Estudios Pedagógicos XXXIII, Nº 2: 7-25, 2007

INVESTIGACIONES

# *MODELIZACION MATEMATICA CON ESTUDIANTES DE SECUNDARIA DE LA COMUNA DE TALCA, CHILE**

## Mathematical modeling with students of secondary of the Talca commune, Chile

*Aravena D. María, Caamaño E. Carlos*

Universidad Católica del Maule. Avda. San Miguel 3605, Talca, Chile
maravena@ucm.cl; ccaamano@ucm.cl.

**Resumen**

El artículo presenta los resultados de una investigación en la asignatura de matemática, realizada con estudiantes de tercer año de secundaria en liceos municipalizados de la comuna de Talca. A partir de contenidos matemáticos específicos, se analiza el perfil inicial de los estudiantes, las capacidades que desarrollan y el cambio en las concepciones matemáticas cuando se enfrentan a procesos de modelización. Siguiendo una metodología de corte cualitativa y cuantitativa, se diseñó un plan de análisis, que permitió un estudio pormenorizado de las producciones del grupo objeto de experimentación. A nivel de conclusiones se destacan dificultades y obstáculos detectados en el trabajo con problemas en el pretest. En contraste, el postest muestra que estas dificultades pueden ser reguladas cuando se relaciona la matemática con las distintas áreas del saber y con la vida cotidiana.

*Palabras clave*: procesos de modelización, modelos matemáticos, enseñanza secundaria.

**Abstract**

The article presents the findings in the subject of study of mathematics, accomplished with students of third year of municipal secondary schools of the Talca commune. In relation to specific mathematical contents, the initial profile of the students, the skills that they develop and the change in their math conceptions are analyzed, when they are faced to processes of modelling. Following a methodology of quantitative and qualitative modalities, a plan of analysis that enabled a detailed study of the productions of the target group of experimentation was designed. To the level of conclusions, difficulties and obstacles are noticed in the pretest in the work with problems. It contrast with the posttest, that shows that these obstacles can be regulated when Mathematics is related with the different areas of knowledge and with the everyday life.

*Key words*: processes of modelling; mathematical models; secondary schools.

---

* La investigación fue financiada por FONDECYT Proyecto Nº 1030122.

## I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Uno de los problemas más complejos que enfrenta la educación secundaria chilena en el ámbito de la enseñanza de la matemática tiene relación con la forma de articular los temas con las otras áreas del conocimiento e incluso con la propia matemática. Esto es, la mayoría de los temas están desconectados del mundo real y de las ciencias, lo que tiene como consecuencia que los estudiantes no conciben la utilidad que tienen las matemáticas en su formación. Esto claramente es inadecuado para la formación de los estudiantes en un mundo cada vez más matematizado (Aravena 2001; Gómez 2002).

En Chile, salvo contadas excepciones, se ha generado una tradición en la forma de articular el contenido matemático, reduciéndose la enseñanza a un trabajo basado en algoritmos que no permite a los estudiantes comprender el rol de la matemática en la sociedad (Aravena 2001). Esta forma de enseñanza arraigada en los sistemas educativos ha sido perjudicial para obtener mayores logros en los aprendizajes de nuestros estudiantes, en particular en los establecimientos municipalizados, donde se acrecienta aún más la diversidad. En efecto, las investigaciones reportan que una de las principales dificultades en la enseñanza de la matemática se debe, en general, a la no existencia de la integración entre la matemática y las otras áreas del conocimiento, impidiendo a los estudiantes que puedan desarrollar los algoritmos algebraicos requeridos en función del objetivo final perseguido (Hitt 1998; Caamaño 2001). Se agrega, además, que cuando se enseña un contenido matemático específico, tanto en Chile como en numerosos países, muchos alumnos no reconocen lo que están aprendiendo, con qué objetivos, cómo se integra el contenido con otras áreas, siendo esto una de las principales causas del fracaso en matemática (Jorba 1996; Aravena 2001).

Al mismo tiempo, los diagnósticos efectuados en Chile, en particular en la Región del Maule, dan cuenta que la formación educativa es poco coherente con las necesidades locales y globales, no se entrega una formación con visión de futuro, no se promueve la cultura, la ciencia y las materias y temas escolares no satisfacen las demandas del entorno, ni se responde a los requerimientos actuales y futuros para enfrentar desafíos del desarrollo sustentable. Esta consideración está claramente planteada en la actual Reforma Educativa, donde se coloca en evidencia que el objetivo de esta área debe ser que los alumnos adquieran los conocimientos considerados imprescindibles para satisfacer las necesidades matemáticas habituales de un ciudadano adulto en la sociedad actual y futura. Se debe reconocer, al mismo tiempo, que la cultura científica es un logro humano y que forma parte de la herencia cultural, con lo cual debe estar al alcance de todos, en particular de los estudiantes más desfavorecidos socioculturalmente (D'Ambrosio 1998; Aravena 2001).

En los últimos años, las investigaciones en Didáctica de la Matemática dan cuenta que uno de los temas que ha concitado la atención es el diseño de actividades basado en la modelización de situaciones reales y de las ciencias, "transformándose en una vía prometedora tanto para enfrentar las dificultades y deficiencias como para elevar la calidad de los aprendizajes matemáticos" (Aravena 2002: 66). En diferentes países y condiciones, su inclusión en el currículo ha permitido desarrollar capacidades de tipo cognitivas, metacognitivas y de formación transversal que ayudan a comprender el rol de la matemática en una sociedad moderna (Niss 1993; Keitel 1993; Abrantes 1994; William & Ahmed 1997; Alsina 1998; Blomhoj 2000; Aravena 2001; Gómez 2002). Entre las que concitan nuestro interés se destaca: organizar e interpretar información, la matematización de situaciones (Niss 1989; De Lange 1998, Aravena 2001), la creatividad, el interés por el descubrimiento, la capacidad de analizar e interpretar ejemplos actuales a través de la matemática (Alsina 1998). Ayuda además a desarrollar habilidades comunicativas, mediante la explicitación de ideas, la comunicación de métodos y justificación de procesos (Alsina 1998; Aravena 2001). Se coloca en evidencia que "en una sociedad en la que los ciudadanos van a ser enfrentados a resolver problemas, hacer estimaciones, tomar decisiones, el modelaje favorece la comprensión de los conceptos y métodos matemáticos y permite una visión global de la matemática" (Aravena 2002: 66).

A partir de la situación descrita y de los resultados en las pruebas nacionales (SIMCE 2004), que dan cuenta de los bajos logros en el trabajo matemático, en particular en la Región del Maule, donde se muestra la existencia de numerosas dificultades en la resolución de problemas, nos propusimos introducir en tareas de modelaje a estudiantes de liceos municipalizados de la comuna de Talca. Para ello se diseñó una propuesta integradora algébrico-geométrica-analítica en el tema de las funciones, considerando la gran cantidad de elementos mediadores que contribuyen a la emergencia del significado, mediante actividades en la que los estudiantes den sentido a los conceptos matemáticos y no matemáticos (Hillel y Sierpinska 1996; Caamaño 2001).

