La comparación relativa de tamaños: un punto de partida alternativo y viable para la enseñanza de las fracciones

José Luis Cortina y Claudia Zúñiga

Resumen: Se analizan 14 entrevistas clínicas realizadas a todos los alumnos de un grupo de cuarto grado de primaria en una escuela pública mexicana. Se identifican la diversidad y la naturaleza de los razonamientos que surgieron entre los estudiantes al involucrarse en actividades didácticas que implicaron la comparación relativa de tamaños. Estas actividades se diferencian de las que se utilizan tradicionalmente en la enseñanza inicial de las fracciones en que no se fundamentan en la partición (o repartición) equitativa. Del análisis se desprende que actividades como las que se utilizaron pueden ser un punto de partida viable para la enseñanza de las fracciones.

Palabras clave: fracciones, números racionales, entrevistas clínicas, diseño de la enseñanza, educación primaria.

Abstract: Fourteen clinical interviews of fourth grade students from a Mexican public school are analyzed. The interviews included tasks in which students were asked to reason about the relative capacity of cups, specifically of how many of them could be filled with the milk contained in a milk carton. The analysis suggests that these activities could be a viable starting point for supporting students' learning of fractions; a starting point that can be an alternative to the "equal-partitioning" (or "equal-sharing") approach that has been traditionally used.

Keywords: fractions, rational numbers, clinical interviews, instructional design, elementary education.

INTRODUCCIÓN

En este artículo se analizan 14 entrevistas clínicas realizadas a todos los alumnos de un grupo de cuarto grado de primaria, en una escuela pública urbana

Fecha de recepción: 14 de enero de 2008.

del estado de Chiapas, México. Las entrevistas se realizaron con el propósito de identificar la diversidad y naturaleza de los razonamientos que surgirían entre los estudiantes al involucrarse en actividades didácticas que implicaran la comparación relativa de tamaños. Estas actividades se diferencian de las que se utilizan tradicionalmente en la enseñanza inicial de las fracciones en que no se fundamentan en la partición (o repartición) equitativa. Del análisis se desprende que actividades como las que se utilizaron pueden ser un punto de partida viable para la enseñanza de las fracciones, con el potencial de facilitar el desarrollo de nociones importantes de este concepto que no están siendo adquiridas por millones de estudiantes hoy día.

Al principio del artículo explicamos cómo nuestra investigación forma parte de la tradición en educación matemática que se ha preocupado por encontrar trayectorias de aprendizaje que permitan a los estudiantes apropiarse de ideas matemáticas importantes de manera eficaz. Después, identificamos en la literatura especializada elementos que podrían ayudar al diseño de una propuesta didáctica de las fracciones que se fundamentara en la idea de *tamaño relativo* y no en la de *partición equitativa*. Posteriormente, analizamos los resultados de nuestra investigación y explicamos cómo sugieren éstos que sería viable involucrar a niños que se inician en el aprendizaje de las fracciones en actividades didácticas basadas en la comparación relativa de tamaños.

REFERENTES TEÓRICOS

Las entrevistas clínicas que analizamos en este artículo fueron realizadas con el propósito de contribuir a la creación de una propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones, siguiendo el marco propuesto por Paul Cobb y sus colegas (cf. Cobb y McClain, 2004; Cobb, 1999; Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack, 2000; Stephan, Cobb, y Gravemeijer, 2003) para el diseño de la enseñanza (*instructional design*) en matemáticas.[1] Este marco implica el desarrollo simultáneo de secuencias de enseñanza (*instructional sequences*) y de los supuestos teóricos que las sustentan. Dichos supuestos se expresan en la forma de *trayectorias hipotéticas*

[1] El marco propuesto por Cobb y sus colegas para el diseño de la enseñanza retoma elementos de la *educación matemática realista* (Streefland, 1991; Treffers, 1987), de la *epistemología genética* de Jean Piaget, del *constructivismo pragmático* de John Dewey y del *interaccionismo simbólico* de Herbert Blumer (cf. Cobb, 1999; Cobb y McClain, 2004; Cobb, Zhao y Visnovska, 2008).

de aprendizaje (Simon, 1995), las cuales se conforman con conjeturas respecto a los patrones sucesivos de razonamiento que seguirían los alumnos en su aprendizaje y a los medios a través de los cuales se podría apoyar el surgimiento de estos patrones sucesivos (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003).

Dos elementos importantes de una trayectoria de aprendizaje son la especificación de las formas de razonamiento a las que se quiere que lleguen los estudiantes –sobre la idea matemática que se está trabajando– y el punto de partida de la enseñanza. Este último implica la especificación de formas de razonamiento en las que los alumnos podrían involucrarse con relativa facilidad y cuya evolución hacia formas más complejas de razonamiento podría promoverse con la enseñanza.

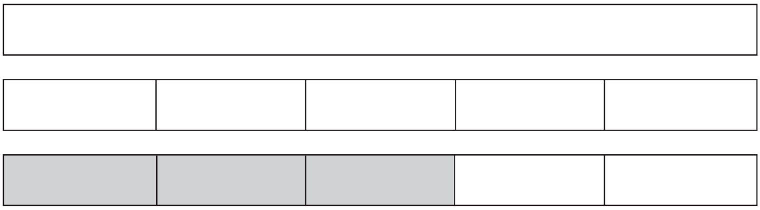
Así pues, en consistencia con el marco propuesto por Cobb y sus colegas, nuestra investigación se realizó con el objetivo de identificar la diversidad y naturaleza de los razonamientos que surgirían al involucrar a niños en actividades didácticas basadas en la comparación relativa de tamaños. Con ello buscamos determinar si este tipo de actividades podrían ser un punto de partida viable para una trayectoria de aprendizaje de las fracciones, fundamentada en nociones distintas a la partición y a la repartición.

ANTECEDENTES

La enseñanza inicial de las fracciones

Los educadores matemáticos se han preocupado durante muchos años por cómo introducir a los estudiantes en el uso del sistema de numeración que expresa cantidades como la división de dos números naturales (*i.e.*, $\frac{a}{b}$). La preocupación ha consistido en desarrollar actividades que, por una parte, sean accesibles y significativas para los alumnos y que, por otra, constituyan una base firme para el desarrollo de nociones relativamente complejas sobre el sistema (cf. Lamon, 2007), nociones como las que se requerirían para ubicar fracciones en la recta numérica (Bright, Behr, Thomas y Wachsmuth, 1988; Hannula, 2003; Hart, 1989; Saxe *et al.*, 2007). La partición equitativa ha sido la aproximación que se ha preferido. Desde esta aproximación se espera lograr que los alumnos entiendan el denominador de una fracción como un número que cuantifica el tamaño de pedazos producidos a través de la segmentación homogénea de un entero, y el numerador como un número de esos segmentos (véase la figura 1).

Figura 1 Representaciones de un entero, quintos y $\frac{3}{5}$ según la aproximación de partición equitativa



La preferencia por la partición equitativa se debe, en buena medida, a que desde edades tempranas los estudiantes pueden involucrarse de manera significativa en actividades que implican dividir (*e.g.*, doblar) y repartir (cf. Pitkethly y Hunting, 1996). No obstante, varios autores han cuestionado la pertinencia pedagógica de la partición equitativa, basándose tanto en el análisis de datos empíricos como en el análisis de tipo conceptual. En el primer caso, se ha documentado que muchos alumnos, que han sido introducidos al mundo de las fracciones bajo el modelo de la partición equitativa, suelen interpretar los dos números de una fracción como cantidades que expresan *cuántas cosas hay*. Por ejemplo, Hannula (2003) identificó que las dificultades de muchos adolescentes en entender una fracción como un número en la recta numérica estaban vinculadas a una concepción inadecuada de la partición equitativa. Estos adolescentes parecían interpretar una fracción como $\frac{3}{4}$ como algo que expresaba "tres de cuatro partes", con lo cual entendían el denominador de la fracción como algo que cuantificaba cardinalidad (cuatro cosas) y no tamaño (segmentos de un tamaño tal que cuatro de ellos equivalen al tamaño de un entero). Formas análogas de concebir inadecuadamente las fracciones, vinculadas a la partición equitativa, han sido documentadas recurrentemente durante las últimas dos décadas (*e.g.*, Bills, 2003; Brown, 1993; Hart, 1989).

