

Lectura y construcción que hacen algunos profesores del diagrama o dibujo geométrico en el quehacer matemático

Rebeca Guirette y Gonzalo Zubieta

Resumen: El propósito de este estudio es examinar la lectura que hacen profesores de matemáticas, de nivel secundaria y bachillerato (México, D.F. y Estado de México), del diagrama o dibujo geométrico en el quehacer matemático, para lo cual se diseñaron actividades en las que el dibujo es parte importante de éstas, de modo que el profesor produzca o lea dichos diagramas que le permitan ofrecer una justificación a un hecho requerido en una situación geométrica dada. En este texto se muestran algunas de las dificultades a las que se enfrentan los profesores en la acción de leer o producir los diagramas y, en algunos casos, la utilización de distintas estrategias para una misma situación geométrica dada en distintos registros.

Palabras clave: profesor, lectura y producción del dibujo, relaciones.

La lecture que font quelques professeurs du diagramme ou du dessin géométrique dans le travail mathématique

Résumé: Le propos de cette recherche est documenter la lecture que font des professeurs de mathématiques, de niveau lycée et baccalauréat (le Mexique, D.F. et l'État du Mexique), du diagramme ou du dessin géométrique dans le travail mathématique, pour lequel des activités sont dessinées où le dessin est une partie importante de celles-ci, de telle sorte que le professeur produit ou lit tels diagrammes qui lui permettent d'offrir une justification à un fait requis dans une situation géométrique donnée. Dans ce texte elles on montre certaines difficultés auxquelles les professeurs font face dans l'action de lire ou de produire les diagrammes et dans quelques cas l'utilisation des différents stratégies pour la même situation géométrique donnée dans les registres différents.

Mots clés: le professeur, la lecture et la production du dessin, les relations.

Fecha de recepción: 20 de febrero de 2009.

INTRODUCCIÓN

Este artículo expone el tratamiento que hacen los profesores de bachillerato y los de secundaria del diagrama o dibujo geométrico en situaciones geométricas dadas, de tal modo que el dibujo constituye parte central de éstas.

Uno de los objetivos de los temas de geometría, contenidos en los programas de matemáticas en la escuela secundaria y en el bachillerato mexicano, es iniciar al estudiante, gradualmente, en el razonamiento deductivo; pero también proporcionar al alumno la experiencia geométrica que lo ayude a comprender, describir y representar el entorno y el mundo donde vive, así como “un panorama de los principales aspectos del conocimiento y del quehacer matemático que le permitirán tener acceso posteriormente a conocimientos más especializados” (*Programa de Estudios de Matemáticas*, p. 3).

Por ello, se recomienda insistir en trazos y construcciones geométricas como alternativas para explorar y conocer propiedades y características de la figura de tal modo que,

el describir los objetos y sus partes de acuerdo con sus formas, dimensiones y propiedades, contribuye de manera significativa a favorecer un pensamiento reflexivo cuando el estudiante, en un primer momento, identifica propiedades y relaciones que puede enunciar en proposiciones generales, construye y proporciona argumentos que validan dichas proposiciones y, finalmente, establece relaciones lógicas entre ellas, aun sin llegar necesariamente a un rigor axiomático propio de estudios más especializados (*Programa de Estudios de Matemáticas*, p. 32).

Un ejemplo de los ejercicios con los que trabajan profesores y estudiantes (J. E. Thompson, 1981, *Geometría*, UTEHA, p. 345):

30. En el esquema de la figura 220, $AB = AC$ y ED es perpendicular a BC .
Demuéstrase que el triángulo AFE es isósceles.

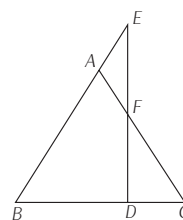


Figura 220

Obsérvese que el dibujo o diagrama geométrico forma, hasta cierto punto, parte de la estructura de los problemas en geometría, los cuales pueden desempeñar un papel heurístico durante el proceso de demostración o, por el contrario, llevarlos por caminos que los alejen de la demostración e incluso la obstaculicen.

Así pues, nuestro objetivo es *examinar la lectura que hacen los profesores del diagrama o dibujo geométrico en el quehacer matemático*, ya que, como se lee en párrafos anteriores, el profesor debería poseer cierto dominio en el tratamiento del diagrama o dibujo geométrico para poder llevar a cabo lo requerido en los programas de estudios.

Al respecto, Bishop (1992) menciona que los obstáculos para aprender geometría se pueden pensar en términos de forma y contenido, ya que, para los estudiantes de geometría, la forma de ésta también parece ser su contenido. Esto es, se trata de una representación del espacio que tiene que ver tanto con la forma (cómo se representan las ideas espaciales) como con el contenido (lo que está representado).

Es importante hacer la distinción entre estos elementos, ya que la confusión entre forma y contenido puede surgir cuando quien aprende empieza a materializar las ideas. Lo cual puede llevar a una noción restringida de lo que es importante, una visión estrecha de la representación y la confusión de la forma con el contenido.

También dice que “existe un vocabulario visual muy complejo, con muchas convenciones y símbolos que deben comprender quienes aprenden, si se espera que le den sentido a las figuras geométricas” (Bishop, 1992, p. 34).

Por otra parte, Moriena y Scaglia (2003) exponen que la representación gráfica estereotipada, es decir, las representaciones gráficas de figuras geométricas utilizadas con mucha frecuencia en los libros de texto, tiene ciertas características visuales irrelevantes para el concepto, pero que influyen en la apreciación de los alumnos.

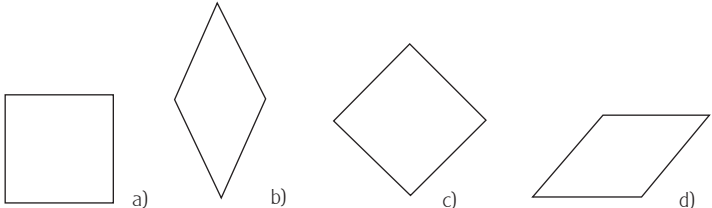
Una dificultad común entre los alumnos es el difícil reconocimiento de una figura cuando la representación gráfica que se presenta de ésta no es la estereotipada. Gutiérrez y Jaime (1996) mencionan que

es un error considerar que los estudiantes basan sus razonamientos en definiciones formales de los conceptos y que sus imágenes del concepto tienen un papel secundario. En cambio, encontraron que estudiantes del magisterio tienen imágenes conceptuales próximas a las de estudiantes de primaria y abundan las imágenes basadas en las figuras prototípicas (triángulos alineados a los ejes horizontal y vertical) (citado en Moriena y Scaglia, 2003, pp. 5-19).

El objetivo de las autoras es aplicar algunas tareas a estudiantes de 13 años, a fin de *detectar errores en los alumnos causados por el uso de representaciones gráficas de la figura que responden o no a estereotipos determinados*.

La actividad consiste en reconocer de entre las figuras dadas cuál o cuáles de ellas son rombo y explicar el porqué de la respuesta. La actividad es la siguiente:

2. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son rombos?



a) Sí No Por qué

b) Sí No Por qué

c) Sí No Por qué

d) Sí No Por qué

Puesto que las figuras *a* y *d* no se encuentran en la posición estereotipada como lo están las figuras *b* y *c*, el porcentaje de respuestas correctas es menor para las figuras *a* y *d*, entre las cuales las autoras encuentran respuestas tales como: “si lo vemos de costado podremos observar que es un rombo con todos sus lados iguales”.