La secuencia de trabajo que se implementó en el aula incorporó de manera integrada los tipos de representaciones de tal manera de analizar el fenómeno desde diversas perspectivas (Font 2001) y tipos de situaciones, que conectan la matemática con diferentes campos de conocimiento y de la realidad (Aravena 2001). Se establece así una clasificación que interrelaciona lo algébrico-geométrico-analítico, que potencia la interconexión entre los aspectos geométricos y analíticos, realzan el carácter formativo de la matemática, carácter ligado necesariamente a los procesos de modelización que potencia la heurística de los estudiantes (Gómez 2002). La visualización fue considerada como un paso necesario para la formalización analítica (Zimmermann & Cunningham 1991), presentando situaciones en las cuales hay que construir la función a partir de elementos geométricos, como recurso para introducir y visualizar los conceptos (Caamaño 2001). En el proceso de integración y construcción se adecuaron diversas situaciones al ámbito educativo chileno, seleccionando y enmarcando los problemas a nuestro entorno cultural, valorando nuestro patrimonio cultural y social, aspecto esencial para comprender un mundo globalizado.

Por la importancia del tema de las funciones, en el sentido que se encuentran en una variedad de fenómenos del mundo real y de las ciencias y constituyen un excelente recurso para formular un modelo matemático en una variedad de situaciones, se consideró esencial colocar el énfasis en contenidos que han estado presentes en la historia de la matemática y de las ciencias desde los primeros rudimentos de la idea de modelo, tal como interpolación, el ajuste de datos y la aproximación, cuyo conocimiento es vital cuando se trabaja con problemas reales y de las ciencias, a través de la modelización de situaciones (De Guzmán 1974; Boyer 1996).

Nos propusimos como hipótesis que las dificultades y obstáculos que presentan los estudiantes pueden ser controlados a través de la integración del contenido matemático con actividades de aula, basado en la modelización, mediante un proceso de formación algébrico-geométrico-analítico. Apostando además a que la interrelación de los contenidos matemáticos con otras áreas del saber permite apreciar mejor los conceptos y ser consciente de su aplicabilidad y, desde el punto de vista didáctico, desarrollar un aprendizaje más integrador y relacional para la compresión de los conceptos y procesos y la aplicabilidad de los mismos en situaciones similares.

En esta línea, en el presente trabajo se analiza el perfil inicial de los estudiantes, las capacidades que desarrollan al final de la experiencia y el cambio en las concepciones matemáticas, cuando se enfrentan a procesos de modelización, permitiendo apostar por este tipo de trabajo.

## II. METODOS E INSTRUMENTOS

2.1. MUESTRA. La muestra utilizada estaba constituida de 98 estudiantes de tercer año de enseñanza media, procedentes de 3 liceos municipalizados de la comuna de Talca, que estuvieron de acuerdo en participar de la experiencia, tanto los profesores como los alumnos. La propuesta se implementó en el segundo semestre de 2004.

*Procesos de enseñanza.* Es importante resaltar que el dispositivo pedagógico que se utilizó en el aula fue validado por expertos de nivel nacional e internacional y se implementó con los tres profesores que dictaban la asignatura de matemática en cada uno de los establecimientos.

2.2. METODOS DE ANALISIS E INSTRUMENTOS. Los instrumentos de recogida de la información fueron un test inicial, cuyo propósito era conocer el perfil de los estudiantes en problemas de modelización, y un test final, para reconocer el perfil de progreso al final de la experiencia. Ambos test contenían problemas de modelaje de situaciones, siendo similares en los conceptos y procesos que deben evaluarse en problemas de modelización.

2.2.1. *Métodos de análisis.* El enfoque de la investigación fue de corte cuantitativo y cualitativo, donde se llevaron a cabo los siguientes análisis:

1. ***Validación de los instrumentos:*** Respecto de la validez de los instrumentos, destacamos lo siguiente: (1) Las preguntas de modelización sobre las que se evaluó tanto en el pretest como en el postest, fueron validadas mediante triangulación de jueces expertos; (2) Se aplicó un análisis de fiabilidad de pretest y del postest, mediante el $\alpha$ de Cronbach. Respecto de la fiabilidad de los instrumentos se destaca que se obtuvo una confiabilidad del test con un $\propto= 0{,}95$ para el pretest y un $\propto= 0{,}87$ para el postest.

2. Se realizó un *análisis descriptivo-interpretativo* del contenido de los diferentes ítemes de las pruebas, para lo cual se diseñó un plan de análisis *a priori*, que se consolidó en un segundo nivel de análisis, esto es, una vez revisado el material. Las categorías y subcategorías que fueron diseñadas *a priori* fueron validadas mediante una triangulación de jueces expertos, de acuerdo a lo que se debe evaluar en un proceso de modelización. La categorización se estableció en función de la temática respectiva, que permitió organizar conceptualmente la información, colocando el énfasis en el contenido de las categorías y su interpretación.

*La codificación.* Para la codificación de los ítemes se estableció una triangulación de datos, de tal manera de dar mayor validez al estudio. La codificación de los ítemes de ambas pruebas se organizó de acuerdo a los siguientes rangos de puntaje: 2, si se presenta correcto el proceso requerido; 1, si se presenta en forma incorrecta, posee errores conceptuales de proceso o de cálculos; 0, si no contesta. Finalmente, se agrupan en diferentes tablas las frecuencias relativas de acuerdo a los valores asignados por cada una de las subcategorías.

A continuación se presentan las definiciones de las categorías, con sus respectivas subcategorías base para el análisis interpretativo del contenido y que da respuesta a la variable: *Integración del contenido matemático y sus significados*.

Categoría A1. *Integración de los Aspectos Procedimentales*. Se consideró que las características esenciales en problemas de modelización son: (1) la organización e interpretación de la información, que permite adecuarse a las condiciones del problema e interpretar la información identificando datos y condiciones; (2) la matematización de la situación, que permite la descripción de relaciones matemáticas que interpretan el proceso. Las subcategorías de análisis corresponden a:

Subcategoría A1.1. *Organización e interpretación de la información:* Los sistemas de representación incorporados en esta subcategoría corresponden a: (1) organización de datos en una tabla de valores (pensamiento numérico); (2) gráfica de la situación (visualización que permite comprender la gráfica en términos locales), que involucra la graduación de ejes y la ubicación de las variables en los ejes cartesianos; (3) interpretación y ubicación de las variables.

Subcategorías A1.2. *Matematización.* Describir en términos matemáticos una situación real, es uno de los aspectos clave en los procesos de modelización. Por ello, se consideraron: (1) *la descripción de relaciones matemáticas que interpretan el proceso*, dentro de las que se encuentran el planteamiento de las ecuaciones (simbolización), desarrollo de procesos algebraicos involucrados en el problema (habilidad), aplicación de propiedades y algoritmos (habilidad), ajuste e interpolación (destreza) y (2) *Formulación del modelo matemático* que se aproxima a la situación planteada.

Categoría A2. *Integración de los Aspectos Conceptuales:* Se hace referencia a la explicitación y significado que los estudiantes dan a los conceptos y procesos matemáticos y a la interrelación que establecen entre los conceptos y el problema. Por ello, se consideraron: (1) reconocimiento y significado de conceptos y puntos singulares; (2) reconocimiento y significado de las variables, y (3) interpretación de conceptos en los procesos de modelización. Las subcategorías de análisis corresponden a:

Subcategoría A2.1. *Reconocimiento y significado de conceptos y puntos singulares de acuerdo al fenómeno.* Se refiere a la forma como los estudiantes interpretan e interrelacionan los conceptos y procesos matemáticos con el problema real. Se analizaron: puntos importantes de acuerdo al fenómeno, la interpretación geométrica y algebraica con los ejes y su significado en el contexto del problema. Significado de parámetros, ecuación y fórmulas.