A pesar de que la gran mayoría de las investigaciones en el campo de las fracciones se han realizado fuera del ámbito latinoamericano, existen pruebas de que también en esta región muchos estudiantes no logran entender el concepto de fracción de manera satisfactoria. Una muestra de ello es el estudio realizado por el Instituto Nacional de Evaluación para la Educación (Backhoff, Andrade, Sánchez, Peón y Bouzas, 2006), en el que se identificó que únicamente 5.3% de los estudiantes mexicanos de sexto grado tenían 67% o más de probabilidad de reconocer una fracción como $3\frac{2}{5}$ como mayor a $3\frac{1}{4}$, pero menor a $3\frac{1}{2}$.

Sería erróneo atribuir directamente estos pobres resultados al uso de la partición equitativa como recurso típico para introducir las fracciones en la educación básica en México. Sin embargo, con base en trabajos como los de Hart (1989) y Hannula (2003), es razonable conjeturar que esta manera de introducir las fracciones puede no ser del todo favorable para muchos estudiantes, tanto en México como en el resto del mundo.

La comparación relativa de tamaños

Desde la perspectiva conceptual, también ha habido varios autores que han cuestionado la utilidad de la partición equitativa en la enseñanza de las fracciones. Kieren (1980) y Behr, Harel, Post y Lesh (1992) reconocieron la partición equitativa como sólo un aspecto del constructo *número racional* y consideraron que la enseñanza de las fracciones no debía limitarse a ella. Estos autores recomendaron la inclusión de situaciones de enseñanza en las que se abordaran otras maneras de interpretar las fracciones, incluidos *medición, cociente, operador* y *razón*. Estas recomendaciones han tenido gran aceptación (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2005; Pitkethly y Hunting, 1996) y han sido adoptadas en la elaboración de importantes documentos curriculares, incluidos los Estándares del Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas en Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) y el plan y los programas de estudio oficiales en México (Secretaría de Educación Pública, 1993).

Otros autores han hecho críticas más profundas al uso de la partición equitativa como recurso para enseñar fracciones, cuestionando su pertinencia íntegramente. Freudenthal (1983) reconoció la *medición* y la *proporcionalidad* entre las nociones fundamentales asociadas al uso de los números racionales positivos (*i.e.*, fracciones). Tomando esto como base, consideró que la partición equitativa era "demasiado restringida no sólo fenomenológica sino también matemáticamente" (p. 144) por estar, en principio, limitada a la generación de fracciones propias. Este autor etiquetó la partición equitativa con el término *fracción como fracturador* y la consideró "no solamente un comienzo muy limitado" sino también "insuficiente" y le pareció extraño que "todo intento innovador haya omitido este punto" (p. 147). Para Freudenthal una aproximación más productiva sería la de *fracción como comparador,* la cual se fundamentaría en "el poner magnitudes en razón, una con otra" (p. 149).

Thompson y Saldanha (2003) también consideraron que es inadecuado utilizar la partición equitativa como recurso para introducir las fracciones. Para estos autores:

> El sistema de operaciones conceptuales que compone el esquema de fracción se basa en concebir dos cantidades como si estuvieran en una relación recíproca de tamaño relativo: *El que la cantidad* A *sea 1/*n *del tamaño de la cantidad* B *significa que* B *es* n *veces del tamaño de la cantidad* A. *El que la cantidad* A *sea* n *veces el tamaño de la cantidad* B *significa que* B *es 1/*n *del tamaño de* A (p. 107; énfasis en el original).

Estos autores coincidieron con Freudenthal en identificar las comparaciones de tipo razón[2] (o tamaño relativo) como el fundamento fenomenológico de las fracciones. También coincidieron con Freudenthal en considerar la partición equitativa como inadecuada. Thompson y Saldanha opinaron que la partición equitativa orienta a los estudiantes a razonar sobre las fracciones en términos de "adición inclusiva –que $1/n$ de B es uno de los pedazos de una colección– sin fundamentarlo en una imagen de tamaño relativo" (p. 108). Ellos afirmaron que:

> Cuando la imagen que tienen los estudiantes de las fracciones es de "tantos de tantos", posee un sentido de inclusión –el primer "tantos" tiene que estar incluido en el otro "tantos". Como resultado, los estudiantes no aceptarán la idea de que podemos hablar del tamaño de una cantidad como una fracción del tamaño de otra cuando éstas no tienen nada en común. Aceptarán "El número de chicos es qué fracción del número de niños [chicos y chicas]", pero se confundirán con "El número de chicos es qué fracción del número de chicas" (p. 105; comillas en el original).

[2] En la educación matemática, el término razón ha sido utilizado de forma ambigua (Clark, Berenson y Cavey, 2003). En algunas ocasiones se ha considerado sinónimo de términos como *tasa, proporción, número racional* o *fracción* y, en otras, como diferente a algunos de estos términos o a todos ellos. En este artículo entenderemos el término razón como un número que cuantifica la relación multiplicativa entre dos medidas extensivas. Con base en esta definición, si a y b son dos medidas extensivas (*e.g.*, dos longitudes) y x es el factor por el que se multiplica b y se obtiene a ($\mathrm{x}b = a$), entonces x es una razón ($\mathrm{x} = a/b$).

De los análisis conceptuales de Freudenthal (1983) y de Thompson y Saldanha (2003) surge una pregunta importante: ¿Qué características podrían tener actividades de enseñanza de las fracciones fundamentadas en la comparación relativa de tamaños, que fueran accesibles y significativas para quienes se inician en el aprendizaje del sistema de cuantificación racional? A continuación revisamos algunas investigaciones que ayudan a responder esta pregunta, al menos parcialmente.

Elementos de una propuesta alternativa

En las investigaciones que realizaron Steffe y sus colegas (Hackenberg, 2007; Olive, 1999; Olive y Steffe, 2002; Steffe, 2002, 2003, 2004; Tzur, 1999) es posible reconocer elementos útiles para el diseño de propuestas que introduzcan a los estudiantes en la comprensión del sistema de cuantificación racional de manera consistente con las ideas de Freudenthal (1983) y de Thompson y Saldanha (2003). Steffe y sus colegas realizaron investigaciones que tuvieron como objetivo estudiar el desarrollo cognitivo de la noción de fracción desde una perspectiva piageteana. Estas investigaciones implicaron la conducción de intervenciones educativas relativamente largas (algunas de más de un año) con grupos muy pequeños de alumnos (por lo general dos) de cuarto, quinto y sexto grados. A pesar del enfoque predominantemente psicológico de estas investigaciones y de que en ellas no se priorizó la elaboración de propuestas didácticas alternativas a la partición equitativa, es posible reconocer en ellas elementos útiles para el desarrollo de propuestas de enseñanza de las fracciones consistentes con las ideas de Freudenthal (1983) y de Thompson y Saldanha (2003).

En sus intervenciones educativas, Steffe y su equipo se apoyaron en el uso de herramientas computarizadas, las cuales utilizaron para representar magnitudes de manera que su segmentación implicara una sola dimensión (véase la figura 2). La aproximación unidimensional a las fracciones parece ser propicia para orientar a los estudiantes a pensar en las fracciones como números que cuantifican tamaños

Figura 2 Segmentación unidimensional de una barra de dulce

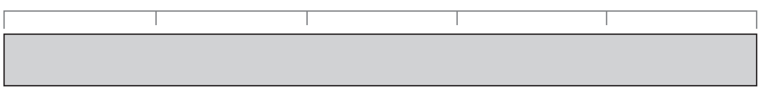
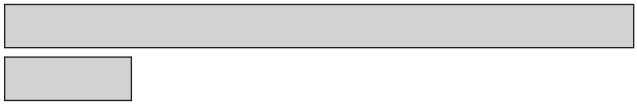


Figura 3 Representación de $\frac{1}{5}$ de una barra de dulce como algo externo a la barra de referencia



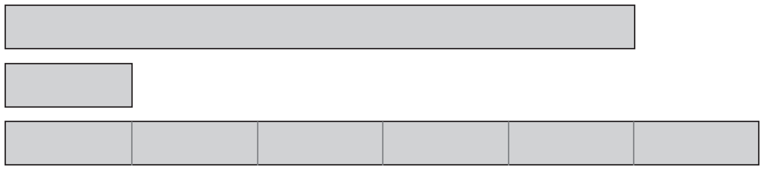
(y no únicamente número de cosas) y para facilitar el que –a la larga– puedan ser interpretadas como puntos en la recta numérica.

