

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL**  
**FACULDADE DE EDUCAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO**

**Marisa Rosâni Abreu da Silveira**

**PRODUÇÃO DE SENTIDOS E CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS**  
**NA RELAÇÃO ENSINO/APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA**

Porto Alegre

2005

**Marisa Rosâni Abreu da Silveira**

**PRODUÇÃO DE SENTIDOS E CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS  
NA RELAÇÃO ENSINO/APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA**

*Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Educação da Faculdade de Educação da Universidade  
Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a  
obtenção do título de Doutora em Educação.*

Orientadora:

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Nadja Hermann**

Porto Alegre

2005

**DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO-NA-PUBLICAÇÃO (CIP)****S587p Silveira, Marisa Rosâni Abreu da**

Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática / Marisa Rosâni Abreu da Silveira. – Porto Alegre : UFRGS, 2005.  
f.

**Tese (doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2005, Porto Alegre, BR-RS. Orientadora: Nadja Mara Amilibia Hermann.**

1. **Matemática – Ensino. 2. Conceito matemático – Produção de sentido. 3. Matemática – Filosofia – Lógica. I. Hermann, Nadja Mara Amilibia II. Título.**

**CDU – 51:37**

**Marisa Rosâni Abreu da Silveira**

**PRODUÇÃO DE SENTIDOS E CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS  
NA RELAÇÃO ENSINO/APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA**

*Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Educação da Faculdade de Educação da Universidade  
Federal do Rio Grande do Sul como requisito para a  
obtenção do título de Doutora em Educação.*

Aprovada em 08 de julho de 2005.

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Nadja Hermann - UFRGS – Orientadora

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Gelsa Knijnik  
(Professora da UNISINOS)

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Margareth Schäffer  
(Professora da UFRGS)

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Ocsana Danyluk  
(Professora da Universidade de Passo Fundo)

*Dedico este trabalho:*

*à Thaís, minha querida filha.*

*Agradeço*

*À Nadja Hermann, por sua orientação e estímulo no decorrer da pesquisa.*

*Ao Marco Panza, por sua gentileza em me acolher na Université de Paris VII e por sua dedicação nesta pesquisa.*

*À CAPES, por me oportunizar o contato com filósofos franceses que discutem a Matemática.*

*Aos meus professores e alunos, com quem muito aprendi.*

*Aos meus pais e amigos, pelo afeto e carinho.*

## RESUMO

Esta tese tem o objetivo de mostrar que o sujeito aprendente, ao se deparar com um conceito matemático já construído por ele, pode, em outro contexto, atribuir-lhe novos sentidos e re-significá-lo. Para tanto, a investigação se apóia em duas teorias filosóficas: a filosofia de Immanuel Kant e a filosofia de Ludwig Wittgenstein. Também buscamos subsídios teóricos em autores contemporâneos da filosofia da matemática, tais como Gilles-Gaston Granger, Frank Pierobon, Maurice Caveing e Marco Panza. No decorrer do processo da aprendizagem, o conceito matemático está sempre em estado de devir, na perspectiva do aluno, mesmo que este conceito seja considerado imutável sob o ponto de vista da lógica e do rigor da Matemática. Ao conectar o conceito com outros conceitos, o sujeito passa a reinterpretá-lo e, a partir desta outra compreensão, ele o reconstrói. Ao atribuir sentidos em cada ato de interpretação, o conceito do objeto se modifica conforme o contexto. As estruturas sintáticas semelhantes, em que figura o objeto, e as aparências semânticas provenientes da polissemia da linguagem oferecem material para as analogias entre os conceitos. As conjeturas nascidas destas analogias têm origem nas representações do objeto percebido, nas quais estão de acordo com a memória e a imaginação do sujeito aprendente. A imaginação é a fonte de criação e sofre as interferências das ilusões provenientes do ato de ver, já que o campo de visão do aluno está atrelado ao contexto no qual se encontra o objeto. A memória, associada às experiências vividas com o objeto matemático e à imaginação, oferece condições para a re-significação do conceito. O conceito antes de ser interpretado pelo aluno obedece às exigências e à lógica da matemática, após a interpretação depende da própria lógica do aluno. A modificação do conceito surge no momento em que o sujeito, ao interpretar a regra matemática, estabelece novas regras forjadas durante o processo de sua aplicação. Na contingência, o aluno projeta sentidos aos objetos matemáticos (que têm um automovimento

previsto), porém a sua imaginação inventiva é imprevisível. Nestas circunstâncias, o conceito passa a ser reconstruível a cada ato de interpretação. As condições de leitura e de compreensão do objeto definem a construção do conceito matemático, a qual está em constante mudança.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem da Matemática, Conceito Matemático, Re-significação do Conceito Matemático, Erro do Aluno na Matemática .

## RÉSUMÉ

Cette thèse a pour but de montrer que le sujet apprenant en face d'un concept mathématique déjà construit par lui, peut, dans un autre contexte, lui attribuer de nouveaux sens et le resignifier. Pour ce faire, l'investigation s'appuie sur deux théories philosophiques : la philosophie d'Immanuel Kant et la philosophie de Ludwig Wittengstein. Nous recherchons aussi des ressources théoriques chez des auteurs contemporains de la philosophie de la mathématique, comme Gilles-Gaston Granger, Frank Pierobon, Maurice Caveing et Marco Panza. Au courant du processus de l'apprentissage, le concept mathématique est toujours en état de "devenir", dans la perspective de l'élève, même si ce concept est considéré immuable au point de vue de la logique et de la rigueur de la Mathématique. Quand il relie le concept à d'autres concepts, le sujet le réinterprète à partir de cette autre compréhension, il le reconstruit. En attribuant des sens à chaque acte d'interprétation, le concept de l'objet se modifie selon le contexte. Les structures syntaxiques semblables où figure l'objet, et les apparences sémantiques qui viennent de la polysémie du langage offrent du matériel pour les analogies entre les concepts. Les conjectures issues de ces analogies, viennent des représentations de l'objet perçu, et qui correspondent avec la mémoire et à l'imagination du sujet apprenant. L'imagination est la source de création et subit les interférences des illusions venant de l'acte de voir, puisque le champ de vision de l'élève est attelé au contexte dans lequel se trouve l'objet. La mémoire, associée aux expériences vécues avec l'objet mathématique et à l'imagination, offre des conditions pour la re-signification du concept. Le concept avant d'être interprété par l'élève obéit aux exigences et à la logique de la mathématique, après l'interprétation, le concept dépend de la logique de l'élève. La modification du concept arrive au moment où le sujet, interprétant la règle mathématique, établit de nouvelles règles forgées pendant le processus de son application. Dans la

contingence, l'élève projette des sens aux objets mathématiques (qui ont un mouvement propre prévu), mais son imagination inventive est imprévisible. Dans ces circonstances, le concept devient restructurable à chaque acte d'interprétation. Les conditions de lecture et de compréhension de l'objet définissent la construction du concept mathématique qui est en changement constant.

Mots-clés: Enseignement et Apprentissage de la Mathématique, Concept Mathématique, Re-signification du Concept Mathématique, L'erreur de l'Elève dans la Mathématique.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
<b>2 SITUANDO O REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>17</b>
<b>3 CAMINHO METODOLÓGICO .....</b>	<b>20</b>
3.1 A PERGUNTA DA PESQUISA .....	20
3.2 OBJETIVOS .....	20
3.3 JUSTIFICATIVA .....	21
3.4 METODOLOGIA .....	25
<b>4 FILOSOFIA DA MATEMÁTICA .....</b>	<b>31</b>
4.1 O DEBATE ENTRE LOGICISTAS, FORMALISTAS E INTUICIONISTAS .....	31
<b>4.1.1 O Conhecimento Matemático depende ou não da Linguagem?.....</b>	<b>32</b>
<b>4.1.2 O Conhecimento Matemático é Intuitivo ou Lógico? .....</b>	<b>34</b>
<b>4.1.3 A Matemática deriva da Lógica ou a Lógica deriva da Matemática? .....</b>	<b>36</b>
4.2 OS CRITÉRIOS DA MATEMÁTICA .....	41
4.3 OBJETO MATEMÁTICO .....	45
4.4 CONCEITO DO OBJETO .....	51
<b>4.4.1 O Conceito na perspectiva de Kant .....</b>	<b>52</b>
<b>4.4.2 O Conceito na perspectiva de Wittgenstein .....</b>	<b>55</b>
<b>4.4.3 O Conceito na perspectiva de autores contemporâneos da Filosofia da Matemática .....</b>	<b>59</b>
4.5 AS REPRESENTAÇÕES DO OBJETO MATEMÁTICO .....	61
<b>5 RELAÇÕES ENTRE A FILOSOFIA DA MATEMÁTICA E A APRENDIZAGEM</b>	<b>69</b>
5.1 A CRÍTICA AO ENSINO DA MATEMÁTICA .....	69
5.2 AUTORIA E ESCRITA MATEMÁTICA .....	82
5.3 MATEMÁTICA PRÁTICA .....	86
5.4 SENTIDO E INTERPRETAÇÃO DO OBJETO MATEMÁTICO .....	89
5.5 O PAPEL DA MEMÓRIA .....	99
5.6 O ERRO DO ALUNO COMO TRANSFORMAÇÃO DO CONCEITO MATEMÁTICO .....	107
5.7 MOVIMENTO PARA A AÇÃO DE UM NOVO CONCEITO .....	123
5.8 O CONCEITO E SEUS CONTEXTOS .....	127
<b>5.8.1 A Circularidade de Sentidos .....</b>	<b>131</b>
<b>5.8.2 O Processo de Seguir a Regra .....</b>	<b>133</b>
<b>5.8.3 A Função da Imaginação na Formação do Conceito .....</b>	<b>147</b>
<b>5.8.4 As Analogias com outros Conceitos .....</b>	<b>150</b>
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>155</b>
<b>7 REFERÊNCIAS .....</b>	<b>172</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O projeto educativo moderno, baseado em pressupostos epistemológicos e éticos, tem a tarefa de educar para o bem, dar acesso ao saber e buscar a verdade. O professor de matemática, inserido neste contexto, pretende que o seu aluno desenvolva o raciocínio lógico e faça uso de sua intuição. A matemática é considerada uma disciplina importante no currículo escolar, justamente porque contempla a tentação humana de conhecer a verdade através da lógica.

A intuição e a lógica convergem no conhecimento do objeto matemático. A intuição pode ser educada e construída, como bem mostram os diálogos socráticos e as provas e refutações de Lakatos (1984); já a lógica pode ser aprendida.

A criação matemática é ligada diretamente à intuição e ao conceito. Segundo Patras (2001), a matemática é considerada a ciência dos conceitos. Para Kant é a ciência da construção de conceitos. Granger (1974) modifica a noção kantiana, qualificando-a como a ciência por construção de linguagem.

A natureza do conceito matemático é restaurar a objetividade, ou seja, tornar objetivo o que outrora era subjetivo (a intuição). O sujeito faz analogias entre os conceitos e formaliza através de um logos.

Apesar de toda a exigência de criatividade que a ciência matemática requer, ela é acusada (e provavelmente com razão) de ser excessivamente normalizadora. A ciência da ordem, a ciência normalizada e asséptica, restringe a criatividade do aluno, o qual não consegue jogar o seu jogo, quando não compreende suas regras.

A ciência dos conceitos é baseada na estrutura de seus objetos e na sua linguagem. As equações e funções obedecem as formas nas quais aplicam-se fórmulas. Para evitar tal mecanicismo, os professores construtivistas propõem um ensino através de práticas que conduzem o aluno à construção de modelos matemáticos e à sua fórmula de resolução. Porém “as pesquisas pedagógicas apontam que o ensino experimental da matemática é insuficiente” (tradução minha) (Patras, 2001, p. 106). De maneira clara, Stella Baruk (1996) também ressalta em seus textos esta insuficiência.

É evidente que uma aula prática sempre é mais atraente do ponto de vista epistemológico, porém o ensino através de experimentos nem sempre é possível, por uma questão de tempo, já que é difícil para os alunos reconstruírem todos os conceitos matemáticos, assim como também é difícil reconstruir toda a história dos conceitos. Temos que levar em consideração, também, o desejo do aluno do ensino fundamental e médio, que nem sempre acolhe bem este tipo de ensino; e o aluno de terceiro grau que, em sua maioria, tem um ensino predominantemente teórico.

Independentemente de o aluno aprender ou não através de práticas, o conceito matemático deve ser considerado antes e depois da sua interpretação. Antes da interpretação, o conceito apresenta-se como uma idéia já existente e aceita pela comunidade matemática, adequando-se aos princípios da disciplina. Após ser interpretado pelo aluno, este conceito sofre modificações decorrentes da interpretação. O aluno experimenta o conceito e o transforma, cria outro conceito para si, obedecendo ou não às necessidades da matemática.

Este novo conceito, surgido da interpretação do aluno, pode representar ainda a primeira idéia, mesmo que explicada de maneira diferente, ou uma outra idéia. As modificações surgem, quando o aluno projeta sentidos seus ao objeto percebido e faz conexões com outros objetos, de acordo com a sua imaginação e a sua memória.

Qual é a ação para este novo conceito<sup>1</sup>? Para buscarmos tal resposta, devemos analisar o movimento dialético entre a intuição e o conceito; analisar o papel da percepção, da imaginação e da memória nesta reconstrução; analisar a circularidade entre o ato intencional do sujeito que aprende e o conceito a ser aprendido; analisar as analogias feitas com outros conceitos, bem como a formalização destas analogias.

Na tentativa de responder tal pergunta, a pesquisa se propõe a compreender como o aluno se ocupa com conceitos matemáticos. A análise de alguns registros escritos de alunos buscará dar uma significação a estas compreensões e interpretações, pois é na escrita que podemos perceber os atos intencionais que apontam para uma reconstrução.

A pesquisa é dividida em duas partes. A primeira parte busca, na filosofia da matemática, elementos para analisarmos o debate entre diferentes filósofos que contribuíram para o esclarecimento do objeto de pesquisa, como também para a constituição do referencial teórico.

A partir do debate entre logicistas, formalistas e intuicionistas, podemos analisar o papel da intuição e da linguagem matemática no conhecimento do objeto matemático, assim como o papel da lógica. A discussão do platonismo na constituição das verdades matemáticas emergirá deste debate.

Para Patras (2001), os matemáticos perceberam que o que importa são as relações dos objetos e não a natureza deles. Panza (1995) refere que o problema filosófico do jogo do

---

<sup>1</sup> Wittgenstein (1987), em diversos momentos de seu texto, deixa pistas destes novos conceitos que são produzidos a partir de um determinado conceito.

“Como alguém mostra que compreende uma proposição matemática? Aplicando-a, por exemplo. E não mostra também demonstrando-a? Quero dizer: a demonstração me mostra uma nova conexão, pois ela me proporciona também um novo conceito.” (p. 248)

“Implicaria matemática, por exemplo, se alguém examinasse o movimento dos corpos com a finalidade de saber se seu trajeto pode representar-se mediante a construção de uma elipse com uma corda e dos pregos? Teria exercitado a matemática quem tivesse inventado este tipo de exame?

Certamente teria criado um novo conceito. (...) Está claro: quem nos ensina a equação de uma elipse nos ensina um conceito novo. Porém quem nos demonstra que esta elipse e esta reta se cortam nesse ponto também nos proporciona um novo conceito” (p. 348).

conhecimento e a sua importância não é a existência do objeto, e sim o processo de sua objetivação; já para Kant, podemos conhecer o objeto através das regras da lógica. Nos processos que envolvem a relação do sujeito e do objeto, nos deparamos com obstáculos ao objetivarmos o subjetivo.

A análise da palavra em linguagem matemática se depara com o problema da significação da objetividade. Na tradução dos símbolos da linguagem matemática para a linguagem materna (que é polissêmica), nos deparamos com diferentes sentidos que podemos atribuir ao objeto, porém o sentido já está previamente fixado pela lógica da matemática.

A construção do conceito do objeto pelo sujeito e as analogias feitas com outros conceitos matemáticos dependem da leitura do objeto. As analogias conceituais, ao serem formalizadas por um logos, simulam a situação vivenciada pelo sujeito com o objeto.

O sentido atribuído ao objeto pelo sujeito deve corresponder às regras previstas pela lógica da matemática. De acordo com Wittgenstein, aplicar uma regra corretamente é intuir o sentido da regra. O conceito é uma regra interpretada, existindo um abismo entre a regra e a sua aplicação. É este abismo que a presente pesquisa pretende abordar.

A segunda parte da pesquisa consiste na aplicação desta teoria no contexto de sala de aula, onde o aluno constrói seus conceitos matemáticos. Com a análise da primeira parte, busquei contribuições dos pensamentos dos filósofos da matemática, tal como a consideração de Patras (2001), de que a demonstração matemática também é estruturada pelos não-ditos. Para construir um conceito matemático, o aluno deve reconhecer e compreender estes não-ditos, e esta compreensão nasce das analogias entre os conceitos.

A análise feita com base em filósofos da matemática busca discutir o papel da intuição e da linguagem na constituição da objetividade da matemática, bem como o papel da percepção, da imaginação e da memória.

A necessidade de abreviação através do algoritmo e a generalização de regras que utilizam letras para universalizar o particular apresentam um problema cognitivo, pois se reduz o universo de compreensão do sujeito aprendente quando este se depara com uma linguagem codificada e que lhe parece inacessível.

A teoria dos jogos de linguagem de Wittgenstein contribuiu para a análise do relacionamento da matemática, do professor de matemática e do aluno, no contexto de sala de aula. É na demonstração, ou seja, no nascimento da prova que surge a oportunidade da criação matemática. A demonstração feita pelo professor não é suficiente como técnica de ensino, ela sozinha não fornece uma explicação.

Quando o professor conduz o aluno a fazer conjecturas, a aula torna-se enriquecida, pois é no diálogo que se abre um horizonte de sentidos no qual o aluno pode construir o seu próprio conceito do objeto, com julgamentos justos, e o professor pode mostrar como sabe o que sabe. Assim, enquanto o aluno vai construindo seu conceito, o professor vai aprimorando a maneira de expor o seu.

## 2 SITUANDO O REFERENCIAL TEÓRICO

A maioria dos filósofos da matemática preocupa-se com a intenção do sujeito (no sentido de Husserl) e admite um sujeito consciente. Para Wittgenstein, a matemática é uma atividade humana; concordando com esse autor, busco em sua filosofia respostas para a atividade prática da matemática, na tentativa de dar conta da questão da interpretação do sujeito no contexto de sala de aula. Na filosofia de Wittgenstein, o sujeito nomeia o objeto via linguagem, relacionando objeto e imagem. A intenção do sujeito é o querer-dizer, que se mostra na utilização de regras da gramática para ligar as palavras. A conexão entre as regras e a ação de dizer é expressa em conceitos.

A intencionalidade, para Wittgenstein (1996, p. 173), é “a concordância, a harmonia entre o pensamento e a realidade” que residem nas regras gramaticais, é o querer-dizer. A harmonia se dá nas palavras ditas e que representam aquilo que queremos dizer. Quando a linguagem nos é insuficiente para explicarmos o significado de  $x$  a alguém, apontamos para  $x$ . O ato de mostrar  $x$ , segue das palavras pronunciadas (isso é  $x$ ). Existe harmonia entre o ato de mostrar e as palavras que seguem regras gramaticais. Esperamos que quem nos escuta compreenda aquilo que queremos dizer e é por isso que “na linguagem, tocam-se expectativa e realização” (p. 177). A significação da palavra não é um ato interno, ela nasce nos jogos de linguagem.

Maurice Caveing (2004), ao discutir o problema dos objetos no pensamento matemático, diz que o método fenomenológico da filosofia husserliana aproximada à matemática não é necessariamente incompatível com a filosofia do conceito.

Essas filosofias aparentemente opostas<sup>2</sup> podem auxiliar a esclarecer o problema da aprendizagem do aluno, quando este modifica conceitos matemáticos. Numa delas, buscamos explicações para o estudo e a análise do objeto e do conceito matemático. Na outra, a relação do objeto com o sujeito que interpreta o conceito matemático. Com estas implicações filosóficas, não pretendemos encontrar soluções para o problema da aprendizagem do aluno, e sim compreender como o aluno constrói o conceito matemático previsto no plano de aula do professor. O professor deve dar-se conta de que o conceito será modificado pelo aluno e que, nesta modificação, pode ocorrer um acréscimo no momento que o aluno vai além do esperado pelo professor, mas, também, pode ocorrer um desvio permissivo que leve a uma deformação do conceito.

O referencial teórico desta pesquisa se baseia no pensamento de Kant, de Wittgenstein, de Granger e de filósofos contemporâneos que discutem a matemática. Kant (1991) pergunta se é possível uma matemática pura. Wittgenstein discute os fundamentos da matemática. Granger escreve sobre o estilo da matemática, como também sobre as configurações abstratas e as objetivações. Granger conhece a filosofia de Kant e de Wittgenstein e escreve sob o ponto de vista epistemológico.

Entre os filósofos contemporâneos, Marco Panza, que discute a objetividade matemática, e Maurice Caveing, que trata o problema dos objetos no pensamento matemático; ambos buscam uma análise do objeto matemático e de suas estruturas formais.

---

<sup>2</sup> Maurice Thirion (1999, p. 369), ao comentar o pensamento de Lautman, diz que “o filósofo é fiel à intuição realista de Platão, ele a adapta às suas necessidades ; e, por outra parte, como bom filósofo, ele não hesita em tomar de empréstimo outros filósofos que não são platonistas, como Heidegger, nas análises que convergem com as suas”. Conclui dizendo que: “quanto mais avançamos em filosofia, mais nós compreendemos que a análise de filósofos que partem de intuições opostas àquelas que nós escolhemos nos enriquecem ainda mais” (tradução minha).

Estes filósofos divergem em alguns pontos, mas, na perspectiva desta pesquisa, eles se completam no sentido de que encontramos respostas às questões da relação do sujeito, do objeto matemático e do automovimento da matemática.

### 3 CAMINHO METODOLÓGICO

#### 3.1 A PERGUNTA DA PESQUISA

Como o sujeito produz sentidos no movimento de ação para um novo conceito matemático, através da linguagem escrita (gramática) e a sua imagem (demonstração)?

#### 3.2 OBJETIVOS

- Investigar os possíveis problemas encontrados na leitura de um texto escrito em linguagem matemática, bem como o papel da intuição, da lógica e da abstração na interpretação desta linguagem;
- Discutir o papel do erro do aluno na resolução de problemas matemáticos.

Esta pesquisa teórica expõe, de forma argumentativa, as possíveis articulações dos seguintes aspectos do objeto de estudo:

- a leitura da linguagem matemática;
- os sentidos produzidos pelo sujeito aluno na interpretação da linguagem matemática;
- o movimento do sujeito aluno na construção de um novo conceito matemático, ao negociar com conceitos prévios;
- a relação entre a linguagem matemática (sintaxe)<sup>3</sup> e a imagem (a demonstração)<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup> Parte da gramática que descreve as regras pelas quais se combinam os símbolos matemáticos.

<sup>4</sup> Seqüência de argumentos lógicos que provam ser verdadeiro o fato matemático.

### 3.3 JUSTIFICATIVA

Esta pesquisa aborda a produção de sentidos do sujeito aprendente ao se movimentar entre os conceitos matemáticos. Ao conectar um conceito a outro, o sujeito cria um novo conceito. Neste movimento, o sujeito se depara com os jogos de linguagem no contexto de sala de aula e que surgem na relação do ensinar/aprender matemática.

Atravessado por muitos saberes e inserido na cultura, este sujeito reconhece o discurso pré-construído que diz que a “matemática é difícil” e “é para poucos”, forjados no decorrer do tempo e assinalado por re-significações de fatos históricos que marcaram esta disciplina e que estão impregnados em sua memória. Assim, a aprendizagem da matemática fica prejudicada, antes mesmo do aluno entrar em sala de aula<sup>5</sup>.

Atualmente, muitas pesquisas apontam para a necessidade de uma educação matemática efetiva. A etnomatemática busca analisar a aquisição do saber matemático do sujeito aprendente inserido em seu contexto cultural. Etnomatemática, para Ubiratan D’Ambrósio (1993, p. 5), assim se define:

(...) etno é hoje aceito como algo muito amplo, referente ao contexto cultural, e portanto inclui considerações como linguagem, jargão, códigos de comportamento, mitos e símbolos; matema é uma raiz difícil, que vai na direção de explicar, de conhecer, de entender; e tica vem sem dúvida de techne, que é a mesma raiz de arte e de técnica. Assim, poderíamos dizer que etnomatemática é a arte ou técnica de explicar, de conhecer, de entender nos diversos contextos culturais. Nessa concepção, nos aproximamos de uma teoria de conhecimento ou, como é modernamente chamada, uma teoria de cognição.

Para Knijnik (1996, p. 87), D’Ambrósio tem “a preocupação com o fracasso escolar, com os processos de exclusão produzidos pela escola via o ensino da Matemática, apontando

---

<sup>5</sup> Conforme objeto de análise de dissertação (Silveira, 2000).

para a relevância de serem estabelecidas estreitas relações entre a História da ciência e a educação”.

O Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia de Pesquisa e Ação (GEEMPA) reconhece o pós-construtivismo como um acréscimo na forma de pensar a relação do aprendente com a realidade. Esta nova forma inclui os outros: o social, o grupo onde circulam os saberes, entre outros.

A disciplina de matemática é alvo de constantes polêmicas na comunidade escolar, em especial devido ao alto índice de reprovação de estudantes. A aquisição deste conhecimento na escola, que deveria derivar de seu ensino, encontra alguns obstáculos que demandam análises mais detalhadas, possibilitando, dessa forma, entendermos os motivos pelos quais o aluno não aprende matemática.

As atuais pesquisas que objetivam a educação matemática têm-se preocupado com a construção do conceito matemático pelo aluno, através da sua experiência com o objeto. Entretanto esta experiência é individual, e o sucesso de tais práticas não é garantido.

Neste modo de trabalho, propõe-se a ênfase na aplicação do conceito e não simplesmente a utilização do algoritmo. Porém o algoritmo se coloca como uma redução do conceito, já que é também a construção de uma necessidade sem ação e torna-se, para o aluno, a causa de uma utilidade imediata, quando percebe nele a possibilidade de resolver um problema de forma eficaz e econômica.

A proposta de um trabalho em sala de aula, enfatizando a aplicação da matemática no cotidiano, também não tem sucesso garantido. A análise da aplicação do conceito matemático no cotidiano é uma forma de ilustrar o conteúdo e de mostrar a sua utilidade. A compreensão do conceito através da sua relação com o cotidiano não é imediata, porque na mudança de contextos surgem as mudanças de jogos de linguagem e, conseqüentemente, mudanças de conceitos. Dizer ao aluno que a derivada da velocidade é a aceleração, ilustra o conceito de

derivada de uma função, mas não garante, por exemplo, que ele saiba derivar uma função exponencial.

Para Wittgenstein, é vago dizer que a matemática forma conceitos, já que eles dependem do contexto. Então, de acordo com o autor, podemos dizer que um conceito matemático adquire sentido no jogo de linguagem no qual está inserido.

Alguns estudantes utilizam com sucesso os conhecimentos matemáticos no cotidiano, porém fracassam em situação de sala de aula. Um estudante que trabalha no comércio, por exemplo, pode não ter dificuldades em fornecer troco aos seus clientes, mas em sala de aula, pode demonstrar dificuldades em formalizar a operação de subtração. A justificativa desta dificuldade pode ser atribuída à mudança de contexto. O conceito muda, na perspectiva do aluno, mas continua o mesmo na perspectiva da lógica matemática.

Os cálculos que este estudante faz no seu cotidiano de trabalho se apresentam em um jogo de linguagem diferente do jogo estabelecido na sala de aula, onde estes cálculos têm outro significado. Não é apenas “um troco” calculado, é uma conta expressa em algoritmo, muitas vezes apenas para garantir uma boa nota. Errar o troco significa perder dinheiro, errar a conta na escola significa o seu fracasso como aprendiz.

Essas propostas buscam resolver o problema da aprendizagem, já que o fracasso do aluno que estuda e não aprende matemática parece não ter sido solucionado. Com o auxílio dessas possibilidades metodológicas propostas pelas teorias educacionais vigentes temos que continuar nos perguntando: por que alguns alunos apresentam dificuldades em aprender matemática<sup>6</sup>?

---

<sup>6</sup> O jornal Correio do Povo divulgou os resultados das pesquisas do MEC que apontam para o baixo desempenho dos estudantes brasileiros na disciplina de matemática. Para Roberto Leal Lobo e Silva Filho, reitor da USP (1990-1993), a matemática é a “disciplina que os alunos brasileiros detestam em sua esmagadora maioria e da qual nossos intelectuais acham graça em afirmar que nunca foram bons alunos” (Folha de São Paulo, 01/06/2003). É provável que o rendimento escolar insatisfatório na disciplina se converta em descaso ou ojeriza.

Esta pesquisa não tem a pretensão de responder a tal pergunta, e sim de levantar questionamentos que possam esclarecer a problemática do relacionamento entre o estudante e a disciplina de matemática no contexto da sala de aula.

A imagem do “mistério” que envolve a matemática, com o seu discurso sagrado, um discurso definidor de uma ordem, ou um caminho a seguir e com um destino pré-determinado, para o estudante, continua sendo motivo de ojeriza, porque não consegue dominar a sua linguagem.

O simbolismo matemático se apresenta como uma linguagem cifrada com signos vazios e sem sentido. A matemática é normativa e lógica e restringe a imaginação do aluno devido às suas verdades previstas. Em consequência desses problemas encontrados nesta disciplina, pautada na ordem e no rigor, muitos estudantes não estudam matemática por diletantismo, não apreciam a estética do seu rigor, não percebem o prazer de um devaneio quando se é deixado levar por suas abstrações, assim como também deixam de perceber a beleza de suas formas.

Para Granger (1974), o sentido de um conceito depende do uso, começa com a sintaxe e se completa com a semântica, que é o uso da língua para interpretar a experiência. Salienta a existência de obstáculo para objetivar este vivido, bem como para definir as categorias desta objetivação. É a partir da prática que se trabalha a noção intuitiva para conduzir a ação ao nível do conceito. É na relação de um conceito e suas significações que se encontram os obstáculos que impedem o movimento desta ação. De acordo com o autor, não sendo a sintaxe compreendida, a semântica não se completa, representando um obstáculo para a aprendizagem.

O aluno constrói seu conceito matemático ao estar inserido nos jogos de linguagem e quando trabalha com sentidos intersubjetivos dados ao objeto. Desta relação do aluno com o

outro, com o professor, com o colega, com o contexto da sala de aula e da relação com a própria disciplina, nascem condições para o movimento de ação do seu conceito matemático.

Ao participar dos jogos de linguagem, o aluno usa palavras de domínio público, mas carregadas de sentidos seus e que estão de acordo com suas percepções, sensações e vivências, que são privadas.

A disciplina de matemática apresenta ao aluno algumas imposições. Sua linguagem é cifrada, com símbolos que pretendem ser universais. A matemática e a língua materna se completam, pois ambas são simbólicas, mas na perspectiva do aluno, as representações visuais dos códigos matemáticos precisam ser traduzidas para a linguagem materna. Para tal, a intuição é constantemente convocada a auxiliar na condução de uma representação mental. Ao participar de um jogo com a linguagem matemática no contexto de sala de aula, o aluno deve seguir as regras que a disciplina impõe. Para seguir as regras, necessita ativar a sua capacidade de julgar, para que seus juízos coincidam com os juízos universalmente válidos, caso contrário, não participa mais do jogo de linguagem e é reprovado na escola. É nesse contexto do problema que se insere a presente investigação.

### 3.4 METODOLOGIA

Esta pesquisa busca, no contexto de sala de aula, compreender a construção do conceito pelo aluno. A descrição do ato de aprendizagem permite detalhar como um objeto é conhecido pelo sujeito aprendente e como este constrói o conceito deste objeto.

O lugar de leitor que o aluno se coloca para interpretar os sentidos intersubjetivos dados a um conceito lhe proporciona, no movimento dos sentidos alheios, a possibilidade de

produzir sentidos próprios. A ação de criar argumentos na construção do conceito do aluno constitui o fenômeno aqui pesquisado.

A relação do sujeito com o objeto que permitirá produzir o conceito não depende apenas dos sentidos que este tira da relação com o outro, mas também da leitura do texto matemático expresso em linguagem escrita.

Esta pesquisa descreve as experiências vividas em sala de aula, bem como analisa os registros de representações feitos pelo aluno, de modo que oferecem pistas de como ele constrói os seus conceitos matemáticos, em situação de aprendizagem, como também os sentidos dados a estas representações.

A descrição e a investigação dos relatos de situações envolvendo o objeto matemático, vivenciadas e mostradas nos registros do aluno, buscarão uma explicação de suas causas e de seus fenômenos no sentido de compreendermos como o aluno atribui sentido ao objeto matemático.

O espaço de constituição da pesquisa é o contexto de sala de aula, ressaltando-se as relações advindas do mesmo, tais como as observadas em aulas particulares, nas quais professor e aluno têm condições de aprofundar um diálogo para chegar a um entendimento. Outra fonte encontra-se nas publicações de professores de matemática que relatam experiências vividas com seus alunos em situação de aprendizagem, além das análises dos resultados de outras pesquisas que abordam a mesma problemática. A pesquisa investiga o processo de aprendizagem do aluno, através das descrições de fenômenos que são experienciados por ele.

A análise busca pontos de convergência de todas as situações relatadas, se organizando no sentido de encontrar ressonâncias no discurso de cada sujeito envolvido, mas considerando as diferentes idiosincrasias.

Alguns relatos de manifestações de alunos são descritos e analisados com base em minha experiência em sala de aula com o ensino e a aprendizagem da matemática, ao longo de vinte e nove anos de magistério. Minha experiência abrange de quarta série do ensino fundamental ao ensino superior, passando ensino médio de cursos técnicos, tais como Eletrônica, Eletrotécnica, Química e, inclusive, didática da matemática em curso de Magistério de escola particular. No ensino superior, inclui-se minha experiência nos cursos de Matemática, Engenharias, Administração de Empresas, Ciências Contábeis, Arquitetura e outros. No curso de Licenciatura em Matemática, trabalhei com os conteúdos específicos da disciplina de Matemática, onde também tive a oportunidade de trabalhar com meus pares, na disciplina de Metodologia para o ensino da Matemática.

A experiência de “ensinar” métodos de ensino para professores de matemática foi muito significativa, pois ratificou o descaso de alguns professores com esta área do conhecimento. Para a maioria dos graduandos de Licenciatura em Matemática, uma “aula” de Cálculo Diferencial e Integral é muito mais importante que uma “aula” de métodos de ensinar matemática. Como se ensina ao aluno, ainda é uma pergunta secundária. O importante é o quanto o professor sabe daquilo que ensina. A ação de mostrar ao aluno o “como” sabe o que pretende ensinar é substituída pela ação de mostrar “o que” sabe.

Minha experiência no ensino e na aprendizagem da matemática é bastante rica, pois tive a oportunidade de perceber e observar situações extremamente antagônicas: o aluno pobre que não vai à escola após um dia de chuva porque não tem roupas para vestir; o aluno muito bem vestido que diz ao professor que está pagando e tem que ser aprovado; o “aluno-criança” que brinca em sala de aula; o aluno adolescente que se preocupa mais com o seu tênis do que com suas notas; o aluno que passou a noite em claro estudando e o aluno que dorme sobre a classe, fatigado após a longa jornada de trabalho; o aluno de ensino superior que estudou em boas escolas no ensino fundamental e médio; e também o aluno que, depois

de muito tempo sem estudar, ingressa na universidade por intermédio de conhecimentos adquiridos em cursos relâmpagos e/ou supletivos.

Não se pode desprezar os fatos que levam o aluno a estudar por diletantismo e os fatos que levam à apatia de alguns estudantes em sala de aula, já que os constantes argumentos dos professores para o fracasso do estudante na disciplina de matemática são a falta de base. Muitas vezes essa falta de base em matemática está convertida na base do que falta ao estudante, falta de recursos financeiros, falta de incentivo e, conseqüentemente, falta de ânimo para estudar.

Pretendo colocar, neste momento, alguns relatos de situações vivenciadas durante a minha trajetória como professora de matemática e que me fazem questionar o meu envolvimento como educadora, com o contexto escolar, com a disciplina de matemática e com a aprendizagem do aluno.

Esses relatos fazem parte da minha experiência etnográfica em sala de aula. Momentos que aprendi no diálogo com meus alunos, com suas dúvidas e com seus questionamentos. Os relatos fazem parte tanto da minha prática docente como do contato direto com o aluno em aulas particulares, momentos em que ajudei pessoas da família e amigos, escutando seus anseios e suas dificuldades em lidar com a matemática.

Em sala de aula, muitas vezes o aluno tem vergonha de dizer o que não sabe. Por mais que o professor convoque o aluno a participar, ele se sente constrangido em responder aos questionamentos do professor porque tem medo de errar.

Estes relatos retirados de minha experiência não descrevem apenas situações que estavam planejadas para após serem expostas em um manuscrito. Não é sempre que podemos planejar aulas 'show' como em cursos pré-vestibulares, em que o contexto é diferente, e o aluno não está sendo avaliado pelo professor. Nem sempre podemos possibilitar uma aula

experimental, pois ela depende do conteúdo a ser trabalhado, das condições físicas da escola e do tempo disponível para tratar do assunto.

Num desses momentos vivenciados com meus alunos, certa vez um aluno disse-me, esboçando um sorriso: “Professora, agora eu entendi, caiu a ficha!”. Infelizmente, não pude saber o que se passava em sua cabeça e o que o levou a “entender” ou se ele realmente já tinha entendido, mas algum sentido naquele momento ele havia produzido e, provavelmente aliado a este novo sentido produzido, um novo conceito foi construído.

Meu interesse é compreender como o aluno forma seu conceito, que sentidos ele produz ao lidar com conceitos matemáticos que têm sentidos intersubjetivos. Como este aluno, dialogando consigo mesmo, retira do mundo exterior elementos para significar o que ouviu, viu e sentiu de um determinado conceito matemático.

Em outra situação, uma aluna do curso de Administração de Empresas me esperava no corredor da universidade para uma conversa em particular. Aguardava-me não para lamentar as dificuldades para aprender, como é costume acontecer, mas sim para me dizer que estava feliz, porque estava aprendendo matemática. O seu sorriso expressava esta felicidade. Ela também referiu que, em outra situação, havia cursado comigo outra disciplina do currículo do curso de Matemática, mas que “desistiu” porque nada entendia.

