Conteo: una propuesta didáctica y su análisis

Hilda Salgado y María Trigueros

Resumen: En el aprendizaje de las matemáticas se suelen observar problemas debido a que los conceptos involucrados resultan a menudo complejos por su alto nivel de abstracción. Se han detectado problemas en el aprendizaje de los conceptos asociados al tema de conteo. Dos conceptos básicos de conteo son la ordenación y la combinación.

En este trabajo se diseña y analiza una propuesta didáctica para el aprendizaje de las ordenaciones y combinaciones apoyada en la teoría APOE. Se presenta dicho análisis y los resultados obtenidos a partir del trabajo de los estudiantes con la propuesta realizada.

Palabras clave: combinatoria, teoría APOE, experimento en aula, ordenaciones, combinaciones, álgebra.

Counting: analysis of a didactic approach

Abstract: Learning mathematics often causes problems to students. Given the complexity of the concepts involved and their high level of abstraction, their learning becomes a difficult task. Problems arise in the learning of the concepts of counting and in the acquisition of the techniques of counting. Two basic concepts in counting are permutations and combinations.

This work considers a didactical approach for the learning of permutations and combinations based in APOS Theory. The analysis and the results from the work done by the students are presented and discussed.

Keywords: counting, APOS Theory, experiment in classroom, permutations, combinations, algebra.

Fecha de recepción: 5 de junio de 2008.

INTRODUCCIÓN

La matemática discreta es la rama de las matemáticas que estudia los conjuntos discretos que pueden ser finitos o, que si no son finitos, se presentan como los números naturales, es decir, conjuntos numerables u objetos bien separados entre sí. Un objeto discreto se contrapone a la idea de continuo. Dentro de la matemática discreta tenemos la combinatoria, que estudia colecciones, por lo general finitas, de objetos que satisfacen ciertos criterios y contar colecciones de estos objetos. Los problemas de conteo son difíciles, pues requieren de un análisis cuidadoso de su estructura. Para contar, es necesario saber qué características debe cumplir lo que se desea contar, por ejemplo, el hecho de que sea necesario o no el orden o la repetición.

El concepto de orden y repetición tiene un significado muy claro para todos fuera de las matemáticas. Estos términos se usan en el lenguaje natural y se comprenden en ese contexto. Pero al empezar el estudio formal de las ordenaciones y las combinaciones, los alumnos no distinguen las características relevantes del problema y tienen serias dificultades para resolverlo. Entonces, la manera como se cuenta se convierte en un problema didáctico, pues las ideas de orden y repetición se entienden fuera del ámbito escolar, pero cuando se abordan con determinados conjuntos, se pierde la transparencia que tienen en otros ámbitos.

En este artículo se estudian las preguntas de investigación: ¿Qué construcciones mentales necesitan realizar los alumnos para construir las nociones de ordenación y combinación? ¿Es posible diseñar una secuencia didáctica que permita lograr una mejor comprensión de estos conceptos por parte de los alumnos?

ANTECEDENTES

Se llevó a cabo una revisión bibliográfica en la red y en libros sobre el tema de conteo y se llegó a la conclusión de que se ha llevado a cabo poca investigación sobre este tema. Se encontró un artículo de English (1993), en el que se discuten los resultados de un experimento con niños de 7 a 12 años que no habían estudiado problemas que involucraran conteo. Se les plantearon seis problemas de combinatoria, tres en dos dimensiones y tres en tres dimensiones. Los niños tenían que encontrar todas las combinaciones posibles para vestir a osos de peluche con shorts y blusas de diferentes colores (dos dimensiones) y shorts, blusas y raquetas diferentes (tres dimensiones). Los niños tenían los osos, la ropa y las raquetas para que físicamente pudieran vestir a los osos. Se elaboraron tablas para comparar el uso de las estrategias en los distintos grupos de edades, el cambio de estrategia entre los problemas de dos dimensiones y los de tres dimensiones, los cambios al avanzar en los problemas y la solución de dos de los problemas en comparación con un grupo piloto. Se llegó a dos conclusiones importantes para la matemática educativa: la diversidad de estrategias que los niños usan para resolver un problema y el potencial de los niños en el aprendizaje autónomo de conceptos de matemática discreta. La autora concluye que se necesita prestar mayor atención a la brecha que existe entre la habilidad actual que tienen los niños en matemáticas y lo que son capaces de lograr a través de la solución de problemas. Es necesario retar a los niños con problemas que no requieran recordar conceptos para resolver, sino más bien que necesiten procesos de pensamiento matemático que, por lo general, no se detectan en las clases tradicionales y deja abierta la clara necesidad de hacer más estudios sobre el tema de combinatoria.

En el libro *Introduction to Discrete Mathematics with ISETL* de Dubinsky y Fenton (1996), se introducen y discuten problemas relacionados con el conteo: ordenaciones y combinaciones que los alumnos resuelven utilizando un programa de computadora (ISETL). El diseño del libro sigue un enfoque constructivista basado en la teoría APOE, es decir, está diseñado para que los alumnos construyan por sí mismos los conceptos matemáticos necesarios en la solución de problemas, pero no se han hecho investigaciones que permitan analizar su efectividad en la enseñanza de la matemática discreta en general, ni del conteo en particular.

En este trabajo se intenta contribuir a la investigación acerca de la forma en la que los alumnos enfrentan los problemas de conteo cuando se les enseña siguiendo una estrategia constructivista. En particular, nos interesa determinar si es posible diseñar una estrategia de enseñanza que permita a los alumnos aprender los conceptos de conteo de manera significativa, así como investigar cuáles son las estrategias que utilizan los alumnos cuando enfrentan problemas de conteo por primera vez y cómo evolucionan sus estrategias durante el proceso de enseñanza, además de señalar algunas de las dificultades que enfrentan los alumnos en la solución de este tipo de problemas.

MARCO TEÓRICO

La teoría APOE proporciona una base teórica para analizar la forma en la que se construyen los conceptos matemáticos para estudiar cómo evolucionan las construcciones de los alumnos y, al mismo tiempo, permite diseñar estrategias didácticas para ayudar a los alumnos a hacer las construcciones necesarias para que esta evolución tenga lugar y se logre un aprendizaje de los conceptos matemáticos más significativos (Asiala *et al.*, 1998; Dubinsky y McDonald, 2001). Los componentes esenciales de la teoría APOE son: acciones, procesos, objetos y esquemas, además de la abstracción reflexiva que se considera como mecanismo de construcción; este mecanismo da lugar a los procesos de construcción de conocimiento, como son la interiorización, la generalización, la coordinación, la encapsulación y la reversión.

