Figueroa, Stella; Anchorena, Sergio; Distéfano, María Laura

Valoración de la Idoneidad Epistémica y Cognitiva de un Proceso de Instrucción en la Resolución de Problemas Bayesianos

Boletim de Educação Matemática, vol. 28, núm. 48, abril, 2014, pp. 169-190
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Rio Claro, Brasil

Boletim de Educação Matemática,
ISSN (Versión impresa): 0103-636X
bolema@rc.unesp.br
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Brasil

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

Valoración de la Idoneidad Epistémica y Cognitiva de un Proceso de Instrucción en la Resolución de Problemas Bayesianos

Assessment of the Epistemic and Cognitive Suitability of a Process for Teaching Problem Solving Related to the Bayes Theorem

Stella Figueroa*
Sergio Anchorena**
María Laura Distéfano***

Resumen

Este trabajo tiene por objetivo presentar la valoración de un proceso de instrucción sobre el Teorema de Bayes, propuesto a 50 estudiantes que cursan la asignatura Estadística en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Bajo el marco teórico y metodológico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, esta valoración se realiza en las dimensiones epistémica y cognitiva. Se implementó una estrategia didáctica y una metodología de resolución, diseñada sobre la base de los errores frecuentes al razonar sobre probabilidad condicional. Las producciones se analizaron antes y después de la instrucción. El propósito era contribuir a la construcción del significado de la fórmula contenida en este Teorema, al favorecer la habilidad de efectuar transformaciones entre representaciones en distintos registros. Los estudiantes que desarrollaron esta habilidad, mostraron menores dificultades en sus resoluciones. El análisis de la idoneidad didáctica arroja una valoración alta en las dimensiones analizadas.

Palabras-clave: Problemas Bayesianos. Enfoque Ontosemiótico. Función Semiótica. Idoneidad Epistémica. Idoneidad Cognitiva.

Abstract

This paper aims to present the assessment of an instructional process about the Bayes Theorem carried out with 50 Engineering students in a Statistics class of the Universidad Nacional de Mar del Plata. Under the theoretical and methodological framework of the Ontosemiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction, this assessment is done in epistemic and cognitive dimensions. A teaching strategy and problem-solving methodology was implemented, designed on the basis of frequent errors in reasoning about conditional probability. The students´ work was analyzed before and after instruction. The purpose was to contribute to the construction of meaning of the formula in this theorem, to promote the ability to perform transformations

* Magíster en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior por la Universidad Nacional de Tucumán (UNT). Profesor Adjunto de Estadística Básica en la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata (UNMDP), Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina. Dirección Postal: Juan B. Justo 2550. (7600) Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina. *E-mail*: stellafigueroa@gmail.com.
** Doctor en Filosofía y Ciencias de la Educación por la Universidad del País Vasco (UPV). Profesor Titular de Seminario de Informática Aplicada a la Investigación, en la Universidad Nacional de Mar del Plata (UNMDP), Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina. Dirección Postal: Funes 3350, Acceso 1, Cuerpo 2, Nivel 4 (7600), Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina. *E-mail*: pollo_mdp@yahoo.com.
*** Magíster en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior por la Universidad Nacional de Tucumán (UNT). Jefe de Trabajos Prácticos de Computación en la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata (UNMDP), Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina. Dirección Postal: Juan B. Justo 2550. (7600) Mar del Plata, Buenos Aires, Argentina. *E-mail*: ldistefano@fi.mdp.edu.ar.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

between representations in different registers. Students who developed this ability showed fewer difficulties with the problem-sovling. The didactic suitability analysis yields a high rating in the dimensions analyzed.

Keywords: Bayesian Problems. Ontosemiotic Approach. Semiotic Function. Epistemic Suitability. Cognitive Suitability.

1 Introducción

Las dificultades que se generan en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la probabilidad condicional han sido abordadas por diversos autores. Las causas que pueden influir en la comprensión de los problemas de probabilidad condicional incluyen la presentación de los enunciados y el contexto de los problemas, basados o no en el conocimiento de los alumnos sobre situaciones reales, entre otras (POLLATESK et al., 1987).

No es un tema sencillo, ya que los alumnos asocian los problemas de probabilidad condicional, con la problemática de la causalidad y temporalidad, teniendo dificultad en la percepción de los experimentos compuestos en el caso de situaciones sincrónicas. Por otro lado, confunden sucesos independientes con mutuamente excluyentes, cambian los términos de la probabilidad condicional, confunden ésta con la probabilidad conjunta y le asignan a esta última un valor más alto que el correspondiente a una de las probabilidades simples involucradas, error conocido como la falacia de la conjunción. (DÍAZ; DE LA FUENTE, 2004).

En un estudio exploratorio sobre las dificultades en la resolución de problemas que involucran al Teorema de Bayes, se compararon el desempeño de estudiantes de Psicología en esta tarea, antes y después de la instrucción al respecto, detectando y clasificando los errores que cometen. Ordenados de mayor a menor frecuencia, revelaron: 1) No identificación o identificación incorrecta de los datos. 2) Confusión entre probabilidad simple y condicional. 3) Error en la partición del espacio muestral. 4) Construcción incorrecta de diagramas de árbol. 5) Error en la aplicación de la Fórmula de Bayes. 6) Fallas en el razonamiento proporcional y en las operaciones con fracciones. 7) Confusión entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta. 8) Falacia de la tasa base (tendencia a ignorar la información que describe a la mayor parte de las personas). 9) Confusión de un evento con su complemento. 10) Confusión de una probabilidad condicional con su inversa; esto es, confundir $P(A|B)$ con $P(B|A)$. 11) Error en el cálculo de la probabilidad total (DÍAZ; DE LA FUENTE, 2006).

Luego de estudiar los problemas que involucran al Teorema de Bayes, estos autores concluyen que son de alta complejidad para los estudiantes y que “la estadística debiera

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

enseñarse en conjunción con material sobre estrategias intuitivas y errores inferenciales de razonamiento" (DÍAZ; DE LA FUENTE, 2007, p. 281).

Al considerar estos errores en la investigación que se presenta en este trabajo, se pretende lograr en los alumnos una mejor comprensión del objeto matemático en cuestión: *la probabilidad condicional*. Sabiendo que las representaciones condicionan las prácticas matemáticas que conforman el significado de los objetos involucrados, es fundamental que el alumno pueda interpretarlas y articularlas (FONT; GODINO; D'AMORE, 2007). De ahí que uno de los objetivos que se persiguen, al investigar cómo enseñar probabilidad condicional, sea explorar los significados que los alumnos tienen construidos en relación al uso de sus representaciones.