Essa disciplina que a aluna cursa atualmente não é tão complexa como a anterior, mas o importante é que ela aprendeu e está feliz. Os conteúdos estudados foram compreendidos por ela, provavelmente porque tenha produzido sentidos e, conseqüentemente, formado os seus próprios conceitos conforme as exigências da matemática.

Busquei compreender o processo de aprendizagem do aluno, não apenas nestas experiências vivenciadas no contexto de sala de aula, mas também em relatos de pesquisadores e de professores de matemática. Esses relatos e registros foram analisados com

o objetivo de perceber a reconstrução de conceitos produzida pelo aluno a partir de analogias conceituais e a partir da mudança de contexto.

## 4 FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

### 4.1 O DEBATE ENTRE OS LOGICISTAS, FORMALISTAS E INTUICIONISTAS

A problemática da relação entre intuição, lógica e linguagem matemática demanda ser analisada, para que tenhamos elementos para discutir o que fundamenta a matemática. Identificamos três correntes filosóficas acerca dos fundamentos da matemática enquanto ciência. O logicismo, “liderado por Bertrand Russell, que igualava a matemática e a lógica” (Boyer, 1974, p. 440), o formalismo que considera a matemática “como a ciência do possível, onde por possível se entende aquilo que não implica contradições. (...) Mas justamente esta possibilidade foi posta em dúvida por um teorema descoberto por Gödel<sup>7</sup>, em 1931, segundo o qual não é possível demonstrar a não contrariedade de um sistema” e, por fim, o intuicionismo, que se trata “da noção kantiana da matemática como ‘construção de conceitos’ (...) se identifica com a parte exata do pensamento humano, portanto ela não pressupõe ciência alguma, nem a lógica, mas exige de preferência uma intuição que permite colher a evidência dos conceitos e das conclusões” (Abbagnano, 1962, p. 616).

Wittgenstein rejeita as três posições filosóficas e vê a matemática como resultado de práticas humanas. A matemática é a sua própria aplicação e ela não precisa de fundamentos. Granger (1990) diz que Wittgenstein é muito próximo e, ao mesmo tempo, muito distante dos intuicionistas. Para os intuicionistas, a lógica é apenas uma vestimenta do ato matemático, ou

---

<sup>7</sup> Matemático e lógico, mostrou com os seus teoremas os limites dos sistemas formais. O primeiro (1931) prova a existência de sentenças indecidíveis em qualquer sistema formal da aritmética. “Como corolário desse teorema temos o chamado segundo teorema de Gödel, estabelecendo que a consistência de um sistema formal da aritmética não pode ser demonstrada formalmente no próprio sistema; ou seja, nenhum sistema formal contém em si mesmo a prova de sua consistência” (Japiassú, 1996, p. 118).

uma linguagem que a descreve; para Wittgenstein, a lógica é um jogo paralelo, mas concorda que a matemática não deriva da lógica.

O que de fato nos interessa no debate destas diferentes correntes filosóficas é o esclarecimento de questões pertinentes ao conhecimento matemático. Uma delas seria questionar se a matemática depende da linguagem<sup>8</sup>.

O debate entre os logicistas e os intuicionistas gera grandes divergências, sendo que uma delas é a diferença para responder as seguintes perguntas: o conhecimento matemático depende ou não da linguagem? O conhecimento matemático é intuitivo ou lógico? A matemática deriva da lógica ou a lógica deriva da matemática?

#### **4.1.1 O Conhecimento Matemático depende ou não da Linguagem?**

A lógica, para Brouwer, não é o fundamento da matemática, segundo pretendem os logicistas. Dá-se precisamente o oposto: as leis lógicas (aplicáveis no domínio matemático) derivam-se da matemática, ou melhor, da linguagem da matemática. E como Brouwer acha que a atividade matemática independe da linguagem, isto é, da maneira pela qual expressamos as verdades dessa ciência, conclui ele, singularmente, que as leis lógicas não constituem fenômeno matemático e, sim, fenômeno etnográfico. A matemática, de acordo com o intuicionismo, originou-se, historicamente, da experiência, através dos sentidos. Mas na sua estruturação final e rigorosa, é puramente intuitiva e baseada na noção de número natural, independentemente das ciências ou da filosofia. Aliás, em qualquer outra atividade já encontramos explícita ou implicitamente conceitos matemáticos. A atividade matemática não pressupõe qualquer outra, mas, sim, está na base dessas outras. Em síntese, do ponto de vista de seus fundamentos, a matemática é auto-suficiente (Costa, 1999, p. 89).

Brouwer também discorda dos princípios formalistas de Hilbert e diz que não é possível confundir uma demonstração matemática de origem mental e que tem um número infinito de membros com o número finito dos seus acompanhantes lingüísticos. O

---

<sup>8</sup> Conjunto de signos que pretendem representar a realidade e que estão atrelados ao significado que o sujeito atribui ao objeto em atividades de contextos determinados.

intuicionismo separa completamente a matemática da linguagem matemática. O querer (a vontade) humano é quem suscita as ações matemáticas, suscita um universo independente do homem, uma força mental que opera sobre o exterior. Os princípios diretores do intuicionismo são as construções mentais sem linguagem. Os objetos matemáticos podem estar presentes independentemente de toda representação e de uma regra lingüística. O querer-ser é o suporte da representação que se adere a uma consciência desta representação. O sujeito criador se manifesta no mundo da representação. A intuição de Brouwer é aquela de um ato. O que é dado à sensação é imediatamente dado em ato.

Na perspectiva de Hilbert, o formalismo é um jogo de fórmulas. A matemática formalizada pressupõe uma metamatemática, uma linguagem que trabalha as demonstrações da matemática propriamente dita. As demonstrações de axiomas e de proposições são réplicas do pensamento. Elas constituem um inventário das regras que formam o pensamento que é paralelo à língua e à escritura. Uma demonstração têm o objetivo de ser breve e de economizar o pensamento. Na teoria da demonstração de Hilbert, o sentido das proposições é dotado e formulado em linguagem matemática. Tudo o que constitui a matemática pode ser formalizado. Os axiomas e os teoremas demonstráveis que coincidem com a fórmula são réplicas do pensamento ou das imagens do pensamento que constituem a prática da matemática. O pensamento procede paralelamente aos atos de falar e escrever.

De acordo com Davis e Hersh (1990), a axiomatização não permite encontrar os problemas dos fundamentos da matemática. Assim, não existem objetos matemáticos. A matemática é constituída de teoremas, axiomas e definições, ou seja, de fórmulas.

#### 4.1.2 O Conhecimento Matemático é Intuitivo ou Lógico?

Uma matéria no Jornal do Vestibular (Mora, 2001, p. 3) mostra, a partir de uma entrevista com George Steiner, que, até os dias de hoje, não se descobriu se a matemática é ou não inata. Tal afirmação nos coloca diante das seguintes questões: se existe algum conhecimento matemático em nós, por que alguns estudantes não conseguem construir seus conceitos? Daí pode-se sugerir que o conhecimento matemático também depende da lógica?

Frege (1983, p. 204), ao analisar a afirmação de Leibniz “toda a aritmética é-nos inata”, recorrendo à definição de intuição na Lógica de Kant, argumenta: “o sentido de nossa palavra é assim mais amplo na Lógica que na Estética Transcendental. No sentido lógico, poder-se-ia chamar 100 000 de intuição; pois conceito geral não é. Mas tomada neste sentido, a intuição não pode servir de fundamento para as leis aritméticas”. No caso da geometria, concorda que as leis gerais são obtidas a partir da intuição. Assim, ele distingue conceito e objeto afirmando que “não passa de ilusão pretender que seja possível converter um conceito em objeto sem alterá-lo”.

Seguindo a linha do pensamento de Frege, poderíamos dizer que 100 000 é um objeto da intuição, porém, se quisermos generalizar e construir um conceito a partir deste objeto, a intuição não é suficiente e temos que recorrer às leis aritméticas que têm seus pressupostos na lógica.

Para Kant (1987, p. 53), “na base da matemática estão realmente puras intuições *a priori* que tornam possíveis as suas proposições de valor sintético e apodítico”. A intuição é “uma representação que depende imediatamente da presença do objeto” e constitui-se num *a priori*, justamente por não ser empírica. A matemática, assim, por representar seus conceitos na intuição e no *a priori*, funda-se numa síntese das percepções, apresentando conceitos universais e necessários.

A dedução transcendental dos nossos conceitos de espaço e tempo, para o autor, explica a possibilidade de uma matemática pura, pois sem esta dedução não poderíamos compreendê-la. Sendo assim, o espaço e o tempo se apresentam para os nossos sentidos, percebemos apenas como nos aparecem e não como estes são em si. A exemplo disso, a afirmação de que “por dois pontos passa uma única reta”, que se constitui num postulado matemático, ou seja, uma sentença que não precisa ser demonstrada, percebe-se que é uma proposição universal e necessária, e apenas podemos compreendê-la pela noção de espaço e de tempo.

Michael Otte (1993), ao discutir intuição e lógica, reconhece que estas não podem ser separadas completamente ou colocadas sob o mesmo teto, mesmo que as duas tenham a mesma função cognitiva de fornecer certeza. Difere o conhecimento discursivo do conhecimento intuitivo (não discursivo) quando diz:

Pierce refere-se à famosa distinção de Kant entre filosofia e lógica, de um lado, e a matemática, de outro, representando as primeiras o raciocínio analítico fundamentado em conceitos, e considerando o particular no geral apenas, enquanto a matemática é um conhecimento sintético, que vai do particular para o geral (...) Kant atribui a diferença entre intuição e lógica à dinâmica de crescimento do conhecimento, concebendo este em termos de uma interação entre o geral e o particular (p. 302).

Assim, vista sob a perspectiva intuitiva, a matemática construtiva (e não discursiva) busca a verdade pela intuição do objeto. O autor mostra que, para Poincaré, a lógica pode fornecer certeza, é o instrumento de demonstração, enquanto a intuição matemática é o instrumento da invenção, pois tem a certeza *a priori*. A distinção entre intuição e lógica para Poincaré se dá pelo fato de que a intuição matemática funciona na base da estrutura da mente humana e a lógica representa as imposições do mundo material.

Para Otte, surge uma diferença essencial entre estes pontos de vista: “ou se experienciar atividades matemáticas subjetivamente - psicologicamente -, de dentro, ou considerá-las, ao contrário, em suas funções epistemológicas, isto é, de fora” (p. 311).

Como a epistemologia faz suas considerações diretamente na relação sujeito-objeto, convém salientar que, sob o ponto de vista dos intuicionistas, o sujeito é consciente das coisas, ele tem intenção ao relacionar-se com o objeto; já sob o ponto de vista dos logicistas, o sujeito emerge no mundo da linguagem que obedece às leis da lógica. O conhecimento matemático, sob o ponto de vista do método axiomático, conforme Otte, deveria ser interpretado “fora de uma perspectiva psicológica, isso me parece completamente formal”(p. 314).

Conclui o seu texto dizendo que “o problema da objetividade da matemática é, então, uma questão sobre diferentes camadas ou tipos da atividade humana e suas interações. Intuição e lógica parecem apenas as dinâmicas dessas interações” (p. 318 ).

#### **4. 1. 3 A Matemática deriva da Lógica ou a Lógica deriva da Matemática?**

A questão referente ao problema da matemática constituir ou não uma derivação da lógica mostra, através do debate entre logicistas e intuicionistas, a existência de algumas fronteiras entre as duas correntes filosóficas.

Wittgenstein (1993, p. 261) aponta alguns aforismos acerca da matemática importantes para esta pesquisa, tais como: “A matemática é um método lógico”; “a proposição da matemática não exprime pensamento”; “Frege diz que as duas expressões<sup>9</sup> têm o mesmo significado, mas sentidos diferentes”; “a matemática é um método da lógica”.

A proposição matemática nada exprime, ela apenas mostra, diz Wittgenstein. A linguagem objetiva descreve os fatos através de uma imagem e descrever não é o mesmo que explicar, como também não é o mesmo que fundar. A linguagem é uma imagem lógica e

---

<sup>9</sup> “1+1+1+1” e “(1+1)+(1+1)”.

reflete a organização das relações dos objetos. Porém ela é imagem do pensamento que não é ambíguo. Temos dificuldades de exprimir nossos pensamentos, e aquilo que não pode ser dito tem que ser mostrado.

Lógica e matemática, para o autor, constituem jogos de linguagem. A primeira é orientada para descrever o mundo e suas regras possibilitam uma gramática. A lógica privilegia a função de verdade com aplicação no mundo e a operação com aplicação nela mesma. A matemática, por sua vez, constitui um sistema de regras operatórias. Através dos seus movimentos operatórios, ela possibilita a passagem de uma forma à outra, como, por exemplo, na equação matemática, que é um esquema de substituição de operações ou de sentenças matemáticas.

Quando Wittgenstein diz que a matemática não exprime pensamento, não estaria referindo-se a estrutura autônoma da linguagem formalizável desta disciplina? Esta “vida própria” da matemática que lhe garante uma certa auto-suficiência não exprime pensamento, justamente porque sobrevive com a experiência dos próprios símbolos.

A pretensão da matemática de se apresentar como uma linguagem unívoca faz com que a sua formalização ignore “os símbolos de ‘embreagem’ numa experiência vivida” (Granger, 1974, p.140).

Se a matemática é um método lógico e um método da lógica, tais afirmações parecem ser complementares. O método da matemática consiste em extrair de hipóteses as deduções necessárias, o que lhe garante um método lógico. E a matemática enquanto método da lógica se refere a “esquemas operatórios” que conduzem à resolução de cálculos.

Na matemática, o teorema é um fato matemático demonstrado por uma seqüência de argumentos lógicos que provam a veracidade do mesmo, e os postulados são fatos matemáticos aceitos sem a necessidade de demonstração.

O método da matemática é a dedução. Dedução é o raciocínio que permite tirar conclusões de certos supostos com absoluta garantia de que, se as hipóteses são verdadeiras, a conclusão também é. A matemática usa a dedução, e é a única ciência que justifica logicamente suas afirmações só com a dedução (Lungarzo, 1989, p. 72).

De acordo com os intuicionistas, as leis lógicas derivam-se da linguagem matemática, já que a lógica não é fundamento da matemática. A matemática independe da linguagem, ela se encontra na intuição e utiliza-se da lógica para descrever e formalizar suas proposições. Neste sentido, a lógica exerce sua função puramente sintática.

Ao escrever sobre as fronteiras entre a lógica e a matemática, Piaget (1976, p. 16) diz:

Se a lógica dissociou-se assim da análise psicológica, ela se aproximou, exatamente na mesma medida, da matemática pura (...) a matematização da lógica, de um lado, pela necessidade de um simbolismo exato (a álgebra da lógica), e a logicização da matemática, de outro lado, devido às exigências da axiomatização, quer dizer, à eliminação progressiva da intuição como fundamento do conhecimento abstrato.

Para o autor, as reduções do matemático ao lógico, tentadas por Frege e Russell, foram contestadas desde o início. Gödel demonstrou, em 1931, a impossibilidade da hipótese de se considerar atualmente a matemática como uma parte da lógica. A solução contrária, ou seja, de se considerar a lógica parte da matemática, também é refutada por não haver uma estrutura geral única.

A terceira solução, aquela que concebe a lógica e a matemática como duas subclasses separadas da grande classe das estruturas formais ou abstratas, não é aceita, pois há estruturas comuns à lógica e à matemática.

Granger (1976) afirma que o pensamento formal é uma dialetização do pensamento intuitivo que reduz a linguagem como uma maneira de formalizar a experiência e que depende de uma compreensão e “engendramento” de conceitos. A intuição com as condições formais da sensibilidade, num movimento dialético com o objeto (fenômeno), representam o pensamento formal, ou seja, dá forma ao conteúdo da experiência. A redução da linguagem

que formaliza a experiência que conecta os conceitos compreendidos nasce na intuição, logo torna objetivo o que antes era subjetivo.

A matemática é qualificada pelo autor como a ciência “por construção de linguagem”. Ela é construída por conceitos que derivam da linguagem assentada em certezas, certezas que obedecem às leis lógicas. O autor denomina a matemática como reino do virtual, onde se desenvolve a teoria dos possíveis. O “possível” na matemática se relaciona com a experiência subjetiva, é um elemento temporal, um operador abstrato e que se coloca entre o contingente e o necessário.

A matemática é a fonte dos modelos abstratos. Os objetos matemáticos são formas puras, sem conteúdo sensível, que aparentam o real e representam os fenômenos. A representação do objeto se dá dentro de um espaço virtual.

Os modelos abstratos do real na ciência, real que é explicado, provisoriamente e necessariamente explicado, são estabelecidos no movimento do pensamento denominado de virtual. É na totalidade das abstrações que se encontra a imagem do fenômeno observado. A formalização introduz os caracteres ontológicos concretos e temporais do possível (que se relaciona com a experiência subjetiva) dentro do cálculo.

A experiência do pensamento constrói fenômenos virtuais que se candidatam a representar o atual. O fato epistemológico se dá na interpretação do virtual advindo da representação da experiência.

Os filósofos são, em sua maioria, adeptos à concepção platonista que afirma que os fatos matemáticos existem independentes do conhecimento que se pode ter sobre eles. O realismo é das idéias, e a existência em si do objeto matemático é independente do pensamento. O mundo das idéias concebe a existência real dos objetos ideais matemáticos.

Segundo Jacques Harthong<sup>10</sup>, ao discutir o idealismo e a ciência, os platonistas postulam a existência *a priori* dos objetos ideais matemáticos, os intuicionistas postulam que os objetos ideais não existem *a priori*, mas são construídos à medida das necessidades; e os formalistas também concordam que não existem os objetos ideais *a priori*, mas que nós podemos fabricar os axiomas em linguagem codificada.

O subjetivismo admite que o mundo não tem realidade fora da minha representação, a realidade está nas idéias do sujeito, onde os fenômenos são desprovidos de realidade e, por conseqüência, o sujeito não pode ter acesso à realidade. O objetivismo admite a existência de um mundo independente da representação e que o sujeito pode ter acesso à realidade.

No intuicionismo subjetivista, o sujeito cria o objeto e o constrói. O intuicionismo objetivista é um reconstrutivismo, um semi-intuicionismo, que sustenta duas teses: a existência em si do objeto matemático, independente do pensamento e que existirá conhecimento matemático somente quando o objeto existente for reproduzido por nós.

Esta última concepção filosófica me parece a mais adequada para pensarmos a relação do sujeito aluno com o seu objeto de estudo. As descobertas e criações matemáticas publicadas em livros, estudadas por professores e publicadas em livros didáticos, existem independentemente do aluno pensá-las. No processo de ensino e aprendizagem, o professor conduzirá o aluno a conhecê-las e redescobri-las. Da reprodução das idéias e de suas conexões, o aluno pode criar outras.

---

<sup>10</sup> Jean-Michel Salanskis e Marco Panza, L'objectivité mathématique : Platonismes et structures formelles, 1995, p. 49-60.

## 4. 2 OS CRITÉRIOS DA MATEMÁTICA

A matemática é inteiramente abstrata e a sua alma é o rigor. É uma ciência formal, tem como critério a justificação e a evidência. A evidência, critério de verdade, refere-se aos passos de demonstrações, onde se dá a busca da generalização, da abstração e da axiomatização.

A pretensão da lógica é fornecer as leis da verdade, porém não podemos conhecer esta última através de procedimentos lógicos. Isto se evidencia no próprio critério de determinação da verdade do sistema cartesiano, pois este não fornece o conceito de verdade. Para Descartes, a verdade consistiria na própria clareza e evidência das razões em jogo, na conformidade do pensamento com o objeto.

Em *Discurso do método* (1987, p. 32), Descartes mostra as suas pretensões na construção do método para melhor conduzir “sua” razão:

Comprazia-me com as Matemáticas, por causa da certeza e da evidência de suas razões (...) E eu sempre tive um imenso desejo de aprender a distinguir o verdadeiro do falso (...) por desejar então ocupar-me somente com a pesquisa da verdade (...) E, notando esta verdade: *eu penso, logo existo*.

O critério de verdade que permite distinguir as idéias verdadeiras das falsas, enunciado por Descartes, leva, assim, a uma verdade por correspondência. Ao tratar da questão cartesiana da verdade, Landim Filho (1992, p. 25) diz que Descartes afirma que a verdade é uma “noção tão transcendentalmente clara que é impossível ignorá-la” e que pode indicar reflexões sobre a possibilidade da verdade. Ao analisar o sentido da dúvida cartesiana, diz: “a verdade do enunciado ‘Eu sou, Eu existo’ (que emergiu da dúvida) é demonstrada pelo modo de construir ou de produzir este enunciado”.

Os critérios de reconhecimento da verdade, encontrados na relação do sujeito com as coisas fora dele, são problemáticos por que o sujeito pode ter falsas impressões do objeto. O

sujeito pode conceitualizar um objeto “falso”, utilizando critérios como se o objeto fosse “verdadeiro”. O objeto “falso” com aparência de ser “verdadeiro” produz um “falso” conceito. Porém, caso o sujeito não reconheça a falsidade do objeto, seu conceito é verdadeiro.

Como a lógica não é a sintaxe do pensamento, ela apenas fornece as regras da verdade. As regras do entendimento não significam verdade, são cognições. O entendimento deve ter a sua própria forma de entender o objeto. Para Kant, sem a sensibilidade não há entendimento, para entender é preciso existir uma relação entre ambos. O que o entendimento faz é julgar o objeto que lhe é dado, portanto, a lógica disciplina o pensar que faz abstrações submetidas à contingência e à sensibilidade, assim, para o autor, conhecer é condição do pensar.

Kant (1991, p. 58), ao responder sua pergunta “o que é verdade?”, destaca:

A definição nominal da verdade, a saber, que consiste na concordância do conhecimento com o seu objeto, é aqui concebida e pressuposta (...). No que concerne ao conhecimento da simples forma (deixando de lado todo o conteúdo), é igualmente claro que uma lógica, na medida em que expõe as regras universais e necessárias do entendimento, precisa justamente em tais regras apresentar critérios da verdade. Com efeito, o que os contradiz é falso porque em tal caso o entendimento se contrapõe às regras universais do pensar, por conseguinte a si mesmo. Esses critérios, porém, referem-se apenas à forma da verdade, isto é, do pensamento em geral, e são nesta medida inteiramente corretos, mas insuficientes. Pois, embora um conhecimento possa ser inteiramente conforme a forma lógica, isto é, não se contradiga a si mesmo, pode ainda estar sempre em contradição com o objeto (...) a Lógica não pode ir mais além nem descobrir, através de pedra de toque alguma, o erro que não concerne à forma, mas ao conteúdo.

A forma que o sujeito pensa o objeto é verdadeira, porém as regras do entendimento não representam a verdade, são apenas cognições. A apreensão subjetiva da coisa se relaciona com a lógica do pensar que oferece a forma do pensamento sem o conteúdo, a forma do pensamento como se tivesse conteúdo é verdadeira. Esta concepção subjetiva da coisa, o conceito da coisa e a coisa propriamente dita podem não estar em correspondência. A lógica fornece as leis para encontrar a verdade e usamos palavras que significam conceitos de coisas,

mas a verdade está na correspondência da coisa pensada com a coisa propriamente dita, e para esta verdade não existem critérios. Não existem critérios que definam a concordância do conhecimento de um objeto com o próprio objeto.

A lógica é uma condição do pensar, pois não há pensamento ilógico, o pensamento é o próprio ato de relacionar e é somente através do entendimento que se introduz uma relação com o objeto. A lógica é humana, pois todo ser discursivo tem que ser lógico. Segundo Frege, "pensamos em palavras, e se não em palavras, ao menos em sinais matemáticos ou outros quaisquer" (1983, p. 189). A humanização da lógica na concepção fregeana nos fornece elementos para percebermos que a linguagem só é concebida a partir do sujeito racional.

No discurso, as relações lógicas poderiam decidir o que é verdade apenas se pudéssemos dizer o verdadeiro. Argumentamos com a finalidade de amenizar os equívocos da linguagem e também podemos questionar os sentidos do que falamos, justamente porque a linguagem é ambígua, ou seja, não é transparente. As palavras são polissêmicas e dão abertura a diferentes interpretações.

Quando o sujeito interpreta, está mostrando como percebe o objeto e, desta forma, através das regras do entendimento, faz analogias do objeto com outros objetos, percebendo as regularidades e diferenças dos objetos no mundo.

Gilles-Gaston Granger (1994), ao comentar as verdades na matemática, recomenda que devemos nos contentar com as "certezas locais" de não-contradição dos teoremas da matemática e com a constatação de que, ao longo da história, a fecundidade de seus raciocínios jamais esmoreceu e que a matemática "continua a fornecer às outras ciências um paradigma de conhecimento rigoroso, mesmo sabendo que o rigor é sempre relativo e que o fundamento absoluto não é alcançado" (p. 70).

O conhecimento científico constrói modelos abstratos da experiência, por meio da lógica e das matemáticas. As matemáticas contribuem para as ciências do homem em três

aspectos: a medida das grandezas nas ciências humanas, as estatísticas e a estruturação matemática de modelos.

Ao contrário das análises anteriores, Wittgenstein tem outro critério. Toda a sua teoria se baseia em jogos de linguagem assentados em certezas. Quando falamos, utilizamos a expressão ‘eu sei’ que evidencia uma certeza, porém, não existe garantia que realmente sabemos, apenas a certeza que acreditamos saber.

O domínio do rigor matemático e também das ciências trouxeram muitos questionamentos para as ciências humanas. Para se contrapor à linguagem unívoca da matemática e de sua pretensão de reconhecer a evidência e a verdade através da lógica, a Hermenêutica acena com um horizonte de sentidos possível.

Para Palmer (1989, p. 138), “o mundo é o lugar em que o ser se traduz em significação, em compreensão e interpretação. Numa palavra, é o campo do processo hermenêutico, processo pelo qual o ser se tematiza enquanto linguagem”.

Compreensão entendida como fabricação de relações e significações plena de sentidos. Já a interpretação é simplesmente a explicitação da compreensão. O sentido, para Heidegger (1996, p. 208), “é aquilo em que se sustenta a compreensibilidade de alguma coisa” e “o que pode ser articulado na interpretação”, sendo que “todas as significações sempre têm sentido” e “das significações brotam palavras. As palavras, porém, não são coisas dotadas de significados” (p. 219).

Os símbolos lógicos ou matemáticos, por sua vez, não têm enquanto tal outros interpretantes a não ser os próprios objetos que os símbolos definem. Desta forma, o pensamento técnico, visando uma economia intelectual, busca amparo nas “certezas e evidências” da matemática, dados e modelos que se aproximem da realidade que cerca o homem. Porém, esta objetividade nos torna devedores de uma subjetividade, inclusive na relação de quem ensina e de quem aprende matemática.

É no diálogo entre a matemática, o professor e o aluno que poderemos resgatar os sentidos ausentes, que fazem esta disciplina carregar o mito de dificuldade. Assim compreendendo a matemática, conhecendo suas limitações e exigências, podemos interpretar os erros dos alunos e, quem sabe, aprimorar o diálogo entre professor e aluno, já que usamos a linguagem matemática em “simbiose” com a linguagem materna.

#### 4.3 O OBJETO MATEMÁTICO

Onde estão os objetos matemáticos? Quais as relações que estes objetos fazem com a intuição, com a escrita e com a realidade? A natureza do objeto matemático é um tema bastante debatido entre os filósofos, e Patras (2001) diz que a natureza dos objetos não é importante, e sim suas relações. Existe, na concepção de alguns matemáticos, um discurso alternativo que advoga a invenção matemática. Os objetos não preexistiriam à sua descoberta, mas seriam o fato da atividade do matemático.

O formalismo representado por Hilbert aposta num jogo de fórmulas que exprimem a técnica do pensamento humano. O inventário destas regras mostra o funcionamento do pensamento que é similar à língua e à escritura. A idéia fundamental da sua teoria é descrever a atividade de nosso pensamento.

O intuicionismo representado por Brouwer diz que o querer-ser é anterior ao pensamento e que a vontade suscita a representação. Os objetos matemáticos são representações intuitivas e derivam da experiência e de objetos já construídos. Costa (1999, p. 88) diz que segundo Brouwer, “o matemático não descobre as entidades matemáticas; é o próprio matemático quem cria as entidades que estuda”. Porém, para Frege (1983, p. 270),

“também o matemático nada pode criar arbitrariamente, não mais do que o geógrafo; também ele pode apenas descobrir o que há e nomeá-lo”, concordando com Pierce.

A possibilidade de criar ou não criar idéias na matemática deve ser considerada, pois se reduzem as possibilidades de autoria do próprio matemático, sendo o aluno também afetado por estas limitações.

Kant (1987, p. 47), ao comentar o conhecimento matemático, diz que é uma “modalidade do juízo que é necessário de direito, exprimindo uma necessidade lógica, não um simples fato (...) apresenta característica de universalidade e de necessidade perfeita, isto é, uma absoluta necessidade, não se copia, pois, em nenhum fundamento empírico; por conseguinte, é um puro produto da razão”.

Quando Kant diz “não se copia”, não estaria dizendo que “não se descobre” e sim se constrói primeiro na intuição. Se o homem constrói, então é invenção do homem, invenção humana.

Já o trabalho das matemáticas, para Piaget (1983, p. 45):

não são nem descobrimentos, visto que se trata de realidades não dadas de antemão, nem de invenções, visto que uma invenção comporta uma margem apreciável de liberdade, ao passo que cada nova relação ou estrutura matemática se caracteriza por sua necessidade tão logo é construída: essa ‘construção necessária’ suscita, pois, a questão de seu mecanismo constitutivo.

Para Wittgenstein, o matemático não é um descobridor, é um inventor. Assim, a matemática é inventada. Como prova de sua argumentação, afirma que “pode-se fazer um estudo antropológico de uma obra matemática, pois ela nos mostra como um determinado povo opera com os signos e que partes da matemática dominou este povo. A matemática é um fenômeno antropológico” (1987, p. 338). A matemática não precisa de fundamentos, é vista como práticas humanas.

A proposição matemática é uma determinação conceitual que se descobre. Porém o movimento entre os conceitos que produz conhecimento matemático é inventado, como, por exemplo, numa demonstração. Podemos encontrar o objeto matemático descobrindo-o, tirando o véu que o cobre. A demonstração é o espaço onde podemos criar.

Granger (1990, p. 212) diz que para Wittgenstein “não se pode falar propriamente de objetos matemáticos” e que “a matemática é sempre uma máquina, um cálculo. O cálculo não descreve nada (...). O que nós encontramos nos livros de matemática, não é a descrição de alguma coisa, é a coisa mesma. Nós fazemos matemática”.

Quando dizemos que a reta tem infinitos pontos, que ela é ilimitada e que por dois pontos passa uma única reta, não descrevemos a reta, é a reta mesmo que se apresenta quando mostramos através de atos que a definem.

Para Paul Valéry (1973, apud Caveing, 2004, p. 43), “a matemática é a ciência dos atos sem as coisas e, conseqüentemente, das coisas que nós podemos definir pelos atos” (tradução minha). A coisa em si não está presente (a reta, por exemplo), mas a definimos através de atos.

O signo e o objeto são reversíveis e, segundo Wittgenstein, “é preciso que haja objetos para que a representação seja possível (...) é preciso que haja signos que se relacionem com os objetos, não por meio de definições (descrições), mas sim diretamente, pela nomeação de tais objetos” (1979, apud Glock, 1998, p. 267).

Para Marco Panza (1995), o objeto matemático é uma forma de realidade que procede geneticamente dos seus conceitos. A presença do objeto determina as suas propriedades, mostra a independência de atos de razão, é termo da relação entre objeto e sujeito, e é objeto de uma predicação.

Caso o objeto seja uma adição no conjunto dos números naturais, por exemplo, suas propriedades serão determinadas: comutatividade, associatividade e elemento neutro.

Independente de nós pensarmos ou não a adição, ela existe. A realidade do objeto matemático é independente de todo ato de consciência. Ela é objeto da criação humana, logo, existe uma relação com o sujeito. É objeto que possui um predicado e, conseqüentemente, pode ser definido e conceitualizado.

Panza discute a natureza de um objeto e toma como referência para a sua discussão o objeto “pedaço de papel” e o objeto “Leporello”, o criado de Don Juan, na Ópera de Mozart. Um pedaço de papel excede o conceito correspondente, enquanto que Leporello não excede, ele é escravo de seu conceito. O pedaço de papel tem diferentes propriedades que não dependem do conceito correspondente. Assim, dependendo do contexto, podemos operar com o objeto sem necessitar de seu conceito.

De certa forma, a pergunta de Patras (2001, p. 43): “A evidência de um conceito é sinal da existência do objeto?” (tradução minha) fica respondida positivamente. O objeto  $\pi$ , por exemplo, com sua existência na definição (razão entre a medida da circunferência e a medida do diâmetro), acompanha seu conceito por meio de suas propriedades e a evidência de seu conceito é sinal da existência do objeto.

Para René Thom (1991, apud Patras, 2001, p. 36):

as idéias matemáticas são produzidas no nosso cérebro na medida em que as pensamos. Mas como elas existem quando nós não as pensamos, então elas existem em alguma parte e não somente na memória: elas existem, igualmente fora dela e se realizam em um certo sentido em tal e tal caso, sobre tal e tal material apropriado (tradução minha).

O argumento de Thom mostra que ele adere ao pensamento de Platão. Na concepção do platonismo, o ser se manifesta em diferentes graus; no visível, na aparência, na sombra e no inteligível; nas idéias e nos objetos matemáticos. Platão é um realista e afirma a existência do objeto exterior ao pensamento, o mundo das idéias. Realidades que apenas o pensamento pode ver. A matemática é uma forma de pensamento com acesso ao real. A tese de Platão da

natureza dos objetos do pensamento pressupõe que os objetos existam antes mesmo do sujeito pensá-los. Assim, os objetos podem ser descobertos.

Ao falar do intuicionismo, Largeault (1993) diz que os objetos são os atos introspectivos. É então natural identificar o objeto ou o fato com o ato de os pensar, que nós chamamos uma construção.

O autor discute (1992) o pensamento do intuicionista Brouwer e diz que o sujeito cria os objetos através de atos de pensamento. O objeto não é anterior ao ato de os pensar, ele é criado introspectivamente. A matemática intuicionista é uma construção mental essencialmente sem linguagem, sendo o objeto compreendido na sua representação. A realidade é objetivada na idéia e subjacente à vontade<sup>11</sup> do sujeito 'criador'. A atividade e a natureza da intuição coloca o objeto conferindo-lhe uma realidade. Os fenômenos manifestam todas as coisas em si, mas as idéias são aquelas mais próximas da coisa em si.

Os platonistas realistas, como Gödel, por exemplo, seriam mais inclinados a separar a realidade matemática da linguagem que a descreve. Assim, de acordo com Largeault, a intuição de Gödel é aquela de um ser; a intuição de Brouwer é aquela de um ato.

Caveing (2004) parece unir as posições de Kant e de Wittgenstein. Para o autor, o objeto pode ser caracterizado como unidade sintética de um sistema de relações, ou seja, o pensamento matemático faz relações. A relação matemática, por sua vez, é feita por mediação de um sistema de regras. Assim, a matemática gera os objetos, já a lógica gera e estuda as propriedades das línguas formais e suas relações com os objetos. O pensamento operatório exerce sob a regulação das propriedades dos objetos que enunciam as proposições (objetos que são dados) e, de outra parte, ele tem por efeito as construções dos objetos (objetos

---

<sup>11</sup> Brouwer foi leitor de Schopenhauer e Wittgenstein foi leitor de Brouwer.

construídos). Existe circularidade nos atos que retornam aos objetos que os regram, e os objetos retornam aos atos que os constituem.

Segundo Caveing, a matemática apresenta um automovimento, constituindo uma sucessão de descobertas. As entidades pré-existentes com necessidades próprias e a construção de objetos por atividade inventiva não podem ser separadas.

A epistemologia estruturalista propõe outro enfoque: concebe o objeto dentro de uma estrutura. O matemático descreve o mundo físico (estrutura : matemática e linguagem), constrói o objeto e fixa a estrutura (língua científica e língua ordinária). A língua ordinária interpreta o discurso matemático. A construção do objeto na estrutura: matemática e linguagem, se dá por abstração. Assim, a epistemologia estruturalista se assemelha a um realismo ontológico: tem que existir semântica para o enunciado matemático.

Patras (2001) diz que pretender reconduzir a criação matemática contemporânea à ilusórias intuições elementares ou à percepções ancoradas no mundo vivido é, sob sua forma ingênua, um projeto condenado ao fracasso. Pensar em matemática, para o autor, é dar uma intuição ao conceito que passa por um questionamento possível e uma abertura para as coisas. Ele distingue o objeto na violência cega de sua definição axiomática, da coisa pensada que se desdobra na intuição.

Dessa forma, podemos concluir que os filósofos da matemática não apresentam a mesma posição sobre o objeto matemático. Estas idéias atuais do objeto matemático são analisadas através do pensamento dos primeiros filósofos que se debruçaram para discutir questões referentes à filosofia da matemática. Partindo destes pressupostos, podemos pensar as formas que o aluno constrói ou descobre para o objeto matemático. O importante é reconhecer que o objeto matemático está intimamente ligado ao seu conceito.

#### 4. 4 CONCEITO DO OBJETO

O conceito do objeto deve estar atrelado ao objeto, mas como o sujeito constrói ou descobre o conceito de um objeto matemático e como se processa esta construção ou descoberta?

Para refletirmos sobre tais questões, analisamos algumas idéias de filósofos preocupados com o conceito do objeto matemático. O pensamento de filósofos fundadores deste debate se reflete nas idéias dos filósofos contemporâneos.

Kant e Wittgenstein divergem de forma significativa no que se refere à construção de um conceito matemático. O primeiro se preocupa com o como o sujeito pensa o objeto, através das categorias *a priori* submetidas à intuição. Os juízos necessários e universais são independentes da experiência, porém é nela que o sujeito encontra condições de conhecer o objeto através da percepção (o fenômeno). Estas condições *a posteriori* se dão quando o sujeito vê o objeto e constrói a sua imagem, que é a forma do objeto sem o conteúdo deste objeto. Assim, a intuição, submetida às categorias *a priori*, unifica-se na consciência. O pensamento, para Kant (1991, p. 64), “é o conhecimento mediante conceitos”.