Subcategoría A2.2. *Reconocimiento y significado de las variables que intervienen en el fenómeno.* Se consideró la interpretación de los conceptos de tal manera de establecer una relación entre el problema matemático y el problema real. Esto es, la interpretación de las variables que intervienen en el problema, de las raíces de las ecuaciones involucradas y el despeje de variables.

Subcategoría A2.3. *Interpretación de conceptos en procesos de modelización.* Se consideró importante valorar el ajuste de datos de acuerdo al comportamiento del fenómeno de tal manera que puedan realizar el mejor ajuste.

Categoría A3. *Autorregulación y aplicación de los conceptos y procesos.* Pretende conocer la forma como los estudiantes se enfrentan al problema, la elaboración y la aplicación de los conceptos y procesos. Se analizó la utilidad de los conceptos y su aplicación, el nivel de estructuración y a las explicaciones y justificaciones sobre determinadas decisiones. Las subcategorías son:

Subcategoría A3.1. *Aplicabilidad de los conceptos.* Se refiere a reconocer en el trabajo matemático la utilidad de los conceptos y procesos, los argumentos que presentan frente a la aplicación de éstos. Por ello, se valoran: (1) claridad y consistencia en el proceso matemático-problema real (argumentos presentados para explicar los conceptos utilizados); (2) interrelación entre lo algebraico y lo geométrico, y (3) reconocimiento del fenómeno que se modeliza.

Subcategoría A3.2. *Abstracción del modelo como predictor de fenómenos.* Se refiere a la interpretación que se establece entre los datos matemáticos y el problema real. Por ello, se valoran la predicción y proyección de los datos de acuerdo a las condiciones.

Categoría A4. *Comunicación Matemática.* La comunicación matemática es un aspecto clave en el trabajo de modelización, puesto que ayuda a comprender los temas enseñados y sus procesos de razonamiento. Por ello, se consideró analizar en las producciones: (1) La comunicación de métodos y procesos y (2) la comunicación de resultados. Las subcategorías corresponden a:

Subcategoría A4.1. *Comunicación de métodos y procesos.* Se refiere a la presentación de argumentos en la descripción del proceso, argumentos en la utilización de propiedades, en los algoritmos, en la formulación del modelo.

Subcategoría A4.3. *Comunicación de resultados.* Interpretar resultados y concluir de acuerdo a las condiciones del problema real. Dar respuesta al problema real a partir del problema matemático.

3. *Análisis de logros obtenidos mediante la prueba Zp de proporciones*. Con el objeto de proporcionar una visión más estructurada que la que se entrega en los análisis descriptivos y que permitan conocer los logros obtenidos al final de la experiencia, se estableció una comparación de los ítemes que son equivalentes entre ambas pruebas. Los criterios que se utilizaron para la selección de los ítemes, responde a los planteamientos teóricos de los elementos que debe contener un modelo matemático y un proceso de modelización

(Niss 1989; William & Ahmed (1997); Aravena 2001; Gómez 2002). Los ítemes que estuviesen relacionados con cada una de las siguientes dimensiones:

(1) *Organización e interpretación del problema,* que incluye: identificación de los datos y condiciones; utilización de sistemas de representación, y reconocimiento e interpretación de variables que intervienen.
(2) *Matematizar el problema*, que incluye: planteamiento de las ecuaciones matemáticas; utilización de algoritmos y propiedades; desarrollo de procesos algebraicos; determinación de dominio y recorrido, y formulación del modelo.
(3) *Aplicación y verificación del modelo*. Establecer una relación entre los datos matemáticos y el problema real, es decir, someter las variables del modelo a datos de la realidad, si se ajusta a las condiciones, mediante la evaluación del modelo con nuevos datos del dominio.
(4) *Comunicación matemática*. Dar una interpretación de los datos y de los conceptos desde punto de vista del problema real. Interpretar datos a partir del modelo matemático.

Como resultado del proceso de selección se tomaron 28 ítemes y se agruparon en cada una de las dimensiones anteriormente señaladas, lo que se refleja en la tabla 7 del apartado IV. El análisis consideró dos tipos de problemas verbales: (a) sin indicaciones del tipo de modelo y con datos adicionales (tabla de valores) y (b) con indicaciones del tipo de modelo, sin datos adicionales. La comparación se realizó entre el problema 4 del pretest con el problema 2 del postest (tipo a) y el problema 5 del pretest con el problema 1 del postest (tipo b) (ver anexo). Se consideraron en los análisis sólo los cambios registrados en el porcentaje de respuestas correctas, que eran de interés para reconocer el progreso y el cambio en las concepciones matemáticas de los estudiantes objeto de experimentación.

Para el tratamiento estadístico de los datos en los análisis descriptivos, se utilizó el paquete SPSS y el programa Excel para los análisis de diferencia de proporciones.

## III. RESULTADOS Y ANALISIS

Este capítulo presenta los resultados y análisis de los datos del pretest y postest, utilizando un análisis de tipo cuantitativo, que da cuenta del perfil inicial y el progreso real al término de la experiencia.

3.1. ANALISIS DESCRIPTIVO - INTERPRETATIVO TEST INICIAL Y FINAL. Para la discusión de resultados y análisis se presenta la información en diferentes tablas de frecuencias relativas de acuerdo a las categorías de análisis y sus respectivas subcategorías.

### 3.1.1. *Integración de los aspectos procedimentales*

(1) *Organización e interpretación de la información:* Los resultados descritos en la tabla 1 dan cuenta de las frecuencias relativas del pretest en contraste con el postest, cuando los estudiantes representan gráficamente los datos y ubicación de las variables.

*Tabla 1*

Frecuencias relativas de la representación gráfica de un conjunto de datos dados en una tabla de valores

| CATEGORIA: ASPECTOS PROCEDIMENTALES | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| SUBCATEGORIA | PRETEST (N=98) | | | POSTEST (N=83) | | |
| Organización e interpretación de la información | Correctas | Incorrectas | No contesta | Correctas | Incorrectas | No contesta |
| Itemes asociados | | | | | | |
| Grafica la situación | 4 (4,1) | 88 (89,8) | 6 (6,1) | 67 (80,7) | 7 (8,49) | 9 (10,8) |
| Graduación de ejes | 2 (2,0) | 90 (91,8) | 6 (6,1) | 62 (74,7) | 15 (18,1) | 6 (7,2) |
| Distingue variables independientes | 70 (71,4) | 21 (21,4) | 7 (7,1) | 74 (89,2) | 2 (2,4) | 7 (8,4) |
| Distingue variables dependientes | 73 (74,5) | 15 (15,3) | 10 (10,2) | 73 (88,0) | 3 (3,6) | 7 (8,4) |

Respecto a interpretar la información a partir de un enunciado verbal y una tabla de valores, los resultados del pretest dan cuenta de las dificultades y obstáculos en la representación gráfica de los datos, ya que los resultados correctos no superan el 5% y sobre el 89% de los alumnos presenta dificultades para organizar los datos en los ejes cartesianos. El problema mayor radica en la graduación de ejes, específicamente en las unidades de medidas y en la ubicación del origen del sistema, donde el porcentaje de incorrectas sobrepasa el 90%. Por el contrario, se puede observar en la tabla 1 que, al final de la experiencia, los resultados para la representación de datos y graduación de ejes muestran un progreso significativo, donde los porcentajes de correctas superan el 74%.