Como marco teórico y metodológico se ha utilizado el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) (GODINO; BATANERO; FONT, 2009). Este trabajo utiliza las herramientas que proporciona este enfoque para valorar un proceso de instrucción diseñado para que los alumnos aprendan a resolver problemas bayesianos. La valoración de este proceso de instrucción se efectúa a través de algunos de los criterios de idoneidad didáctica, entendida como el criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo (GODINO; BATANERO; FONT, 2009).

Para la introducción al tema, se propone que la estrategia didáctica incluya la participación y el acuerdo entre los alumnos y el profesor como elemento clave para la representación simbólica y gráfica de los sucesos intervinientes y de sus probabilidades asociadas. La aplicación del Teorema de Bayes surge como una necesidad para abordar una situación problema planteada por el profesor. Luego se efectúa la presentación formal del teorema, desarrollando su demostración con la participación de los alumnos.

Posteriormente, se analizan las producciones escritas de los estudiantes. Se detectan las dificultades y errores en la resolución de estos problemas, antes y después de desarrollar en clase una metodología de resolución. Esta metodología está diseñada sobre la base de los errores cometidos al razonar sobre la probabilidad condicional al abordar problemas bayesianos, detallados al comienzo de este apartado.

Tanto en la estrategia didáctica como en la metodología de resolución de estos problemas, se propone una secuencia de procedimientos que pretende contribuir a la construcción del significado de la fórmula involucrada en el Teorema de Bayes. Es decir, se procura favorecer la construcción del significado de la probabilidad condicional, cuando la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

probabilidad del suceso que ocurrió, también llamado suceso condicionante o suceso principal, es una probabilidad total.

Como hipótesis de trabajo se considera que la habilidad de efectuar transformaciones entre representaciones realizadas en distintos registros, contribuye a la construcción de significados y relaciones entre los datos del problema, la identificación de los sucesos involucrados y sus probabilidades respectivas.

2 Marco teórico

El EOS considera a la Matemática en su triple aspecto: como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado. En este enfoque, una práctica matemática se define como cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos (GODINO; BATANERO; FONT, 2009).

A partir del concepto de *práctica matemática*, surge la noción de significado, definido como "el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas" (GODINO et al., 2007, p. 7). Para el EOS, la cuestión del significado de los objetos matemáticos es, en esencia, ontológica y epistemológica, puesto que se centra tanto en la naturaleza como en el origen de los mismos (GODINO; BATANERO; FONT, 2009). En los casos en que el significado se atribuye a un individuo, se considera un significado *personal*, mientras que, si el significado es compartido por un grupo de individuos en el seno de una institución, se lo considera un significado *institucional*.

En este contexto, el aprendizaje es entendido como la apropiación de los significados institucionales por parte del alumno, a través de su participación en las comunidades de prácticas (GODINO et al., 2007; GODINO; BATANERO; FONT, 2009). Dado que puede no existir concordancia entre los significados otorgados por los distintos actores que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, se generan diferencias que dan lugar a lo que, bajo este enfoque, se denomina *conflicto semiótico*. Un conflicto semiótico es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones).

Debido al rol preponderante que juegan los objetos, el EOS considera que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Así, la tipología de objetos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

primarios, u objetos de primer orden, está constituida por: *Situaciones-problemas*: aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, *Elementos lingüísticos*: términos, expresiones, notaciones, gráficos, en diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.); *Conceptos - definiciones*: introducidos mediante definiciones o descripciones (recta, punto, número, media, función); *Proposiciones:* enunciados sobre conceptos; *Procedimientos*: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo; *Argumentos*: enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos (GODINO et al., 2007).

Las seis entidades primarias postuladas no son objetos aislados sino que se vinculan entre sí: las situaciones-problemas son el origen y motivación de la actividad, el lenguaje actúa como soporte para representar a las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción, los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones que, conjuntamente con las definiciones, resuelven las situaciones-problemas. Estas relaciones entre los objetos primarios determinan las *configuraciones* (Figura 1), definidas como “las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos” (GODINO; BATANERO; FONT, 2009, p. 8). En los casos en que estas redes se refieren a acciones representativas de la institución y acordes a ella, se denominan configuraciones epistémicas. Paralelamente, las configuraciones cognitivas, son aquellas que describen los sistemas de práctica personales (GODINO; BATANERO; FONT, 2009).

Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones (epistémicas y cognitivas) se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, institucional y personal (GODINO; BATANERO, 1994).

Figura 1 – Componentes de una configuración epistémica/cognitiva
Fuente: Godino, Batanero y Font (2009)

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

Todas las representaciones ostensivas tienen, por una parte, un valor representacional y, por otra parte, un valor instrumental, donde "el aspecto representacional nos lleva a entender la representación de una manera elemental *algo* por *algo*. En cambio, el valor instrumental nos lleva a entender la representación de una manera sistémica, como el *iceberg* de un sistema complejo de prácticas que dicha representación posibilita". (FONT; GODINO; D'AMORE, 2007, p. 13).

Todos los elementos que conforman las configuraciones pueden ejercer el rol de expresión o contenido de *funciones semióticas*.

Es relevante el proceso mediante el cual un sujeto crea un significado, vinculando una expresión con un contenido a través de una función semiótica. Esta función es establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o regla de correspondencia. De esta manera, la función semiótica destaca el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática y sirve para explicar algunas dificultades y errores de los alumnos, dado que los conflictos que les causan equivocaciones no resultan de su falta de conocimientos, sino que son producto de no haber relacionado adecuadamente los dos términos de una función semiótica (GODINO; BATANERO; FONT, 2009).

En cuanto a la valoración de cualquier proceso de instrucción, el EOS propone la noción de *idoneidad didáctica*. La idoneidad didáctica se define como la pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción. Para hacer operativa esta definición, se introducen las siguientes dimensiones de la idoneidad que caracterizan y condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje: epistémica (relativa a los significados institucionales), cognitiva (significados personales), mediacional (recursos tecnológicos y temporales), emocional (actitudes, afectos, emociones), interaccional (interacciones docente – discentes), y ecológica (relaciones intra e interdisciplinares y sociales). Estos criterios son entendidos como reglas de corrección que surgen de la comunidad científica, cuando se pretende conseguir un consenso sobre lo que se considera como bueno o mejor (GODINO et al., 2007).