Wittgenstein não se preocupa com o processo interno do sujeito, e sim com o sentido das palavras que o sujeito emprega. Para o autor, o pensamento não consiste de palavras, mas de componentes psíquicos, que possuem a mesma relação da realidade com as palavras.

Não sei quais os constituintes de um pensamento, mas sei que ele deve possuir tais componentes, que correspondem às palavras da linguagem. Por outro lado, o tipo de relação entre as partes constituintes do pensamento e as do fato afigurado é irrelevante. Descobri-lo seria tarefa da psicologia (Wittgenstein, apud Spaniol, 1989, p.43).

Wittgenstein mostra que a linguagem se fundamenta nos jogos e que depende do contexto em que estes jogos de linguagem se inserem. No *Tractatus logico-philosophicus*, o autor analisa a forma lógica do discurso. A possibilidade do significado é compreendida na

estrutura lógica da linguagem. Já em *Investigações filosóficas*, a linguagem é analisada no seu uso, nos diferentes contextos em que os jogos de linguagem estão inseridos.

Gilles Gaston Granger (1990), ao analisar a possibilidade de uma ruptura entre estas duas obras de Wittgenstein, diz que não se trata de duas filosofias, e sim que existe unidade entre elas. O próprio Wittgenstein indica o abandono de certas teses do *Tractatus*. Na segunda obra, ele nada renuncia, apenas corrige as suposições indicadas na primeira.

Os itens a seguir tratam das relações do conceito do objeto com o próprio objeto matemático e das relações com o sujeito que busca um intermediário entre o conceito matemático e o automovimento da matemática.

#### **4. 4. 1 O conceito na perspectiva de Kant**

Como ciência das regras do entendimento, a lógica nos fornece amplas pistas para compreendermos como o sujeito usa o entendimento. As regras do entendimento são regras que nascem de analogias e de regularidades percebidas pelo sujeito, imerso no mundo da vida, ao pensar as diferentes classes de objetos. Elas fundamentam o pensamento. O conteúdo e a forma do pensamento quem fornece é a sensibilidade.

Pensar fazendo abstrações submetidas à contingência e à sensibilidade é agir segundo tais regras abstraídas do uso. Daí que a lógica é abstrata, de caráter universal e formal. A passagem de um conhecimento particular ao universal é obtida pela síntese de percepções que se dá através das regras do entendimento. A passagem do geral ao abstrato não é imediata, pois a lógica dos fenômenos não se reduz às regras do pensar. Abstração do entendimento é compreendida como abstração de todo conteúdo das significações que surgem das relações

das cognições com os objetos. O caráter formal é a forma do pensamento, como se tivesse conteúdo, ou seja, o pensamento abstrai a forma do conteúdo.

A lógica é uma condição do pensar, condição necessária da verdade que obedece o princípio da não contradição, pelo qual a falsidade é uma não verdade. A lógica é a doutrina lógica do pensar e não do conhecer, ela estuda a forma do pensamento, já que a limitação do conhecer está sob o domínio do fenômeno, que é a representação do objeto percebida pelos sentidos.

A cognição, para Kant, tem o significado de compreensão, é o próprio ato de relacionar o sujeito com as coisas que estão fora dele. Os objetos percebidos se juntam às cognições e formam os juízos. As relações das cognições com seus objetos acontecem através do uso da lógica e da intuição. A cognição está de acordo com a forma do objeto e descarta o seu conteúdo.

O conceito do objeto não ocorre na experiência. A conversão de representações em conceito se dá analiticamente, elas se convertem em conceito sem engendrar contradição. A conexão das representações atribuídas ao objeto forma o conceito, que é a relação entre o objeto e o juízo.

Um conceito puro, subordinado às abstrações construídas pelo sujeito, ingrediente necessário à cognição, só ganha objetividade na medida em que é um conceito empírico. O conceito se dá por construção lógica e pelo uso da intuição.

Não existem critérios para encontrarmos a verdade porque não podemos falar da coisa em si. Apreensão subjetiva e objetiva da coisa, como fenômeno, nos conduz ao conceito da coisa e não a coisa em si. As coisas estão submetidas ao espaço e ao tempo que afetam o sujeito numa relação de alteridade. O reino dos conceitos procura um intermediário entre as palavras e as coisas, e não entre o sujeito e a coisa. As palavras significam conceitos de coisas

e estes são formas lógicas. Uma forma lógica é ontológica, mas uma forma ontológica não implica que seja lógica.

O conhecimento do objeto surge quando o sujeito recebe as representações na mente e pensa o objeto segundo as representações advindas de seus conceitos. Assim, intuição e conceitos constituem os elementos do conhecimento. No conhecimento puro, a representação do objeto não se mescla à sensação. No conhecimento empírico, que é *a posteriori*, a sensação é produzida pela presença real do objeto.

O conhecimento matemático surge da construção de conceitos. “Construir um conceito significa apresentar *a priori* a intuição que lhe corresponde” (Kant, 1991, p. 182). A intuição não é empírica, e sim pura, sem auxílio da experiência. A construção de um triângulo, por exemplo, é a representação do objeto correspondente ao conceito de triângulo ou a imaginação do triângulo na intuição pura.

Na matemática, não há uma pergunta pelo objeto, e sim pelas propriedades do objeto, na medida em que elas estão ligadas ao conceito do objeto. O conceito é construído por desmembramento de outros conceitos adicionado à intuição. Ao dizermos “por dois pontos passa uma única reta”, está implícito o fato de que a reta tem infinitos pontos. A definição forja o próprio conceito, ou seja, não existe conceito anterior à definição. A demonstração matemática deriva do seu conhecimento e da construção de seus conceitos (não dos conceitos em si), que partem de intuições *a priori* e correspondentes aos conceitos.

(...) podemos obter conhecimentos *a priori* dos objetos (na Matemática), mas somente segundo a sua forma, como fenômenos (...) todos os conceitos matemáticos não são por si conhecimentos, a não ser na medida em que se pressuponha haver coisas que nos possam se apresentar somente conforme a forma daquela intuição sensível pura (p. 87)

Isto se explica porque os objetos no espaço e no tempo nos permitem a percepção, que é a representação do objeto acompanhada da sensação. A intuição *a priori* aplicada à

matemática não produz conhecimento, pois as categorias de espaço e de tempo não fornecem conhecimento do objeto mediante a intuição e sim quando é aplicada à intuição empírica e que depende da experiência. O espaço e o tempo são formas da intuição sensível e oferecem as condições de existência das coisas como fenômenos, nas ações visíveis. Não podemos conhecer os objetos como coisas em si, podemos apenas pensar o objeto abstraído de seu conteúdo. O conhecimento da coisa é possível *a posteriori*, no contexto da experiência.

Como todo o ser discursivo tem que ser lógico, compreender um conceito é dar as razões ao conceito de forma analítica, ou seja, análise fundamentada nos juízos. Avaliamos conforme nossos critérios de verdade e falsidade: assim julgamos os objetos. O fundamento do objeto está no enunciado e não na enunciação, demonstrado como condição de possibilidade e deduzido no sentido lógico.

#### **4. 4. 2 O conceito na perspectiva de Wittgenstein**

Para Wittgenstein, o conceito é uma regra que se fundamenta no jogo de linguagem e se corresponde com o seu significado. Mudam os jogos de linguagem, mudam os conceitos e também mudam os significados das palavras. Os jogos de linguagem se assentam em certezas, mas são imprevisíveis e não se baseiam em fundamentos.

“Conceito é um conceito vago (...). Conceito é algo assim como uma imagem com a qual se confrontam objetos” (tradução minha) (Wittgenstein, 1987, p. 366). Este terá sentido quando for incorporado na linguagem do sujeito. “É por isso que existe correspondência entre os conceitos, ‘regras’ e ‘significado’” (Wittgenstein, 2000, p. 31).

Aprende-se o significado das palavras nos jogos de linguagem. De acordo com Wittgenstein (1996), podemos saber algo, mas não sabemos dizê-lo. “Evidentemente, não

identifico a minha sensação por meio de critérios, mas uso a mesma expressão. Porém, com isso, não acaba o jogo de linguagem; com isso, ele começa” (p. 136). O jogo inicia com o querer dizer.

No uso da linguagem, “uma parte grita as palavras, a outra age de acordo com elas” (p. 18), nomeamos os objetos ou repetimos palavras. “Chamarei de ‘jogo de linguagem’ também a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada” (p. 19).

A necessidade matemática forma conceitos que são compreendidos. “Proporcionar um novo conceito só pode significar introduzir um novo uso conceitual, uma nova práxis” (tradução minha) (Wittgenstein, 1987, p. 366).

As técnicas de descrição ou de representações de objetos dentro de um jogo de linguagem se convertem em conceitos. O sujeito produz um novo conceito para se convencer de algo, sendo esta possibilidade de convencimento parte do jogo de linguagem.

Na matemática, os conceitos fluem um do outro e o conceito é uma regra interpretada. O cálculo não é um experimento, mas a experiência ensina como se calcula. Ele é um experimento quando o professor quer saber se seu aluno sabe calcular, por exemplo. A operação de cálculo é um experimento, é a técnica e a imagem de um experimento. As experiências não fazem o cálculo por nós, é a demonstração que dirige nossas experiências. “Isto será assim” (o resultado de um cálculo) não admite experiência, já está fixado pela regra. Nos prejuízos destes critérios “ao estarmos educados para uma técnica, também estamos educados para um ponto de vista, que está tão firmemente assentado como esta técnica” (tradução minha) (Wittgenstein, 1987, p. 202).

O cálculo não é uma proposição da experiência, é simplesmente a aplicação da regra. Na imaginação, posso calcular, mas não experimentar, daí que calcular é uma técnica e um movimento entre os conceitos.

A proposição matemática é uma determinação conceitual descoberta no uso. Conhecer a proposição não é fato da experiência. As proposições matemáticas desempenham, em determinados jogos de linguagem, o papel de regras de representação. Elas necessitam de uma clarificação de sua gramática. Assim, a matemática é um jogo de signos segundo regras.

É vago dizer que a matemática forma conceitos, visto que o conceito de uma regra não é especificamente um conceito matemático, e sim um conceito que advém da conexão da atividade do sujeito com a aplicação da regra. Ao seguir a regra, o sujeito lhe dá sentido, formando assim o seu conceito e participando do jogo de linguagem. Seguir uma regra é um jogo de linguagem; joga quem compreende a descrição da regra, o sujeito apenas deve segui-la, fazer o mesmo, pois existe apenas um caminho.

A matemática é normativa, segue normas e regras. Um sujeito pode instruir outro sujeito como ele segue a regra, mas não como este outro deve fazer, “justamente sobre o fato de que não há nada entre a regra e minha ação” (tradução minha) (Wittgenstein, 1987, p. 356). Cada sujeito segue uma regra com suas próprias sensações.

O importante na demonstração é como o sujeito constrói o sentido da proposição. A demonstração é um modelo e uma imagem e, pela demonstração, se negocia a gramática de nossa linguagem como também se negociam nossos conceitos. Assim, a demonstração produz novas conexões e cria o conceito dessas conexões, guia e dirige nossas experiências dentro de canais determinados e mostra o sentido de uma proposição.

Uma pessoa pode calcular sem ter o conceito de alguns fatos matemáticos, simplesmente porque ela segue a regra, manipula cifras segundo regras determinadas. A introdução de uma regra de inferência é um passo para um jogo de linguagem. Quem segue um jogo deve ater-se às regras.

Na matemática, devemos seguir a regra e chegar ao mesmo resultado, porque uma proposição matemática é aceita universalmente, quando obtiver o mesmo resultado para qualquer sujeito, mesmo que o resultado seja obtido por intermédio de imagens diferentes.

A necessidade matemática é uma expressão outra que justifica o fato de que a matemática forma conceitos. Estes conceitos servem à compreensão de uma proposição. A matemática forma uma rede de normas, ela é lógica e se move nas regras da nossa linguagem.

Uma proposição da aritmética é uma conexão conceitual. “A equiparação de  $25^2$  e  $625$  me proporciona, poderia dizer-se, um novo conceito. E a demonstração mostra como se explica essa igualdade” (tradução minha) (p. 366) .

A demonstração mostra o sentido de uma proposição, serve para nos convencer. Os conceitos são inventados sem necessidade de aplicação. O conceito é compreendido no uso da linguagem materna e auxilia na compreensão de proposições que não se aplicam no cotidiano, como a palavra “infinito”, por exemplo. Daí que é necessária a tradução da linguagem cifrada da matemática para a linguagem materna, com o objetivo de clarificar a sua gramática.

Calcular é um movimento entre os conceitos, onde a demonstração do cálculo é um novo conceito e também a transição para um juízo. Este movimento entre os conceitos nos permite a construção de outros conceitos.

“Como” se calcula mostra o modo “que” se obedece a regra. Seguir uma regra é a base do jogo de linguagem, é uma atividade humana. No processo de seguir as regras, é que se assentam os juízos. Palavras com os mesmos significados, coincidências dos juízos e regras são fenômenos iguais. As palavras inventam um jogo e, jogar o jogo tem sentido num contexto determinado.

Tem sentido dizer que ensino quando se pode multiplicar, quando ensino a multiplicar? Não! Quando o professor ensina a multiplicação ao aluno, não pode ter garantia

de que o aluno saiba quando multiplicar. O conceito de multiplicação pode variar conforme o contexto, na perspectiva do aluno. A matemática produz conexões conceituais e sua necessidade forma conceitos que são compreendidos. Proporcionar um novo conceito significa introduzir um novo uso conceitual.

#### **4.4.3 O Conceito na perspectiva de autores contemporâneos da Filosofia da Matemática**

Caveing (2004) diz que uma filosofia do conceito nega ao sujeito todo poder constituinte e recusa de ver nele outra coisa que um pólo de atividade atravessada pelo dinamismo do conceito. O sujeito pode apenas experimentar o conceito porque o mesmo não é o seu produto, mas vem a ele a partir de uma aquisição conceitual dele mesmo. Com o conceito aparecem a necessidade e a objetividade própria da matemática, pois ele é um produto da imaginação e está atrelado à razão. Assim, o sujeito forja um aparato conceitual sustentado em bases racionais.

Para Marco Panza (1995), podemos operar com o objeto sem necessitar de seu conceito que é cristalizado numa definição e que, ao pertencer a um sistema formal, permite liberar o objeto. Podemos colocar em evidência as propriedades de um triângulo ou de uma equação, as quais dependem certamente do conceito de triângulo e de equação. Estes conceitos estão cristalizados nas definições<sup>12</sup> destes objetos, mas que encontramos por um meio indireto. Assim, o critério de verdade pode ou não depender do conceito do objeto.

O conceito de triângulo é dependente do seu objeto. O polígono de três lados não pode ser confundido com um sólido geométrico de quatro faces, por exemplo. O conceito e suas

---

<sup>12</sup> “Do ponto de vista lógico, definir significa determinar a “compreensão” que caracteriza um conceito” (Japiassú & Marcondes, 1996, p. 64).

propriedades são cristalizados na definição do objeto, porém as propriedades do objeto não são compreendidas no seu conceito. O conceito do objeto tem uma função cognitiva que preside o reconhecimento, via caracterização lingüística. O conceito é traduzido na definição.

Para Panza, o problema não é a existência da coisa em si, e sim o processo de objetivação, a passagem do conceito ao objeto. O conceito libera um conteúdo que se transforma em um objeto matemático por um ato de objetivação que corresponde à construção de um sistema formal. A liberação do conteúdo que constitui o objeto e que será expressa em uma estrutura sintática representa uma formalização sem intuição. A formalização do conceito em linguagem matemática demanda a objetivação da escrita e a intenção do sujeito.

O ato intencional é um ato de constituição, e o objeto é o resultado da projeção de uma consciência. De acordo com o autor, o conceito tem a função de comunicar ou de expressar, através da linguagem matemática, o que se conhece do objeto.

A análise do pensamento destes filósofos sobre a constituição do objeto e do conceito auxilia na compreensão do processo de transformação do conceito matemático depois da interpretação do aluno. O conceito antes da interpretação do aluno pode estar no plano de aula do professor, num exercício proposto, em qualquer outra atividade de sala de aula ou até mesmo numa atividade extraclasse.

O conceito que o professor quer que o aluno construa será conectado com outros conceitos, de acordo com a imaginação e a memória do aluno, mas deve obedecer às necessidades e exigências da matemática. Assim, o conceito a ser construído é ‘escravo’ do seu objeto e não pode ser modificado. Porém, como o sujeito projeta sentidos seus ao objeto, ele acaba transformando o conceito. Neste movimento entre a subjetividade do aluno e a objetividade da matemática, nasce uma nova lógica e um novo conceito.

#### 4. 5 AS REPRESENTAÇÕES DO OBJETO MATEMÁTICO

A apreensão objetiva do conceito é articulada com as imagens e representações do objeto, em que “a estrutura sintática é a cristalização dos fenômenos intencionais” (tradução minha) (Panza, 1995, p. 115). De acordo com Caveing (2004), é onde se dá uma síntese dos esquemas operatórios, ou seja, o pensamento opera a relação circular entre a idealidade do objeto e o seu devir. O sujeito objetiva o subjetivo, obedecendo às necessidades da matemática.

O esquema é a regra de produção de imagem na intuição; a síntese dos esquemas relacionais e operatórios dá forma à idéia, porque “o ato de construir define o ato de escrever” (tradução minha) (Pierobon, 2003, p. 229). A idéia se manifesta na escritura. A regra da produção da imagem é a regra de produção do conceito, e o conceito é a linguagem dos atos. Por exemplo, construir uma figura geométrica, para poder nela pensar, é procurar uma imagem para o conceito e também uma representação.

Se o ato de construir define o ato de escrever, é através da escrita que o sujeito mostra o conceito construído. Ele escreve o que construiu em sua imaginação, sem a sua intuição primeira. Ele faz analogias e formaliza através da palavra escrita, representando suas idéias através de um logos.

Entre as diversas funções da escrita matemática podemos destacar duas delas: nós escrevemos para não esquecer e para dar forma ao pensamento. O aluno copia o que o professor escreve e mostra para não esquecer: as definições, os conceitos e suas propriedades. Mas ele também escreve para dar forma ao pensamento ao responder questões. Quando o professor corrige as questões por ele propostas e resolvidas pelo aluno, ele “lê” o pensamento do aluno em uma linguagem formalizada. De acordo com Granger (1990), para Wittgenstein,

a linguagem formal é idêntica ao pensamento, no sentido que ela é desprovida de ambigüidades, diferentemente da linguagem materna que é polissêmica.

Para Granger (1974), a objetivação do fato humano é a neutralização da ação vivida. Esta neutralização reduz a ação (o conceito) aos efeitos (o cálculo), ou seja, a ação é substituída pelo cálculo. O pensamento do autor corrobora a idéia de que é na escritura que o sujeito revela seus atos intencionais.

O sujeito, após verificar os casos particulares de um objeto, faz generalizações e representa através da linguagem formalizada (a maneira pela qual o conteúdo do pensamento é colocado em forma) que, na matemática, é universal.

Um dos grandes problemas dos alunos é não conseguir generalizar o conhecimento. Não me refiro simplesmente à intuição dos casos particulares de um determinado conteúdo e à conceitualização do universal. Refiro-me ao ato de transpor conhecimentos de um estágio a outro. Isso não é tarefa fácil. Neste sentido, me parece que pouco o professor transmite ao aluno, não por negligência, mas por não ter controle dos pensamentos e ilações do aluno.

A pergunta: “Professora, a senhora está ensinando com “a” e “b” ( $\log_x ab = \log_x a + \log_x b$ ), mas no meu livro aparece “x” e “y” ( $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ), mas isto é a mesma coisa, não é?” reflete esta problemática. Este caso ilustra como o aluno não generaliza, pois não reconhecer que “a” e “b” foram as variáveis por mim escolhidas naquele momento e que o autor do seu livro escolheu outras, evidencia a problemática do aluno na leitura de variáveis em um texto matemático. Como o aluno não compreende, ele não consegue generalizar.

O conceito de variável para este aluno não está claro, e ele já deve ter estudado diferentes conceitos matemáticos que se expressavam com variáveis. Porém, ao mudar o

contexto escolar, mudam as palavras (de “a” e “b” para “x” e “y”), e muda também o conceito para o aluno.

Em outra situação, um aluno disse ao seu colega: “a professora ensinou errado, porque no polígrafo está  $\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b}$  e ela disse que  $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$ ”. Ora, frações equivalentes são estudadas na 4<sup>a</sup>. série do ensino fundamental. No momento em que eu estava trabalhando com trigonometria com alunos do ensino médio, não pensei que um aluno poderia fazer tal “confusão”, e apenas pude saber porque ele manifestou-se verbalmente.

Estes fatos demonstram o problema das generalizações, que não acontecem espontaneamente, e que o professor não se dá conta no momento em que está administrando seu papel de educador.

A linguagem matemática busca sintetizar todos os casos possíveis através de fórmulas, regras e algoritmos. A abreviação através do algoritmo é a redução dos atos. Ao apresentar a regra para derivar a função  $f(x) = ax$  que é  $f'(x) = a$ , um aluno, após fazer alguns exercícios, diz: “é só tirar o ‘x’”. A sua explicação de como se aplica a regra não satisfaz as exigências teóricas, porém o aluno não está totalmente equivocado. A derivada de  $ax$  é  $a$ , de  $3x$  é  $3$ , de  $4x$  é  $4$ , de  $5x$  é  $5$ , de  $mx$  é  $m$ . Como ele ‘vê’ a derivada de qualquer função do tipo  $y = ax$  se apresentar sempre sem o ‘x’, ele deduz a regra e explica utilizando a sua linguagem e expõe a sua maneira de interpretá-la.

O aluno faz uma abreviação da definição e da interpretação geométrica da derivada de uma função. Ele cria uma explicação da regra que lhe exigirá menor esforço. Em cada ato de derivar diferentes funções, de  $3x$  é  $3$ , de  $4x$  é  $4$ , de  $5x$  é  $5$ , etc., ele projeta sentido, fabrica relações e compreende. Ele percebe a similaridade de um ato a outro. Interpreta, elaborando as possibilidades projetadas na compreensão. Ele projeta sentidos para compreender e

interpreta. A aplicação da regra vai aos poucos se tornando familiar, até o momento em que ele generaliza e diz “é só tirar o ‘ $x$ ’”.

Existe uma dificuldade para explicitar a regra. Esta dificuldade é lingüística, pois o aluno só pode explicitar após ter compreendido. Ele tenta descrever a família de parentesco que percebe de um ato a outro. O que ele vê é sempre a ausência do ‘ $x$ ’. Este desaparecimento do ‘ $x$ ’ é o resultado da aplicação da regra, surge na percepção do movimento da descrição da regra, e seguir a regra é um ato de interpretação.

O grande problema da linguagem formalizada é a economia de linguagem. Com a utilização de poucos símbolos, muito se pode dizer de um objeto matemático. As fórmulas e os algoritmos se prestam muito bem para isto. O algoritmo é a construção de uma necessidade sem ação e a causa de uma utilidade, pois é a forma de reduzir e neutralizar a ação vivida. O aluno pode construir o conceito do objeto, mas o que lhe convém saber (memorizar) é o algoritmo. “Como calculo?” Com o algoritmo.

Os alunos queixam-se com frequência da quantidade de fórmulas a serem “decoradas”, mas, paradoxalmente, eles reivindicam fórmulas para solucionar problemas. Muitos alunos não se preocupam com o como resolver, e sim com qual a fórmula a aplicar para resolver o problema proposto.

Em minha experiência como docente na universidade, no curso de Ciências Contábeis, percebi a grande dificuldade dos alunos com a matemática. Na tentativa de melhorar o rendimento na disciplina, fiz uma experiência de trabalhar conceitos matemáticos conforme a necessidade do programa, evitando que os mesmos fossem carregados de simbolismos. Procurei trabalhar com idéias, sem recorrer a definições pomposas e rigorosas. Os problemas que propus em sala de aula não necessitavam de fórmulas para serem resolvidos. Para minha surpresa, no dia da aplicação de uma avaliação, alguns alunos me pediram que colocasse no quadro “as fórmulas” de resolução.

O meu objetivo de melhorar o rendimento dos alunos felizmente foi atingido, mas ressalto que nem sempre é possível trabalhar os conteúdos com a aplicação no cotidiano. A exemplo deste trabalho desenvolvido, procurei problemas de aplicações da matemática na área da Economia.

Muitos alunos estão presos a fórmulas justamente porque representam uma maneira de encontrar um substituto para a resolução do problema. A fórmula resolve o problema, ela define o que tem que ser feito, possibilita encontrar a solução, cabendo ao aluno apenas aplicá-la.

Com frequência, os professores apelam para as noções intuitivas antes de definir um objeto matemático. Por exemplo, fazer o aluno intuir que uma bala dividida para milhares de crianças faz com que cada criança receba uma quantidade que tende a zero.

Isto significa que, antes do aluno pensar que uma unidade dividida por um número muito grande tende a zero, ele representa esta pequena quantidade mentalmente, auxiliando-lhe na compreensão da definição de limite de uma função. O aluno intui a divisão da bala por muitas crianças, porém pensar mediante o conceito de divisão e conhecer o conceito de limite de uma função são coisas diferentes.

As relações lógicas e a intuição com a intervenção dos sentidos convergem para dar certeza, para conhecer o objeto. As relações lógicas, assim como as estruturas matemáticas, para Piaget e García (1984), não são inatas, elas constroem-se no mesmo tempo que a organização do mundo empírico, são partes integrantes dos processos de organização. Segundo os autores (1987), existe uma lógica das significações que precede a lógica formal dos enunciados, e tal lógica das significações está fundada em implicações entre as significações ou em implicações entre ações. Essas relações lógicas que o sujeito faz com o objeto não são imediatas, são construídas na experiência com o objeto.

Os procedimentos lógicos subjacentes às sentenças matemáticas são necessários para argumentar uma demonstração, para fazer ilações e para conhecer as verdades lógicas e matemáticas. Para Russell (1963, p. 195), “as proposições lógicas são tais que podem ser conhecidas *a priori*, sem o estudo do mundo real”, ou seja, elas têm um mundo autônomo. Os símbolos da matemática e da lógica parecem viver uma autonomia dentro de seu universo formalizado.

De acordo com estes autores, as relações lógicas que o sujeito faz com o objeto devem ser construídas na experiência, não são *a priori*; já as proposições lógicas vivem uma autonomia e constituem um *a priori*. As relações lógicas que o sujeito estabelece com o objeto não são as mesmas relações entre as próprias proposições lógicas.

As categorias “o verdadeiro e o falso”, “o universal e o necessário” são necessidades que constantemente se colocam num texto matemático e que servem para justificar ou excluir elementos de um conjunto, restringindo o universo de escolha do aluno, como se estivesse entre a “cruz e a espada”.

Uma maneira de fazer economia de linguagem é a utilização de símbolos. A língua formal deve ser traduzida para a língua materna. Esta linguagem cifrada faz apelo ao uso de letras, porém a álgebra é considerada um obstáculo epistemológico, pois seus símbolos são frios e sem sentido para o aluno.

Pierobon (2003) diz que a álgebra é uma escritura emancipada de uma intuição. Esta disciplina é uma construção simbólica em que escritura e imagem estão dissociadas e em que o algoritmo algébrico representa um salto epistêmico. “Os estudantes se queixam” da álgebra, diz o autor, justamente porque nela “nós não podemos nem ver nem imaginar” (tradução minha) (p. 86).

A percepção, a imaginação e a memória do sujeito têm um papel importantíssimo na constituição mental do objeto. Ao perceber o objeto matemático, o sujeito cria o seu conceito

do objeto. Este ato de criação envolve a percepção (que é a consciência do objeto percebido), a imaginação (que é a consciência do objeto em imagem) e a memória, no qual a imaginação reproduz um estado de consciência anterior e o sujeito se recoloca no passado. A imaginação e a memória se opõem à percepção, pois elas têm a capacidade de representar o que está ausente.

De acordo com Bouriau (2003)<sup>13</sup>, a imaginação reproduz um estado de consciência anterior, e imaginar é dar uma imagem ao objeto, é uma atividade ativa. Perceber é receber o objeto, é uma atividade passiva, e a percepção pode se enganar; já a imaginação não se engana, ela é decisiva. A memória também pode se enganar, confundir, mas quando não se engana, ela encontra precisamente o objeto. Assim, a memória e a percepção podem se enganar, mas a imaginação não, pois podemos obter o objeto como queremos.

A percepção é construída por quem percebe. A percepção livra o objeto pouco a pouco, já a imaginação livra em bloco. Quando percebemos um objeto, tiramos dele todas as informações que queremos, assim como todas as suas características. Porém, quando imaginamos, reproduzimos e construímos o objeto.

É através dos ‘jogos da imaginação’ que o sujeito cria. Ele organiza os elementos antigos numa perspectiva nova. Os elementos percebidos são reproduzidos de acordo com as sensações.

Na relação da imaginação e da memória, surgem representações novas, a partir das antigas. A imaginação contesta o real e recria o objeto a partir da sensação. Não existe percepção primeira, e sim imaginação primeira : percepção imaginativa, intuição que imagina. As percepções têm imagens antecedentes (afetivas e da experiência).

---

<sup>13</sup> Existem concepções diferentes que tratam das relações entre a percepção e a imaginação.

A imaginação produz esquemas necessários à percepção e também evoca lembranças. Porém abstrair é isolar elementos de um todo, é pensar o objeto sem ter o objeto presente. A imaginação permite descobrir propriedades dos conceitos matemáticos. Ela reproduz sensações do objeto afetadas no passado, cria símbolos com significados e produz figuras e esquemas. A imaginação depende da sensação do sujeito e organiza elementos antigos numa nova perspectiva, elementos outrora percebidos.

## 5 RELAÇÕES ENTRE A FILOSOFIA DA MATEMÁTICA E A APRENDIZAGEM

### 5.1 A CRÍTICA AO ENSINO DA MATEMÁTICA

A crítica que se faz ao ensino da matemática resulta da constatação do fracasso do aluno na disciplina. As constantes reprovações servem como um indicativo que faz soar o alarme de que algo está mal na escola. Neste contexto, a responsabilidade de tal fracasso recai no seu ensino, logo quem fracassa não é o aluno, e sim o professor. Afinal de quem é a responsabilidade? Do aluno que estuda e não aprende ou do professor que “dá aula” e não ensina?

Recentemente, uma colega, aluna do Doutorado em Matemática Pura, em tom de lamento, contou-me que seu professor disse a ela e às suas colegas, todas professoras universitárias: “Se vocês não entendem nem isto, então vão vender Avon”.

A conversa com a colega me fez pensar que o seu desagrado com os ensinamentos recebidos provavelmente deve ser similar aqueles que oferece aos seus alunos. Este professor talvez tenha “recomendando” que suas alunas vendessem “Avon” porque tal atitude não exige muitos conhecimentos matemáticos, mas também porque é uma atividade reservada às mulheres, o que recai no mito de que “matemática é para poucos”.

Trago este depoimento para ilustrar alguns dos problemas no ensino e na aprendizagem da matemática, tanto no ensino fundamental e médio, como na pós-graduação. Será que a pergunta pela responsabilidade do fracasso não deveria ser reformulada? Não seria mais conveniente perguntar pelos problemas que a matemática apresenta, quando se pretende aprendê-la e ensiná-la?

Ao supormos que a matemática tenha algumas características singulares, que a diferencie das demais disciplinas, e o professor reconhecer tais características, é provável que os problemas em seu ensino sejam amenizados.

O professor muitas vezes não percebe que não tem o “controle” do processo educacional, pois não tem “controle” do processo interno do seu aluno. As teorias educacionais colocadas em prática não garantem o sucesso prometido. Esta promessa não cumprida se manifesta em sentimento de frustração no professor, num crescente descrédito de seu papel na escola e também num desencantamento com o processo educacional, ao perceber que seu aluno não aprende.

Stella Baruk (1996) é severa não apenas em suas críticas às propostas construtivistas aplicadas na disciplina de matemática como também ao tratamento psicológico recomendado aos estudantes. Ao comentar sobre o enquadramento do perfil dos estudantes propostos pelos manuais de psicanálise/psicologia, alerta:

Procurar os buracos, procurar as faltas, querer reparar os disfuncionamentos, a impossibilidade é pura e simplesmente pressupor que eles podem explicar uma inaptidão da criança. Substituir o postulado, antigo, do aluno “não dotado” pelo postulado moderno, da criança que tem perturbações do “lógico-matemático” é substituir o cancro pelo doente (p. 52).

Seguindo em suas análises, a autora cita a tentativa sem sucesso de uma investigação para tentar encontrar tipos de bloqueio intelectual em matemáticas nas crianças do ensino elementar. A pesquisa relatada num dos manuais verificou que não se tratava de um bloqueio intelectual, e sim um bloqueio puramente afetivo, geralmente devido à ansiedade da mãe.

A autora refuta tal argumento, pois crianças “bloqueadas” por pais “bloqueados” estariam fadadas ao insucesso em matemática até o momento que seus pais resolvessem desbloquear-se.

As análises da autora nos levam a refletir sobre a ilusão de um sucesso garantido pelas diferentes teorias educacionais. Apesar destas análises terem sido feitas em escolas francesas, a realidade educacional brasileira parece não ser muito diferente, pois como os nossos educadores têm necessidade de segurança e êxito em seus empreendimentos em sala de aula, também acabam aderindo às teorias educacionais como um modismo.

Atualmente, o professor que não se diz construtivista é rotulado como “professor tradicional” e visto com maus olhos perante a comunidade escolar. Este até pode conduzir o aluno a construir o conceito almejado com o uso de ações imaginadas, mas se não fizer uso de material concreto em sala de aula, será considerado um professor desatualizado.

Os professores estão constantemente experimentando novas técnicas que possibilitem o desenvolvimento das habilidades dos alunos na aquisição de conhecimentos matemáticos. Além do construtivismo, existe a possibilidade de um trabalho com modelagem matemática, que segundo Bean (2001, p. 49), “tem um enfoque no qual os alunos criam modelos matemáticos para representar situações dadas. Ou seja, é semelhante aos procedimentos para as resoluções de problemas”. É possível também trabalhar com uma abordagem etnomatemática, que é uma forma de perceber o meio cultural em que vive o aluno, buscando atividades em sala de aula que explorem o conhecimento desta cultura. Porém, apesar destas diferentes formas de tentar ensinar<sup>14</sup>, muitas perguntas ainda continuam sem respostas.

Por que as pessoas que fazem cálculos matemáticos com muita eficiência não conseguem colocar no papel os seus “malabarismos” mentais? Qual a dificuldade em representar aquilo que se conseguiu no plano da abstração?

---

<sup>14</sup> As principais fontes de discussão e busca de soluções para os problemas do ensino de matemática se encontram nas publicações da *Revista do Professor de Matemática*, sob a direção da Sociedade Brasileira de Matemática, e nas publicações *A Educação Matemática em Revista*, sob a direção da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

De acordo com Wittgenstein (1987), a intuição não caminha com o material morto da escrita. Quando o sujeito escreve, supõe-se que o texto escrito esteja endereçado a um leitor. Em sala de aula, o professor escreve para o aluno, mas a sua escrita com símbolos universais da matemática não garante a sua significação na leitura do aluno (individual).

Além da dificuldade de nomear o que está no plano da intuição, o signo matemático é “morto” na perspectiva do aluno. Na sala de aula, o professor, como leitor modelo, auxilia o aluno a dar vida a este signo “morto”. Porém a significação do signo isolado, às vezes, não adquire sentido na operação.

Esse fato explica o motivo de alguns alunos, inclusive adultos do ensino superior, não saberem somar frações corretamente. Os alunos se prendem apenas à representação simbólica dos algorismos e não contemplam o sentido da operação.

Por exemplo, é comum alguns alunos somarem  $1 + \frac{1}{2}$  e encontrarem como resultado  $\frac{2}{2}$ . Partindo do pressuposto que eles saibam que  $\frac{1}{2}$  representa a metade de algo, como pode ser possível que algo inteiro somado com a sua metade seja  $\frac{2}{2}$  que é o próprio inteiro?

Para Kant, um juízo falso resulta quando o sujeito toma o modo subjetivo (o sentido dado ao objeto) da representação como objetivo. Ao se contentar com o que vê, ou seja, ao atribuir sentido apenas na intuição, através do qual o objeto nos é dado (o fenômeno), o sujeito pode tomar a aparência como verdade. Ao ressaltar que “a aparência não deve atribuir-se aos sentidos, mas ao entendimento”, Kant diz:

Quando o fenômeno nos é dado, somos ainda inteiramente livres para, a partir dele, julgar a coisa como quisermos. O fenômeno funda-se nos sentidos, mas o juízo depende do entendimento e a única questão é saber se, na determinação do objeto, existe ou não verdade. Mas, a diferença entre verdade e o sonho não resulta da natureza das representações, que se referem aos objetos, pois elas são idênticas em ambos, mas da sua conexão segundo

regras que determinam a ligação das representações no conceito do objeto (1987, p. 60).

Como “o conhecimento requer dois elementos: primeiro, o conceito pelo qual em geral um objeto é pensado (a categoria), e em segundo, a intuição pela qual é dado” (p. 86), temos que um objeto matemático pensado não garante que seja conhecido.

Ora, se indagássemos ao sujeito que cometeu o erro acima relatado: como pode um inteiro mais a sua metade ser igual a um inteiro? Seria provável que admitisse estar errado. No momento em que é refeita a pergunta, esse sujeito pode reconhecer o seu erro nesta mudança de contexto, pois não está mais diante de uma linguagem cifrada, e sim conduzido a refletir sobre a soma feita. É no diálogo entre professor e aluno que muitas vezes acontece o entendimento.

Para Wittgenstein (1996, p. 42), “pode-se dizer: com a denominação de uma coisa não se fez nada ainda. Ela também não tem nome, exceto no jogo”. Desta forma, temos que significar com o jogo, pois existe relação entre o que pensamos e o que falamos, daí decorre que pensamento é linguagem. Significação só existe nos contextos (relação com o outro), é pelo uso (emprego) que se determina o significado das palavras.

Porém, se admitirmos que o sujeito que errou a soma, mesmo refletindo sobre sua resposta, continuasse com a resposta errada, poderíamos dizer que o seu erro é lógico, pois continuar a admitir que um inteiro mais uma metade resulta em um inteiro é ilógico. Como pensamento é linguagem, pode-se dizer que este pensamento é lógico na perspectiva do aluno, já que não existe pensamento ilógico.