Llama la atención, los bajos porcentajes alcanzados en el pretest, puesto que los resultados de pruebas nacionales (SIMCE 2004), un año antes de la experiencia, muestran que en todos los niveles sociales, los docentes declaran haber trabajado completamente en el análisis de gráficos lineales, donde los porcentajes superan un 50% en el nivel socioeconómico más bajo. La pregunta natural que surge es: ¿De qué manera se trabajó la representación gráfica?, ¿se trabajó en contextos de aplicación? Preguntas clave que pudieran dar luces sobre la forma como se articulan los contenidos en el aula.

Sobre la *distinción de las variables*, aunque grafican mal, presentando histogramas, tienden a ubicarlas correctamente en los ejes. Sobre el 70% de ellos ubica de manera correcta dichas variables. Sin embargo, existe un 21,4% que tiene problemas con la ubicación de éstas, donde la dificultad radica en la inversión de ejes. En el postest, los resultados sobrepasan el 88% de ubicación correcta de las variables; esto es significativo, ya que en el caso de los alumnos que se encontraban en la categoría de incorrectas (21,4%, en el pretest) disminuye a un 2,4%.

*Interpretación de un problema a partir de su lectura,* sin una tabla de valores. Los resultados que se exhiben en la tabla 2 muestran que hay un progreso considerable respecto del pretest.

*Tabla 2*

Frecuencias relativas de la representación gráfica de un conjunto de datos sin tabla de valores

| CATEGORIA: ASPECTOS PROCEDIMENTALES | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| SUBCATEGORIA | PRETEST (N=98) | | | POSTEST (N=83) | | |
| Organización e interpretación (P5-P1) | Correcta | Incorrecta | No contesta | Correcta | Incorrecta | No contesta |
| Itemes asociados | | | | | | |
| Organiza datos en una tabla | 23 (23,5) | 26 (26,5) | 49 (50,0) | 64 (77,1) | 11 (13,3) | 8 (9,6) |
| Grafica en estrecha relación con la tabla | 15 (15,3) | 26 (26,5) | 57 (58,2) | 66 (79,5) | 9 (10,8) | 8 (9,6) |
| Ubica unidades de medida en relación con los datos | 16 (16,3) | 24 (24,5) | 58 (59,2) | 66 (79,5) | 9 (10,8) | 8 (9,6) |
| Ubica variables independientes | 30 (30,6) | 14 (11,2) | 54 (58,2) | 68 (81,9) | 2 (2,4) | 13 (15,7) |
| Ubica variables dependientes | 33 (33,7) | 11 (11,2) | 54 (55,1) | 68 (81,9) | 2 (2,4) | 13 (15,7) |

Se observa en la tabla 2 que los porcentajes de respuestas correctas en el postest superan el 77%, alcanzando incluso al 82% en la ubicación correcta de las variables. En el pretest los porcentajes de correctas, para los indicadores asociados a la subcategoría, no superan el 25%; sólo en la ubicación de las variables alcanzan el 34%. Los resultados del pretest colocan de manifiesto la dificultad que presentan los estudiantes en reconocer las variables que intervienen en un problema, cuando no se entrega la tabla de valores. Este hecho se puede contrastar en la tabla 1, donde se muestra que el porcentaje es mayor (71,4%) cuando se presentan ordenadas en una tabla. Este aspecto es relevante, puesto que las investigaciones dan cuenta que la mayor dificultad de los estudiantes está en la interpretación de problema escrito sin datos adicionales, como ocurre en este caso (Aravena 2001).

(2) *Matematización*. Otro de los aspectos esenciales en procesos de modelización lo constituye la descripción de relaciones matemáticas, puesto que de ello depende el proceso y la formulación del modelo matemático que da respuesta a la situación. La tabla 3, que se presenta en la página siguiente, entrega los resultados de la experiencia.

Respecto del *planteamiento de las ecuaciones matemáticas* que están en juego, a partir de una tabla de valores, tenemos que sobre el 18% de los estudiantes coloca las ecuaciones en juego en el pretest, sin embargo, menos de un 10% es capaz de describir expresiones de acuerdo al contexto del problema. La mayoría de los estudiantes (sobre el 80%) no presenta ninguna expresión que permita describir la situación en términos matemáticos. En este aspecto, coincidimos con investigaciones (Cantoral 1995; Azcárate 1995), quienes colocan de manifiesto que una de las dificultades en el trabajo matemático es la incapacidad de plantear las ecuaciones a partir de un conjunto de datos. Ahora, cuando no se presenta una tabla de valores, los resultados son aún más deficitarios, ya que menos de un 17% describe la situación en términos matemáticos y sólo un 6,1%

*Tabla 3*

Frecuencias relativas de la descripción de relaciones matemáticas
que interpretan el proceso y formulación del modelo

| CATEGORIA: ASPECTOS PROCEDIMENTALES | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| SUBCATEGORIA | PRETEST (N=98) | | | POSTEST (N=83) | | |
| Matematización | Consistente | Inconsistente | No contesta | Consistente | Inconsistente | No contesta |
| Itemes asociados | | | | | | |
| Planteamiento de ecuaciones (P4-P2), | 9 (9,2) | 9 (9,2) | 80 (81,6) | 44 (53,0) | 11 (13,3) | 28 (33,7) |
| Procesos algebraicos | 2 (2,0) | 17 (17,3) | 79 (80,6) | 33 (39,8) | 4 (4,8) | 46 (55,4) |
| Formulación del modelo | 5 (5,1) | 14 (14,3) | 79 (80,6) | 24 (28,9) | 23 (27,7) | 36 (43,4) |
| Planteamiento de ecuaciones (P5-P1) | 6 (6,1) | 10 (10,2) | 82 (83,7) | 53 (63,9) | 17 (20,5) | 13 (15,7) |
| Procesos algebraicos | 6 (6,1) | 5 (5,1) | 87 (88,8) | 40 (48,8) | 25 (30,5) | 17 (20,7) |
| Aplicación de propiedades | 8 (8,2) | 1 (1,0) | 89 (90,8) | 42 (50,6) | 17 (20,5) | 24 (28,9) |

logra dar una expresión algebraica correcta. En el postest el progreso es significativo, ya que los porcentajes que describen las ecuaciones asociadas a la función sobrepasan el 80%, pero alrededor de un 63% lo hace en forma correcta.

Con respecto al *desarrollo de procesos algebraicos* y *aplicación de propiedades (P4-P2)*, los resultados dan cuenta que en el pretest, de un 20% que desarrolla procesos, sólo un 2% logra realizarlo correctamente. La mayor dificultad radica en que no comprenden la dependencia que deben establecer entre las variables. De igual manera no reconocen la utilidad que tienen las leyes del álgebra, en el desarrollo de los algoritmos requeridos para su resolución. Se reconoce un progreso significativo en el postest en contraste con el pretest, encontrándose en un rango de 48 a 50% de correctas contra un 6 a 8%, respectivamente. Sobre los procesos utilizados en el despeje de variables con sus respectivas propiedades (P5-P1), se puede observar en la tabla 3 que los porcentajes de correctas, en el pretest, se encuentran en un rango de 6% a 8,5%, respectivamente, porcentajes que en el postest fluctúan entre un 48 a 51% para ambos indicadores.