Dentro de esta teoría, se hacen descripciones detalladas llamadas descomposiciones genéticas en términos de ciertas construcciones mentales para crear hipótesis de cómo se aprenden los conceptos matemáticos. La descomposición genética pone en relieve las construcciones cognitivas que pueden ser necesarias para el aprendizaje. Actualmente se cuenta con descomposiciones genéticas diseñadas por diversos autores sobre una variedad de conceptos matemáticos (McDonald *et al.*, 2000; Gavilán *et al.* 2006; Trigueros *et al.*, 2008).

Con base en la teoría APOE, se propuso la siguiente descomposición genética como sustento teórico de la investigación. En ella se muestran las construcciones mentales que se piensa deben hacer los alumnos para construir los conceptos de ordenación y combinación dentro del tema de conteo: al enfrentar un problema de conteo, los alumnos requieren llevar a cabo las acciones necesarias para desglosar el problema y mostrar explícitamente todos los casos posibles, a fin de poder contar físicamente. Cuando los alumnos reflexionan sobre estas acciones, las interiorizan en un proceso en el cual ya no es necesario desglosar el problema e, incluso, pueden generalizar el proceso para simbolizarlo en una fórmula que tenga sentido para ellos. Cuando los alumnos utilizan estos procesos y reflexionan sobre ellos, los encapsulan en un objeto. En este momento pueden comparar fórmulas, utilizar en un problema dos fórmulas distintas cuando es necesario, distinguir entre diversas situaciones, distinguir las fórmulas que se deben emplear en cada caso e incluso desencapsular el objeto en el proceso que le dio origen.

Después de una primera experiencia de investigación, de la cual se hablará más adelante, se decidió refinar la descomposición genética para permitir a los alumnos distinguir claramente entre los procesos necesarios para resolver problemas donde el orden es relevante (para simplificar la lectura se les llamará problemas con orden) de aquéllos donde el orden no es relevante (problemas sin orden).

La descomposición genética refinada, sobre cuya base se diseñó la nueva serie de problemas, es la siguiente: se agregó la acción de comparar distintos problemas con y sin orden para que los alumnos distinguieran entre ambos tipos. Cuando los alumnos interiorizan la acción de distinguir un problema sin orden de otro con orden, son capaces de llevar a cabo la acción de dividir la fórmula de ordenación y realizar el proceso de conteo que conduce a la generalización en una fórmula de combinación que pueden usar para resolver problemas sin orden. Cuando los alumnos reflexionan sobre los procesos anteriormente mencionados, los encapsulan para construir el objeto conteo de combinación. En este momento, podrán hacer comparaciones entre el objeto ordenación y el objeto combinación.

METODOLOGÍA

El tema de conteo se introdujo mediante una secuencia que incluyó:

- Una primera serie preliminar de problemas *con orden* diseñados a partir de la descomposición genética, con la finalidad de que los alumnos reflexionaran sobre sus acciones e iniciaran así la construcción de los distintos procesos y objetos necesarios para la comprensión de los conceptos matemáticos del conteo: ordenación. Esta serie se aplicó en los dos semestres que se estudiaron.
- Una segunda serie preliminar de problemas *sin orden* diseñados a partir de la descomposición genética y con la misma finalidad de la serie anterior, pero en el tema de combinaciones. Esta serie fue aplicada en el primer semestre, pero como los alumnos de la primera experiencia tuvieron muchas dificultades para resolver los problemas donde el orden no es relevante, se decidió revisar la descomposición genética, puesto que los alumnos no habían realizado las construcciones mentales que se esperaba.
- Se refinó la descomposición genética y se diseñó una nueva (tercera) serie de problemas *con y sin orden*, con la finalidad de diferenciar entre ambos tipos de problemas y para aplicarse en una nueva experiencia conjuntamente con las otras dos.

La primera experiencia se llevó a cabo en el semestre agosto-diciembre de 2006, en ella se utilizaron las dos primeras series de problemas, una con orden y otra sin orden. Una vez refinada la descomposición genética con base en los resultados obtenidos de la primera experiencia, se llevó a cabo otra experiencia en el semestre enero-mayo de 2007. En esta ocasión se utilizó, además de las dos series de problemas antes mencionadas, una serie adicional de problemas que, como se describió anteriormente, incluía tanto problemas sin orden como problemas con orden, a fin de proporcionar a los alumnos oportunidades de diferenciar entre ellos. En ambas ocasiones los alumnos participantes cursaban la materia de Álgebra Superior I en una universidad en México. Algunos problemas incluidos en las series se tomaron de los libros Cárdenas *et al.* (1979), Grimaldi (1997), Kolman *et al.* (1997), Niven (1995), y Reyes (2005).

Los alumnos trabajaron los problemas incluidos en cada una de las series de problemas en varias ocasiones que denominaremos etapas, con el objetivo de proporcionarles repetidas ocasiones de reflexión y favorecer así los procesos de interiorización de sus acciones y de encapsulación de los procesos:

Etapa 1. Antes de estudiar el tema en una clase de dos horas que incluyó trabajo colaborativo en equipos sin ayuda de ningún maestro o libro.
Etapa 2. A través de una discusión general en clase sobre el tema de conteo correspondiente: ordenación (con orden) o combinación (sin orden).
Etapa 3. Después de haber generalizado los procesos en fórmulas, se pidió a los alumnos que resolvieran algunos problemas de la serie, con la finalidad de comparar las soluciones de los alumnos con la estrategia de solución de la primera vez.
Etapa 4. De manera individual, los alumnos resolvieron los problemas como tarea.

Además de las etapas anteriores, se aplicaron dos exámenes de conteo que incluían preguntas donde el orden es importante y otras preguntas donde no existe el orden.

A continuación se presentan algunos problemas junto con su solución y análisis *a priori*. Más adelante se hace el análisis de las respuestas de los alumnos a dichos problemas.