Una segunda característica relevante de las intervenciones de Steffe y su equipo fue presentar a las magnitudes cuantificadas por las fracciones como algo externo al entero. En las actividades que diseñaron, se representaron cantidades fraccionarias de dulce como algo que no estaba contenido en la barra de dulce entera que servía de referencia (véase la figura 3). Este tipo de representaciones parece tener el potencial de facilitar la visualización de las fracciones como números que cuantifican el tamaño de algo en relación con otra cosa, o sea, como números que cuantifican tamaño relativo.

Este tipo de representaciones también parece facilitar la comprensión de que es posible establecer el tamaño relativo de algo frente a otra cosa, incluso cuando ese algo no forma parte de la cosa; esto es, parece facilitar el que –a la larga– se pueda comprender una fracción como algo que cuantifica el tamaño relativo de la población de una ciudad (*e.g.*, Monterrey) frente a la de otra (*e.g.*, Guadalajara). Además, estas representaciones parecen ser propicias para ayudar a ver las fracciones impropias como cantidades legítimas y razonables; por ejemplo, pueden ayudar a entender la fracción $\frac{6}{5}$ como el tamaño de algo que es seis veces $\frac{1}{5}$ el tamaño de otra cosa (véase la figura 4; cf. Hackenberg, 2007; Tzur, 1999).

El aspecto más sobresaliente de las intervenciones educativas de Steffe y su equipo es haber orientado a los alumnos a pensar en los pedazos fraccionarios individuales (*i.e.*, fracciones unitarias) no únicamente como el resultado de partir equitativamente el entero sino, predominantemente, en términos de cuántas iteraciones (o copias) de ese pedazo implicarían algo que fuera del mismo tamaño que el entero. En la aproximación a las fracciones unitarias de Steffe y su equipo no se buscaba orientar a los estudiantes a pensar en el tamaño que una fracción unitaria cuantifica en términos de un *cociente partitivo*, de manera que $\frac{1}{5}$ de una barra de dulce se interpretara como la cantidad de dulce contenida en los pedazos producidos a través de partir equitativamente una barra en cinco

Figura 4 Representación de $\frac{6}{5}$ como seis veces $\frac{1}{5}$

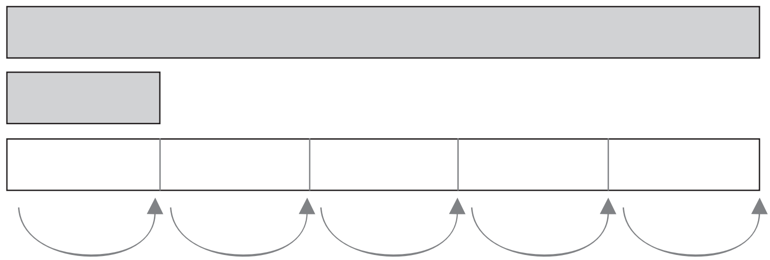


(véase la figura 1). En lugar de ello, en su aproximación se buscaba orientar a los estudiantes a pensar en una fracción unitaria en términos de *multiplicandos* que satisficieran un criterio iterativo específico, de manera que $\frac{1}{5}$ de una barra de dulce se interpretara como una cantidad tal que, si se tuvieran cinco de ellas, se tendría la misma cantidad de dulce contenida en una barra completa (véase la figura 5).

El orientar a los estudiantes a pensar en las fracciones unitarias como multiplicandos parece favorecer que sean concebidas como números que cuantifican tamaño, por tratarse del tamaño de una sola cosa. En la aproximación de partición equitativa se orienta a los estudiantes a pensar en la fracción $\frac{1}{n}$ como algo que expresa el tamaño de todos los pedazos (o segmentos) producidos al dividir un entero en n partes. De esta manera, se presenta el *aspecto cardinal* del denominador (*i.e.*, "se parte el entero en n partes iguales") antes que el *aspecto tamaño* (*i.e.*, "de modo que todas las partes tengan el mismo tamaño"). Por ejemplo, desde esta aproximación se espera que los estudiantes, al interpretar la fracción $\frac{1}{47}$, se imaginen un entero partido equitativamente en 47 partes iguales (cardinalidad), después, el tamaño común que tienen las 47 partes (*tamaño*) y, finalmente, una de ellas, la que sea.

En contraste, en la aproximación de Steffe y su equipo, se espera que los estudiantes piensen en la fracción $\frac{1}{n}$ como algo que cuantifica el tamaño de una sola cosa; la cual, si se itera (o copia) n veces, produce algo que es del mismo tamaño que un entero. De esta manera, se presenta el *aspecto tamaño* del denominador (*i.e.*, "es algo de un tamaño tal") antes que el *aspecto cardinal* (*i.e.*, "que cuando se iterara n veces se obtiene un tamaño que es idéntico al del entero"). Por ejemplo, desde esta aproximación se espera que los estudiantes, al interpre-

Figura 5 $\frac{1}{5}$ como algo de un tamaño tal que cinco de eso equivaldría al tamaño de un entero



tar la fracción $\frac{1}{47}$, se imaginen algo de cierto *tamaño* que, si se itera 47 veces (*cardinalidad*), se obtiene algo de un tamaño idéntico al del entero.

Steffe y sus colegas informaron haber logrado apoyar a los estudiantes con los que trabajaron a desarrollar nociones relativamente complejas del sistema de cuantificación racional (Hackenberg, 2007; Olive, 1999; Olive y Steffe, 2002; Steffe, 2002, 2003, 2004; Tzur, 1999). A partir de las investigaciones de estos autores, es válido conjeturar que los tres aspectos didácticos de sus intervenciones que destacamos en este apartado (esto es, sacar las representaciones fraccionarias del entero, definir las fracciones unitarias como multiplicandos y utilizar una sola dimensión para segmentar magnitudes) serían una base firme para desarrollar propuestas de enseñanza inicial de las fracciones, consistentes con las ideas de Freudenthal (1983) y de Thompson y Saldanha (2003). Sin embargo, es necesario subrayar que las investigaciones de Steffe y sus colegas no bastan para determinar que una propuesta educativa para la enseñanza inicial de las fracciones, apoyada en los tres elementos descritos, sería viable en un aula, ya que se realizaron en condiciones de enseñanza escolarmente atípicas, las cuales incluyeron el uso intenso de tecnología y la interacción constante de un maestro-investigador con un grupo muy pequeño de alumnos.

También es necesario mencionar que, tal y como sucede en la gran mayoría de los estudios que se realizan en educación matemática, los estudiantes con los que Steffe y su equipo trabajaron muy probablemente pertenecían a comunidades sociales en las que habitualmente todos los niños ingresan a la escuela a la edad de cuatro años o antes, en las que los padres tienen nueve o más años de educación formal y en las que los niños tienen fácil acceso a recursos educativos en forma de juguetes interactivos, programas de televisión, páginas web y libros. Si bien estas condiciones son prácticamente universales en el mundo desarrollado, todavía son ajenas a millones y millones de estudiantes en el mundo en desarrollo (Skovsmose, 2005).

Queda pues la interrogante respecto a si sería viable, en condiciones escolares más comunes, una propuesta de enseñanza inicial de las fracciones que se basara en la idea de entenderlas como números que cuantifican tamaño de manera relativa y que utilizara los tres elementos didácticos que es posible reconocer en las investigaciones de Steffe y sus colegas; en particular, si lo sería en las aulas a las que asisten alumnos pertenecientes a comunidades de bajo desarrollo humano, como tantas que hay en América Latina (*Informe sobre Desarrollo Humano 2007-2008*, 2007). Un primer paso para responder a esta interrogante consiste en indagar si actividades con características similares a las que utilizaron Steffe y sus colegas serían accesibles y significativas para los alumnos que conforman un grupo que se inicia en el aprendizaje de las fracciones en una escuela tanto social como educativamente desfavorecida.