Respecto de la *formulación del modelo* que mejor se ajusta a los datos del problema, los resultados del pretest dan cuenta que existen obstáculos, ya que menos de un 20% de los estudiantes deduce un modelo matemático, aunque alrededor de un 6% es capaz de describir el modelo que representa el mejor ajuste. En este aspecto, cabe resaltar que en problemas de modelización de funciones lineales presentan serias dificultades, ya que no logran utilizar el conocimiento matemático disponible, como es el de pendiente y de la ecuación lineal, contenidos que fueron estudiados en el segundo año de enseñanza media, de acuerdo a lo registrado en el libro de materias. Además, llama la atención que en los resultados de las pruebas nacionales (SIMCE 2004) se coloca de manifiesto que sobre el 67% de los docentes declara haber trabajado completamente estos conceptos en un nivel socioeconómico bajo.

Por el contrario, en el postest, el porcentaje que realiza un ajuste a los datos sobrepasa el 56%, aunque menos de un 29% describe el mejor ajuste. Conviene hacer notar que en el caso del postest, la mayor dificultad para interpolar y formular el modelo estuvo en los métodos de resolución de ecuaciones, materia que de acuerdo a los programas es trabajada en segundo medio. Surge la pregunta, ¿se trabajan los sistemas en contextos de aplicación? Podemos conjeturar que un estudio parcelado y eminentemente matemático podría generar las dificultades que arrastran los estudiantes para posteriores niveles de enseñanza.

### 3.1.2. *Integración de los aspectos conceptuales*

Uno de los aspectos importantes de analizar en la producción matemática de los estudiantes se refiere al reconocimiento y el significado de conceptos en la resolución de problemas. En la tabla 4 se presentan los resultados que contienen dicha información.

*Tabla 4*

Frecuencias relativas de la interpretación de conceptos y puntos singulares

| CATEGORIA: ASPECTOS CONCEPTUALES | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| SUBCATEGORIA | PRETEST (N=98) | | | POSTEST (N=83) | | |
| Integración de los aspectos conceptuales | Correctos | Incorrecto | No contesta | Correcto | Incorrecto | No contesta |
| Items asociados | | | | | | |
| Determina puntos de intersección con el eje X | 3 (3,1) | 45 (45,9) | 50 (51,0) | 52 (62,7) | 12 (14,5) | 19 (22,9) |
| Determina punto de intersección con el eje Y | 19 (19,4) | 28 (28,6) | 51 (52) | 44 (53,0) | 9 (10,8) | 30 (36,1) |
| Interpreta puntos de corte con el eje X | 9 (9,2) | 16 (16,3) | 73 (74,5) | 45 (54,2) | 10 (12,0) | 28 (33,7) |
| Interpreta punto de corte con el eje Y | 1 (1,0) | 28 (28,6) | 69 (70,4) | 44 (53,0) | 9 (10,8) | 30 (36,1) |
| Significado coeficientes | 1 (1,0) | 24 (24,5) | 73 (74,5) | 44 (53,0) | 11 (13,3) | 28 (33,,4) |
| Ajuste de datos. | 9 (9,2) | 23 (23,5) | 66 (67,3) | 50 (60,2) | 5 (6,0) | 28 (33,7) |

(1) *Reconocimiento e interpretación de conceptos y puntos singulares*. En cuanto a determinar los puntos importantes en la representación gráfica y su interpretación, los resultados correctos en determinar corte con *Eje X* no superan el 4% y menos de un 10% entrega una interpretación correcta. Una de las dificultades observadas dice relación con la interpretación geométrica al no comprender el significado de resolver la ecuación ($f(x)=0$), y encontrar la raíz de tal manera que le permita determinar el punto de intersección con el Eje X. Se destaca un progreso significativo en el postest, ya que el trabajo algebraico-geométrico permitió que los resultados sobrepasaran el 62% de correctas en la determinación de puntos de corte y sobre un 54% en su interpretación correcta.

Lo mismo ocurre con el punto de corte con el *Eje Y*, pues los resultados muestran un progreso significativo a favor del postest, donde los porcentajes alcanzan un 53% que reconoce el punto de corte y da una interpretación correcta de éste, de acuerdo al fenómeno. Por el contrario, en el pretest, menos de un 20% es capaz de determinarlo, pero sólo un 1% da una interpretación correcta.

Con respecto al reconocimiento y significado de los coeficientes en una función, los resultados del pretest dan cuenta que un 1% se encuentra en la categoría de correcta, en contraste con el postest, donde se alcanza un 53% de correctas. Lo anterior nos permite deducir que los estudiantes (pretest) no comprenden el significado matemático de lo que representan, como tampoco logran dar una interpretación de ellos en problemas de aplicación. Si miramos los resultados de las pruebas nacionales (SIMCE 2004), los docentes manifiestan haber trabajado completamente la interpretación de parámetros, encontrándose en un rango de 67,3 (nivel socioeconómico bajo) a un 85,6% (nivel socioeconómico medio). Surge la pregunta ¿se trabajan estos conceptos en contextos de aplicación o sólo desde el punto de vista matemático?

(2) *Interpretación y significado de las variables que intervienen en el fenómeno.* Sobre el significado de las variables, menos de un 24% entrega una argumentación consistente. Lo anterior coincide con las investigaciones reportadas (Cantoral 1995; Azcárate 1995), quienes dan cuenta que el escaso trabajo con problemas en contextos les dificulta dar una interpretación correcta de su significado. Los resultados del postest aumentan considerablemente, alcanzando un 77% de correctas respecto de su interpretación, colocando en evidencia que los estudiantes dan significado a los conceptos cuando son enseñados en contextos de aplicación.

(3) *Interpretación y significado de conceptos en procesos de modelización.* El ajuste de datos es un elemento clave de la modelización, puesto que no siempre es posible encontrar de manera exacta una función matemática que dé respuesta al fenómeno en estudio. En este sentido, las producciones de los alumnos en el pretest nos muestran las concepciones que subyacen sobre su significado, donde menos de un 10% maneja una idea adecuada sobre la necesidad de ajustar los datos de acuerdo al comportamiento de la gráfica y entregan una interpretación errada de éste sobre un 20%. Lo anterior ratifica el hecho de que los estudiantes no manejan este tipo de terminología, ni su aplicación en contextos. Sobre los resultados del postest se muestra un progreso significativo, donde sobre el 60% de los estudiantes maneja una idea correcta de su significado.

3.3.3. *Autorregulación y aplicación. Conceptos y procesos*

Sobre la *aplicabilidad de los conceptos*, los resultados del pretest dan cuenta que, en general, los estudiantes no tienen claridad de cómo se utilizan en una situación concreta. No existe una internalización del significado de coeficientes, variables y fórmulas que permitan ajustar los datos a un modelo lineal que dé respuesta a la situación. La escasa interrelación que establecen entre lo algebraico y lo geométrico no les permite comprender el significado de los conceptos de ecuación, raíz de una ecuación, puntos de corte con el eje X, parámetros y ajuste de datos. Se agrega, además, la falta de conocimientos en cuanto a propiedades y utilización de fórmulas, lo que les dificulta describir el modelo o trabajar con el modelo. En el plano de las interpretaciones los porcentajes de correctas no superan el 15% para diversos conceptos (tabla 4). Respecto de los resultados del postest, las tablas anteriores dan cuenta que ha habido un progreso significativo respecto del pretest, en todos los aspectos mencionados anteriormente, cuyos porcentajes se encuentran en un rango de 53 a 60% de respuestas correctas.