Problema 1. Problema de la serie de problemas con orden

Los coches marca BMW se producen en cuatro modelos, ocho colores, tres potencias de motor y dos tipos de transmisión.

a) ¿Cuántos coches distintos pueden fabricarse?

b) *¿Cuántos coches distintos de color azul se pueden fabricar?*
c) *¿Cuántos coches distintos de color azul y potencia de motor V-8 pueden fabricarse?*

Solución:

a) $4 \times 8 \times 3 \times 2 = 192$ *coches distintos.*
b) $4 \times 3 \times 2 = 24$ *coches azules.*
c) $4 \times 2 = 8$ *coches azules y motor V-8.*

En este problema se espera que los alumnos lleven a cabo la acción de seleccionar los datos relevantes para cada inciso: en el inciso *a,* cuatro datos; *b,* tres datos, y *c,* dos datos. Si únicamente pueden realizar acciones, puede ser que escriban todos los casos. Si los alumnos efectúan el producto, indicaría que ya interiorizaron dicha acción en un proceso.

Problema 2. Problema de la serie de problemas sin orden

¿De cuántas formas se puede escoger un equipo de basketball (cinco jugadores) de entre 12 jugadores posibles? ¿Cuántos equipos incluyen al más débil y al más fuerte?

Solución: $\binom{12}{5} = 792$ *equipos.*

$\binom{10}{3} = 120$ *equipos con el más débil y el más fuerte.*

En este problema se espera que los alumnos realicen la acción de reconocer que no importa el orden y, si resuelven como ordenación, dividir para quitarlo. Además, deben reconocer que no puede haber repeticiones por tratarse de personas. En la segunda pregunta se espera que lleven a cabo la acción de restar del total de personas a la más débil y la más fuerte y componer el equipo de tres personas. Puede ser que intenten la acción de escribir todos los casos y contarlos. Si los alumnos efectúan el producto y la división, indicaría que ya interiorizaron las acciones en un proceso.

Problema 3. Problema del examen

En una taquería se pueden pedir los tacos al pastor con o sin cebolla, con o sin cilantro, con o sin piña y con o sin salsa. ¿De cuántas formas se pueden ordenar los tacos?

Solución: $OR_4^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

En este problema se espera que los alumnos realicen la acción de reconocer que cada ingrediente puede o no estar presente en los tacos, lo que les da dos opciones. Si los alumnos efectúan únicamente acciones, puede ser que escriban todos los casos. Si los alumnos han interiorizado la acción en un proceso, entonces reconocerán que el problema consiste en una ordenación con repetición y usarán la fórmula: $OR_n^m = n^m$ con n objetos y m por seleccionar. En el caso de que se utilice la fórmula, es importante distinguir si la usan de manera correcta y cómo la usan.

Problema 4. Problema de la serie de problemas con y sin orden (descomposición genética rediseñada)

Sean los números 1, 2, 3, 4. No puedes repetir los números.

a) ¿Cuántos números de dos dígitos pueden formarse? Recuerda que existe orden pues 12 ≠ 21.
b) ¿Cuántos conjuntos de dos elementos pueden formarse? En este caso no hay orden {1,2} = {2,1}.
c) ¿Qué diferencia hay entre los dos incisos anteriores?
d) ¿Cómo puedes relacionar las respuestas de los incisos a y b?

Solución:
a) $O_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ *números de dos dígitos.*
b) $\binom{4}{2} = 6$ *conjuntos de dos elementos.*
c) En el inciso a hay orden mientras que en b, no lo hay.
d) Debe dividirse el inciso a entre 2! = 2 (permutaciones de dos elementos) para obtener el inciso b.

En este problema se espera que los alumnos lleven a cabo la acción de distinguir el inciso *a,* con orden, del inciso *b,* sin orden, y así contestar el inciso *c*. En el inciso *d,* deben relacionar las respuestas de los incisos *a* y *b* y darse cuenta de que existen menos conjuntos que números, pues hay secuencias que en *a* se cuentan como diferentes, mientras que en *b* se cuentan como una. Si realizan únicamente acciones, puede ser que escriban todos los casos. Si los alumnos ya interiorizaron la acción en un proceso, entonces en el inciso *d* dividirán el inciso *a* entre $2! = 2$, pues son dos secuencias iguales, para obtener el inciso *b*.

Problema 5. Problema de la serie de problemas con y sin orden (descomposición genética rediseñada)

Si tienes 10 objetos y quieres escoger a los 10 objetos, ¿cuántas formas hay de escogerlos sin importar el orden en que los tomes?

Solución: $\binom{10}{10} = 1$ *forma.*

En este problema se espera que los alumnos efectúen la acción de reconocer que el orden no importa y sólo existe una forma de tomar 10 objetos de 10 objetos. Si llevan a cabo únicamente acciones, puede ser que escriban el caso. Si los alumnos contestan correctamente sin escribir el caso, puede ser que hayan interiorizado la acción en un proceso.

Problema 6. Problema de la serie de problemas sin orden

¿Cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras de la palabra mississippi que no tengan las letras "s" consecutivas? ¡¡¡Explica detalladamente cuáles fórmulas usas y por qué!!! La explicación cuenta la mitad de la pregunta.

Solución: $\frac{7!}{4!\,2!}\binom{8}{4}$ *palabras distintas.*

En este problema hay varias acciones: la acción de separar las letras *"s"* de las demás letras, la acción de permutar las demás letras y la acción de introducir nuevamente las letras *"s"*. Estas acciones se pueden interiorizar en un proceso.

Dada la dificultad del problema, no es de esperar que puedan resolverlo correctamente en un primer acercamiento.

Las producciones de los alumnos se revisaron en cada etapa para determinar cuáles acciones habían interiorizado en un proceso y si algunos procesos se habían encapsulado en objetos. También se tomó en consideración el hecho de que los alumnos pudieran estar en tránsito entre acción y proceso o entre proceso y objeto. El maestro iba anotando todas las preguntas, respuestas, dudas, comentarios, etc., que surgían en el momento de la discusión en clase, así como el procedimiento que siguió para llegar, junto con los alumnos, a encontrar las relaciones entre los conceptos que se pueden expresar en términos de fórmulas de conteo. Para el análisis, se utilizó esta bitácora conjuntamente con toda la producción de los alumnos.

