El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios

Cecilio Fonseca, Marianna Bosch y Josep Gascón

Resumen: El trabajo de la técnica, considerado como una de las dimensiones de la actividad matemática, tiene un papel esencial en el desarrollo y completación progresiva de la práctica matemática escolar. Entre sus funciones destacan: la articulación del proceso de estudio y la creación de nuevos objetos matemáticos. Pero estas funciones didácticas deben entenderse a partir de su relación con el resto de las dimensiones de la actividad matemática y, muy en especial, con la exploración de nuevas tareas y la constitución del entorno teórico que toda práctica matemática requiere. En este trabajo nos centraremos en la práctica matemática escolar en torno a la división sintética (denominada "regla de Ruffini" en España) y la factorización de polinomios. Mostraremos una manera posible de ampliarla y completarla progresivamente tomando el trabajo de la técnica como instrumento esencial.

Palabras clave: momento del trabajo de la técnica, Teoría Antropológica de lo Didáctico, regla de Ruffini, organización matemática local relativamente completa.

The timing of the work of the technique in the completion of mathematical organizations: the case of synthetic division and factoring of polynomials

Abstract: According to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), the "work of the technique" is considered as a dimension of mathematical activity that plays a crucial role in the development and progressive completion of school mathematical practice. Among its functions, we can highlight its capacity to connect the study process and to create new mathematical objects. However, these didactic functions have to be considered in relation to the other dimensions of mathematical activity and, more especially, to the exploration of new types of tasks and the constitution of an appropriate theoretical environment. This paper focuses on the school mathematical practice around "Ruffini's rule", a technique for polynomial division and factoring. We will show a specific way of enlarging and progressively completing this rule, considering the "work of the technique" as an essential tool.

Fecha de recepción: 15 de enero de 2009.

Keywords: work of the technique, Anthropological Theory of the Didactic (ATD), Ruffini's rule, relatively complete local mathematical organisation.

INTRODUCCIÓN: ELEMENTOS DE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

El Programa Epistemológico de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (Gascón, 1998 y 1999) surgió de la convicción de que el *origen del problema* de la Educación Matemática está en las propias matemáticas. El nacimiento de este Programa de Investigación[1] constituye una respuesta a la insuficiencia manifiesta de los modelos epistemológicos de las matemáticas, incluidos los modelos elaborados por la epistemología clásica de las matemáticas, para abordar el Problema de la Educación Matemática. El cuestionamiento de la transparencia de lo "matemático" y la asunción inequívoca de que *el misterio está en las propias matemáticas*, implica que se tome la *actividad matemática* como objeto primario de estudio, como nueva "puerta de entrada" del análisis didáctico.

Para analizar la actividad matemática institucionalizada, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD), situada dentro del Programa Epistemológico, empieza proponiendo un modelo epistemológico general de las matemáticas que describe el saber matemático en términos de *organizaciones matemáticas institucionales* (Chevallard, 1999, 2002a y 2002b). Una organización matemática (en adelante OM) surge siempre como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones. No se dice lo que *es* una OM, pero se da un esbozo de su estructura postulando que está constituida por cuatro componentes principales: *tipos de tareas, técnicas, tecnologías* y *teorías*. Si ponemos el énfasis en las relaciones dinámicas que se establecen entre dichos componentes a fin de llevar a cabo la actividad matemática necesaria para responder a las cuestiones problemáticas iniciales, entonces aparecen dos caras inseparables: la práctica matemática o "*praxis*" $[T/\tau]$, formada por las *tareas*, T, y las *técnicas* matemáticas, τ; y el "*logos*" $[\theta/\Theta]$, constituido por el *discurso matemático* que justifica e interpreta dicha práctica y que estructuramos en dos niveles: la *tecnología*, θ, que hace referencia directa a la práctica y la *teoría*, Θ, que constituye un segundo nivel de justificación

[1] Se suele considerar que los trabajos iniciales de Guy Brousseau y, en especial, los que tratan sobre la "epistemología experimental", constituyen el germen del Programa Epistemológico. En Brousseau (1998) se encuentra una recopilación de sus trabajos publicados entre 1970 y 1990.

de la práctica (o tecnología de la tecnología). Al unir las dos caras inseparables de la actividad matemática, se obtiene la noción de *praxeología matemática*.

Las organizaciones (o praxeologías) matemáticas más elementales se llaman *puntuales* y están constituidas alrededor de lo que en determinada institución es considerado como un único tipo de tareas. Cuando una OM se obtiene por integración de cierto conjunto de OM *puntuales*, tales que todas ellas aceptan un mismo discurso tecnológico θ, diremos que tenemos una OM *local* caracterizada por dicha tecnología θ y la designamos mediante $OM_\theta = [T/\tau/\ \theta/\ \Theta]$. Aunque en la TAD se habla también de OM "regionales" y "globales", en este trabajo no iremos más allá del análisis de las OM "locales" y, más concretamente, de la noción de OM local *relativamente completa*.

Pero, ¿qué se necesita para elaborar una OM? Esto es, ¿cuáles son las condiciones que posibilitan el desarrollo de las actividades matemáticas institucionalizadas? O, en otros términos, ¿cuáles son los medios de que dispone el matemático investigador o el alumno de matemáticas para llevar a cabo una actividad matemática que cristalice en una OM que responda a ciertas cuestiones?

Ante todo, hay que decir que tanto el investigador como el alumno, cada uno en su nivel, utilizan *técnicas didácticas*, esto es, *técnicas de estudio*, cuya eficacia depende de su integración en un proceso, el proceso *de estudio* de una OM en el seno de una institución. La TAD completa entonces el modelo epistemológico del saber matemático antes descrito con un modelo de la *actividad didáctica* o *actividad de estudio* (de las matemáticas). Se trata de la *teoría de los momentos didácticos*[2] que puede considerarse como un modelo funcional del proceso de estudio de las OM. Paralelamente a la noción de OM, surge así la noción de *organización* (o *praxeología*) *didáctica*, con sus dos caras: "praxis" –formada por *tareas* y *técnicas didácticas*– y discurso razonado o "logos" sobre dicha práctica –formado por *tecnologías* y *teorías didácticas*–.[3]

Resulta, en definitiva, que para elaborar una OM_θ debemos utilizar una organización didáctica. Aunque, en realidad, la frontera entre lo matemático y lo didáctico no está establecida de una vez por todas, puesto que históricamente se ha producido una matematización creciente de lo didáctico y, muy en particular,

[2] La teoría de los *momentos didácticos* propone seis momentos o *dimensiones* del proceso de estudio. Éstos reciben, respectivamente, los nombres siguientes: *del primer encuentro, exploratorio, del trabajo de la técnica, tecnológico-teórico, de la institucionalización* y *de la evaluación* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, y Chevallard, 1999).

[3] Una descripción más detallada de este modelo se encuentra en Chevallard (1999); Chevallard, Bosch y Gascón (1997), Gascón (1998) y Bosch y Chevallard (1999).

de las técnicas de estudio de las matemáticas. Si, en principio, la actividad de estudio puede ser considerada como *emergente de una* OM (en cuanto actividad dirigida a responder las cuestiones problemáticas que la OM permite plantear), también debe considerarse como *productora de saber matemático* y, por tanto, de ciertas OM. Lo matemático y lo didáctico aparecen así como dos dimensiones de la realidad doblemente interdependientes. Lo didáctico, esto es, lo relativo al estudio de las matemáticas, supone la existencia de las OM, pero contribuye a su producción. Las OM son, a la vez, el *objeto* y el *producto* de la actividad de estudio.

En este trabajo utilizaremos los instrumentos que proporciona la TAD para analizar, en primera instancia, la OM escolar (empírica) en torno a la división sintética de polinomios (que, en adelante, denominaremos "regla de Ruffini") y para proponer un posible desarrollo y completación progresiva de dicha OM.