La aplicación de los criterios de idoneidad en la evaluación de un proceso de instrucción permite guiar el proceso de la valoración y la posible mejora de un proceso de instrucción y aprendizaje. Estas dimensiones pueden considerarse en dos momentos: *a priori* ¿Cómo se deben hacer las cosas? y *a posteriori* ¿Cómo se hicieron efectivamente? Para responder a estas preguntas, se cuenta con los componentes y descriptores de cada idoneidad, detallados a continuación (GODINO, 2011).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

La valoración del proceso de instrucción será el resultado de la conjunción de la valoración de cada una de las seis dimensiones en términos de sus correspondientes descriptores.

2.1 Idoneidad epistémica

Es el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia. El Cuadro 1 describe los componentes y descriptores de la idoneidad epistémica.

Componentes	Descriptores
Situaciones-problemas	- Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. - Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).
Lenguajes	- Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica.), traducciones y conversiones entre los mismos. - Nivel del lenguaje adecuado a quienes se dirige. - Propuesta de situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)	- Las definiciones y procedimientos son claros y correctos y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. - Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. - Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
Argumentos	- Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo que se dirigen. - Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones (conexiones, significados)	- Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y se conectan entre sí.

Cuadro 1 – Componentes y descriptores de la idoneidad epistémica
Fuente: Godino (2011)

2.2 Idoneidad cognitiva

Es el grado en que los significados implementados (o pretendidos) están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados. El Cuadro 2 describe los componentes y descriptores de la idoneidad cognitiva.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

Componentes	Descriptores
Conocimientos previos	**-** Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). - Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	- Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo - Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes
Aprendizaje Son los mismos elementos que para la idoneidad epistémica	-Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidas o implementadas. - Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia): - Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva. - La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia. - Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

Cuadro 2 – Componentes y descriptores de la idoneidad cognitiva
Fuente: Godino (2011)

3 Metodología

Se llevó a cabo una investigación de naturaleza descriptiva y explicativa, en el sentido que pretendió recoger, clasificar y analizar información relativa a los errores cometidos por los alumnos en la resolución de problemas bayesianos y explicar la causa de los mismos, a fin de diseñar un proceso de instrucción para la disminución de la presencia de los más relevantes. El proceso de instrucción diseñado e implementado consta de tres etapas: la introducción de una situación problemática que conduce a los alumnos a la necesidad de recurrir al Teorema de Bayes para su resolución, la demostración del Teorema, la construcción de una metodología de resolución de los problemas donde se aplica este Teorema (que son los descriptos en este trabajo) y la resolución, por parte de los alumnos, de una guía de trabajos prácticos donde tienen la oportunidad de aplicar dicha metodología de resolución.

Para la valoración de este proceso de instrucción, se consideraron dos dimensiones: la epistémica y la cognitiva.

3.1 Participantes

Los datos se extrajeron de las producciones escritas realizadas por 50 estudiantes de la asignatura Estadística, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

3.2 Variables e instrumentos intervinientes

Variables: *Funciones Semióticas* F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8 (Definidas en el apartado 3.3.2). *Idoneidad Epistémica y Cognitiva*. (Definidas en el Marco Teórico).

Instrumentos para evaluar las funciones semióticas: Problema 1[1] y Problema 2, cuyos enunciados se presentan a continuación:

Problema 1: Un taxi se vio implicado en un accidente nocturno con choque y huida posterior. Hay dos compañías de taxis en la ciudad, la Verde y la Azul. El 85% de los taxis de la ciudad son Verdes y el 15% Azules. Hubo un testigo del accidente. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo bajo las mismas circunstancias que había la noche del accidente y llegó a la conclusión de que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. Sabiendo que el testigo identificó el taxi como azul. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?

Problema 2: Una persona se somete a una prueba para detectar cierta enfermedad. Si la persona está enferma, el test será positivo con 96% de certeza. Si la persona está sana, el test será negativo con 94 % de certeza. Se sabe también que 1 de cada 100 personas de esta edad está enferma. El test resulta positivo. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona esté enferma?

Las idoneidades epistémica y cognitiva son evaluadas por sus componentes y a través de la presencia de los descriptores correspondientes, explicitados en los Cuadros 1 y 2 respectivamente.

3.3 Procedimientos

3.3.1 Metodología de resolución

La metodología de resolución de los problemas bayesianos consiste en la ejecución de los siguientes pasos:

1) La detección del suceso principal, a través de las expresiones coloquiales del problema.

2) La identificación del resto de los sucesos intervinientes, cuyas probabilidades suman 1.

3) La identificación de las probabilidades condicionales presentadas en los datos del problema.

4) La identificación de la probabilidad pedida.

5) La expresión del suceso principal como unión de sucesos mutuamente excluyentes.

[1] Tversky y Kahneman (1982) citado en Díaz y De La Fuente (2007).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

6) La representación gráfica del suceso A en el espacio muestral con la partición correspondiente.
7) El cálculo de la probabilidad del suceso A (probabilidad total).
8) La aplicación de la fórmula del teorema de Bayes reemplazando la probabilidad pedida por lo calculado en la probabilidad total.

3.3.2 Procedimientos y Funciones Semióticas involucradas en la metodología de resolución

En una primera fase del estudio, se realizó una configuración epistémica de los Problemas 1 y 2, para poner de manifiesto el modo en que se articulan los objetos primarios involucrados en la actividad matemática propuesta. La misma fue realizada en base a la solución experta de cada problema.