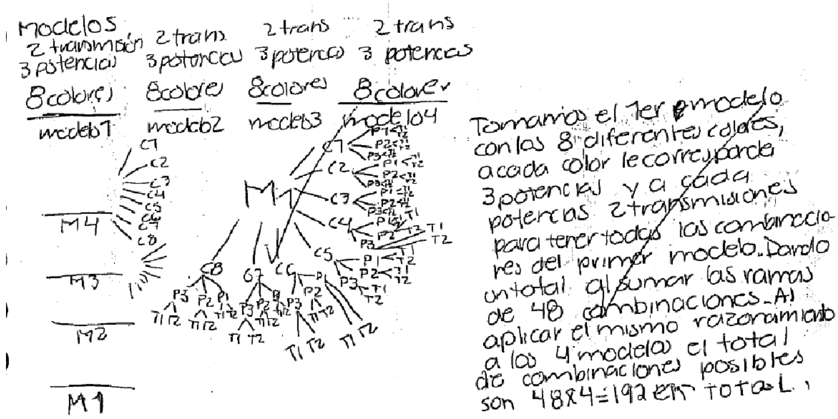
Es importante aclarar que lo anterior se hizo en condiciones reales de clase. La metodología seguida en clase fue consistente con la metodología ACE (actividades, discusión en clase y ejercicios) de la teoría APOE.

ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ALUMNOS

Primera experiencia

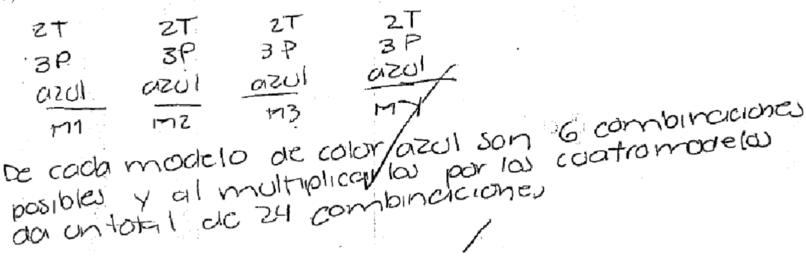
Se analizaron las respuestas de los alumnos del semestre agosto-diciembre de 2006 a las diversas actividades diseñadas con base en la descomposición genética. A lo largo del análisis, se hizo evidente que la acción de desglosar el problema para contar físicamente fue interiorizada por 95% de los alumnos, en un proceso que les permitía encontrar la solución. Esto puede observarse en la respuesta de un grupo de alumnos al problema 1 presentado anteriormente:

a) Los miembros del equipo hacen un diagrama para un modelo por color, potencia y transmisión, como acción para desglosar el problema y contar físicamente. Multiplican por 4, pues existen 4 modelos.

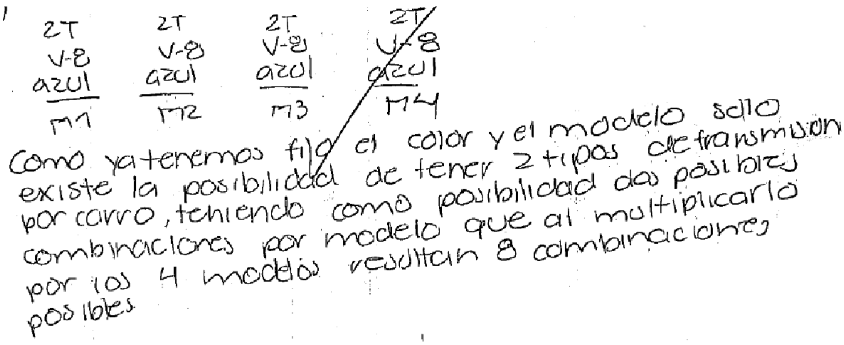


En los incisos *b* y *c* los alumnos solamente hacen la acción de multiplicar los datos que necesitan sin necesidad de dibujar un diagrama y contar físicamente.

b)



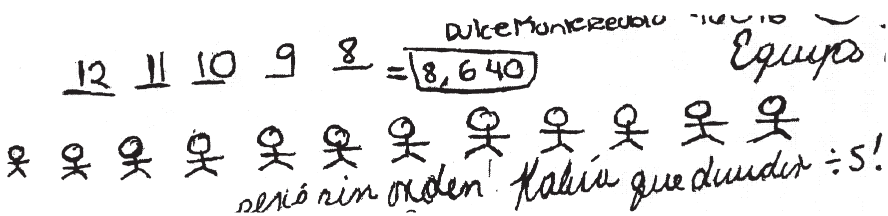
c)



En el análisis de los resultados de los alumnos se encuentran datos que muestran que han interiorizado las acciones de suma y enumeración de casos en un proceso en el que generalizan dichas acciones. Los alumnos poco a poco dejan de contar físicamente para introducir productos y, posteriormente, generalizan estos productos en fórmulas.

Sin embargo, en el caso de la serie diseñada con los problemas donde el orden no existe, los alumnos tuvieron dificultades. Únicamente un grupo de tres alumnos resolvió los problemas cuando los enfrentaron por primera vez. La información recabada se analizó con base en el marco teórico para averiguar si, efectivamente, los alumnos llevaban a cabo las construcciones mentales que se habían propuesto en la descomposición genética. El resultado de este estudio mostró que dicha descomposición no incluía la necesidad de realizar acciones específicas que permitieran a los alumnos distinguir entre los problemas que incluyen orden y los que no lo incluyen. Esto puede observarse en la respuesta de un equipo al problema 2, sin orden, presentado anteriormente:

Los miembros de un equipo resuelven la pregunta de forma incorrecta, pues cuentan como si hubiera orden. No escriben casos y no son capaces de responder la segunda parte.



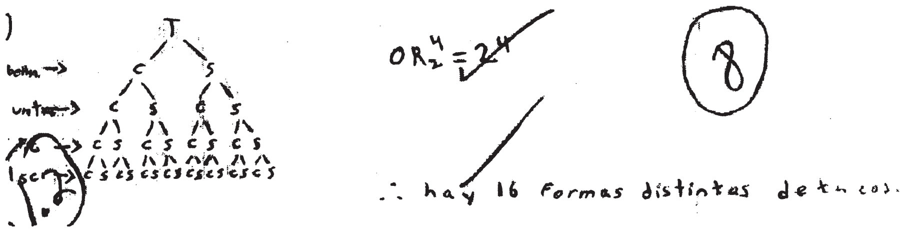
Como esta situación se presentó en las respuestas de todos los equipos, excepto uno, se consideró necesario refinar la descomposición genética para que diera cuenta de mejor manera de las observaciones del trabajo con los alumnos. Una vez refinada la descomposición genética, se rediseñó la serie de problemas sin orden y se probó en una segunda experiencia en la que se consideró la inclusión de problemas de distinta índole, a fin de que los alumnos efectuaran las acciones de comparar y diferenciar.