¿EN QUÉ CONSISTE LA COMPLETACIÓN PROGRESIVA DE UNA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA?

En sendos trabajos anteriores (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004, y Fonseca, 2004) hemos caracterizado las *discontinuidades matemáticas y didácticas* entre la Secundaria y la Universidad. Hemos mostrado en qué sentido las organizaciones matemáticas (OM) que se estudian en Secundaria son *puntuales*, *rígidas* y *poco articuladas* entre sí. Al mismo tiempo, hemos puesto de manifiesto la ausencia de una actividad matemática universitaria que retome las OM que se estudian en Secundaria, las desarrolle adecuadamente, las articule y las integre en otras OM más amplias y completas. Así, la *incompletitud* de las OM *locales* de la enseñanza secundaria no se remedia en la Universidad (a pesar de disponer de los instrumentos para hacerlo), lo que ayuda a explicar, al menos en parte, las citadas *discontinuidades* que aparecen en el paso de la Secundaria a la Universidad. En dichos trabajos también se describían las condiciones que debe cumplir el estudio escolar de las matemáticas (ya sea en Secundaria o en la Universidad) para que sea posible *articular* las OM *puntuales* en OM *locales* relativamente completas.

En el presente trabajo esquematizaremos brevemente un ejemplo de dicho proceso de completación. Partiremos de la OM escolar en torno a la regla de Ruffini, tal como aparece tradicionalmente en la enseñanza secundaria española, esto es, como una OM puntual, rígida y aislada, y mostraremos que es posible llevar a cabo un *desarrollo suficiente de la técnica* inicial en una *dirección adecuada* para provocar, en primera instancia, la ampliación de los tipos de problemas que pueden abordarse. Veremos que, a medida que se vaya desarrollando la actividad matemática, aparecerán también nuevas necesidades didácticas y nuevas necesidades matemáticas.

a) Nuevas necesidades *didácticas,* porque será preciso *institucionalizar* progresivamente aquellos objetos que deben ser considerados como "matemáticos", *evaluar* la calidad de los componentes de las sucesivas OM que van apareciendo como consecuencia del desarrollo de la actividad y *explicitar* la "razón de ser" de éstas. Así, aunque este proceso podría interpretarse simplemente como el desarrollo de una técnica –que seguiremos llamando "de Ruffini"– para aumentar progresivamente su "resistencia" a las variaciones de las condiciones de aplicabilidad y para ampliar su dominio de validez, veremos que, en realidad, el proceso matemático-didáctico que presentamos permite construir ampliaciones sucesivas de la OM inicial.
b) Nuevas necesidades *matemáticas,* puesto que será preciso describir, justificar e interpretar las variaciones de la técnica inicial –lo que puede requerir la utilización de nuevas nociones y nuevas proposiciones– y determinar el alcance de las nuevas técnicas, su "costo" (en términos de número de operaciones necesarias para llevarla a cabo), su ámbito de aplicabilidad y sus limitaciones.

Tendremos, en definitiva, como culminación de este proceso, el germen de lo que hemos denominado una OM *local relativamente completa* (cuya caracterización resumiremos brevemente en lo que sigue) y cuyo estudio debería poder articularse con determinadas OM que se estudian actualmente en la Universidad. En nuestro caso deberíamos integrar la OM en torno a la regla de Ruffini en la OM más amplia en torno al *estudio de funciones polinómicas.*

La caracterización de una OM local relativamente completa (Fonseca, 2004) presenta dos caras inseparables que se refieren, respectivamente, al *proceso de construcción* o reconstrucción de la propia OM local, por un lado, y al *producto* que resulta de dicha construcción, por el otro. Hemos caracterizado las condiciones que se requieren para que la construcción dé origen a una OM local relativamente completa en términos de los *momentos didácticos* o dimensiones de la actividad matemática (Chevallard, 1999), mientras que, para analizar el grado de completitud (siempre relativa) de la OM local producida, utilizaremos un conjunto de *indicadores*. Sólo a partir del análisis de conjunto de ambas caras inseparables (proceso y producto) podremos determinar el grado de completitud de la OM local.

Características del proceso de construcción de una OM local relativamente completa en términos de las dimensiones o momentos del proceso de estudio

El diseño y la gestión escolar del proceso de estudio de una OM plantea un problema de *ingeniería didáctica* que debe abordarse de tal modo que permita hacer vivir de manera integrada todos los momentos o dimensiones de la actividad matemática. El grado de completitud de la OM local resultante (o producto) dependerá de la medida en que el proceso de construcción de la misma (también llamado *proceso de estudio*) presente las siguientes características:

D0. A lo largo del proceso de estudio de la OM local se debe potenciar la necesidad de retomar tareas, técnicas, nociones y conceptos de aquellas OM (estudiadas anteriormente o no) que contienen los materiales necesarios para construir la OM local en cuestión.

D1. El proceso de construcción de la OM local debe contener diversos *momentos* del *primer encuentro* (que no se agotan en un único periodo de tiempo) con un tipo de tareas matemáticas T_q asociado a una cuestión matemática q "con sentido" y con suficiente poder generador.

D2. El proceso de reconstrucción de la OM local debe integrar y gestionar *momentos exploratorios* en los que la comunidad de estudio tenga la oportunidad de elaborar esbozos de técnicas nuevas, llevar a cabo un verdadero trabajo "experimental", utilizar el *pensamiento conjetural o plausible* (en el sentido de Pólya, 1954) incluso con prioridad al pensamiento lógico.

D3. La citada actividad exploratoria y experimental debe desembocar en un verdadero *trabajo de la técnica* sistemático y adecuadamente dirigido. Éste, aunque se inicie rutinizando una técnica inicial poco contrastada, debe proseguir hasta que la técnica que se está trabajando alcance un desarrollo suficiente, que se pondrá de manifiesto en la generación de técnicas "nuevas" (para la comunidad de estudio) que serán cada vez más potentes y que permitirán la ampliación progresiva del campo de problemas.

D4. A lo largo del proceso de estudio de una OM local deben aparecer *cuestiones matemáticas* relativas a las técnicas que se utilizan, esto es, cuestiones relativas a la interpretación, la justificación, la economía y el alcance de dichas técnicas, así como cuestiones que hagan referencia a las relaciones que se establecen entre ellas (denominamos *cuestionamiento tecnológico* al conjunto de estas cuestiones). La respuesta a estas cuestiones requerirá la realización de nuevas tareas matemáticas que también pasarán a integrarse en la OM local en construcción. Para llevar a cabo este conjunto de tareas matemáticas, será necesario utilizar un *marco tecnológico-teórico,* que es el que permitirá construir (además de describir, justificar, interpretar y relacionar) todas las técnicas necesarias.

D5. En el proceso de reconstrucción de la OM local se debe incluir la progresiva *institucionalización* de aquellos elementos que deben ser considerados como "matemáticos" por la comunidad de estudio para distinguirlos de los que han representado, a lo largo del proceso, el papel de meros instrumentos auxiliares de la construcción.

D6. El proceso de estudio de la OM local debe integrar funcionalmente los diferentes instrumentos del trabajo matemático. En particular, las calculadoras simbólicas deben permitir construir nuevas técnicas matemáticas que, cuando se utilizan adecuadamente, mejoran la eficacia y la economía del trabajo matemático y amplían el tipo de problemas que se pueden estudiar.

