



PERÚ

Ministerio
de Educación



RUTAS DEL APRENDIZAJE

¿Qué y cómo aprenden
nuestros adolescentes?

Fascículo

1

Número y operaciones

Cambio y relaciones

VII CICLO

Tercero, cuarto y quinto grados de Educación Secundaria

HOY EL PERÚ TIENE UN COMPROMISO: MEJORAR LOS APRENDIZAJES
TODOS PODEMOS APRENDER, NADIE SE QUEDA ATRÁS

MOVILIZACIÓN NACIONAL POR LA MEJORA DE LOS APRENDIZAJES

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Av. De la Arqueología, cuadra 2 - San Borja
Lima, Perú
Teléfono 615-5800
www.minedu.gob.pe

Versión 1.0

Tiraje: 51 800 ejemplares

Emma Patricia Salas O'Brien
Ministra de Educación

José Martín Vegas Torres
Viceministro de Gestión Pedagógica

Equipo coordinador de las Rutas del Aprendizaje:

Ana Patricia Andrade Pacora, Directora General de Educación Básica Regular
Neky Vanetty Molinero Nano, Directora de Educación Inicial
Flor Aidee Pablo Medina, Directora de Educación Primaria
Darío Abelardo Ugarte Pareja, Director de Educación Secundaria

Asesor general de las Rutas del Aprendizaje:

Luis Alfredo Guerrero Ortiz

Equipo pedagógico:

Róger Saavedra Salas
Pedro David Collanqui Díaz
Daniel José Arroyo Guzmán
Holger Saavedra Salas, asesor
Antonieta de Ferro, asesora

Agradecimientos:

Agradecemos la colaboración del equipo de especialistas de IPEBA y UMC por su participación en la revisión del documento.

Corrección de estilo: Jorge Coaguila Quispe

Diseño gráfico y diagramación: Haydé Pumacayo Condori

Ilustraciones: Haydé Pumacayo Condori

Equipo editor: Juan Enrique Corvera Ormeño, Carmen Rosa León Ezcurra, Luis Fernando Ortiz Zevallos

Impreso por:

Corporación Gráfica Navarrete S.A.
Carretera Central 759 Km 2 Santa Anita – Lima 43
RUC 20347258611

Distribuido gratuitamente por el Ministerio de Educación. Prohibida su venta.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú: N.º 2013-01775

Impreso en el Perú / *Printed in Peru*

Estimada (o) docente:

Queremos saludarte y reiterar el aprecio que tenemos por tu labor. Es por ello que en el Ministerio de Educación estamos haciendo esfuerzos para comenzar a mejorar tus condiciones laborales y de ejercicio profesional. Esta publicación es una muestra de ello.

Te presentamos las «Rutas del Aprendizaje», un material que proporciona orientaciones para apoyar tu trabajo pedagógico en el aula. Esperamos que sean útiles para que puedas seguir desarrollando tu creatividad pedagógica. Somos conscientes que tú eres uno de los principales actores para que todos los estudiantes puedan aprender y que nuestra responsabilidad es respaldarte en esa importante misión.

Esta es una primera versión, a través del estudio y uso que hagas de ellas, así como de tus aportes y sugerencias, podremos mejorarlas para contribuir cada vez mejor en tu trabajo pedagógico. Te animamos entonces a caminar por las rutas del aprendizaje. Nosotros ponemos a tu disposición el portal de Perú Educa para que nos envíes tus comentarios, aportes y creaciones; nos comprometemos a reconocer tus aportes, realizar seguimiento y sistematizarlos. A partir de ello, mejorar el apoyo del Ministerio de Educación a la labor de los maestros y maestras del Perú.

Sabemos de tu compromiso para hacer posible que cambiemos la educación y cambiemos todos en el país. Tú eres parte del equipo de la transformación, junto al director y con los padres y madres de familia, eres parte de la gran Movilización Nacional por la Mejora de los Aprendizajes.

Te invitamos, a ser protagonista en este movimiento ciudadano y a compartir el compromiso de lograr que todos los niños, niñas y adolescentes puedan aprender y nadie se quede atrás.

Patricia Salas O'Brien
Ministra de Educación

Índice

Introducción	7
I. ¿Qué entendemos por enseñar y aprender en Matemática?	9
II. ¿Qué aprenden nuestros adolescentes?	15
III. ¿Cómo podemos facilitar estos aprendizajes?	21
3.1 Desarrollando escenarios de aprendizaje	21
3.2 Articulando la progresión del conocimiento matemático en el VII ciclo de la EBR	22
3.3 Planificando nuestras unidades y sesiones considerando los indicadores propuestos	25
3.4 Reconociendo escenarios, herramientas y condiciones didácticas para desarrollar las capacidades matemáticas	27
3.5 Promoviendo tareas matemáticas articuladas	33
3.6 Resolviendo problemas	34
3.7 Fases de la resolución de problemas	35
3.8 Promoviendo el trabajo cooperativo	36
IV. ¿Cómo desarrollamos escenarios de aprendizaje respecto al número real?	37
4.1 Algunas situaciones de aprendizaje	38
4.2 Algunas actividades para el desarrollo de las capacidades vinculadas a números reales	50
V. ¿Cómo desarrollamos escenarios de aprendizaje respecto a las funciones cuadráticas?	61
5.1 Algunas situaciones de aprendizaje	62
5.2 Algunas actividades para el desarrollo de las capacidades vinculadas a las funciones cuadráticas	77
VI. ¿Cómo desarrollamos escenarios de aprendizaje respecto a sucesiones con números reales y programación lineal?	89
6.1 Algunas situaciones de aprendizaje	90
Bibliografía	99