Los resultados del análisis de la solución del examen muestran evolución en la comprensión de los conceptos involucrados en el tema de conteo: ordenaciones y combinaciones. En un principio, todos excepto cuatro alumnos realizaban un diagrama o un dibujo o escribían los casos como acción para desglosar el problema y contarlos físicamente. Más adelante, interiorizaron estas acciones en un proceso que les permitía encontrar el resultado por medio de un producto. En el examen, únicamente seis alumnos requirieron un diagrama, cinco de ellos sólo lo usaron para comprobar su respuesta, utilizaron correctamente las fórmulas adecuadas y mostraron comprensión de sus distintas componentes.

Sólo un alumno no logró hacer la interiorización comentada anteriormente y su estrategia de solución continuó ligada a la acción de contar los casos explícitamente o hacer un diagrama a partir del cual sea posible contar.

En las respuestas de algunos alumnos al problema 3 del examen, presentado anteriormente, puede observarse un ejemplo que muestra que han interiorizado las acciones en un proceso que les permite el uso correcto de fórmulas.

En este caso, sólo un alumno hizo un árbol, pero lo hizo más bien con el objetivo de comprobar su respuesta, pues también incluye la solución mediante el uso de la fórmula.



Los demás alumnos resuelven correctamente, excepto uno que se olvida de la salsa y otro que considera que se puede o no pedir el taco. Todos los estudiantes reconocen que cada ingrediente puede o no estar presente en los tacos, por lo que hay dos opciones. Al parecer los alumnos ya no requieren en este momento hacer algún diagrama como acción para desglosar el problema y contar físicamente los casos.

El promedio del examen de conteo de 8.06 está muy por encima del obtenido por los alumnos de la misma maestra en semestres anteriores, que no pasaba de 6.

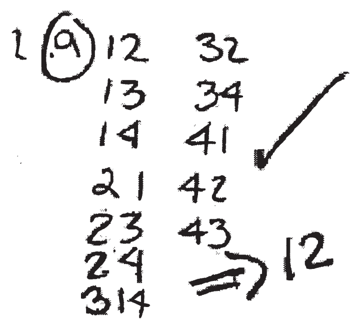
Segunda experiencia

Nuevamente, el análisis de los datos de esta experiencia muestra que la acción de desglosar el problema para contar físicamente fue interiorizada por 96% de los alumnos, en un proceso que les permite encontrar la solución mediante el producto de los datos relevantes o la aplicación de una fórmula.

Al introducir la nueva serie de actividades basada en la descomposición genética revisada, se encontró que se interiorizaron las acciones de comparar y diferenciar entre distintos tipos de problema y, en esta ocasión, los alumnos fueron capaces de distinguir cuándo un problema tiene orden y cuándo no lo tiene.

A continuación se muestra el trabajo de uno de los equipos al resolver el problema 4, presentado anteriormente, realizado a partir de la descomposición genética rediseñada.

a) Los miembros del equipo escriben todos los números como acción para desglosar el problema y contar físicamente.



b) Escriben el resultado correcto sin explicar su procedimiento.

c) y *d)* Explican correctamente.

(c) Que unos son # de 2 dígitos y los otr
son conjuntos (no importa el orden)

(d). Que como son de dos dígitos y en l
conjuntos no hay orden se reduce a la
mitad que si fueran dígitos.

Se reescribe la respuesta anterior, pues no está muy legible.

c) *Que unos son # de 2 dígitos y los otros son conjuntos (no importa el orden).*
d) *Que como son de dos dígitos y en los conjuntos no hay orden, se reduce a la mitad que si fueran dígitos.*

En esta pregunta, los miembros del equipo desglosan el problema para contar en el inciso *a*, pero en el inciso *b* escriben el resultado sin desglosarlo. Aun cuando no explican qué hicieron exactamente, la respuesta del inciso *d* muestra que dividieron para quitar el orden. Estos alumnos reconocen la diferencia entre los casos donde hay orden y donde no lo hay.

Posteriormente, los alumnos interiorizaron las acciones de desglosar y representan el problema en un proceso que las generaliza y los conduce a encontrar fórmulas generales. Un 23% de los alumnos incluso encapsuló la fórmula de ordenación en un objeto e hicieron en ella la división para quitar el orden, como se muestra en su solución al problema 5, presentado anteriormente, de la serie con y sin orden. El siguiente alumno utiliza la fórmula de ordenación como objeto.

D objetos y quieres escoger 10 objetos, ¿cuántas formas hay sin orden?

$O^{10}_{10} = \frac{10!}{(10-10)!} = \frac{10!}{0!} = 10!$

$\frac{O^{10}_{10}}{10!}$ → ya que no importa el orden. $= \frac{10!}{10!} = 1$

A continuación se presenta la solución de un alumno que utiliza la fórmula de combinación directamente.

10 objetos hay = n
Escoger 10 obj. = m
Sin orden

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{10!}{(10-10)!\,10!} = \frac{10!}{0!\,10!} = \frac{10!}{10!} =$$

$\therefore$ Solo hay 1 forma

El análisis del examen de conteo muestra la evolución de los alumnos en el conocimiento del tema de conteo: ordenaciones y combinaciones. Una vez más, se encuentra que 24% de los alumnos requiere un diagrama, entre ellos, 90% sólo lo utilizan para comprobar su respuesta. El uso correcto de las fórmulas y la explicación de sus distintas componentes indica que los alumnos han interiorizado las acciones en un proceso que les permite distinguir cuál fórmula usar en cada problema y cómo aplicarla correctamente. Siete alumnos dan muestras de haber encapsulado los procesos en un objeto que les permite plantear problemas donde se puedan usar dichas fórmulas y explicar cómo pasar de una fórmula a otra, lo que no se logró en la primera experiencia. A continuación se escribe la respuesta de un alumno:

Le inventé la letra $\rightarrow H = \dfrac{n!}{(n-k)!}$*, n es el número de elementos que puedo tomar, como no se repiten se ordenan de la forma n! Primero puedo elegir cualquier elemento, después elijo cualquiera menos el que ya elegí, al final sólo queda un elemento por ser elegido.* $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (1)$*. Sólo voy a tomar k elementos, entonces sólo se ordenan* $n\,(n-1)\,(n-2) \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Cuando sólo los quiero combinar, puedo usar la fórmula anterior, pero quitándole las formas en las que se podrían ordenar los elementos ya ele-