D7. Junto a la institucionalización, el proceso de estudio debe permitir *evaluar la calidad de los componentes de la* OM local *construida*: los tipos de tareas (¿están bien identificados?, ¿existen especímenes suficientemente variados de cada tipo?, ¿a qué cuestiones están asociados?, ¿están relacionados con el resto de la actividad de los estudiantes o bien están aislados?); las técnicas (¿están suficientemente trabajadas?, ¿son fiables?, ¿son económicas?, ¿son las más pertinentes para realizar las tareas presentadas?); y el discurso tecnológico (¿es suficientemente explícito?, ¿ayuda efectivamente a interpretar y justificar las técnicas?, ¿permite variar las técnicas en la dirección adecuada para construir nuevas técnicas?

Indicadores del grado de completitud de una organización matemática local

Si hacemos abstracción del proceso de construcción y nos fijamos únicamente en el *producto* elaborado, esto es, en la OM local construida, podemos enumerar siete indicadores de su grado de completitud en términos de las características de los componentes de la OM y de las relaciones entre ellos. De manera muy esquemática (véanse detalles en Fonseca, 2004) diremos que una OM local es más completa en la medida en que satisface los siguientes indicadores:

M1. Los tipos de tareas y técnicas aparecen "integrados" (en contraposición a "aislados" e independientes entre sí) y contienen tareas matemáticas relativas al *cuestionamiento tecnológico,* esto es, tareas cuya realización permitirá responder a cuestiones relativas a ciertas características de las técnicas matemáticas (dominio de validez, economía, justificación, interpretación de los resultados que se obtienen con ella, etcétera).

M2. Para cada uno de los tipos de tareas que forman parte de la OM local en cuestión, existen diversas técnicas matemáticas potencialmente útiles para llevar a cabo dichas tareas y en la propia OM local existen criterios operativos para elegir en cada caso la técnica más adecuada.

M3. Los objetos matemáticos (técnicas, tareas, nociones, teoremas, etc.) son relativamente independientes de los objetos materiales (ostensivos) que se utilizan en cada caso para representarlos materialmente. Esta característica de la OM local requiere que ésta contenga diversos objetos ostensivos (gráficos, verbales, gestuales, etc.) para representar un mismo objeto matemático.

M4. Las tareas y las técnicas que forman parte de la OM local permiten "variaciones" de todo tipo, esto es, son relativamente "flexibles". En particular, tanto las tareas como las técnicas puedan ser "invertidas" (no de manera única) para dar origen a nuevas tareas y nuevas técnicas que denominamos *inversas* de las anteriores.

M5. La OM local en cuestión contiene tareas matemáticas cuya realización permite interpretar el funcionamiento de las técnicas matemáticas que se utilizan en dicha OM y, también, el resultado de aplicar dichas técnicas. Este indicador no se cumple en aquellas instituciones donde la interpretación del funcionamiento de las técnicas que se utilizan (y la interpretación del resultado que se obtiene al aplicarlas) no forma parte de la responsabilidad asignada a la comunidad de estudio.

M6. En la OM local en cuestión deben aparecer, de manera relevante, tareas matemáticas *abiertas,* esto es, tareas matemáticas cuyos "datos" e "incógnitas" no estén completamente determinados de antemano. Entre dicho tipo de tareas matemáticas deben citarse, en primer término, las que requieren un proceso de *modelación matemática.*

M7. El discurso tecnológico-teórico de la OM local en cuestión, esto es, el discurso matemático que sirve para interpretar y justificar la práctica matemática, *debe incidir efectivamente* sobre ésta y debe permitir, en particular, *construir técnicas matemáticas nuevas* capaces de ampliar los tipos de tareas y flexibilizar la práctica matemática.

Hay que subrayar que la noción de "completitud" de una OM es relativa. No tiene sentido hablar de OML *completas* ni de OML *incompletas*. Se trata, en todos los casos, de una cuestión de grado: existen OML más o menos "completas" que otras en función del grado en que sus componentes cumplen las condiciones descritas por los indicadores M1-M7. Dualmente, el grado de completitud de una OML depende de la medida en que, a lo largo de su proceso de construcción, se cumplan D0-D7.

CORRESPONSABILIDAD ENTRE LA SECUNDARIA Y LA UNIVERSIDAD EN LO REFERENTE A LAS DISCONTINUIDADES MATEMÁTICAS ENTRE AMBAS INSTITUCIONES

En este trabajo subrayamos la importancia de una de las dimensiones o momentos de la actividad matemática, el *Momento del Trabajo de la Técnica*, en cuanto a la construcción de una OM local relativamente completa. Nuestro propósito es mostrar, mediante la consideración de una OM particular (la que se constituye en torno a la "regla de Ruffini" para la factorización de polinomios), de qué manera se puede retomar un ingrediente técnico que los alumnos han aprendido a utilizar de manera muy rígida y limitada para, mediante un adecuado trabajo de la técnica, poder generar nuevas técnicas, nuevas justificaciones y explicaciones de éstas, así como nuevas cuestiones, de manera que la OM de partida, que inicialmente se presenta escolarmente como una OM puntual, rígida y aislada, se vaya ampliando y completando de manera progresiva.

En la enseñanza universitaria se supone de manera errónea que muchas de las organizaciones matemáticas previamente estudiadas en la enseñanza secundaria lo han sido con un grado suficiente de completitud (esto es, se actúa como si hubiesen sido construidas como OM locales relativamente completas) de manera que no se ve la necesidad de reconstruirlas efectivamente en la Universidad. En general, se da la paradoja siguiente: cuando en un proceso didáctico se *recupera una técnica* aprendida anteriormente para utilizarla en una actividad matemática nueva (como, por ejemplo, para utilizarla como subtécnica de una nueva técnica), se suele recuperar una versión *rígida y estereotipada* de la técnica "antigua" (aunque ésta ya no sea problemática para los estudiantes). Esto sucede tanto si se trata de la recuperación de una técnica que forma parte del mismo tema, como si se trata de la recuperación de una técnica que se aprendió en temas anteriores del mismo curso o, incluso, en cursos anteriores. De este modo, los alumnos nunca se ven llevados a desarrollar y flexibilizar las técnicas: éstas, o bien son todavía problemáticas (en el primer encuentro con ellas) y, por tanto, se utilizan de manera rígida y estereotipada, o bien ya están cristalizadas y entonces se utilizan como conocimientos que ya no admiten ningún tipo de cuestionamiento.

Postulamos que este fenómeno se acentúa cuando la recuperación se hace en una institución diferente de la institución en la que el estudiante utilizó una técnica por primera vez, como, por ejemplo, cuando en la enseñanza universitaria se recupera una técnica matemática que los estudiantes aprendieron en Secundaria. Además, en este último caso, no sólo es cierto que en la enseñanza universitaria se utilizan rígidamente muchas de las técnicas que se recuperan de la enseñanza secundaria, sino que, y éste es el punto que nos interesa resaltar aquí, aunque se disponga (o se pueda disponer) en la enseñanza universitaria de los elementos tecnológicos necesarios para flexibilizar el uso de una técnica introducida en la enseñanza secundaria, éstos no suelen utilizarse de manera efectiva para desarrollar la técnica en cuestión, esto es, para ampliar su dominio de validez, articularla con otras técnicas y hacerla más económica y más fiable.

Lo anterior sugiere que la explicación de algunas de las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad habría que buscarla no sólo en el carácter puntual y la rigidez de las organizaciones matemáticas que viven en la enseñanza secundaria, sino también en la "ausencia de una actividad matemática universitaria que retome las OM que se estudian en Secundaria, las desarrolle de manera adecuada, las articule entre sí y las integre en otras OM más amplias y completas" (Fonseca, 2004).

En lo que sigue, ejemplificaremos una posible vía de desarrollo de este tipo de actividad matemática en el caso de la regla de Ruffini, un algoritmo muy utilizado en la enseñanza secundaria española para efectuar la división de un polinomio con coeficientes enteros por un binomio del tipo $x - a$. Veremos, además, qué papel desempeña y qué papel podría representar el momento del trabajo de la técnica en este proceso de producción praxeológica.