*Abstracción del modelo como predictor de fenómenos.* Sobre la proyección y predicción de los datos se pueden observar en la tabla 5 las diferencias en las frecuencias relativas tanto del pretest como del postest.

*Tabla 5*

Frecuencias relativas de predicción y proyección de datos

| CATEGORIA: AUTORREGULACION Y APLICACION DE CONCEPTOS | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| SUBCATEGORIA | PRETEST (N=98) | | | POSTEST (N=83) | | |
| Abstracción del modelo predictor de fenómenos | Correctas | Incorrectas | No contesta | Correctas | Incorrectas | No contesta |
| Items asociados | | | | | | |
| Proyección y predicción P4-P2 | 44 (44,9) | 16 (16,3) | 38 (38,8) | 53 (63,9) | 17 (20,5) | 13 (15,7) |
| Predicción de nuevos datos P5-P1. | 25 (25,5) | 26 (26,5) | 47 (48,0) | 39 (47,0) | 12 (14,5) | 32 (38,6) |

Sobre la predicción y proyección de datos del dominio, los resultados del pretest nos muestran que sobre un 44% de los alumnos es capaz de predecir lo que sucederá a futuro, siendo uno de los ítems de mayor logro. Se destaca la capacidad de proyección de los estudiantes, puesto que a pesar de no haber podido formular el modelo de mejor ajuste, logran trabajar con los datos descritos en la tabla de valores. De igual forma, en el problema sin tabla de valores, aunque los resultados disminuyen, la predicción correcta supera el 25%. En cuanto al postest, los resultados muestran un progreso relevante, sobrepasando el 63% de respuestas correctas en el problema con tabla de valores y un 47% en el problema sin datos adicionales.

### 3.3.4. *Comunicacion matemática*

Sobre la forma de comunicar y argumentar el trabajo matemático en el contexto de los problemas, la tabla 6 da cuenta de los resultados en ambos test.

*Tabla 6*

Frecuencias relativas de comunicación matemática

| CATEGORIA: COMUNICACION MATEMATICA | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Subcategoria | Pretest (N=98) | | | Postest (N=83) | | |
| Argumentaciones en los métodos y procesos | Consistente | Inconsistente | No contesta | Consistente | Inconsistente | No contesta |
| Items asociados | | | | | | |
| Comunica y Argumenta conceptos y procesos | 2 (2,0) | 11 (11,2) | 85 (86,7) | 30 (36,1) | 05 (6,0) | 48 (57,8) |
| Interpretación de datos y soluciones (P4-P2) | 44 (44,9) | 16 (16,3) | 38 (38,8) | 53 (63,9) | 17 (20,5) | 13 (15,7) |

Respecto de *argumentar matemáticamente los conceptos y procesos* para la descripción del modelo, en el pretest los porcentajes no superan el 20%, llegando a entregar argumentos consistentes sólo un 2%. Conviene precisar que en el postest, a pesar de ser significativo con respecto al pretest, donde los resultados alcanzan un 36% de correctas, es uno de los ítemes más bajos, coincidiendo con las investigaciones (Jiménez 1997; Alsina 1998) que dan cuenta que es uno de los aspectos más difíciles de internalizar en los estudiantes, especialmente cuando éste no ha sido trabajado desde los primeros niveles de escolaridad. Conjeturamos que a este aspecto no se le dedica especial atención en la enseñanza de la matemática, por lo que se requiere una regulación continua en todos los niveles.

Por último, en la *interpretación de datos y soluciones*, los porcentajes del pretest son mucho más elevados, encontrándose dentro de un rango entre un 44% y 45% de correctas. Los estudiantes poseen una gran capacidad de interpretación que les permite, aunque no hayan podido formular el modelo, poder proyectar los datos apoyándose en la tabla de valores y manipulando los datos desde un punto de vista aritmético. Sin embargo, de igual forma, en el postest se observa un progreso significativo, donde los porcentajes de correctas alcanzan el 64%.

## IV. RESULTADOS Y ANALISIS DE LOGRO. PRUEBA ZP DE PROPORCIONES

Para dar mayor validez al estudio presentamos los resultados del pretest en contraste con el postest, considerando las proporciones de respuestas correctas obtenidas en ambas pruebas para cada una de las dimensiones. Esto nos permitió analizar los resultados de la prueba desde la perspectiva de lo que significa trabajar un proceso de modelización, para verificar la comprensión y aplicabilidad de los conceptos y procesos en situaciones, así como el cambio en las concepciones matemáticas.

Los resultados que se presentan en la tabla 7 permiten corroborar que en 27 de los 28 ítemes equivalentes hubo diferencias altamente significativas y significativas a favor del postest. Esto confirma la importancia de un trabajo basado en la modelización, que se refleja en lo siguiente:

(1) *Interpretación del problema.* Mediante problemas concretos, los estudiantes realizan en forma correcta la representación gráfica y graduación de ejes, presentando diferencias significativas a favor del postest. Sin embargo, no existen diferencias entre ambos test respecto del reconocimiento de variables, cuando se les entrega una tabla de valores ordenadamente. Naturalmente los estudiantes las ubican en el eje de coordenadas.

(2) *Matematización.* Las diferencias son significativas en todos los ítemes a favor del postest, donde se destaca la descripción de relaciones matemáticas que interpretan el proceso. Reconocen el significado que tiene resolver una ecuación, tanto desde el punto de vista geométrico como algebraico. Podemos decir que la experiencia ha sido positiva al trabajar y regular los conceptos y procesos tendientes a dar respuesta al problema concreto.

(3) *Aplicación y verificación del modelo.* Respecto de la relación entre los datos y el problema real, se presentan diferencias significativas a favor del postest. Se coloca en evidencia la evaluación de nuevos datos del dominio, así como la proyección y predicción de acuerdo a las condiciones del problema. Este aspecto es muy importante, ya que da cuenta de la comprensión y significado de buscar un modelo matemático que sirva para explicar exactamente o con gran aproximación, no sólo los datos presentados, sino que, además, proyectando para otros datos.

(4) *Comunicación matemática.* Se destacan diferencias significativas a favor del postest, colocando en evidencia: la presentación de argumentos en los conceptos y procesos; la interpretación de datos y soluciones, relacionándolos con el problema real, y el significado de ajuste de datos, elemento esencial en procesos de modelización.

## V. CONCLUSIONES GENERALES. IMPLICACIONES DIDACTICAS

Los resultados descritos en los apartados anteriores colocan en evidencia que un trabajo matemático basado en la modelización permite desarrollar una serie de capacidades requeridas en el mundo actual, coincidiendo con las investigaciones reportadas. En este aspecto, destacamos que un trabajo de aula, colocando la matemática en contextos, ha permitido regular las dificultades y obstáculos presentados al inicio. La potencia del modelaje, mediante la regulación continua, deja en evidencia el progreso real de los estudiantes, generando un cambio significativo en las concepciones matemáticas en todos los aspectos. Consideramos que un trabajo de aula, en la forma descrita en