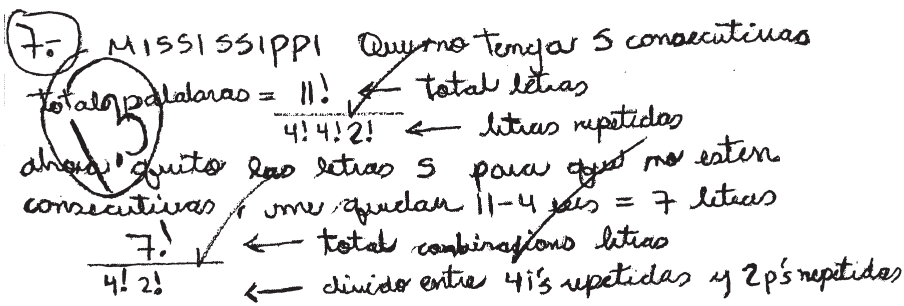
gidos, y ésa es la forma en la que se ordenan k elementos = k!, entonces, para quitarlo es $\dfrac{H}{k!} = \dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$.

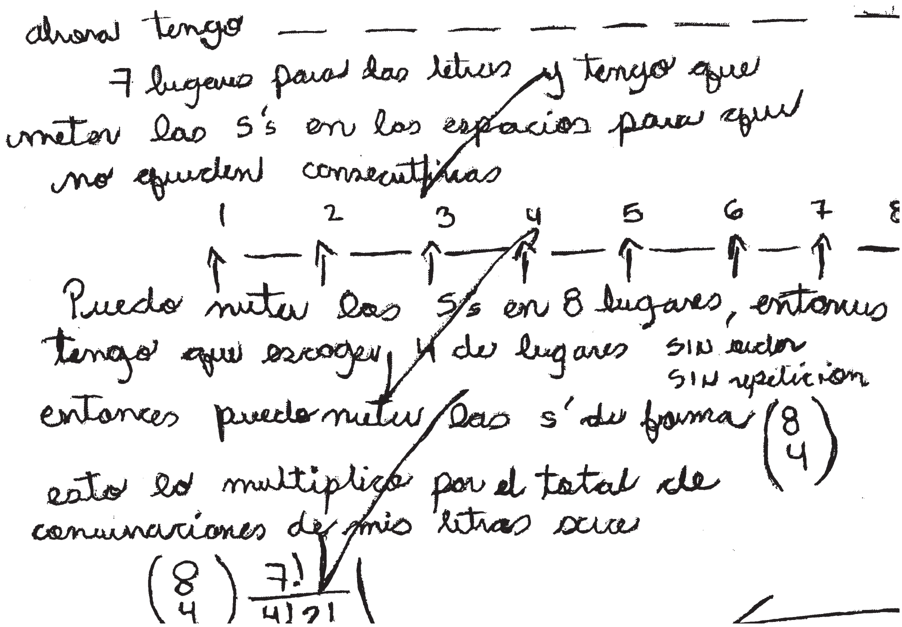
A continuación se transcribe el problema que un alumno plantea y resuelve explicando la fórmula que emplea.

Tengo 7 libros distintos y los quiero acomodar en un estante donde sólo quepan 4. ¿De cuántas formas lo puedo hacer?
m = 7, n = 4. $\dfrac{7!}{\left(7-4\right)!} = \dfrac{7!}{3!}$. *Explicación → tengo 7 y necesito acomodarlos sólo en 4 lugares* $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{7!}{3!}$.

Finalmente se muestra el problema 6, presentado en la metodología, donde se necesitan usar las fórmulas de ordenación y de combinación.

Separa las letras “s” de las demás letras. Reconoce que las demás letras tienen orden y utiliza la fórmula de permutación distinguible. Para las letras “s” reconoce que se trata de escoger lugares, por lo que no existe orden ni repetición. Usa la fórmula de combinaciones. Al final multiplica para encontrar el total de casos. Explica claramente todos los pasos.


7. MISSISSIPPI Que no tenga s consecutivas
total de palabras = $\dfrac{11!}{4!\,4!\,2!}$ ← total letras ← letras repetidas
ahora quito las letras s para que no esten consecutivas, me quedan 11-4 s's = 7 letras
$\dfrac{7!}{4!\,2!}$ ← total combinaciones letras ← divido entre 4 i's repetidas y 2 p's repetidas


ahora tengo _ _ _ _ _ _ _
7 lugares para las letras y tengo que
meter las S's en los espacios para que
no queden consecutivas
1 2 3 4 5 6 7 8
↑ _ ↑ _ ↑ _ ↑ _ ↑ _ ↑ _ ↑ _ ↑ _
Puedo meter las S's en 8 lugares, entonces
tengo que escoger 4 de lugares sin orden
sin repetición
entonces puedo meter las s' de forma $\binom{8}{4}$
esto lo multiplico por el total de
combinaciones de mis letras seria
$\binom{8}{4}\frac{7!}{4!2!}$

Nuevamente el promedio del grupo, 7.96, en este examen fue superior al de otros semestres.

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Uno de los objetivos de este estudio consistió en determinar si era posible diseñar una estrategia de enseñanza basada en una descomposición genética que permitiera a los alumnos construir los conceptos relacionados con el conteo, ya que la experiencia docente mostraba que son difíciles de aprender por parte de los alumnos.

Para responder esta pregunta, se diseñó una descomposición genética que sirvió como base para diseñar dos series de problemas relacionados con el conteo: unos problemas que incluyeran orden y otros, sin orden. Con base en los resultados obtenidos en la primera experiencia y a través del análisis de las construcciones que los alumnos requerían para lograr la construcción de los conceptos, se rediseñó la descomposición genética.

Es importante notar que, al parecer, no existen investigaciones acerca del aprendizaje del tema de conteo en la universidad, por lo que podría considerarse que la descomposición genética de los conceptos tratados en este trabajo constituye una contribución teórica al análisis de la enseñanza del conteo.

Ambas descomposiciones genéticas se utilizaron como base para el diseño de actividades que los alumnos resolvieron en repetidas ocasiones. El resultado del uso en clase del ciclo ACE con las actividades y de la metodología específica planteada permitió una clara evolución en la construcción de los conceptos involucrados en el conteo por parte de los alumnos.