ANÁLISIS DE LA REGLA DE RUFFINI EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA ESPAÑOLA

La regla de Ruffini es un algoritmo de división de polinomios que se enseña clásicamente en la Secundaria española y que constituye, en esta institución, un ingrediente esencial de las técnicas de resolución de ecuaciones polinómicas.

La movilización de esta regla permite realizar de manera "taquigráfica" la división de un polinomio con coeficientes enteros por expresiones del tipo $x - a$. Por ejemplo, para dividir $x^3 - 4x^2 + x + 6$ entre $x - 2$ se procede de la siguiente manera:

En primer lugar, se escriben los coeficientes ordenados del polinomio y el valor de la posible raíz (aquí $a = 2$):

	1	–4	1	6
$a = 2$				Resto

Posteriormente se "baja" el primer coeficiente (que en este caso es 1 escribiéndolo en la línea de abajo), se multiplica este coeficiente por a (en este caso $a = 2$) y se suma a este producto el segundo coeficiente (en este caso –4), escribiendo el resultado de la suma debajo (en este caso $2 - 4 = -2$). Se repite el proceso con los demás coeficientes hasta llegar a un valor final que coincide con el resto de la división. Éste debe ser 0 si el divisor del término independiente elegido, a, es efectivamente una raíz del polinomio. En nuestro caso se obtiene:

	1	–4	1	6
$a = 2$		2	–4	–6
	1	–2	–3	Resto = 0

Los valores obtenidos son los coeficientes del *polinomio cociente* de dividir $x^3 - 4x^2 + x + 6$ entre $x - 2$ ordenados de mayor a menor grado, teniendo en cuenta que este polinomio tiene siempre un grado menos que el inicial (si el inicial es de grado 3, éste será de grado 2) resulta ser en nuestro caso: $x^2 - 2x - 3$.

En el caso de haber realizado la operación con un entero que no fuera raíz del polinomio, se encontraría un último coeficiente (esto es, un resto de la división) distinto de 0 como, por ejemplo:

	1	–4	1	6
$a = 5$		5	5	30
	1	1	6	Resto = 36

Tal como se utiliza la técnica en la enseñanza secundaria española, se concluiría en el primer caso que 2 es raíz de $x^3 - 4x^2 + x + 6$ y que $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x^2 - 2x - 3)$, mientras que en el segundo caso se concluiría que 5 no es raíz de $x^3 - 4x^2 + x + 6$, ya que:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 5)(x^2 + x + 6) + 36$$

En general, la regla de Ruffini se utiliza junto con el principio tecnológico que afirma que, si un polinomio de coeficientes enteros tiene una raíz entera, entonces ésta divide el término independiente del polinomio. En el caso anterior, ya no se habría probado si 5 es o no raíz del polinomio, porque 5 no divide al término independiente 6, pero sí se tendrían que probar los otros divisores de 6 (esto es, 1, 3, −1, −2 y −3). Así, dado un polinomio entero, se buscan los divisores del término independiente y se determina, mediante la regla de Ruffini, si estos valores son o no raíces de aquél, obteniendo directamente en caso afirmativo (resto 0) el cociente de la división.

El uso iterado y sistemático de esta regla para la resolución de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros genera en los alumnos un principio tecnológico "folclórico" y muy robusto según el cual:

> Todas las ecuaciones polinómicas de grado mayor que 2 con coeficientes enteros, o bien tienen alguna raíz entera y ésta se puede calcular "por Ruffini", o bien no tienen ninguna raíz.

En general no se plantea a los alumnos la necesidad de recurrir a otro tipo de técnicas para resolver ecuaciones, ni siquiera cuando los alumnos ya disponen de los instrumentos del cálculo diferencial y de la representación gráfica de funciones. Además, en los pocos casos en los que se utilizan las gráficas de funciones para resolver ecuaciones, éstas no aparecen como una técnica que permita superar las limitaciones de la regla de Ruffini.

Es fácil, pues, poner en evidencia la incompletitud de la OM que se enseña en Secundaria en torno a la resolución de ecuaciones polinómicas (Fonseca, 2004), incompletitud debida esencialmente a la ausencia de una cuestión generatriz lo bastante rica y potente que conlleve un estudio de las limitaciones de la regla de Ruffini y la necesidad de desarrollarla con nuevos ingredientes técnicos y tecnológico-teóricos. De hecho, podríamos decir que, en Secundaria, el problema que se plantea no es el de hallar las soluciones de una ecuación polinómica, sino el de calcular sus soluciones enteras *en el supuesto previo de que éstas existen*.

La ausencia de un auténtico *cuestionamiento de las técnicas matemáticas* que se utilizan en la enseñanza secundaria implica que sea muy difícil preguntarse en dicha institución sobre la utilidad, el *costo*, la *justificación* y el *alcance* (o dominio de validez) de dichas técnicas. De hecho, el cuestionamiento de las diversas propiedades de las técnicas matemáticas no forma parte de las responsabilidades matemáticas que el contrato didáctico asigna a los alumnos de la enseñanza secundaria. Incluso podemos afirmar que esta responsabilidad matemática tampoco está asignada al profesor de enseñanza secundaria como tal profesor. Todo está preparado para que las técnicas "funcionen" siempre que se las requiera y para que no exista ningún conflicto entre las técnicas de que se dispone y las tareas matemáticas que se proponen.

Partiendo de la actividad matemática que aparece en los libros de texto de Bachillerato[4] en torno al cálculo de raíces (enteras) de ecuaciones polinómicas, nos proponemos mostrar que, con la ayuda de un adecuado *cuestionamiento tecnológico*, es posible *desarrollar el trabajo de la técnica* en una dirección tal que provoque la ampliación de los tipos de ecuaciones que pueden abordarse y, al mismo tiempo, implique la necesidad de llevar a cabo una actividad matemática *flexible* en el sentido de que esté relativamente libre de la rigidez que hemos descrito en Fonseca (2004) y que, esencialmente, constituyen la negación de las características descritas por los indicadores del grado de completitud de una organización matemática (M1-M7).

Todo ello comportará, como veremos, que la propia actividad matemática, a medida que se vaya desarrollando, deberá justificar las razones de ser de las nuevas tareas que van apareciendo y, además, deberá crear una técnica cada vez más resistente y lo bastante potente para abarcar las sucesivas ampliaciones del campo de problemas. Tendremos, en definitiva, el germen de una OM local relativamente completa.

[4] Utilizaremos los libros de texto de Bachillerato que corresponden a las últimas ediciones de las editoriales de mayor difusión del Estado español (SM, Anaya, Santillana y McGraw-Hill).

Para iniciar el análisis de los manuales de Bachillerato, observamos que las funciones elegidas efectivamente en dichos manuales para llevar a cabo la tarea de *representar gráficamente funciones polinómicas* son análogas a las siguientes:

$f(x) = x^3 - 3x$	$f(x) = x^3 + x$	$f(x) = x^4 - 2x^2$
$f(x) = 2x^3 - 8x + 1$	$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
$f(x) = -3x^4 + 4x^3$	$f(x) = x^3 - 3x + 2$	$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$
$f(x) = x^4 - 4x^3$	$f(x) = x^3 - 3x$	$f(x) = x^4 - 6x^2$
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3$	$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 100$	$f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$

Una de las subtareas que se le proponen al alumno para representar gráficamente estas funciones polinómicas es la de calcular los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de las "x", lo que equivale a resolver la ecuación asociada $f(x) = 0$.