**Tabla 7**

Resultados de la prueba Zp en el test inicial y final respecto de las dimensiones en procesos de modelización

| NOMBRE/ITEM | PRETEST | POSTEST | ZP | NIVEL DE SIG |
|---|---|---|---|---|
| Interpretación del problema con datos adicionales (P4-P2) | | | | |
| Grafica la situación | 0,05 | 0,81 | 15,22 | ** |
| Graduación de ejes | 0,02 | 0,75 | 14,11 | ** |
| Distingue variable independiente | 0,73 | 0,89 | 2,61 | * |
| Distingue variable dependiente | 0,80 | 0,88 | 1,46 | NS. |
| Interpretación del problema a partir de su lectura (P5-P1) | | | | |
| Organiza datos en tabla | 0,23 | 0,77 | 8,21 | ** |
| Identifica variable independiente | 0,30 | 0,82 | 7,79 | ** |
| Identifica variable dependiente | 0,34 | 0,82 | 7,12 | ** |
| Graduación de ejes | 0,14 | 0,80 | 10,94 | ** |
| Interpretación de variables | 0,22 | 0,77 | 8,48 | ** |
| Matematización de la situación (P4-P2) | | | | |
| Planteamiento de ecuaciones | 0,08 | 0,54 | 7,02 | ** |
| Desarrollo de procesos algebraicos | 0,02 | 0,40 | 6,55 | ** |
| Formulación del modelo (P4-P2) | 0,05 | 0,31 | 4,67 | ** |
| Matematización de la situación (P5-P1) | | | | |
| Planteamiento de ecuaciones | 0,05 | 0,64 | 10,10 | ** |
| Desarrollo de procesos algebraicos | 0,06 | 0,49 | 7,05 | ** |
| Utilización de propiedades | 0,07 | 0,51 | 6,93 | ** |
| Determina dominio | 0,02 | 0,25 | 4,47 | ** |
| Determina recorrido | 0,01 | 0,20 | 4,15 | ** |
| Determina corte con eje X | 0,02 | 0,63 | 10,68 | ** |
| Determina corte eje Y | 0,19 | 0,53 | 4,77 | ** |
| Aplicación y verificación | | | | |
| Evalúa nuevos datos (P5-P1) | 0,05 | 0,53 | 7,99 | ** |
| Proyección y predicción de acuerdo a las condiciones (P5-P1) | 0,28 | 0,47 | 2,59 | * |
| Evalúa el modelo con nuevos datos (P4-P2) | 0,06 | 0,17 | 2,20 | * |
| Proyección y predicción de acuerdo a condiciones (P4-P2) | 0,46 | 0,64 | 2,35 | * |
| COMUNICACION MATEMATICA | | | | |
| Interpretación cortes con ejes X desde el punto de vista real (P5-P1) | 0,13 | 0,54 | 6,12 | ** |
| Iinterpretación cortes eje Y desde el punto de vista real (P5-P1) | 0,01 | 0,57 | 9,83 | ** |
| Interpreta los datos y soluciones a partir del modelo (P4-P2) | 0,46 | 0,64 | 2,35 | * |
| Presentación de argumentos en los procesos (P4-P2) | 0,01 | 0,36 | 6,38 | ** |
| Da una interpretación del significado de ajustar datos | 0,10 | 0,60 | 7,97 | ** |

*: p<0,05 y **: p< 0,01

esta experiencia es "prometedora" para obtener mayores logros en el aprendizaje de la matemática tanto en la región como en el país.

Por último, hemos podido comprobar que una enseñanza enfocada en estos términos permite: (1) afianzar y utilizar los conceptos y procesos en situaciones; (2) analizar información desde diferentes perspectivas; (3) encontrar sentido a los conceptos, algoritmos y procesos algebraicos; (4) comunicar y argumentar sobre el trabajo realizado, sin temor a equivocarse, aspecto esencial para aprender matemática. Al mismo tiempo, el análisis pormenorizado de las producciones permitió conocer en detalle todos los aspectos que están involucrados en los problemas de modelaje, así como aquellas que necesitan una mayor regulación, tal como la comunicación matemática.

Respecto de las hipótesis propuestas, han sido validadas con ambos análisis, donde se coloca en evidencia las dificultades en la comprensión y utilización de conceptos y procesos, pudiendo ser regulados mediante una propuesta en los términos descritos, que ha permitido superar, en un nivel significativo, los obstáculos y deficiencias. En consecuencia, se necesita colocar a prueba en los sistemas educativos chilenos experiencias similares, en iguales contextos, de tal manera de obtener más evidencias que permitan dar mayor validez a estudios de este tipo, proporcionando información a todos los agentes, para apoyar el proceso de aprendizaje de la matemática.

## VI. BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P. (1994). Teses *O Trabalho de Projecto e a Relação dos Alunos com a Matemática* a experiência do Projecto. MAT789. Lisboa.

Alsina, C. (1998). Neither a microscope nor a telescope, just a mathscope. *Proceed.* ICTMA-1997.

Aravena, M. (2001). Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica. *Tesis Doctoral*. Departament de Didáctica de la Matemática i de les Ciències Experimentals. Universitat de Barcelona, España.

Aravena y Giménez (2002). Evaluación de procesos de modelización polinómica mediante proyectos. Monografía modelización y matemáticas. Revista UNO. Didáctica de las Matemáticas (pp. 44-56). Editorial GRAO.

Aravena, M. (2002). Las principales dificultades en el trabajo algebraico.Un estudio con alumnos de ingeniería de la U.C.M. UCMaule. *Revista Académica* Universidad Católica del Maule nº 28: 63-81.

Azcárate, C. (1995). *El concepto de función*. Madrid. Editorial Síntesis.

Blomhoj (2000). *Developing modelling competence: The different roles of modelling and problem solving.* Roskilde University, Denmark.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. En A.F. COXFORD & A.P. Shulte (eds.). *Ideas of Algebra,* K-12 (1988 Yearbook). Reston, V.A.: National Council of Teacher of mathematics.

Boyer, C. B. (1996). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza.

Caamaño, C. (2001). Tesis Doctoral: Bases para una formación integrada de álgebra y geometría en ingeniería. El caso de las cuádricas. Departament de Didáctica de la Matemàtica i de les Ciéncies Experimetals. Universitat de Barcelona. España.

Cantoral, R. (1995). Los textos de Cálculo: una visión de las reformas y contrarreformas. *Pub. Centroamericanas*. México: Cinvestav.

Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing in l streefland (Ed) *Proceedings of the Ninth internacional Conference for the Psycology of Mathematics Education*. (Vol. 1 pp. 369-375) Utrecht, The Netherlands: State University of Utrecht.

Comisión Nacional para la Modernización de la Educación (1995): *En los desafíos de la educación chilena frente al siglo XXI. Informe de la Comisión Nacional para la Modernización de la Educación.* Editorial Universitaria.

D'ambrosio, U. (1998). Conferencia: Matemáticas de ontem ou de hoje na educaçao para o amanhã. *Epsilon* 42: 551-560. España.

De Lange, J. (1998). Real problems with real world mathematics. Conferencia Plenaria ICME-8. Sevilla. *Actas del 8° Congreso Internacional de Educación Matemática.* (pp. 83-110).

De Guzmán, M. (1974). *Matemáticas en un mundo moderno*. Madrid: Editorial Bluna.

Estrategias de Desarrollo Sector Educación. Período 1994-2000. Informe Final. Secretaría Regional Ministerial de Educación. Región del Maule Chile, 1994.

Font, V. (2001). Reflexiones didácticas desde y para el aula. *Revista EMA*. Vol. 6, N° 2: 180-200.

Giménez, J. (1997). *Evaluación en Matemáticas. Una Integración de Perspectivas*. Madrid: España. Editorial Síntesis S.A.

