La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares

Margarita Ramírez y David Block

Resumen: El papel de la noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria, y sobre todo el de su vínculo con la noción de fracción, no están claramente definidos en el currículo, al menos en México, ni tampoco en la enseñanza en el aula. Compartimos el punto de vista que considera que una de las fuentes de estas dificultades radica en la génesis de estas nociones, así como en la de su enseñanza. En la primera parte del texto presentamos aspectos importantes de estas génesis, en la segunda parte destacamos algunas de las numerosas dificultades que se suscitan en torno al vínculo razón-fracción en las clases impartidas por un maestro de sexto grado de primaria. Consideramos que este análisis constituye un aporte a la comprensión de la problemática de la enseñanza de la proporcionalidad.

Palabras clave: razón, números racionales, proporcionalidad.

Ratio and fraction: A difficult link in school mathematics

Abstract: The role of the notion of ratio in the primary school mathematics, especially that of its link with the notion of fraction, are not clearly defined in the curriculum, at least in Mexican's one, nor in classroom teaching. We share the point of view that attributes these difficulties mostly to the genesis of these notions, as well as to that of its teaching. In the first part of the text we present some relevant aspects of these geneses. In the second part, we stand out some of the various difficulties provoked by the link between ratio and fraction in the classes given by a teacher of sixth degree of primary school. We think that this analysis reaches to the comprehension of the problematic of proportionality teaching.

Keywords: ratio, rational numbers, proportionality.

Résumé: Le rôle de la notion de rapport dans les mathématiques de l'école primaire, et surtout celui de son lien avec la notion de fraction, ne sont pas clairement définis dans le curriculum, au moins au Mexique, ni non plus dans l'enseignement en

Fecha de recepción: 15 de agosto de 2008.

classe. Nous partageons le point de vue qui attribue ces difficultés, dans une bonne mesure, à la genèse de ces notions ainsi qu'à celle de son enseignement. Dans la première partie du texte nous présentons des aspects éminents de ces genèses, dans la deuxième partie nous détachons certaines des nombreuses difficultés qui ont lieu autour du lien rapport-fraction dans les classes conduites par un maître du sixième degré de l'école primaire. Nous considérons que cette analyse contribue à la compréhension de la problématique de l'enseignement de la proportionnalité.

Mots clés: rapport, nombres rationnels, proportionnalité.

INTRODUCCIÓN: EL PROBLEMA

La relación entre las nociones de razón y fracción en las matemáticas escolares es sutil, versátil y también confusa: las razones se suelen definir como fracciones, lo que lleva a preguntar, por ejemplo, ¿para qué queremos las razones si ya tenemos las fracciones?, ¿qué se gana con decir *m es a n* en lugar de *m/n*? o, recíprocamente, ¿qué aporta saber que a la razón "*m* es a *n*" corresponde el número *m/n*?

En el ámbito de la investigación, la noción de razón ha sido objeto de estudio independientemente de su vinculación con la fracción: en el contexto de la proporcionalidad, como relación que se expresa mediante dos cantidades (*n* a *m*; *n* de *m*, *n* por cada *m*, etc.), por ejemplo; desde la perspectiva del desarrollo conceptual (Noelthing, 1980; Karplus *et al.*, 1983), fenomenológica (Freudenthal, 1983; Streefland, 1985) y desde la didáctica (Block, 2006a), entre otras. En los estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales, las razones son tematizadas como uno de los significados (o constructos) posibles de las fracciones (*i.e*, Kieren, 1988). El interés se pone directamente en la fracción (y sus distintos significados) y no en lo que la precedió, es decir, las razones aún no expresadas con fracciones. Uno de los trabajos que abordan la cuestión de la articulación de las razones con las fracciones es el de G. Brousseau (1981) sobre una génesis escolar de las fracciones y los decimales, en el que las razones desempeñan un papel implícito como *precursoras* de las fracciones. Este papel se retoma y analiza explícitamente en diversas situaciones en el estudio de Block (2001, 2006*c*). En todos los casos, el interés de la noción de razón para el aprendizaje de las matemáticas parece ocurrir, sobre todo, antes de que ésta se exprese con una fracción o bien independientemente de la fracción.[1]

[1] Sobre el papel de las razones como precursoras de las fracciones, se recomienda también el texto de Nicolás Rouche (1992) acerca del sentido de la medida.

En el currículum y en los libros de texto, referentes básicos para el trabajo de los maestros, las respuestas a estas cuestiones han ido cambiando de manera importante a lo largo del tiempo y, en particular, en los últimos 50 años, como veremos más adelante. Actualmente, al menos en el caso del currículum mexicano, las respuestas no son suficientemente claras.[2] Los aportes de los trabajos de investigación aún no cristalizan en alternativas explícitas y estables.

Lo anterior permite anticipar que en el aula, último eslabón de la cadena de la transposición didáctica, habría cierta diversidad de respuestas, y probablemente también cierta confusión. El propósito del presente artículo es dar cuenta de estas dificultades. No pretendemos aportar respuestas a las preguntas que planteamos anteriormente, sino poner sobre la mesa pruebas, esta vez desde el tratamiento de los conocimientos en el aula, de que la relación entre las nociones de razón y fracción no está satisfactoriamente resuelta en las matemáticas escolares y, por tanto, requiere un considerable esfuerzo de reorganización curricular.

El trabajo forma parte de un estudio más amplio (Ramírez, 2004) en el que se analizan las formas sucesivas que asume la proporcionalidad en las reformas curriculares que se llevaron a cabo en México durante el siglo pasado, incluida la de 1993 todavía vigente, y se analiza la manera en la que un maestro desarrolla este tema en el aula: las situaciones que se ponen en juego, los recortes que se hacen sobre el contenido, los conceptos que se privilegian, las técnicas que se introducen y las nociones del currículo con las que se articula. En dicho estudio se llevó a cabo un seguimiento en el aula de una secuencia sobre este tema desarrollada por un profesor a lo largo de un ciclo escolar. Entre los aspectos que fueron identificados y analizados, expondremos en este texto el de la vinculación conflictiva entre las nociones de fracción y razón. Consideramos que la historia particular de la noción de razón y la de su enseñanza, de la que hablaremos en un primer momento, explican en parte las dificultades que encontramos en el salón de clases. Por otro lado, nos parece que conocer las dificultades concretas que nos deja ver el profesor observado, en su tenaz esfuerzo por organizar la enseñanza de este tema, contribuye a la comprensión de la problemática que se enfrenta en la enseñanza escolar.

[2] Por ejemplo, en el programa de quinto grado de educación primaria, aparece un contenido aislado, enigmático, sin antecedentes ni consecuentes, que dice: "la fracción como razón". En sexto grado no se menciona más la razón en el programa, pero en los libros de texto, bajo el tema de relaciones proporcionales, aparece un amplio trabajo sobre la noción de razón entre dos cantidades, en gran parte implícito.

BREVE MIRADA AL PASADO

En los textos clásicos sobre razones y proporciones, las nociones de razón y fracción pierden sus diferencias históricas para identificarse una con la otra, por ejemplo, Leyssenne (1913, p. 169, citado por Chevallard y Jullien, 1989, p. 124), señala que "una fracción puede ser considerada como una razón" y que "las razones desempeñan todas las propiedades de las fracciones, y todas las operaciones de cálculo se ejecutan tanto en unas como en otras".