Si analizamos las ecuaciones asociadas a las funciones polinómicas citadas, observamos que la mayoría están preparadas para que admitan como raíces algunos de los números: 0, ± 1 o ± 2. Además, el término independiente siempre tiene, en todos los casos, muy pocos divisores, por lo que el número de posibles raíces enteras es muy pequeño. De esta manera se consigue que la técnica dominante (la regla de Ruffini) "funcione" de manera muy económica y eficaz en todos los casos, evitando así todos los conflictos entre la tarea y la técnica (limitaciones, alcance, etc.). La regla se aplica en la mayor parte de los casos de una manera completamente estereotipada, sin ninguna variación, sin permitir ningún tipo de desarrollo y, en definitiva, sin que se plantee ni sea necesario plantear ningún cuestionamiento tecnológico. El tipo de tareas que aparecen en los libros de texto es, en consonancia, muy cerrado y preparado para que no plantee ningún problema a la técnica.

En definitiva, la regla de Ruffini acaba teniendo en la enseñanza secundaria un carácter *autotecnológico*, esto es, se propone como si fuese una técnica transparente que no necesitase de ningún tipo de justificación más allá de la comprobación empírica de que, efectivamente, "funciona". Como no se proponen tareas que provoquen ningún tipo de conflicto a la utilización estereotipada de la regla de Ruffini, nunca aparece la necesidad, en el trabajo matemático que se realiza efectivamente en Secundaria, de flexibilizar dicha técnica, de modificarla ligeramente para aplicarla a un caso especial ni, mucho menos, de analizar y cuestionar su costo, su alcance o su justificación. Esta *ausencia institucional de cuestionamiento tecnológico* de la regla de Ruffini se manifiesta en el impulso incontrolado de los sujetos de la institución por comenzar a calcular las raíces enteras de un polinomio sin tener en cuenta la posibilidad de su no existencia.

Una de las consecuencias prácticas de estos hechos es que se expulsan fuera de la enseñanza secundaria algunos tipos de tareas matemáticas como, por ejemplo, la *representación gráfica de funciones polinómicas sencillas* cuyo término independiente tiene bastantes divisores o cuyas raíces no son enteras (tanto si son racionales como si son irracionales).

Se produce de este modo un *empobrecimiento en cadena* de las organizaciones matemáticas que se estudian. Éste es un fenómeno de largo alcance del cual la regla de Ruffini constituye únicamente un pequeño ejemplo: el hecho de no poder utilizar versiones flexibles de las técnicas elementales para construir técnicas más complejas implica que la actividad matemática escolar estará siempre centrada en tipos de tareas relativamente estereotipadas.

Podemos resumir lo anterior diciendo que el tipo de tareas matemáticas que aparecen en la enseñanza secundaria en torno al cálculo de las raíces de un polinomio, principalmente cuando ésta deja de ser la tarea principal para convertirse en auxiliar de otras tareas más complejas, aparecen como tareas *puntuales, aisladas* y *rígidas* en todos los aspectos descritos anteriormente.

LA REGLA DE RUFFINI EN EL PASO DE LA SECUNDARIA A LA UNIVERSIDAD

Si consideramos ahora la institución universitaria, también se puede mostrar que, en los estudios de primer ciclo de matemáticas, especialmente en las asignaturas de cálculo diferencial o de álgebra elemental, en lugar de retomar la regla de Ruffini de Secundaria, mostrar sus limitaciones, desarrollarla e integrarla en una organización matemática más completa en torno a la resolución de ecuaciones, se ignora por completo esta articulación y se proponen métodos de resolución de ecuaciones totalmente independientes de los construidos en la enseñanza secundaria. Además, tampoco se suelen cuestionar en la enseñanza universitaria el alcance y las limitaciones de la técnica considerada, es decir, la delimitación de la clase de ecuaciones polinómicas que se pueden resolver (de manera exacta o aproximada). Como hemos dicho anteriormente, el uso sistemático de la regla de Ruffini en la enseñanza secundaria conduce a los alumnos a actuar como si los polinomios con coeficientes enteros, o bien tienen una raíz entera "evidente" (un divisor del término independiente del polinomio) que se determina mediante la regla de Ruffini, o bien no tienen raíces. Veremos que este grave "prejuicio" tampoco se supera adecuadamente en la enseñanza universitaria.

En este sentido, la OM en torno a la regla de Ruffini constituye un buen ejemplo de un fenómeno didáctico que podemos enunciar de la siguiente manera:

> La rigidez de las prácticas matemáticas "elementales" que se llevan a cabo en la enseñanza secundaria no disminuye cuando éstas se llevan a cabo en la enseñanza universitaria, aunque se disponga de los elementos tecnológicos que podrían cuestionarlas, flexibilizarlas y desarrollarlas.

A fin de comprobar, de manera meramente exploratoria, que esta rigidez no disminuye cuando la regla de Ruffini se utiliza en la enseñanza universitaria, propusimos durante el curso 1999-2000 a una muestra de 128 alumnos de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial y de la Escuela Superior de Ingeniería Industrial de la Universidad de Vigo, la siguiente tarea:

Calcular las soluciones enteras de la ecuación
$x^3 - 61x^2 - 50x + 135 = 0$

Comprobamos que 79 alumnos (61.71%) intentaron calcular las raíces utilizando la regla de Ruffini; 26 alumnos (20.31%) empezaron calculando el valor numérico del polinomio para cada uno de los divisores del término independiente y los 23 alumnos restantes (17.96%) dejaron en blanco el ejercicio. De entre los 105 alumnos (82% del total) que intentaron resolver la ecuación, *ninguno de ellos se planteó la posibilidad de la no existencia de soluciones enteras*.

Creemos que las respuestas de estos alumnos reflejan el escaso cuestionamiento tecnológico que existe (también en la enseñanza universitaria) en relación con las técnicas de resolución de ecuaciones polinómicas y, en particular, alrededor de la regla de Ruffini. La uniformidad y casi unanimidad de las respuestas obtenidas pone de manifiesto que la actividad dominante ante la tarea propuesta (también en la enseñanza universitaria) consiste en empezar calculando los divisores del término independiente (que, en este caso, son ±1, ±3, ±5, ±9, ±15, ±27, ±45 y ±135) y, a continuación, comprobar para cada uno de ellos si es o no una raíz del polinomio, ya sea utilizando la regla de Ruffini, o bien calculando directamente el resto de la división del polinomio entre $x - a$ (esto es, el valor numérico del polinomio para $x = a$).

La rigidez y ausencia de cuestionamiento tecnológico provoca, entre otros efectos indeseables, que cuando se dispone de una técnica, ésta se use *prescindiendo completamente del costo que comporta dicho uso*. La explicación es sencilla: en la matemática escolar (incluida la universitaria) la principal (y casi única) actividad que los alumnos aprenden a realizar con una técnica es *aplicarla para realizar una tarea concreta*. No existen tareas de *estudio de las técnicas*. En nuestro ejemplo, el costo de utilizar la técnica de que se dispone es excesivo porque, al no existir raíces enteras, la técnica estereotipada que se utiliza requiere una gran cantidad de cálculos pesados y, en definitiva, bastante inútiles.

Supongamos, por ejemplo, que los alumnos hubiesen dispuesto de un resultado tecnológico sencillo tal como el siguiente:

> θ_1: Si $f(x)$ es una función polinómica con coeficientes enteros y $f(0)$ y $f(1)$ son números impares, entonces la ecuación polinómica $f(x) = 0$ no tiene soluciones enteras. (Véase anexo.)