En una segunda fase se realizaron las configuraciones cognitivas de las resoluciones de los alumnos. Los elementos de las mismas se contrastaron con los de la configuración epistémica y los resultados de esas comparaciones se volcaron en un protocolo. A partir de esta contrastación se identificaron los conflictos cognitivos presentes en los errores que los estudiantes cometen en sus resoluciones en cada uno de estos pasos. El Cuadro 3 relaciona estos errores: 1) P(Bi|A) con P(A|Bi), 2) P(A|Bi) con P(Bi), 3) P(A|Bi) con $P(A \cap B_i)$, 4) Partición de S , 5) Teorema de la Probabilidad Total (TPT) y 6) Teorema de Bayes (TB) con cada uno de los pasos empleados con esta metodología de resolución. Éstos corresponden a cada una de las funciones semióticas F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7 y F_8, como puede observase en la definición de cada una de ellas el Cuadro 3.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

Tipos de Errores / **Funciones semióticas**	$P(B_i\|A)$ con $P(A\|B_i)$	$P(A\|B_i)$ con $P(B_i)$	$P(A\|B_i)$ con $P(A \cap B_i)$	Partición de S	T. P. T	T. B
F_1 Asigna la correspondencia entre los datos del problema con la identificación del suceso condicionante A	**X**					
F_2 Establece la identificación de los sucesos que forman una partición del espacio muestral S, los sucesos Bi		**X**		**X**		
F_3 Establece la identificación entre los datos del problema y la probabilidad condicional pedida	**X**		**X**			
F_4 Asigna la correspondencia entre las probabilidades condicionales dadas en el problema con las probabilidades condicionales en forma simbólica	**X**		**X**			
F_5 Asigna un gráfico con los sucesos que forman una partición del espacio muestral y el suceso A				**X**	**X**	**X**
F_6 Asigna al suceso A la unión de sucesos mutuamente excluyentes					**X**	**X**
F_7 Establece el valor numérico resultante del cálculo de la Probabilidad Total. (T.P.T)					**X**	
F_8 Establece el valor numérico resultante del cálculo de la fórmula del Teorema de Bayes. (T.B)					**X**	**X**

Cuadro 3 – Funciones semióticas asociadas a los errores más frecuentes en la resolución de problemas bayesianos
Fuente: desarrollado por los autores

El establecimiento correcto de cada una de las funciones semióticas por parte de los alumnos, es un indicador de no cometer el error asociado a dicha función semiótica.

En términos de las actuaciones de los alumnos, se utilizó el siguiente criterio: 1-la función semiótica es establecida correctamente, 0.5-la función semiótica establecida es parcialmente correcta, 0-la función semiótica es establecida incorrectamente o no establecida.

Esta forma de registro de los datos se aplicó en dos momentos. El primero, antes de la implementación de la metodología de resolución de estos problemas, con una evaluación diagnóstica, donde se propuso a los alumnos resolver el Problema 1. Luego se hizo la puesta en común con la profesora, con el objetivo de resolver los conflictos de significados en cada uno de los pasos de esta secuencia de procedimientos para la resolución del problema propuesto.

El segundo registro de los datos se efectuó en base a las resoluciones de los alumnos en la primera evaluación parcial de la asignatura, donde se propuso el Problema 2. La asignación de puntaje permitió determinar cuáles son las dificultades más notorias y la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

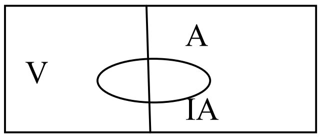
comprensión alcanzada en torno a los objetos matemáticos involucrados que presentaron los alumnos, antes de la implementación de esta metodología de resolución y en la instancia evaluativa posterior.

3.3.3 Configuración epistémica

En el Cuadro 4 se muestran los enunciados de los problemas involucrados y la configuración epistémica del Problema 1. La configuración epistémica del Problema 2 es similar, por lo que no se la incluyó explícitamente en este trabajo.

OBJETOS PRIMARIOS	**Objetos matemáticos y significados en la situación**
Situación-Problema 1	*Enunciado presentado en la Sección 3.2*
Lenguaje	- Coloquial o verbal: enunciado del problema. - Gráfico: Representación de los sucesos que forman una partición del espacio muestral. Representación del espacio muestral. Representación del suceso que ocurrió. - Simbólico: Expresión de cada suceso. Expresión de la probabilidad de un suceso y de la probabilidad condicional de sucesos. - Numérico: probabilidades o porcentajes de ocurrencia de sucesos.
Conceptos (definiciones)	- Experimento aleatorio: *Ejemplo: Tomar un taxi de un determinado color. Identificar correctamente el color del taxi.* - Sucesos que forman una partición del espacio muestral: *Ejemplo: Tomó un taxi Verde o tomó un taxi Azul.* - Espacio muestral: Los dos resultados posibles del experimento aleatorio. - Intersección de sucesos: parte común de un conjunto de sucesos. - Unión de sucesos: Conjunto que tiene los sucesos de uno u otro conjunto. - Sucesos mutuamente excluyentes: Son los sucesos que no se pueden dar simultáneamente. Su intersección es vacía. - Probabilidad clásica: proporción entre el número de casos favorables y el número de casos posibles. - Axiomas de probabilidad. - Probabilidad condicional: proporción de cada suceso respecto al total de veces que ha ocurrido otro suceso. - Regla del Producto: Probabilidad conjunta. Dependencia. - Probabilidad Total. *Ejemplo: Probabilidad de identificar el taxi de color azul*.
Propiedades	- Relación entre probabilidad condicional y probabilidad simple: restricción del espacio muestral. - Teorema de la probabilidad Total. - Axioma de la Unión: probabilidad de la unión de dos o más sucesos mutuamente excluyentes, es la suma de cada una de las probabilidades de dichos sucesos.

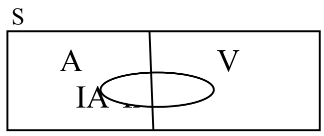
ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

Procedimientos	- Identificación del suceso que ocurrió en el problema y su representación simbólica. - Interpretación en forma coloquial y simbólica de cada suceso simple y sus probabilidades respectivas, cuya suma es 1. - Interpretación de la probabilidad condicional pedida en forma coloquial y simbólica: *La probabilidad de que el taxi sea Azul sabiendo que el taxi fue Identificado Azul* $P(A \mid IA)$ - Interpretación de las probabilidades condicionales dadas en forma coloquial y simbólica: - *La probabilidad de que el taxi sea Identificado Azul si el taxi es Azul* $P(IA \mid A)$ - *La probabilidad de que el taxi sea Identificado Azul si el taxi es verde* $P(IA \mid V)$ - Representación gráfica del espacio muestral S, de los sucesos que forman una partición del mismo y del suceso que ocurrió en el problema. S  - Expresión simbólica del suceso que ocurrió como unión de sucesos mutuamente excluyentes. $IA = (A \cap IA) \cup (V \cap IA)$ - Aplicación de probabilidad a ambos miembros y axiomas de la teoría de probabilidades. $P(IA) = P[(A \cap IA) \cup (V \cap IA)]$ $P(IA) = P(A \cap IA) + P(V \cap IA)$ - Cálculo de la probabilidad de la intersección de los sucesos. $P(IA) = P(A).P(IA1A) + P(V).P(IA \mid V)$ - Cálculo de la probabilidad total del suceso que ocurrió. *P(IA)* = 0,15 . 0,8 + 0,85. 0,20 = 0,120 +0,170 = 0,29 - Cálculo de la probabilidad condicional pedida. $P(A \mid IA) = \dfrac{P(A \cap AI)}{P(IA)} = \dfrac{P(A).P(IA \mid A)}{P(A).P(IA \mid A) + P(V).P(IA \mid V)} = \dfrac{0{,}120}{0{,}29} = 0{,}4137$
Argumentos	Razonamiento deductivo para la resolución del problema. Se aplicaron los axiomas de probabilidad referidos a la probabilidad del espacio muestral S, a la probabilidad de la unión de sucesos mutuamente excluyentes y a la regla del producto. Se aplicó la fórmula de la Probabilidad Total y el Teorema de Bayes.