METODOLOGÍA

Los datos que analizamos en este artículo provienen de 14 entrevistas clínicas realizadas a todos los alumnos que conformaban el único grupo de cuarto grado de primaria de una escuela urbana en los márgenes de una ciudad de 100 000 habitantes, en el estado de Chiapas, México. Las entrevistas se realizaron en cuarto grado por ser éste en el que tradicionalmente la enseñaza de las fracciones adquiere mucha importancia.[3]

Las entrevistas se planearon con una orientación de *diseño de la enseñanza*, dentro de la tradición de las *matemáticas realistas* (Gravemeijer, 2004). Uno de los propósitos de las entrevistas fue documentar hasta qué punto resultarían significativas (o *realistas*) para estudiantes provenientes de contextos socialmente desfavorecidos, como era el caso de estos niños, situaciones que implicaran razonar –de manera básica– acerca de tamaños relativos, a partir de la estimación de magnitudes que debían satisfacer criterios iterativos específicos. Además, se espe-

[3] En el caso de la educación primaria en México, la enseñanza de las fracciones comienza en tercero (Secretaría de Educación Pública, 1993). Sin embargo, en este grado solamente se cubren *medios*, *cuartos* y *octavos* y se les dedican relativamente pocas lecciones en el libro de texto oficial. A partir de cuarto grado, el tema de las fracciones adquiere mayor importancia.

raba documentar las diferentes maneras en las que los alumnos se involucrarían en estas situaciones, así como los recursos matemáticos a los que serían capaces de recurrir con relativa facilidad para afrontarlas.

Las entrevistas se realizaron durante el mes de enero de 2007, en los días 90 y 91 de los 200 que conforman el año escolar oficial. En ese momento, siete de los 14 estudiantes tenían nueve años de edad, cinco tenían diez y uno, once. Tres de los estudiantes nunca asistieron al preescolar, uno reprobó segundo grado y otro tercero. Eran los hijos de maestros rurales, dependientes de farmacias, vendedores ambulantes, obreros, trabajadoras del servicio doméstico, repartidores de pan, taxistas y amas de casa. Los padres de 10 de los niños recibían un apoyo mensual de 140 pesos (aproximadamente 13 dólares) por tener a sus hijos cursando el cuarto grado, como parte de un programa gubernamental que tiene como objetivo prevenir la deserción escolar temprana por causas de pobreza.

Las entrevistas tuvieron una duración de entre 25 y 40 minutos cada una. Fueron videograbadas. Dos investigadores estuvieron presentes; uno estuvo a cargo de conducir la entrevista y otro de tomar notas e intervenir con preguntas clarificadoras cuando lo creía necesario.[4]

Las entrevistas fueron individuales y se condujeron y analizaron siguiendo los lineamientos recomendados por Cobb (1986). En primer lugar, se procuró el uso de actividades que implicaran un reto genuino para los estudiantes. En segundo lugar, durante las entrevistas los investigadores se preocuparon por tener una imagen lo más clara posible de cómo entendían los niños las situaciones; para ello, constantemente hicieron preguntas exploratorias y aclaratorias a los niños entrevistados.

En las entrevistas, se les presentaron a los estudiantes seis situaciones problemáticas, dos de las cuales tenían como objetivo identificar las maneras en las que los niños afrontarían situaciones que implicaran explícitamente la comparación relativa de tamaños a partir de la estimación de magnitudes que debían satisfacer criterios iterativos específicos. Otras dos situaciones fueron diseñadas con la intención de documentar los recursos que utilizarían los estudiantes al enfrentar actividades que podían ser resueltas con multiplicaciones simples. Una quinta situación implicaba la multiplicación inversa (o *con hueco*) y la última, identificar los tamaños representados por fracciones convencionales. En el siguiente apartado se describen estas situaciones con detalle.

El análisis de las entrevistas se basó en la formulación de conjeturas respecto a las intuiciones, nociones y habilidades matemáticas que surgieron del quehacer

[4] Agradecemos a Luz Pérez Quiroz, Ericka Renata Cardoso Moreno y Filiberto Méndez Martínez por su apoyo en la conducción de las entrevistas.

de los estudiantes al involucrarse en cada una de las situaciones. Las conjeturas se formularon a partir de la revisión de las videograbaciones, del trabajo de los estudiantes y de las notas que se tomaron *in situ*. A lo largo del análisis de cada entrevista, se creó un registro de estas conjeturas y de los datos que las respaldaban, los cuales incluyeron transcripciones puntuales, referencias tomadas de notas que se hicieron *in situ* y el trabajo realizado por los niños.

En los casos donde no fue clara la naturaleza del quehacer de los estudiantes, se tuvo el cuidado de formular explicaciones alternativas y se trató de determinar cuál sería la más razonable, teniendo en cuenta todos los datos con que se contaba. Por ejemplo, cuando un estudiante parecía tener muchas dificultades para involucrarse en una situación, se conjeturaba que se podía deber ya sea a que la actividad rebasaba sus habilidades matemáticas, o a que había interpretado la situación de una manera muy distinta a la que los investigadores esperaban, por no estar familiarizado –quizá– con el contexto en el que estaba basada. Se procuraba entonces identificar a lo largo de la entrevista datos que fueran consistentes con una u otra de las conjeturas en conflicto.

La segunda autora de este análisis creó una primera versión de los registros de todas las entrevistas y el primer autor revisó cada uno después de observar la videograbación correspondiente. En los casos en los que hubo desacuerdo en las interpretaciones de ambos investigadores, se revisó conjuntamente la videograbación en cuestión y se procuró llegar a un consenso. Una vez que se terminó la elaboración de los registros de todas las entrevistas, se procedió a crear un resumen en forma de cuadro, en el que se sintetizó la actividad de todos los alumnos al afrontar cada una de las situaciones. Este resumen sirvió para tener un panorama sintético tanto del quehacer de cada estudiante como del quehacer del grupo en cada situación.

RESULTADOS

MULTIPLICACIÓN

Las situaciones de multiplicación y de multiplicación inversa se presentaron a los estudiantes con el propósito de identificar el tipo de nociones matemáticas vinculadas a la iteración de cantidades, a las cuales podrían recurrir con relativa facilidad al resolver los problemas. Con base en el análisis conceptual de Thompson y Saldanha (2003) y en la investigación de Steffe (2002), consideramos que serían estas nociones previamente desarrolladas las que podrían facilitarles a los estudiantes involucrarse en las actividades de comparación de tamaños relativos.

Una de las situaciones de multiplicación que se presentó a los estudiantes estaba basada en determinar la cantidad de "tazos" (juguetes coleccionables que vienen adentro de las frituras) que tenían varios niños. El problema implicaba tener que determinar cuánto era lo doble, lo triple y lo quíntuple de cinco, con base en narrativas como la siguiente: "Olga tiene cinco tazos y Candelaria tiene lo doble, ¿cuántos tazos tiene Candelaria?" Al presentar la situación, se decidió no utilizar la palabra veces (*e.g.*, dos veces) para facilitar que surgieran interpretaciones que implicaran el uso de estrategias distintas a la suma iterada. Sin embargo, expresiones como "tiene tres veces lo que tiene Olga" se utilizaron en todos los casos en los que el entrevistador supuso que un alumno podría no entender el significado de "triple" o "quíntuple".

Todos los estudiantes pudieron determinar, sin mayor dificultad, cuánto era lo doble de cinco. Todos los estudiantes también pudieron determinar cuánto era lo triple de cinco, aunque seis lo hicieron sólo después de que se les presentó la pregunta en la forma de *tres veces*. Cuatro de estos estudiantes parecieron entender originalmente que *lo triple* significaba algo así como *lo doble de lo doble*. Estos cuatro estudiantes inicialmente estimaron que lo triple de 5 sería 20. La siguiente transcripción muestra cómo lo hizo un alumno:

ENTREVISTADOR: Si Manuel tiene lo triple que Olga, ¿cuántos tazos tiene Manuel?
ÁNGEL: 20, porque lo doble [de cinco] es 10 y el otro [Manuel] tendría 20 porque tiene lo triple.

La transcripción ilustra cómo la asociación que algunos estudiantes parecieron hacer entre los significados de *lo doble y lo triple* no fue en el sentido de una iteración más ($5 + 5$, $5 + 5 + 5$), sino que implicaba repetir la acción de duplicar (lo doble de lo doble de cinco).

Al presentar la pregunta de cuánto sería lo quíntuple de cinco, a todos los estudiantes se les aclaró que se trataba de determinar cuánto era cinco veces cinco (ej., "Dulce tiene lo quíntuple que Olga, o sea, cinco veces"). Diez de los catorce alumnos dieron la respuesta correcta. De ellos, cuatro parecieron relacionar claramente el problema con la operación de la multiplicación, ya sea recurriendo a ella al resolverlo o mencionando que sería posible utilizarla. La siguiente transcripción ejemplifica el segundo de estos casos:

MARISOL: 25, porque sumo cinco veces cinco. Y también se puede hacer multiplicando cinco por cinco.