Los resultados de la experiencia permitieron determinar las estrategias seguidas por los alumnos en la solución de los problemas. Cuando los alumnos enfrentaron los problemas por primera vez, sus estrategias consistieron en el uso de métodos gráficos que les permitieran organizar la información y contar las posibilidades de una en una. En la mayoría de los casos, los alumnos hicieron diagramas, enumeraron los casos y sumaron como acción para desglosar el problema y contar físicamente para encontrar el resultado. Poco a poco, estas acciones fueron interiorizadas en procesos en los que los alumnos eran capaces de detectar patrones en la información y utilizar operaciones para generalizar los patrones. Este uso de estos procesos culminó en la deducción de las fórmulas, lo que puso también en evidencia la interiorización de las primeras acciones en un proceso. Esta interiorización se refleja también en el uso de las fórmulas de manera efectiva y razonada en la solución de los problemas de conteo donde el orden fuera importante, lo cual puede considerarse como un indicio de la transición entre una concepción proceso y una, objeto.

La solución de problemas de conteo donde el orden no es importante provocó dudas que fueron difíciles de superar. Los alumnos no eran capaces de diferenciar entre los problemas que involucran conteo con orden y conteo sin orden; esto constituye un posible obstáculo en la construcción de los conceptos relacionados con este tema de las matemáticas y condujo a la refinación de la descomposición genética y al diseño de nuevas actividades que permitieran dicha diferenciación. Los alumnos de la primera experiencia resolvieron estos problemas utilizando las mismas estrategias que usaron al resolver los problemas con orden, es decir, siguieron manteniendo el orden. Los alumnos de la segunda experiencia no mostraron dichas dificultades. En ambas experiencias fue posible observar la evolución de la construcción de los conocimientos de los alumnos relativos al conteo. En la segunda experiencia, los alumnos lograron además diferenciar los distintos tipos de problemas de conteo y aplicar estrategias eficaces en la solución de los problemas.

Aunque el propósito de este trabajo no consiste en comparar el desempeño de los dos grupos utilizados en la experiencia, los resultados de este grupo que utilizó actividades diseñadas con base en la nueva descomposición genética fueron aún mejores que los del grupo de la experiencia anterior. Esto parece indicar que la descomposición genética refinada funciona adecuadamente para predecir las construcciones mentales que permiten a los alumnos construir los conceptos relacionados con el tema del orden.

CONCLUSIONES

La experiencia didáctica muestra que la construcción de los conceptos asociados al conteo es difícil para los alumnos; este trabajo muestra que estas dificultades pueden ser superadas mediante el diseño de una estrategia didáctica basada en consideraciones teóricas, en particular, en la teoría APOE.

El tema de conteo se introduce en muchas ocasiones en los niveles medio y medio superior: secundaria y preparatoria. El trabajo didáctico que se realizó en este trabajo no supone ningún conocimiento previo por parte de los alumnos. Por lo tanto, la descomposición genética desarrollada para esta experiencia podría ser también de utilidad para diseñar didácticas específicas para esos niveles. Las series de problemas que se diseñaron con base en la descomposición genética podrían utilizarse con alumnos de estos niveles. El análisis de la pertinencia, relevancia y efectividad de este diseño podría ser materia de una futura investigación.

Se encontró, en ambas experiencias, que pocos alumnos pudieron detectar los casos. Diferenciar distintos casos dentro de un mismo problema implica, en primer lugar, una comprensión profunda del problema. Además, este tipo de problemas requiere estrategias que no son fáciles de generalizar, sino que se necesita una experiencia que permita identificar las posibilidades de elección dentro del problema y clasificarlas por tipos que se tratan de manera específica.

El tema de conteo es muy amplio. En muchas ocasiones es necesario resolver problemas que se separan en casos. Sería conveniente diseñar una descomposición genética, basada en la que se propone aquí, que permitiera identificar las construcciones mentales de los alumnos cuando abordan este tipo de problemas.

ANEXO

Como un ejemplo del tipo de problemas incluidos en las experiencias informadas en este trabajo, a continuación se muestra la serie de problemas con orden que se aplicó en la primera y segunda experiencia, conjuntamente con su solución.

Problemas con orden

Pregunta 1

Se va a escoger un representante de alumnos de las carreras de matemáticas y actuaría. En la carrera de matemáticas hay cincuenta y cinco alumnos y en la de actuaría hay veinticinco alumnos. ¿Cuántos candidatos hay?

Solución: $55 + 25 = 80$ *candidatos.*

Pregunta 2

Una tienda tiene seis puertas. ¿De cuántas maneras es posible entrar por una puerta y salir por otra?

Solución: $6 \times 5 = 30$ *formas distintas.*

Pregunta 3

Los coches marca BMW se producen en cuatro modelos, ocho colores, tres potencias de motor y dos tipos de transmisión.

a) ¿Cuántos coches distintos pueden fabricarse?
b) ¿Cuántos coches distintos de color azul se pueden fabricar?
c) ¿Cuántos coches distintos de color azul y potencia de motor V-8 pueden fabricarse?

Solución:
a) $4 \times 8 \times 3 \times 2 = 192$ *coches distintos.*
b) $4 \times 3 \times 2 = 24$ *coches azules.*
c) $4 \times 2 = 8$ *coches azules y motor V-8.*

Pregunta 4

¿Cuántos viernes 13 puede haber en un año no bisiesto? ¿Cuál es el menor número posible?

Solución: asignar a cada día de la semana un número y encontrar qué día caía 13 de enero, 13 de febrero, etc. En un año no bisiesto puede haber uno, dos o tres viernes 13.

Pregunta 5

¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras a, b, c, d, e, e, e, e, e *de forma que ninguna letra* e *sea adyacente a otra?*

Solución: $4! = 24$ *maneras.*

Pregunta 6

En cierta transmisión existen dos sonidos, uno corto, llamado estrella, y uno largo, llamado diagonal. Con estos sonidos pueden formarse señales de uno, dos o tres sonidos. ¿Cuántas señales de un sonido, de dos sonidos y de tres sonidos existen?

Solución: 2 señales de un sonido, $2 \times 2 = 4$ *señales de dos sonidos y* $2 \times 2 \times 2 = 8$ *señales de tres sonidos.*

Pregunta 7

Las claves lada en cierta región son de tres dígitos, pero el dígito intermedio debe ser cero o uno. Las claves lada cuyos últimos dos dígitos son uno están siendo utilizadas para otros fines, por ejemplo, 911. Con estas condiciones, ¿cuántas claves lada hay disponibles?