Las autoras concluyen que hay una influencia por parte de los dibujos estereotipados en la valoración de los estudiantes, ya que algunos alumnos hacen referencia a la posición de la figura para justificar sus respuestas (Moriena y Scaglia, 2003).

En nuestro caso, se sometieron a estudio las *Pruebas sin palabras* (*Proof Without Words*) que son un “diagrama que representa y explica un resultado matemático que puede o no estar acompañado de alguna expresión algebraica. Diagrama que debe ser sometido a un profundo análisis para poder discernir todos los componentes de la sentencia matemática y la veracidad de ésta” (Guirette, 2006, p. 43). Como resultado del estudio, se pudo comprobar que los profesores desconocen la construcción de la prueba o diagrama, además de

que muestran poco dominio de la aprehensión operatoria de las figuras y subfiguras¹ que conforman las *Pruebas sin palabras*, por lo que se decidió investigar qué problemas surgen en el tratamiento de la figura geométrica en construcciones y en el proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría.

ASPECTOS TEÓRICOS

Se presentan los aspectos teóricos considerados para explicar las dificultades encontradas en el trabajo de los profesores en esta investigación.

REGISTRO FIGURAL

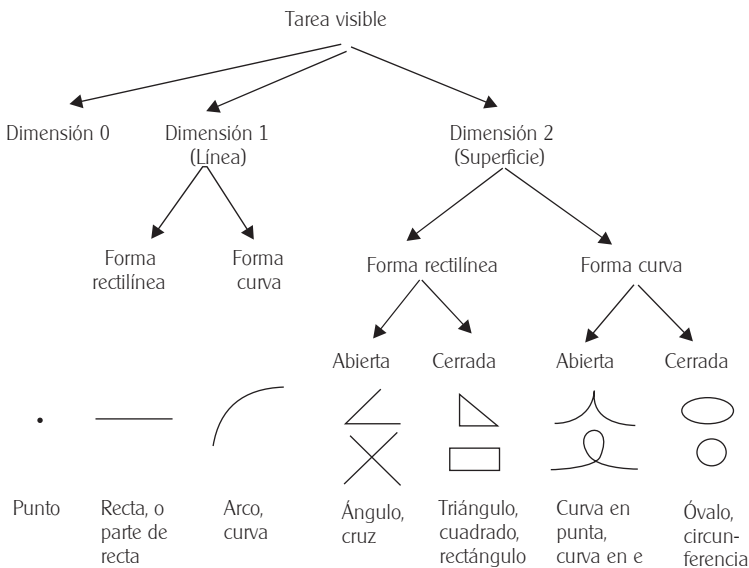
Son dos los registros que se desarrollan en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. El **registro figural** para designar las figuras y sus propiedades y el **registro de la lengua natural** para enunciar las definiciones, los teoremas, las hipótesis... Y en geometría, a diferencia de otras disciplinas de la matemática, “es necesario que los tratamientos figurales y discursivos se efectúen simultáneamente y de manera interactiva” (Duval, 1999, p. 147). Al ser la figura geométrica el objetivo de nuestra investigación, nos concentraremos en el figural.

Duval señala que, para poder tener acceso a los diferentes tratamientos matemáticos pertinentes en el registro figural, o registro de las figuras geométricas, se debe hacer un análisis semiótico relativo a la determinación de las unidades de base constitutivas, las posibilidades de su articulación en figuras y la modificación de las figuras obtenidas, tales tratamientos “son importantes, puesto que su ejecución es lo que permite a las figuras su función heurística” (Duval, 1999, p. 148).

Los elementos constitutivos de una figura son dos: el dimensional y el cualitativo. El dimensional toma valores de: cero (un punto), uno (una línea) y dos (un área). Sólo hay una variable visual cualitativa, la de forma, con valores: rectilínea (abierta o cerrada) y curva (abierta o cerrada). La combinación de estas dos variaciones permite definir las unidades figurales elementales para el registro de las representaciones geométricas.

¹ Una subfigura puede ser o bien una unidad figural elemental de dimensión 2, o bien un agrupamiento de unidades figurales elementales de dimensión 2, que es resultado de una división de la figura que depende de las necesidades de un problema propuesto (Duval, 1999, p. 156).

Imagen 1 Unidades figurales elementales



El autor, al hacer un análisis de las figuras geométricas en función de las unidades figurales elementales, llega a las siguientes consideraciones:

- Una figura geométrica es siempre una configuración de al menos dos unidades figurales elementales.
- Las unidades figurales de dimensión 2 se estudian en geometría como configuración de unidades figurales de dimensión 1.
- Un mismo “objeto” matemático puede representarse con unidades figurales diferentes (imagen 1).

Para Duval, las figuras ofrecen un soporte intuitivo en la actividad geométrica, pues permiten la exploración y van más allá de lo que los enunciados conceden. Permiten la conducta de *abducción*, que consiste en la selección de información pertinente que se ha de considerar, es decir, la figura debe mostrar los caminos posibles que lleven a la solución o demostración de algún problema. Para comprender este hecho, se distinguen dos niveles en la aprehensión de las figuras geométricas:

- Operar el reconocimiento de las diferentes unidades figurales que son discernibles en una figura dada; corresponde a la percepción, *aprehensión gestáltica*.
- Efectuar las modificaciones posibles de las relaciones de las partes con el todo de las unidades figurales reconocidas y de la figura dada, *aprehensión operatoria*.

Se distinguen dos operaciones de aprehensión operatoria:

- La reconfiguración, que “consiste en la división de una figura en subfiguras, en su comparación y en su reagrupamiento eventual en una figura de un contorno global diferente” (Duval, 1999, p. 156). Se manifiesta como una operación esencial para una aprehensión matemática de las figuras.
- La puesta en perspectiva, que consiste en “ver ‘en profundidad’ dos unidades figurales de la misma forma y con la misma orientación, pero cuyos tamaños respectivos pueden variar” (Duval, 1999, p. 157).

DIBUJO, FIGURA Y OBJETO GEOMÉTRICO

Un punto crucial en el tratamiento del registro figural es la distinción entre dibujo, figura y objeto geométrico. Para Laborde y Capponi, “la figura geométrica consiste en empatar un objeto teórico dado con todos sus dibujos”, es decir, se define como duplas formadas por dos términos (*objeto geométrico, dibujo que lo representa*). El objeto geométrico pertenece a una teoría geométrica (en nuestro caso, la geometría euclidiana), el dibujo se toma del universo de todos los dibujos posibles del objeto geométrico. Así pues, “la figura geométrica es la relación que se establece entre el objeto geométrico y las posibles representaciones de éste”, dicha relación es establecida por el lector o productor del dibujo y constituye el significado de la figura geométrica asociado por el sujeto. Por tanto, la relación establecida depende de la teoría en la que se desea hacer ésta, de los conocimientos del lector y para qué se establece dicha relación (Laborde y Capponi, 1994, pp. 168-169).

Puesto que un mismo dibujo geométrico puede interpretarse de varias maneras y la percepción participa en la construcción de estas interpretaciones, cuando el lector carece de un dominio teórico que le permita superar la primera lectura perceptiva (Duval, 1988; Mesquita, 1989; Padilla, 1990), estos aspectos percep-

tivos del dibujo pueden influir, para bien o para mal, la lectura geométrica por parte del sujeto, llevándolo por caminos desacertados (en Laborde y Capponi, 1994, p. 171).