Por otra parte, en numerosos libros de texto actuales, las razones se identifican con las fracciones, ya sea por definición o dándolo por hecho, sin que medie un trabajo de articulación. Por ejemplo, en la *Aritmética* de A. Baldor (1995, pp. 238, 496) dice: "como la razón geométrica, o cociente de dos cantidades, no es más que una división indicada o un quebrado, las propiedades de las razones geométricas serán las propiedades de los quebrados".

Esta identidad es resultado de dos historias que se entrecruzan, la de las matemáticas y la de su enseñanza. En la esfera de las matemáticas, las razones parecen haber sido primigenias: permitieron expresar, en las antiguas matemáticas griegas, relaciones entre números no múltiplos cuando únicamente los naturales eran reconocidos como números; permitieron dar cuenta, desde entonces, de relaciones entre magnitudes inconmensurables que mucho después se expresaron con números irracionales, por ejemplo, la identificación de que la razón entre el lado de un cuadrado y su diagonal es constante (Smith, 1958; Collette, 1998; Comin, 2000).[3] Así, las razones representaron, más de una vez, un

[3] "No se puede fijar con exactitud la fecha en la que surge la teoría griega de las proporciones, anterior al descubrimiento de la inconmensurabilidad de las líneas correspondientes a cantidades irracionales, pero su origen se remonta ciertamente a la época de los pitagóricos. Esta teoría numérica de las proporciones, que comienza con Pitágoras, era aplicable únicamente a magnitudes conmensurables [...] esta teoría de las proporciones será sustituida por la de Eudoxo para evitar la dificultad debida a los irracionales [...] El tratamiento de las magnitudes inconmensurables constituyó uno de los grandes triunfos de la matemática griega. El descubrimiento de estas cantidades irracionales se atribuye a los pitagóricos. Probablemente, se dieron cuenta de que no era posible medir la diagonal de un cuadrado con su lado" (Jean-Paul Collette, 1998, pp. 77-78).

"Los elementos de Euclides tratan separadamente la aritmética y las magnitudes, no sólo por tradición, sino también porque las razones de magnitudes inconmensurables no son reconocidas como números" (Comin, 2000, p. 38, anexos de la parte 2). "...Hasta el siglo XVI, las razones de magnitudes inconmensurables no tenían el estatuto de objetos matemáticos independientes de las magnitudes físicas. Los matemáticos no los consideraban como números susceptibles de sumar o multiplicar. Se habla de números obscuros, sordos, inexplicables, absurdos" (Comin, 2000, p. 44, anexos de la parte 2).

papel en la historia para permitir explorar una estructura numérica antes de que ésta se estableciera formalmente. Sin embargo, en la actualidad, cuando ya se dispone de los números reales y del álgebra, es probable que, en la esfera de las matemáticas académicas, las razones ya no cumplan ningún papel (Bosch, 1994; Chevallard y Jullien, 1989; Comin, 2002; Block, 2001).

> En la esfera de las matemáticas, a partir del siglo XVIII, la noción de razón de números perderá interés y será abandonada. Chevallard y Jullien (1989) señalan dos protagonistas de este cambio: los practicantes del cálculo de la Italia de los siglos XV y XVI, y el trabajo de teorización que requerían dichas prácticas y que permitió que el álgebra de los árabes se introdujera lentamente en la matemática europea; no así la razón entre magnitudes que permitiría dar cuenta de los irracionales hasta finales del siglo XIX (Block, 2001, p. 42).

Por otra parte, al mismo tiempo que el álgebra desplazaba a las nociones de razón y proporción en la esfera de las matemáticas académicas, en la segunda mitad del siglo XVIII, se creaba en la esfera de la enseñanza una teoría de las razones y las proporciones que se convertiría en un componente fundamental de los manuales de aritmética elaborados para la enseñanza. Dicha teoría no sólo ofrecía herramientas para abordar el vasto campo de problemas sobre proporciones, sino también, a través de las razones, un vehículo para introducir cálculos con irracionales (Chevallard y Jullien, 1989; Bosch, 1994).

Desde entonces y hasta mediados del siglo XX, las razones y las fracciones convivieron en la teoría de las razones y las proporciones, con un predominio creciente de las fracciones, pero sin que dicha teoría perdiera su identidad. Si bien las razones se definieron como fracciones, para la enseñanza se conservó toda una tecnología propia para tratar problemas de proporcionalidad directa e inversa.[4]

No fue sino hasta la segunda mitad del siglo XX cuando las orientaciones modernizadoras de las "nuevas matemáticas" llevaron, en varios países, a suprimir del currículo escolar el capítulo destinado a las razones y las proporciones, junto con muchas de las aplicaciones de dicha teoría. Se esperaba reemplazar una teoría ya obsoleta –para los matemáticos–, por herramientas algebraicas modernas (número racional, función). Sin embargo, tal sustitución acabó siendo

[4] En esta historia, el orden genético en el que las razones preceden a las fracciones resultará invertido: en la enseñanza, las razones se estudian una vez que ya se cuenta con las fracciones (Chevallard y Jullien, 1989). Véase también el excelente análisis de Marianna Bosch (1994).

muy parcial por más de un motivo: no se conocían (y quizás aún no se conocen) maneras adecuadas de introducir tempranamente herramientas algebraicas en la enseñanza,[5] los problemas de proporcionalidad llamados "concretos", esto es, problemas sobre magnitudes, siguieron siendo considerados importantes, pero las herramientas algebraicas resultaron poco adaptadas para resolverlos (Comin, 2002; Block, 2001).

En México, se dejó sentir la influencia modernizadora y la teoría de las razones y las proporciones como tal desapareció del currículo en la reforma de la década de 1970; en su lugar se empezó a hablar de *dependencias funcionales, factor de escala, factor de proporcionalidad* y *tablas de variación*. El manejo de un nuevo lenguaje no impidió continuar hablando de razones, aunque este concepto quedó aislado y con una articulación incierta con otros, por ejemplo, con las fracciones.

A partir de la década de 1980, el tema de la proporcionalidad tendió a reaparecer en los programas de los que había desaparecido, como en el nuestro, o en el de Francia, pero no como existió en la vieja teoría de las razones y las proporciones, sino que fue permeable a elementos procedentes de teorías más modernas, la de las fracciones y la de las funciones, de manera que, actualmente, las nociones de *razón* y *fracción* se confunden, y la noción de *relación proporcional* y la de *función* se intentan articular, no siempre con suficiente claridad. El mismo lenguaje de las proporciones refleja estos mestizajes, a menudo opacando o confundiendo

[5] "La comparación de los marcos, aritmético de la proporcionalidad y algebraico de la linealidad, muestra que el álgebra moderna no tiene en cuenta el estudio de las magnitudes. Recíprocamente, el acercamiento de los conocimientos matemáticos elementales con la proporcionalidad de las magnitudes hace difícil cualquier otro acercamiento con el álgebra moderna, pues, así como se conoce, no deja lugar:

- al razonamiento aritmético elemental que es reemplazado por el cálculo algebraico;
- a las magnitudes que no pueden figurar en las estructuras algebraicas actuales;
- a la teoría de las razones y proporciones que se ha vuelto caduca por el cálculo algebraico;
- a la proporcionalidad, que es reemplazada por la función lineal" (Comin, 2002, p. 172).