Cuadro 4 – Configuración Epistémica del Problema 1
Fuente: desarrollado por los autores

En esta configuración epistémica pueden observarse múltiples expresiones a las que es necesario dotar de significado mediante el establecimiento de funciones semióticas. La estrategia didáctica implementada tuvo como objetivo señalar la secuencia de procedimientos destinados a favorecer el establecimiento de tales funciones semióticas, descriptas en el Cuadro 5.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

ANTECEDENTE		CONSECUENTE
"Sabiendo que el testigo identificó el taxi como azul."	$F_1 \longrightarrow$	Suceso que ocurrió. (IA)
"Hay dos compañías de taxis en la ciudad, la Verde y la Azul. El 85% de los taxis de la ciudad son Verdes y el 15% Azules."	$F_2 \longrightarrow$	Sucesos que forman una partición del espacio muestral cuyas probabilidades suman 1. El taxi pertenece a la compañía **A**zul (A) $P(A) = 0{,}15$ El taxi pertenece a la compañía **V**erde (V) $P(V) = 0{,}85$
"Sabiendo que el testigo identificó el taxi como azul. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?	$F_3 \longrightarrow$	Probabilidad condicional pedida La probabilidad de que el taxi sea Azul si el taxi fue Identificado Azul $P(A \mid IA) = \dfrac{P(A \cap AI)}{P(IA)}$
"...llegó a la conclusión de que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. "	$F_4 \longrightarrow$	Probabilidades condicionales dadas en forma coloquial. Probabilidades condicionales dadas en forma simbólica La probabilidad de que el taxi sea Identificado Azul si el taxi es Azul $P(IA \mid A)$ La probabilidad de que el taxi sea Identificado Azul si el taxi es verde $P(IA \mid V)$
Gráfico de los sucesos que forman una partición del espacio muestral y del suceso que ocurrió.	$F_5 \longrightarrow$	
Suceso que ocurrió expresado como unión de sucesos mutuamente excluyentes	$F_6 \longrightarrow$	$IA = (IA \cap A) \cup (IA \cap V)$
Probabilidad Total	$F_7 \longrightarrow$	Valor numérico resultante del cálculo $P(IA) = P(A).P(IA \mid A) + P(V).P(IA \mid V)$
Teorema de Bayes	$F_8 \longrightarrow$	Valor numérico resultante del cálculo $P(A \mid IA) = \dfrac{P(A \cap AI)}{P(IA)} = \dfrac{P(A).P(IA \mid A)}{P(A).P(IA \mid A) + P(V).P(IA \mid V)}$

Cuadro 5 – Funciones Semióticas que Favorecen la Resolución del Problema 1
Fuente: desarrollado por los autores

Las funciones F_1, F_2, F_3 y F_4 aluden a significados situacionales-lingüísticos en el sentido que su contenido está vinculado a la identificación de los datos de un problema con los sucesos involucrados. Se establece, para cada caso, una correspondencia semiótica de tipo lingüístico, con el suceso que ocurrió, los otros sucesos que intervienen y sus probabilidades asociadas, simples y condicionales, respectivamente. Para la visualización del espacio muestral con cada suceso involucrado se establece la función semiótica F_5 que se refiere al significado dado por la representación gráfica del espacio muestral con dichos sucesos.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

Con la función semiótica F_6 se efectúa la correspondencia lingüística entre el suceso que ocurrió y la unión de sucesos mutuamente excluyentes, dando el punto de partida a la argumentación de la fórmula de la probabilidad total y luego la del Teorema de Bayes, una vez que se establecen las funciones semióticas F_7 y F_8.

3.3.4 Estrategia didáctica implementada

Al diseñar esta propuesta didáctica se considera en primer lugar, los conocimientos previos de los alumnos, sus experiencias y el contexto en el que están inmersos. Dado que la asignatura Estadística es común a muchas carreras de ingeniería, el profesor hace preguntas a sus alumnos para involucrarlos y despertar su interés, en este caso se pregunta a qué carrera pertenecen. De esa manera, se identifican los conjuntos que forman una partición del espacio muestral. A continuación, se cuentan los alumnos de cada carrera, para obtener la frecuencia relativa de cada grupo como la probabilidad empírica que tiene un estudiante elegido al azar, de ser de determinada carrera. Se verifica que esas probabilidades sumen uno.

Luego se solicita a los alumnos una estimación acerca de la probabilidad que tiene de aprobar estadística un alumno elegido al azar de una carrera cualquiera. Aparece el humor. Muchos alumnos se sobreestiman o subestiman en su rendimiento. Esta información podría obtenerse de los alumnos que cursaron en años anteriores, pero es mucho más interesante desde el punto de vista del docente conocer lo que piensan sus alumnos en relación a su rendimiento a priori. En el pizarrón se expresan simbólicamente las probabilidades condicionales con las estimaciones dadas por los estudiantes. Se hace hincapié en la notación acordada por todos.