Assim, é conveniente perguntar como atribuímos sentidos aos enunciados. No referido exemplo, a adição dos numeradores, feita mecanicamente, parece não apresentar sentido para

quem conclui que  $1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$ .

Perguntar pelas condições da possibilidade deste sujeito, conhecer o significado da proposição, é supor que se tenha acesso à linguagem na qual está escrita tal proposição. Supor neste um sujeito consciente, que fala consigo mesmo e que reflete sobre algo coloca o professor numa posição diferente, na qual percebe que o sujeito aprende no jogo da sala de aula, no diálogo com o seu professor e com a disciplina.

O que devo calcular? Como posso calcular (resolver)? Como posso saber se está certo o que estou calculando? São perguntas que não encontram respostas quando o sujeito lê o texto em linguagem matemática e não compreende, pois não consegue traduzir suas palavras. Esta situação pressupõe que esteja centrado em seu problema e falando consigo mesmo.

A pergunta mais adequada parece ser: Como o aluno produz significados em matemática no contexto da sala de aula? Quais jogos de linguagem são mais eficientes para o aluno produzir significados?

A construção possível de uma outra linguagem na matemática é um dos problemas que os alunos encontram para responder um questionamento. “Não entendi o enunciado” é um argumento comum na voz dos alunos. Assim, não basta o aluno ter construído todos os conceitos que envolvem um dado problema, é necessário a conexão destes conceitos. No exemplo da soma referida anteriormente, o aluno sabe que  $\frac{1}{2}$  representa a metade de algo, ou seja, o conceito de metade está construído, porém dar-se conta que um inteiro pode ser representado por  $\frac{2}{2}$ , e que  $\frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$  deve ser uma obviedade para um aluno de terceiro grau, mas não é.

Para Wittgenstein (2000, p. 31), “um significado de uma palavra é um gênero de utilização desta. Porque é aquilo que aprendemos quando a palavra é incorporada na nossa

linguagem”. De acordo com o que se infere do autor, a palavra “metade” para o suposto aluno tem significado, já que é provável que seja utilizada no seu cotidiano.

O conceito de metade, portanto, tem significado para o aluno, pois é incorporado em sua linguagem e “é por isso que existe correspondência entre os conceitos, ‘regra’ e ‘significado’”. Porém, “quando os jogos de linguagem mudam, há uma modificação nos conceitos, e, com as mudanças nos conceitos, os significados das palavras mudam também” (p. 31).

No cotidiano, a palavra “metade” tem um significado, no momento de fazer a conta, tem outro, e, ao responder os questionamentos do professor, quando este o faz refletir sobre o cálculo efetuado, temos mais um significado possível. Mudam os jogos de linguagens, mudam os conceitos.

No cotidiano, obter a metade de uma maçã é facilmente resolvido com uma faca que corta a fruta ao meio; a metade cortada mais uma maçã inteira resulta em uma maçã e meia. Na sala de aula,  $\frac{1}{2} + 1$  representa uma linguagem cifrada que o aluno tem que traduzir, ou seja, representa uma das duas partes em que foi dividido o inteiro mais outro inteiro.

Atualmente, por inferência de teorias como a construtivista, exige-se do professor de matemática que mostre ao aluno como os conteúdos matemáticos conseguem relacionar-se com o cotidiano. Porém nem sempre isso é possível. Assim, o professor tem que fazer um grande esforço para conseguir tal peripécia, e o aluno deve esforçar-se para acreditar que tudo que está ao seu redor é matematizável.

Stella Baruk (1996) critica a demanda de que a matemática deva expressar problemas do cotidiano. Através da pedagogia crítica e social dos conteúdos, José Roberto Boettger Giardinetto (1998) também discute, no texto *Matemática escolar e matemática da vida cotidiana*, a problemática da supervalorização do conhecimento cotidiano frente à situação

atual do ensino de matemática, manifestando, assim, uma secundarização da importância da apropriação do saber escolar.

Não podemos acreditar cegamente numa teoria educacional, já que a nossa compreensão sobre uma teoria não pode ter rumo definido. Devemos ficar atentos ao aderirmos a uma prática, pois esta pode abrir outras possibilidades de intervenção na aprendizagem do aluno.

Com a impossibilidade de descrever o processo mental do aluno, é conveniente levantarmos alguns dados que, temporariamente, podem fornecer algumas explicações para o problema de incompreensão na matemática.

Stella Baruk (1996, p. 326), ao comentar o extrato de um texto que tem como especificidade a prática pedagógica e os problemas de pessoas que sofrem de afasia, que “é a perda da palavra, ou a impossibilidade de a compreender”, questiona os objetos onde a palavra necessária seria insuficiente:

São os objetos mortos, as coisas mortas do material pedagógico. Se não são os objetos, são as palavras que devem morrer. E com elas, as coisas. E é exatamente o que acontece, porque, cada vez mais, a Pedagogia ativa mata a realidade das palavras e das coisas por querer a todo custo, e sem nunca o explicar, misturá-lo com a Realidade.

A crítica da autora refere-se não apenas às tentativas que a psicologia faz ao discutir os insucessos dos estudantes na escola, mas também à ênfase pedagógica da experiência do aprendiz com o objeto.

Os objetos pedagógicos são “mortos” porque, muitas vezes, eles não têm significado para o aluno. Amontoados de materiais sobre a mesa do aluno mais confundem o objeto de estudo do que esclarecem. O material concreto que tem como função a experiência do aluno com o objeto não é garantia de aprendizagem, porque o sentido não está apenas no objeto a ser manipulado, e sim, nas suas representações.

Os conceitos matemáticos são construídos com bases em estruturas lógicas e não apresentam multiplicidade de sentidos. Como a lógica refuta a multiplicidade de sentidos, não é preciso buscar sempre no objeto este sentido único, pois muitas vezes ele está dado sem a necessidade de remeter-se ao exterior da própria lógica.

Wittgenstein (2000, p. 45) ressalta que “quando alguém tenta ensinar-nos matemática, não começa por garantir-nos que *sabe* que  $a + b = b + a$ ”, usando a palavra “sabe” em itálico, o que denota que quem ensina deve mostrar “como” conhece aquilo que está ensinando. O ensinante, ao mostrar o “como” sabe a quem ensina, justifica seus ensinamentos, sem precisar recorrer a ousadas técnicas pedagógicas. Dessa forma, saber ensinar matemática não é simplesmente saber o que se ensina. É preciso saber mostrar como sabe o que ensina. Para isso, o professor deve refletir sobre o seu saber e adentrar num nível elevado de abstração.

É provável que o aluno resista à matemática porque resiste à abstração. Se este fato é verdadeiro, cabe perguntar os motivos pelos quais o aluno resiste à abstração. Todas as disciplinas trabalham com um certo nível de abstração. A abstração não reside na superfície de um problema ou de um fato, é preciso um mergulho na reflexão; talvez este seja o motivo pelo qual o sujeito a recuse e recue perante ela.

Nos encontros (congressos, seminários, cursos) de professores de matemática, muitas técnicas são recomendadas para ilustrar de forma mais contundente os conceitos da disciplina. Percebe-se que alguns professores ficam muito satisfeitos com formas diferenciadas de demonstrações práticas e de construção de conceitos através de material concreto. Estas atividades pretendem esclarecer ao aluno o objeto de estudo e pressupõem que os professores também precisam desta clareza.

Stella Baruk revela sem constrangimentos as muitas horas gastas lendo livros para preparar suas aulas e que, posteriormente, seriam dadas em minutos. Ora, se o professor tem a necessidade de muito tempo para preparar uma aula, como pode exigir que em minutos seus

alunos aprendam o que ele próprio levou tanto tempo para aprender a ensinar? Se o professor não tem muita clareza sobre um determinado conceito, como quer que seu aluno aprenda rápida e prontamente o que para ele próprio levou tanto tempo para que se mostrasse claro em sua mente?

Quanto à figura do professor de matemática<sup>15</sup>, Bachelard (1996, p. 304) diz: “É preciso também inquietar a razão e desfazer os hábitos do conhecimento objetivo. Deve ser, aliás, a prática pedagógica constante. Não deixa de ter uma ponta de sadismo, que mostra com clareza a interferência do desejo do poder no educador científico”. Desse modo, o autor exemplifica tal sadismo: a “atitude do professor de matemática, que se mostra sério e terrível como uma esfinge, não é difícil de psicanalisar”.

Na minha prática de sala de aula, pude perceber tal sadismo, tanto de colegas de disciplina como também de alunos meus que atuaram no ensino fundamental e médio, o que, de certa forma, corrobora com a descrição de Bachelard.

Uma aluna, certa vez, ao comentar sobre a impossibilidade de reprovar seus alunos devido a uma lei municipal, disse-me: “Meu prazer é saber que eles vão rodar no vestibular”.

O sujeito é “falado” pelo seu inconsciente, segundo a Psicanálise. Esta professora, ao reconhecer tal sentimento, mostra como desloca o prazer de poder reprovar. Sacrificando este prazer, busca outro: a reprovação de seu aluno pelo vestibular.

Outra aluna, também professora em escola regida pela mesma lei, salientou: “Não sei para que a gente estuda!” Seguindo a sua linha de raciocínio, estuda-se inclusive para reprovar. Sim, é verdade, nós professores devemos reprovar os alunos que não têm condições de passar para a série seguinte. Iludir o aluno não é ético. Mas incomodar-se por não poder reprovar parece um problema de outra ordem.

---

<sup>15</sup> Conforme objeto de análise de dissertação (Silveira, 2000).

Uma colega advertiu seus alunos de que a prova seria difícil. Por que tal advertência? Parece-me que existe um certo gozo nesta advertência, caso contrário bastaria que recomendasse mais tempo de estudos ou algo similar.

É evidente que há professores de outras disciplinas também sádicos, mas as características de sadismo se sobressaltam no professor de matemática. Ou, pelo menos, tornam-se mais visíveis diante de um contexto que reafirma o mito da dificuldade e medo em matemática.

Ainda existem professores de matemática que obrigam seus alunos a colocarem seus materiais escolares no chão em dias de prova. Essa atitude demonstra total falta de respeito e de confiança, pois parte do pressuposto que todo aluno traz consigo a intenção de “colar”. A “cola”, muitas vezes, representa um formulário que alguns professores permitem ao aluno ter acesso.

A pesquisa “Formação acadêmica, situação laboral e profissional dos professores de matemática do terceiro ciclo da educação geral básica e da educação diversificada” (REDUC), feita com professores da Costa Rica, demonstrou: “Assinala-se a porcentagem de professores que mostra satisfação com seu status de professor de matemática e sua situação laboral; e se indicam alguns fatores que segundo estes professores incidem em seu labor e causam insatisfação” (tradução minha). Isso aponta para vontade de poder deste professor, já que ensinar uma disciplina que é considerada difícil lhe dá status e este, por vez, representa poder.

Está aí o professor de matemática, “sem cosméticos e sem alegorias” (Nietzsche, 1983, p. 281), manifestando suas vontades, crendo em si mesmo e tendo orgulho de si mesmo.

Em contrapartida, o aluno também manifesta esta vontade de poder. Para ilustrar esta vontade do aluno, trago uma observação de Sara Pain (1993, p. 21):

O maravilhoso no número é a matemática do número, é o jogo da matemática como invenção humana. É isso o que temos que transmitir, porque se a criança

pensa que nós estamos lhe ensinando Matemática para que conte carrinhos ou balas, isto não tem prestígio.

Não ter prestígio é não ter poder. Problematizar o processo educacional, inclusive do aluno de classes populares, desconsiderando os desejos desses alunos, é uma ingenuidade. Tirar o véu que encobre o aluno indefeso que aceita tudo que o professor propõe em sala de aula e desvendar a sua outra face mascarada pela pobreza mostra que o aluno também tem seus conflitos e não é um ser passivo e abnegado.

O problema aqui colocado não é o de defender ou criticar o professor e o aluno, e sim tentar entender o que impulsiona e o que impede o sucesso pretendido no ensino e na aprendizagem da matemática.

O ato de educar e de aprender coloca alguns impasses que não podem ser negligenciados. Se o sujeito-professor e o sujeito-aluno não têm completo domínio sobre o processo de conhecimento, temos que levar em conta suas rupturas e obstáculos, de forma que não se abra mão do acesso à tradição cultural.

Somos duplos, contudo não nos separamos como gomos de bergamotas. Andamos juntos, porém um se manifesta agora, o outro depois. Às vezes, nossas aulas são maravilhosas, às vezes horríveis. Não é fácil não sermos contraditórios, não conseguimos dar conta de tudo. Não temos controle do processo interno do aluno, mas também não temos o controle de nós mesmos. O professor é humano, demasiadamente humano.

Stella Baruk (1996) faz pertinentes críticas ao ensino da matemática as quais nos fazem refletir muito sobre esta problemática na escola, mas não aponta alternativas ou soluções para o insucesso do aluno na disciplina.

Muitas vezes o aluno é, de fato, uma vítima desse tipo de ensino. Porém, em contrapartida, percebe-se a boa vontade do professor de matemática em querer ensinar melhor

e também a seriedade com que, não raras vezes, ingenuamente adere à prática de uma teoria educacional desconhecendo seus fundamentos.

A busca pelo sucesso na educação é inevitável, pois tradicionalmente a educação alicerçada em bases sólidas vislumbra o êxito na escola. Mas igualmente temos que lidar com o insucesso do aluno e das teorias nas quais os professores se filiam e se amparam.

Não podemos acreditar em todas as vanguardas educacionais, mas também não podemos refutá-las por completo. Como diz Wittgenstein (2000, p. 47): “Quem tentasse duvidar de tudo, não iria tão longe como se duvidasse de qualquer coisa. O próprio jogo da dúvida pressupõe a certeza”.

Prender-se a práticas educacionais antiquadas sem tentar inovar é prejudicial ao ato de ensinar e aprender. É necessária uma constante mudança na forma de pensar o ato de ensinar e aprender, pois tanto aluno como professor nunca são os mesmos, eles mudam com o tempo.

“Dar aula” é um processo complexo, não existem fórmulas prontas. “Dar explicações” sem que haja diálogo com os alunos, muitas vezes de costas para eles, não é suficiente. Deixar os alunos sem muitas explicações não é conveniente. Dialogar com os alunos pressupõe que seja inevitável o esquema ‘perguntas e respostas’. É evidente que o professor fará o papel de dirigente neste esquema, mas caso o professor não obtenha respostas dos alunos, ele deverá conduzir os alunos a uma resposta ou responder por eles. Se o professor pergunta e não obtém respostas, é recomendável que ele refaça a pergunta com outras palavras, na tentativa de facilitar o entendimento do aluno. Se há críticas a este tipo de ensinamento, cabe perguntar se há outra forma de ensinar.

Rotular o professor como um sujeito que estaria sempre “mal intencionado” é pouco construtivo. Reconhecer suas falhas me parece salutar. Recriminar o professor que prevê perguntas e respostas e não apontar uma alternativa me parece um atitude ingênua. É fácil e atraente responsabilizar o professor pelo fracasso escolar. Este discurso cabe para o professor

autoritário e para o professor que trata o seu aluno como um sujeito que não pode aprender. Desconhecer a limitação do professor e o seu constante aprendizado na prática docente, me parece também mostrar limitações.

Existe um abismo entre escrever sobre a prática da sala de aula e sobre a prática propriamente dita. A escrita aceita um escritor sem prática docente que comente tal prática. Porém a prática de sala de aula requer a experiência do professor. Na prática docente, existe aluno e professor que obtêm êxito, como existe aluno e professor que fracassam. Para aprimorar a prática de sala de aula, o importante é aprender com os erros e os fracassos.

## 5.2 AUTORIA E ESCRITA

Um dos grandes problemas no ensino e na aprendizagem da matemática é a linguagem matemática porque, muitas vezes, o aluno não tem acesso ao seu discurso que é o modo de apreensão da linguagem. Como a fala e a escrita têm parentesco, não compreendendo a escrita matemática, o aluno apresenta dificuldades em expressar-se verbalmente. O aluno pode, por exemplo, saber fatorar expressões algébricas momentaneamente e mecanicamente, porém, com o passar do tempo, acaba esquecendo. Como não consegue ver significado na fatoração, não consegue aprender. Saber fatorar uma expressão não implica necessariamente saber em que momento é necessário fatorar. Não compreendendo e não sabendo quando aplicar corretamente uma determinada regra, o aluno também não sabe falar da mesma.

Um trinômio quadrado perfeito pode ser fatorado mecanicamente pelo aluno. Porém é provável que o aluno não reconheça a relação entre o nome e o denominado por problemas de linguagem: O que significa a palavra “trinômio” ? Por que a expressão “quadrado perfeito” ?

A transmissão do saber através do texto escrito apresenta alguns problemas nas aulas de matemática. Se o aluno tem problemas com a linguagem matemática, como fica então a questão de autoria do aluno? Quando o aluno cria e inventa em matemática? Quando ele descobre? Quando ele é autor? Para que o aluno seja autor na matemática, ele precisa ler/escrever na linguagem matemática. A questão se complica quando ele quer ser autor nesta disciplina que tem o sentido fixado em sua linguagem em simbiose com a língua materna que tem diferentes sentidos.

A escrita tem relação com o simbólico, com o significado de cada símbolo matemático. Lacan (1986, p. 216) diz que a “aritmética” é “uma ciência que foi literalmente barrada pela intrusão do algebrismo”; isso se explica pelo fato de que, quando o símbolo algébrico se atravessa num texto matemático, o aluno não sabe calcular porque não vê significado na variável que é representada pela letra.

O uso do signo dotado de significado oferece vida ao signo morto da escrita matemática. Na obra *Observações sobre os Fundamentos da Matemática*, Wittgenstein (1987) conta que uma determinada comunidade tinha, dentro de seus padrões lógicos, uma maneira de calcular. Porém não foi possível fazer com que estes sujeitos escrevessem tais operações no papel, justamente porque, para o autor, a intuição não caminha com o material morto da escrita.

O mesmo acontece com pessoas que fazem verdadeiros malabarismos mentais, mas não conseguem escrever estas operações. Como é o caso do aluno que desempenha muito bem o papel de comerciante, ao fazer cálculos corretos de troco aos seus clientes, mas em sala de aula, é reprovado em matemática. Isso pode ser entendido a partir de Wittgenstein, que afirma que quando muda o contexto, muda o conceito.

Para um estudante em suas relações comerciais, o conceito de adição e subtração pode ter um significado, na escola, pode ter outro. No cotidiano, como consumidor ou vendedor,

um cálculo errado significa perder dinheiro. Na escola, como aluno, um cálculo errado significa seu fracasso como aprendiz. A escola e o comércio têm lógicas e contextos diferentes. Um problema matemático vivido e experienciado no cotidiano é diferente de uma sentença em linguagem matemática. O aluno tem que ser capturado por essa linguagem e produzir com ela.

A leitura de um texto matemático não tem significado para o aluno porque ele é um leigo; ele lê, mas não compreende. A alteridade se apresenta no texto porque existe um “outro” na escrita, porém o texto matemático não apresenta um sujeito específico. Foucault (1995, p. 107) diz: “o sujeito do enunciado (matemático) é a posição absolutamente neutra (...) e que pode ser ocupada por qualquer sujeito”, como na proposição ‘o produto dos meios é igual ao produto dos extremos’ e “o sujeito do enunciado é também o sujeito da operação” como na proposição ‘seja uma reta (...) temos que (...)’.

Qual é o sujeito na expressão “temos que”? O sujeito parece indeterminado e desconhecido, não dialoga com o leitor. Quando o autor escreve, endereça o texto a alguém porque supõe um leitor. Na leitura de um texto matemático, o leitor não é convocado, ele não interage com o autor.

Toda obra é aberta a interpretações, mas o texto matemático não apresenta leituras cruzadas, não admite diferentes leituras, geralmente admite uma única interpretação. O aluno não é convocado pelo sujeito que escreve o texto, ele apenas é comunicado de alguma coisa. O autor simplesmente lhe fornece dados. Para sentir-se seduzido, o aluno precisa operar o sentido e produzi-lo no código do texto matemático. Sentido que entra pelos olhos, na leitura.

Para Pierce, “dizer que uma proposição é falsa e que se descobriu que é falsa são equivalentes”. Descobrir a proposição falsa é mostrar o que está encoberto para se poder “ver” a falsidade. Se o sujeito apenas descobre e vê uma proposição, ele não tem a oportunidade de desempenhar seu papel de autor de um texto matemático.

Uma demonstração é inventada porque se movimenta entre os conceitos matemáticos. É demonstrando uma proposição que o aluno pode constituir-se como leitor e como autor de um texto. Por exemplo, o aluno apenas pode ver a veracidade da proposição “por dois pontos passa uma única reta”; ele pode ser autor quando tiver que demonstrar a proposição, utilizando argumentos próprios, seja através de um desenho, seja através de uma sentença.

Uma proposição matemática é descoberta pelo aluno no momento que ele vê, julga e concorda com a sua veracidade ou falsidade. A necessidade de julgar decide a escolha dos diferentes caminhos que o pensamento pode criar e conduz a ação na trajetória do pensamento.

Quando o aluno demonstra um teorema ou faz um cálculo, utilizando proposições matemáticas, ele inventa uma maneira de demonstrar. É neste momento que o aluno pode criar e ser autor de um texto matemático.

Um texto escrito em linguagem matemática tem uma escrita reduzida, ou seja, muito se pode dizer com poucos símbolos. O professor precisa conduzir o aluno na construção possível de uma outra linguagem, utilizando a linguagem materna.

A leitura que um aluno faz de um sólido geométrico, num espaço bidimensional, transposto para um espaço tridimensional causa-lhe problemas. Quando ele vê no papel e tem que representá-lo mentalmente, a imagem deste sólido deve transformar-se, ou seja, passar de uma dimensão à outra. O ato de leitura necessário para reescrever o sólido apresenta problemas, justamente porque ele não consegue perceber todas as suas arestas.

O aluno representa muitos objetos mentalmente, mesmo que o objeto não esteja presente. Ele não consegue representar um sólido geométrico porque é difícil “ver” o sólido; ele vê o sólido desenhado no papel mas não vê suas arestas, não percebe sua altura, não reconhece suas dimensões. Esta falta de visualização surge também na leitura do símbolo que

representa a variável, a letra, a incógnita e que, muitas vezes, não tem sentido para o aluno, pois este percebe a matemática como uma linguagem cifrada.

A escrita com símbolos matemáticos reduz o horizonte de interpretação do aluno, e a autoria se instaura quando o aluno oferece vida aos símbolos mortos, quando cria uma relação entre eles e participa do seu universo discursivo. Compreendendo a mensagem do texto matemático, o aluno pode escrever e demonstrar a sua interpretação do que leu, tornando-se autor.

O aluno leitor, o papel do mesmo e a previsão da leitura do professor do texto pelo aluno são elementos que podem definir o uso e a interpretação do texto matemático na sala de aula. A leitura que o professor faz da própria disciplina e do seu aluno inscrevem as estratégias textuais, que poderão encaminhar o aluno-leitor como intérprete e como autor.

### 5. 3 MATEMÁTICA PRÁTICA

O ato de fazer e refazer os cálculos ou de resolver listas de exercícios mostra a necessidade do aluno de experimentar o objeto matemático em diferentes situações. Os professores na tentativa de resolver o problema de aprendizagem do aluno na disciplina de matemática, utilizam a técnica do saber-fazer. O nível de dificuldades de uma tarefa a outra aumenta até que o estudante alcance o nível desejado. O ato de fazer e refazer a mesma tarefa matemática, em diferentes contextos, busca a compreensão da regra que lhe é implícita.

É no uso, ou seja, na aplicação da regra que acontece a experiência com o objeto. Wittgenstein diz que nós não aprendemos tudo de uma vez. Para compreender a natureza do objeto, o aluno tem necessidade de fazer muitos exercícios até conhecer o objeto em diferentes situações.

Existe circularidade entre um ato e outro. A cada exercício resolvido, o objeto se encontra em uma situação diferente. A regra de resolução é a mesma, mas cada proposta de exercício se apresenta num contexto novo. Há projeção de sentido em cada ato.

Contudo, apesar dessa importância do exercício, existem, por parte dos teóricos da didática, algumas críticas às imensas listas de exercícios de matemática trabalhadas pelos professores em sala de aula com seus alunos. A pergunta do porquê destas listas talvez tenha um argumento plausível. A cada exercício feito ou a cada ato desenvolvido, o conceito do objeto vai se transformando até o momento que o aluno pode conhecer o objeto e criar o seu conceito (que está em constante devir), para depois aplicá-lo em diferentes situações.

Após fazer diversos exercícios, o aluno pode saber encontrar a incógnita de  $\log_2 8 = x$ . Ele aplica a definição de logaritmo e conclui que  $2^x = 2^3$  e como sabe que, conforme a regra, se as bases são iguais, então os expoentes também serão iguais. Porém, para a incógnita na equação  $\log_x 9 = 2$ , ele também aplica a regra da definição de logaritmo e encontra  $x^2 = 3^2$ , mas não sabe como prosseguir. O que parece uma obviedade para o professor, não é para o aluno. No exercício anterior, ele sabia que sendo as bases iguais, os expoentes também o são, concluindo que  $x = 3$ . Na segunda equação, ele deveria aplicar a mesma regra e perceber que, se os expoentes são iguais, as bases também serão, e concluir que  $x = 3$ .

Poderíamos dizer que ele não intuiu o sentido da regra, mas não é este o caso. Na primeira equação, após aplicar a regra da definição de logaritmo, a variável  $x$  se encontra no expoente; na segunda equação, a variável se encontra na base. Os contextos mudam e para o aluno, as regras também podem mudar. Na primeira equação, poder-se-ia dizer: se as bases são iguais (no caso, a base é dois), os expoentes ( $x$  e 3) também serão iguais. Na segunda equação, se os expoentes são iguais (no caso, expoente dois), as bases ( $x$  e 3) também são

iguais. Para um professor parece ser uma redundância inferir que, numa equação exponencial, se as bases são iguais, os expoentes também o serão, e inferir que, numa equação exponencial, se os expoentes são iguais, as bases também serão iguais, mas para o aluno não é uma redundância.

Para compreender cada uma das regras, o aluno precisará fazer diversas equações em que a variável se encontra na base, diversas equações em que a variável será o logaritmando e diversas equações em que a variável se encontra no expoente, mas, para o professor, elas se resumem em apenas uma.

Dizer que  $\frac{\operatorname{sen} a}{a} = \frac{\operatorname{sen} b}{b}$  e que  $\frac{a}{\operatorname{sen} a} = \frac{b}{\operatorname{sen} b}$  representam expressões com o mesmo

significado e o mesmo sentido não é tão evidente para o aluno. Dizer que  $\log ab = \log a + \log b$  e que  $\log xy = \log x + \log y$  também representam expressões com o mesmo significado e o mesmo sentido. A única mudança é a escolha das variáveis para expressar tal regra, mas, para o aluno, a mudança de variável pode ser um indicativo de mudança de regra.

Ao aprender equação de primeiro grau com a variável  $x$ , o aluno pode se desestabilizar completamente ao pedido do professor para encontrar o mesmo tipo de equação com a variável  $y$ , por exemplo.

Caveing (2004, p. 29) traz a seguinte idéia de Descartes: “‘Olhar’ não satisfaz mais que ‘escutar’. Que é preciso fazer ? É preciso refazer” (tradução minha). Refazer é fazer outra vez o ato que constitui o objeto. O sujeito pode perceber, na circularidade de fazer e refazer, a regra que existe entre um ato e outro. Ele “descobre” as relações (propriedades) e “inventa” regras ou “cria” os conceitos.

#### 5. 4 SENTIDO E INTERPRATAÇÃO DO OBJETO MATEMÁTICO

A linguagem matemática inquieta alguns alunos, que resistem à disciplina devido a sua simbologia e ao universo subjacente a esta linguagem: abstração, rigor, logicidade e formalização.

A forma de representação visual da matemática traz sérias dificuldades à aprendizagem do aluno. A conexão entre as representações visuais e as representações mentais desta simbologia apresenta um problema cognitivo.

O impedimento de ver a expressão algébrica e de lhe dar sentido, ou ver um sólido geométrico desenhado no plano do papel e representá-lo mentalmente de forma espacial apresentam o problema cognitivo ligado à semiótica, pois nos dois casos se trata de representação. A álgebra é representada por letras e a geometria espacial é representada por sólidos. A representação visual de letras que sintetizam uma expressão algébrica e a transposição de um sólido para o plano demandam imaginação e significação. Representar um sólido geométrico mentalmente é dar forma espacial ao sólido sem ter o conteúdo.

A imagem apresentada e a ser representada está subjacente à proposição imersa numa rede conceitual e justifica o fato de que o estudante, ao se deparar com uma proposição matemática, diga: “fazer eu sei, interpretar o enunciado, não”.

O enunciado  $x$  representa uma solução  $y$ , que figura como imagem de  $x$ . Dar sentido ao enunciado é abrir o caminho para a sua solução. Se esta relação entre enunciado e solução não se estabelece, podemos dizer que tal proposição não tem sentido para o estudante.

Um enunciado matemático traz implicitamente uma rede conceitual que, muitas vezes, o estudante não dispõe no momento de sua interpretação. A leitura e a interpretação de um enunciado matemático requer entendimento de cada conceito que está participando implícita ou explicitamente do texto.

A sintaxe que se completa com a semântica abre espaço à interpretação do enunciado. Como a sintaxe não é compreendida, a semântica não se completa, e o texto acaba sendo desprovido de significação. O texto matemático adquire sentido para o estudante quando todos os conceitos envolvidos são reconhecidos e convergem em sua totalidade para uma interpretação.

Para Granger (1995), o fato epistemológico se constitui dentro de um espaço virtual, dentro de um espaço onde o sujeito faz suas conjeturas. A experiência mental na qual se colocam os fenômenos virtuais permite calcular, esquematizar a solução, prever o caminho da solução; é o espaço possível de representar o real. A representação desses fenômenos se movimenta dentro dos referenciais que se relacionam de forma a unir cada signo à totalidade do enunciado.

O texto matemático tem que ser complementado pela linguagem materna, pelo professor, de forma que propicie ao aluno o espaço para fazer suas conjeturas, ligar cada signo à idéia do texto e, assim, criar o seu conceito.

O professor conduz na construção possível de uma outra linguagem do texto expresso e formalizado em símbolos matemáticos, em uma seqüência lógica, fornecendo a sua significação. Ele mostra ao aluno o que está escrito e qual é o significado de cada símbolo com suas palavras, expondo ao aluno a sua interpretação. O aluno, ao interagir com a linguagem do professor e com a linguagem matemática, cria um novo conceito com as suas palavras. O conceito criado pelo aluno é uma forma de construção destas duas linguagens.

O texto matemático é extremamente compacto. A redução da linguagem em símbolos carece de interpretação. Se a construção possível de uma outra linguagem é fornecida apenas com outros símbolos matemáticos, sem a interferência da linguagem materna, a sua interpretação será deficitária ou ausente.

Na construção possível de uma outra linguagem do texto, com o auxílio da linguagem materna, os símbolos matemáticos adquirem sentido para o aluno. O objeto, o conceito do objeto e a apreensão subjetiva e objetiva do sujeito em relação ao objeto são mediadas pela sensibilidade que apenas a linguagem materna pode oferecer, e não através de outros símbolos matemáticos.

A intervenção da sensibilidade no processo de conhecer o objeto conduz ao caminho que mostra a forma como podem ser recebidas as representações. Quando a mente produz as representações que relacionam o objeto e o seu conceito, existe o entendimento, assim o sujeito constrói um sentido para o que antes não tinha sentido.

Quando o sujeito aprendente representa mentalmente o objeto  $x$ , ao invés de representar o objeto  $y$ , faz uma troca dos signos. Nos processos sógnicos intra-subjetivos, a troca de signos aponta para um problema cognitivo, pois  $y$  não representa o conceito de  $x$ .

O cálculo do perímetro de um triângulo equilátero de lado  $x$ , por exemplo, é efetuado por um estudante de forma que ele encontra  $4x$ . O erro deste estudante é decorrente de problemas relacionados à sensibilidade, pois trocar triângulo por quadrado é um problema de representação. Ele percebe através dos sentidos, lê ou ouve “triângulo” e concebe em sua consciência um “quadrado”. Logo, o erro não está na forma de pensar o objeto. O erro não é da lógica. Um pensamento ilógico seria pensar um triângulo quadrado, por exemplo.

A lógica é uma condição do próprio pensar, não existem pensamentos ilógicos. Para Santaella e Nöth (2001, p.15), “não há imagens mentais como representações visuais que não tenham surgido de imagens na mente daqueles que as produziram, do mesmo modo que não há imagens mentais que não tenham alguma origem no mundo concreto dos objetos visuais”. Assim, não se pode dizer que a forma de pensar um quadrado está errada, o erro está em trocar quadrado por triângulo.

O significado é intersubjetivo. Não há um significado privado, caso existisse, também existiria uma linguagem privada, tese que é refutada por Wittgenstein. De acordo com Tugendhat (1992), que analisa os esforços de Wittgenstein para mostrar a impossibilidade de tal linguagem, as sensações do sujeito podem ser privadas. Podemos aprender o emprego de uma expressão através de nossas sensações. Nós aprendemos a palavra quando a empregamos e existe uma conexão entre a sensação e a palavra que exprime a sensação.

As palavras que designam algo têm um significado intersubjetivo e outro significado que está de acordo com a sensação privada de cada sujeito. Essas sensações são comunicadas através da linguagem de tal forma que:

se examinarmos mais de perto como alguém estabelece o significado de tal palavra para si mesmo, constatamos que isso acontece exatamente da maneira em que se poderia explicar o significado a uma outra pessoa; tal e tal gosto é o gosto de tal e tal uva. E não é concebível nenhum outro modo de se estabelecer o significado (Tugendhat, 1992, p. 13).

O sentido de uma proposição matemática, para Wittgenstein, é uma regra interpretada, e seguir a regra é um interpretar. A regra não é experiência. As regras obrigam algo, independente da vontade. Quem entra no jogo pretende ganhar. O jogo é previsto, já que as regras não deixam dois caminhos abertos. O jogo de linguagem tem como meta seguir a regra, apostar no mesmo. A regra tem um contexto determinado e joga quem compreende a descrição da regra.

O professor precisa explicar ao aluno como se aplica a regra, pois seguir uma regra é um jogo de linguagem determinado. “Que papel pode desempenhar um erro assim em um jogo de linguagem? Se damos instruções a alguém, por exemplo, de como há de atuar em tal e tal caso; e essas instruções se revelam mais tarde sem sentido” (tradução minha) (Wittgenstein, 1987, p. 335).

O adestramento da regra serve para quem não domina a linguagem. Seguir a regra é fazer o mesmo. Ela se faz sozinha, só tem que seguir um único caminho. “Mecanicamente, isto é: sem pensar. (...) Sem refletir” (tradução minha) (p. 357). Ela diz o que fazer, não precisa pensar o que fazer. Não há nada entre a regra e a ação. É simplesmente produzir a mesma imagem, de acordo com as nossas regras usuais de comparar e copiar.

Para Wittgenstein, pensar pode ser diferente de falar para si mesmo, pois posso ter imagens sem estar pensando e estar pensando sem imagens mentais. A relação entre o nome e o denominado se dá no jogo de linguagem. Assim, “ter em mente” não é o mesmo que “representar-se algo”. Na linguagem, podemos mostrar o que temos em mente e o significado de uma palavra quando a usamos. A representação entra no jogo de linguagem, não como uma imagem, mas como uma imagem que pode corresponder-lhe, porque o significado de um nome se explica, em muitos casos, quando se aponta para o portador do nome e descreve-se em palavras o que está representado.

A linguagem pode transmitir pensamentos e pensar pode ser uma espécie de fala. As palavras são atos cujo significado está no uso. “Compreender uma frase significa compreender uma língua. Compreender uma língua significa dominar uma técnica” (Wittgenstein, 1996, p. 113). A essência do pensar é a lógica, pois apresenta uma ordem *a priori* do mundo e é anterior a toda experiência.

Seguir a regra é uma prática dentro de uma regularidade. Para seguir a regra, é necessária a evidência de suas conseqüências, bem como os seus conceitos. Entre a ordem e a execução da regra, existe um abismo que deve ser amenizado pela compreensão. O entendimento através de linguagem necessita de uma concordância nas definições, bem como de uma concordância nos juízos.

A dúvida tem sentido apenas nos jogos de linguagem, e a capacidade de convencimento faz parte do jogo. A dúvida gradualmente vai perdendo o sentido porque o

jogo de linguagem é do domínio da lógica. “O próprio jogo da dúvida pressupõe a certeza” (Wittgenstein, 2000, p. 47). O julgamento não parte da dúvida, já que ela vem depois da crença. A certeza é subjetiva, mas o saber não. As experiências surgem de dúvidas, mas se baseiam naquilo que pressupomos ser uma certeza. O significado da palavra é adquirido no jogo, o que antes era uma hipótese ou determinação lógica adquire sentido quando é incorporado em nossa linguagem.

O uso da regra se justifica porque o fenômeno da linguagem se funda na regularidade, palavras com o mesmo significado são fundantes num jogo de linguagem. A proposição da experiência convertida em regra é um juízo. Assim, o erro é um juízo falso, pois os juízos estão sujeitos às regras. Coincidências dos juízos e regras são fenômenos iguais, em que o significado vem da prática, do uso.

Sob o ponto de vista gramatical, pode-se construir corretamente uma expressão matemática sem compreender seu sentido. Quando se compreende? Quando se aplica a regra implícita no enunciado matemático.

O sentido de uma proposição surge quando é incorporada em nossa linguagem, porém a lógica matemática instaurou uma interpretação superficial da nossa linguagem corrente. “A maldição de compreender o simbolismo matemático” (tradução minha) (Wittgenstein, 1987, p. 251) se resolve com o uso e a aplicação dos signos.

A demonstração de um cálculo serve para nos convencer; demonstramos através de axiomas e não através de proposições empíricas, pois o jogo de linguagem exclui as proposições da experiência. Demonstramos através de juízos.

“Um jogo de linguagem: Como é de imaginar um em que apareçam axiomas, demonstrações e proposições demonstradas?” (tradução minha) (p. 368). O sujeito não entra no jogo imediatamente, ele participa do jogo, quando estas leis lhe parecem familiares e são introduzidas em sua linguagem.