"La idea de utilizar las estructuras algebraicas para describir las relaciones entre magnitudes buscaría hacer aparecer a la proporcionalidad como una simple ilustración de la función lineal [...] Los disfuncionamientos observados tienen como origen:

- la desaparición en la enseñanza del estudio de las magnitudes, las razones y las proporciones;
- la dificultad de formular problemas antiguos en términos de problemas nuevos del álgebra;
- la imposibilidad de rechazar la linealidad que está omnipresente en la enseñanza;
- la inadaptación del vocabulario de la proporcionalidad para describir las relaciones numéricas" (Comin, 2001, p. 29).

los sentidos de las nociones: se habla de razón o de fracción, la razón se anota usando los dos puntos (*a*:*b*) o la notación de fracción $\frac{a}{b}$, y se sigue hablando de "medios y extremos", aunque se use la notación fraccionaria en la que ya no hay ni medios ni extremos; se habla incluso de *operador* o de *coeficiente de proporcionalidad* y de *razones escalares*, creando así términos compuestos con elementos de teorías distintas. Puede decirse que, en la actualidad, el tema de la proporcionalidad se encuentra desdibujado en el currículo.

RAZONES Y FRACCIONES EN EL AULA

Frente a los cambios mencionados en las propuestas curriculares y ante el "desdibujamiento" consecuente del tema de la proporcionalidad, nos preguntamos: ¿qué se entiende hoy día por proporcionalidad?, ¿qué se enseña sobre este tema y con cuál propósito?, ¿qué dificultades se enfrentan?

Para abordar estas cuestiones hemos utilizado distintos recursos: análisis del currículo (Ramírez, 2004; Block 2006*a*), aplicación de cuestionarios a maestros (Block, 2006*b*) y observación directa de secuencias didácticas en el aula. Los resultados que presentamos a continuación, como ya dijimos, se centran en la problemática de la vinculación razón-fracción identificada en el análisis de registros de clase.

METODOLOGÍA

Observamos una secuencia de 12 clases comunes, es decir, no experimentales, con una duración de 90 a 120 minutos cada una, en un grupo de sexto grado de una escuela pública urbana del D.F. El maestro es reconocido en la comunidad escolar como buen maestro; ha trabajado en la escuela primaria durante 18 años, de los cuales 10 han sido en sexto grado. Su formación es la normal básica (del plan de cuatro años) y la licenciatura de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN).

Los registros de clase se elaboraron con el apoyo de grabadora, lápiz y papel, procurando hacer descripciones muy detalladas del desarrollo de cada clase. Se consideraron las interacciones verbales entre maestro y alumnos y entre los propios alumnos en el seno de los equipos observados, las producciones públicas de los alumnos (las que fueron expuestas a toda la clase) y también algunas producciones privadas de los equipos que fueron observados. Se revisaron con frecuencia los cuadernos de los niños para tener una idea del trabajo realizado en las clases no observadas.

El análisis se centró en la secuencia de situaciones didácticas organizada por el profesor, particularmente en la manera en la que éstas ponen en juego y articulan los conocimientos matemáticos. Se observó el trabajo de los alumnos y se registró, pues constituye un referente fundamental para el maestro y, por lo tanto, conocerlo ayuda a comprender las decisiones tomadas por él.

El análisis de los registros se orientó por las preguntas generales que se plantearon al inicio de este apartado (*i.e.* ¿qué elementos del universo de la proporcionalidad aparecen y cómo aparecen?), elaboradas a partir de un estudio previo, matemático y didáctico, sobre la proporcionalidad y su enseñanza con el auxilio de herramientas de la teoría de las situaciones didácticas y de la teoría antropológica de lo didáctico.

Para interpretar y explicar lo que ocurre en el aula y para dar prioridad a la reconstrucción de la práctica en sí misma, destacando las propias interpretaciones y decisiones que el maestro toma antes, durante y después de la clase, se consideró también, de manera paralela, una forma de análisis de los datos empíricos, tributaria, en cierta medida, del acercamiento etnográfico: la descripción densa de la clase, la creación de algunas categorías a partir del análisis de lo observado (por ejemplo, "la organización de una secuencia en la que lo explícito precede a lo implícito"), la descripción acompañada de un trabajo teórico para explicitar las categorías elaboradas y el retorno a las propias clases.

Una vez analizados, los registros se integraron en cinco apartados que dan cuenta del trabajo del maestro con distintas nociones que configuran el campo de la proporcionalidad: *1)* la comparación aditiva y la multiplicativa: cuando lo explícito precede a lo implícito; *2)* la introducción perturbadora de la fracción como definición de la noción de razón; *3)* el porcentaje: lugar de encuentro y desencuentro de nociones, significados y ostensivos; *4)* la puesta en marcha de una técnica, la regla de tres; *5)* las tablas de variación proporcional: un espacio aislado de convergencia entre lo que espera el maestro y lo que hacen los alumnos.

Aspectos sobre la razón y la fracción derivados del análisis de los registros de clase

Para el desarrollo de las clases, el maestro decidió utilizar como principal referencia una propuesta didáctica que había sido elaborada un poco antes de la reforma curricular de 1993,[6] la cual, distanciándose del énfasis que se puso en la *variación funcional* en los materiales de la década de 1970, hace explícitas nuevamente las nociones de *razón* y *proporción*.[7] Si bien esta propuesta no se trasladó tal cual al aula, sí tuvo una fuerte influencia en las decisiones del maestro durante la clase, al retomar tanto la secuencia en general como algunas actividades específicas.

En la secuencia desarrollada a lo largo de 12 clases, el maestro enunció de manera explícita, clase por clase, los siguientes temas: comparación, razón, problemas (razón y fracción), dibujos a escala, porcentaje, porcentaje y ejercicios con razones, tablas de variación, tablas de variación y razón, variación proporcional y productos cruzados, regla de tres y, finalmente, regla de tres y variación directa e inversa.

Las fracciones estuvieron presentes prácticamente a lo largo de toda la secuencia de enseñanza de la proporcionalidad; iniciaron su incursión en situaciones de comparación en la primera clase y adquirieron una fuerte presencia en el momento de trabajar explícitamente con razones, escala y porcentajes. También estuvieron presentes al estudiar las tablas de variación y la regla de tres.

En la secuencia de clases observadas, se identificaron dos maneras de existir de la noción de razón, por un lado, *funcionamiento implícito* en los procedimientos de resolución de los estudiantes y, por otro lado, *definición explícita,* por el profesor, como fracción, situación que dio lugar a ciertas dificultades.

Presentamos a continuación tres de los aspectos de la relación razón-fracción identificados a lo largo de toda la secuencia.[8] Dada la necesidad de limitar la extensión del texto, no analizaremos por separado la propuesta consultada por

[6] La propuesta aparece en O. Figueras *et al.* (1992).

[7] La propuesta incluye diversas actividades, cada una con ejemplos y casos específicos, organizadas en los siguientes apartados: *1)* Comparar cantidades de diferentes maneras; *2)* Noción de razón y equivalencia; *3)* La razón como un número; *4)* Nociones de escala y su razón; *5)* Noción de porcentaje; *6)* Conexión entre fracción, razón y porcentaje; *7)* Ejercicios para profundizar en el concepto de razón; *8)* Diferentes tipos de variación; *9)* Variación proporcional y sus propiedades multiplicativas; *10)* El problema aditivo; *11)* Técnicas pre-proporcionales; *12)* Problemas razonables; *13)* Técnicas proporcionales; *14)* Problemas razonables (en el mismo sentido de *12*); *15)* Proporcionalidad inversa.