Posteriormente, la profesora pregunta: *En el supuesto caso que se elija un alumno al azar del cual no se conoce a qué carrera pertenece, ¿cuál es la probabilidad de que dicho alumno apruebe Estadística? ¿Cómo se puede calcular dicha probabilidad si no se conoce la carrera a la que corresponde el alumno?*

Para visualizar la situación, se grafica en el pizarrón el suceso A: *Aprueba Estadística* dentro del espacio muestral y sobre los conjuntos determinados por las cuatro carreras que intervienen en este caso: B_1, B_2, B_3 y B_4, como puede observarse en la Figura 2.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

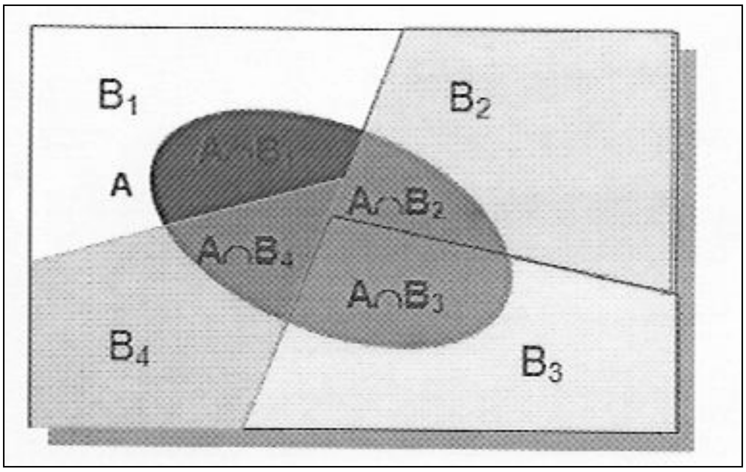


Figura 2 – Representación gráfica del suceso A
Fuente: desarrollado por los autores

Al no saber la orientación profesional del estudiante elegido al azar, se asume que puede ser de cualquier carrera. Por lo tanto, se expresa el suceso A: *Aprueba Estadística*, como unión de sucesos mutuamente excluyentes, con las intersecciones determinadas por dicho suceso con cada carrera. Luego se expresa simbólicamente esta unión de sucesos: $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)(A \cap B_4)$ a continuación, la profesora pregunta a los alumnos: *¿Cuál es la probabilidad del suceso A?* averigüémoslo aplicando probabilidad miembro a miembro: $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) + P(A \cap B_4)$. Los alumnos responden aplicando propiedades previamente estudiadas y de esta manera surge el objeto fórmula de la probabilidad total, que forma parte del significado de la fórmula del Teorema de Bayes. $P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A \mid B_i)$.

A continuación se plantea otra situación: la profesora informa a la clase que un alumno elegido al azar, aprobó estadística. Se destaca que esa información corresponde a que ocurrió el suceso A. Les pide luego calcular la probabilidad de que el alumno haya sido de ingeniería química (B_2), por ejemplo.

En esta instancia, los alumnos deberían reconocer que la probabilidad pedida es una probabilidad condicional, e identificar el suceso que ocurrió, para expresar simbólicamente la probabilidad solicitada: $P(B_2|A)$. Luego aplicar la definición de probabilidad condicional para averiguar qué tienen que calcular: $P(B_2 \mid A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)}$. La profesora formula preguntas orientadoras para que los alumnos adviertan que la probabilidad del suceso que ocurrió ya fue calculada con la probabilidad total.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

Llevando la probabilidad pedida a: $P(B_2 \mid A) = \dfrac{P(B_2)P(A \mid B_2)}{\sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A \mid B_i)}$. Finalmente, se resume y generaliza lo desarrollado durante la clase para su institucionalización:

1) Se parte de sucesos B_i que forman una partición del espacio muestral S, para un subíndice i desde 1 hasta n. 2) Se expresa al suceso A (suceso principal) como intersección con alguno de los B_i. 3) Se expresa la probabilidad del suceso principal. 4) Se señala que la probabilidad condicional pedida, consiste en volver a estimar la probabilidad de algún B_i (probabilidad conocida) pero ahora con una información adicional: ocurrió el suceso A. 5) En la fórmula de la probabilidad condicional, se reemplaza el denominador, por la fórmula de la probabilidad total, y el numerador, por el término de la sumatoria de la probabilidad total con el Bi elegido. 6) Se presenta la fórmula obtenida como la tesis del Teorema de Bayes.

En otra clase, se les pide a los alumnos que resuelvan el Problema 1.

Una vez que los alumnos entregan las resoluciones, a modo de diagnóstico, la profesora negocia con los estudiantes la metodología de resolución de este tipo de problemas, especificada en el apartado 3.3.1.

4 Resultados obtenidos

La valoración de la Idoneidad Epistémica del proceso de instrucción implementado, se presenta en el Cuadro 6, de acuerdo a la descripción de los componentes con sus descriptores correspondientes.

Componentes y sus descriptores	Valoración del proceso de instrucción
Situaciones- problemas 1. Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. 2. Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)	1. Tanto en la estrategia didáctica implementada, en la metodología de resolución como en la guía de trabajos prácticos propuesta, se desarrollan prácticas de contextualización y aplicación, ya que los problemas bayesianos son extramatemáticos de por sí. La guía de trabajos prácticos propone situaciones de ejercitación articulada donde se presentan problemas de probabilidades que van integrando contenidos desde la definición axiomática de probabilidad hasta llegar a la probabilidad condicional, a la probabilidad total y a los problemas bayesianos. Estos problemas forman parte de las situaciones que se presentan en el significado de referencia y se encuentran en los libros de probabilidades sugeridos para el nivel universitario. 2. En el proceso de instrucción implementado, se destacan dos objetos primarios: la situación problema y la secuencia de procedimientos para su resolución. Dentro de los procedimientos utilizados se genera un conjunto de prácticas matemáticas como la identificación y representación simbólica de cada uno de los sucesos involucrados en el problema con sus probabilidades simples y condicionales asociadas. También la aplicación y la argumentación de las fórmulas de la probabilidad total y de Bayes.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

