicados - os quais começaram a perceber que um currículo poderia ser revisto de modo a acompanhar as discussões dos métodos que tomam como ponto de partida problemas reais – Modelagem Matemática, investigações e Formulação de Problemas. Isto é, dado que o rigor e a precisão da matemática formal determinística não estariam dando conta de tais soluções, seria preciso de estruturas matemáticas que fornecessem fundamentos que ampliassem as teorias matemáticas clássicas, como a teoria dos conjuntos fuzzy. Se assim podemos dizer, em nível curricular o acento deveria ser mudado para a matemática aplicada, como constitutiva de uma melhor interpretação matemática quando os problemas e as soluções têm origem no mundo real.

Já em termos de finalização , vale aqui destacar que encontro dos alunos – no decorrer na pesquisa - com a teoria fuzzy se caracterizou por momentos de um trabalho profícuo, ajudando-os a trazer a tona soluções de problemas matemáticos cujo tratamento levou em conta a subjetividade desses resolvedores. Em outras palavras, os problemas apresentados e discutidos na pesquia, não postos para o ambiente da matemática tradicional clássica , remeteram o resolvedor para uma atmosfera de incerteza, provocando a opinião e interpretação dos mesmos.

Desse modo, ao final deste trabalho podemos considerar que:

- dos objetivos em relação à atuação/manifestação dos alunos frente aos probelmas propostos, alguns se colocaram mais predispostos como resolvedores – com colocações mais pertinentes e elabordas – quando fizeram uso somente da intuição, ou seja de uma "matemática intuitiva" – não precisando se prender ao registro formal. Outros, que não se manifestaram de modo tão intuitivo, se mostraram envolvidos diante da solução com os regitros fuzzy. Outros ainda, se mostraram especialmente envolvidos – superando dificuldades com facilidade - nos dois momentos, frente aos dois tipos de soluções.

- a superação das dificuldades para o uso da lógica fuzzy passa pela necessidade do confronto inicial com problemas que pode fazer uso do pensamento intuitivo, aproximado e impreciso, porém significativos e criativos em termos matemáticos.

- quando o conhecimento (matemático) é resultado de uma ação frente a situações/contradições que emergem da realidade, fica mais e mais evidente que este é, ao mesmo tempo, resultado de atividade mental (cognição) e produto criativo dessa atividade.

E aqui, de fato finalizando esta nossa busca em introduzir o pensamento fuzzy como suporte metodológico da educação matemática que leva em conta situações-problema que emergem da realidade e questões que dela decorrem, trazemos aqui as palavras de Machado (1990, p.157), colocadas em sua pesquisa de doutorado referente a um estudo também especialmente inovador na área:

> [...] nenhum vento é capaz de ajudar um barco cujo rumo não está definido. Assim, ainda que tenhamos consciência dos poucos passos que avançamos no sentido da operacionalização das idéias acordadas, sentimo-nos como uma promissora viagem que, ao invés de estar chegando ao fim, certamente apenas acabou de começar.

REFERÊNCIAS

REFERÊNCIAS

AMENDOLA, M. e SOUZA,A.L. Manual do uso da teoria dos conjuntos fuzzy no MATLAB 6.1. FEAGRI/UNICAMP, 2003.

ARAUJO, Irene Coelho de. Crenças de auto-eficácia, autoconceito e desempenho em matemática. Scielo. 2005.

ARAÚJO, Carlos Henrique. Para Superar o Fracasso Escolar: **Jornal de Brasília**. Edição de 03/10/2005.

ASSMANN, H. Metáforas Novas para Reencantar a Educação: epistemologia e didática. Piracicaba: UNIMEP, 1996.

CARVALHO, Marília Pinto de. Gênero na sala de aula: a questão do desempenho escolar. In: MOREIRA, Antonio Flavio; CANDAU, Vera Maria. (Org.). Multiculturalismo: diferenças culturais e práticas pedagógicas. Petrópolis: Vozes, 2008. p. 90-124.

CARVALHO, Marília Pinto de. O fracasso escolar de meninos e meninas: articulações entre gênero e cor/raça. In: PISCITELLI, Adriana; MELO, Hildete Pereira de; MALUF, Sônia Weidner; PUGA, Vera Lucia. (Org.). Olhares feministas. Brasília: Ministério da Educação/Unesco, 2009. p. 307-340.

CARVALHO, Marília Pinto de. Sucesso e fracasso escolar: uma questão de gênero. In: Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 29, n. 01, p. 185-193, 2003.