[8] En los registros de clase consideramos las siguientes abreviaturas: *Aa* (alumna), *Ao* (alumno), *Mo* (maestro).

el profesor ni, por lo tanto, las adaptaciones que él le imprime. Analizaremos directamente la secuencia producida, la cual constituye una realización del profesor que integra, modificándolos, distintos elementos de la propuesta mencionada.[9]

Efectos de la definición de las razones como fracciones

La razón "6 a 30", con el sentido de "5 veces", se convierte en $\frac{1}{5}$.

En una de las primeras clases, el maestro planteó un problema de escala para introducir la noción de razón; consistió en que los alumnos calcularan la medida de la amplificación, basándose en el primer resultado que proporcionó el maestro.

Dibujo		Amplificación	Razón	Fracción
altura del árbol	**6 cm**	**30 cm**	6 a 30	$\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$
altura de la casa	**4 cm**			
altura del letrero	**3 cm**			

Los datos destacados en negritas son los que el maestro proporciona inicialmente para resolver el problema.

Varios alumnos logran calcular correctamente las medidas, identificando y aplicando el factor constante (por 5). Otros proceden de manera aditiva, sumando a la cantidad inicial la diferencia entre 6 y 30, es decir, 24. El maestro recupera la respuesta correcta y llama "razón" a la relación entre 6 y 30, la cual lee como "6 a 30". Los alumnos escriben las razones *6 a 30, 4 a 20 y 3 a 15,* y se les hace observar que *son equivalentes,* porque en todas ellas el segundo término es 5 veces el primero. El maestro retoma una de las razones, "3 a 15", la escribe

[9] En D. Block *et al.* (2007), se profundiza acerca de los factores que favorecen o dificultan la apropiación de una propuesta curricular y los procesos que subyacen en los cambios en las prácticas de enseñanza de las matemáticas.

como fracción, $\frac{3}{15}$ y le pide a una alumna que le diga "qué es" esta expresión. La alumna contesta que se trata de "una fracción..." A partir de esta intervención, el maestro introduce el tratamiento de las razones como fracciones:

Mo: [dicta] *Las razones también se pueden escribir como fracciones comunes* [...]

Después de simplificar las expresiones $\frac{6}{30}$, $\frac{4}{20}$ y $\frac{3}{15}$, el maestro retoma la razón y destaca que ésta es *1 a 5*, escrita como $\frac{1}{5}$ y que se lee "uno sobre cinco":

Mo: [...] Vamos a usar los más pequeños [se refiere a la simplificación] en realidad, la razón de los 3 dibujos [...] *la razón es de 1 a 5* [señala los tres resultados] [...]

Mo: O sea*, 1 cm en este dibujo van a ser 5 en la ampliación*; [...] Todos nos salieron, los tres resultados lo mismo *1 sobre 5* o *1 a 5*. Lo vamos a encerrar así en rojo por favor... le escribimos: [el maestro dicta] *Quiere decir que 1 cm en el dibujo va a ser 5 cm en la ampliación.*

Con estas consideraciones, *6 a 30* equivale a *6 sobre 30,* y también a $\frac{1}{5}$. Teniendo en cuenta la actividad de origen –se multiplicaron las medidas por 5– las expresiones anteriores también tienen el sentido de *5 veces*. Probablemente fue la interpretación particular de las razones como fracciones lo que llevó al maestro a invertir las razones en juego en este problema: de "cinco veces" a $\frac{1}{5}$ y, en otro caso, pasan de "dos veces" a $\frac{1}{2}$, dejando ver que, para el profesor, "cinco" o "dos" no pueden ser razones, quizá porque esos números, al ser enteros, no son considerados fracciones. Esta situación fue frecuente; con mucha facilidad se cambió una expresión por su inversa, sobre todo en situaciones de escala.

Las razones se escriben como fracciones pero no se leen como tales.

Veamos algunas implicaciones de este vínculo de las razones con las fracciones. El maestro anuncia un tratamiento de las razones "como si fueran fracciones", pero sólo *a nivel de escritura*; en el problema de la amplificación de un dibujo que hemos citado anteriormente, cuando una alumna dice que la razón 6 a 30 es seis treintavos, el maestro aclara que se escribe como fracción, pero no se lee como tal:

Mo: Bueno, no la vamos a leer ahorita como fracción, pero sí la vamos a escribir así... 6 a 30 la puedo escribir así 6 a 30 [escribe $\frac{6}{30}$] ¿cuál es la razón de la altura de la casa del dibujo a la ampliación? [se refiere a la amplificación de 4 a 20.]
Ao: [...] cuatro veinteavos.
Mo: No, no, no, no, que me des la razón, la razón, la razón, no la fracción, la razón...

Los alumnos continúan con la lectura de la notación $\frac{a}{b}$ como una fracción; el maestro insiste en que quiere la razón y para ello introduce una nueva forma para nombrar la fracción, usando el término *sobre*. En lugar de decir 4 veinteavos, van a decir "4 sobre 20".

Mo: Y aquí en el dibujo eran 4 y después 20... escrito en fracción común, Janeth, ¿cómo va?
Aa: Cuatro veinteavos.
Mo: A ver, no le vamos a llamar ahorita, bueno, sí le podemos llamar así, pero podemos decir 6 sobre 30, sobre, a ver...

Los alumnos leen las otras expresiones, $\frac{4}{20}$ como "4 sobre 20" y $\frac{3}{15}$ como "3 sobre 15". Esta manera de expresar la razón se identifica con una noción que los alumnos ya conocen, la fracción, pero que usan en otro contexto, como partes de una unidad.

Probablemente porque el maestro conoce el significado de las fracciones $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$, como partes de unidad (un entero, partido en 5, o en 2, del que se toma una parte), no le parece correcto nombrar como "un quinto" a una relación que quintuplica o como "la mitad a una que duplica" y opta por otra manera de oralizar las fracciones-razones (1 sobre 5 o 1 a 5).

Las fracciones sustraen el sentido pero proporcionan la técnica.

Las fracciones se utilizan como un medio que posibilita el uso de algunas de sus propiedades, tales como la representación $\frac{a}{b}$ y la simplificación. Trasladados al dominio de las fracciones, el maestro propone usar las herramientas que están asociadas a ellas: ahora se tratará de simplificar las fracciones o las razones:

> *Mo:* [...] Bueno, ayer ustedes simplificaron fracciones, entonces me van a *simplificar estas fracciones* [se refiere a $\frac{6}{30}$, $\frac{4}{20}$ y $\frac{3}{15}$]... Me van a simplificar estas razones a lo más pequeño que se pueda, por favor...

Las razones, ahora fracciones, se manipulan con la técnica de éstas. Los alumnos simplifican y observan que en todos los casos les quedó igual: $\frac{1}{5}$.

En otra sesión, se plantea un ejercicio de "simplificación". La consigna es: *reduce lo más posible las siguientes razones*. El maestro aclara que reducir es lo mismo que simplificar. En sustitución del signo de igualdad (=), introduce el signo de equivalencia (≅) y aclara que *equivalente a* también quiere decir "que simplifiquen".[10]

Maestro y alumnos simplifican: $\frac{10}{15} \cong \frac{2}{3}$.

La equivalencia se establece en dos direcciones: una entre fracciones, 10 quinceavos es equivalente a dos tercios, y otra entre las fracciones $\frac{10}{15}$ y $\frac{2}{3}$ con las razones *10 de cada 15* y *2 de cada 3*.