Este resultado les hubiera evitado la necesidad de calcular los divisores de 135 y llevar a cabo una gran cantidad de cálculos inútiles, puesto que en este caso $f(0) = 135$ y $f(1) = 25$ son impares y, por tanto, podemos asegurar que el polinomio $x^3 - 61x^2 - 50x + 135$ no tiene raíces enteras. Además, este resultado tiene una justificación basada en la descomposición de Taylor del polinomio que, aunque no pueda estar disponible en la enseñanza secundaria, sí lo estará muy pronto en el primer curso universitario.[5]

[5] Aparece aquí un ejemplo de resultado tecnológico que podría utilizarse en Secundaria sin necesidad de llevar a cabo una demostración rigurosa, pero con la intención didáctica de provocar necesidades tecnológico-teóricas que deberían ser retomadas para ser satisfechas en los inicios de la enseñanza universitaria. La utilización adecuada y prudente de esta *técnica didáctica,* que consiste en utilizar un resultado teórico cuyo enunciado es sencillo pero cuya demostración está fuera del alcance de los estudiantes de una institución determinada (y que puede introducirse mediante la frase del profesor "se puede demostrar que..."), permitiría dar sentido a muchos de los resultados teóricos de la matemática universitaria, ya que éstos aparecerían como respuesta a cuestiones y necesidades que ya habían surgido en etapas anteriores del proceso de estudio, en lugar de aparecer de manera puramente formal e inmotivada como sucede demasiado a menudo.

ALGUNOS DESARROLLOS POSIBLES DE LA REGLA DE RUFFINI

Mostraremos que, con ayuda de un adecuado *cuestionamiento tecnológico*, es posible *desarrollar el trabajo de la técnica* "regla de Ruffini" en una dirección tal que provoque la ampliación de los tipos de ecuaciones que pueden abordarse. Partimos de un tipo de tareas, que designaremos por T_1 y que está presente en la enseñanza secundaria.

> T_1: *Calcular las soluciones de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros y que tengan todas las soluciones enteras.*

Un espécimen de este tipo de tareas es el siguiente:

> *Resolver la ecuación* $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

Puesto que $f(0) = 6$ y $f(1) = 4$, es posible que exista alguna raíz entera y, en ese caso, debe ser forzosamente un divisor del término independiente que es 6. Las posibles raíces enteras son ±1, ±2 y ±3.

	1	–4	1	6
$a = -1$		–1	5	–6
	1	–5	6	Resto = 0
$a = 2$		2	–6	
	1	–3	Resto = 0	

Las soluciones son $x = -1$, 2 y 3, por lo que tenemos la descomposición factorial:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$$

Para "rutinizar" esta técnica y "experimentarla" con un material empírico suficientemente rico, se pueden considerar ecuaciones similares a la anterior, como por ejemplo:

$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0.$	Raíces: $x = 1$, 3 y 5
$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0.$	Raíces $x = 1$ (doble) y $x = -5$

Llamaremos τ_1 a esta primera técnica. Es una técnica ligada a un tipo de tareas concretas y, desde este punto de vista, aparece en los manuales de la enseñanza secundaria como una técnica natural o canónica. No es cuestionable en dicha institución porque es considerada como "la manera de calcular las raíces (enteras) de las ecuaciones polinómicas (preparadas)".

A fin de flexibilizar la técnica τ_1, lo que permitirá desarrollarla y relacionarla con otras técnicas (cosa que raramente se realiza en la enseñanza secundaria), planteamos en este momento *cuestiones tecnológicas* relativas a τ_1:

> ¿Cuál es el alcance o dominio de validez de τ_1? ¿Para qué tipo de ecuaciones polinómicas no será aplicable? ¿Existen, para esos casos, técnicas alternativas? ¿Es posible modificar ligeramente τ_1 de manera que se amplíe el campo de problemas al que es aplicable? ¿Qué modificaciones son necesarias?

A fin de poner a prueba la resistencia de la técnica creada proponemos un segundo tipo de tareas.

> T_2: *Resolver ecuaciones polinómicas de grado* $n \geq 3$ *con coeficientes enteros.*

Un ejemplar de este segundo tipo de tareas es el siguiente:

Resolver la ecuación $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$.

Aparece la primera situación relativamente conflictiva porque, después de calcular todos los divisores de 6 y comprobar que sólo $x = 2$ es solución, nos encontramos con el problema de que el resto de raíces reales, si existen, no se pueden calcular utilizando la técnica anterior $\boldsymbol{\tau}_1$ porque no son enteras.

¿Cómo calcular las otras dos raíces si existen? ¿Es posible modificar ligeramente $\boldsymbol{\tau}_1$ de manera que se amplíe el campo de problemas al que es aplicable? En la enseñanza secundaria aparece, de hecho, una pequeña modificación de la regla de Ruffini que permite resolver la ecuación anterior: después de obtener una raíz entera, *si el polinomio inicial era de grado 3,* basta factorizar el polinomio inicial y resolver una ecuación de segundo grado para calcular las otras dos raíces reales (o bien para asegurarse de que éstas no existen). Llamaremos a esta variación de la técnica inicial $\boldsymbol{\tau}_{11}$. En nuestro ejemplo, se obtienen -1.73205 y 1.73205.

Pero en la enseñanza secundaria dicha variación de la regla de Ruffini no se considera como tal y, lo que es más importante, no se utiliza para poner de manifiesto que, si la ecuación polinómica fuese de grado mayor que 3 y sólo tuviese una raíz entera, entonces no podría aplicarse $\boldsymbol{\tau}_{11}$. Tampoco se utiliza sistemáticamente para resolver ecuaciones de grado $n > 3$ con coeficientes enteros que tengan, como mínimo, $n - 2$ soluciones enteras.

Forman parte de este segundo tipo, tareas tales como:

Resolver $6x^3 - 13x^2 + 9x - 2 = 0$.	Raíces $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$.
Resolver $12x^3 + 13x^2 - 20x + 4 = 0$.	Raíces $x = -2, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$.

El dominio de validez de $\boldsymbol{\tau}_{11}$ es mayor que el de $\boldsymbol{\tau}_1$, puesto que es aplicable a todas las ecuaciones polinómicas de grado n siempre que tengan, como mínimo, $n - 2$ raíces enteras. A medida que se continúa rutinizando $\boldsymbol{\tau}_{11}$, aparece una segunda cuestión tecnológica:

¿Es posible calcular con $\boldsymbol{\tau}_{11}$, de una manera *razonablemente económica*, todas las raíces de cualquier ecuación polinómica de grado tres que tenga, como mínimo, una raíz entera? Y, en general, ¿es posible calcular con un costo razonable todas las raíces de cualquier ecuación polinómica de grado n que tenga, al menos, $n - 2$ raíces enteras?

La respuesta tecnológica provocará las primeras *fórmulas de acotación* del valor absoluto de las raíces. Técnicamente se trata de economizar el funcionamiento de $\boldsymbol{\tau}_{11}$ limitando el número de posibles candidatos a raíces de la ecuación, porque el *costo de la técnica* $\boldsymbol{\tau}_{11}$ *aumenta muy rápidamente* cuando se trata de resolver ecuaciones polinómicas cuyo término independiente tiene un número grande de divisores.

Consideremos, por ejemplo, el siguiente problema:

Resolver la ecuación $x^3 - 70\,x^2 + 1\,400\,x - 8\,000 = 0$

Dado que 8 000 tiene 56 divisores:

1	2	4	8	16	32	64	–1	–2	–4	–8	–16	–32	–64
5	10	20	40	80	160	320	–5	–10	–20	–40	–80	–160	–320
25	50	100	200	400	800	1 600	–25	–50	–100	–200	–400	–800	–1 600
125	250	500	1 000	2 000	4 000	8 000	–125	–250	–500	–1 000	–2 000	–4 000	–8 000

el *costo* de utilización de la técnica $\boldsymbol{\tau}_{11}$ para realizar esta tarea es considerable en términos de esfuerzo, precisión y posibilidad de cometer errores. Cabe entonces hacer un segundo cuestionamiento tecnológico de la técnica con el objetivo de disminuir, si es posible, dicho costo.

¿Es necesario probar, en todos los casos, todos los divisores del término independiente? ¿Hay alguna posibilidad de acortar ese proceso?