Um axioma é considerado um juízo porque é um fato matemático que não precisa ser demonstrado, não precisa ser provado. A demonstração é uma seqüência de argumentos lógicos que provam ser verdadeiro certo fato matemático, e que é chamado teorema. Uma proposição pode ter várias demonstrações, pois não existe um caminho único a seguir. Quando o aluno demonstra, fixa um caminho descrevendo uma imagem.

Os jogos de linguagem que envolvem proposições matemáticas se baseiam em certezas, em axiomas, como todo o jogo de linguagem. Quando conhecemos algumas regras, é possível fazermos conjeturas modificando-as, ou seja, espontaneamente decidimos entrar em um novo jogo de linguagem.

A linguagem representa o que é classificado, caracterizado e reconhecido através das sensações e dos objetos associados às palavras que designam tais sensações. De acordo com Caveing (2004), o privado é a aplicação da palavra à sensação pois existe diferença entre a palavra interior e o espaço da linguagem que é a intersubjetividade. Falo comigo mesma, utilizando as sensações que tenho com tais palavras de minha fala, mas utilizando a linguagem que é intersubjetiva.

Procurando diferenciar percepção de sensação, Japiassú e Marcondes (1996, p. 210) consideram que “percepção é o ato de perceber, ação de formar mentalmente representações sobre objetos externos a partir de dados sensoriais. A sensação é a matéria da percepção”, e a “sensação é a impressão subjetiva e interior advinda dos sentidos e causada por algum objeto que os excita ou estimula” (p. 245).

Na ação de representar mentalmente um objeto através da sensação, que é privada, o sujeito representa o objeto com um significado advindo da relação com outro sujeito, um significado de domínio público, da relação intersubjetiva e que está em sua memória.

Quando o enunciado diz ao aluno “represente graficamente tal função”, presume-se que este busque em sua memória o conceito de tal função, a interpretação de tal função dada

pelo professor e a sua interpretação advindo dos sentidos, ou seja, o que ele ouviu e o que ele viu. Porém estas percepções devem estar de acordo com a função propriamente dita.

De acordo com Kant (1991), a intuição é a representação que pode ser dada antes de todo o pensamento, logo, antes mesmo do sujeito pensar o objeto. Esta representação pode não estar de acordo com o objeto, ou seja, não ser a imagem do objeto, e sim a imagem de outro objeto. O objeto é um losango, porém o sujeito representa mentalmente um quadrado. Se o objeto representado mentalmente pelo sujeito que aprende é realmente um losango, o caminho para que ele construa o conceito do objeto já se encontra aberto.

Para Granger (1995), as abstrações matemáticas não são formas tiradas da experiência, são modelos da experiência. Os objetos matemáticos, com seus conteúdos formais, ligam-se à realidade na contingência, num espaço virtual. A experiência é também individual, no sentido que o sujeito vivencia o objeto e guarda algo dele em sua memória. Objetivar o vivido é formalizá-lo, é dar forma ao conhecimento.

Todo texto matemático é impregnado de linguagem usual. Como a linguagem materna é ambígua, podem se produzir erros na interpretação do sujeito. Esta linguagem é ambígua e assujeitada a diferentes interpretações. Nós entendemos uma palavra e interpretamos de acordo com o sentido que lhe damos. O sinal recebido pela palavra ou pela coisa observada produz uma representação que pode não corresponder à verdade e ao julgamento justo.

Quando nós objetivamos através da linguagem escrita, a intuição que é subjetiva faz com que a escrita se distancie da representação. Dessa maneira, a matematização é transferida para o ato de escrever; este fato nos torna devedores de uma subjetividade.

A escola quer ter um controle do sentido para conservar a verdade, mas as pesquisas em didática da matemática mostram a “lógica própria”<sup>16</sup> e a ‘coerência interna’ nos erros dos

---

<sup>16</sup> “A razão encontra-se no imaginário e no sentido da lógica interna, que não é contrária ao real, mas que, como um caleidoscópio, recria, reconstrói, reordena e reestrutura, criando uma outra lógica que desafia a lógica formal.

alunos. Como controlar o sentido se não temos controle do pensamento do aluno? O sentido da aplicação das palavras do professor e o sentido que o aluno dá às palavras do professor são privados.

O aluno não compreende a palavra da mesma forma que o professor a compreende. O professor fala do objeto, com uma linguagem que é polissêmica e que pode ter diferentes interpretações pelo aluno. Neste sentido, temos que estar atentos aos jogos de linguagem em sala de aula e que incluem a análise das relações das linguagens: do professor e da matemática, do aluno e do professor, do aluno e da matemática, assim como do colega ao qual o aluno recorre para traduzir a linguagem do professor.

O problema do sentido do método do professor é também complexo. Eu trabalhei em uma escola técnica de reputação reconhecida pela sua qualidade de ensino, em que havia professores considerados pela comunidade escolar como “tradicionais” e professores considerados “construtivistas (professores que dizem seguir as idéias de Jean Piaget)”. Em meu trabalho com alunos do último ano do ensino médio, percebi que não havia diferença de bagagem de conhecimento entre os alunos que haviam estudado com o professor considerado “construtivista” e os alunos que haviam estudado com o professor considerado “tradicional”. O professor considerado “construtivista” pode estar bem-intencionado, mas é uma ilusão pensar que o aluno pode construir “o” conceito que o professor quer que ele construa. O aluno transformará o conceito do professor e construirá o seu. Nós não temos o controle da aprendizagem do aluno porque nós não temos o controle de seus pensamentos.

Quando o aluno interpreta um conceito, ele pode reproduzir o conceito e fazer conexões com outros conceitos, porém ele pode modificar e acarretar em prejuízo ao conceito surgido de sua interpretação. Por exemplo, quando o aluno sabe que pode utilizar a razão seno

---

Neste sentido, o imaginário é um processo cognitivo no qual a afetividade está contida, traduzindo uma maneira específica de perceber o mundo, de alterar a ordem da realidade” (Laplantine & Trindade, 1997, p. 79).

para resolver um problema com um triângulo retângulo, ele pode estar simplesmente reproduzindo o conceito, mas, quando ele aplica o conceito da razão seno para resolver um problema com um triângulo qualquer, ele modifica e acarreta em prejuízo ao conceito. Mas o aluno que sabe que a razão seno não é aplicada ao triângulo qualquer mostra a conexão que faz entre o triângulo retângulo e o triângulo qualquer.

As conexões de um conceito com outros conceitos aparecem na escrita, como reprodução da regra, e as conexões que modificam o conceito, a maneira de não estarem de acordo com as necessidades conceituais, aparecem como forma de um erro. Estas conexões e intenções do aluno se cristalizam na escrita.

As conexões são experiências individuais do sujeito com o objeto. O professor pode ajudar o aluno a construir o conceito do objeto e a descobrir suas propriedades, mas as conexões de um conceito com outros conceitos o aluno faz sozinho.

Para o aluno construir seu conceito, ele deve “descobrir” o conceito dado, utilizando a construção possível de uma outra linguagem e a interpretação da linguagem matemática. Ele cria através de atos limitados na necessidade conceitual. Porém é no contexto da sala de aula onde ele está inserido e também no jogo de linguagem com o professor e seus colegas que ele interpreta e projeta sentidos seus. É nesta circularidade de interpretar e re-interpretar o discurso do professor, dos colegas e da linguagem matemática que nasce a possibilidade de um domínio de conexões. As conexões associadas à memória do sujeito-aluno produzem sua intenção, que é um ato de construção.

## 5. 5 O PAPEL DA MEMÓRIA

A memória interfere diretamente na construção dos conceitos matemáticos porque o aluno constrói seu conceito de acordo com sua memória e com os conceitos que aprendeu num outro tempo. Davis e Hersh (1990) dizem que, para Quine, a memória é associada a conceitualizações ou verbalizações passadas e não a sensações passadas. Assim, de acordo com o autor, nós podemos dizer que quando o aluno trabalha com um conceito matemático, ele utiliza sua memória que associa a outros conceitos.

Todo conceito é associado a um objeto, e nós utilizamos palavras de domínio público para falar deste objeto, mas estas palavras também têm sentido privado. A percepção forma mentalmente representações de objetos a partir de sensações. As representações visuais e as representações mentais de objetos são produzidas a partir da realidade. A sensação é privada e a idéia (o significado) é pública. O significado é intersubjetivo porque não existe significado privado.

Então, se a memória do sujeito é associada a conceitos com significados públicos, e se seu conceito de um objeto não coincide com o conceito da maioria das pessoas, seu conceito porta um prejuízo originado por sua sensação que é privada.

De acordo com Wittgenstein (1996), a memória não ocorre apenas com imagens mentais, já que nos lembramos de situações vivenciadas. Existem situações em que nós não nos lembramos das palavras, e sim do “espírito” de nossas palavras. “Eu não me lembro mais de minhas palavras, mas me lembro de minha intenção” (p. 222).

Quando o aluno citado por Baruk, ao relatar como se “arranja” para resolver questões em uma prova, diz: “nós nos lembramos como ele (o professor) nos explicou”, mostra que utiliza as lembranças de situações vivenciadas em sala de aula. O aluno lembra do que o

professor explicou porque “aprendeu” ou experienciou aquilo que foi explicado. A memória é causal; nós lembramos de X porque que já tivemos uma experiência com X.

Ao perceber o objeto, o sujeito faz emergir a lembrança da experiência vivenciada com o objeto. A imaginação ligada à percepção do objeto e à lembrança da experiência com o objeto num outro tempo faz o sujeito criar tanto as conexões como também o conceito das conexões.

O aluno lembra como o professor explicou e conecta a explicação dos passos de uma regra utilizada com o problema que tem de resolver. A lembrança da situação vivenciada num outro tempo, ligada à percepção do aluno, faz a conexão com a sua imaginação e cria o conceito desta conexão.

Quando o aluno escuta a expressão “desenvolva o produto notável”, ele traz à lembrança os diferentes produtos notáveis escritos no quadro pelo professor ou resolvidos por ele mesmo em seu caderno. Para Frege (1983), a palavra falada evoca a memória da palavra escrita. Nós pensamos em palavras e signos e, assim, nós conceitualizamos.

O processo da atividade mental é o prolongamento da atividade sensorial, no qual se dá a compreensão. O sujeito percebe o objeto (o produto notável), compreende o que está sendo pedido (o desenvolvimento do produto notável), projeta sentido ao lembrar das situações vivenciadas com este objeto e interpreta (ao decidir qual regra aplicar para desenvolver o produto notável). Projeta sentido outra vez (ao desenvolver o produto notável) e, neste novo processo de re-significação a partir do sentido novo projetado no sentido antigo (sentido que está na lembrança), o sujeito re-interpreta (aplicando a regra de forma correta ou modificando o conceito).

Soulez (2004) diz que, de acordo com Wittgenstein, o sujeito descreve o que vê através da linguagem. O conceito é uma regra interpretada. Ele cria sentidos e interpreta, como no círculo hermenêutico de Heidegger. Segundo Cavallès (1962), o entendimento

fabrica regras. Assim, podemos dizer que a compreensão fabrica regras e, quando estas são interpretadas, tornam-se conceitos.

O sujeito tem o hábito de construir o conceito matemático com as palavras que ele conhece, com as palavras que fazem parte de seu vocabulário e que, para ele, têm sentido. A linguagem do texto em que o conceito foi escrito deve ter sentido para o aluno para que ele possa fazer as conexões do conceito com outros conceitos. As analogias nascem destas conexões e relações e que estão armazenadas na memória.

Para ilustrar as analogias feitas pelos alunos, trago algumas situações que eu vivenciei no decorrer de minha prática docente. Certa vez, um aluno chegou atrasado à sala de aula e perguntou a seu colega qual o significado da definição escrita no quadro. Como a aula havia começado um pouco antes deste aluno chegar, eu ainda não havia dado um exemplo para ilustrar a definição de integral de uma função. Para minha surpresa, seu colega, para explicar o significado da constante de integração, fez um desenho de três parábolas do tipo  $y = ax^2 + c$  sobre o mesmo eixo, para dizer que a integral da função  $y = x$  é  $y = \frac{x^2}{2} + c$ .

A relação que este aluno fez do termo independente da função do segundo grau com a constante de integração é boa para melhorar o seu conceito da integral de uma função. O ato de criar seu conceito com uma representação gráfica é associado à sua memória e à vontade de aperfeiçoar o antigo conceito e criar um novo. Em um outro tempo, ele aprendeu a função do segundo grau, teve uma experiência com este objeto, podendo agora aplicar o conceito deste objeto para melhor compreender o conceito de constante de integração. A intuição do aluno, ao comparar o termo independente da função do segundo grau com a constante de integração de uma função, somente foi possível por uma ligação entre uma lembrança de um conceito já construído.

O aluno simplifica o antigo conceito (o conceito já construído) para aperfeiçoar o novo. Ele faz mecanicamente estas simplificações, de acordo com sua memória. Num espaço virtual, ele faz conjecturas de conceitos aprendidos em um outro tempo e em outras circunstâncias e os aplica ao tempo atual para melhor compreender o novo conceito.

A vontade<sup>17</sup> de criar condições para melhor compreender o conceito e as previsões feitas no ato de provar ou demonstrar estão de acordo com a memória. O aluno refuta ou aprova todas as possibilidades de esclarecer o conceito com os sentidos que ele dá a cada possibilidade. Quando o aluno organiza seus algoritmos, ele faz conexões com outros conceitos e com as lembranças de provas e refutações experienciadas em sala de aula ou no jogo de linguagem vivenciado.

Em outra ocasião, um outro aluno resolveu a equação do tipo  $|x + a| = n$  e encontrou dois resultados que verificaram a solução da equação, contudo somente colocou um elemento no conjunto das soluções. Perguntei-lhe por que colocou apenas um elemento, se ele havia encontrado dois elementos. Ele me respondeu que pensava que somente poderia participar um elemento no conjunto das soluções. De acordo com Largeault (1993), ao evocarmos os erros da intuição, igualmente devemos mencionar os erros da discursividade.

É provável que este aluno tenha feito uma relação da equação modular com a equação do primeiro grau (conceito que foi aprendido em um tempo anterior). Como a equação do primeiro grau tem somente um elemento que concerne ao conjunto das soluções, e a equação que estava no módulo também era uma função do mesmo grau, o aluno constrói um outro conceito de conjunto das soluções da equação modular.

---

<sup>17</sup> De acordo com Largeault (1992, p. 16), para Brouwer, “querer-ser é anterior ao pensamento” e “a vontade suscita a representação intuitiva” (tradução minha).

Como o texto matemático é representado e escrito de uma forma abreviada e cada símbolo é interpretado e associado a um outro conceito ou a uma imagem mental, o aluno vê  $y = |x + a|$  e associa a  $y = x + a$ . Representação de um outro tempo que ele aplica ao tempo atual porque existe semelhança sintática entre as duas funções. O conceito melhorado pelo aluno nasce do ato de rejeição do conceito antigo. O sujeito aplica regras que ele aplicava em outro tempo, modificando o conceito para criar um novo.

É freqüente o aluno derivar a função  $y = \text{sen}(2x)$ , por exemplo, e encontrar  $\text{cos}(2x) \cdot 2$  e igualar a  $\text{cos}(4x)$ , porque é provável que ele pense isoladamente a multiplicação entre  $2x$  e  $2$ . Então, a regra de derivação da função  $\text{sen}(ax)$  que é  $\text{cos}(ax) \cdot a$  é modificada para  $\text{cos}(aax)$  pelo aluno. Este fato se dá porque em outro tempo ele aprendeu que “a ordem dos fatores não altera o produto”.

Quando o professor diz que a derivada de  $\text{sen}(ax)$  é  $\text{cos}(ax) \cdot a$ , ele não diz que  $\text{cos}(ax) \cdot a$  que é igual a  $a \cdot \text{cos}(ax)$  é diferente de  $\text{cos}(aax)$ . O aluno sabe que as respostas de cálculos escritos em linguagem matemática podem aparecer de diferentes maneiras, porque uma resposta pode ser simplificada ou racionalizada, por exemplo. Talvez o aluno pense que, quando o professor escreve a expressão  $a \cdot \text{cos}(ax)$ , ele poderia escrever  $\text{cos}(aax)$ . O conceito “a ordem dos fatores não altera o produto” que foi aprendido nas séries iniciais e que está na memória do aluno interfere no conceito de derivada função seno.

A idéia é associada à aparência, porque  $\text{cos}(ax) \cdot a$  parece ser  $\text{cos}(axa)$ , assim como  $x + a = y$  parece ser  $|x + a| = y$  e o termo independente da função de grau dois ( $y = ax^2 + bx + c$ ) parece ser a constante de integração da função  $f(x) = x$  ( $F(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c$ ). Estas analogias se estabelecem com o conceito do tempo atual e com o conceito construído em outro tempo.

A interpretação de um símbolo é associada a um conceito ou a uma imagem mental. Quando falamos em linguagem matemática, construímos uma outra linguagem que advém dos símbolos matemáticos para a linguagem materna, porém, de acordo com Dehaene (1997), os Algarismos não são “traduzidos” por palavras e, para Frege, a aritmética não tem nenhuma relação com as sensações. Assim, o número é uma idéia.

O aluno sabe que  $\frac{1}{2}$  tem o mesmo significado que uma unidade dividida por dois, caso ele “traduza” para a linguagem materna. Porém, de acordo com Dehaene, o aluno não faz a tradução, e talvez este fato justifique a modificação que ele faz da posição dos números, do numerador e do denominador  $\left(\frac{2}{1}\right)$ , para depois igualar a dois, como no cálculo  $\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2+2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{1} = 2\right)$ . O aluno cria uma outra regra para encontrar uma solução de seu problema. Num tempo anterior, ele aprendeu que, para dividir frações, multiplicava-se a primeira fração pelo inverso da segunda fração. Este conceito (antigo) ele aplica para aprimorar o conceito atual. Porém, como no novo contexto não é permitido aplicar tal regra, o aluno acaba portando prejuízo ao conceito de limite de uma função.

Em meu trabalho na sala de aula, percebi que os alunos têm o hábito de modificar o conceito matemático para melhor compreender seu sentido. Esta forma de interpretar o conceito e falar dele com suas palavras pode “melhorar o conceito” para o aluno, mas pode também prejudicar a compreensão correta que segue as normas e o rigor da matemática. Para compreender o conceito, os alunos fazem conexões com outros conceitos matemáticos ou com conceitos de outras disciplinas. Largeault (1992) diz que, para Brouwer, a vontade suscita a representação, e esta representação intuitiva deriva da abstração da experiência de um outro tempo já construído.

Uma demonstração, uma prova é o espaço virtual no qual o aluno interpreta de acordo com sua memória e cria um conceito para si. Ele não quer somente o conceito do professor. Ele tem vontade de criar um novo conceito com suas palavras. Ele substitui o conceito do professor (o antigo) e cria seu conceito (o novo). “A demonstração não resulta do conceito, e sim, da construção de conceitos” (tradução minha) (Caveing, 2004, p. 246).

No movimento entre os conceitos matemáticos, o aluno constrói outros conceitos. Ele aprende a mostrar o que vê, ele aprende no jogo de linguagem. O que fundamenta o jogo são as regras e as semelhanças com outros jogos que estão na memória. É neste movimento que pode nascer a ação que possibilita a formação de um novo conceito. Como diz Lakatos (1994, p. 19): “pela demonstração o aluno mostra aquilo que ele compreendeu (...) existem demonstrações melhores que outras” (tradução minha).

A memória auxilia a imaginação na criação de conceitos e ela pode também evocar uma lembrança precisa e correta, quando por exemplo, o aluno precisa lembrar o valor de  $\pi$  ou lembrar uma fórmula. O processo mnemônico utilizado em uma tradução trata-se de “uma justificação subjetiva” (Wittgenstein, 1996, p. 129). Nós traduzimos uma palavra por outra, utilizando “uma tabela que existe somente em nossa representação; como um dicionário” (p. 129).

Quando traduzimos a palavra ‘triângulo’ pela expressão ‘polígono de três lados’, reconhecemos o triângulo como um polígono de três lados. Quando traduzimos a palavra  $x$  pela palavra  $y$ , buscamos  $y$  na tabela de vários elementos de nosso “dicionário mental” e que está em nossa memória.

Segundo Wittgenstein (1994, p. 211), a memória não compara dois elementos, eles coincidem e passam a ser apenas um:

É como se eu carregasse comigo uma imagem de um objeto e através dela reconhecesse um objeto como o objeto que a imagem expõe. Nossa memória parece transmitir-nos uma tal comparação ao conservar para nós uma

imagem de algo visto outrora ou ao nos permitir (como que por um tubo) olhar o passado. E não é tanto como se eu encontrasse o objeto com uma imagem que está ao seu lado, mas como se ele *coincidissem* com a imagem. Vejo, portanto, apenas um e não dois (p. 211).

Existe aluno que, após derivar uma função e encontrar uma função do segundo grau, calcula as suas raízes. O aluno faz a derivada da função ( $f'(x) = ax^2 + bx + c$ ) coincidir com a equação do segundo grau ( $ax^2 + bx + c = 0$ ) e faz esta última coincidir com a sua fórmula de resolução ( $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ), mesmo que a aplicação da fórmula não seja necessária. Assim, para o aluno, a função do segundo grau é imagem da equação do segundo grau e, conseqüentemente, a fórmula de resolução da equação do segundo grau é imagem da própria equação.

O processo da atividade mental também faz abreviações, pois é um processo mecânico. Esta parte mecânica é elemento para a visão. A regra é passar de uma visão à outra. Soulez (2004) diz que, para Wittgenstein, há relação interna entre regras e atos, e esta relação se exprime em conceitos.

A atividade matemática é sintética e, segundo Dehaene (1997), o cérebro tem a necessidade de abreviar. Dessa forma, utilizamos um novo termo para abreviar o antigo (o que está na memória). Esta necessidade de abreviação é reconhecida nos algoritmos e fórmulas de resolução também como uma necessidade de fazer um esforço menor. O cérebro evita o cálculo e utiliza a memória, porque quer evitar a compreensão e por esse motivo, o sujeito faz os cálculos de maneira rápida e mecânica.

A função da memória no cálculo é importante. Para saber resolver alguns cálculos, às vezes é preciso lembrar algumas regras lógicas. Faço mecanicamente o cálculo “seis vezes sete” e penso em “quarenta e dois”, porém busco na memória ‘sete vezes oito é igual a cinquenta e seis’ e confirmo a primeira hipótese, que “seis vezes sete é igual a quarenta e

dois” e não cinquenta e seis. Como temo confundir as duas operações, procuro em minha memória as lembranças do meu aprendizado da tabuada, para evitar a compreensão de que “seis vezes sete” é igual à soma  $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$ .

Para Largeault (1993), toda intuição é conhecimento de um imediato, sem intermediário nem interposição de raciocínios ou de elementos simbólicos entre sujeito e objeto. As outras características da intuição têm sido com frequência enumeradas: descontínua, instantânea, global, surge de uma só peça, embora eventualmente preparada por um trabalho de elaboração discursiva ou bem sustentada pelas lembranças.

A intuição é sustentada pelas lembranças, as lembranças suscitam as situações vivenciadas, e o cérebro evita a compreensão e utiliza a memória. Assim, podemos perceber que a construção de conceitos está intimamente ligada à memória.

## 5. 6 O ERRO DO ALUNO COMO TRANSFORMAÇÃO DO CONCEITO MATEMÁTICO

É mais fácil analisar a construção de um conceito pelo aluno, quando ele faz uma falta ou comete um erro, porque aparecem as diferentes interpretações que ele faz de um objeto e as confusões com os símbolos análogos de um texto escrito em linguagem matemática. Em um cálculo correto, é difícil observar as modificações de um conceito, porque, se o aluno aplica a regra de forma justa e segue o rigor de uma demonstração, muitas vezes ele não modifica nada que possamos perceber em seus registros.

Para Wittgenstein (1987), o sujeito não segue a regra de forma justa porque ele não tem a intuição do sentido da regra. Quando nós damos instruções a alguém, nós não podemos prever tudo o que pode acontecer na aplicação de uma regra. Existe uma diferença entre crer que nós estamos seguindo a regra e seguir de fato a regra.

Como a epistemologia repousa sobre a verdade, a comunidade escolar não aceita a transgressão da regra, assim a escola quer ter um controle da verdade. O erro da intuição aparece na discursividade, assim, a linguagem mostra quando não intuimos corretamente o sentido da regra. O erro também tem a ver com a memória, pois podemos esquecer o sentido de uma regra.

O sentido originário grego do ensinar e aprender já contém o termo “matemática”.

A linguagem grega é a passagem obrigatória de todos os caminhos do saber e da cultura ocidental. Como chamavam os gregos o movimento de ensinar e aprender? Chamavam com um só radical: *mantháno*. Assim, *máthesis* é o ensino e a aprendizagem, tanto no sentido do que é aprendido e ensinado, como no sentido do processo de ensinar e aprender. *Mathémata*, o que pode ser ensinado e ao que pode ser aprendido; e *mathesés*, o aluno, aquele que ensina aprendendo; o professor, aquele que aprende ensinando (...) Para aprender, não podemos receber tudo mas devemos, de certo modo trazer alguma coisa conosco para o encontro. Os gregos chamavam esta dinâmica, do que pode ser aprendido e do que pode ser ensinado, de *máthema*, donde provém os termos ocidentais de matemático e matemática (Leão, 1977, p. 46).

Para Leão, ao reconhecermos o sistema dos números naturais “não fazemos senão tomar conhecimento de algo que, de alguma maneira, já temos”, referindo-se à contagem. Desta forma, “o número é algo que pode ser ensinado e aprendido, é um *máthema*”. Seguindo suas reflexões, pergunta:

Onde nos perdemos para virmos a errar pelo matemático? Nós nos perdemos na manobra do Pensamento, que por obra da mão da Linguagem nos encaminha no caminho de aprender e ensinar. Só entrando no jogo da Linguagem é que encontramos um princípio de unidade realmente integrador das dimensões e níveis de aprender e ensinar (p. 50).

Erramos quando não intuimos corretamente o objeto e, dessa forma, também não construímos o conceito correto deste objeto. Não intuimos o sentido correto da regra que supõe o seu conceito. Este erro aparece na discursividade e é nela que também podemos aprender o sentido correto da regra.

Brouwer e Leão têm uma visão diferenciada da matemática no que se refere à dependência da linguagem para a sua atividade. Porém concordam no sentido de que a

matemática constrói conceitos, a partir de algo que já tem uma representação. Dehaene (1997) também está de acordo com o fato de trazermos conosco capacidades de fazer operações elementares.

Para melhor compreender o erro em matemática, foram analisados três livros que discutem este tema. Eles mostram diferentes tipos de erros dos alunos e dos matemáticos. O livro Barry Cipra (1985) discute o erro do aluno no Cálculo Diferencial e Integral e trata de mostrar ao leitor como encontrá-lo antes do professor. Os erros que o autor refere parecem ser, em sua maioria, erros decorrentes da falta de atenção do aluno ou quando ele se engana.

Cipra (p. 100) escolheu seis categorias de erros comuns : 1) a ausência dos sinais menos ; 2) o desaparecimento dos parênteses ; 3) a perda dos coeficientes ; 4) acidentes que acontecem aos expositores ; 5) a inversão fracionária; 6) os cálculos descontrolados.

Como exemplo de um erro do aluno, o autor coloca: “ $\frac{d}{dx}(x^4 + 5x^3 - x + 1) = 4x^3 + 3x^2 - 1$ ”. O exemplo mostra que o aluno sabe derivar, mas ao derivar o segundo termo do polinômio, ele provavelmente se engana ou esquece de multiplicar o expoente 3 pelo coeficiente 5. Mesmo que ele não saiba que deveria efetuar tal multiplicação, é possível que reconheça o erro ao comparar com a resposta correta.

Outro exemplo: “ $\int \frac{1}{300} t^3 dt = \frac{1}{75} t^4 + c$ ”, onde o autor faz a observação “isto se produz sobretudo no momento onde você começa a aprender a integrar. Você está habituado a diferenciar - onde nós o multiplicamos- de forma que você continua sobre seu propósito” (tradução minha). Talvez o aluno cometa este tipo de erro porque não saiba fazer a distinção entre a derivação e a integração de funções, ou então não saiba operar corretamente com frações.

Para os cálculos “descontrolados” citados pelo autor, trago alguns exemplos de minha prática em sala de aula. Certa vez, disse em sala de aula aos alunos que deveriam ler com

atenção os enunciados dos problemas que são solicitados nas avaliações, pois perdiam tempo respondendo questões que não seriam avaliadas. Um aluno argumentou que isso ocorre quando ele não sabe o que responder: “faz tudo” o que sabe sobre aquele determinado conteúdo que está sendo avaliado.

Este exemplo mostra como o aluno se perde nos campos conceituais da disciplina e explica os sentidos que não consegue perceber nos enunciados matemáticos. Como não consegue interpretar o que está sendo solicitado, “faz tudo” o que sabe. Isto lhe garante que, dentro desta “grande” resposta, o que está sendo perguntado será respondido.

Um aluno de ensino superior tinha em seu caderno:  $2x^2 = 2.2.x$ , mostrando que ele se perde com o simbolismo, pois derivou a função  $f(x) = 2x^2$  e encontrou  $f'(x) = 4x$ ; como ele não tem bem claro o significado destes símbolos, não os utiliza de forma devida, assim, iguala a função à sua derivada.

Após ter derivado corretamente a função  $f(x) = x^2 - 3x$  e encontrado  $f'(x) = 2x - 3$ , outro aluno conclui que  $2x - 3 = 0$  e que  $x = \frac{3}{2}$ . Neste caso, tem em sua memória a regra de resolução de uma equação do primeiro grau. Como ele deriva a função  $f(x) = x^2 - 3x$  e encontra uma função de primeiro grau, segue o propósito de resolvê-la, justamente porque este procedimento está em sua memória.

O livro que trata da inquietação de exatidão e escrúpulos dos matemáticos, escrito por F. Rostand (1960), mostra como o matemático, guiado pela intuição e memória, comete faltas e erros. Os erros cometidos por matemáticos são análogos aos erros cometidos por qualquer estudante. Nesse sentido, trata-se de um livro que pode contribuir para uma pesquisa dos erros dos alunos.

Para Rostand, o sentido que o matemático confere a uma expressão matemática pode modificar o sentido da expressão. Comenta que, de acordo com Poincaré, estamos expostos ao erro, quando trocamos uma proposição por uma proposição um pouco diferente e lhe atribuímos um outro sentido. Rostand acrescenta que também estamos expostos ao erro, quando “esquecemos o sentido de uma regra” (tradução minha) (p. 10).

“A proposição um pouco diferente”, como no caso  $y = x + a$  e  $y = |x + a|$ , para um matemático, é diferente, mas, para o aluno, é um “pouco” diferente, e é por isso que, às vezes, o aluno constrói seu conceito de função modular com os julgamentos da função do primeiro grau, pois elas são aparentemente iguais.

O aluno também “esquece o sentido de uma regra”. Ao se deparar com uma função do segundo grau, mecanicamente aplica a regra que resolve uma equação do segundo grau, mesmo que para resolver a questão não seja necessário encontrar as raízes da equação. A memória interfere diretamente na construção de conceitos, porque o aluno tem o hábito de construir seu conceito de acordo com sua memória e com os conceitos que ele aprendeu num outro tempo.

Para Rostand (p. 18):

numa perspectiva da história refeita, nós definiríamos então a falta “lógica”, que “poderia” chegar ao erro; falta definível em tanto que relação de um texto correto e de um texto incorreto. Mas nós podemos considerar também a falta psicológica, a operação intelectual defeituosa, que encaminhou ao erro ou que teria podido encaminhar: lapsos, falta de memória, negligência... (tradução minha).

Os lapsos e negligências são realmente considerados como erros, mas nem sempre têm sua origem em uma má compreensão do aluno. Um erro pode ser uma negligência daquele que calcula. Quando o sujeito reconhece o erro, ele renuncia e corrige. É diferente da persistência da ilusão de ter aplicado corretamente a regra, na qual o sujeito acredita que seu

raciocínio está correto e não percebe o erro. O sujeito ao acreditar que está seguindo corretamente a regra, constrói um conceito que não segue as exigências da matemática.

O problema que nasce com as confusões e cálculos descontrolados citados por Cipra acontece quando o aluno se perde nos cálculos, principalmente nos cálculos algébricos. O aluno faz o primeiro cálculo, deste primeiro cálculo surge outro cálculo e, assim, sucessivamente. Neste ínterim, o aluno parece esquecer a pergunta inicial e se perde no emaranhado de cálculos do seu rascunho, como nos exemplos citados anteriormente, nos quais o aluno igualou a função à sua derivada, e o outro aluno calculou a raiz da derivada da função.

Rostand diz (1960, p. 35) que, neste caso, o matemático “não descreverá mais necessariamente sua intuição primeira; ele descreverá melhor estas provas sem ter atenção à primeira intuição que ele teve” (tradução minha). Sobre os escrúpulos dos matemáticos, diz:

M. Degen (...) escreve ele a Hermite, e embora eu veja bem que nós não podemos nada criticar a seu novo raciocínio, eu não percebi ainda em qual ponto antigo se encontrava em defeito (...) nos casos favoráveis, o matemático consegue provar escrúpulos novos, e a renovar sua maneira de ver a demonstração” (tradução minha) (p. 150).

Os escrúpulos novos dos quais fala o autor são outras interpretações, outras maneiras de ver o antigo escrúpulo. É uma forma de melhorar a compreensão do conceito; assim, nós não podemos dizer que o matemático constrói novos conceitos com seus novos escrúpulos?

Para Rostand (1960, p. 151), “o escrúpulo que nasce ao contato da demonstração errada reintroduzirá a subjetividade das estimativas na objetividade do erro” (tradução minha),

pois o escrúpulo é subjetivo; é pela subjetividade que Kant definia o escrúpulo : “Uma razão oposta a uma outra, mas que tem apenas um valor puramente subjetivo, é um escrúpulo (...). No escrúpulo, nós não sabemos se o obstáculo à crença tem um fundamento objetivo ou puramente subjetivo (...)”. Seria conveniente então procurar “a razão da dúvida”, de “dissipar” o escrúpulo, seja abrindo, seja discernindo um ponto errado na demonstração” (tradução minha) (p 111).

A subjetividade é pessoal, ela é do sujeito e é uma interpretação que o sujeito dá a um conceito. Assim, a interpretação que ele dá a um conceito pode ser chamada de seu conceito e “o material matemático se afina, pela elaboração de conceitos novos, e que permitem evitar o golpe sobre certas classes de erro” (tradução minha) (p. 154). “Sem ela, não tem lei, a matemática torna-se uma tarefa ‘de experiência’ pessoal” (tradução minha) (p. 196).

Se a matemática torna-se uma tarefa de experiência pessoal, nós podemos dizer que os conceitos matemáticos também têm uma interpretação subjetiva. Existe o conceito escrito com o rigor da linguagem matemática, mas o sujeito faz sua interpretação e constrói seu conceito com a sua linguagem.

Sobre a linguagem, Rostand (p. 197) diz: “Se Houel e Darboux não se entendem, é porque eles não falam sempre a mesma linguagem (...). Conforme o tipo de espírito deles, os matemáticos são mais ou menos sensíveis a tal ou tal forma de argumentos” (tradução minha).

Eles não falam a mesma linguagem porque têm interpretações diferentes de uma mesma proposição. Assim, a interpretação de uma proposição matemática é também individual. Uma proposição envolve conceitos que são objetivos, pois obedece às exigências lógicas e estruturais da matemática. Porém uma proposição, mesmo envolvendo conceitos objetivados pelo rigor da matemática, é suscetível de uma leitura subjetiva. Um problema de geometria espacial, para ser resolvido, pode ter diversos caminhos de resolução e isto se deve a leituras e interpretações diferentes do mesmo enunciado.

Na obra de Samuel Johsua e Jean J. Dupin, os autores fazem uma análise da didática das ciências e matemáticas, escrevem “os trabalhos de pesquisa em didática das ciências e das matemáticas” e mostram que:

os alunos são de fato conduzidos a cometer erros de maneira repetida. Mas o termo erro pode ser engano (...) de fato, as concepções e modos de raciocínio aparecem ao contrário como relativamente organizados e dotados de uma lógica própria, e aptas a ganhar ainda em coerência interna, tudo restando distantes dos modelos canônicos (tradução minha) (1993, p. 121).

Se os erros são organizados e dotados de uma lógica própria, nós não podemos dizer que seja uma negligência do aluno, e sim que sua interpretação não coincide com o conceito apresentado por seu professor. Ele compreendeu mal porque construiu seus conceitos com uma interpretação diferente das exigências e do rigor da matemática. A coerência interna existente nos erros dos alunos apresenta uma lógica própria, contrária à lógica matemática.

Se não existe pensamento ilógico, por consequência, não existe erro sem uma lógica. O erro aqui considerado é a demonstração de um raciocínio não aceito, ou seja, um juízo falso e que não pode ser confundido com o engano. Errando o sujeito tem a ilusão que está correto, mesmo após uma releitura do texto matemático no qual figura o erro; diferente do engano, que pode ser corrigido pelo sujeito. No erro, a ilusão do juízo correto persiste, no engano, a ilusão se desfaz.

Para dar exemplos de trabalhos sobre as concepções dos alunos, os autores Samuel Johsua e Jean J. Dupin mostram uma pesquisa com o tema ‘diferenciais’, um exemplo de cooperação entre as disciplinas Matemática e Física. O relato dos resultados aponta:

nos problemas correntemente propostos aos estudantes, estes (os estudantes) não precisam de tais considerações conceituais. Eles utilizam algumas marcas lingüísticas como “elementares”, “muito pequenas em comparação com as tais marcas”, e as conectam com os procedimentos, então os fundamentos conceituais são perdidos de vista (tradução minha) (p. 136).

Se “os fundamentos conceituais são perdidos de vista” é porque os alunos constroem seus conceitos com suas palavras, por isso mesmo “utilizam algumas marcas lingüísticas”. Estas marcas são “muito pequenas em comparação com” porque o aluno tem o hábito de reduzir o antigo conceito (o conceito dado pelo professor) com as palavras que estão no seu vocabulário.

De forma similar, Rostand (1960, p. 163), ao falar do hábito do matemático de economizar, diz: “Assim, o calculador se dá sistematicamente a tarefa mais fácil, escolhendo as operações que exigiram dele o menor controle e o menor esforço de memória” (tradução minha).