> *Mo:* Diez quinceavos es equivalente a *dos tercios*... valen lo mismo... [es lo mismo que] tomar 10 de cada 15...
> *Mo. Aos:* (algunos) que dos de cada tres.

El paso de $\frac{10}{15}$ a $\frac{2}{3}$ significa ir de una razón a otra equivalente en cuyo tránsito intervienen, a nivel de lenguaje, las fracciones. La consigna se complementa

[10] El uso frecuente que se da a la equivalencia en situaciones de simplificación termina determinando una definición particular para esta noción.

con la petición de simplificar bien y rápido. El maestro continúa con el ejercicio, dicta fracciones, los alumnos escriben y simplifican en el pizarrón. En esta tarea, la atención se centra en las dificultades para simplificar: el maestro pone énfasis en las técnicas de simplificación, tales como quitar los ceros del numerador y del denominador, el uso de una tabla de multiplicar para obtener rápidamente el resultado o aplicar la misma operación, división o multiplicación, en el numerador y el denominador. Después de simplificar las razones, los alumnos no leen el resultado, así que no se puede saber si tienen presente la consigna de simplificar razones o si están aplicando una técnica sin tener en mente si son razones o fracciones.

Un ámbito en el que las fracciones logran integrarse un poco: las relaciones parte-todo

Cuando la relación que subyace en los problemas planteados es entre un todo y una de sus partes, las dificultades anteriores no se presentan porque, en primer lugar, las razones en juego ahora sí son fraccionarias. Además, en este tipo de relación, las fracciones tienen un significado cercano al de "partes de unidad", más conocido por los alumnos,[11] y, finalmente, las fracciones son unitarias. A continuación se analiza el desarrollo de la resolución de dos problemas y de un conjunto de ejercicios con estas características, planteados en la tercera clase.

> *Mo:* En un examen de 10 preguntas, Jorge contestó sólo 5. La razón de respuesta correcta es 1 de cada _____ preguntas [...] ¿Qué fracción contestó correctamente?

La relación en juego es parte-todo. En el problema se pregunta directamente por una razón expresada como "1 por cada x". La relación es muy sencilla, lo que permite a la mayoría de los alumnos encontrar la respuesta: "una pregunta de cada dos". Algunos se apoyan en gráficos para dar la respuesta:

[11] Una fracción, por ejemplo, $\frac{3}{4}$, definida como "partes de unidad", expresa la medida de una porción de la unidad en función de la unidad: aquélla que se obtiene partiendo la unidad en cuatro partes y tomando tres. La fracción $\frac{3}{4}$ también expresa, entonces, la relación entre el todo y la parte, aunque este segundo sentido, el de relación, queda implícito y subordinado al uso de la fracción para expresar una medida.

Ao: [...] contestó 5. [En el cuaderno tenían lo siguiente:]

/ / / / / / / / / /

Aunque no para todos está claro lo que significa "uno de cada dos", por ejemplo:

Ao: Que de dos preguntas sacó una buena, de 3 sacó dos, de 4 sacó 3 y de 5 sacó 4... [Escribió en el pizarrón lo siguiente:]

2 - 1
3 - 2
4 - 3
5 - 4

En seguida, varios equipos contestan sin dificultad la segunda pregunta: ¿qué fracción contestó correctamente? El maestro concluye:

Mo: [...] le ponemos *un medio*, que sería lo que tenemos acá de *la razón, una de cada dos* preguntas [...]

Así, se establece la equivalencia entre las relaciones *5 de 10, 1 de cada 2* y la expresión "*un medio*".

Cabe destacar que el maestro preguntó por la fracción después de que los alumnos ya habían identificado la razón simplificada (1 de cada 2), a través de preguntar *qué parte* de las preguntas son las que están bien contestadas y no, como en los ejercicios de escala, mediante un proceso de simplificación de fracciones. La fracción se introduce para cuantificar una parte en relación con el todo. Al realizarse esta vinculación, puede decirse incluso que se podría ampliar el sentido conocido de la fracción: $\frac{1}{n}$ significa normalmente para los alumnos dividir el entero en n partes iguales y tomar una de estas partes y, ahora, a través de este vínculo, puede significar también "tomar *1 de cada n*". La fracción se presenta como una manera alternativa de describir un operador.

El maestro aprovecha la cercanía entre el funcionamiento de las fracciones "como razones" en este tipo de contexto (relaciones parte-todo) con el ya conocido de las fracciones como partes de unidad para hacer explícito que se trata de lo mismo, procurando ayudar a los alumnos a integrar conocimientos:

Mo: Y esto, si lo echan a la memoria un poquito más atrás, esto es lo que les dijimos cuando empezamos a ver fracciones comunes, ¿sí?, tú [partes] tu pastel en 5 partes y tomas una, tomas una de las 5, esto es, ya ven que todo está relacionado, estamos regresando ahorita a lo primero que explicamos de fracciones, entonces una de cada 5, el equipo ganó la quinta parte [...]

Se tocó aquí una veta en la que hay varias interconexiones entre nociones (razón, división, fracción), una diversidad de procedimientos (los ligados a las fracciones o a la división) y problemáticas más complejas por resolver, por ejemplo, la del caso en el que la fracción no es unitaria como en "se ganaron 14 de 21 juegos".

Sin embargo, la veta no se explota más: el trabajo de resolución de problemas se termina aquí; lo que sigue es un paso hacia cierta mecanización de las relaciones, en donde los significados nuevamente parecen desvanecerse, como se muestra a continuación.

El maestro propone ejercicios para pasar de una notación a otra (razones a fracciones) y simplificar (razones). Primero se trata de escribir razones como fracciones:

Mo: [...] Bien, me van a escribir ahora [anota en el pizarrón:] *Convierte razones a fracciones*. Es muy sencillo, lo que acabamos de hacer... [escribe:] *1 de cada 2,* ¿cómo convierto la fracción? [escribe $\frac{1}{2}$] y lee "uno de cada dos" [...] En tu equipo hay una niña de chamarra verde [...] Son seis, y entonces eso... ésa es la razón y ahora convertida a fracción, pues quiere decir que de todo el entero, pues sólo hay un sexto que trae chamarra verde, ¿uno de cada cuántos de tu equipo?

Aa: Seis...

Mo: Son seis, y entonces, eso es la razón y ahora convertida a fracción pues quiere decir que de todo el entero, pues sólo hay un sexto que trae chamarra verde [...]

Aa: [*simultánemente* a la explicación del profesor escribe en el pizarrón:] 1 de cada 6 ____ $\frac{1}{6}$.

Después, se realiza el ejercicio inverso:

Mo: Un quinto quiere decir uno de cada 5, ¿qué quiere decir 3 octavos?
Ao: 3 de cada 8.
Mo: Eso...
Ao: [Escribe frente a $\frac{3}{8}$:] *3 de cada 8.*

Los contextos ya no están presentes, se trata de números abstractos. Los alumnos se van apropiando de una nueva manera de oralizar una fracción: $\frac{3}{8}$ se lee "tres octavos" y también "3 de cada 8". El problema "fuerte" de expresar una relación entre dos cantidades en la forma de razón simplificada y en la forma de fracción ya no se plantea aquí (por ejemplo, encontrar que 3 de 8 o $\frac{3}{8}$ es la razón simplificada que subyace en "15 juegos ganados de 40"). Cabe la duda de si permanecerá un sentido ampliado de las fracciones o sólo un nuevo ostensivo, una nueva manera de leer una fracción, en la que la barra horizontal se sustituye por la expresión "*de cada*".