Una buena tecnología debería disminuir el costo de $\boldsymbol{\tau}_{11}$ e intentar resolver esa tarea con un costo mínimo. Supongamos que la fórmula de Cardano-Vieta formara parte del entorno tecnológico de la regla de Ruffini:

> θ_2: *Si todas las raíces de la ecuación* $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ *son reales, entonces toda raíz* x_i *de la ecuación pertenece al intervalo* [–M, M], *donde* $M \leq \sqrt{\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\left(\frac{a_{n-2}}{a_n}\right)}$.

Utilizando adecuadamente este resultado tecnológico, la técnica $\boldsymbol{\tau}_{11}$ sería mucho más económica y mucho más fiable. En nuestro caso particular, este resultado tecnológico limita las posibles raíces al intervalo [–46, 46] y nos permite reducir considerablemente el número de candidatos a raíces enteras:

1	2	4	8	16	32		–1	–2	–4	–8	–16	–32
5	10	20	40				–5	–10	–20	–40		
25							–25					

La tecnología incide así directamente en la práctica matemática, produciendo una *disminución del costo de la técnica*. De los 56 candidatos iniciales pasamos a únicamente 22, pero el costo de $\boldsymbol{\tau}_{11}$ aún sigue siendo grande. ¿Qué posibilidades hay de disminuir todavía más la posibilidad de cometer errores y, en consecuencia, el costo?

La respuesta a esta cuestión viene dada por un nuevo resultado tecnológico.

> θ_3: (Regla de Descartes) *Si* n *es el número de cambios de signo de los coeficientes de un polinomio* f(x) *y* m *su número de raíces positivas, entonces* $m \leq n$ *y* $n - m$ *es par. El número de raíces negativas se obtiene repitiendo el proceso anterior para* f(–x).

De acuerdo con este resultado tecnológico, en toda ecuación polinómica de grado 3, cuyos coeficientes tengan signos *alternados*, como por ejemplo: $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ (donde a, b y $c > 0$), en el supuesto de que tenga raíces reales, todas ellas serán positivas. Mientras que en toda ecuación polinómica de grado 3 de la forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (donde a, b y $c > 0$), en caso de tener raíces reales, todas serán negativas.

Esto nos permite, en nuestro ejemplo, restringir todavía más el número de candidatos pasando de 22 a 11 y quedarnos sólo con los candidatos positivos.

1	2	4	8	16	32
5	10	20	40		
25					

Pero todavía podemos disminuir más el costo de la técnica $\boldsymbol{\tau}_{11}$. Para ello podemos utilizar otro resultado tecnológico:

> θ_4: *Si* f(x) *es un polinomio con coeficientes enteros y* a *es una raíz entera de* f(x), *entonces* a $-$ *1 es un divisor de* f*(1) y* a + *1 es un divisor de* f($-$*1*).

Al aplicarlo a nuestro ejemplo particular resulta que $\dfrac{f(1)}{a-1}$ da origen a una división exacta únicamente con los divisores siguientes:

2	4	
10	20	40

Pero como que $\dfrac{f(-1)}{a+1}$ sólo da división exacta con:

10	20	40

Resulta que las *únicas raíces enteras posibles* de la ecuación

$$x^3 - 70x^2 + 1\,400x - 8\,000 = 0$$

son 10, 20 y 40.

Las técnicas $\boldsymbol{\tau}_1$ y $\boldsymbol{\tau}_{11}$, que aparecen como incuestionables en la enseñanza secundaria, tienen un alcance muy limitado debido a que el *costo* aumenta muy rápidamente con el simple aumento del número de divisores del término independiente de la ecuación. Llamaremos $\boldsymbol{\tau}_2$ a la técnica que se obtiene de *disminuir el costo* de $\boldsymbol{\tau}_{11}$ mediante la utilización de los elementos tecnológicos θ_1, θ_2, θ_3 y θ_4. Esta técnica $\boldsymbol{\tau}_2$ surge como consecuencia del desarrollo de las técnicas $\boldsymbol{\tau}_1$ y $\boldsymbol{\tau}_{11}$ y tiene un costo mucho menor.

A continuación se proponen nuevas tareas de rutinización, para dominar la técnica $\boldsymbol{\tau}_2$:

$x^3 - 53x^2 + 532x - 480 = 0.$	Raíces: $x = 1$, 12 y 40
$x^3 - 88x^2 + 1\,620x + 3\,600 = 0.$	Raíces: $x = -2$, 30 y 60

El trabajo técnico rutinizado con $\boldsymbol{\tau}_2$ para obtener las soluciones de una ecuación polinómica hace surgir de manera natural la siguiente cuestión tecnológica:

> ¿Cuál es el alcance y cuáles son las limitaciones de la técnica $\boldsymbol{\tau}_2$? ¿Cómo hay que modificar $\boldsymbol{\tau}_2$ para resolver una ecuación polinómica de grado tres que tenga al menos una solución racional pero ninguna solución entera?

A fin de poner a prueba la resistencia o robustez de la técnica $\boldsymbol{\tau}_2$ proponemos un tercer tipo de tareas:

T_3: *Resolver ecuaciones polinómicas de grado 3 con coeficientes enteros que tengan, como mínimo, una solución racional. O bien ecuaciones polinómicas de grado* n *que tengan, como mínimo,* n − *2 soluciones racionales.*

Un espécimen de este tipo de tareas es el siguiente:

Resolver la ecuación $60x^3 - 274x^2 + 340x - 96 = 0$

La utilización de la técnica $\boldsymbol{\tau}_2$ nos permite afirmar que la ecuación propuesta no tiene raíces enteras, pero no nos permite calcular las posibles raíces reales no enteras de dicha ecuación. Se trata, por tanto, de una tarea que muestra las *limitaciones* de $\boldsymbol{\tau}_2$, por lo que se requiere explorar nuevas técnicas o mejorar las técnicas anteriores.

¿Es posible modificar $\boldsymbol{\tau}_2$ para ampliar su dominio de validez de manera que abarque el cálculo de raíces racionales? La respuesta depende de un elemento tecnológico que, como tal, forma parte del currículum de la enseñanza secundaria (y es "demostrable" en esta institución), aunque su incidencia en la práctica matemática que se lleva a cabo efectivamente en las aulas de Secundaria es muy pequeña:

θ_5: *Si* $x = \dfrac{m}{n}$ *(con* m *y* n *enteros primos entre sí) es una solución racional de una ecuación polinómica con coeficientes enteros, entonces* m *debe ser divisor del término independiente y* n *debe ser divisor del coeficiente de grado máximo.*

Por consiguiente, todas las raíces racionales pueden escribirse como una fracción cuyo denominador coincide con el coeficiente de grado máximo de la ecuación polinómica. En nuestro ejemplo, y en el supuesto de que la ecuación dada tenga raíces racionales, haciendo el cambio de variable $x = \dfrac{z}{60}$ obtendremos una ecuación en z con soluciones enteras. Resulta en efecto que, aplicando a dicha ecuación la técnica anterior $\boldsymbol{\tau}_2$, se obtienen las soluciones siguientes: $z = 24$, 90 y 160. Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos tres soluciones racionales para la ecuación inicial: $x = \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$ y $\frac{8}{3}$.

A esta nueva técnica, que consiste en componer el citado cambio de variable con la técnica $\boldsymbol{\tau}_2$, podemos denominarla $\boldsymbol{\tau}_3$. Es una técnica útil para calcular las raíces racionales de una ecuación polinómica y, evidentemente, vuelve a ampliar el campo de problemas. Su dominio se extiende, en principio, a todas las ecuaciones polinómicas con coeficientes racionales de grado n siempre que tengan, como mínimo, $n - 2$ soluciones racionales.