Gómez, J. (1998). *Tesi Doctoral: Contribució a l'estudi dels processos de modelització a l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a nivel universitari*. Departament de Didáctica de la Matemàtica i de les Ciéncies Experimetals. Universitat Autónoma. Barcelona.

Gómez, J. (2000). *L'altra cara de les Matemàtiques*. Barcelona. España: Ketres editora.

Gómez, J. (2002). *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona: Paidós.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. En: *Educación Matemática.* Vol. 10: 23-45. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Jarpa, E., R. Naveas (1995). Problemas y soluciones para introducción a la biomatemática. Universidad de Concepción Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.

Jorba, J. (1996). La atención a la Diversidad a través de la evaluación formativa y de la autorregulación de los aprendizajes. Departamento de Ciencias y Matemáticas de las Escuelas Municipales del Ayuntamiento de Barcelona. España.

Keitel, C. (1993). Implicit Mathematical Models in Social Practice and Explicit Mathematics Teaching by Aplications. En: *De Lange, J. and Keitel, C. Hunthey, I. Niss, M. ed, 1993. Innovations in Maths Education by Medelling an Aplications. Chichister, Ellis Horwood Limited.*

Niss, M. (1992). Applications and Modeling in school mathematics-directions for Future Development, In I. Wrszup i Steint (ed) Developement in school mathematics around the world V. 3 NCTM. Reston.

Niss, M. (1996). ¿Por qué enseñamos matemáticas en las escuelas? Dinamarca. *Revista Investigación y didáctica de las matemáticas*. MEC. pp. 19-30.

Niss, M. (2001) Issues and problems of research on the teaching and learning of applications and Modelling. In Matos, J.F; Blum,W; Houston, S.K; Carrera, S.P. (eds.): *Modelling and mathematics education* (pp. 73-88). Chichester.Horwoord Publishing.

Ponte, J.P.M. (1984). Funcional reasoning and the interpretation of Cartesian graphs (Doctoral dissertation. University of Georgia, 1984). Disertation Abstract Internacional, 45(6), 1675A. (University Microfilm N° 8421144).

PROYECTO COMENIUS-USACH G&P consultores. (2002). funciones matemática en la Enseñanza Media.

Sierpinska, A. (1996). Mathematics: "In context", "Pure" or "With Applications"? *For the Learning of Mathematics* 27: 35-57.

MINISTERIO DE EDUCACION (2004). Prueba SIMCE 2° Medio. Análisis de Resultados. www.biblioteca.mineduc.cl.

Swetz, F. (1996). NCTM *When and How Can We Use Modeling?* Pennsylvania State University at Harrisburg, *Middletown.USA.*

Williams, H. & Ahmed, A. (1997). Applications, modelling and communication in secondary school mathematics. Chichester Institute of Higher Education, Upper Bognor Road, Bognor Regis, PO21 1HR, UK.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Visualization and the nature of mathematics. In: *Visualization in Teaching and Learning Mathematics MAA. NOTES*. Number 19. USA.

## VII. ANEXOS

**PROBLEMAS PRETEST**

P4. *"Cuidemos el medio ambiente"*. En 1896 el científico sueco Svante Arrhenius fue el primero en predecir el efecto invernadero como resultado de las emisiones de dióxido de carbono en el aire por parte de los países industrializados. La quema de combustibles fósiles continúa produciendo 5,4 mil millones de toneladas de carbono al año, las cuales son absorbidas por la atmósfera y por los océanos. En 1990 el Grupo Internacional sobre el Cambio de Clima (GICC) pronosticó que, de continuar la tendencia actual, aumentará la temperatura promedio global de la Tierra.
La tabla muestra el aumento de la temperatura global pronosticada en grados Celsius.
A partir de la información:

| Año | Temperatura |
|---|---|
| 1980 | 0,0 |
| 2000 | 0,42 |
| 2020 | 0,84 |
| 2040 | 1,26 |
| 2060 | 1,68 |
| 2080 | 2,10 |

(1) Representa gráficamente los datos de la tabla.
(2) ¿Qué tipo de gráfica te resulta?
(3) A partir de la gráfica determina una expresión general de manera que concuerde con los datos.
(4) Explica el significado de la pendiente y del término constante.
(5) A partir de la expresión general que haz deducido, predice la temperatura estimada para los años: 2010, 2030 y 2110.
*(Problema modificado proyecto Fundación Chile Comenius - Usach, G&P).*

P5. *"Cuidado con el consumo de alcohol"*. La cantidad de alcohol en el cuerpo disminuye en forma lineal respecto del tiempo transcurrido sin ingerir alcohol. Un estudiante abandona una fiesta y decide conducir. Sin embargo, tiene 60 g de alcohol en el cuerpo y tres horas más tarde 33 g. Se recomienda que, para conducir, no se debe ingerir alcohol.
(1) Identifica la variable independiente y la variable dependiente. Justifica tu decisión.
(2) Determina la ecuación asociada a la función que se describe en el problema, de manera que concuerde con los datos.
(3) Construye una tabla de valores para diferentes horas.
(4) Construye un gráfico de la situación.
(5) Determina después de cuánto tiempo el estudiante puede conducir.
(6) Interpreta el significado de la pendiente y del término constante.
(7) Determina el dominio y el recorrido de la situación. Justifica tu respuesta
*(Problema modificado texto Introducción a la Biomatemática Universidad de Concepción, 1995)*

**PROBLEMAS POSTEST**

P1 *Situación N° 1.* Un criadero de pollos que provee a algunos supermercados de Talca es atacado por una epidemia. A partir del instante en que se detectó el mal, los veterinarios del criadero empezaron a atacarla. La mortalidad diaria se puede modelizar con la siguiente función:

N(t) = -t2 + 8t +9. (N(t): representa el número de muertes diarias en cientos).

i) Grafica la situación.
ii) Calcula el número de pollos que murieron el día en que se detectó el mal.
ii) Determina el día en que se produjo la mortalidad máxima y cual fue la cantidad.
iii) Si el modelo matemático rige a tiempo pasado. Indica el día que habría empezado la epidemia.
v) Determina los puntos más importantes de la gráfica y explica qué significan.
vi) ¿Cuál es el dominio y recorrido de la función?
vii) ¿Dónde es creciente y dónde es decreciente la gráfica de la función? Explica por qué.
*(Problema modificado texto introducción a la Biomatemática Universidad de Concepción, 1995).*

P2. *Situación 2.* En una localidad de la zona sur se realizó un estudio del promedio de las precipitaciones mensuales. Este estudio corresponde al período marzo-noviembre (indicados de 3 a 11, en la tabla), de tal manera de predecir el promedio de las próximas precipitaciones para organizar las actividades de los turistas.

*Tabla de valores*

| Mes | Precipitaciones (mm) |
|---|---|
| 3 | 26,4 |
| 4 | 31,8 |
| 5 | 42,1 |
| 6 | 42,9 |
| 7 | 45,2 |
| 8 | 43,8 |
| 9 | 38,9 |
| 10 | 36,5 |
| 11 | 23,8 |

i) Grafica los datos de la tabla.
ii) ¿Qué tipo de ajuste crees que es bueno?
iii) Determina un modelo matemático de predicción que se ajuste a los datos.
iv) De acuerdo al modelo, determina las precipitaciones para los meses que faltan.
v) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la situación?
vi) ¿Qué significa el máximo valor? ¿Cuál es?
(Problema modificado proyecto Fundación Chile Comenius - Usach, G&P).