Con algunas de las respuestas obtenidas en la siguiente actividad se mostrará la distinción hecha en párrafos anteriores entre dibujo, figura y objeto geométrico.

AB es un diámetro de una circunferencia y C un punto sobre ella. Se traza la cuerda AC y se prolonga hasta D de modo que $AC = CD$, finalmente se traza DB . Explique por qué $DB = AB$.

Así pues, para el enunciado *Explique por qué $DB = AB$* , se obtuvo lo siguiente:

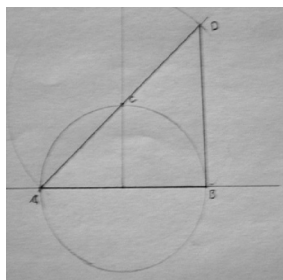


Imagen 2

En las imágenes 2 y 3 se puede apreciar que el lector decide hacer una lectura basada concretamente en el dibujo, al no establecer una relación entre el dibujo y el objeto geométrico de modo que le permita ofrecer una argumentación respaldada en un sistema teórico. Es decir, el lector decide realizar una lectura con base en sus conocimientos y el bajo o confuso dominio que posee de la teoría, lo cual lo limita a lo que puede ver en el dibujo.

Porque \overline{AB} y \overline{BD} son catetos del triángulo rectángulo ADB .

Imagen 3

En cambio, en las imágenes 4 y 5 se puede observar que el lector, gracias a su gran dominio y conocimiento de la teoría, establece la relación entre el objeto geométrico y el dibujo que lo representa, lo que le permite ofrecer una argumentación sustentada teóricamente usando el dibujo como un apoyo heurístico.

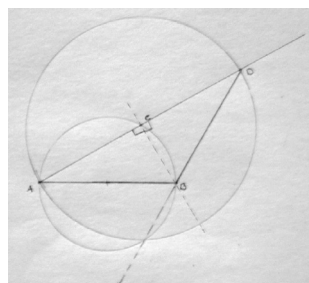


Imagen 4

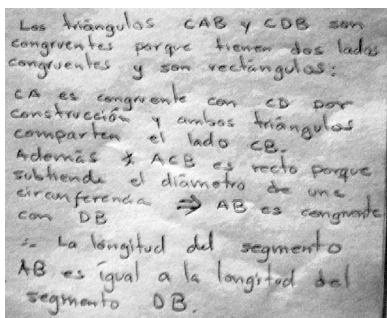


Imagen 5

GEOMETRÍA DE CONSTRUCCIÓN

Pluinage y Rauscher dicen en la geometría de construcción que “una figura efectiva se considera como el resultado de un programa de trazo, o bien preguntándose cómo fue hecha, o bien si se busca reproducirla. Cuando el universo de instrucciones de trazo está bien definido, entonces debe tener lugar una visión precisa que permita responder” (Pluinage y Rauscher, 1986, p. 6).

Así, en la geometría de construcción, se procede en los trazos, se redactan textos y las tareas en esta geometría tienen la estructura *entrada-salida*.

Con base en los dos registros en los que se recibe y produce la información (texto y figura), Rauscher elabora nueve categorías de actividades (cuadro 1).

Cuadro 1

Entrada	Salida
Figura	Figura
Texto	Figura
Texto, Figura	Figura
Figura	Texto
Texto	Texto
Texto, Figura	Texto
Figura	Texto, Figura
Texto	Texto, Figura
Texto, Figura	Texto, Figura

Para esta investigación se utilizan sólo tres categorías (cuadro 2), ya que considerar todas las categorías nos llevaría a tener en cuenta aspectos como los que mencionan Pluvinage y Rauscher:

Para un texto, conviene distinguir según el carácter de permanencia y de generalidad de las afirmaciones formuladas:

- los textos narrativos, donde se identifican el o los sujetos que intervienen y donde se localiza la acción en los tiempos.
- los textos descriptivos, que devuelven de modo general a una situación geométrica, pero sin examen de las relaciones.
- los textos argumentados, que contienen al menos las explicaciones y, para los más elaborados, las justificaciones matemáticas (p. 9).

Ello complicaría el análisis de los datos, restando atención a nuestro objetivo.

Cuadro 2

Entrada	Figura	Texto	Figura
Salida	Figura	Figura	Texto

Además de las tres categorías del cuadro 2, se consideran los cinco criterios propuestos por Rauscher, en los que se describen los diferentes tratamientos de la información que se van a realizar en la geometría de construcción (Rauscher, 1993, p. 95). Son los siguientes:

Primer criterio	Identificar, representar y designar los objetos y las propiedades geométricas. Las figuras se vuelven portadoras de propiedades. En este criterio, estas propiedades permanecen aisladas.
Segundo criterio	Identificar las relaciones ² de una situación geométrica. Las propiedades comienzan a encadenarse y ordenarse. Se tiene conocimiento y se ve el encadenamiento de relaciones que derivan en la obtención de un objeto geométrico.
Tercer criterio	Comprensión de los lazos que pueden existir entre varias propiedades. Hay una aprehensión del juego mutuo de las relaciones. Se debe poder concertar mucha información para realizar una figura que las respete simultáneamente.

² Los lazos o vínculos que se establecen entre las diferentes propiedades geométricas en una situación dada.

- Cuarto criterio** Explicitar la distinción entre el contenido y el estatus de hipótesis o de consecuencia de una afirmación a propósito de una situación geométrica.
- Quinto criterio** Efectuar y redactar demostraciones.

Apoyados en un ejemplo de Rauscher, se muestra a continuación la misma figura (imagen 6) obtenida por dos encadenamientos diferentes de relaciones (Rauscher, 1993, p. 93):

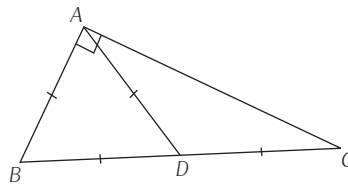


Imagen 6

Un proceso de construcción es el siguiente:

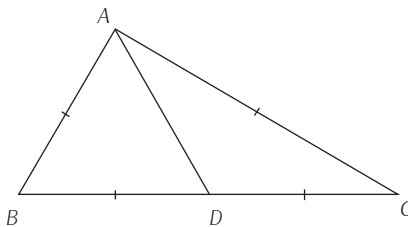


Imagen 7

- La construcción de un triángulo equilátero ABD .
- Localización de un punto C tal que D sea el punto medio del segmento BC .

Obsérvese que los lazos que se establecen entre las propiedades geométricas en esta situación son para saber si el ángulo BAC es recto.

Otro proceso de construcción:

- La construcción de un triángulo ABC rectángulo en A y tal que el ángulo en B sea de 60° .
- Localización del punto medio D del segmento BC .

Con estos lazos, se desea saber ahora si el triángulo ABD es equilátero, AD congruente con BD .

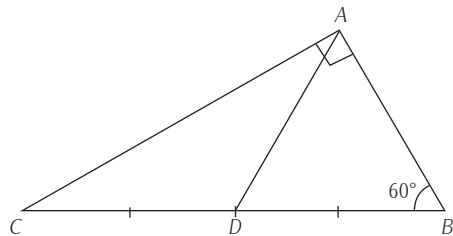


Imagen 8

“Se trata de saber ver las distintas relaciones geométricas que han precedido a su construcción” (Rauscher, 1993, p. 93).