Los otros seis alumnos resolvieron el problema contando iteradamente de cinco en cinco (*e.g.*, 5, 10, 15, 20, 25), sin que se notara que asociaran el problema con la multiplicación. Los cuatro alumnos restantes intentaron usar esta misma estrategia pero parecieron tener problemas al coordinar las dos cuentas; por ejemplo, uno de ellos contó de cinco en cinco hasta cincuenta.

La situación de multiplicación inversa estaba basada en una narrativa sobre un niño que ganaba dos pesos por cada mandado que hacía. Primero se pidió a los estudiantes que determinaran cuántos mandados tendría que hacer el niño para juntar diez pesos ($\_\_ \times 2 = 10$). Posteriormente se les dijo que este niño ahorraba a la semana diez pesos. Se les pidió entonces que determinaran en cuántas semanas el niño ahorraría 100 pesos ($\_\_ \times 10 = 100$). El desempeño de los estudiantes en esta situación fue similar al de las situaciones de multiplicación directa, algunos estudiantes la resolvieron sin dificultad multiplicando o sumando iteradamente y otros tuvieron problemas para coordinar una doble cuenta. Ninguno pareció recurrir a la división.

En términos generales, el quehacer de los alumnos al involucrarse en las situaciones de multiplicación y de multiplicación inversa reflejó que –si se tuviera en cuenta el grado escolar que estaban cursando– las nociones multiplicativas que al menos diez de ellos habían desarrollado eran bastante primitivas. Para los propósitos de este artículo, lo que es importante reconocer es que la gran mayoría de los estudiantes no parecía haber desarrollado habilidades multiplicativas sobresalientes; habilidades que hicieran razonable esperar que les resultara fácil involucrarse en situaciones novedosas relacionadas con la multiplicación.

FRACCIONES CONVENCIONALES

En la situación que implicaba identificar los tamaños representados por fracciones convencionales, se utilizó un chocolate que medía aproximadamente 16 cm de largo por 8 cm de ancho. A los estudiantes se les presentaron consecutivamente tres tarjetas, una con el símbolo $\frac{1}{2}$, otra con $\frac{1}{4}$ y otra más con $\frac{2}{4}$. Se les pidió que identificaran la cantidad de chocolate que cada fracción representaba. En el caso de $\frac{1}{4}$ y de $\frac{2}{4}$, también se les pidió que indicaran si esas cantidades serían mayores, menores o iguales que un medio. Vale la pena aclarar que, según el plan y programas de estudio de México (Secretaría de Educación Pública, 1993), estos estudiantes deberían haberse familiarizado con estas fracciones en el tercer grado y que, en los meses que llevaban en el cuarto grado, deberían haber trabajado ya con tercios, quintos y décimos.

Todos los estudiantes pudieron identificar la mitad de una barra de chocolate, aunque tres de ellos no parecieron relacionar de manera automática el símbolo $\frac{1}{2}$ con una mitad. Cinco de los estudiantes reconocieron que $\frac{1}{4}$ de la barra de dulce implicaba una cantidad menor a un medio, otros seis expresaron que sería más y tres no estaban seguros. Solamente un estudiante reconoció que $\frac{2}{4}$ del chocolate sería lo mismo que la mitad $\frac{1}{2}$, el resto expresó que sería más, no saber o no estar seguro. En general, prácticamente ninguno de los alumnos parecía haber desarrollado previamente entendimientos sobre el significado de fracciones convencionales que hicieran razonable esperar que les resultara fácil involucrarse en situaciones que implicaran comparar tamaños de manera relativa.

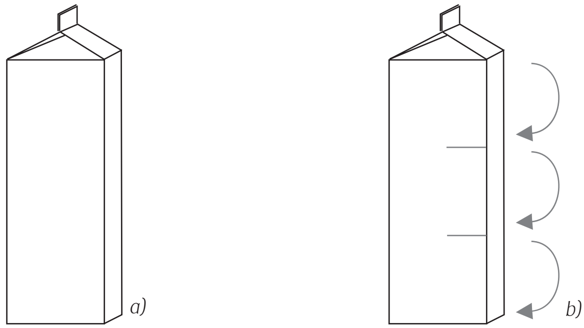
Multiplicandos y tamaños relativos

La primera situación, basada en comparar tamaños de manera relativa a partir de la estimación de magnitudes que debían satisfacer criterios iterativos específicos, implicaba comparar el tamaño de diferentes tipos de vasos (de plástico, de vidrio y de unicel) en relación con cuántos de cada tipo podían ser llenados con la leche contenida en un cartón de leche. El propósito de esta situación fue identificar la diversidad y naturaleza de los razonamientos que surgirían entre los estudiantes al razonar sobre este tipo de situaciones.

En esta situación se utilizó un cartón de leche vacío como el que se muestra en la figura 6*a*. Al cartón se le habían quitado todas las inscripciones; también se había forrado con plástico, lo que hizo posible que se pudieran hacer inscripciones sobre él con plumones para pizarrón blanco, las cuales podían borrarse fácilmente. A los alumnos se les proporcionó físicamente el cartón de leche, así como un plumón y un paño para borrar.

Al comienzo de la situación, el entrevistador les platicó a los estudiantes que en su casa había cierto tipo de vasos de plástico, todos del mismo tamaño, los cuales tenían la característica de que con la leche que cabía en el cartón se podían

Figuras 6a y 6b Dibujo del cartón de leche (de un litro) que se usó en las entrevistas y de su segmentación unidimensional con base en multiplicandos



llenar, exactamente, tres de ellos (*i.e.*, porciones de $\frac{1}{3}$ de la leche del cartón).[5] Primero se pidió a los alumnos que marcaran aproximadamente el nivel en el que estaría la leche después de haber servido un vaso; después se les pidió que identificaran dónde estaría el nivel después de servir dos y tres vasos (cabe destacar que se les aclaró a los niños que cuando el cartón de leche estaba lleno, el nivel de la leche llegaba justo a donde termina la cara rectangular del cartón, y que cuando el cartón estaba vacío, el nivel llegaba justo donde comienza la misma cara rectangular del cartón).

Como puede notarse, la situación trataba de orientar a los estudiantes a pensar en la capacidad de los vasos en términos de multiplicandos (*i.e.*, una cantidad de leche que cuando se sirve cierto número de veces en los vasos se utiliza toda la leche que contiene el cartón) y a razonar con inscripciones unidimensionales. En la figura 6*b* se nota que si bien la situación hacía alusión a volúmenes (*i.e.*, magnitudes con tres dimensiones), los cartones permitían razonar sobre la cantidad proporcional de leche que se había servido de manera unidimensional: al servir $\frac{1}{3}$ de la leche, el nivel en el cartón bajaría $\frac{1}{3}$ de su altura.

Posteriormente, el entrevistador habló a los alumnos de cierto tipo de vasos de vidrio, todos del mismo tamaño, que había en la casa de su primo. Estos vasos tenían la característica de que con la leche que cabía en el cartón se podían

[5] Los estudiantes nunca vieron los vasos, solamente se los imaginaron.

llenar, exactamente, cinco de ellos (*i.e.*, porciones de $\frac{1}{5}$ de la leche del cartón). Se les pidió que explicaran a cuáles vasos les cabría más leche, si a los de plástico o los de vidrio (*i.e.*, $\frac{1}{3}$ *vs.* $\frac{1}{5}$). A continuación, se pidió a los alumnos que marcaran el nivel en el que estaría la leche en el cartón después de servir un vaso de vidrio y, posteriormente, que marcaran los niveles después de servir dos, tres, cuatro y cinco vasos.

Finalmente, se dijo a los alumnos que había cierto tipo de vasos de unicel, todos del mismo tamaño, los cuales tenían la característica de que con la leche que cabía en el cartón se podían llenar exactamente diez de ellos (*i.e.*, porciones de $\frac{1}{10}$ de la leche del cartón). Se preguntó a los alumnos si cabría más o menos leche en los vasos de unicel que en los vasos de plástico y de vidrio (*i.e.*, $\frac{1}{10}$ *vs.* $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{10}$ *vs.* $\frac{1}{5}$). Después se les pidió que estimaran el lugar en que estaría la leche después de servir cinco vasos de unicel y si sería más, menos o lo mismo que la mitad del cartón (*i.e.*, $\frac{5}{10}$ *vs.* $\frac{1}{2}$).