Stella Baruk (1985, p. 203), de forma similar, fala do problema dos alunos com as definições matemáticas. Ela menciona o testemunho de alguns alunos entrevistados por uma revista. Nesta entrevista, um aluno diz: “nós não a sabemos e nós podemos muito bem saber o exercício sem saber a definição”; ao responder à questão “como tu os (exercícios) faz?”, outro diz: “nós nos arranjamos, nós nos lembramos como ele (o professor) nos explicou”; um terceiro aluno completa, dizendo: “se tem uma palavra que está mal colocada na definição ou que nós esquecemos, mesmo se é um  $x$  ou um  $N$ , nós temos 30 vezes que copiá-la” (tradução minha).

“Uma palavra que está mal colocada” refere-se ao rigor de seguir uma definição matemática que não admite equívocos e que o aluno reconhece. “30 vezes que copiá-la” é o castigo pelo erro cometido.

“A definição que nós esquecemos” ou “nós nos lembramos” refere-se à necessidade e importância da memória do sujeito para fazer conexão entre os símbolos e conceitos envolvidos numa definição matemática.

“Nós nos arranjamos, nós nos lembramos como ele nos explicou” faz referência aos procedimentos técnicos que sintetizam o algoritmo para se resolver um cálculo. O algoritmo é útil para o aluno, porque se apresenta como uma redução de um conceito. O aluno, muitas vezes, não se pergunta o que se calcula e sim como se calcula.

Qual o significado do fato de o aluno não saber, por exemplo, a definição de uma equação do segundo grau e saber encontrar suas raízes? De forma implícita, ele sabe a definição, porém ele sabe com suas palavras. Ou seja, ele pode não saber a definição de forma

que obedeça ao rigor da linguagem matemática, mas ele sabe com outra linguagem, a sua linguagem. Saber aplicar o algoritmo que encontra as raízes de uma equação do segundo grau é saber identificar uma equação do segundo grau.

No mesmo livro, a autora descreve um erro de um aluno ao responder o pedido do domínio da função: “ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x \rightarrow f(x) = x - 3$ ”, e diz: “Obtive um dia esta pérola:  $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ . (...) O ‘raciocínio’ é então o seguinte:  $x - 3$ , é como  $x - 3$  sobre 1? Sim,  $x - 3 = \frac{x - 3}{1}$ . Então, como não é preciso que o denominador se anule, 1 deve ser excluído do domínio da definição (...) 1 não deve ser nulo” (tradução minha) (p. 19).

Parece que esse exemplo trata de uma construção de um conceito pelo aluno, porque ele faz sua regra do domínio de funções reais. Ele cria uma regra para si com uma “lógica própria”. Esta lógica não coincide com as exigências conceituais e, por este motivo, Baruk salienta que o raciocínio do aluno é uma “pérola”.

Deve-se estabelecer a diferença entre falta de atenção para realizar um cálculo e falta de memória para definir a regra que se deve aplicar. É preciso estar atento para o fato de que o aluno pode não saber, por que não estuda; ou estuda, mas não compreende, ou ainda pensa que compreendeu, mas constrói o conceito de forma incorreta. O professor não pode ficar na ilusão de que o aluno aprendeu.

Para Rostand (1960, p. 64),

por conseqüência, uma impropriedade, um absurdo, uma re-negação, uma generalização abusiva, uma omissão, uma substituição de um caso a um outro caso, análogo mas não idêntico, podem ser dados a um lapso, a uma confusão, a uma negligência; uma alteração será dada a um lapso, a uma confusão, a um esquecimento, a uma negligência; uma falta de verificação, uma falta de contra-exemplo, provém de uma confusão, de uma falta de idéia, de um esquecimento, de uma negligência; ...De alhures toda “falta” psicológica não origina um erro (tradução minha).

Penso que o autor pretende dizer que estas ‘faltas psicológicas’ que um matemático comete não originam em erro porque estes ‘erros’ podem ser corrigidos, no momento que o matemático corrigir a si mesmo, como se fosse um estrangeiro no seu trabalho intelectual. É bem provável que o matemático reconheça seu erro, quando corrigir seu próprio trabalho como se estivesse corrigindo o trabalho de um outro.

O erro do aluno nos possibilita perceber de forma mais clara as modificações de um conceito. Mas não é todo erro que mostra a construção de um novo conceito. Ainda que o erro analisado seja reconhecido pelo aluno, esse erro pode ser uma negligência ou um lapso. Se o aluno não reconhece o erro como erro, ele tem a ilusão de que está certo. A compreensão que o aluno faz do conceito dado pelo professor pode ser um outro conceito surgido da sua interpretação.

Ao se deparar com o objeto matemático, o conceito do objeto sofre intervenção da imaginação e da memória. Estes julgamentos virtuais do objeto têm necessidade de uma formalização. Existe uma ruptura com a intuição, o aluno abandona o conceito antigo, e sua intenção de determinar um novo conceito com suas palavras faz com que crie uma nova regra, um novo conceito.

A construção do conceito pelo aluno acontece num movimento dialético com sua intuição<sup>18</sup>, porque a intuição pode surgir do conceito, e do conceito pode surgir a intuição. “A intuição intelectual de um entendimento conhece o que cria e cria o que conhece” (tradução minha) (Pierobon, 2003, p. 208). É no movimento entre o objeto matemático e o seu conceito que surge uma rede de intenções do sujeito-aluno. A compreensão prévia do objeto permite

---

<sup>18</sup> “A dialética tem penetrado nosso espírito que dirige nossa imaginação intuitiva, isto é, ela influencia na maneira como nós representamos intuitivamente certos gêneros de objetos. Assim as intenções conceituais da dialética se encontram em alguma forma, intuitivamente realizadas pelas interpretações espontâneas. Isso torna claro igualmente o fato que a intuição pode surgir dos conceitos” (tradução minha) (Bernays, 2003, p. 107).

que o sujeito o interprete, projete sentidos na interpretação e construa seu conceito na compreensão do objeto.

Existe uma circularidade entre o conceito e o ato de interpretação. Essa circularidade não é estática, porque o conceito produz um ato e este ato retorna ao conceito. O conceito é aperfeiçoado, na perspectiva do aluno, porém este novo conceito que é transformado em cada ato de interpretação do aluno pode ter um erro lógico produzido pela sensibilidade. Este novo conceito produz outro ato, pois a circularidade se interrompe quando seu conceito é construído. É um movimento autônomo e imprevisível. Reconstruir o conceito dado é criar através de atos limitados na liberdade, ou seja, a liberdade criativa do aluno é articulada à necessidade conceitual da matemática.

Esta circularidade define a construção de uma outra linguagem que o aluno faz do conceito recebido em linguagem formalizada e da linguagem do professor. O aluno interpreta as duas linguagens e constrói seu conceito. Neste ato de interpretação, ele projeta outros sentidos e re-interpreta através de uma sucessão de atos. O conceito vai se transformando pouco a pouco. Os atos que são limitados na liberdade conceitual também estão inseridos num domínio de conexões da memória do aluno. A experiência do sujeito com o objeto matemático é propiciada pelas sensações e articulada com a memória.

Quando o aluno formaliza aquilo que conhece do objeto, ocorre a perda da intuição<sup>19</sup>, porque a imaginação perde sua liberdade. Colocar um conteúdo na forma escrita é objetivar o subjetivo.

É através da linguagem matemática que nós podemos identificar onde se opera o conhecimento matemático, então é nela que nós podemos observar a construção de um novo conceito. O ato da construção do conceito manifesta a intenção do sujeito, enquanto sujeito

---

<sup>19</sup> Para Pierobon (2003, p. 206), “a razão pura e prática não tem articulação direta com a intuição” (tradução minha).

que interpreta. A intenção nasce do domínio das conexões do conceito e daquilo que está na memória do sujeito-aluno.

O exemplo dado por Stella Baruk, do aluno que escreveu como resposta  $\mathcal{R} - \{1\}$  para o domínio da função  $y = x - 3$ , mostra que ele construiu uma regra incorreta. A regra que ele construiu é  $\mathcal{R} - \{\text{denominador}\}$  e seria melhor  $\mathcal{R} - \{\text{raiz do denominador}\}$ , para garantir que o denominador não seja nulo.

Uma demonstração não resulta do conceito, e sim da construção de conceitos, ou seja, da conexão que o sujeito faz do conceito com outros conceitos. O aluno do exemplo citado acima talvez tenha percebido que para a função  $y = \frac{x+2}{x}$ ,  $x$  deve ser diferente de zero; para a função  $y = \frac{2x+5}{3x}$ ,  $3x$  deve ser diferente de zero e, conseqüentemente,  $x$  deve também ser diferente de zero. Assim, para ele, a função  $y = x - 3$ , que também pode ser pensada como  $y = \frac{x-3}{1}$ , um deve ser diferente de zero. Podemos perceber que mesmo que a regra não seja correta, existe uma lógica na construção dessa regra construída pelo aluno.

Quando a aluna faz a operação  $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} - 1$  e iguala a  $-1$ , também mostra a sua lógica própria e o conceito que ela reconstruiu. “Nada” menos um é igual a  $-1$ . Ela faz a tradução do que se mostra, do que aparece e do que desaparece. A tradução do que é visto se transforma no algoritmo: 3 simplifica com 3, 5 simplifica com 5 e sobra “um nada”.

Ao calcular  $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} - 1$ , a aluna não escreve  $0 - 1 = -1$  na resposta, mas fica implícito a presença do zero. Ela transforma o conceito de multiplicação de frações por problemas relacionados com a ilusão do que foi visto. Reconhece a igualdade  $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{3 \times 5}{5 \times 3}$  e é provável

que ela aplique de forma isolada e correta o conceito  $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1$ . Porém, ao se deparar com o conceito  $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} - 1$ , ela transforma o conceito  $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3}$  em “um nada”, já que ele se encontra em outro contexto.

O ato de resolver a multiplicação  $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3}$  e diminuir de 1 segue a regra das operações com frações. Mas, durante a aplicação desta regra, a aluna engendra outra regra (regra no contexto). Quando lhe perguntei: “quanto é a multiplicação de  $\frac{3}{5}$  por  $\frac{5}{3}$ ?”, ela responde de imediato: “é verdade,  $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} - 1$  não é -1, é 0”.

As regras estão sempre num estado de devir, pois dependem do contexto. A multiplicação de  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{5}{3}$ , que é igual a 1, num outro contexto, para a aluna, é igual a 0, mas no momento em que reflete sobre a minha pergunta, se recorda que o resultado dessa multiplicação é 1 e não 0. Na perspectiva do aluno, muda o contexto, muda o conceito.

Na álgebra, desencadeiam muitos problemas de aprendizagem do aluno. Existe um campo imenso para o aluno inventar regras que não estão de acordo com o campo conceitual. Para o aluno, existe uma conexão entre matemática e magia. Como mencionou Baruk, a magia da expressão  $\frac{a+c}{a+b}$  ser igualada a expressão  $\frac{c}{b}$ . O aluno não sabe o que é ‘a’, ‘b’ e ‘c’ e talvez estas incógnitas não tenham sentido. Ele simplifica o ‘a’ do numerador com o ‘a’ do denominador, o que em outro tempo, fazia na multiplicação de frações.

Mesmo na aritmética, em que existe uma forma mais simples de intuir o objeto, nós encontramos problemas de interpretação, como, por exemplo, a fração  $\frac{1}{2}$  ser igualada a dois,

ou no caso da soma de  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{3}$  ser igualada a  $\frac{2}{5}$ . Como existem regras para encontrar as imagens das incógnitas que o aluno não compreende, ele interpreta estas regras com um significado de magia, justamente porque não consegue fazer a abstração da significação dos símbolos lógicos para representar mentalmente os objetos.

O problema do sentido que o aluno atribui às letras na álgebra é bastante complexo. O sentido pode se dar num tempo posterior, mas também pode se perder. O aluno pode com o tempo dar sentido após estabelecer semelhanças, como também pode confundir o que aprendeu no passado e o que tenta aprender no presente.

Ao estudar as operações algébricas, o aluno pode resolver mecanicamente a expressão  $(a + b)^2$  e encontrar  $a^2 + 2ab + b^2$  através de uma regra, mas ele pode constatar que  $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ , podendo inclusive perceber geometricamente esse produto. Mas, em um outro tempo, a expressão  $(a + b)^2$  pode ser abreviada erroneamente pela expressão  $a^2 + b^2$ , porque ela não faz mais sentido para ele.

Existe aluno que, mesmo depois de já ter experienciado o conceito de limite de uma função e também ter lidado com grandes cifras, ao calcular o  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2-1}$  e encontrar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) = \infty, \text{ erra durante o processo de sua resolução.}$$

É provável que este aluno admita que  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  e que, ao estudar a simplificação de frações algébricas, também admita que  $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$ , entretanto, no momento em que está lidando com o conceito de limite de uma função, estes outros conceitos parecem ser abandonados.

O  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2-1}$  é calculado como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0$ . O aluno

deveria lançar mão do conceito de simplificação de frações algébricas que estudou provavelmente na 7<sup>a</sup>. série do ensino fundamental e que justifica o fato de “dever” saber que

$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$ . Na 4<sup>a</sup>. série do ensino fundamental, é possível que tenha

estudado a simplificação de frações durante seus estudos de aritmética, justificando o fato de

“dever” saber que, por exemplo,  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

Este aluno não está mais na 4<sup>a</sup>. série, nem na 7<sup>a</sup>. série do ensino fundamental, ele está em outro tempo, em outro lugar. Neste novo contexto, os jogos de linguagem também não são os mesmos. A ordem não é mais “simplifique as frações abaixo” ou “simplifique as seguintes expressões algébricas”, e sim “calcule os limites das seguintes funções”. Novo contexto, novos jogos de linguagem e novos conceitos. A rede conceitual pode se ampliar e trazer sucesso, ou então se emaranhar de tal forma que o sujeito aprendente torna-se um fracassado.

Após derivarem uma função e, por exemplo, encontrar  $f'(x) = 2x^2 + 2x + 4$ , alguns alunos dividem por dois apenas o lado direito da igualdade ( $f'(x) = x^2 + x + 2$ ). O motivo dessa divisão não seria, para eles, o mesmo quando se costuma dividir  $2x^2 + 2x + 4 = 0$  também por dois com a intenção de simplificar a equação? O motivo que justifica que na equação é conveniente dividir por dois e na função quadrática não, é um novo conceito.

O aluno, não raras vezes, não se dá conta de que uma proposição matemática, após uma transformação lógica, não muda de sentido. Para ele, após a transformação lógica, a proposição está em outro contexto e, conseqüentemente, será outra com outros conceitos.

A demonstração da resposta deste aluno representa uma nova imagem, já que não consegue ver similaridade entre o que antes “podia fazer” e que agora “não sabia que não

podia fazer”. É no movimento entre os conceitos que o aluno perde o rumo e “não sabe mais o que fazer”.

Após derivarem uma função, alguns alunos acrescentam ao resultado a constante de integração. Eles misturam derivação e integração de funções, porque são conceitos que não estão claros em suas mentes. Diferentemente do aluno que alarga seu conceito de uma constante de integração ao fazer um desenho de três ou quatro parábolas do tipo  $y = ax^2 + c$  num mesmo eixo, para exemplificar a constante da integral da função  $y = x$ .

Thirion (1999) diz que Georges Canguilhem salienta que o momento no qual um conceito muda de sentido é quando ganha um sentido maior. Porém, quando este sentido não corresponde às necessidades da matemática, o conceito sofre prejuízo e o aluno também.

## 5. 7 MOVIMENTO PARA A AÇÃO DE UM NOVO CONCEITO

A necessidade de criar conceitos sempre surge na tentativa de resolução de problemas. O conceito engendra outros conceitos como também pode impedir um novo. O conceito de potência, por exemplo, traz subjacente o conceito de multiplicação, porém a regra que trabalha o conceito do quadrado da soma de dois termos pode impedir o conceito de potência de uma expressão algébrica. A aplicação da regra do quadrado da soma de dois termos que é “o quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o primeiro pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo”, simbolizada por  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , pode impedir a visão do produto  $(a + b)(a + b)$ . O aluno memoriza a regra como resultado final, “esquecendo” (porque é provável que o professor demonstre ou o conduza à demonstrar este produto notável), ou não se dando conta de que a potência resulta de um produto.

Um conceito se constrói quando se remaneja conceitos anteriores que o preparam, mas que não passam a constituí-lo. Para o sujeito interpretante, os conceitos antigos fundidos num novo podem transformá-lo ou impedir a criação de outro. O conceito está sempre num estado de devir a ser, ele não é absoluto no sentido de encontrar-se pronto. Ele é fragmentário, pois está sempre se renovando, na medida em que o sujeito projeta nele sentidos novos.

As conexões do conceito com outros conceitos que dependem de esquemas operatórios, os significantes que representam o conceito (como os símbolos matemáticos, por exemplo) e o contexto no qual se encontra o conceito determinam os seus sentidos projetados.

Existe no contexto da sala de aula uma circularidade de sentidos produzida pelo jogo de linguagem no qual participam a matemática, o professor de matemática e o aluno. O professor tem que conduzir o aluno na construção possível de uma outra linguagem a partir da linguagem da matemática, porém esta construção muitas vezes é insuficiente para que o aluno compreenda, assim ele recorre ao colega que traduz a linguagem do professor.

Na prática de sala de aula, percebe-se que a mudança de enunciado matemático gera ansiedade ao aluno, o que denota um problema com a interpretação da linguagem matemática. Não entender a pergunta poderia indicar a falta de elementos teóricos, porém a forma como o aluno reflete sobre a matemática parece ir além desta falta. A atividade matemática depende da linguagem e somente aquele que sabe ler e escrever na linguagem matemática pode participar do seu jogo de linguagem. “O conceito de saber está associado ao do jogo de linguagem (...) Se eu disser ‘Eu sei’ em matemática, então a sua justificação será uma demonstração” (Wittgenstein, 2000, p. 158).

O caso de uma aluna citado por Benedito Silva (1999, p. 58) retrata esta problemática. A aluna demonstrou saber responder a questão “2 pirulitos custam Cr\$ 10.000,00. Qual o preço de 1?”, mas não soube dizer à professora qual operação tinha efetuado para obter o resultado correto.

Se esta aluna sabe operar, é possível que tenha intuído corretamente os passos que deveria seguir para resolver o problema proposto, porém não sabe nomear estes procedimentos. Ela resolve, com o auxílio da intuição, mas esbarra no momento em que deve falar e explicar seu pensamento. A dificuldade de “dizer”, ler e escrever tem a ver com a linguagem.

Nas avaliações, percebe-se que os alunos preferem perguntas com enunciados trabalhados em sala de aula, assim seguem os modelos apresentados pelo professor e utilizam as mesmas técnicas de pensamento. A facilidade de seguir os passos de um algoritmo pré-estabelecido está na comodidade de não precisar interpretar o problema. Aí reside um pensar puramente técnico, seguido da ilação “se a pergunta é esta, então procedo de tal forma para obter o resultado”.

Quando o erro se dá por problema de operações elementares, costuma-se dizer que é “falta de base”. Para os professores da disciplina, tal problema é o resultado de um déficit teórico do aluno. Como exemplo, trago o caso de uma aluna do ensino superior, cursando uma disciplina que não era do primeiro semestre do curso: perguntou se podia “simplificar  $\frac{3}{5}$  e igualar a 15”. Será que o diagnóstico pode ser atribuído, neste caso, apenas à “falta de base”? O que “falta” no conhecimento matemático desta aluna quando não consegue discernir que três das cinco partes que estão dividindo um inteiro nunca será igual a quinze inteiros? O problema é ausência de intuição? Falta de raciocínio lógico? Ou foi a leitura errada da fração que não possibilitou a sua compreensão?

Por outro lado, os alunos afirmam com freqüência: “existem professores que sabem muito, mas não sabem explicar”. O que significa “não saber explicar”? O que falta e o que excede na linguagem do professor de matemática que faz com que os alunos não consigam compreender? Assim como o aluno apresenta seu déficit teórico – a “falta de base” -, o

professor, por sua vez, apresenta o seu, ou seja, não se faz entender, por problemas também de linguagem. Não entender o enunciado e não entender o professor também geram déficits.

É preciso então entender o que o aluno não entende. Este entendimento se reconhece via linguagem, através da própria linguagem da matemática, bem como pela compreensão e interpretação desta linguagem pelo aluno, entender esse processo é o papel de intermediador do professor, enquanto sujeito que possibilita que a matemática produza sentidos para o aprendente.

Os problemas encontrados no ensino e na aprendizagem da matemática permanecem com alguns aspectos obscuros, assim como algumas divergências nas suas argumentações. As polêmicas geradas pelo alto índice de reprovações de estudantes nessa disciplina precisam ser questionadas. Perguntar pela responsabilidade das reprovações se torna pertinente: seria o seu ensino, a falta de preparo dos estudantes ou a leitura equivocada que se faz da própria matemática?

Partindo do pressuposto que a matemática é ensinada com o objetivo de “desenvolver o raciocínio lógico” do aluno, como se costuma argumentar nos planos de ensino, pode-se dizer que, a partir desta visão, existem alunos que sofrem de uma “insuficiência lógica”, já que não correspondem aos anseios da escola. A lógica pode ser aprendida, assim como a intuição pode ser educada, porém os conceitos são produzidos de acordo com a imaginação e com a memória do sujeito, mas que dependerão do contexto e das condições oferecidas para que o sujeito produza sentidos do objeto percebido.

O movimento para a ação de um novo conceito depende do ato de interpretação do aluno e do contexto que envolve este ato, bem como o contexto em que está inserido o conceito a ser construído. A contingência que servirá como panorama deste ato de interpretação não pode ser prevista pelo professor, pois não podemos prever o rumo que tomarão as ilações e as analogias feitas pelo aluno, muito menos a conexão que fará do

conceito a ser construído com os conceitos que têm em sua memória. Porém os elementos que servirão de respaldo para a leitura do objeto a ser percebido pelo aluno podem ser previstos pelo professor, como o texto apresentado e a linguagem a ser utilizada para explicar o texto. A condução dos jogos de linguagem nascidos das interferências e perguntas do aluno dependem da contingência e é neste momento que o professor mostra sua criatividade. O aluno entra no jogo e questiona, na medida de sua compreensão, e o professor compreende as conjeturas do aluno, na medida que responde ou refaz a pergunta. Quem dirige os jogos de linguagem não é apenas o professor. As conjeturas do aluno mostram como ele interpreta, e é nos jogos de linguagem, nascidos das ‘provas e refutações’, que o professor pode auxiliar o aluno na emancipação dos equívocos provenientes da linguagem.

## 5. 8 O CONCEITO E SEUS CONTEXTOS

Quando a aluna diz que  $\frac{3}{5}$  é igual a 15, pode-se dizer que o seu erro é lógico, pois  $\frac{3}{5}$  é diferente de  $3 \times 5$  (confundindo uma operação de divisão com uma de multiplicação). Neste caso, de fato o erro se dá porque o argumento utilizado não obedece às leis da aritmética, e que, segundo Frege (1983), não dependem da intuição *a priori* formulada por Kant. A aluna que comete esse tipo de erro parece não ter bem claro o conceito de fração, o que pressupõe carência de elementos teóricos. Disso decorre não conseguir ler corretamente a fração, compreender seu significado e interpretar suas propriedades operatórias. A partir desse exemplo escolhido, perguntamos onde esbarrou a atividade reflexiva desta aluna ao cometer tal erro? Parece-me que, além da sua leitura equivocada da fração, ela pretendia lançar mão de uma lei advinda da aritmética. A capacidade criativa da aluna de engendrar uma possível

“regra” tornou-se uma forma de lidar com as tantas outras leis lógicas que lhe são obscuras. Aliás, a prática de “inventar regras”, com o objetivo de se livrarem do problema, é recorrente entre os alunos.

Como a aluna não consegue atribuir significado à expressão  $\frac{3}{5}$ , ela pergunta se pode simplificar e igualar a 15. A aprendizagem de simplificação de frações sempre foi problemática e misteriosa para muitos alunos. Simplificar  $\frac{3}{15}$ , por exemplo, e igualar a  $\frac{1}{5}$  não tem muito sentido.

Para Granger (1974), a significação se dá na experiência; ela é objetivante, organiza imagens e idéias. Neste caso, a imagem de  $\frac{3}{5}$  não é associada à idéia de três partes de um inteiro que foi dividido em cinco partes. A aluna não consegue fazer a experiência mental da fração, conseqüentemente, esta falta de experiência acaba se objetivando na escrita.

Para Wittgenstein (1996), a significação se dá no contexto. As palavras fazem ato conforme as regras no contexto. Caso a aluna do exemplo estiver com seus pais e um casal de amigos num restaurante e tiver que pagar as despesas de sua família após um jantar, é evidente que ela saberá que a conta fornecida pelo garçom deverá ser dividida por cinco e a parte que lhe caberá pagar deve ser multiplicada por três. Na realidade, ela pagará o equivalente à  $\frac{3}{5}$  da conta do restaurante, mas na sala de aula ela iguala  $\frac{3}{5}$  a 15. No restaurante, é provável que ela não vá querer pagar quinze vezes o valor da conta, porque sabe que perderia dinheiro.

Na sala de aula, o conceito de “três quintos” é um; no restaurante, o conceito é outro. Os três quintos representados em linguagem codificada demandam significação. O pagamento de três quintos de uma conta de restaurante é vivenciado.

Para melhor investigar a mudança de contextos de um conceito matemático, trago outra experiência em minha prática docente. Um estudante com notas baixas em matemática procurou-me para ajudá-lo. Começamos com o estudo de frações. Em seu caderno pedia o cálculo de  $\frac{2}{5}$  de 60. Perguntei-lhe como resolveria a questão. Ele aplicou um algoritmo que a sua professora havia lhe ensinado, mas de maneira errada. Propus-lhe que imaginasse a seguinte situação: ele e sua irmã, juntamente com três amigos em um bar, onde cada um dos cinco havia consumido um sanduíche e um refrigerante. Caso quisesse pagar a sua despesa e a da sua irmã, quanto ele teria que pagar? Após algumas reflexões, concluí que a conta deveria ser dividida por cinco (o número de pessoas que estava na mesa do bar) e a parte que lhe caberia seria o resultado desta divisão multiplicada por dois. Concluimos que esta quantia corresponde a  $\frac{2}{5}$  do valor da conta.

Após alguns exercícios orais, retornamos ao exercício do caderno que pedia para calcular os  $\frac{2}{5}$  de 60, e novamente tentou o algoritmo que a professora havia lhe ensinado. Esse exemplo demonstra o quanto os estudantes estão presos a algoritmos. O fato de eu ter lhe fornecido um exemplo de aplicação a uma situação do cotidiano não foi suficiente para que pudesse pensar os  $\frac{2}{5}$  de 60 sem recorrer ao algoritmo. A generalização espontânea não se concretizou. Não existe garantia de que se transpõe uma situação teoricamente vivenciada para a resolução de uma operação formalizada.

Com a intenção de saber o que ele não sabia e para revisar as operações com frações, propus-lhe uma lista de exercícios para resolver. Olhou a lista e me disse: “tu és chata como a minha professora”. Na sua perspectiva, a pessoa aparentemente “querida” que eu representava

se torna “chata” e, na minha perspectiva, a professora experiente que eu sou se torna incompetente.

Para resolver a primeira adição da lista que eu havia proposto, ele me pergunta se deveria calcular o denominador comum. Ao responder afirmativamente, ele calcula corretamente, mas com alguns erros, devido à falta de atenção. Após algumas discussões sobre estas operações, ele também faz algumas multiplicações e divisões.

Um outro dia, já tinha discutido com ele a ordem das operações a serem resolvidas em um cálculo. Fiz a suposição de ele ter que pagar dois reais, mais três CDs de dez reais. Concluimos que primeiro deveria multiplicar o preço de cada CD por três, para depois adicionar com os dois reais.

No momento em que ele deveria fazer um cálculo com frações com as mesmas operações, adição e multiplicação, ele calcula o denominador comum, inclusive para a

$$\text{multiplicação } \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{15}{4} - \frac{1}{2} = \frac{20 + 72225 - 30}{60} = \frac{20700}{60} \right).$$

Anteriormente, ao resolver as adições e subtrações das frações, ele sabia que deveria calcular o denominador comum. No momento de multiplicar as frações, ele sabia que deveria multiplicar numeradores e denominadores entre si. No momento de seguir a ordem correta das operações com números inteiros, como no caso de  $2 + 3 \times 10$ , ele também demonstrou saber, porém, no momento de fazer o mesmo raciocínio com as frações e não mais com os números

inteiros, ele já não sabia mais. Inclusive no cálculo de  $\frac{3}{8} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}$ , ele somou os

denominadores e numeradores  $\frac{3}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$ , o que antes ele não havia feito.

Existe uma regra para somar frações e outra para multiplicar, mas quando as duas operações estão juntas, na sua interpretação, as regras mudam. Assim como a regra da ordem

das operações com números inteiros é uma e a regra para seguir a ordem das operações com frações que deveria ser a mesma para ele é outra. Na perspectiva do estudante, muda o contexto, muda a regra e também o conceito.

Infelizmente percebi que este aluno tem a vontade de ser aprovado, caso contrário, não teria me procurado, mas ele não tem vontade de estudar. A vontade, para Wittgenstein, é o próprio agir, e a própria representação envolve intencionalidade. “O mundo é independente de minha vontade” (1993, p. 273). A vontade está além de nosso controle e constitui um acompanhamento mental da ação. “‘O querer é tão-somente uma experiência’, poder-se-ia dizer (a ‘vontade’ tão-somente ‘representação’). Ela vem quando vem, não posso produzi-la” (1994, p. 213).

Em nossos encontros, os sinais de apatia e de descaso estavam sempre presentes. O motivo destes sinais não convém aqui comentar porque é tarefa para um psicólogo, mas indiretamente interferem na vontade de estudar e, conseqüentemente, no desempenho escolar. A vontade deste aluno não é livre, ele pede ajuda para aprender, como um ato de obrigação com a sociedade que espera a sua aprovação na escola, mas não quer estudar.

### **5. 8. 1 A Circularidade de Sentidos**

Existe circularidade entre o ato de interpretação e conceito, pois a criação de conceitos se dá através de atos. Após o ato de interpretação, o sujeito projeta sentidos, compreende, e ele interpreta este ato. Ele projeta sentidos outra vez e reinterpreta.

Os textos matemáticos operam com a formalização de sua linguagem estruturada na lógica, desta forma, eles fecham suas interpretações dentro da lógica dedutiva, não permitindo

sentidos diversos, já que trabalham com o previsível. O rigor do texto matemático, objetivado e formalizado, pretende ter o controle dos sentidos. Tal controle pretendido pela matemática nos deixa devedores de perceber outras formas de entender o mundo.

A partir da contribuição heideggeriana, Gadamer (1993) desenvolve a teoria da hermenêutica filosófica, destacando o papel do diálogo na busca do sentido. Sem ser fruto de uma consciência isolada, a linguagem é o mundo da vida e é a morada do ser. O processo de compreensão se dá entre o nós e os outros no diálogo, e é através dele que os sentidos se apresentam. Compreender é o acontecimento que nos coloca de acordo com o outro e interpretar é elaborar as possibilidades na compreensão. O diálogo prevê uma fusão de horizontes, mas permite uma desorientação geral, pois desvela sentidos aprisionados que se mostram.

A formalização da linguagem matemática, estruturada na lógica dedutiva, impossibilita outras interpretações e evita a abordagem hermenêutica, pois ela quer operar com as supostas evidências de um sentido único, com uma linguagem ideal que evite se defrontrar com as ambigüidades da linguagem materna.

O sentido e a significação na linguagem matemática, ao fechar-se nos elementos de sua própria estrutura, opõe-se ao que Heidegger (1996, p. 219) afirma: “chamamos de sentido o que pode ser articulado na interpretação (...) todas as significações sempre têm sentido. (...) Das significações brotam palavras. As palavras, porém, não são coisas dotadas de significados”. Para o autor, somente quem compreende pode escutar.

O fato “quem compreende pode escutar” explica a dificuldade do aluno, quando ouve falar de um conteúdo matemático. O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos ou igual ao quadrado da soma dos catetos? O teorema de Pitágoras é um exemplo desta dificuldade, pois sempre causou dificuldades de ser dito, e é neste momento que o auxílio da representação geométrica intervém.

Para Granger (1974, p.319), “o característico de um modelo abstrato é ter em si o mesmo valor de objeto matemático, cujo sentido de cada elemento apenas remete ao conjunto das relações que definem a estrutura.”

A estrutura escondida nos objetos matemáticos deve ser revelada pela estrutura formada pela linguagem matemática e pela linguagem maternal. A forma do triângulo retângulo deve ser compreendida, para que a fórmula do teorema de Pitágoras tenha sentido.

Piaget (1974), em sua obra *O Estruturalismo*, ao falar das estruturas matemáticas e lógicas, diz que se outorgamos regras de construção, sob a forma de um processo operatório ao método axiomático:

a formalização constitui, então, um sistema que se basta a si próprio, sem apelo a intuições exteriores e cujo ponto de partida é em um sentido absoluto. (...) do ponto de vista formal onde se coloca o lógico, existe aí o exemplo, sem dúvida único, de uma autonomia radical, no sentido de uma regulação puramente interna, ou seja, de uma auto-regulação perfeita (p. 26).

Esta auto-regulação da matemática define o seu universo fechado, mas clama por uma abertura de sentidos via linguagem. Na perspectiva do aluno, a linguagem matemática será sempre codificada, caso não haja interferência da linguagem materna.

### **5. 8. 2 O Processo de Seguir a Regra**

Existem diferentes maneiras do aluno interagir com a regra que depende do contexto. Ele pode simplesmente aplicar a regra, por exemplo,  $2 + 3 \times 6 = 2 + 18 = 20$ , o que demonstra que ele intuiu corretamente a regra da ordem das operações.

Em caso contrário, ele pode não seguir a regra, mas pensar que está seguindo-a corretamente e resolver a operação da seguinte forma:  $2 + 3 \times 6 = 5 \times 6 = 30$ . Se ele não

percebe o erro, a ilusão de estar seguindo corretamente a regra permanece. Porém ele pode também se enganar e calcular da seguinte forma:  $2 + 3 \times 6 = 2 + 18 = 22$ . Este engano poderá ser reconhecido e corrigido pelo próprio aluno. Em outro caso, ele pode aplicar a regra  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , porém, num outro tempo, a regra passa a não ter mais sentido para ele, então aplica uma outra regra:  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ .

Existem casos em que o aluno pode seguir a regra e aumentar seu conhecimento, ao aplicar devidamente a regra de outros conceitos. Por exemplo, ao fazer analogia entre a constante de integração “c” da função  $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$  e o termo independente “c” da função  $y = ax^2 + c$  ( $y = ax^2 + bx + c$ ,  $b = 0$ ), ou ao reconhecer a diferença entre  $\cos(3x)^2$  e  $(\cos(3x))^2$ . Ele compreende que existe uma semelhança sintática e uma correspondência teórica entre os dois termos. Ele aplica um conhecimento aprendido em outro tempo e aprimora o conceito.

As conexões com outros conceitos se dão com o auxílio da memória. O sujeito faz analogias, buscando na memória lembranças do passado, de conceitos que ele já estudou em um outro tempo. Porém o aluno pode não seguir a regra corretamente, modificando e causando prejuízo ao conceito idealizado pela exigência teórica, ao fazer conexões com outros conceitos.

Como é o caso de um aluno que me disse: “professora, eu resolvi a equação  $|2x - 3| = x + 1$  e encontrei  $x = 4$  e  $x = \frac{2}{3}$ ”; o que estava correto, “se eu colocar (na verificação) 4 dá certo e  $\frac{2}{3}$  não dá certo. Pode pôr só um elemento no conjunto solução?”. Na sua resposta estava  $S = \{ \}$ , e a resposta deveria ser  $S = \{4\}$ . O que leva o aluno a pensar desta forma? Todo o seu raciocínio estava correto, mas escreve a resposta errada. É provável

que o seu conceito de equação modular admita como conjunto solução a verificação para os dois resultados encontrados. Aplica a regra corretamente até o momento de encontrar as raízes, porém cria uma nova regra para encontrar o conjunto solução. A regra foi criada a partir do que ele viu e do que ele experienciou com o estudo da equação modular. A sua regra é “os dois elementos que verificaram a equação modular participam do conjunto solução, caso contrário, o conjunto solução é vazio, portanto o conjunto solução não pode ter apenas um elemento”.

Este aluno “aparentemente” empenhava-se bastante para aprender. Suas atitudes em sala de aula sempre mostraram o estereótipo do bom aluno, diferente do aluno apático que mencionei anteriormente e que, segundo seus professores, tinha “mau comportamento em sala de aula”. Assim, independentemente da vontade de estudar, o aluno apresenta problemas de aprendizagem. É evidente que não temos como medir a vontade de alguém. Do aluno apático, conheço sua estória de vida e sei que ele “provavelmente” tem motivos para apatia. Do meu aluno de sala de aula, posso descrever o que percebi. Faço tais comparações para que o conceito de “vontade de seguir a regra” não fique nebuloso. Querer seguir a regra é a condição necessária para que o sujeito de fato siga a regra, porém ele pode querer seguir a regra e não intuir corretamente o sentido da regra.

Existe diferença em seguir de fato a regra, querer seguir a regra e pensar que está seguindo corretamente ou, ainda, não se interessar por ela. Querer seguir a regra já é o início do caminho.

A invenção de regras apresenta uma lógica própria, como o registro do aluno a seguir:

$\frac{x}{2} - \frac{x-3}{4} = \frac{x}{2} - \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$ . O sinal negativo tem valor somente para o primeiro termo da segunda fração, pois ele não ‘vê’ que o sinal negativo é para toda a fração  $\frac{x-3}{4}$ . Ele interpreta de

acordo com o que percebe através da visão, o que entra pelos olhos. A distribuição do sinal

$$\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{4}\right) - \left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{x}{2} - \frac{x}{4} + \frac{3}{4}, \text{ que está subentendido, ele não consegue perceber.}$$

Na linguagem escrita, é onde se cristalizam os atos intencionais do sujeito (o sinal negativo implícito para as duas frações:  $-\frac{x-3}{4} = -\frac{x}{4} + \frac{3}{4}$ ). Porém um outro sujeito em contato com esta linguagem deverá reconhecer estes atos do sujeito que a escreveu.