CHACIN, R. J. O. Sociedad e Investigación: Borrosidad. Universidad Central de Venezuela, Comisión de Estúdios Interdisciplinares Publicaciones, año 2, n.4, octubre.1999.

CRAWFORD, R. Na Era do Capital Humano. São Paulo: Atlas, 1994.

CREMA, Roberto. Introdução à visão holística. São Paulo: Summus, 1989.

CUNHA, Marisa Ortegoza da. Lógica e senso comum: o diálogo precisão/ambigüidade. In: SEMINÁRIO DA PÓS-GRADUAÇÃO, 2004, Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. Comunicação. Material de circulação interna.

BARROS, L. C., BASSANEZI, R. C. Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática. Campinas, SP: UNICAMP/IMECC – Textos Didáticos, v.5, 2006.

BASSANEZI, R. C. Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática. São Paulo: Contexto, 2002.

BASSANEZZI, Rodney Carlos. Modelling as a teaching-learning strategy. In: For the learning of Mathematics — FLM Publishing Association, Canada, v. 14, n. 2, p. 31-35, 1994.

BEZERRA, Keli Mota. O professor de matemática na periferia: acertando o passo para o conhecimento (primeiro) do educando. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. 2009.

BISHOP, Alan J. Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1988

BLACKBURN, Simon. Dicionário de Filosofia. Tradução MURCHO, Desidério e outros. Gradiva

Publicações Ltda, p 108, 1997.

BLUM, Werner. Applications and modelling in Mathematics teaching — a review of arguments and instructional teaching. In: International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications, 4th, Roskilde University, 1990.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de Maria Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Lei de Diretrizes e Bases da Educação (9394/96). Brasília, 1996.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Secretaria do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Tendências na Educação Matemática. Brasília, INEP/MEC, ano 14, n. 62, abril/jun. **1994.**

BUNGE, M. Ciência e desenvolvimento. Belo Horizonte/São Paulo: Itatiaia/EDUSP,

D. Gil Perez e M. G. Ozamis, Ensen~anza de Las Cienciasy la Matem_atica, Editorial Popular S.A / Minist_erio de Educacion y Ciencia, Espanha, 1992.

D' AMBROSIO, Ubiratan; DOMITE, Maria do Carmo Santos. The potentialities of (ethno) mathematics education. In: ATWEH, Bill e outros (Orgs.). Internationalisation and Globalisation in Mathematics and Science Education. Dordrecht, the Netherlands: Springer v. 1, p. 1-544, 2007.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Etnomatemática: uma proposta pedagógica para a civilização em mudança. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ETNOMATEMÁTICA. Anais. São Paulo: FEUSP, 2000. p. 143-152.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Matemática, ensino e educação: uma proposta global. In: Temas e Debates — Sbem, Rio Claro, ano 4, v. 3, p. 1-15, 1991.

DAVIS, P. H., HERSH, R. A experiência matemática. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Handbook of qualitative research. Thousand Oaks: Sage, 1994.

DOMITE, Maria do Carmo Santos. A formação de professores como uma atividade de formulação de problemas: educação matemática no centro das atenções. In: CARVALHO, Anna Maria Pessoa de (Org.). Formação Continuada de Professores- uma releitura das áreas de conteúdos. 1 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, v. 1, p. 39-62, 2003.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en Didactique de Mathématiques, v.7, n.2, 1986.

Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Organización de EstadosIberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Algunas tendencias innovadorasespontáneas: Aportes y limitaciones. Internet, 2002. (En http://campus-oei.org/oeivirt/gil01.htm) 69.

FAGNANI, G. D. C. Relações entre as orientações motivacionais e o desempenho escolar de alunos da sétima série do ensino fundamental, na resolução de equações do primeiro grau em matemática. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

FASHEH, MUBNIR. Matemática, Cultura e Poder. Comunicação apresentada no Four International Conference in Mathematical Education - IV ICME, em agosto 1980, em BerKeley, Califirnia – Traduação: Maria Ines Santos Domite e Maria do Carmo Domite, Julho/1998. Este capítulo apareceu primeiro em "For the learning of mathematics" 3(2):2-8,em1982.

FERNÁNDEZ DE CARRERA, Elena; ARRALDE, Zulma; MAMUT, Nélida De Dergesio. Matemática o matemáticas? ¿Indistintos o distintos? Disponível em: http://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8180/publicaciones/bitstream/1/1754/4/AU_2006_8_pag_25_36.pdf, 2006. Acesso em: outubro 2009.

Ferreira, Marina Kawall Leal. Idéias matemáticas de povos culturalmente distintos. São Paulo:Global,2002.