Con base en los elementos de propuesta alternativa para la enseñanza de las fracciones anteriormente descritas, esta situación se diseñó con la expectativa de que ayudaría a los estudiantes a pensar más en el tamaño de algo (*e.g.*, la capacidad de los vasos de vidrio) que en un número específico de cosas (*e.g.*, la capacidad que *n* número de vasos de vidrio tienen en común). También se diseñó con la expectativa de que orientaría a los estudiantes a reflexionar sobre la magnitud de cosas que eran independientes del cartón (*i.e.*, la capacidad de cierto tipo de vasos); aunque lo hicieran apoyados en inscripciones hechas sobre el cartón (véase la figura 6*b*) y no externas a él (véase la figura 3).

La situación de comparar la capacidad de los vasos pareció ser significativa[6] para todos los niños, ya que los entrevistadores no tuvieron que hacer muchos

[6] Nos referimos a la actividad como *significativa* asumiendo la perspectiva de las matemáticas realistas (Treffers, 1987). Desde esta perspectiva, para que una situación sea considerada *significativa* (o *realista*) no hace falta que los estudiantes la conciban necesariamente como que tiene gran importancia en sus vidas o que es muy próxima a sus intereses; ni que la reconozcan como parte de su experiencia cotidiana. Para que una situación sea considerada significativa sólo hace falta que los estudiantes la conciban como algo comprensible, sensato y digno de que se razone sobre ella, en la manera en la que un profesional de la educación matemática puede reconocer como satisfactoria y productiva.

esfuerzos para explicar la situación y lograr que los estudiantes se involucraran en ella de manera satisfactoria. Para todos los estudiantes parecía tener sentido identificar niveles en el cartón de leche que se ajustaran a un criterio iterativo. En cuanto a las comparaciones entre los tamaños de los vasos, todos los estudiantes identificaron los de plástico como de mayor capacidad que los de vidrio (*i.e.*, $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$) y los de unicel como de menor capacidad que los de plástico y los de vidrio (*i.e.*, $\frac{1}{10} < \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{10} < \frac{1}{5}$). Las siguientes dos transcripciones son representativas de las explicaciones que dieron los niños, en ambas se compara el tamaño de los vasos de plástico con los de vidrio:

VANESSA: Los de plástico [son más grandes].
ENTREVISTADORA: ¿Los de plástico, por qué?
VANESSA: Porque son más grandes los vasos y traen más leche.

(Vicky indica que los vasos de plástico son más grandes).

ENTREVISTADORA: ¿Por qué?
VICKY: Porque eran 3 [de plástico] y los de vidrio son 5.
ENTREVISTADORA: ¿Y eso qué quiere decir?
VICKY: Le sirven a cada quien un vaso [de plástico], pero si sirven 5 [vasos de vidrio] va a tener más poco [de leche un vaso de vidrio].

Las transcripciones ilustran cómo los estudiantes pudieron formarse una imagen aparentemente clara del tamaño de los vasos a partir de la información respecto a su capacidad en términos de multiplicandos que satisfacían cierto criterio iterativo; una imagen que les permitió juzgar correctamente cuáles vasos eran más grandes. En las trascripciones se nota que ambas niñas hacen referencia a la capacidad de los vasos de manera que parece que se están imaginando magnitudes ("traen más"; "va a tener más poco"). La aparición de este tipo de imágenes también fue común al juzgar el tamaño de los vasos de unicel; por ejemplo, Alejandro se refirió a ellos de esta manera: "...son chiquitos porque entró todo el bote en diez vasitos".

El que surgieran este tipo de imágenes sugiere que la situación ayudó a los estudiantes a razonar sobre cómo, en ciertas circunstancias, vincular algo con un número relativamente grande (*e.g.*, vasos de un tamaño tal que 10 de ellos se pueden llenar con el contenido de un cartón de leche) implica que ese algo sería más pequeño que una cosa a la que se vincula con un número menor (*e.g.*, vasos de un tamaño tal que tres de ellos se pueden llenar con el contenido de un cartón de leche). Esto es, la situación pareció ayudarles a razonar de modo consistente con la racionalidad cuantitativa básica del denominador (entre más grande es el número, menor es el ente al que se refiere). Cabe también mencionar que el que surgieran este tipo de imágenes corrobora la conjetura de que la situación resultó significativa para los estudiantes.

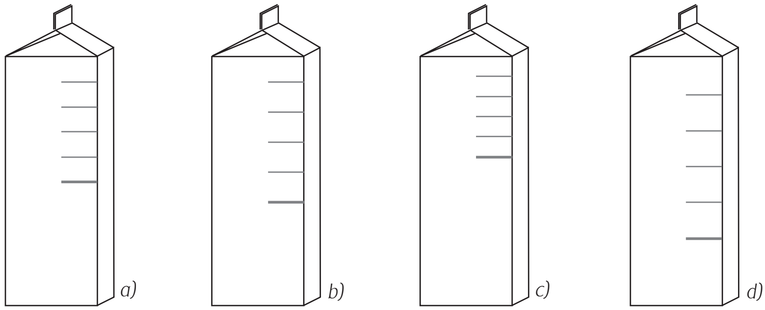
En el caso de estimar el nivel en el que estaría la leche en el cartón después de servir cinco vasos de unicel, todos los estudiantes lo hicieron marcando el nivel que tendría después de servir uno, dos, tres, cuatro y cinco vasos (véase la figura 7). En las estimaciones de cinco estudiantes, el nivel después de servir cinco vasos coincidió con la mitad del cartón (véase la figura 7*a*); en el caso de otros siete estudiantes el nivel fue de más de la mitad, por poco (véase la figura 7*b*); la estimación de un estudiante fue de menos de la mitad (véase la figura 7*c*), y la del alumno restante fue de mucho más de la mitad (véase la figura 7*d*).

Respecto a comparar el nivel de la leche con la mitad después de servir cinco vasos de unicel (*i.e.*, $\frac{5}{10}$ *vs.* $\frac{1}{2}$), los cinco estudiantes cuyas marcas coincidieron con medio cartón dijeron que sería lo mismo (véase la figura 7*a*). Aunque es posible que sus respuestas estuvieran basadas en la observación empírica del lugar en el que habían hecho las marcas y que no hayan anticipado que este lugar tendría que coincidir con la mitad, los cinco estudiantes fueron capaces de justificar su respuesta matemáticamente. Las siguientes transcripciones ilustran cómo lo hicieron:

Entrevistador: ¿Por qué es lo mismo?
Estefanía: Porque si ya son 5 vasitos aquí [señala las primeras cinco marcas que hizo] y son 10 [en todo el litro], aquí caben otros 5 [señala la parte de abajo del cartón de leche] y no me sobra nada porque se acaba toda la leche.

Marcos: Sería la mitad.
Entrevistadora: ¿Ajá? ¿Cómo sabes que quedaría la mitad?
Marcos: Porque tienes cinco vasos aquí [señalando las marcas] y cinco vasos, pero te alcanzó toda la leche para los 10 vasos, si sólo le echamos cinco, pues queda la mitad.

Figuras 7a, 7b, 7c y 7d Representaciones de los niveles aproximados en los que los estudiantes estimaron que estaría la leche en el cartón después de servir cinco vasos de unicel



Ambas transcripciones ilustran cómo, en el contexto de la situación presentada, cinco estudiantes pudieron generar sin dificultad imágenes cuantitativamente firmes respecto a la equivalencia entre tamaños relativos; esto es, imágenes de cómo la leche contenida en cinco vasos de unicel $\frac{5}{10}$ sería equivalente a la que cabría en la mitad del cartón $\frac{1}{2}$. En su razonamiento de la situación, estos estudiantes parecían tener presente tanto la relación entre la capacidad de los vasos y la del cartón de leche ("son 10... y no me sobra nada porque se acaba toda la leche"; "toda la leche para los 10 vasos") como la relación proporcional entre 5 y 10.