En consecuencia nos cuestionamos:

- ¿Existe una distinción entre dibujo y objeto geométrico por parte del profesor en su quehacer geométrico?
- ¿Transitan los profesores sin dificultad por los cinco criterios que describen los diferentes tratamientos de la información que se van a efectuar en la geometría de construcción?

METODOLOGÍA

La investigación se desarrolla con ocho profesores, dos profesores de secundaria y seis profesores de bachillerato, los profesores de secundaria poseen estudios de Normal con especialidad en Matemáticas, es decir, tienen estudios en la enseñanza de la matemática y además estudios de Maestría en Educación con especialidad en Matemáticas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (IPN), Ciudad de México. Los profesores de bachillerato tienen estudios de nivel licenciatura sin preparación especial para la enseñanza de la matemática: Actuaría, Ingeniería, Administración, Contaduría, Matemáticas, y estudios de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa del mismo centro de investigación.

La selección de las actividades se hizo con base en la categorización que hace Rauscher (1993), esto es, se aplican tres actividades de la categoría Texto-Figura, tres de la categoría Figura-Figura y tres de la categoría Figura-Texto, con la particularidad de que las actividades de las categorías Figura-Texto y Texto-Figura son las mismas, ya que también se desea indagar si hay alguna diferencia en las estrategias usadas por parte de los profesores para un mismo problema dado inicialmente en distintos registros.

Puesto que es de gran importancia no perder todo el trabajo realizado por los profesores, las actividades se imprimieron en hojas pasantes que permiten no perder lo borrado. Las actividades se aplican en una sola sesión con duración aproximada de dos horas. Los instrumentos son un juego de escuadras no graduadas y un compás de precisión; asimismo, junto con las actividades de la categoría Figura-Figura se les entregaron tres archivos, algunos de ellos con trazos preelaborados en el software dinámico Cabri-Géomètre. El objetivo de haber incluido los

archivos en estas actividades fue que el profesor, una vez elaborada su construcción con lápiz y papel, reconstruyera ésta en el software, de tal modo que le sirviera para verificar si su construcción soportaba la prueba del arrastre y, por consecuencia, si su construcción estaba sustentada en propiedades geométricas.

Se muestran sólo dos de las nueve actividades³ y el trabajo de algunos profesores debido a lo extenso que resultaría mostrarlas todas y para cada uno de ellos, por la gran cantidad de información que se generó en esta investigación. Se presentan las actividades más significativas e ilustrativas, de modo que nos permitan exponer la mayor parte de los aspectos que se pretenden documentar en esta investigación, mostrar los cuestionamientos planteados y si el profesor ofrece una estrategia diferente a una misma actividad, pero en registros distintos.

La primera actividad seleccionada fue la siguiente:

Texto-Figura:

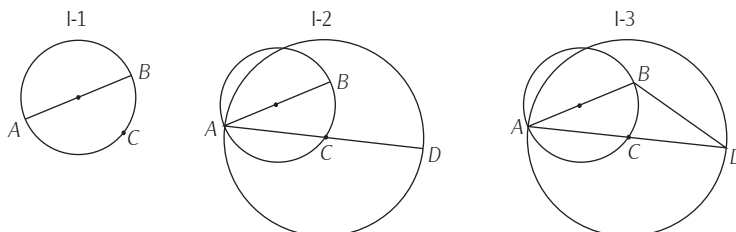
AB es un diámetro de una circunferencia y C un punto sobre ella. Se traza la cuerda AC y se prolonga hasta D de modo que $AC = CD$, finalmente se traza DB . Explique por qué $DB = AB$.

Se espera que el profesor elabore un dibujo o un diagrama considerando hechos como: el trazo del diámetro AB y su circunferencia, la cuerda AC en la circunferencia, la prolongación de ésta hasta que $AC = CD$ y por último el trazo del segmento DB , así como una argumentación que justifique el hecho requerido.

La segunda actividad se muestra a continuación:

Figura-Texto:

A continuación las instantáneas de una construcción con regla y compás



³ Véase el Anexo.

¿Por qué se puede decir que $DB = AB$?

¿Tuvo alguna(s) dificultad(es) en la construcción? Sí, No.

¿Por qué?

Una *lectura* posible de la secuencia que se presenta es la siguiente:

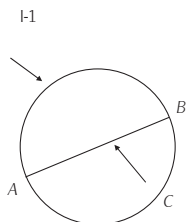


Imagen 9. Se traza un diámetro AB y su circunferencia.

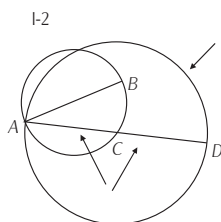


Imagen 10. Ahora se traza una circunferencia de diámetro AD , así $AC = DC$.

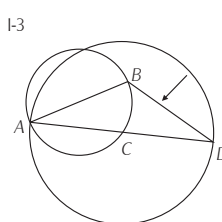


Imagen 11. Por último se traza el segmento BD . ¿Por qué $DB = AB$?

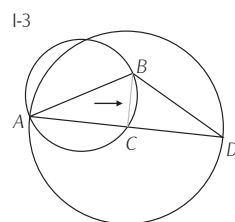


Imagen 12. Para contestar lo requerido, se traza el segmento CB .

El trazo auxiliar que se hace en la secuencia I-3 (imagen 12), permite construir los triángulos ACB y DCB con ángulos rectos en C (ya que el ángulo ACB abarca el diámetro AB) y lados $AC = DC$, los ángulos $ACB = DCB$ y CB lado común, por tanto, los triángulos son congruentes y, en consecuencia, $DB = AB$.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LA ACTIVIDAD TEXTO-FIGURA

Debido a la gran diferencia que existe en la información obtenida, la cual se podrá apreciar en los siguientes párrafos, se identifican dos tipos de profesores: los profesores no expertos (6) y los profesores expertos (2). Esta distinción es obligada, ya que el tratamiento dado a la figura por parte de los profesores expertos es la de un apoyo heurístico que les permitirá indagar sobre la información y la teoría pertinente para ofrecer una justificación adecuada y sustentada a lo requerido, mientras que en los profesores no expertos la figura no siempre influye de manera favorable en la búsqueda de una justificación a lo requerido en las actividades desarrolladas para esta investigación.

En el trabajo que hacen los profesores de la versión Texto-Figura se puede identificar como primera dificultad la construcción del dibujo que satisfaga lo mencionado. Para ilustrar este hecho se presenta el trabajo del profesor B.

En una primera impresión, parece cumplir con la actividad; sin embargo, al hacer el trazo del diagrama, el profesor usa el hecho por justificar para realizarlo, es decir, usa $DB = AB$, que es lo que se debe justificar.