Lenguaje 1. Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...). Traducciones y conversiones entre los mismos. 2. Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. 3. Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.	1. El uso de representaciones en distintos registros semióticos es parte de la estrategia implementada y de la metodología de resolución. Las traducciones y conversiones entre las representaciones se logran con el establecimiento correcto de las ocho funciones semióticas dadas. 2. El nivel de lenguaje está dirigido a alumnos universitarios, puesto que es un contenido que figura en la currícula de este nivel. 3. Tanto la estrategia implementada como la metodología de resolución, proponen situaciones de expresión matemática e interpretación en cada problema planteado.
Reglas 1. Las definiciones y procedimientos son claros y correctos y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. 2. Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. 3. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar reglas: definiciones, proposiciones o procedimientos.	1. Tanto en la estrategia didáctica implementada como en la metodología de resolución, el proceso de instrucción del Teorema de Bayes, comienza con el planteo de un problema extraído del contexto de los alumnos, se parte de su experiencia y de sus conocimientos previos, con procedimientos clara y correctamente enunciados a través de la metodología empleada, por lo que resultan cercanos al nivel del alumno. Esto indica una adaptación a su nivel educativo. 2. Los enunciados y los procedimientos fundamentales del tema son coherentes con el significado de referencia y el nivel universitario al que se dirige. 3. Se proponen situaciones para generar reglas en la notación utilizada para la representación de los sucesos involucrados en los problemas y sus probabilidades simples y condicionales respectivas. Se negocia una notación adecuada que intenta resolver las dificultades y los errores cometidos en la notación de la probabilidad condicional y su confusión con la probabilidad conjunta. Se identifica con claridad la probabilidad condicional pedida. También en la deducción de la fórmula de dicho Teorema y en la búsqueda de una metodología de resolución, se producen situaciones para la generación y negociación de reglas dadas por los ocho pasos especificados.
Argumentos 1. Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen. 2. Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.	1. Se relaciona la teoría de conjuntos con la teoría axiomática de probabilidades. Esta relación permite representar un suceso en forma gráfica y expresarlo simbólicamente, en términos de operaciones entre conjuntos. La aplicación de las propiedades de la probabilidad de la unión de sucesos mutuamente excluyentes y de la intersección comprueba la fórmula de la probabilidad total. 2. La definición de la probabilidad condicional aplicada al suceso que ocurrió, y la justificación para la fórmula de la probabilidad total, permite a los alumnos argumentar la fórmula del Teorema de Bayes. Todas estas argumentaciones son adecuadas al nivel universitario al que se dirigen, ya que representan los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto del significado de referencia.
Relaciones (conexiones, significados) 1. Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones etc.) se relacionan y conectan entre sí.	1. Este proceso de instrucción pretende contribuir a la construcción del significado de la fórmula del Teorema de Bayes al favorecer la habilidad de efectuar transformaciones entre representaciones realizadas en distintos registros, en particular, en el coloquial y el simbólico. El suceso que ocurrió se detecta en primer lugar, a través de las expresiones coloquiales del problema, luego se identifican el resto de los sucesos intervinientes y se efectúan las conversiones respectivas en los registros simbólico y gráfico. El hecho de expresar al suceso que ocurrió con operaciones entre conjuntos y aplicar las propiedades de la probabilidad, argumenta la fórmula de la probabilidad total, que junto a la aplicación de la definición de probabilidad condicional, permiten la justificación de la fórmula del teorema de Bayes. Por otro lado, la metodología implementada produce una articulación significativa entre los objetos matemáticos involucrados, ya que conduce, necesariamente, a la resolución efectiva de estos problemas.

Cuadro 6 – Valoración de la idoneidad epistémica del proceso de instrucción implementado
Fuente: desarrollado por los autores

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

La valoración de la Idoneidad cognitiva del proceso de instrucción implementado, de acuerdo a la descripción de los componentes con sus descriptores correspondientes, se muestra en el Cuadro 7.

Componentes y Descriptores	Valoración del proceso de instrucción
Conocimientos previos 1. Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema. 2. Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.	1. Al momento de la propuesta didáctica, los alumnos tienen como conocimientos previos: el espacio muestral, los tipos de sucesos, las operaciones entre sucesos, el cálculo de la probabilidad de un suceso, la probabilidad de la unión de sucesos, de la intersección y de la probabilidad condicional. 2. Los significados pretendidos tienen una dificultad manejable en cada una de sus componentes, ya que para alcanzarlos, los alumnos deben, en primer lugar identificar y simbolizar adecuadamente los sucesos involucrados, luego aplicar propiedades de la probabilidad y deducir la fórmula de la probabilidad total, para finalmente aplicarla en la fórmula del teorema de Bayes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales 1. Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.	1. En la guía de trabajos prácticos de la asignatura se encuentran actividades previas necesarias para llegar a la resolución de problemas bayesianos. Este contenido cierra la unidad de probabilidades del programa de estudios por ser integrador, ya que todos los objetos matemáticos que se necesitan para su resolución fueron considerados previamente. Además, se propone como actividad previa a una evaluación, problemas integradores donde el alumno debe detectar cuáles de los problemas propuestos corresponden a la estrategia implementada en este proceso de instrucción.
Aprendizaje 1. Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia): Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva. - La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia - Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones	1. En diferentes momentos de la estrategia didáctica y de la metodología de resolución implementada, los alumnos consultan sobre sus dificultades en sus resoluciones. Es una instancia de retroalimentación del proceso de instrucción. Son evaluaciones formativas que permiten la toma de decisiones para la optimización la metodología implementada, se producen antes y después del proceso previo a la evaluación sumativa dada por la evaluación parcial de la asignatura. De esta forma, se logra en los alumnos una comprensión conceptual y proposicional. (Competencia comunicativa y argumentativa). La fluencia procedimental y la comprensión situacional se registraron en la apropiación por parte de los alumnos de los conocimientos pretendidos e implementados antes de la metodología de resolución implementada y al final del proceso, cuyos resultados fueron registrados en el cuadro 8. Los distintos niveles de comprensión y competencia son evaluados al diferenciar las etapas de la metodología de resolución aplicada.

Cuadro 7 – Valoración de la idoneidad cognitiva del proceso de instrucción implementado
Fuente: desarrollado por los autores

Como parte de la idoneidad cognitiva, y para la componente Aprendizaje, en el Cuadro 8, se detalla el registro de las funciones semióticas establecidas a partir de las configuraciones cognitivas de los alumnos antes de la metodología de resolución y después del proceso de instrucción.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

Actuación de los alumnos / Funciones semióticas	Momento del proceso de instrucción	Correctas		Incorrectas/ No Respondió
		Totalmente	parcialmente	
F1	antes	23	2	25
	después	40	6	4
F2	antes	40	5	5
	después	48	0	2
F3	antes	20	3	27
	después	47	0	3
F4	antes	9	6	35
	después	35	9	6
F5	antes	14	3	33
	después	27	0	23
F6	antes	0	0	50
	después	10	2	38
F7	antes	8	9	33
	después	36	10	4
F8	antes	14	6	30
	después	36	10	4

Cuadro 8 – Protocolo de registro de las funciones semióticas de las configuraciones cognitivas de los alumnos en el momento inicial y final de la estrategia didáctica implementada
Fuente: desarrollado por los autores

Hubo un mayor número de alumnos que establecieron correctamente más funciones semióticas en la segunda instancia de evaluación, aumentando la frecuencia de los puntajes más altos (puntajes entendidos como el número de funciones semióticas establecidas en forma correcta y parcialmente correcta por cada estudiante), como se muestra en la Figura 3.