Las estimaciones de los otros nueve estudiantes respecto a la cantidad de leche involucrada en servir cinco vasos de unicel se basaron claramente en las marcas que habían hecho en el cartón; algunos de ellos respondieron que sería más de la mitad y otros menos, dependiendo del lugar en el que pusieron la quinta marca (véase la figura 7). A estos estudiantes se les preguntó a continuación cuántos vasos de unicel se podrían servir con la mitad del cartón. Todos los alumnos respondieron que cinco vasos. Entonces se les volvió a preguntar si el nivel de la leche después de servir cinco vasos de unicel sería más, menos o la mitad del cartón. En esta ocasión siete de los nueve dijeron que sería lo mismo que la mitad. Estos estudiantes, con la guía del entrevistador, también parecían poder imaginarse con claridad la equivalencia:

LESSDY: Es más de la mitad [después de estimar el nivel en que estaría la leche después de servir cinco vasos de manera similar a la figura 7*b*].
ENTREVISTADORA: ¿Para cuántos vasos me alcanza [el cartón de leche]?
LESSDY: Para 10.
ENTREVISTADORA: Medio cartón ¿para cuántos vasos me alcanza?
LESSDY: ¿Cinco?
ENTREVISTADORA: ¿Para cinco?, ¿por qué?
LESSDY: Porque es la mitad del litro.
ENTREVISTADORA: Porque es la mitad de litro ¿y?
LESSDY: Y son 10 vasitos y son 5 y ya son medio litro.

En este fragmento se nota cómo la alumna no sólo cambia de parecer en el curso de la conversación, sino que lo hace basándose en una imagen que crea con el apoyo de la entrevistadora ("Con medio litro de leche ¿para cuántos vasos me alcanza?") y que ella parece entender bien ("Y son 10 vasitos y son 5 y ya son medio litro").

Los dos alumnos restantes parecieron tener dificultad conciliando su conocimiento aritmético respecto a que cinco es la mitad de 10 con imaginarse el nivel de la leche al servirla en los vasos. Estos alumnos siguieron identificando el nivel de la leche más allá de la mitad del cartón después de servir cinco vasos de unicel.

El que 12 de los 14 alumnos hayan podido generar imágenes cuantitativas, aparentemente sólidas, de la equivalencia entre la cantidad de leche que se requería para servir cinco vasos de unicel y medio cartón de leche es algo significativo si se toma en cuenta que sólo uno de ellos reconoció la equivalencia entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$ cuando se les presentó de manera convencional. En general, esta situación pareció ser fructífera en términos de apoyar a los estudiantes a razonar de manera consistente con las equivalencias fraccionarias.

La situación restante se basa en una narrativa del viaje de cuatro horas en avión de la Ciudad de México a Chicago, Estados Unidos, de la Selección Nacional de Fútbol. A los alumnos se les presentó una gráfica que representaba el trayecto del avión (véase la figura 8), y se les pidió que identificaran el lugar en el que iría el avión después de viajar una hora. Después se les pidió que identificaran el lugar en que iría después de viajar dos horas y que explicaran si habría recorrido más, menos o lo mismo que la mitad del trayecto (*i.e.*, $\frac{2}{4}$ *vs.* $\frac{1}{2}$). El propósito de esta situación fue tener una segunda oportunidad para documentar la diversidad

Figura 8 Representación del trayecto que recorre un avión al viajar de la Ciudad de México a Chicago, Estados Unidos

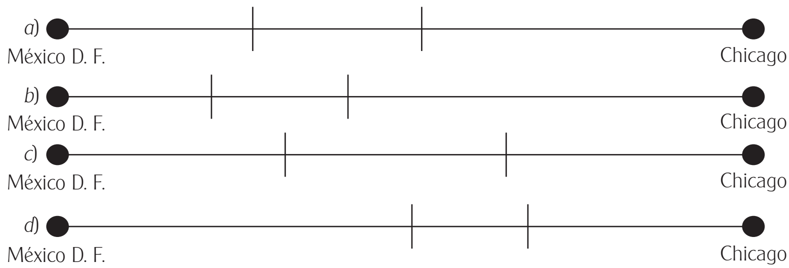
y naturaleza de los razonamientos que surgirían entre los estudiantes al afrontar situaciones basadas en comparar tamaños de manera relativa a partir de la estimación de magnitudes que debían satisfacer criterios iterativos específicos.

Esta situación también pareció ser significativa para la gran mayoría de los estudiantes, ya que se involucraron en ella sin mucha dificultad y lo hicieron de manera satisfactoria. Sin embargo, como se explica más adelante, éste no fue el caso con dos alumnos.

En general, estimar el lugar en que iría el avión a partir de un criterio iterativo (*i.e.*, una distancia tal que cuando se recorriera cuatro veces se recorrería todo el trayecto) parecía ser algo que tenía sentido para los estudiantes; aunque hay que mencionar que tres de ellos produjeron estimaciones poco razonables (véanse las figuras 9*c* y 9*d*). Respecto a la comparación entre la distancia recorrida por el avión después de viajar dos horas, casi todos los estudiantes parecieron hacerlo iterando la distancia que estimaron para una hora. Las estimaciones de tres alumnos coincidieron con la mitad del trayecto (véase la figura 9*a*), las de ocho estuvieron antes de la mitad del trayecto (véase la figura 9*b*), y las de tres más allá de la mitad (véanse las figuras 9*c*, 9*d*). Cuando se les preguntó si el avión llevaría más, menos o lo mismo que la mitad del trayecto, cinco estudiantes dijeron que lo mismo, pudiendo justificar su respuesta; entre ellos estaban los tres que estimaron originalmente el lugar en que iría el avión a la mitad del trayecto (véase la figura 9*a*) y dos que lo estimaron antes de la mitad del trayecto (véase la figura 9*b*).

Los nueve estudiantes restantes consideraron que el avión llevaría más o menos de la mitad, aparentemente basándose en el lugar en el que habían puesto la segunda marca. A estos nueve estudiantes se les preguntó cuánto tiempo, aproximadamente, llevaría volando el avión al llegar a la mitad del trayecto; siete de ellos dijeron que dos horas y cambiaron de parecer respecto a su estimación original. Los otros dos alumnos parecían tener dificultades al tratar de entender qué se les preguntaba. En general, ambos parecían tener problemas interpretando la situación. A uno de ellos, por ejemplo, no pareció preocuparle la disparidad en el tamaño de los segmentos que creó para representar distancias recorridas por el avión en una hora (véase la figura 9*d*).

Figuras 9a, 9b, 9c y 9d Estimaciones del lugar en el que iría el avión después de viajar una y dos horas



En términos generales, esta situación también pareció facilitar que los alumnos razonaran sobre tamaños relativos (*i.e.*, $\frac{1}{4}$) y equivalencias básicas (*i.e.*, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$). Es importante no perder de vista que, aunque la equivalencia implicada puede parecer trivial ($\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$), sólo uno de los estudiantes entrevistados la reconoció en la situación del chocolate (véase arriba).

Antes de pasar a la reflexión de lo que implican estos resultados, es importante mencionar que, al comparar el quehacer de los estudiantes en las últimas dos situaciones, no se reconocieron consistencias que sugirieran que sería posible clasificarlos en grupos jerárquicos de acuerdo con su desempeño, al menos no con facilidad. Sólo tres de los cinco alumnos que reconocieron de inmediato que dos horas de viaje equivaldrían a la mitad del trayecto del avión estuvieron entre quienes identificaron sin dificultad que servir cinco vasos de unicel equivalía a servir medio cartón de leche. De igual manera, sólo uno de los alumnos que no pudo resolver la situación del avión estuvo entre los que no reconocieron la equivalencia entre los cinco vasos y la mitad del cartón de leche.

CONCLUSIONES

Del análisis de las entrevistas, se desprende que actividades que retomen los tres aspectos didácticos que identificamos del trabajo de Steffe y sus colegas (Hackenberg, 2007; Olive, 1999; Olive y Steffe, 2002; Steffe, 2002, 2003, 2004; Tzur, 1999) y que, por lo tanto, sean consistentes con las ideas de Freudenthal (1983) y de Thompson y Saldanha (2003), pueden ser un punto de partida viable para la enseñanza inicial de las fracciones, incluso en contextos escolares socialmente desfavorecidos. En consecuencia, parece que sí sería posible involucrar de manera fructífera a quienes se inician en el aprendizaje de las fracciones en actividades que se basen en la comparación de tamaños de manera relativa a partir de la estimación de magnitudes que satisfagan criterios iterativos específicos, en lugar de en actividades basadas en *partir y repartir equitativamente*.

El análisis sugiere que tanto la situación del cartón de leche como la del viaje del avión fueron significativas para la gran mayoría de los estudiantes. Estas actividades también parecieron servir para apoyar que surgieran en el razonamiento de los estudiantes, de manera relativamente firme, nociones e intuiciones consistentes con dos aspectos claves de las fracciones: *1)* la racionalidad cuantitativa básica del denominador (a mayor número, menor el tamaño del ente en cuestión) y *2)* las equivalencias.