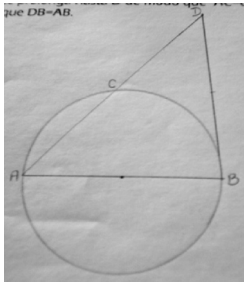


Imagen 13

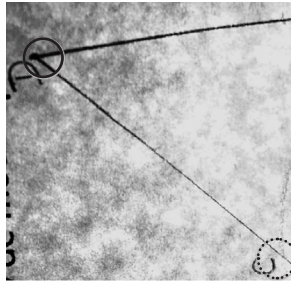


Imagen 14

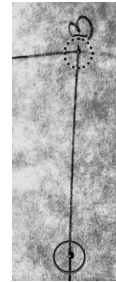


Imagen 15

A simple vista el diagrama puede ser aceptado, ya que están los elementos contenidos en el texto, es decir, hubo identificación de las propiedades geométricas y sus relaciones dada una situación geométrica (imagen 13). Pero, como se indica, la cuerda AC se prolonga hasta D de tal modo que $CD = AC$, por lo que se espera que la marca del compás se ubique en el punto C , punteado (imagen 14), y no en B , punteado (imagen 15). Así pues, al ubicar la marca del compás en B , se puede decir que el profesor B usa la tesis para realizar la construcción del dibujo. Lo que nos hace pensar que hay una confusión entre las hipótesis y la tesis, hecho que se puede confirmar en la argumentación que ofrece para justificar lo requerido.

C es el punto medio de AD ,
 Por lo que AB es simétrico
 a DB

Imagen 16

Como C es punto medio de AD y el profesor da por hecho que $DB = AB$, entonces utiliza la simetría que le permite justificar lo solicitado $DB = AB$.

Otro hecho importante es la confusión o falta de dominio de la teoría requerida en estas actividades por los profesores. Lo mostramos con el trabajo del profesor K .

El profesor K ofrece un trazo acorde con las hipótesis de la sentencia dada (imagen 17). Esto es, traza la circunferencia de diámetro AB , localiza el punto C en la circunferencia, traza la cuerda AC y la prolonga hasta D de tal modo

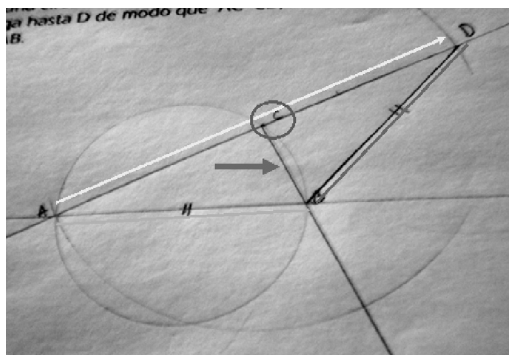


Imagen 17

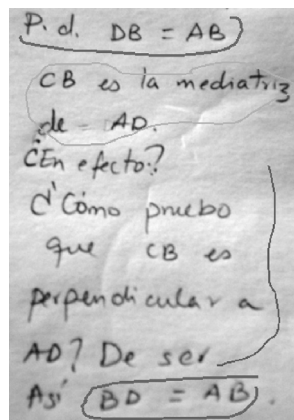


Imagen 18

que $AC = CD$ y traza el segmento DB . Además, hace un trazo auxiliar, de tal manera que el diagrama es de apoyo heurístico, lo cual se refleja en el momento de intentar argumentar una justificación para explicar lo pedido. Observe (imagen 18) que este trazo CB le permite esbozar una línea argumentativa que le dará una justificación; sin embargo, en un primer momento, no tiene clara la definición de mediatriz, que le permitiría la justificación de lo solicitado; en un segundo momento, no puede notar que, con dicho trazo auxiliar, tiene el ángulo recto ACB , por tanto, el profesor no logra dar una justificación a pesar de haber establecido las condiciones para tal hecho.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LA ACTIVIDAD FIGURA-TEXTO

La influencia del dibujo en el trabajo de los profesores también se puede apreciar en la información obtenida de la actividad, versión Figura-Texto que se presenta en los siguientes párrafos.

El profesor K ofrece la siguiente lectura de la secuencia dada.

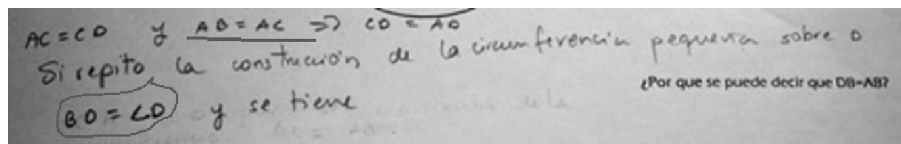


Imagen 19

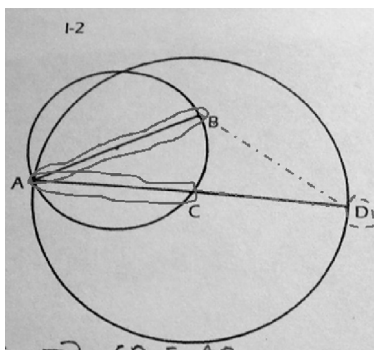


Imagen 20

cultad(es) en la construcción? SI, NO.
 NO. solo en la justificación

Imagen 21

Como se puede apreciar en las imágenes 19 y 20 el profesor considera que el diámetro AB es congruente con la cuerda AC , lo cual confirma cuando dice que, si se repite el trazo de la circunferencia en D , se tiene que el diámetro BD es congruente con el segmento CD .

Hay identificación de las unidades figurales, pero hay una confusión en el papel que éstas desempeñan en el todo, es decir, hay una identificación figural de dimensión 1, pero sólo la circunferencia de dimensión 2. Además, se da el reconocimiento de la circunferencia de diámetro BD , que no es visible gráficamente; sin embargo, el profesor ha basado su argumentación en un hecho que él ve en el diagrama.

Por último, el profesor B basa su justificación en la verificación que hace al dibujar con el compás la circunferencia que le permite concluir que $AB = DB$.

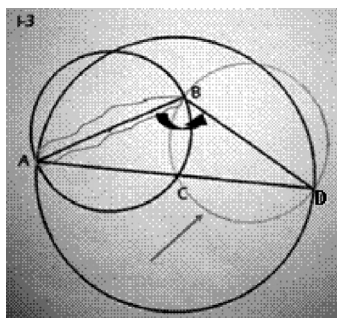


Imagen 22

¿Por que se puede decir que $DB=AB$?
 De acuerdo a la secuencia estamos partiendo del diámetro AB y como el círculo de diámetro AD se genero a partir de AB por consecuencia el segmento BD es la misma medida de AB

Imagen 23

Observe en la imagen 22 que el profesor construye la circunferencia que puede describir el segmento DB de tal modo que le permite ofrecer la argumen-

tación que se muestra en la imagen 23, así se tiene también una verificación gráfica por parte del profesor.

Por tanto, como se ha podido apreciar en los párrafos anteriores, en ciertos momentos los profesores dejan ver en su trabajo la confusión entre las hipótesis y la conclusión, haciendo uso de ésta tanto para la construcción del diagrama que representa la situación geométrica como para la justificación de ésta. Se observa la identificación de las unidades figurales del registro figural, pero en ciertos momentos sólo las de dimensión cero y uno. En algunos momentos resulta contundente la influencia del dibujo en la justificación que ofrece el profesor, pues en algunos casos es el sustento de ésta; así pues, no hay una clara distinción entre dibujo y objeto geométrico que le permita establecer la dupla (*objeto geométrico, dibujo que lo representa*) y, en consecuencia, la figura geométrica, lo que le permitiría identificar toda la información inmersa a fin de poder establecer las relaciones pertinentes entre éstas que lleven a la justificación del hecho requerido.