Introducción

El Proyecto Educativo Nacional establece, en su segundo objetivo estratégico, la necesidad de transformar las instituciones de Educación Básica de manera tal que asegure una educación pertinente y de calidad, en la que todos los niños, niñas y adolescentes puedan realizar sus potencialidades como persona y aportar al desarrollo social. Es en este marco que el Ministerio de Educación, como una de sus políticas priorizadas, busca asegurar que: *Todos y todas logran aprendizajes de calidad con énfasis en comunicación, matemática, ciudadanía, ciencia, tecnología y productividad.*

En el ámbito de la matemática, nos enfrentamos al reto de desarrollar las competencias y capacidades matemáticas en su relación con la vida cotidiana. Es decir, como un medio para comprender, analizar, describir, interpretar, explicar, tomar decisiones y dar respuesta a situaciones concretas, haciendo uso de conceptos, procedimientos y herramientas matemáticas.

Reconociendo este desafío se ha trabajado el presente fascículo, que llega hoy a tus manos, como parte de las rutas de aprendizaje, y busca ser una herramienta para que nuestros estudiantes puedan aprender. En él se formulan seis capacidades matemáticas que permiten hacer más visible el desarrollo de la competencia matemática y trabajarla de forma integral. Se adopta un enfoque centrado en la resolución de problemas desde el cual, a partir de una situación problemática, se desarrollan las seis capacidades matemáticas, en forma simultánea, configurando el desarrollo de la competencia.

En este fascículo encontrarás:

- Algunas creencias que aún tenemos los docentes en nuestras prácticas educativas y que, con espíritu innovador, tenemos que corregir.
- Los estándares de aprendizaje que los estudiantes deben lograr al término de los ciclos VI y VII de la Educación Básica Regular, en dos dominios: número y operaciones, cambio y relaciones.

- Las competencias y capacidades cuyo desarrollo permitirá alcanzar esos estándares de aprendizaje, con mayor énfasis en el primer dominio.
- Orientaciones respecto de cómo facilitar el desarrollo de las competencias y capacidades matemáticas vinculadas a los dominios de número y operaciones, cambio y relaciones.

Esperamos que este fascículo contribuya en tu labor cotidiana. Por nuestra parte estaremos muy atentos a tus aportes y sugerencias para ir mejorándolo en las próximas ediciones, de manera que sea lo más pertinente y útil para el logro de los aprendizajes a los que nuestros estudiantes tienen derecho.

I. ¿Qué entendemos por enseñar y aprender en Matemática?

Nuestras creencias, es decir, nuestra visión particular de las matemáticas, influyen sobre lo que hacemos en clase y sobre cómo aprenden nuestros estudiantes.

A continuación, presentamos dos situaciones de enseñanza que te permitirán reflexionar y mejorar tu práctica pedagógica.

Creencia: Las ecuaciones se aprenden resolviendo muchos ejercicios y solo después se emplean para resolver problemas.

Roberto y Luisa son profesores de Matemática del mismo grado en una institución educativa. Veamos cuáles son sus experiencias de enseñanza de las ecuaciones cuadráticas:

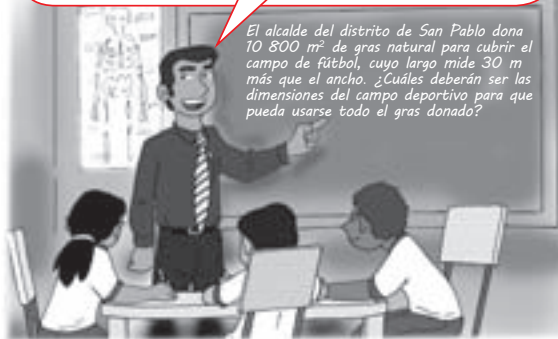
Profesor Roberto, quiero comentarle algo. Tengo serias dificultades con los estudiantes del tercer grado D, pues no tienen interés en aprender ecuaciones cuadráticas.

¿Podría ser por su forma de enseñar? ¿Cómo está desarrollando la sesión?

Tal como he aprendido cuando estaba en el colegio: muestro la forma general de la ecuación cuadrática y resuelvo un ejercicio como ejemplo. Luego dejo cinco ejercicios para resolver en clase en forma individual y al final les planteo un problema de aplicación. ¿Y usted cómo enseña?

Yo parto de una situación problemática que se puede resolver con una ecuación cuadrática. Durante la resolución del problema, los estudiantes obtienen una ecuación cuadrática y desconocen su solución. Justo hoy tengo clases con la otra sección; le invito a que observe mi sesión.