El que surgiera en el razonamiento de los estudiantes este tipo de nociones e intuiciones es particularmente significativo cuando se tiene en cuenta lo limitado de las ideas multiplicativas que muchos de ellos parecían haber desarrollado previamente y la pobre comprensión que casi todos mostraron tener del significado de fracciones convencionales simples. A la luz de estos antecedentes, el surgimiento de imágenes cuantitativamente ricas (Thompson, 1994) al razonar con las situaciones didácticas presentadas sugiere que estas situaciones pueden ser recursos adecuados para apoyar el desarrollo de maneras de razonar sobre las fracciones progresivamente más complejas.

En el análisis de las entrevistas se notó que a algunos estudiantes les resultaron más retadoras las situaciones presentadas que a otros. Las dificultades que se documentaron parecieron estar relacionadas, sobre todo, con imaginar, en un espacio unidimensional, la producción de segmentos homogéneos que se ajustaran a criterios específicos (*e.g.*, segmentos de un tamaño tal que diez de ellos llenarían todo el espacio). Como discutimos en el apartado de resultados, hubo estudiantes cuya segmentación del cartón de leche y del trayecto del avión divergió mucho de lo que se podría considerar aproximado (véanse las figuras 7*d*, 9*c* y 9*d*). El quehacer de estos estudiantes sugiere que podría ser provechoso involucrar a un grupo escolar en actividades que apoyen el desarrollo de imaginación espacial unidimensional, antes de introducir situaciones didácticas que impliquen la estimación de segmentos que satisfagan criterios iterativos específicos.

En términos generales, del análisis de las entrevistas se desprende que la comparación relativa de tamaños podría ser un punto de partida viable para la formulación de una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995) de las fracciones, fundamentada en principios distintos a los de partición y repartición equitativas. Con base en el marco señalado por Paul Cobb y sus colegas para el desarrollo de propuestas didácticas en matemáticas (Cobb y McClain, 2004; Cobb, 1999; Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack, 2000; Stephan, Cobb, y Gravemeijer, 2003), faltaría ahora precisar la naturaleza de los patrones sucesivos de razonamiento que seguirían los alumnos en su aprendizaje y de los medios a través de los cuales se podría apoyar el surgimiento de estos patrones sucesivos.

AGRADECIMIENTOS

La investigación y el análisis reportados en este artículo fueron posibles gracias al apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México a través del proyecto 53448. Las opiniones y puntos de vista expresados por los autores no reflejan necesariamente a los del Consejo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Backhoff, E., E. Andrade, A. Sánchez, M. Peón y A. Bouzas (2006), *El aprendizaje del español y las matemáticas en la educación básica en México: Sexto de primaria y tercero de secundaria*, México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Behr, M. J., G. Harel, T. Post y R. Lesh (1992), "Rational number, ratio, and proportion", en D. Grows (ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, Macmillan, pp. 296-333.

Bills, C. (2003), "Errors and misconceptions in KS3 'number'", en J. Williams (ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, Londres, vol. 23, núm. 3, pp. 7-12.

Bright, G. W., M. J. Behr, R. P. Thomas e I. Wachsmuth (1988), "Identifying fractions on number lines", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 19, pp. 215-232.

Brown, C. A. (1993), "A critical analysis of teaching rational number", en T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, Hillsdale, Nueva Jersey, Lawrence Erlabaum, pp. 197-218.

Charalambous, C. Y. y D. Pitta-Pantazi (2005), "Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for teaching and research", en H. L. Chick y J. L. Vincent (eds.), *Proceedings of the Twenty Ninth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Melbourne, Australia, PME, vol. 2, pp. 233-240.

Clark, M., S. Berenson y L. Cavey (2003), "A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 22, pp. 297-317.

Cobb, P. (1986), "Clinical interviewing in the context of research programs", en G. Lappan y R. Even (eds.), *Proceeding of the Eigh*[th] *Annual Meeting of the International Group of the Psychology of Mathematics Education: Plenary Speeches and Symposium*, East Lansing, Michigan State University, pp. 90-110.

——— (1999), "Individual and collective mathematical learning: The case of statistical data analysis", *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 1, núm. 1, pp. 5-44.

Cobb, P. y K. McClain (2004), "Proposed design principles for the teaching and learning of elementary statistics instruction", en D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking*, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer, pp. 375-396.

Cobb, P., J. Confrey, A. A. diSessa, R. Lehrer y L. Schauble (2003), "Design experiments in education research", *Educational Researcher*, vol. 32, núm. 1, pp. 9-13.

Cobb, P., Q. Zhao y J. Visnovska (2008), "Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education", *Éducation et Didactique*, vol. 2, núm. 1, pp. 55-73.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, Países Bajos, Kluwer.

Gravemeijer, K. (2004), "Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education", *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 6, pp. 105-128.

Gravemeijer, K., P. Cobb, J. Bowers y J. Whitenack (2000), "Symbolizing, modeling, and instructional design", en P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms: Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design*, Mahwah, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates.

Hackenberg, A. J. (2007), "Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 26, pp. 27-47.

Hannula, M. S. (2003), "Locating fraction on a number line", en N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Honolulu, PME, vol. 3, pp. 17-24.

Hart, K. (1989), "Fractions: Equivalence and addition", en K. Hart, D. C. Johnson, M. Brown, L. Dickson y R. Clarkson (eds.), *Children's Mathematical Frameworks 8-13: A Study of Classroom Teaching*, Windsor, Berkshire, Reino Unido, NFER-NELSON, pp. 46-75.

Kieren, T. (1980), "The rational number construct –Its elements and mechanisms", en T. Kieren (ed.), *Recent Research on Number Learning*, Columbus, Ohio, ERIC/SMEAC, pp. 125-149.

Lamon, S. J. (2007), "Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research", en F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte, Carolina del Norte, Information Age, pp. 629-667.

National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston.

Olive, J. (1999), "From fractions to rational numbers of arithmetic: A reorganization hypothesis", *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 1, pp. 279-314.

Olive, J. y L. P. Steffe (2002), "The construction of an iterative fractional scheme: The case of Joe", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 20, pp. 413-437.

Pitkethly, A. y R. Hunting (1996), "A review of recent research in the area of initial fraction concepts", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 30, pp. 5-38.

Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo, *Informe sobre Desarrollo Humano 2007-2008* (2007), Nueva York, PNUD.

Saxe, G. B., M. M. Shaughnessy, A. Shannon, J. Garcia-de-Osuna, R. Chinn y M. Gearhart (2007), "Learning about fractions as points on a number line", en G. Martin (ed.), *The Learning of Mathematics*, Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics.

Secretaría de Educación Pública (1993), *Plan y programas de estudio. Educación básica*, México, SEP.

Simon, M. A. (1995), "Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 26, pp. 114-145.

Skovsmose, O. (2005), *Critical Mathematics Education for the Future*, Dinamarca, Aalborg University.

Steffe, L. P. (2002), "A new hypothesis concerning children's fractional knowledge", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 20, pp. 267-307.

——— (2003), "The fractional composition, commensurate fractional and the common partitioning schemes of Jason and Laura: Grade 5", *Journal of Mathematical Behavior,* vol. 22, pp. 237-295.

——— (2004), "Construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions", *Mathematical Thinking and Learning,* vol. 6, pp. 129-162.

Stephan, M., P. Cobb y K. Gravemeijer (2003), "Coordinating social and individual analyses: Learning as participation in mathematical practices", en M. Stephan, J. Bowers, P. Cobb y K. Gravemeijer (eds.), *Supporting Students Development of Measuring Conceptions: Analyzing Students Learning in Social Context,* Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 74-109.

Streefland, L. (1991), *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research,* Dordrecht, Países Bajos, Kluwer.

Thompson, P. W. (1994), "The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate", en G. Harel y J. Confrey (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics,* Albany, Nueva York, Suny Press, pp. 179-234.

Thompson, P. W. y L. A. Saldanha (2003), "Fractions and multiplicative reasoning", en J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (eds.), *Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics,* Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 95-113.

Treffers, A. (1987), *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction –The Wiskobas Project,* Dordrecht, Países Bajos, Reidel.

Tzur, R. (1999), "An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacherís role in promoting that learning", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 30, pp. 390-416.

DATOS DE LOS AUTORES

José Luis Cortina
Universidad Pedagógica Nacional, México
jose.luis.cortina@mac.com

Claudia Zúñiga
Universidad Pedagógica Nacional, México
clauzu@msn.com