Outro exemplo de criação de regras pelo aluno é na expressão  $\frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)}$  que, após o aluno simplificar, iguala a  $x-1$ . Como ele não vê nenhum elemento no numerador após a simplificação por  $x+1$ , ele vê a fração como  $\frac{\quad}{x-1}$ , com um vazio no numerador, mas que deveria ser  $\frac{1}{x-1}$ . “Simplifica  $x+1$  com  $x+1$ ” e, no lugar do numerador, fica um vazio.

Assim, o termo que está no denominador pode ocupar este espaço vazio do numerador, e ele cria uma outra regra.

O conceito deve ser considerado antes e depois da interpretação do aluno. O aluno descobre as propriedades do objeto e constrói o seu conceito, como um processo de reorganização e construção por atos intencionais. As ações e/ou visões do objeto definem o conceito, e o esquema do conceito é imaginado de acordo com a imagem do objeto.

O conceito antes da interpretação do aluno é aqui considerado como o conceito que o professor pretende fazer o aluno construir, ou um conceito já construído pelo aluno em um outro tempo. O conceito depois da interpretação do aluno é considerado o conceito interpretado ou reinterpretado pelo aluno.

O processo de seguir a regra é imprevisível e depende do contexto. O erro do exemplo do aluno de Stela Baruk, que diz ser  $\mathfrak{R} - \{1\}$  o domínio da função  $y = x - 3$ , acontece porque

ele considerou  $y$  igual a  $\frac{x-3}{1}$ , e como o denominador deve ser diferente de zero, em sua interpretação, 1 será diferente de zero, assim, o domínio da função é  $\mathcal{R} - \{1\}$ . É uma verdade dizer que um é diferente de zero, mas não é isso que está sendo questionado, e sim os valores que a variável  $x$  pode assumir para a função  $y = x - 3$ . Ele faz analogia com  $y = \frac{a}{b}$  onde “b” deve ser diferente de zero, e o domínio da função será  $\mathcal{R} - \{0\}$ . A interpretação da sua regra está correta, mas não responde ao que lhe foi questionado. Ele produz um sentido correto em um contexto no qual o seu sentido não faz sentido (conforme as exigências da matemática). O domínio de uma função demanda pelos valores que a variável  $x$  pode assumir para função  $y$  e não sobre as condições de existência do denominador da função.

A regra diz: “caso a variável esteja no denominador, devemos considerar que o denominador não pode ser igual a zero”. Este aluno considerou que o denominador deve ser diferente de zero, mas não levou em consideração a variável. O denominador não tinha variável, assim não teve sentido apenas constatar que o denominador era diferente de zero. Ele não intuiu o sentido correto da regra. Ele interpretou a regra de forma incorreta, porém com uma certa coerência, mas acabou modificando o seu sentido. Constatar que o denominador é diferente de zero e considerar que a variável que está na expressão algébrica do denominador deve excluir os valores que a igualam a zero, são duas regras diferentes.

O domínio de uma função deve mostrar os valores que ela pode assumir, assim, ele deve excluir uma possível divisão por zero. Quando o aluno diz que a função pode assumir todos os valores excluindo o um, é provável que tenha construído sua regra desta forma ‘ $\mathcal{R} - \{\text{o valor do denominador}\}$ ’, mas que representa uma versão da regra ‘ $\mathcal{R} - \{\text{a(s) raiz(es) da equação que está no denominador}\}$ ’. Ao projetar um outro sentido à regra, ocorre uma transformação desta regra.

O aluno conecta a função  $y = x - 3$  com outras funções que ele estudou em um outro tempo. É possível que outra função tivesse como domínio  $\mathbb{R} - \{0\}$  ou  $\mathbb{R} - \{1\}$ . Ele faz analogias entre estas funções e projeta sentido. A função  $y = \frac{x-2}{x}$  tem como domínio  $\mathbb{R} - \{0\}$ , porque  $x$  deve ser diferente de zero, já a função  $y = \frac{x+5}{x-1}$  tem como domínio  $\mathbb{R} - \{1\}$  porque  $x - 1$  deve ser diferente de zero. Na função  $y = x - 3$ , o aluno transforma para  $y = \frac{x-3}{1}$  e conclui que 1 é diferente de zero, assim o domínio que ele estabelece à função é  $\mathbb{R} - \{1\}$ .

As conexões das funções que ele teve como experiência num outro tempo e as semelhanças sintáticas que percebe entre elas são elementos que participam na formação de seu conceito do domínio de uma função.

O conceito trabalhado em sala de aula não é mais o mesmo, é um outro. Este novo conceito é forjado pelas conexões conceituais que estão de acordo com a imaginação e com a memória do aluno. O aluno descobre as relações dos objetos, inventa e constrói os conceitos. O ato de construção é um ato de intenção.

O sujeito faz analogias, porém não transpõe conhecimentos, não generaliza automaticamente, justamente porque não existe generalização espontânea. A relação entre um conhecimento e suas aplicações está a mercê de fatos contingentes.

Segundo Glock (1998), o imperativo “seguir a regra<sup>20</sup>”, de Wittgenstein, é um processo mecânico, intuitivo, platônico (idealizado, ou seja, o caminho para seguir a regra já está previsto) e hermenêutico (que é a interpretação da regra). O processo é mecânico, no sentido de bastar seguir seus passos; intuitivo, no sentido de dever ser representado no espaço

---

<sup>20</sup> A regra aqui considerada é a regra que determina uma resposta a cada passo, como, por exemplo,  $y = 2x$ .

e no tempo (começamos num tempo e num lugar e terminamos em outro); platônico, no sentido de determinação de sua finalidade, e hermenêutico, no sentido da regra possuir um sentido.

O estudante segue a regra corretamente, mas, durante sua aplicação, se depara com uma rede conceitual e perde o rumo. É por esse motivo que os alunos constantemente argumentam que não foram bem nas verificações, porque “caiu” na prova justamente “o que eu não tinha estudado”. Um aluno me disse: “eu estudei as mais difíceis”, e na prova, “as mais fáceis, eu não sabia fazer”, referindo-se às derivadas de funções por definição. Ora, se ele estudou as mais difíceis, a princípio, deveria saber as mais fáceis. Porém ele “treinou” as mais difíceis, mas não intuiu o sentido correto da regra, caso contrário, teoricamente, saberia resolver as “fáceis” e as “difíceis”.

Para Wittgenstein (1987), é necessário pretender (querer) seguir a regra. É uma intencionalidade virtual. A regra é interpretada corretamente, se o sujeito tiver a intuição correta da regra. Segundo o autor, a regra, o cálculo, a gramática e o jogo têm o mesmo significado. Quem participa do jogo tem que seguir suas regras, interpretando-as e seguindo as ordens da necessidade conceitual.

A derivada de uma função é definida por  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ; se o aluno sabia derivar a função  $f(x) = x^2 + 3x - 1$ , por exemplo, a mesma regra ele deveria aplicar para uma função do tipo  $y = 2x + 3$  que, ao contrário da primeira função, não precisaria desenvolver o produto notável  $(x + \Delta x)^2$ . Porém é justamente aí que reside o problema, ele “treinou” para resolver as derivadas, tendo que desenvolver produtos notáveis, mas, quando surge uma função mais simples, ele não sabe. Ou seja, ele não generalizou, não intuiu corretamente o sentido da regra. A aplicação correta da regra é um processo mecânico, mas

deve ser interpretado. O aluno decora procedimentos, sem levar em consideração o sentido destes procedimentos.

Se o estudante diz que “sabe fazer as mais difíceis, e as mais fáceis, não”, é porque ele sabe aplicar todos os passos da regra para uma função de grau dois; para uma função de grau um, ele não sabe. Muda o contexto, muda o conceito.

Baruk (1985) conta em seu texto que um aluno dizia saber resolver equações, porém, face à equação  $13x - 5 = 3x$ , ele diz não saber resolvê-la, mas sabia resolver  $13x - 5 = 3x + 2$ . Certamente ele havia decorado os passos de resolução deste tipo de equação, mas não havia intuído o sentido da regra de resolver uma equação do primeiro grau. Talvez em  $13x - 5 = 3x + 2$ , ele junte os termos semelhantes  $13x$  com  $3x$  e  $2$  com  $-5$ , porém, na equação  $13x - 5 = 3x$ , junta  $13x$  com  $3x$  e  $-5$  não tenha com o que juntar. Assim, em sua perspectiva, a regra muda e ele não sabe mais resolver.

A regra é um processo mecânico, mas tem um sentido, já que ele também é hermenêutico. Devo proceder de tal e tal forma, porque meu objetivo é encontrar alguma coisa. Assim, o procedimento tem sentido. O aluno mecaniza o procedimento sem dar sentido. Posso descer as escadas de um prédio mecanicamente, sem pensar nos meus passos, mas meu objetivo é ir ao andar térreo e verificar se tem correspondência. Porém, se eu descer as escadas sem prever o que vou fazer no andar térreo, não tem sentido. A regra de descer as escadas é mecânica, mas o objetivo, a previsão do que vou fazer no andar térreo, dá sentido à ação. A intuição do sentido da regra é o que guia a experiência. Assim, a possível existência da correspondência que pretendo encontrar guia meus passos até o andar térreo.

Não intuir o sentido da regra é não reconhecer que ela é única, não muda, é sempre a mesma. Os passos são iguais em qualquer circunstância. O aluno não se pergunta como deve fazer e sim o que deve fazer. Isso acontece porque ele fixa seu reconhecimento da regra num contexto determinado. A pergunta me parece ser a seguinte: “o que devo fazer, quando me

deparo com esta proposição?”. O correto seria “qual o primeiro passo da regra, depois o segundo... até chegar o último passo?”.

O aluno pode muito bem construir um conceito num determinado momento e, em outro, modificá-lo. Ele pode medir o lado oposto e a hipotenusa de diferentes triângulos retângulos formados por um mesmo ângulo e concluir que esta razão é sempre a mesma. O professor dirá que esta razão constante chama-se seno de um ângulo. O professor mostra e explicita a regra do cálculo do seno de um ângulo percebida e descoberta pelo aluno. Porém, mais tarde, o aluno pode aplicar essa mesma regra em um triângulo obtusângulo, por exemplo. As razões trigonométricas num triângulo retângulo, para o aluno, derivam em razões trigonométricas num triângulo. Ele modifica o conceito.

A capacidade reflexiva do aluno não atinge a amplitude necessária para perceber em que casos a regra das razões trigonométricas devem ser aplicadas. Stella Baruk<sup>21</sup> cita a famosa

simplificação de  $\frac{a+b}{a+c}$  em  $\frac{b}{c}$ . Ora, o aluno aprende que  $\frac{ab}{ac}$  é igual à  $\frac{b}{c}$ , daí decorre a

justificativa da simplificação. Para fazer o aluno refletir sobre tal simplificação incorreta,

como menciona Baruk, o professor pode ilustrar com a situação  $2 = \frac{10}{5} = \frac{4+6}{4+1} = \frac{6}{1} = 6$ . O

aluno vai concordar então que não pode simplificar a fração desta forma, porém, em outro

tempo, ao se deparar com  $\frac{\cos x + 3}{\cos y + 3}$ , talvez ele diga que esta fração é igual à  $\frac{\cos x}{\cos y}$ . Ele cria

regras conforme o contexto.

Baruk mostra um outro exemplo de “lógica da magia” do cálculo:

$\frac{7}{4} + \frac{5}{3} = \frac{(7+3)+(4+5)}{4+3} = \frac{18}{7}$ . Este exemplo fornece elementos para que nós possamos

perceber o quanto são obscuras, para o aluno, certas regras matemáticas. Assim como em sua

---

<sup>21</sup> Os erros dos alunos franceses que a autora expõe são similares aos erros de nossos alunos brasileiros.

concepção tudo parece tão vago e sem sentido que ele pode também produzir regras que não tenham sentido.

Obedecendo a regra da adição de frações, a operação deveria ser calculada como

$$\frac{7}{4} + \frac{5}{3} = \frac{3 \times 7 + 4 \times 5}{4 \times 3},$$

porém podemos perceber que 3 e 7, 4 e 5 e ainda 4 e 3 deveriam ser multiplicados, mas o aluno soma. Como ele não vê sentido em multiplicar estes números, já que se trata de uma soma, então ele muda a regra e soma ao invés de multiplicar.

Assim como esta, existem outras regras que o aluno cria. Ele sabe que  $2 + 3 = 5$ , e deste pressuposto, conclui que  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$  e  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ . Ele faz analogias e estas analogias derivam em erro. Ele estabelece critérios para fazer seus julgamentos através do que percebe e do que vê.

Caveing (2004, p. 15) diz que o sujeito apenas pode experimentar o conceito porque não é produto seu. “O conceito, nascido de outros conceitos, engendra outros” (tradução minha). Na matemática, é preciso ver para pensar, mas existe perigo e ilusões no ato de ver. A imagem é o que é “dado”, a escrita é o que é “construído”, e o ato de construção é uma intenção.

O aluno cria novos conceitos a partir de conceitos já construídos. A conjuntura pode ser diferente, mas para ele, a estrutura é a mesma. A forma e a estrutura em que se encontra o objeto, muitas vezes, não é vislumbrada pelo aluno, ao criar as suas regras.

De acordo com Wittgenstein (1987), descrever é diferente de explicar, e é assim que nós mostramos e explicitamos as regras de um jogo. Podemos ensinar ao outro como aplicamos a regra, mostrando como a aplicamos, já que a linguagem objetivante simplesmente descreve os fatos através de uma imagem. E explicar, segundo o autor, seria completar o

visível pelo invisível, em forma de uma figura, como tenta fazer a ciência a propósito dos fatos.

Para mostrar ao aluno como aplicamos uma regra, analisamos a pergunta a ser respondida e a forma em que se encontra a incógnita, colhemos os dados do problema, dizemos qual o objetivo do primeiro passo da regra e seguimos a regra fazendo transformações lógicas com as sentenças matemáticas. Explicamos todos os passos da regra à medida em que descrevemos nossos atos no quadro.

A pergunta do problema é, muitas vezes, desconsiderada pelo aluno. Quando resolve uma equação utilizando a fórmula de Bhaskara, ele não se questiona se a equação a ser resolvida está na forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , ou quando aplica o teorema de Pitágoras, ele não se pergunta se o triângulo a ser resolvido é um triângulo retângulo. Este fato mostra que o aluno aplica procedimentos de resolução sem se dar conta de que os mesmos servem para responder uma outra pergunta e não a pergunta que lhe foi feita.

Certa vez, um aluno, mostrando seu caderno, me disse : “Olha se eu compreendi bem”. Em seu caderno havia uma função matemática escrita, e de cada termo da função, saía uma flecha com uma explicação. Ele havia dado sentido ao conceito da função com as palavras de seu vocabulário e queria que eu verificasse se a sua explicação coincidia com a minha.

Para ilustrar a falta de correspondência da explicação do professor e da compreensão do aluno, trago um problema recorrente em sala de aula. Para isolar  $x$  na equação  $x + 2 = 4$ , diz-se que 2 está somando  $x$ , então ele deverá passar para o outro lado da igualdade diminuindo de 4, assim como na equação  $x - 3 = 5$ , diz-se que 3 passará para o outro lado da igualdade somando 5. Costumava-se resumir este procedimento com a regra “trocar o sinal”. Assim, na equação  $4x = 8$ , 4 deveria passar dividindo por 8, porém os alunos continuavam aplicando a regra “trocar o sinal”, e a equação se transformava em  $x = 8 - 4$ .

Os professores se deram conta de que seria melhor os alunos aprenderem as operações de números inteiros, bem como as equações de primeiro grau, utilizando material concreto e com aplicação prática no cotidiano do aluno. O surpreendente é que as duas alternativas de solução resolviam o problema em parte, pois bastava uma pequena mudança, como, por exemplo, pedir que resolvessem o cálculo  $2 - 5 - 3 + 7$ , ou uma equação do tipo  $\frac{2x}{3} + 1 = 5$  que a situação já se complicava. Conseguia-se êxito no sentido de que o aluno não reproduzisse mais uma regra inadequada e, quando se falava na tal regra, enfatizava-se que um termo, ao passar de um lado a outro da igualdade, trocava de operação e não de sinal.

No caso do cálculo  $2 - 5 - 3 + 7$ , parecia tão evidente supor uma situação em que se tem 2 e 7, mas se deve 5 e 3. Tem-se um total de 9, que se deve subtrair 8, assim “paga-se as dívidas e resta ainda 1”, argumentavam o professor e os livros didáticos. Este raciocínio tem lógica para o professor, que está habituado a somar salários e descontar despesas para calcular a quantia que sobrar ou faltará ao final do mês, não para o aluno, que não tem o hábito de lidar com dinheiro.

Criar regras do tipo “o amigo de meu amigo é meu amigo, o amigo de meu inimigo é meu inimigo, etc. e tal”, como é o hábito de alguns professores de matemática, com a intenção de fazer o aluno compreender as operações com números inteiros (regra de sinais) parece perverso. Porém fazer um aluno colocar-se em uma situação que não lhe é familiar, como a de somar quantias e pagar dívidas que ele não tem, também parece não ter sentido, principalmente quando se trata de aluno pobre. Aluno que perde aula por não ter roupa para colocar não deve estar acostumado com “mesadas” e, conseqüentemente, não deve estar acostumado com o manuseio de dinheiro.

Em outra situação, os números positivos podem ser representados por palitinhos vermelhos, e os números negativos por palitinhos azuis, assim, temos 9 palitinhos vermelhos

e 8 azuis. Oito palitinhos vermelhos se compensam com 8 azuis e sobra 1 vermelho. Logo,  $2 - 5 - 3 + 7$  é igual a 1.

Foi assim que aprendi a ensinar a adição de números inteiros num dos congressos de educação matemática. Na prática, esta situação imaginária com os palitinhos que se compensam é uma regra. É fácil admitir que  $9 - 8 = 1$ , porém  $8 - 9$  é mais complexo. Pago 8 e fico devendo 1, ou compenso 8 palitinhos vermelhos e 8 azuis e fico com um palitinho azul. E se dissermos ao aluno que  $8 - 9 = 8 - 8 - 1$  é igual a  $-1$ , não parece tão evidente quanto a regra do “tenho e devo”, ou dos “palitinhos vermelhos e dos palitinhos azuis”?

O que quero salientar é que todos os diferentes procedimentos de ensinar não deixam de ser regras e são interpretadas pelo aluno. Os professores ditos “construtivistas” optariam pela regra do “tenho e devo” ou dos “palitinhos vermelhos e dos palitinhos azuis”. Estas servem para ilustrar a formalização, mas não são garantias da aprendizagem do aluno. Os professores ditos “tradicionais” não desenvolveriam essas etapas com estas regras e iriam direto ao algoritmo. O sentido que o aluno dará a regra não está previsto pelo professor, o que o professor pode prever é se a regra tem sentido. Tem sentido ensinar com palitinhos vermelhos e azuis? O aluno será captado pela idéia da compensação de  $n$  palitinhos vermelhos e de  $n$  palitinhos azuis? Caso a regra tenha sentido para o aluno, outra pergunta é pertinente: o aluno saberá transpor a regra dos palitinhos para a operação formalizada sem dispor de palitinhos?

Quando a regra dos palitinhos é livrada dos palitinhos começa o processo de abstração da regra. Este processo muitas vezes não atinge seu objetivo justamente porque o contexto de contar palitinhos e compensar vermelhos e azuis é diferente do contexto de lidar com a escrita matemática.

No cálculo  $2 - 5 - 3 + 7$ , o aluno junta os palitinhos azuis ( $-5$  e  $-3$ ) e obtém 8, junta os palitinhos vermelhos ( $2$  e  $+7$ ) e obtém 9, compensa todos os palitinhos possíveis, 8 azuis e 8

vermelhos e percebe que sobra 1 vermelho. Este 1 representa a cristalização dos atos intencionais do aluno: o ato de juntar os palitinhos de mesma cor, o ato de compensá-los e o ato de perceber a quantidade de palitinhos que sobram após a compensação.

O aluno que faz a prática mencionada acima pode ter dificuldades em resolver, por exemplo, o cálculo  $\frac{2}{3} - \frac{5}{4} - \frac{3}{4} + \frac{7}{3}$ , que tem o mesmo significado do cálculo anterior, porém com números fracionários, justamente porque o contexto não é o mesmo, e o conceito de “juntar, compensar e perceber o que sobra” já não tem mais sentido. As regras mudam conforme o contexto.

Na aplicação de uma prova sobre logaritmos, um aluno demonstrou saber que  $\log ab = \log a + \log b$ , mas ao ter que resolver a questão: se  $\log a = 0$ ,  $\log b = -1$  e  $\log c = 1$ , calcule  $\log \frac{ab^2}{c}$ , escreveu  $(\log a \cdot \log b)^2 - \log c$ . Assim, percebe-se que ele admite que  $\log ab = \log a + \log b$ , porém para  $\log ab^2$ , que ele deveria aplicar a mesma regra, ele cria outra. Outra vez, podemos verificar que, se o contexto muda, a regra também muda na perspectiva do aluno.

O aluno não vê semelhança entre as duas expressões algébricas e não percebe que, nas duas, existe o logaritmo de um produto. Na primeira, o produto de ‘a’ por ‘b’ e, na segunda, de ‘a’ por ‘ $b^2$ ’. Para resolver o problema, ele cria outra regra que lhe faz sentido.

É na construção possível de uma outra linguagem que advém da linguagem matemática para a linguagem materna que se dão os maiores problemas à compreensão de um enunciado. Os alunos argumentam, com frequência, que “saberiam resolver”, se tivessem entendido o enunciado. Basta uma pequena modificação na linguagem para o enunciado não ser entendido. O ponto de equilíbrio, por exemplo, que representa a quantidade de equilíbrio, e o preço de equilíbrio, apesar de terem o mesmo significado, são proposições que assumem sentidos diferentes para o aluno.

É provável que o aluno saiba que um ponto é representado pelas coordenadas cartesianas  $(x, y)$  e que, na função  $p = ax + b$ , “ $x$ ” representa a quantidade de equilíbrio, e “ $p$ ” representa o preço de equilíbrio, daí que o ponto de equilíbrio representado por  $(x, p)$  não é imediato, tornando-se um outro conceito que deriva dos dois primeiros. Não dominando a linguagem, já que não consegue fazer analogias com as proposições desta linguagem, as significações e os sentidos ficam prejudicados.

O sentido de um conceito depende do seu contexto. A ação de dar sentido ao objeto e criar o seu conceito depende da experiência do sujeito com o objeto, mas aí reside um obstáculo. Para Granger (1974), é na relação de um conceito e suas significações que se encontrarão os obstáculos que impedem o movimento desta ação.

### **5. 8. 3 A Função da Imaginação na Formação do Conceito**

Ao trabalhar com as aplicações de derivada de uma função, em problemas que envolviam áreas e volumes, um aluno, referindo-se aos sólidos geométricos, me disse: “eu só consigo imaginar se eu puder tocar”. Este “tocar” evidentemente que se tratava de um “tocar imaginado”, um “ver com as mãos da imaginação”. Ele já trabalhava em projetos de engenharia, e, comentando sobre sua experiência com a geometria, acrescentou: “eu tenho que me imaginar tocando e mexendo nas arestas, mas com as parábolas, eu não consigo imaginar nada”. Ao conversar com este aluno, pude perceber que ele era competente em seu trabalho, inclusive disputou vagas com engenheiros já formados em empresa de grande porte, classificando-se em primeiro lugar.

Este aluno, pela primeira vez, participava das aulas respondendo às questões que eu propunha. Apesar de uma certa desenvoltura com os conhecimentos em geometria,

principalmente com as fórmulas de área e de volume de sólidos geométricos, ao responder a questão “como representar algebricamente a área total de uma caixa fechada com base quadrada?”, disse que a base poderia ser representada por  $x^2$  e que o restante da caixa poderia ser representado por  $5xy$ . De acordo com sua resposta, ele considerou a área lateral  $4xy$  (de arestas  $x$  e  $y$ ) e a tampa de área  $xy$ . Ora, a tampa dever ser igual à base. Por que este aluno comete um erro elementar, levando em consideração que este tipo de conhecimento está incorporado em seu trabalho profissional?

O único argumento que encontro para explicar tal erro é a mudança de contexto. Em seu trabalho, ele projeta dados em um computador e calcula as áreas e volumes dos sólidos, na sala de aula, ele trabalha com variáveis e não com dados específicos. No seu trabalho profissional, ele é reconhecido, em sala de aula, o seu desempenho não é satisfatório. Ele também me argumentou que não havia atingido bom desempenho na primeira prova, porque não conseguia “imaginar” os conteúdos (limites e derivadas de uma função).

Os atos imaginados fazem parte da compreensão deste aluno. Os seus toques imaginados nos sólidos constituem os seus atos intencionais que se cristalizam nas imagens que ele reproduz no computador. Quando ele projeta o sólido com arestas e com dados, ele projeta sentido e reproduz em imagem visual.

Estes atos imaginados juntam-se às lembranças em que está associado o objeto imaginado, mas que estão relacionados ao contexto em que o objeto é percebido; estes atos se reproduzem na escrita, como no caso do aluno que calcula a equação  $\log_3(x-1) = 2$  e encontra  $\log_3 x = 2 + 1$ . Aplica a regra aprendida em outro tempo e que está em sua memória. Aplica os procedimentos de resolver uma equação do primeiro grau no lugar de aplicar a definição de logaritmo. Ele modifica o sentido da definição do logaritmo, porque não intui corretamente o sentido da regra. Assim, cria estratégias para resolver e conclui que o valor da

incógnita  $x$  é igual a três. A conexão que ele faz dos procedimentos de resolução de uma equação do primeiro grau com os procedimentos da definição do logaritmo é imediata, pois existe uma semelhança sintática.

Quando lhe é proposto o exercício “se  $\log a = 0$ ,  $\log b = -1$  e  $\log c = 1$ , calcule  $\log \frac{ab^2}{c}$ ”, ele encontra  $10^x = \frac{ab^2}{c}$  e segue o seu propósito. A aplicação da regra é um processo mecânico, mas intuir em qual situação pode-se aplicar a regra, não é um processo mecânico. Ora, ele aplica a regra da definição de logaritmo que era conveniente em outros exercícios, porém, agora, a aplicação desta regra não satisfaz o que lhe é pedido. Ele aplica mecanicamente uma regra sem se dar conta de que ficará com quatro variáveis para encontrar o valor. A regra de aplicação neste caso é outra.

Como e quando aplicar a regra são tarefas distintas. As propriedades das operações com logaritmos e a definição de logaritmo são diferentes, apesar de derivarem do mesmo objeto. A regra para a definição de logaritmo é uma e a regra para aplicar as propriedades das operações com logaritmos é outra.

No cálculo diferencial e integral, o aluno aprende isoladamente cada técnica de integração. Porém, quando se depara com diversas integrais e deve decidir qual técnica aplicar para resolvê-las, ele não sabe mais resolver, mesmo que disponha das fórmulas de integração.

As integrais  $\int \cos^2(2x)dx$  e  $\int \cos(2x)^2 dx$  são exemplos de dificuldades encontradas pelo aluno. Reconhecer que a primeira integral está na forma de  $\int u^p du$  e que a segunda está na forma de  $\int \cos u du$  não é evidente para ele. Observar a forma da função para poder aplicar a devida fórmula de integração é a tarefa mais difícil, exatamente porque existe uma semelhança sintática, e esta semelhança interfere na identificação de dois conceitos diferentes. Diferenciar as regras que podem derivar as funções  $f(x) = \sqrt{\sin(3x)}$  e  $f(x) = \sin \sqrt{3x}$ ,

perceber que  $\log ab$  é igual a  $\log a + \log b$ , mas que  $\log ab$  não é igual a  $\log a \times \log b$ , são exemplos de analogias sintáticas e diferenças conceituais que o aluno não reconhece. O problema destas semelhanças sintáticas e diferenças conceituais é de linguagem, justamente porque o aluno tem dificuldade de ler um texto escrito em linguagem matemática.

Hersh e Davis (1990) dizem que, para Quine, nossas lembranças são por palavras e, para Aristóteles, são por imagens. Qual lembrança suscitaria a expressão “encontre o valor de  $x$  na equação”? A imagem de outras equações resolvidas em outro tempo? O significado das palavras que designam cada termo da equação?

O movimento dialético entre intuição e conceito de um objeto está associado a imagens; como as imagens trazem lembranças e, destas lembranças, surgem analogias, o conceito se transforma, quando o sujeito faz estas analogias e constrói outra linguagem advinda da linguagem escrita ou falada. A linguagem escrita cristaliza estes atos que passam a representar seu pensamento. O sujeito transforma e modifica conceitos matemáticos, de acordo com a sua interpretação das analogias sintáticas que faz do objeto com outros objetos.

#### **5. 8. 4 As Analogias com outros Conceitos**

As analogias são inevitáveis no processo de aprender. O hábito do aluno de revirar as páginas do caderno é uma mostra das analogias que ele tenta fazer dos exercícios propostos com aqueles já resolvidos em sala de aula. Ele busca nas folhas precedentes do caderno um exercício semelhante que contenha os passos do problema a solucionar e um modelo a seguir. A consulta no caderno tem a finalidade de encontrar não apenas exercícios resolvidos, que tenham a mesma semelhança sintática do exercício que ele tem que resolver, como também o algoritmo que deve aplicar.

O professor tem o hábito de fornecer diferentes modelos de exercícios nos quais figuram um determinado objeto matemático, com o objetivo de possibilitar que os alunos saibam resolver problemas em diferentes situações. Os livros didáticos de matemática fazem o mesmo.

Quando o professor trabalha uma determinada regra, ele procura mostrar as diferentes situações em que podem aparecer uma função nas quais se aplicam esta regra. A derivada da função do tipo  $y = u^p$ , onde  $p$  pode aparecer em diferentes situações, é um exemplo da necessidade de mostrar os diferentes contextos em que ela poderá ser aplicada. Por exemplo,  $y = (x - 3)^2$ , a função já está pronta para ser derivada, ou seja, a função está na forma de  $y = u^p$ , para se aplicar a sua fórmula de derivação. Existem casos em que é preciso preparar a função para deixá-la na forma de  $y = u^p$  (com  $p \neq -1$ ) e, posteriormente, aplicar a regra de derivação, como nos seguintes exemplos:  $y = \frac{2}{(x+1)^3}$ , em que é preciso passar o termo do denominador para o numerador e inverter o sinal do expoente;  $y = \sqrt{x+3}$ , em que é preciso transformar a função para expoente fracionário; e  $y = \frac{3}{\sqrt{x-2}}$ , em que é preciso passar a função que está no denominador para o numerador e depois transformá-la para expoente fracionário. Outras funções necessitam ser identificadas com esta forma, como nos seguintes exemplos:  $y = \sin^2(x+3)$ , em que é preciso considerar a função  $u$  igual a função  $\sin(x+3)$ ;  $y = \log^3(2x-3)$ , em que é preciso considerar a função  $u$  igual a  $\log(2x-3)$ , e assim por diante.

Estes modelos estão previstos nos planos de aula de um professor de Cálculo Diferencial e Integral e é quase impossível evitá-los. Selecionei um exemplo fácil de caracterizar, porém poderia ter feito o mesmo com as equações exponenciais e logarítmicas,

ou qualquer outro conteúdo, como os problemas para resolver triângulos com a lei dos senos e problemas para resolver com a lei dos cossenos.

Propor mudanças e deixar de mostrar modelos é tarefa muito difícil, já que o professor está atrelado a um programa e a uma carga horária. Caso o professor de Cálculo I, por exemplo, não cumpra o programa dentro da carga horária disponível, o aluno será prejudicado em Cálculo II.

Ao perceber estas diferentes modalidades de se deparar com uma regra, o aluno busca nelas soluções para os problemas propostos pelo professor, fazendo analogias. Se ele tem um problema a resolver com dois lados e um ângulo de um triângulo qualquer, por analogia, ele concluirá que deverá utilizar a lei dos cossenos. Este processo de imitar é espontâneo. O modelo indica uma conduta a seguir. A relação entre os termos de uma analogia se estabelece por semelhanças.

Além das analogias visualizadas por modelos, pode-se também fazer analogias com conceitos armazenados na memória. O aluno procura um objeto de estudo de um outro tempo ao estudar um conteúdo do tempo atual, como o caso do aluno que aplica a fórmula de resolução da equação do segundo grau, mesmo que esta resolução não seja necessária. Ele deve derivar uma função de grau dois, mas ele encontra suas raízes, porque este procedimento está em sua memória.

Analogias sintáticas acontecem, quando existe semelhança simbólica, como, por exemplo, as integrais  $\int (x+1)\sin x dx$  e  $\int \sin(x(x+1))dx$ , que são resolvidas por regras diferentes, mas sua sintaxe é semelhante. Um matemático perceberá facilmente a diferença, mas o aluno não.

De acordo com Granger (1970, p. 92):

a complexidade das expressões formais chega a ser rapidamente tão exorbitante, que excede as possibilidades de memorização e de síntese de

uma mente comum; o que se ganha em rigor, se perde radicalmente em eficácia (tradução minha).

Os símbolos matemáticos apresentam-se como códigos a serem traduzidos e depois interpretados. Eles representam, dessa forma, uma metáfora a ser compreendida. A metáfora transporta a nomeação de um termo para outra significação e esta significação é encontrada na analogia.

Para Granger (1974, p. 140), “um símbolo lógico ou matemático não tem, enquanto tal, outro interpretante a não ser seu próprio ‘objeto’”. A significação desaparece na língua formalizada, pois o sistema simbólico é construído e ordenado na experiência dos próprios símbolos. Os símbolos matemáticos não estão ligados diretamente à língua materna, eles precisam apresentar sentidos para o processo de construção possível de uma outra linguagem.

O símbolo lógico não tem outro interpretante que não seja o seu próprio objeto. A língua materna e suas remissões significativas são vistas como material significante. Não se pode pensar o modelo significante construído como necessariamente consciente. A língua materna é instrumento de comunicação, e o conteúdo de comunicação é tomado como experiência.

A organização do pensamento recebe uma estrutura que é constituída de objetos. A lógica é a estruturação da experiência (um momento vivido) de um objeto. Esta formalização lógica apresenta um resíduo. De acordo com Granger (1970, p. 87):

toda prática poderia ser descrita como uma intenção de transformar a unidade da experiência em unidade de uma estrutura, porém esta intenção implica sempre um resíduo. A significação se originaria nas alusões a esse resíduo, que a consciência laboriosa capta na obra estruturada e introduz como imperfeição da estrutura (tradução minha).

O uso da língua implica uma codificação objetivante da experiência. A criação de uma estrutura da experiência e transmutada em objeto, provoca, no usuário da língua, a evocação de interpretantes, na tentativa de recuperar os resíduos desta codificação. Isso ocorre de uma

maneira “mais ou menos sistemática e consciente” (tradução minha) (p. 100). Granger conclui que “toda experiência humana é, em alguma medida, objetivante” (tradução minha) (p. 121). Os interpretantes definem as significações, as remissões a experiências vividas, já estruturadas no simbolismo.

No processo de formalização da linguagem, não aparecem os resíduos das significações. Precisamos, no decorrer do discurso, falar, retomar a fala e explicar com outras palavras. Porém, no símbolo matemático, não existem outros interpretantes que não seja o próprio objeto, por isso, buscamos, no modelo formalizado, analogias com outros objetos. O signo matemático remete sempre a um objeto que está relacionado com outros objetos. Estas correlações o levam necessariamente à categoria do conceito.

O conceito do objeto percebido nasce das analogias com outros objetos que estão armazenados na memória. A imaginação cria as relações dos conceitos destes objetos e as conecta com o objeto percebido. Dessa forma, o sujeito se depara com a realidade matemática, realidade que, como conforme Marco Panza (1995), procede geneticamente de seus conceitos.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo principal analisar a aprendizagem do aluno face às representações do objeto matemático e se deparou com duas diferentes filosofias: a filosofia de Kant e a filosofia de Wittgenstein. No decorrer da investigação, foi necessário organizar as diferenças teóricas, devido ao ensino e à aprendizagem da matemática não envolverem apenas os objetos matemáticos estudados pelos filósofos, mas, também, o cotidiano da sala de aula, que se efetiva pela linguagem materna. Dessa forma, ora me amparei em uma teoria, ora em outra.

Ao pesquisar o pensamento de filósofos contemporâneos da matemática, percebi que a maioria deles usa argumentos de Kant e/ou de Wittgenstein, seja para aderir às suas teorias, seja para refutá-las. Esse fato se justifica porque Kant e Wittgenstein se destacaram com importantes contribuições no debate filosófico da matemática, contribuindo de forma expressiva para pensarmos a relação da matemática com o conhecimento. Os filósofos contemporâneos, apoiados nessas duas filosofias, vislumbram esclarecer a relação do objeto matemático com o sujeito consciente, ou a relação do objeto matemático com a linguagem do sujeito, e outros analisam essas relações com a linguagem matemática.

Busquei, nestas diferentes filosofias, respostas para os problemas de aprendizagem no contexto de sala de aula, onde interagem aluno, professor e matemática. A aprendizagem e o ensino do objeto matemático envolvem a simbiose da linguagem matemática e da linguagem materna, como também o automovimento da matemática.

Essas relações são complexas e exigem uma análise no ensino da matemática. No cotidiano de sala de aula, encontramos sujeitos que falam e argumentam envolvidos em

jogos de linguagem e sujeitos que representam objetos através de registros à luz de suas intuições. Em meio à linguagem e a registros de representações, estes sujeitos criam conceitos ligados aos objetos, que são pensados e se mostram através da escrita e da fala. Ora uma teoria explica esses fatos, ora outra.

Na filosofia de Kant, encontramos respostas à questão da intuição e imaginação do aluno, na filosofia de Wittgenstein, encontramos caminhos para refletir sobre o papel da linguagem e a importância de seus jogos, como também sobre o problema do seguir as regras matemáticas. No cruzamento dessas duas filosofias, abriu-se o caminho para que eu compreendesse algumas imposições da natureza e relações do objeto matemático no seu ensino e na sua aprendizagem.

Os argumentos que busquei na teoria kantiana para esta pesquisa se justificam, porque respondem a problemas de aprendizagem da aritmética e geometria, pois, de acordo com Pierobon (2003), as obras de Kant foram escritas se valendo dessas duas áreas da matemática, nas quais a imagem está intimamente articulada com o signo. A álgebra, que tem o signo dissociado da imagem, não foi discutida por Kant, porque não fazia parte das concepções matemáticas de seu tempo. Pierobon, ao defender Kant dos ataques à sua teoria, propõe que a escrita da álgebra constitua uma nova dimensão na pesquisa da filosofia da matemática.