Como ya se comentó en la metodología, también se desea indagar sobre las distintas estrategias que podría ofrecer el profesor para una misma actividad, pero presentada en distintos registros, para ello, tenemos el trabajo del profesor H.

La primera estrategia del profesor H, ofrecida en la versión Texto-Figura, ofrece dos justificaciones. Una se basa en una verificación gráfica con apoyo del compás y la otra, en una justificación con sustento teórico.

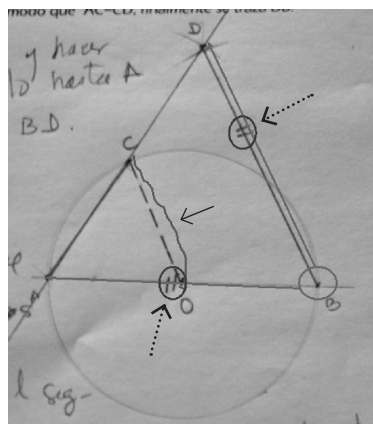


Imagen 24

1) Al tomar mi compás y hacer centro en B y abrirlo hasta A observo que $AB = BD$.

Imagen 25

2) El triángulo AOC es isósceles ya que $AO = OC$ son radios de la circunferencia. C es punto medio de el segmento AB y O es punto medio del segmento AB. Los hechos anteriores y según el teorema de Tales los triángulos AOC y AOB son semejantes de manera que el triángulo AOB es isósceles entonces $AB = OB$ que son los correspondientes a los lados $AO = OC$ del triángulo AOC.

Imagen 26

En la primera estrategia, como lo dice el profesor, se apoya totalmente en el compás de tal manera que le permite verificar que $AB = DB$ (imagen 25).

La segunda estrategia (imagen 26):

Profesor H: El triángulo AOC es isósceles, ya que $AO = OC$ son radios de la circunferencia. C es punto medio del segmento AD y O es punto medio del segmento AB . Por los hechos anteriores y según el teorema de Thales, los triángulos AOC y ABD son semejantes de manera que el triángulo ABD es isósceles, entonces $AB = BD$ que son los correspondientes a los lados AO y OC del triángulo AOC .

Observe que el profesor usa el diagrama como apoyo heurístico, lo que le permite ofrecer una justificación por medio del trazo auxiliar OC (señalada con una flecha en la imagen 24). Este trazo es fundamental, ya que le permite visualizar el teorema de Thales y establecer el resto de su justificación. Hay además indicación gráfica de lo que se desea demostrar (flecha punteada en la imagen 24). Se aprecia un claro dominio de la teoría; además, el dibujo se revela como un gran apoyo heurístico que lleva al profesor a plantear una línea argumentativa para justificar lo requerido.

En la versión Figura-Texto de la actividad, el profesor nos ofrece una estrategia distinta a la ya presentada.

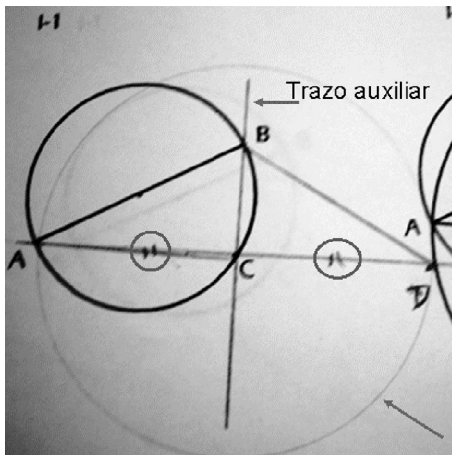


Imagen 27

Los triángulos
 $A CB$ y $C BA$ son
 congruentes porque
 $AC = CD$ (son radios,
 comparten BC y el ángulo
 ACB es recto. entonces

Imagen 28

por LAL. los triángulos
 son congruentes. y $AB = BD$

Imagen 29

Primero debemos mencionar que el profesor parte de la tercera instantánea mostrada en la actividad, lo que le permite identificar las propiedades geométricas y las relaciones que le permiten reconocer el trazo auxiliar que lo lleva a

identificar los triángulos con ángulos rectos congruentes y así ofrecer una justificación satisfactoria. Observe que el profesor hace marcas especiales para indicar cierta información en los diagramas.

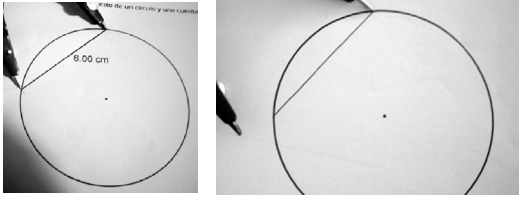
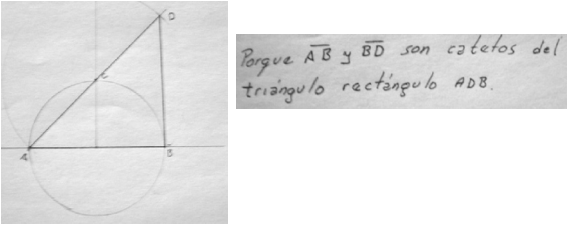
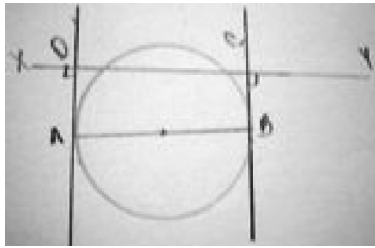
Mientras que, en la versión Texto-Figura, la estrategia se basa en la semejanza de triángulos debido al diagrama que esboza, aquí en Figura-Texto, la estrategia se fundamenta en la congruencia de triángulos generados por el trazo auxiliar que dibuja el profesor. Por tanto, se puede apreciar una clara identificación de las unidades figurales, la distinción entre dibujo y objeto geométrico que le permiten establecer la dupla (*objeto geométrico, dibujo que lo representa*) y, en consecuencia, la figura geométrica, un claro dominio de la teoría que le permite desempaquetar la información pertinente y relacionar ésta para así ofrecer una justificación de lo requerido.

CONCLUSIONES

En el análisis de las actividades, se ha podido identificar la influencia del dibujo en una situación geométrica dada, informado ya por Padilla (1990), lo cual se puede apreciar en el trabajo del profesor K al decir que $AB = AC$, donde AB es diámetro y AC es cuerda. Se ha identificado también que el diagrama puede representar un papel heurístico o, por el contrario, constituir un obstáculo en una situación geométrica, Mesquita y Rauscher (1988). Un ejemplo de esto se puede observar en el trabajo del profesor H, donde, mediante trazos auxiliares, el dibujo desempeña un papel heurístico que le permite trazar una línea argumentativa.

Además, se puede observar la gran dificultad que tienen los profesores para identificar las unidades figurales de dimensión 2, es decir, hay un reconocimiento de las unidades figurales de dimensión 1 de una en una, pero no hay un reconocimiento en su conjunto que lleve a la identificación de las de dimensión 2 para así extraer la información que ésta puede aportar al profesor, ni tampoco los trazos auxiliares pertinentes que desencadenen la extracción de tal información en la búsqueda de lo solicitado. Puesto que las mismas actividades se presentan tanto en la categoría Texto-Figura como en la categoría Figura-Texto, en algunos casos se pueden presentar estrategias distintas, como se mostró en el trabajo del profesor H.