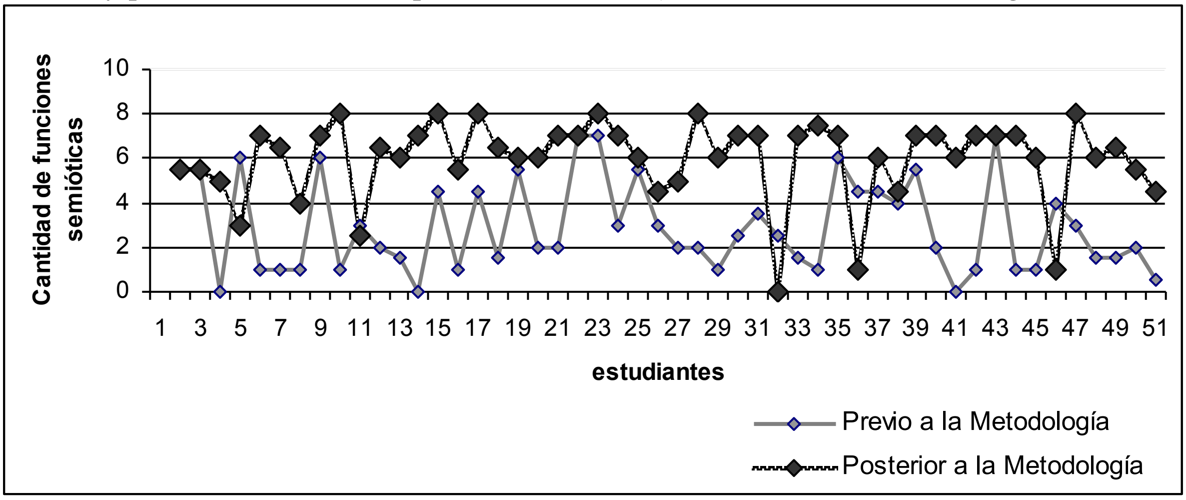


Figura 3 – Cantidad de funciones semióticas correcta y parcialmente establecidas obtenida por cada uno de los alumnos al inicio y a la finalización del proceso de instrucción
Fuente: desarrollado por los autores

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

5 Conclusiones

La mejora en la cantidad de funciones semióticas *correcta* y *parcialmente correcta*, obtenida por los alumnos al inicio y al final del proceso de instrucción, puede explicarse, al menos en parte, a través del análisis de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción implementado, en las dimensiones epistémica y cognitiva. Las valoraciones realizadas han permitido concluir que el proceso de instrucción tiene un alto grado de idoneidad en estas dos dimensiones, ajustándose a los descriptores de cada componente en las idoneidades analizadas.

Además, se han relacionado cada uno de los pasos identificados en esta metodología con cada una de las ocho funciones semióticas identificadas y explicitadas en este trabajo. Estas funciones permitieron un análisis ontosemiótico sobre las producciones escritas de estudiantes de Ingeniería, antes y después de implementar una metodología de resolución de problemas bayesianos.

Se concluye que el establecimiento correcto de las primeras cuatro funciones semióticas, es un procedimiento que conduce, necesariamente, a la resolución de este tipo de problemas.

Por otra parte, haber establecido las funciones semióticas argumentativas F_5 y F_6, favorece la construcción del significado de las fórmulas de la probabilidad total y del Teorema de Bayes, respectivamente. No obstante, aunque no resultan indispensables para la resolución de estos problemas, se relacionan positivamente con la disminución de la frecuencia de los errores en la aplicación de dichas fórmulas.

Con respecto a la cantidad total de funciones semióticas establecidas correctamente por los alumnos, hubo un mayor número de respuestas correctas en la segunda instancia evaluada, lo que permite concluir que al finalizar el proceso de instrucción, disminuyó la frecuencia de cada uno de los errores mencionados.

La construcción de las configuraciones epistémicas y cognitivas, conjuntamente con las funciones semióticas descriptas, ha permitido el análisis de los principales factores que contribuyen a la resolución de problemas bayesianos. Esto ha posibilitado el diseño de una metodología de resolución que procura disminuir los conflictos semióticos presentes en los errores más frecuentes en la comprensión de la probabilidad condicional, resultando un aporte en la construcción del significado de la fórmula identificada en el Teorema de Bayes.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a09

Referencias

DÍAZ, C.; DE LA FUENTE, I. Razonamiento sobre Probabilidad Condicional e implicaciones para la enseñanza de la Estadística. **Epsilon**, Andalucía, v. 2, n. 59, p. 245-260. 2004.

DÍAZ, C.; DE LA FUENTE, I. Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes españoles de psicología. **Educación Matemática**. México, v. 18, n. 2, p. 75-94. ago. 2006.

DÍAZ, C.; DE LA FUENTE, I. Validación de un cuestionario de razonamiento probabilístico condicional. **Revista Electrónica de Metodología Aplicada**, Asturias, v. 2, n. 1, p. 1-15. 2007. Disponible en: <http://www.psico.uniovi.es/REMA/v12n1/a1.pdf>. Acceso en: 24 oct. 2012.

FONT, V.; GODINO, J.; D'AMORE, B. Enfoque Ontosemiótico de las representaciones en Educación Matemática. **For the learning of mathematics**, Montreal, v. 27, n. 2, p. 3-9. 2007. Disponible en: <http://www.ugr.es/~jgodino/menuing.htm>. Acceso en: 24 oct. 2012.

GODINO, J.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 14, n. 3, p. 325-355. 1994. Disponible en: <http://rdm.penseesauvage.com/RDM-Vol-14-3.html>. Acceso en: 24 oct. 2012.

GODINO, J.; BATANERO, C.; FONT, V. Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. 2009. Disponible en: <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf>. Acceso en: 12 ago. 2011.

GODINO, J.; BENCOMO, D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R. Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. **Paradigma**, Maracay, v. 27, n. 2, p. 221-252. 2007.

GODINO, J. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife, **Anais…** Recife: CIAEM. 2011. p. 1-20. CD-ROM.

POLLATESK, A.; WELL, A.; KONOLD, C.; HARDIMAN, P.; COBB, G. Understanding Conditional Probabilities. **Organizational, Behavior and Human Decision Processes**, Massachusetts, n. 40, p. 255-269. 1987.

Submetido em Novembro de 2012.
Aprovado em Abril de 2013.