No obstante, es posible decir que en este tipo de situaciones, el de las relaciones entre un todo y una de sus partes, la formulación de razones, su simplificación y su expresión mediante fracciones constituyeron tareas significativas para los alumnos, en el sentido de que éstos pudieron comprender lo que se preguntaba y poner en juego conocimientos adquiridos para tratar de contestarlas. Las situaciones, además, se prestaron para estudiar distintos acercamientos a una misma problemática: mediante razones o mediante fracciones.

Dos planos paralelos: las razones externas (fraccionarias) se enseñan pero no se usan; las razones internas[12] se usan pero no se enseñan

Durante la secuencia, el maestro planteó numerosos problemas de valor faltante y también de comparación de razones, con la expectativa de que los alumnos

[12] En el ámbito de la función lineal, la propiedad de la conservación de las razones internas se conoce como isomorfismo multiplicativo: $f(n\ x) = n\ f(x)$, mientras que la propiedad de la constancia de la razón externa corresponde a la definición explícita de la función lineal: $f(x) = kx$.

En los estudios en educación matemática sobre el objeto proporcionalidad, se hace referencia a estos dos tipos de relación; la nomenclatura varía en función del ámbito del que continuaran aprendiendo a aplicar las nociones de razón y fracción que se introdujeron en las primeras clases. Se trata de relaciones entre magnitudes de distinta naturaleza (kilómetros-litros de gasolina; kilómetros-horas, entre otras). La familiaridad con los contextos, aunada al hecho de que las relaciones y las medidas en juego no implican fracciones, permitió a varios alumnos echar a andar recursos intuitivos, principalmente basados en la conservación de las razones *internas*. Pero, desde la consigna misma y, sobre todo, a lo largo de la resolución, el maestro volvió a centrar la atención en la expresión de las razones *externas* con fracciones y en su simplificación. Nuevamente, el sentido de las resoluciones resultó opacado por este paso por las fracciones; el trabajo terminó por ocurrir en dos planos, el que propusieron los alumnos, uso implícito de las razones internas, y el que propuso el maestro, uso explícito de la razón externa. A la larga, los planos se tocaron cuando el maestro recuperó lo que hacían los alumnos, o bien, cuando algunos alumnos lograron *traducir* sus resultados en términos de fracciones.

Un ejemplo:

Un auto gasta 3 litros de gasolina en 48 km.
La *razón* es de ______ km por litro

La consigna sufre un desdoblamiento:[13] empieza con la solicitud de *la razón*, después son *dos razones*, en seguida *una fracción común* y después una *fracción común equivalente*.

Mientras los alumnos trabajaban, el maestro aclaró cuáles eran las dos razones que solicitaba:

---

se toma. Se hace referencia, por ejemplo, a la razón interna y externa (Freudenthal, 1980, pp. 293-295); a "*within ratios*" y "*between ratios*" (Noelthing, 1980; Karplus *et al.*, 1983); a operador escalar y operador función (Vergnaud, 1995), entre otros.

En el presente trabajo, en una relación entre dos conjuntos de cantidades, llamamos *razones internas* a las relaciones que se establecen en el interior de cada conjunto; estas relaciones son entre cantidades de una misma magnitud, escalares; consideramos como *razones externas* a relaciones entre una cantidad de un conjunto y la que le corresponde en el otro conjunto, por ejemplo, entre distancia y tiempo. Estas últimas dan cuenta de una nueva magnitud, una magnitud cociente, la cual puede tener un nombre propio (por ejemplo, *la velocidad*) o no tenerlo (Ramírez, 2004, p. 59).

[13] Llamamos efecto "desdoblamiento" al que sufre una consigna cuando, sobre la marcha, al planteamiento inicial se le incorporan otras peticiones, de tal manera que la tarea se hace más compleja. Este efecto fue frecuente en las clases observadas.

Mo: Me escriben las dos razones, por favor.
Ao: ¿Cómo?
Mo: [...] quiero que me lo escriban en fracción común, por favor las dos... equivalentes.
Ao: ¿Cómo?
Mo: Sí, fracción común equivalente [...]
Mo: O sea, la razón de los 48 kilómetros y luego la otra razón, la que sacaron, la nueva ["la nueva" es la de km por litro].

Se trata de las razones "48 km por 3 litros" y "16 km por litro". Pero, al mismo tiempo, el maestro solicita la expresión de dichas razones con fracciones equivalentes, puede ser la "razón" $\frac{1}{3}$, equivalente a $\frac{16}{48}$, o la "razón" $\frac{3}{48}$ equivalente a $\frac{1}{16}$.

Si bien en la consigna se demanda explícitamente "una razón", la redacción del problema permite comprender de qué se trata y qué es lo que hay que buscar: el número de kilómetros por litro. El problema puede resolverse mediante una simple división, la cual juega implícitamente como razón interna:

$$\begin{tikzcd} 3\ l \arrow[r] \arrow[d, ":3"'] & 48\ \text{km} \arrow[d, ":3"] \\ 1\ l & x\ \text{km} \end{tikzcd}$$

Varios alumnos resuelven el problema de esta manera, sin atender a las consignas adicionales.[14] Algunos calculan la tercera parte de 48 km:

Ao: Son 3 litros en 48 km y nos dice cuántos km recorre por litro, dividiríamos entre 3 los 48 km en los que gasta los 3 litros y así ya sabríamos cuál es la tercera parte de lo que recorre y la gasolina que gasta.

[14] Es decir, consideran la razón de las dos cantidades de litros –un litro es tres veces menos que 3 litros– y la razón de las dos cantidades de kilómetros –x km debe ser tres veces menos que 48 km–.

$$\begin{array}{ccc} & 3\ l \longrightarrow 48 \text{ km} & \\ :3 & & :3 \\ & 1\ l \longrightarrow 48:3 & \text{[tercera parte]} \end{array}$$

Otros alumnos escriben:

razón $\frac{48}{3}$; 16 km por litro.

Estos alumnos parecen haber resuelto como los anteriores, dividiendo entre 3 (conservación de las razones internas), pero intentan satisfacer la petición de expresar algo con fracciones. Expresan, sin saberlo, la fracción que más se acerca a lo que ellos hicieron (48:3). Ésta no es, sin embargo, en la que el maestro piensa, como se verá a continuación.

Para finalizar la tarea, el maestro escribe un procedimiento en el que utiliza fracciones equivalentes:

Mo: Si tengo 48 km para 3 litros, pues 1 litro me sale 16... 16 km por litro [escribe:] $\frac{3}{48} = \frac{1}{16}$
aquí está la fracción equivalente, vista desde acá para que no la vean como división por si se les dificulta, 1 por 3, 3; 16 por 3, 48, o de aquí para allá va a ser dividir 3 entre 3 a 1, 48 entre 3 a 16, pero allá andan con 12 [escribe en el pizarrón:]

$$\frac{1 \times 3 =}{16 \times 3 =} \frac{3}{48} \frac{: 3 =}{: 3 =} \frac{1}{16}$$

La razón y el sentido que ésta tiene en el problema se diluyen. Resulta difícil conciliar los procedimientos que propone el maestro: el primero, 48:3 = 16 y el segundo, el de las fracciones equivalentes $\frac{3}{48} = \frac{1}{16}$ en donde $\frac{1}{16}$ se interpreta como la razón "16 km por litro".[15] La aplicación de la tecnología de las fracciones

[15] La fracción que representa 16 km por litro es la que utilizaron los alumnos, $\frac{48}{3}$. La que utiliza el maestro, $\frac{1}{16}$, representa la fracción de litro por kilómetro. Nuevamente, el maestro invierte la razón en juego probablemente debido a la exclusión de las razones naturales.

elimina la relación con el contexto al dar prioridad a la relación numérica sobre la relación entre magnitudes.[16]

Volvemos a encontrar aquí la dualidad que ya hemos visto antes: uso implícito y funcional de una noción, conservación de las razones internas en contraposición con una expresión escrita, explícita, la razón externa como fracción (invertida), la cual no se logra articular con lo primero.