FREIRE, P. Pedagogia da autonomia. 5 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1997.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. História oral e educação matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho et al. Pesquisa qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GIL PEREZ, D; GUZMAN OZÁMIZ M. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e innovaciones. Disponível em: http://www.oei.es/oeivirt/ciencias.htm

GIL, A. C. Pesquisa Social. São Paulo: Atlas, 1994.

GUZMÁN OZÁMIZ, Miguel de; PÉREZ, Daniel Gil. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. In: Tendencias e innovaciones. España: Editorial Popular S.A., 1993.

__________________. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e innovaciones/ Daniel GilPérez y Miguel de Guzmán Ozámiz. España: Editorial Popular S.A., 1993. 200 p.

KLINE, Morris. Mathematics in Western Culture. London: Pelican, 1972.

KOSKO,B. Fuzzy Thhinking – the new science of fuzzy logic. Hiperion, New York,1993.

KUHN, T. S. A Estrutura das Revoluções Científicas. Coleção Debates. São Paulo: Perspectiva, 1994.

L.A.Zadeh, Fuzzy Sets,in "Information and control", VIII(1965),PP.338-56

Latour,B. Ciências em ação. São Paulo: Editora Unesp, 2000

LEAL FERREIRA, Mariana Kawall. Ideias matemáticas de povos culturalmente distintos.Org. Global Editorial-Fapesp: São Paulo, 2002.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. A pesquisa em Educação: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, N J. Matemática e Realidade. 6 ed. São Paulo: Cortez, 2005.

MACHADO, Nilson José. Matemática e Língua Materna - análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez Editora. 1990

MENDONÇA-DOMITE, M. C. O desafio da educação matemática: da pluralidade aos focos de interesse. Tese (Livre-docência) — Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2005. p. 33.

MENDONÇA-DOMITE,M.C.Resolução de Problemas pede (re)formulação . In: Paulo Abrantes; João Pedro da Ponte. (Org.). Investigação Matemática na sala de aula e no currículo. 1 ed. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática-APM, 1999, v. 1, p. 15-34.

MIORIM, M. A. Introdução à história da Educação Matemática. São Paulo: Atual, 1998.

MODESTO, Marco Antonio. Formação continuada de professores de matemática: compreendendo perspectivas, buscando caminhos. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2002.

MORIN, Edgar. A cabeça bem-feita. 15. Rio de Janeiro: ed. Bertrand Brasil, 2008.

PISA, 2000. Disponível em: <www.pisa.oecd.org>. Acesso em: 23 jan. 2008.

PISA, 2003. Disponível em: <www.pisa.oecd.org>. Acesso em: 23 jan.2008.

PISA, 2006. Disponível em: <www.pisa.oecd.org>. Acesso em: 23 jan.2008.

PONTE, João Pedro. Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In: BROW, Margaret et al. Educação matemática: coleção temas de investigação. Portugal: Instituto de Inovação Educacional, 1992. p. 184-239.

SCHOBER, Juliana. Matematização da biologia não é novidade da ciência moderna.Revista Comciência. Disponível em <http://www.comciencia.br/reportagens/bioinformatica/bio02.shtml>. Acesso em: 2/3/10.

SHAW, I. S.; SIMÕES, M. G. Controle e modelagem fuzzy. São Paulo: Edgard Blucher;Fapesp, 1999.

SILVA, Vanisio Luiz da. Educando negro na escola pública: uma abordagem etnomatemática. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

Souza, Liliane Ferreira Neves Inglez de ; BRITO, Marcia Regina F . Crenças de auto-eficácia, autoconceito e desempenho em matemática. Estudos de Psicologia (PUCCAMP. Impresso), v. 25, p. 193-201, 200

SOUZA, Liliane Ferreira Neves Inglez de; BRITO, Marcia Regina Ferreira. Crenças de auto-eficácia, autoconceito e desempenho em matemática. Estudos de Psicologia Campinas: PUCCAMP, v. 25, p. 193-201, 2008.

TEDESCO, Juan Carlos. A qualidade da Educação Básica: as multideterminações da qualidade. In: CICLO DE DEBATES, 22 jun. 2007, FE-USP e IEA, São Paulo.

VAITSMAN, Jeni. Subjetividade e paradigma de conhecimento. Boletim Técnico do Senac. São Paulo, v. 21, n. 2, maio-ago. 1995.

ZADEH, Lotfi A. Fuzzy sets. Information and Control — Department of Electrical Engineering and Eletronic Research Laboratory, University of California, Berkeley, Califórnia, n. 8, p. 338-353, 1965.