Solución: $(10 \times 10) + (10 \times 9) = 190$ *claves lada.*

Pregunta 8

Las placas de los coches en una ciudad son de tres letras. Si se usa el alfabeto de veintiséis letras:

a) ¿Cuántas placas distintas hay?
b) ¿Cuántas placas comienzan con la letra q*? ¿Cuántas terminan con una vocal?*
c) Si no se permiten las repeticiones, ¿cuántas placas comienzan con la letra q*? ¿Cuántas terminan con la letra* q*? ¿Cuántas terminan con vocal?*

Solución:

a) $26 \times 26 \times 26 = 26^3 = 17\,576$ *placas distintas.*
b) $26 \times 26 = 26^2 = 676$ *placas que comienzan con q.* $26 \times 26 \times 5 = 5 \times 26^2 = 3\,380$ *placas que terminan con vocal.*
c) $25 \times 24 = 600$ *placas que comienzan con q.* $25 \times 24 = 600$ *placas que terminan con q.* $25 \times 24 \times 5 = 3\,000$ *placas que terminan con vocal.*

Pregunta 9

Sea A un conjunto con n elementos. ¿Cuántos subconjuntos tiene A?

Solución: $2 \times 2 \times ... 2 = 2^n$ *subconjuntos.*

Pregunta 10

Un profesor de matemáticas tiene siete libros en su librero. Tres son de matemáticas discretas y cuatro de álgebra superior. ¿De cuántas formas puede ordenar los libros si:

a) ¿No hay restricciones?
b) ¿Si se deben alternar las materias?
c) ¿Si todos los libros de matemáticas discretas deben estar juntos?
d) ¿Si todos los libros de álgebra superior deben estar juntos y los de matemáticas discretas también?
e) ¿Si los libros de matemáticas discretas deben colocarse de forma que tengan dos libros de álgebra superior a cada lado?

Solución:

a) 7! formas de ordenar los libros.
b) 4!3! formas de alternar las materias.
c) 5!3! formas de poner los libros de matemáticas discretas juntos.
d) 2!4!3! formas de poner los libros de matemáticas juntos y de álgebra juntos.
e) 3!4! formas de poner dos libros de álgebra a cada lado de los libros de matemáticas.

Pregunta 11

¿Cuántos enteros entre 10 000 y 100 000 están formados sólo por los dígitos 6, 7 u 8? ¿Cuántos habrá que no tengan más que los dígitos 6, 7, 8 o 0?

Solución: $3^5 = 243$ *números formados por 6, 7 u 8.* $3(4^4) = 768$ *números formados por 6, 7, 8 o 0.*

Pregunta 12

*Con las letras de la palabra "*superior*" (supóngase que las dos letras* r *son diferentes),*

a) *¿cuántas palabras se pueden formar?*
b) *¿cuántas palabras de cuatro letras se pueden formar?*
c) *¿cuántas palabras de doce letras se pueden formar?*

Solución:

a) *8! palabras.*
b) $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1\,680$ *palabras de cuatro letras.*
c) 8^{12} *palabras de doce letras.*

Pregunta 13

Con las letras de la palabra "dedo",

a) *¿cuántas palabras se pueden formar, suponiendo que las letras* d *son distintas?*
b) *¿cuántas palabras se pueden formar, suponiendo que las letras* d *son iguales?*

Solución:

a) $4! = 24$ *palabras.*
b) $\frac{4!}{2} = 12$ *palabras distintas.*

Pregunta 14

Se van a sentar siete personas en una mesa redonda.

a) *¿Cambia la distribución de las personas sentadas en la mesa si pides que todas se levanten y se muevan hacia la derecha dos sillas o hacia la izquierda tres lugares?*
b) *¿Cuántas distribuciones distintas de personas sentadas en la mesa existen?*
c) *¿Cuántas distribuciones distintas de personas sentadas en la mesa existen si hay dos personas que insisten en sentarse juntas?*

Solución:

a) *No, la distribución es la misma. Una permutación circular se considera igual cuando los elementos se rotan.*
b) *$(7-1)! = 6!$ distribuciones distintas.*
c) *$2!5!$ distribuciones distintas con dos personas juntas.*

Pregunta 15

¿Cuántos de los primeros 1 000 enteros tienen dígitos distintos?

Solución: $9 + (9)(9) + (9)(9)(8) = 738$ números.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala, M., A. Brown, J. Kleiman y D. Mathews (1998), "The development of students' understanding of permutations and symmetries", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. 3, núm. 1, pp. 13-43.

Cárdenas, H., E. Lluis, F. Raggi y F. Tomás (1979), *Álgebra superior*, México, Trillas.

Dubinsky, E. y W. Fenton (1996), *Introduction to Discrete Mathematics with ISETL*, Nueva York, Springer Verlag.

Dubinsky, E. y M. McDonald (2001), "APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research", en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Dordrecht Kluwer Academic Publishers, pp. 273-280.

English, L. (1993), "Children's Strategies for Solving Two- and Three- Dimensional Combinatorial Problems", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 24, núm. 3, pp. 255-273.

Gavilán, J. M., M. García y S. Llinares (2006), "El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva", *Educación Matemática*, Santillana, México, vol. 18, núm. 2, pp. 167-170.

Grimaldi, R. (1997), *Matemáticas discreta y combinatoria. Una introducción con aplicaciones*, Estados Unidos, Addison-Wesley Iberoamericana.

Kolman, B., R. Busby y S. Ross (1997), *Estructuras de matemáticas discretas para la computación*, México, Prentice-Hall Hispanoamericana.

McDonald, M. A., D. M. Mathews y K. H. Strobel (2000), "Understanding sequences: A tale of two objects", en E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kaput (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, Providence, American Mathematical Society, pp. 77-102.

Niven, I. (1995), *Matemática de las opciones o cómo contar sin contar*, Buenos Aires, Red Olímpica.

Reyes, A. (2005), *Álgebra superior*, México, Thomson.

Trigueros, M., A. Oktaç y D. Kú (2008), "Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE", *Educación Matemática*, México, Santillana, vol. 20, núm. 2, pp. 65-89.

DATOS DE LAS AUTORAS

Hilda Salgado
Departamento de Matemáticas,
Instituto Tecnológico Autónomo de México, México
famysusi@gmail.com

María Trigueros
Departamento de Matemáticas,
Instituto Tecnológico Autónomo de México, México
mtrigueros@gmail.com