Veamos, brevemente, otro ejemplo:

Mo: Un auto va a 60 km por hora. ¿Cuánto tarda en recorrer 120 km? ¿Cuánto tarda en recorrer 30 km?

Mo: [...] las preguntas están muy sencillas, pero me lo van a escribir o con una tabla o con fracciones equivalentes.

Mo: [...] o como tres fracciones equivalentes [traza en el pizarrón:] ___ = ___ = ___

Se trata, en efecto, de un problema sencillo de valor faltante. Sin embargo, en las consignas adicionales se sugiere utilizar *una tabla* o *tres fracciones equivalentes*. También sobre la marcha el maestro les señala que las "razones son siempre dos cantidades".

Cuatro de los cinco equipos plantearon una tabla en la que usaron razones internas:

3 equipos		1 equipo	
km	**horas**	**km**	**horas**
30	$\frac{1}{2}$	30	$\frac{1}{2}$
60	1	60	1
120	2	90	$1\ \frac{1}{2}$
		120	2

[16] En los procesos de resolución de problemas concretos (sobre magnitudes), en determinado momento puede llegar a ser necesario desvincularse del contexto (más específicamente, de las magnitudes) para trabajar en el modelo numérico. Esto es frecuente cuando, por ejemplo, se utilizan herramientas algebraicas. El problema didáctico que subyace es: ¿en qué momentos y en qué condiciones deben llevarse a cabo estas separaciones del contexto de manera que no causen confusión a los estudiantes? Los abandonos súbitos de las magnitudes en los procesos de enseñanza de las matemáticas en la escuela suelen ser problemáticos.

Un equipo usó fracciones equivalentes y halló la siguiente respuesta:

$$\frac{0}{30} = \frac{1}{60} = \frac{2}{120}$$

Tal vez los alumnos, al escribir $\frac{0}{30}$ no pensaron en que la mitad de 1 es cero, sino que trataron de encontrar una regularidad numérica ($2 - 1 = 1$ y $1 - 1 = 0$). Como se verá en el extracto siguiente, el maestro intenta mostrar a los alumnos la falta de sentido al escribir $\frac{0}{30}$. El maestro atribuye este error a que los alumnos no saben escribir "un medio".

Mo: ¿Cero? [...] o sea, que para 30 km no hace nada de tiempo.
Mo: Pero dénse cuenta de qué mentira tan grande [...] o sea, la mitad de un bolillo, ¿cero? ¿Se desapareció el bolillo con decir quiero la mitad? [...] Lo que pasa es que ¿cómo pongo un medio? [...] hay muchas formas de poner un medio, ¿cómo pudieron haberlo puesto?
Ao: Punto cinco.

Al retomar la respuesta del alumno que contestó "punto cinco", el maestro hace intervenir las fracciones decimales y señala además que debieron usar lo que ya sabían:

Mo: [...] debieron haber usado hasta lo que ya sabían de fracciones decimales [...] *aunque se va a ver muy raro,* lo puedo poner así:

$$\frac{\frac{1}{2}}{30} \quad \text{o} \quad \frac{0.5}{30}$$

El interés del maestro por vincular razones con fracciones y por vincular al máximo los conocimientos enseñados entre sí puede llegar a producir escrituras que se alejan del contexto en el que los alumnos, con dificultad, tejen los sentidos de las nociones que aprenden.

Varios de los alumnos logran resolver los problemas apelando implícitamente a la conservación de razones internas, lo cual se traduce en multiplicar o dividir ambos términos de las parejas de cantidades por números naturales. Para los que aún no logran esto, no se da la ocasión de aprender a hacerlo, ya que estos procedimientos no son el objeto principal de la enseñanza.

El maestro, por su parte, a la vez que respeta, y en ocasiones favorece el uso de razones internas, pide una traducción a fracciones y una resolución "simplificando las fracciones". Dichas fracciones no expresan las razones que los alumnos utilizaron, las internas; expresan las razones externas, lo cual se hace más complejo por el hecho de que, además, las fracciones se invierten, la relación de kilómetros por litro $\frac{48}{3}$ se cambia a la fracción $\frac{1}{16}$ que expresa la fracción de litro por kilómetro. El resultado es la coexistencia de dos planos de resolución, el de los alumnos y el del maestro, los cuales apenas se tocan. Las fracciones viven en estas resoluciones como notaciones sin significado, cuya manipulación arroja, de manera velada, el mismo resultado que algunos alumnos obtienen por otros medios.

A lo largo de la secuencia, la atención se centró en el uso de fracciones para expresar y simplificar razones externas, dejando de lado el desarrollo de procedimientos más intuitivos; sin embargo, las fracciones no lograron articularse con los procedimientos utilizados por los alumnos; quedaron como una segunda manera de decir las cosas.

DISCUSIÓN

Se manifiestan varias problemáticas en el uso de las fracciones para expresar razones. Por una parte, la posibilidad de propiciar un desarrollo de procedimientos para resolver la variedad de los problemas de proporcionalidad que el maestro acertadamente propone se ve limitada por el hecho de que el maestro enfoca poco los procedimientos realmente utilizados por sus alumnos y propiciados por el tipo de problemas que él plantea, esto es, la conservación de las razones internas, o bien, en el caso del problema de la escala, la utilización de una razón externa natural no fraccionaria.

La introducción de las fracciones en el proceso de aprender a resolver problemas de proporcionalidad resultó problemática: en ciertos momentos, fue superficial, quedando como una manera más de nombrar las cosas, creándose con ello, en el nivel de representación simbólica, una identidad entre razón y fracción, pero con un significado poco claro para los alumnos. En otros momentos, las fracciones prestaron la técnica de la simplificación para comprobar que todas las razones en juego eran equivalentes, pero los alumnos no lograron articularlas con sus procedimientos, más bien, las fracciones tendieron a restar visibilidad a estos últimos. A esta situación hay que agregar la presencia de una interpretación particular (errónea) de razón como fracción que excluye a los números naturales.

Así, la introducción de la fracciones como definición de las razones parece aportar al trabajo de la proporcionalidad una tecnología,[17] la de las fracciones, cuya pertinencia pocas veces es clara, a la vez que suele despojar de sentido a los procedimientos desarrollados en la clase. El conflicto entre lo implícito funcional y lo explícito se presenta cuando este último no se construye a partir del primero, más bien lo niega, y no logra mostrar su funcionalidad.