Está claro que también $\boldsymbol{\tau}_3$ sigue presentando importantes limitaciones si lo que se pretende es calcular las soluciones de una ecuación polinómica cualquiera. Basta con que los coeficientes no sean todos racionales, o bien que la ecuación en cuestión no tenga suficientes soluciones racionales. El trabajo de la técnica podría así continuar con nuevas variaciones de $\boldsymbol{\tau}_3$, aparecerían nuevas necesidades tecnológicas y nuevas ampliaciones del campo de problemas.

A MODO DE CONCLUSIÓN: LAS FUNCIONES DIDÁCTICAS DEL TRABAJO DE LA TÉCNICA Y SUS RELACIONES CON EL RESTO DE DIMENSIONES DEL PROCESO DIDÁCTICO[6]

En este trabajo hemos considerado de manera específica el papel del momento del trabajo de la técnica en el desarrollo y completación relativa de una organización matemática escolar concreta. Pero, en realidad, el momento del trabajo de la técnica es un *momento o dimensión* particular del proceso de estudio cuyas funciones no pueden entenderse si no es a partir de su relación con el resto de las dimensiones del proceso.

De hecho, ya se ha sugerido la conexión funcional entre el momento del trabajo de la técnica y el *momento exploratorio* de un tipo de tareas matemáticas. En efecto, la exploración de un problema particular extraído de un tipo determinado de problemas no constituye un fin en sí mismo, sino que sólo es un medio para empezar a *constituir una técnica de resolución* de todos los problemas de

[6] Para un análisis más sistemático de las funciones del momento del trabajo de la técnica dentro del proceso de estudio, véanse Bosch y Gascón (1994) y Chevallard, Bosch y Gascón (1997, pp. 286-290).

dicho tipo. Ésta es la razón por la cual el momento del trabajo de la técnica constituye el *desarrollo natural del momento exploratorio*.

Por otra parte, hemos mostrado hasta qué punto el *cuestionamiento tecnológico de las técnicas* ha dirigido el desarrollo de éstas y, recíprocamente, cómo el trabajo práctico-técnico ha originado nuevas necesidades tecnológico-teóricas, esto es, la necesidad de constituir un discurso *tecnológico-teórico* cada vez más rico, capaz de justificar, interpretar y variar las técnicas con la finalidad de hacer que éstas sean más eficaces, más económicas y más fiables. Aparece así claramente la relación funcional entre el momento del trabajo de la técnica y el *momento tecnológico-teórico*.

Por todo lo anterior, podemos decir que el momento del trabajo de la técnica tiene una importante *función integradora* de los diferentes momentos del proceso de estudio de las matemáticas que, en el caso de las instituciones escolares, tiene una fuerte tendencia a la desarticulación y hasta a la atomización.

Pero, además, el trabajo de la técnica se ha manifestado, una vez más, como un trabajo "creativo", esto es, *productor de nuevas tareas, nuevas necesidades tecnológicas y nuevas técnicas*. El desarrollo del trabajo de la técnica ha producido, incluso, nuevas técnicas que permiten resolver cuestiones planteadas en el *nivel tecnológico* respecto de la técnica inicial. En este sentido, hemos mostrado un posible desarrollo de la técnica inicial $\boldsymbol{\tau}_1$ que aparecía como *la* manera de resolver las ecuaciones polinómicas en la enseñanza secundaria, pero que es una técnica muy rudimentaria, rígida, con un alcance muy pequeño y sólo aplicable a un tipo muy restringido de tareas.

Digamos, para finalizar, que el caso examinado aquí no es un caso aislado ni en lo que se refiere a las funciones didácticas del momento del trabajo de la técnica ni en lo que se refiere a las discontinuidades matemáticas (y didácticas) que se ponen de manifiesto entre la enseñanza secundaria y la universitaria. Lo más habitual es que la enseñanza universitaria no retome las organizaciones matemáticas que se construyen en Secundaria, no las desarrolle adecuadamente utilizando los elementos tecnológicos que proporciona la matemática disponible en la enseñanza universitaria y no las articule con las nuevas organizaciones matemáticas que se construyen (por ejemplo, para mostrar sus limitaciones y delimitar mejor su ámbito de aplicación). Y éste es, a nuestro entender, uno de los factores esenciales de la *ruptura* entre el tipo de actividad matemática que es posible llevar a cabo en cada una de dichas instituciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bosch, M. y J. Gascón (1994), "La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas", *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 12, núm. 3, pp. 314-332.

Bosch, M. y Y. Chevallard (1999), "La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, núm. 1, pp. 77-124.

Bosch, M., C. Fonseca y J. Gascón (2004), "Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 24, núms. 2-3, pp. 205-250.

Brousseau, G. (1998), *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques, 1970-1990*, en N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield (eds.), Grenoble, La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999), "L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, núm. 2, pp. 221-266.

——— (2002a), "Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions", *Actes de la XIème École d'Eté de Didactique des Mathématiques* (en prensa).

——— (2002b), "Organiser l'étude. 3. Écologie et régulation", en J.-L. Dorier *et al.* (eds.), *Actes de la XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques – Corps*, Grenoble, La Pensée Sauvage, 21-30 de agosto de 2001, pp. 41-56.

Chevallard, Y., M. Bosch y J. Gascón (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona, ICE/Horsori.

Fonseca, C. (2004), *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad*, tesis doctoral, Universitat de Vigo.

Gascón, J. (1998), "Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18, núm. 1, pp. 7-34.

——— (1999), "'Didactique fondamentale' versus 'Advanced Mathematical Thinking': ¿Dos programas de investigación inconmensurables?", *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM), tomo II, pp. 152-170.

Pólya, G. (1954), *Mathematics and Plausible Reasoning*, 2 vols., Princeton, NJ, Princeton University Press.

Libros de texto de bachillerato

Abellanas, L., J. García y C. Martínez (2002), *Matemáticas. 2º de Bachillerato,* Madrid, McGraw-Hill.

Bobillo, N. y M. García (2002), *Matemáticas. 2º de Bachillerato,* Madrid, Santillana.

Colera, J., M. Oliveira, R. García y S. Fernández (2000), *Matemáticas. 1º de Bachillerato,* Madrid, Anaya.

Colera, J., M. Oliveira y R. García (2001), *Matemáticas. 2º de Bachillerato,* Madrid, Anaya.

Nevot, A., R. Rodríguez, J. Soler y A. Negro (2002), *Matemáticas. 1º de Bachillerato,* Madrid, McGraw-Hill.

Nortes, A., P. Jiménez, F. Lozano, A. Miñano y J. Ródenas (2002), *Matemáticas. 1º de Bachillerato,* Madrid, Santillana.

ANEXO

θ_1: Si $f(x)$ es una función polinómica con coeficientes enteros y $f(0)$ y $f(1)$ son números impares, entonces la ecuación polinómica $f(x) = 0$ no tiene soluciones enteras.

En efecto:

El desarrollo de Taylor de grado n del polinomio en torno a $x = a$ es:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Evaluando esta expresión en $x = 2n$ y $a = 0$, se obtiene que todos los términos son pares, excepto $f(0)$ que es impar, por tanto, $f(2n)$ no puede anularse:

$$f(2n) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(2n) + \frac{f''(0)}{2!}(2n)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(2n)^n$$

Evaluando esta expresión en $x = 2n + 1$ y $a = 1$, se obtiene que todos los términos son pares, excepto $f(1)$ que es impar, por lo que $f(2n + 1)$ no puede anularse:

$$f(2n+1) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(2n) + \frac{f''(1)}{2!}(2n)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(2n)^n$$

DATOS DE LOS AUTORES

Cecilio Fonseca
Universidad de Vigo, Vigo, España
cfonseca@uvigo.es

Marianna Bosch
Universitat Ramon Llull, España
mariana.bosch@iqs.url.edu

Josep Gascón
Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España
gascon@mat.uab.es