A colaboração da filosofia de Kant para o ensino da matemática é o reconhecimento da importância do ato de ver e de reconhecer os perigos advindos das ilusões deste ato. A visão empírica (visão com os olhos), intimamente ligada à visão intelectual (às representações mentais), pode levar o sujeito a uma lógica de falsas aparências.

Para calcular ou contar, muitas vezes utilizamos os dedos da mão, com a intenção de não nos perdermos nas manobras do pensamento. Esse ato nos auxilia na contagem ou no cálculo, porque, com os dedos, nós podemos “ver e sentir” os números (as idealidades) com os quais operamos ou a seqüência que contamos. A “visão”, através do objeto físico, explica a

importância e a necessidade do ábaco na aprendizagem de operações aritméticas. A geometria espacial também reivindica práticas em sala de aula que proporcionem o manuseio de objetos e que auxiliem na visão do aluno. A técnica de planificação de sólidos geométricos é um exemplo. Com o sólido aberto no plano, o aluno pode ver e sentir melhor seus componentes e calcular sua área e o seu volume.

A visão oferece ao sujeito o acesso à imagem do objeto, e os esquemas de coordenação das ações do ato de ver e tocar objetos auxiliam a imaginação na produção desta imagem. O processo de abstração se dá, quando o objeto é pensado sem que ele esteja presente. Sabendo imaginar o objeto na sua ausência, o sujeito pode oferecer instrumentos à intuição na produção de imagens de outros objetos semelhantes. A forma de pensar o objeto físico presente facilita a sua representação mental na sua ausência. A evidência do objeto dado se articula com a sua construção mental. O aluno encontra-se mais receptivo para perceber o objeto, abrindo um espaço espontâneo para a imaginação e criação de outros objetos. A experiência com o objeto fica na memória do aluno, mas, quando o objeto não estiver mais presente, o aluno o terá na lembrança.

Experiências com materiais concretos nem sempre capturam a atenção do aluno e nem sempre têm êxito. Para as crianças, o brincar de contar palitinhos e juntar caixinhas é sucesso garantido. Essas atividades lúdicas não encontram boas respostas com todos os adolescentes, justamente porque não oferecem o prestígio pretendido.

A arte de fazer o aluno ver o objeto matemático em sala de aula continua sendo interessante para os professores. A falta de visualização do objeto não se restringe apenas à geometria. O aluno tem dificuldade de pensar a negatividade (números negativos), bem como a ausência (o zero), talvez pelo fato do zero estar fora de seu campo de visão. As operações com zero e com os números negativos comprovam análise feita por estudos antropológicos. O

aluno tende a se representar nas coisas e relacioná-las. Como ele não vê o zero, tem dificuldades de representá-lo.

Lizcano (1993) faz uma análise entre o pensamento chinês, composto por analogias e oposições, e o pensamento grego, composto por abstrações. O complexo simbólico yin/yang trabalha com a determinação de opostos, enquanto que a dialética do ser e não-ser impede a episteme grega de pensar a negatividade. Para o autor, o princípio de não-contradição (ser/não-ser) representa um obstáculo epistemológico.

A dificuldade de representar as pequenas e as grandes cifras é outro grande problema para o aluno. Um número pode ser tão grande a tal ponto de ser representado pelo infinito, e outro número pode ser suficientemente pequeno, requerendo, assim, um nível de abstração que muitos alunos não conseguem atingir. E não conseguem abstrair justamente porque não conseguem ver que estes números e estas abreviaturas  $(-\infty, \infty)$  surgem pela falta de configuração visual.

Percebe-se a dificuldade do aluno em representar aquilo que ele não vê e, conseqüentemente, de operar com estes elementos, sejam eles o zero, os números negativos, ou as grandes e pequenas cifras. A representação mental é totalmente prejudicada pela falta de representação visual. Como o aluno não consegue imaginar um objeto que ele não possa visualizar, o professor deverá propor estratégias que facilitem a sua percepção.

A álgebra, que depende de uma tradução da linguagem codificada, é, segundo Pierobon, um obstáculo epistemológico, pois ela se põe como algo intuível sem a sua intuição, ou seja, uma intuição sem imagem. Sem visualização, não se pode intuir o objeto, que se esconde por detrás das variáveis e, é por este motivo, que a álgebra necessita ser construída em outra linguagem. As expressões algébricas se colocam para o aluno como um texto escrito

em um idioma diferente de sua língua materna. A compreensão do texto escrito em linguagem “algébrica” dependerá da sua leitura e da sua interpretação.

Wittgenstein se apóia na filosofia de Kant, ao reconhecer que a aritmética repousa sob condições empíricas, e, segundo ele, a proposição aritmética é “uma proposição empírica endurecida em regra” (tradução minha) (1987, p. 273). O cálculo segue regras e a imagem da operação, ou seja, o seu caminho é importante como resultado de um experimento, pois é o uso dos signos que dá sentido à operação.

Wittgenstein pouco fala da geometria, mas podemos observar que ele reconhece os perigos da ilusão provenientes do ato de ver: “isto que a figura também poderia ser - e ela é o que se pode ver nela - não é simplesmente uma outra figura” (1996, p. 269). Quando alguém diz que vê um cubo como um prisma, por exemplo, pode ter em mente um quadrado.

As proposições da geometria e da aritmética são distintas dos enunciados metalingüísticos, assim como os enunciados da álgebra, que não têm aplicação empírica direta, porque necessitam de uma clarificação de sua gramática.

Estas ponderações demarcam os campos da filosofia da matemática, que têm o seu estudo dividido entre aritmética/geometria e álgebra. A análise da linguagem do sujeito epistemológico mostra que o significado dos signos advém do domínio da matemática, da sua aplicação empírica. Esse fato descaracteriza a matemática como um jogo, como pretendem os formalistas, justamente porque o significado do signo matemático não pode estar contido nele mesmo, e sim fora dele. O sentido da matemática está fora dela, ou seja, na sua aplicação.

Segundo Maurice Caveing (2004), os símbolos sozinhos são sem sentido, justamente porque eles são colocados independentes de toda interpretação, já que obedecem às exigências da matemática, mas exercem um certo grau de liberdade (liberdade limitada) dentro da escolha dos axiomas. A livre criação de regras de um jogo é diferente de um jogo na matemática no qual as novas regras não podem abolir as antigas.

O domínio do pensamento ou do sentido, que se encontra na linguagem, é a fronteira do sentido e do não sentido. De acordo com Wittgenstein, a linguagem é uma atividade guiada por regras da gramática, porém as regras gramaticais não estão expostas na linguagem e carecem de explicitação. Quando aplicamos e compreendemos as palavras, mostramos que reconhecemos as regras do uso correto e incorreto da aplicação. A gramática constitui um jogo, e aprende-se o significado de uma palavra no uso.

O jogo de linguagem é a analogia entre o jogo e a linguagem. Ele está imerso em uma forma de vida que, de acordo com Glock (1998, p. 173) para Wittgenstein, é o “entrelaçamento entre cultura, visão de mundo e linguagem”. A forma de vida está relacionada também a atividades não lingüísticas, dependentes de um contexto.

O cálculo, o jogo, a linguagem e a gramática são noções solidárias que seguem regras. A regra é a produção de um interesse na comunicação, mas, segundo Wittgenstein, não consultamos regras para nos comunicar, pois elas estão sempre se atualizando.

As regras estão sempre num estado de devir, pois dependem do contexto, e o devir é a passagem daquilo que ainda não é e daquilo que será. Seguir uma regra é um processo mecânico que encontra problemas com a contingência surgida durante a aplicação da regra.

Na interpretação de Glock (1998, p. 151), para Wittgenstein, “compreender ‘X’ não é somente ser capaz de usar X corretamente; é também estar apto a responder à pergunta ‘O que significa ‘X’?’. (...) uma pessoa pode ser capaz de aplicar ‘X’ corretamente, sem ser capaz de fornecer qualquer explicação para ‘X’”.

A adição de frações é um exemplo típico da falta de explicação. Aplicar o algoritmo da adição corretamente não implica saber explicar a operação. Quando um aluno adiciona duas frações com denominadores diferentes, aplica o algoritmo mecanicamente e encontra o denominador comum para estas frações, porém, muitas vezes, não sabe explicar o motivo deste cálculo. A regra de adicionar frações diz que, se os denominadores são diferentes, deve-

se calcular o seu mínimo múltiplo comum. Isso o aluno faz porque existe uma regra que exige que ele o faça.

De acordo com Granger (1990), a matemática e a lógica, para Wittgenstein, constituem sistemas de regras de reconhecimento. O sistema das operações matemáticas constitui as regras de suas combinações possíveis, e este sistema é a própria aplicação da matemática. A concatenação das operações tem sentido, porque os símbolos matemáticos são remetidos às regras.

O algoritmo é um método abreviado que representa o método não abreviado, mas que o aluno guarda em sua memória porque lhe é útil. O algoritmo representa a forma de encontrar a solução de um problema de uma maneira mais econômica e sem exigir muitos esforços.

Somar dois mais três, reconhecer que uma sala de três metros de largura e quatro metros de comprimento apresenta uma área de doze metros quadrados são problemas do cotidiano que são fáceis de encontrar a resposta. Porém, se a soma não constar de números inteiros e se as dimensões de um retângulo são fornecidas com variáveis, o aluno encontra obstáculos e, muitas vezes, cria outras regras de resolução. Esse fato se dá porque, com a mudança do contexto, surge a mudança da regra na perspectiva do aluno.

Não existe generalização e transposição espontânea de uma regra. Para o aluno, a regra aplicada em um contexto não é a mesma a ser aplicada em outro contexto. Sarrasy (1997), no seu texto *Sentido e situações: A questão de ensino de estratégias meta-cognitivas em matemática* (tradução minha), mostra o resultado de uma pesquisa feita em escolas francesas, comprovando essa problemática. O autor ressalta que é uma ilusão pensar que o sentido de uma tarefa dada ao aluno pode ser estabelecido independentemente de toda a situação.

O ensino através de modelos matemáticos tem a pretensão de que o aluno compreenda cada modelo, para depois saber identificá-los e aplicar os seus respectivos métodos de

resolução. Essa pesquisa constatou que os alunos aplicavam o sentido literal dos enunciados propostos diferentemente dos contextos nos quais estavam inseridos. Sarrasy argumenta que as condições de emprego de uma regra e sua aplicação não podem ser definidas *a priori* por um modelo matemático.

Dar exemplos e modelos ao aluno não é suficiente, pois não é mostrando como se aplica a regra que ele aprenderá, e sim, quando o próprio aluno aplicar a regra. “Todo o signo, sozinho, parece morto. O que lhe confere vida? Ele está vivo no uso” (1996, p. 173), dizia Wittgenstein.

Nós determinamos o sentido da regra no uso, pois existe relação interna entre o ato de aplicar a regra e a própria regra. As aplicações da regra nos conduz a produzir elementos para a construção de conceitos.

A regra em si não comporta as suas aplicações, ela não nos diz como devemos agir. Seguir uma regra e agir conforme a regra são coisas diferentes. Seguimos regras, porém não as consultamos. Este paradoxo não supõe que as regras nos sejam ocultas, pois, quando falamos, somos capazes de reconhecer que estamos seguindo regras. Compreender supõe processos mentais que desconhecemos.

Sarrasy (1997) aproveita a oportunidade do resultado da pesquisa referida anteriormente e denuncia que os alunos não sabem ler um enunciado matemático, propondo aos professores ensiná-los. De fato, o autor tem razão, temos que ensinar aos alunos ler enunciados matemáticos. Ler todo o texto, reler para coletar os dados do problema, identificar o que está sendo pedido e ler outra vez para verificar se o compreendem bem. O texto matemático, como todo o texto, não é compreendido integralmente numa primeira leitura.

Wittgenstein (1996) diz que, para ensinarmos o sentido de uma proposição a alguém, devemos ensinar o sentido de cada palavra que compõe a proposição. E é exatamente isso que os professores devem fazer, explicar palavra por palavra, signo por signo.

A linguagem da matemática apresenta problemas na sua interpretação. Ensinar o aluno a ler um texto escrito nesta linguagem é como ensinar uma língua estrangeira. Os seus símbolos podem ter vida e serem compreendidos, quando o aluno aprender a ler nesta língua. O primeiro passo para a compreensão é a uma boa leitura, pois, sem ela, a interpretação fica prejudicada.

Um dos problemas da dificuldade do aluno com a leitura e com a compreensão da linguagem matemática é a falta de visualização. Para dar significado aos seus símbolos, é preciso que o aluno interprete cada símbolo e, para interpretar, é preciso que ele veja o objeto que o símbolo representa. Essa visualização é resgatada através da construção possível de uma outra linguagem que advém da leitura do texto pelo professor e reescrito pelo aluno.

A linguagem matemática é cifrada e exige a construção de outra linguagem advinda da sua metalinguagem. Essa construção revela alguns problemas na leitura e na compreensão de um texto em linguagem matemática, pois, de acordo com Granger (1970), sempre restará um resíduo. A construção de uma outra linguagem causa prejuízos ao sentido do texto, pois o leitor faz uma interpretação singular do texto.

Segundo Dehaene (1997), para um bilíngüe, é mais econômico calcular em sua língua materna do que na sua segunda língua. Uma pessoa pode calcular em uma língua, quando não existem palavras para designar os números que envolvem o cálculo? Segundo pesquisas feitas, é impossível. Calculamos utilizando os nomes que designam os números que envolvem o cálculo, inclusive muitas pessoas têm o hábito de calcular em voz alta, porque os olhos também lêem o verbal.

Ao analisar o problema dos objetos no pensamento matemático, Caveing (2004) discute a reflexão da consciência e da linguagem, dizendo que é uma ilusão a consideração de uma consciência sem linguagem. O sujeito, ao refletir antes de agir, informa o conteúdo do objeto na linguagem, porém esta linguagem pode deformar o objeto percebido. A palavra

interna do sujeito é a primeira etapa da reflexão acompanhada de uma percepção ou de uma lembrança. Na segunda etapa, o sujeito nomeia o objeto. A ilusão de uma consciência pura sem linguagem se justifica pelo fato de que a autoconsciência do sujeito é linguageira.

Caveing<sup>22</sup>(2004) acredita na existência de uma intuição heurística que antecipa e sugere novas relações matemáticas e que serve de guia para o trabalho consciente do pensamento. A matemática é criação do pensamento de um ser em situação no mundo. A objetividade da matemática não é fundada na empiria, pois os objetos matemáticos resultam da existência intrateórica da matemática.

Os critérios de objetivação da matemática estão atrelados aos seus conceitos, e a produção de conceitos está intimamente ligada aos seus objetos. Kant postulou as regras para a construção de imagens mentais, porém reconhece que um conceito não se define pela posse de uma imagem mental, e sim pela capacidade de aplicação de uma regra. Wittgenstein nos esclarece as variantes do processo de seguir uma regra e agir conforme regras. Caveing e outros filósofos contemporâneos apontam os problemas das exigências conceituais que constituem o automovimento da matemática.

O conceito matemático visto sob os pontos de vista destas diferentes filosofias pode ser pensado como uma regra interpretada que procede de percepções de um objeto e que oferece material à imaginação, principalmente quando tratarmos de um conceito construído nas disciplinas da aritmética e da geometria.

Na aritmética, imaginar a existência de um número não exige a percepção do número e não faz sentido criar sua imagem mental, mas as operações exigem sentido. Na geometria, o processo de abstração de um sólido geométrico pode ser visto e imaginado, mesmo sem a

---

<sup>22</sup> O autor conjuga a intuição como processo de evidência, reconhece o papel importante da linguagem na constituição do sujeito e confere ao automovimento da matemática o papel de sua objetividade. Para expor suas idéias, ele encontra argumentos em filosofias diferentes.

presença do objeto físico. A imaginação está sujeita à vontade, ela é criativa e não receptiva como a percepção, e inclusive podemos imaginar com mais clareza do que ver. O objeto, uma vez percebido, fica na memória do sujeito, podendo este imaginá-lo na sua ausência. A unidade sintética das relações que o sujeito faz do objeto imaginado com outros objetos cria condições para o conceito do objeto.

Na perspectiva do aluno, o conceito construído num contexto não é o mesmo em outro contexto. O aluno reinterpreta o conceito, quando projeta nele novos sentidos. O ato de criar conceitos, que obedece à lógica do aluno, nem sempre está associado ao automovimento da matemática. O conceito muda de acordo com o contexto, porque o aluno produz sentidos diferentes, mas o conceito continua o mesmo, já que ele deve obedecer às exigências da matemática.

Um conceito antes e depois da compreensão do sujeito, o conceito no contexto e o contexto do sujeito devem ser levados em consideração, quando falamos em construção. O conceito não é definitivo, e o sujeito também não é acabado. Os dois estão em constante mudanças.

Para produzir sentidos, o sujeito depende de suas experiências vividas com o objeto e da sua memória, o conceito matemático depende do objeto e dos critérios de seu reconhecimento. A construção do conceito pelo sujeito passa por um processo de objetivar aquilo que lhe é subjetivo.

Os critérios de verdade do sujeito nem sempre estão em sintonia com as verdades matemáticas, justamente porque a ilusão de reconhecimento das verdades matemáticas leva o sujeito a cometer erros; e os erros são advindos de construções de conceitos que obedecem à lógica do aluno e não à lógica da matemática. Porém nem todo o erro é um conceito transformado pela lógica do aluno, pode ser apenas um engano que, quando percebido, é corrigido.

Temos que levar em consideração que a memória do sujeito é falha, inclusive em matemática. Mas esquecer em matemática causa sérios prejuízos à aprendizagem, porque não sabendo ou não lembrando dos conteúdos básicos, o aluno não pode ir adiante. Este fato impede outras construções.

A memória é ligada às experiências do sujeito e, ao encontrar o objeto procurado, este pode fornecer subsídios para analogias e criação de novos sentidos. As analogias conectam um conceito a outros conceitos.

Pensar e experienciar o objeto em diferentes situações proporciona um horizonte de sentidos mais amplo, possibilita que a imaginação faça relações do objeto com outros objetos, assim como possibilita estabelecer relações entre os seus conceitos. Em cada contexto, o objeto é percebido de uma forma singular, e os juízos atribuídos ao objeto desencadeiam conceitos diferentes.

Nestes diferentes processos de conhecimento do objeto, o sujeito é diferente, já que ele está vivenciando diferentes situações. Os juízos atribuídos ao objeto podem ser advindos de uma falsa impressão e ilusão de similaridade do objeto percebido com um objeto experienciado em outro tempo.

Existe a circularidade de sentido, quando o sujeito experimenta o mesmo objeto em diferentes situações, em diferentes contextos. Mas a memória é falha e o sentido pode, com o tempo, se perder ou se alterar.

O professor de matemática, na tentativa de fixar o sentido de uma regra, oferece ao aluno diversas atividades envolvendo a regra. A aplicação de listas de exercícios antes de uma verificação é uma forma de fazer o aluno relembrar de conteúdos anteriores adicionados ao conteúdo novo. Porém, como vimos, a aprendizagem não se dá por modelos, residindo aí um paradoxo: o objeto experimentado em diferentes contextos (modelos) não implica a compreensão da regra.

Na perspectiva do aluno, a regra e suas diferentes aplicações designam diferentes conceitos. Na aprendizagem, não existe garantia de que a experiência com um objeto tenha relação imediata com a experiência do mesmo objeto em outro contexto. Não existe transposição imediata de conhecimento.

Em um sentido criativo, o sujeito projeta sentidos no objeto; em um sentido mecânico, o sujeito aplica regras. Ao aplicar regras, o sujeito descobre as propriedades do objeto que nascem através da circularidade de sentidos da aplicação de um passo a outro da regra e que constituem os atos de interpretação do sujeito. Em cada uma das diferentes aplicações, a regra é interpretada de maneira diferente, conseqüentemente, os conceitos advindos destas aplicações também serão diferentes.

Seguindo regras, o aluno se depara com a contingência, pois nela aparecem outros conceitos. Nestes diferentes contextos, ele faz analogias e abre espaço para construir conceitos, de acordo com a sua imaginação e a sua memória.

O aluno aprende a fabricar conceitos ao atribuir sentido da regra no uso, na sua aplicação, na tarefa dos procedimentos de resolução de um problema. O sentido do enunciado é estabelecido conforme o contexto. A regra que, para o professor, deveria ter um sentido único, para o aluno, passa a constituir diferentes sentidos.

O aluno pode chegar ao ponto de reconhecer que todas as regras matemáticas podem ser demonstradas e que elas não surgem de procedimentos “mágicos”. Porém o aluno esquece algumas, e outras perdem o sentido com o tempo. O aluno, num determinado momento, segue regras de acordo com a sua memória, como no caso do “fazer tudo o que lembra”, em outro momento, parece esquecer a regra e engendra uma outra.

A regra é um acordo, e um sujeito sozinho não pode inventar uma regra para substituir a regra que advém do acordo. O sujeito que pretende usar regras que tenham sentidos privados é excluído da comunidade escolar. O sentido da regra tem que ser o mesmo para

todos, ou seja, tem que obedecer as exigências da matemática. A forma como cada sujeito utiliza para expressar a regra pode ser diferente, desde que não altere o seu sentido.

Reconstruir um conceito é uma forma de reinterpretar o conceito dado pelo professor ou o conceito construído em outro tempo pelo aluno. O conceito, antes da leitura e interpretação do sujeito, pode não corresponder ao novo conceito reinterpretado, pois ele será transformado com novos sentidos e dito com outras palavras.

O conceito do objeto depois da interpretação do aluno passa por um processo de aprendizagem e construção. Esta construção está atrelada ao reconhecimento das exigências lógicas intermediadas pelo professor. Os mecanismos utilizados neste reconhecimento podem definir a construção do conceito pelo aluno, mas não garantem que, mais tarde, o aluno relacione este conceito adequadamente com outros conceitos.

O abismo existente entre a lógica matemática e a lógica do aluno é similar ao abismo existente entre o conceito e a aplicação do conceito a outros conceitos. Este abismo pode ser preenchido com a compreensão originada no diálogo entre professor e aluno.

A lógica do aluno depende do campo de visão em que ele percebe o objeto e das lembranças que associam o objeto a outros objetos. O objeto percebido pelo professor pode não corresponder ao objeto percebido pelo aluno, daí a necessidade de um esclarecimento do objeto via linguagem.

As analogias feitas entre os objetos dependem da capacidade criadora do aluno. Mas o professor não tem acesso às analogias do aluno, a não ser que lhe forneça a oportunidade de falar, pois é apenas no diálogo que professor e aluno entrarão em entendimento.

Querer ensinar não é apenas transmitir, é levar o aluno a entrar no universo discursivo da sala de aula. Querer aprender é querer escutar e entrar em sintonia com o jogo proposto pelo professor. A vontade tem que ser recíproca.

Dois e dois são quatro, quatro e quatro são oito, diz o mestre, e o aluno sonha acordado com um passarinho, no poema “Page d’écriture”, de Prévert (2003, p. 146). O mestre fala, porém o aluno não escuta. Ele prefere sonhar com passarinhos. A imaginação do aluno não capta a operação pretendida pelo professor. O aluno prefere fantasiar com passarinhos para evitar os cálculos do mestre.

Capturar a atenção do aluno é o que busca a didática, mas a imaginação do aluno, muitas vezes, parece ser incontrolável. A saída para o professor prender a atenção do aluno são os jogos de linguagem e as aulas práticas. A manipulação e visualização de objetos auxilia no sentido de explorar o lúdico, porque é muito mais atrativo para o aluno aprender brincando. Mas estas práticas nem sempre são possíveis, e elas sozinhas não garantem a aprendizagem do aluno. Os jogos de linguagem, por sua vez, estão sempre disponíveis como recurso de interação entre o professor e o aluno.

Quando o professor convida o aluno a fazer conjeturas, ele fornece a oportunidade para o aluno expor suas certezas e suas dúvidas através da fala. Neste contexto, o professor pode compreender o que o aluno não compreendeu.

O professor, às vezes, tem dificuldades em mostrar o que pretende ensinar. Expondo suas dúvidas, o aluno auxilia o professor a reorganizar seus pensamentos e a procurar outras palavras para explicar suas idéias.

A preocupação do professor não pode estar pautada na idéia de mostrar ao aluno o que ele sabe, e sim como ele sabe o que sabe. Convidar o aluno à cerimônia da prova matemática é oferecer a oportunidade de participação na construção de conceitos.

Investindo no diálogo, o professor pode explorar o erro do aluno como instrumento de ensino. Caso as conjeturas do aluno não sejam boas como argumentos da demonstração e da prova matemática, o professor deve procurar entender a lógica do erro do aluno e re-significá-

la num outro patamar. Com o auxílio do professor, o aluno pode perceber que a sua lógica é refutada pelas exigências da matemática.

Apontar simplesmente o erro do aluno é não dar importância às suas conjeturas. O erro compreendido apenas como erro passa a ser objeto de vergonha do aluno e, conseqüentemente, objeto de medo. Quando o erro é explorado e compreendido, passa a ser objeto de investigação do professor e do aluno.

Como não existe pensamento ilógico e muito menos linguagem ilógica, podemos afirmar que a construção do conceito matemático tem uma lógica própria, mesmo que este conceito não coincida com o conceito universalmente válido.

Construir o conceito e reconstruí-lo em outro patamar deve sempre obedecer às exigências da matemática. Essa reconstrução depende da memória e da imaginação; a primeira está ligada às experiências do sujeito com o objeto, mas é falha; a segunda advém do objeto percebido, mas está sujeita a ilusões. O conceito assim re-significado pode estar em contradição com o conceito que obedece ao rigor das verdades matemáticas, como também pode sofrer um acréscimo e engendrar outro conceito.

O contexto no qual o objeto recebe um novo sentido está intimamente ligado à relação do objeto com outros objetos e oportuniza analogias que engendram conceitos. A oportunidade da palavra ao sujeito aprendente oferece subsídios para o acesso a esta rede conceitual e que está em constante mudança.

O conceito é uma regra interpretada, e a regra é um acordo que prevê o desacordo. Como a linguagem interior é uma versão da linguagem pública, o problema do acordo e do desacordo entre o sujeito e a regra não se encontra na linguagem, e sim em sua compreensão. Somos seres de linguagem e nela produzimos sentidos. Esse fato abre a possibilidade da criação de novos sentidos e de novos conceitos.

A possibilidade de criação de regras advindas do jogo de signos matemáticos, aliada às experiências da minha prática docente, me permite corroborar a hipótese inicial desta pesquisa: de que o ensino da matemática carece de uma investigação minuciosa, devido à linguagem da matemática ser diferente da linguagem do mundo da vida.

“Matematizamos com conceitos” (tradução minha) (Wittgenstein, 1987, p. 223), porém não existe uma teoria única que dê conta da formação destes conceitos. Não podemos aderir a uma teoria por modismo ou simplesmente pelo fato de não existir a opção de uma outra.

Nesta pesquisa, percebemos que alguns autores detectaram obstáculos epistemológicos na aprendizagem da matemática e outros apontaram as falhas nas atuais teorias educacionais. As investigações pautadas na relação do sujeito com o objeto e a realidade não são suficientes para uma aprendizagem efetiva e a elas deve-se acrescentar a análise da linguagem matemática, que é a fonte de produção de sentidos do sujeito aprendente. A análise da linguagem matemática evoca a analogia entre a linguagem e a verdade matemática. No entrelaçamento das duas, nos deparamos com o sujeito aprendente e suas atividades. Nesse contexto, abre-se o espaço ao pesquisador/professor à produção de novos sentidos no ensino da matemática.

## 7 REFERÊNCIAS

- ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia**. São Paulo: Mestre Jou, 1982.
- BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.
- BARUK, Stella. **Insucessos e Matemáticas**. Lisboa / Portugal: Relógio D' Água Editores, 1996.
- \_\_\_\_\_. **L'âge du capitaine : De l'erreur en mathématiques**. Paris: Editions du Seuil, 1985.
- BEAN, Dale. O que é modelagem matemática? **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, São Paulo, n. 9/10, p. 49, 2001.
- BERNAYS, Paul. **Philosophie des mathématiques**. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2003.
- BOURDIEU, Pierre ; PASSERON, Jean C. **A reprodução**. Rio de Janeiro: Frontes Alves, 1982.
- BOURIAU, Christophe. **Qu'est-ce que l'imagination**. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2003.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.
- CAVAILLES, Jean. **Philosophie mathématique**. Paris: Hermann, 1962.
- \_\_\_\_\_. Jean. **Sur la logique et la théorie de la science**. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1997.
- CAVEING, Maurice. **Le problème des objets dans la pensée mathématique**. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2004.
- CHAUVIRE, Christiane. **Mathématique et Anthropologie chez Wittgenstein**. França: 2004. 29 páginas. Disponível em: <<http://www.univ-paris7.fr/philomathique/Chauvire03-06-04.pdf>> Acesso em: 20 julho 2004.
- CIPRA, Barry, **Erreurs...et comment les trouver avant le prof...**, Paris: Inter Editions, 1985.
- COSTA, Newton Carneiro A. da. **O conhecimento científico**. São Paulo: Discurso Editorial, 1999.
- DAVIS, P., HERSH, R. **L'univers mathématique**. Paris: Gauthier-Villars, 1990.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**. São Paulo: Ed. Ática, 1993.

DESCARTES, René. **Discurso do Método**. São Paulo: Nova Cultural, 1987. (Os Pensadores).

DEHAENE, Stanislas. **La Bosse des maths**. Paris: Odile Jacob, 1997.

DEPÉTRIS, Jean-Pierre, **Du juste et du lointain\_ Notes sur la poétique et la logique**. França: 2001. 16 fichários html. Disponível em: <<http://jdepetris.free.fr/dujuste/juste.html>> Acesso em: 15 maio 2004.

DUMONCEL, Jean-Claude. **Le jeu de Wittgenstein: Essai sur la Mathesis Universalis**. Paris: Presses Universitaires de France, 1991.

\_\_\_\_\_. **Philosophie des mathématiques**. Paris: Ellipses Edition Marketing, 2002.

DUPIN, J., SAMUEL, J. **Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques**. Paris: Presses Universitaires de France, 1993.

ESPINOZA, Miguel. **Philosophie de la nature**. Paris: Ellipses Edition Marketing, 2000.

FARAGO, France. **La volonté**. Paris: VUEF, 2002.

FREGE, Gottlob. **Os fundamentos da aritmética**. São Paulo: Abril Cultural (Os pensadores), 1983.

FOUCAULT, Michel. **A arqueologia do saber**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1995.

GADAMER, Hans Georg. **Verdad y método**. Salamanca: Ediciones Sígueme, 1993.

GIARDINETTO, José Roberto Boettger. **Matemática escolar e matemática da vida cotidiana**. Rio de Janeiro: Editora Autores Associados, 1998.

GLOCK, Hans-Johann. **Dicionário Wittgenstein**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

GRANGER, Gilles-Gaston. **A ciência e as ciências**. São Paulo: Editora Unesp, 1994.

\_\_\_\_\_. **Filosofia do estilo**. São Paulo: Perspectiva, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

\_\_\_\_\_. **Invitation à la lecture de Wittgenstein**. Aix-en-Provence: Editions Alinea, 1990.

\_\_\_\_\_. **Le probable, le possible et le virtuel: essai sur le role du non-actuel dans la pensée objective**. França: Éditions Odile Jacob, 1995.

\_\_\_\_\_. Objeto, estructuras y significaciones. In: **Estructuralismo y Epistemologia**. Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión, 1970.

\_\_\_\_\_. **O Irracional**. São Paulo: Editora UNESP, 2002.

\_\_\_\_. **Pensamento formal e ciências do homem.** Lisboa: Editorial Presença, 1976.

HEIDEGGER, Martin. **Ser e Tempo.** Petrópolis: Vozes, 1986.

JAPIASSU, H., MARCONDES, D., **Dicionário básico de filosofia,** Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1996.

KANT, Immanuel. **Crítica da razão pura.** São Paulo: Editora Nova Cultural, vol. 1, 1991.

\_\_\_\_. **Prolegómenos a toda a metafísica futura.** Lisboa: Edições 70, 1987.

KNIJNIK, Gelsa. **Exclusão e resistência:** educação matemática e legitimidade cultural. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

LACAN, Jacques. Seminario XI. **Os quatro conceitos fundamentais da psicanálise.** Rio de Janeiro: Zahar, 1986.

LACROIX, Jean. **Kant et le kantisme.** Paris: Presses Universitaires de France, 1966.

LAKATOS, Imre. **Histoire et méthodologie des sciences.** Paris: Presses Universitaires de France, 1994.

\_\_\_\_. **Preuves et Réfutations:** Essai sur la logique de la découverte mathématique. Paris: Hermann, 1984.

LANDIM FILHO, Raul F. **Evidência e verdade no Sistema Cartesiano.** São Paulo: Loyola, 1992.

LAPLANTINE, F., TRINDADE L.. **O que é imaginário.** São Paulo: Brasiliense, 1997.

LARGEAULT, Jean. **Intuition et intuitionisme.** Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1993.

\_\_\_\_. **Intuitionisme et théorie de la démonstration.** Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1992.

LEÃO, Emmanuel Carneiro. **Aprendendo a pensar.** Rio de Janeiro: Vozes, 1977.

LIZCANO, Emmánuel. **Imaginario colectivo y creación matemática:** La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia. Barcelona: Gedisa Editorial, 1993.

LUNZARGO, Carlos. **O que é matemática.** São Paulo: Ed. Brasiliense, 1990.

MEITINGER, Serge. **Jeu et communication\_L'intérêt, la mathesis.** França: 2003. 19 páginas. Disponível em: <[http://pierre.campion2.free.fr/smeitinger\\_arnaud&dumoncel.htm](http://pierre.campion2.free.fr/smeitinger_arnaud&dumoncel.htm)>. Acesso em: 20 maio 2004.

MORA, Miguel. É preciso falar a linguagem da matemática. **Jornal do Vestibular**, Porto Alegre, p.3.

NIETZSCHE, Friedrich. **Para além de bem e de mal**. São Paulo: Abril Cultural, 1983. (Coleção Os Pensadores)

OTTE, Michael. **O formal, o social e o subjetivo**: uma introdução à filosofia e à didática da matemática. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista, 1993.

PAIN, Sara. A arte e a construção do conhecimento. **Revista do GEEMPA**, n. 1, p. 19-27, jul., 1993.

PALMER, Richard. **Hermenêutica**. Lisboa: Edições 70, 1989.

PANZA, Marco. **Nombres\_Éléments de mathématiques pour philosophiques**. Paris: Diderot Editeur, 1999.

PANZA, M., SALANSKIS. J., **L'objectivité mathématique**: Platonismes et structures formelles. Paris: Masson, 1995.

PATRAS, Frédéric. **La pensée mathématique contemporaine**. Paris: Presses Universitaires de France, 2001.

PIAGET, Jean. **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

\_\_\_\_\_. **A Epistemologia genética**. São Paulo: Abril Cultural, 1983.

\_\_\_\_\_. **O Estruturalismo**. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1974.

\_\_\_\_\_. **Ensaio de Lógica Operatória**. São Paulo: Ed. Da Universidade de São Paulo, 1976.

PIAGET, Jean ; GARCÍA, Rolando. **Psicogéneses e historia de la ciencia**. México: Siglo Veintiuno Editores, 1984.

\_\_\_\_\_. **Vers une logique des significations**. Genève: Murionde, 1987.

PIEROBON, Frank. **Kant et les Mathématiques**. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2003.

POLYA, G. **Les mathématiques et le raisonnement "plausible"**. Paris: Gauthier-Villars, 1958.

PRÉVERT, Jacques. **Paroles**. Barcelona: Novoprint, 2003.

RIVENC, F., ROUILHAN, P. **Logique et fondements des mathématiques** (Anthologie(1850-1914)). Paris: Editions Payot, 1992.

ROSTAND, F., **Scrupules des Mathématiques**, Paris : Librairie Philosophique J. Vrin, 1960.

RUSSELL, Bertrand. **História da Filosofia Ocidental**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1963.

\_\_\_\_. **Introdução à Filosofia da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1963.

SANTAELLA, Lucia ; WINFRIED, Nöth. **Imagem**. São Paulo: Editora Iluminuras, 2001.

SARRASY, Bernard. **Sens et situations** : Une mise en question de l'enseignement des strategies méta-cognitives en mathématiques. França: 1997. 19 páginas. Disponível em: <<http://perso.wanadoo.fr/daest/Pages%20perso/Sarrazy.htm>> Acesso em: 10 julho 2004.

SILVA, Benedito A. et al. **Educação Matemática** : uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

SILVA FILHO, Roberto L. L. **A redescoberta de Cristovam**. Folha de São Paulo, 01/06/2003.

SILVEIRA, Marisa R. Abreu da. **A interpretação da matemática na escola, no dizer dos alunos**: ressonâncias do sentido de “dificuldade”. Porto Alegre: UFRGS, 2000. Dissertação (Mestrado).

SPANIOL, Werner. **Filosofia e método no segundo Wittgenstein**. São Paulo: Loyola, 1989. (Coleção Filosofia ; 11)

SOULEZ, Antonia. **Wittgenstein et le tournant grammatical**. Paris: Presses Universitaires de France, 2004.

THIRION, Maurice. **Les mathématiques et le réel** (IREM-Histoire des Mathématiques). Paris: Ellipses Edition Marketing, 1999.

THOM, René. **Apologie du logos**. Saint-Amand-Montrond: Hachette, 1990.

\_\_\_\_. **Paraboles et Catastrophes**. France: Champs Flammarion, 1989.

TUGENDHAT, Ernst . **Wittgenstein** : A impossibilidade de uma “Linguagem Privada”. Extraído da Revista do CEBRAP n°. 32 de 1992. 14 páginas. Disponível em: <<http://www.filosofia.pro.Br/textos/Wittgenstein-tugendhat.htm>>. Acesso em : 20 set. 2001.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Da certeza**. Lisboa: Edições 70, 2000.

\_\_\_\_. **Investigações Filosóficas**. Rio de Janeiro : Coleção Pensamento Humano, 1996.

\_\_\_\_. **Observaciones sobre los fundamentos de la matemática**. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

\_\_\_\_. **Tractatus Lógico-Philosophicus**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1993.