A continuación se presenta una clasificación de las respuestas de algunos profesores según las categorías propuestas por Rauscher (1993):

Criterios	
<p>1. Identificar, representar y designar los objetos y las propiedades geométricas.</p>	<p>Actividad Figura-Figura-2. La respuesta del profesor T se clasifica en este criterio, ya que no se alcanza a identificar, representar y designar los objetos ni las propiedades geométricas que permitan realizar un trazo satisfactorio. Al no haber marca del compás, se asume que fue hecha <i>a ojo</i>.</p> 
<p>2. Identificar las relaciones de una situación geométrica.</p>	<p>Actividad Texto-Figura-1. La respuesta del profesor A se clasifica en este criterio y, en algunos momentos, en el tercero, ya que hay identificación de relaciones; sin embargo, éstas se hacen basándose en la gran influencia del dibujo prototipo elaborado por el profesor.</p> 
<p>3. Comprensión de los lazos que pueden existir entre varias propiedades.</p>	<p>Actividad Texto-Figura-2. La respuesta del profesor T se clasifica en este criterio, ya que, aunque hay una identificación de los objetos y propiedades geométricas, así como de las relaciones que le permiten esbozar un diagrama, éste no está completo, por lo cual no hay una distinción del hecho por demostrar.</p> 

Criterios	
<p>4. Distinción entre el contenido y el estatus de hipótesis o de consecuencia de una asección.</p>	<p>Actividad Texto-Figura-2. La respuesta del profesor K se clasifica en este criterio, ya que hay identificación de objetos y propiedades geométricas, así como de las relaciones que permiten esbozar un diagrama e incluso la distinción de estatus de hipótesis o consecuencia; sin embargo, en ciertos momentos hay poca certeza al tratar de ver lo que se requiere justificar o al no encontrar los elementos que le permitan tal hecho, no necesariamente en el diagrama; según el diagrama del profesor, no se ve la igualdad requerida en la actividad, lo cual crea una gran confusión en el profesor. Las respuestas de los profesores D y AC también se clasifican en este criterio.</p> <div data-bbox="410 582 695 748" data-label="Image"> </div> <div data-bbox="410 756 751 838" data-label="Image"> </div>
<p>5. Efectuar y redactar demostraciones.</p>	<p>Actividad Figura-Figura-1. Las respuestas de los profesores H y AA se clasifican en este criterio, ya que en ellas se puede apreciar un amplio dominio de la teoría, y de los elementos figurales de la figura geométrica, así como una distinción clara entre el dibujo, la figura geométrica y el objeto geométrico, haciendo del diagrama geométrico una herramienta heurística que les permite vislumbrar los elementos pertinentes para la elaboración de una justificación o una construcción geométrica. Por lo anterior, los profesores se mueven con dominio por los cinco criterios en cualquiera de las actividades aplicadas en la investigación. En las imágenes se aprecian esbozos de exploración para ofrecer una construcción geométrica con sustento teórico.</p> <div data-bbox="412 1231 667 1415" data-label="Image"> </div> <div data-bbox="726 1231 1030 1421" data-label="Image"> </div>

Las respuestas de los profesores A, AC, B, D, K y T⁴ oscilan entre los primeros cuatro criterios debido a la gran influencia que ejerce el dibujo geométrico en su proceso de búsqueda de los elementos pertinentes para la elaboración de una justificación o una construcción geométrica, así como el bajo dominio de la teoría relacionada con las actividades aplicadas en esta investigación.

Se puede decir que la mayoría de los profesores que participaron en esta investigación presentan menor dificultad en la construcción que en el tratamiento del dibujo o diagrama en una situación geométrica dada. Se aprecia una clara dificultad en la identificación de los elementos pertinentes del dibujo, así como la información que se desprende de éstos de modo que se relacione y lleve así a la generación de una línea argumentativa que permita dar una justificación al hecho requerido.

En general, las respuestas de los profesores no expertos se ubican entre los cuatro primeros criterios, ya que, en momentos, se puede apreciar la identificación de los objetos y propiedades geométricas, pero no con sus relaciones y la comprensión de éstas, en otros instantes sí existe esta comprensión, sin embargo, no dominan la teoría que les permita llegar al quinto criterio y, por último, podemos apreciar que, debido a la influencia del dibujo, se identifican y establecen relaciones endebles, por lo que las respuestas pueden ubicarse en el primer criterio.

Sin embargo, las repuestas de los profesores expertos se ubican en el último criterio, ya que se puede apreciar un gran dominio de los cuatro anteriores, lo que les permite ofrecer la justificación al hecho requerido con claro sustento teórico y el uso del diagrama como herramienta heurística, así como el uso de trazos auxiliares.

Por último, presentamos aquí algunos comentarios generales de las respuestas de los profesores a todas las actividades.

Es importante mencionar que, en las actividades, no quedó explícito que el profesor tuviera que elaborar un diagrama usando estrictamente los instrumentos dados; no obstante, todos los profesores elaboraron o trataron de hacer uno. Hubo quien realizó los trazos haciendo uso de los instrumentos dados, mientras que otros profesores no los utilizaron y realizaron trazos a ojo.

Algunos profesores hicieron trazos auxiliares distinguiéndolos de los otros trazos con líneas punteadas y muy pocos profesores utilizaron marcas especiales para destacar algunos elementos relevantes del dibujo.

⁴ Los profesores A, AC, B, D, K y T pertenecen al grupo de los no expertos, mientras que H y AA pertenecen al grupo de los expertos; A y AC son profesores de secundaria.

En algunos casos, los profesores no lograron hacer la distinción entre el dibujo y la figura geométrica, por lo cual éste influyó en su argumentación al tratar de justificar el hecho requerido.

Aunque todos los profesores lograron distinguir algunas propiedades geométricas y las relaciones que en conjunto les permitían ofrecer un diagrama satisfactorio, no sucedió lo mismo en el proceso de justificación. Hubo una gran dificultad por parte de los profesores para ofrecer un argumento, no se logró desempaquetar del diagrama las relaciones pertinentes que en sinergia los hubiera llevado a esbozar una justificación satisfactoria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alarcón, J. *et al.* (1999), *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria*, México, Secretaría de Educación Pública.
- Bishop, A. (1992), "Implicaciones didácticas de la investigación sobre la visualización", en E. Sánchez (ed.), *Antología en Educación Matemática*, México, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, pp. 29-42.
- Duval, R. (1988), "Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruente", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Estrasburgo, IREM de Strasbourg, núm. 1, pp. 57-74.
- (1999), "Figuras geométricas y discurso matemático", *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, trad. de Myriam Vega Restrepo, Cali, Colombia, Peter Lang y Universidad del Valle, pp. 147-174. (Trabajo original publicado en 1995.)
- Guirette, R. (2006), *Pruebas sin Palabras. Un estudio de casos con profesores de bachillerato*, tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Gutiérrez, A. y A. Jaime (1996), "Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio", en J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, Granada, Comares, pp. 143-170.
- Laborde, C. (1994), "Las relaciones entre lo visual y lo geométrico en un EIAO", traducción de "Les rapports entre visuel et géométrique dans un EIAO VII", en *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, París, Francia, 1993, Grenoble, La Pensée Sauvage, Collection Bibliothèque de didactique des mathématiques, pp. 1-9.