Se identificó también un espacio en el que las dificultades anteriores no se manifestaron: cuando las relaciones en juego en los problemas fueron entre un todo y una de sus partes. En estos problemas, la razón externa sí fue una fracción y además unitaria. Resultó más natural para los alumnos apelar a fracciones debido a la cercanía con la definición que ellos conocen de fracción (partes de la unidad). En estas actividades, pudimos ver el inicio de un trabajo que parecía llevar a un enriquecimiento del sentido de las fracciones: *a/b*, ya no sólo como una unidad que se parte en *b* partes de las que se toman *a*, sino también como expresión de la relación *"a de cada b"*. El episodio, sin embargo, no fue lo suficientemente amplio.

Debemos aclarar que, desde nuestro punto de vista, las fracciones y los decimales sí pueden constituir una expresión muy útil de las razones. Con esa expresión es como cobran su mayor operatividad en el sentido de facilidad para el cálculo. También con esa expresión permiten poner de manifiesto, con la mayor claridad, la idea de razón constante entre cantidades variables. Hemos argumentado este punto de vista en varios trabajos (Block, 2006 *a* y *c*). Lo que hemos intentado mostrar en este artículo es que dicha función de las fracciones y los decimales como expresiones de las razones no está resuelta desde el punto de vista didáctico.

No sólo son diversas y han ido cambiando a lo largo de los años las maneras de enseñar la proporcionalidad y de articularla con otras nociones, también han cambiado los modos de definir el propio concepto de proporcionalidad y,

[17] En el sentido que tiene en la TAD (Teoría Antropológica de lo Didáctico), de conjunto estructurado y fundamentado de técnicas.

de hecho, hoy día no están dados en la cultura de manera unívoca y clara. La larga historia de la noción de proporcionalidad, su paso por varias épocas e instituciones, aunado al hecho de no pertenecer ya al *corpus* de saberes matemáticos actuales, origina, por una parte, la carencia de un marco claro que sirva de referencia para los maestros y los diseñadores de materiales curriculares y, por la otra, permite esperar cierta heterogeneidad en las prácticas concretas de la enseñanza.[18] Consideramos que hay un importante trabajo de diseño curricular por hacer, tanto en la educación básica como en la formación de maestros.

Finalmente, resulta interesante cómo, ante la ausencia de una propuesta didáctica consolidada, los maestros hacen una selección, organización e interpretación de un contenido integrando estos procesos huellas, indicios, de las distintas maneras en las que un saber específico ha vivido en el currículo. Esta serie de elecciones se torna más compleja si consideramos la presencia de referentes que trascienden el espacio del aula, condiciones externas que inciden en la selección e interpretación de una propuesta curricular; en palabras de Chevallard (1994, p. 315), "la clase es un sistema abierto", en donde no sólo se hace presente un saber, sino también las relaciones institucionales, de las cuales forman parte los programas y materiales de apoyo que se hacen llegar los docentes.

El análisis de la complejidad que subyace en el tratamiento actual de la proporcionalidad debe contribuir también a explicar las dificultades que se observan en las clases, más allá de las decisiones que los maestros toman en su trabajo individual.

Si bien la propuesta curricular que eligió el maestro constituyó un marco de referencia importante, en la clase coexistieron sus interpretaciones personales con la recuperación textual de algunas sugerencias y las intervenciones de los alumnos; esta convergencia, en la que se hacen explícitos vacíos, superposiciones y paralelismos en el proceso de enseñar y aprender, incide en la complejidad para identificar, caracterizar y explicar la multiplicidad de sentidos que se construyen en este espacio llamado clase. El hecho de que los maestros tejan sus clases con el hilo de las ideas disponibles, heredadas o compartidas acerca de los objetos de enseñanza, no significa que estén atrapados en ellas; está documentado que los cambios son posibles y los procesos de apropiación, complejos (Block, 2004).

[18] En un cuestionario que aplicamos a maestros sobre el tema de la proporcionalidad, solamente 32% de los participantes supo con certeza que una constante aditiva no caracteriza a una relación proporcional (Block, 2006*b*).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baldor, A. (1995), *Aritmética teórico-práctica*, México, Cultural.

Block, D. *et al.* (2007), "La *apropiación* de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria", *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, México, COMIE, vol. XII, núm. 33, pp. 731-762.

——— (2006*a*), "El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria", en R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano*, México, Díaz de Santos de México, Clame, pp. 455-470.

——— (2006*b*), "Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad", en *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Montevideo, Uruguay, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, vol. 19, pp. 675-680.

——— (2006*c*), "Se cambian fichas por estampas. Un estudio didáctico sobre la noción de razón 'múltiplo' y su vinculación con la multiplicación de números naturales", *Educación Matemática*, México, Santillana, vol. 18, núm. 2, pp. 5-36.

——— (2004) (coord.), "Papel del taller *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, en los procesos de apropiación de la propuesta curricular de 1993*", Informe final, Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

——— (2003), "De la expresión '2 de cada 4' a la expresión '1/2 de'. La noción de razón, precursora de la noción de fracción", en *Memoria electrónica del VII Congreso Nacional de Investigación Educativa*, Guadalajara, Jalisco.

——— (2001), *La noción de razón en las matemáticas de la Escuela Primaria. Un estudio didáctico*, tesis de doctorado, Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Bosch, M. (1994), *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, memoria para optar por el grado de doctor, Department de Matemàtiques, Facultat de Ciències, Universitat Autònoma de Barcelona.

Brousseau, G. (1981), "Problèmes de Didactique des Décimaux", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 2, núm. 1, pp. 37-127.

Collette, Jean-Paul (1998), *Historia de las matemáticas I*, México, Siglo XXI.

Comin, E. (2002), "L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 22, núms. 2-3, pp. 135-182.

——— (2000), *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes, et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire,* tesis de doctorado, École doctorale de mathématiques-informatique, Universidad de Bordeaux, Francia.

Chevallard, Y. y M. Jullien (1989), *Sur l'enseignement des fractions au collège. Ingénierie, recherche, societé,* Marsella, Francia, IREM d'Aix.

Figueras M., Olimpia, G. López Rueda y S. Mochón Rueda (1992), *Guía para el maestro. Sexto grado,* Educación primaria, México.

Freudenthal, Hans (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,* Dordrecht, Holanda, Reidel.

——— (1980), *An Example of Didactical Phenomenology. Ratio and Proportion. Weeding and Sowing,* Holanda, Reidel.

Karplus, R., S. Pulos y E. Stage (1983), "Proportional reasoning of early adolescents", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* Nueva York, Academic, pp. 45-90.

Kieren, T. (1988), "Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* vol. 2, Restom, National Council of Teachers of Mathematics, Lawrence Erlbaum, pp. 162-181.

Noelting, G. (1980), "The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I. Differentiation of stages", *Educational Studies in Mathematics,* Dordrecht, Holanda, Reidel, pp. 217-253.

Ramírez, M. (2004), *El saber enseñado: protagonista en la trama de acontecimientos en el aula. La proporcionalidad en sexto grado de educación primaria,* tesis de maestría, Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Rouche, N. (1992), *Le sens de la mesure,* Bruselas, Didier Hatier.

Smith, D. (1958), *History of Mathematics,* vol. II, Estados Unidos, Dover Publications.

Streefland L. (1985), "Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (towards ... a theory)", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 16, pp. 75-94.

Vergnaud, G. (1995), *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria,* México, Trillas.

——— (1988), "Multiplicative structures", en J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, vol. 2, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, Lawrence Erlbaum.

DATOS DE LOS AUTORES

Margarita Ramírez
Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México
mramirezba@yahoo.com.mx

David Block
Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México
dblock@cinvestav.mx