- Laborde, C. y B. Capponi (1994), "Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 14, núm. 12, pp. 165-210.
- Mesquita, A. L. (1989), "Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 20, pp. 55-77.
- Mesquita, A. L. y J-C. Rauscher (1988), "Sur une approche d'apprentissage de la démonstration", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Estrasburgo, IREM de Strasbourg, núm. 1, pp. 95-109.
- Moreina, S. y S. Scaglia (2003), "Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría", *Educación Matemática*, México, Santillana, vol. 15, núm. 1, pp. 1-19.
- Padilla, V. (1990), "Les figures aident-elles à voir en géométrie?", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Estrasburgo, IREM de Strasbourg, núm. 3, pp. 223-252.
- Pluinage, F. y J-C. Rauscher (1986), "La géométrie mise à l'essai", *Petit X*, Estrasburgo, IREM de Strasbourg, núm. 11, pp. 5-36.
- Programa de Estudios de Matemáticas. Semestres I al IV. Área Matemáticas*, Universidad Nacional Autónoma de México, Colegio de Ciencias y Humanidades, recuperado de la página electrónica <http://www.cch.unam.mx/plandeestudios/asignaturas/matemáticas/mateiaiv.pdf>
- Rauscher, J-C. (1993), *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes. Le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège*, Tesis de Doctorado, ULP Strasbourg.

ANEXO

ACTIVIDADES DE LA CATEGORÍA TEXTO-FIGURA

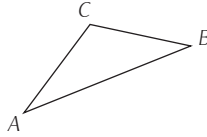
Texto-Figura-1. AB es un diámetro de una circunferencia y C un punto sobre ella. Se traza la cuerda AC y se prolonga hasta D de modo que $AC = CD$, finalmente se traza DB. Explique por qué $DB = AB$.

Texto-Figura-2. AB es un diámetro de una circunferencia. Se traza la secante XY y las perpendiculares AD y BC a ella, sabiendo que CB corta a la circunferencia en E, explique por qué $CE = AD$.

Texto-Figura-3. Una secante RS corta a dos rectas paralelas AB y CD en E y F, respectivamente. Explique por qué las bisectrices del ángulo BEF y el ángulo DFE son perpendiculares.

ACTIVIDADES DE LA CATEGORÍA FIGURA-FIGURA

Figura-Figura-1. Aquí se muestra un triángulo ABC cuyos vértices son puntos medios de otro triángulo. Construya este otro triángulo



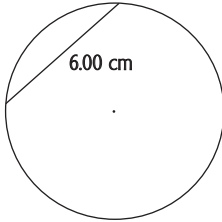
Reproduzca su construcción en el archivo Figura-Figura-F.

¿Tuvo alguna(s) dificultad(es) en la construcción?

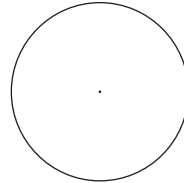
Sí, No

¿Por qué?

Figura-Figura-2. Aquí se muestra un diagrama que debe construir compuesto por un círculo y una cuerda.



El esquema se inicia trazando el círculo.



Reproduzca su construcción en el archivo Figura-Figura-E.

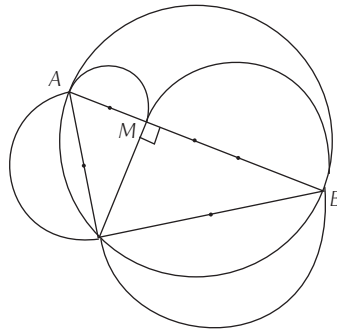
¿Tuvo alguna(s) dificultad(es) en la construcción?

Sí, No

¿Por qué?

Figura-Figura-3.

Aquí se muestra un diagrama que debe construir.



Reproduzca su construcción en el archivo Figura-Figura-D.

¿Tuvo alguna(s) dificultad(es) en la construcción?

Sí, No

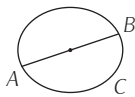
¿Por qué?

ACTIVIDADES DE LA CATEGORÍA FIGURA-TEXTO

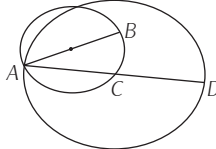
Figura-Texto-1.

A continuación, se muestran las instantáneas de una construcción con regla y compás.

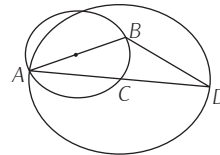
I-1



I-2



I-3



¿Por qué se puede decir que $DB = AB$?

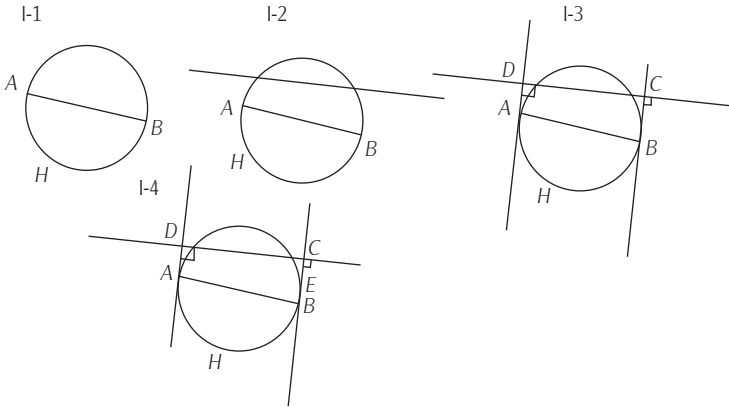
¿Tuvo alguna(s) dificultad(es) en la construcción?

Sí, No

¿Por qué?

Figura-Texto-2.

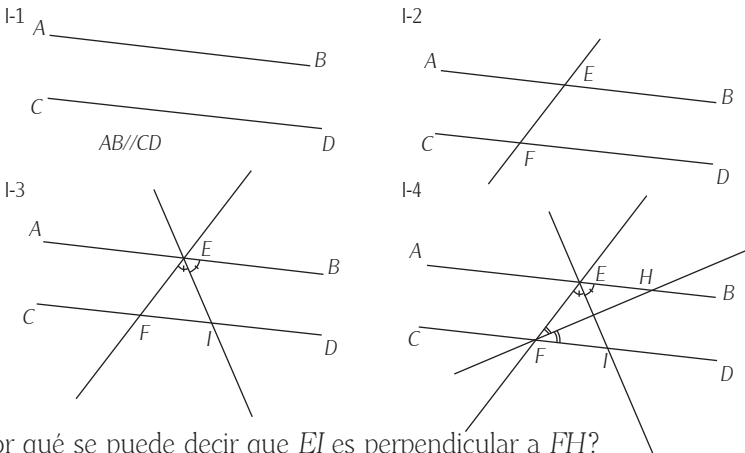
A continuación se muestran las instantáneas de una construcción con regla y compás.



¿Por qué se puede decir que $CE = AD$?
 ¿Tuvo alguna(s) dificultad(es) en la construcción? Sí, No
 ¿Por qué?

Figura-Texto-3.

A continuación las instantáneas de una construcción con regla y compás.



¿Por qué se puede decir que EI es perpendicular a FH ?
 ¿Tuvo alguna(s) dificultad(es) en la construcción? Sí, No
 ¿Por qué?

DATOS DE LOS AUTORES

Rebeca Guirette

Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
rguirette@cinvestav.mx

Gonzalo Zubieta

Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
gzubieta@cinvestav.mx