Jóvenes, hoy resolveremos un problema aplicando lo que han aprendido de ecuaciones. Escribiré el enunciado del problema en la pizarra. Mientras tanto, formen grupos de tres, elijan con quiénes desean trabajar.



Los veo preocupados. ¿Qué dificultades tienen?

Profe, este problema no lo podremos resolver. Sale una ecuación cuadrática y usted enseñó solo ecuaciones lineales.



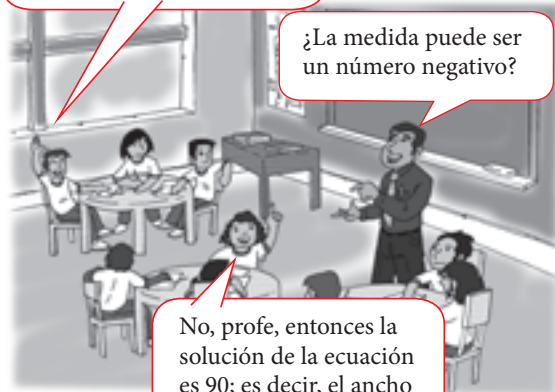
Bien, muchacho, justo esperaba escuchar eso. Es cierto lo que dices, pero todos saben factorizar polinomios.



Ahora, ¿qué valores han obtenido?

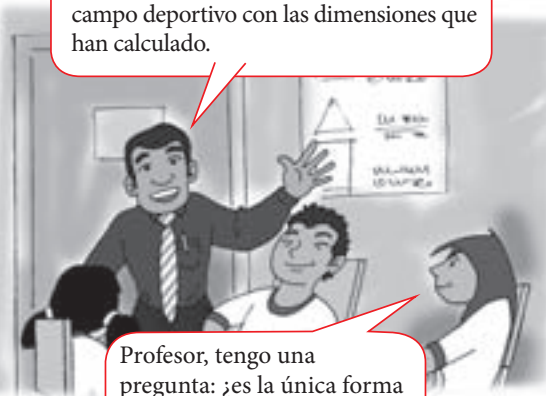
Salen dos soluciones, profe. Una es positiva y otra negativa: 90 y -120.

¿La medida puede ser un número negativo?



No, profe, entonces la solución de la ecuación es 90; es decir, el ancho mediría 90 metros y el largo 120 metros.

Entonces los 10 800 m² de césped donado por el alcalde alcanzarán para cubrir el campo deportivo con las dimensiones que han calculado.



Profesor, tengo una pregunta: ¿es la única forma de resolver la ecuación cuadrática?

Profesor, yo tengo otra pregunta: ¿hay otras aplicaciones de las ecuaciones de segundo grado?



Jóvenes, hay otras formas de resolver las ecuaciones de segundo grado, como también existen muchas aplicaciones, pero el tiempo nos ha ganado. La próxima clase desarrollaremos otras aplicaciones y otras formas de resolver estas ecuaciones.

Lo felicito por su clase, profesor Roberto. Hasta ahora pensaba que solo se podía enseñar a resolver problemas de aplicación de ecuaciones cuadráticas después de haber enseñado todos los algoritmos de su resolución. Además, usted me ha demostrado que pueden aprender estos algoritmos en el contexto de la resolución de problemas.



Gracias, profesora Luisa, formular un problema de aplicación de ecuaciones cuadráticas lleva tiempo. Por ello, al igual que muchos docentes, elegimos lo más sencillo y rápido: resolver ejercicios mecánicamente sin que estos aporten a la solución de un problema; pero así los estudiantes pierden interés por la matemática.

Reflexiones:

¿Cuáles son las creencias que tienen los docentes respecto a la enseñanza de ecuaciones?

El informe pedagógico de los resultados de la evaluación nacional de estudiantes de Educación Secundaria evidencia deficiencias en el desarrollo de aprendizajes en Matemática. Los estudiantes tienen serias dificultades para hacer tareas tan elementales como la aplicación de algoritmos algebraicos, como el cálculo del conjunto solución de ecuaciones (EN 2004-UMC). Solo el 2,9 % de los estudiantes evaluados está en capacidad de describir en términos matemáticos una situación de la vida real; por ejemplo, en situaciones como las descritas anteriormente, se observa que para lograr desarrollar esta capacidad es necesario promover situaciones de aprendizaje como Roberto.

Estos resultados se explican en parte porque los profesores resuelven ejercicios algorítmicos sin relacionarlos con el contexto de la vida diaria de sus estudiantes, tal como muestra la experiencia de Luisa. Tales prácticas pedagógicas reducen el interés de los estudiantes y son pocos los docentes que consiguen motivarlos mediante actividades más significativas como las planteadas por Roberto.

¿Por qué es importante contextualizar los contenidos matemáticos a partir de la resolución de problemas?

La competencia no encierra en sí misma los conocimientos, la capacidad o la actitud para aprender; requiere de la movilización de estos contenidos y de su contextualización (Perrenoud, 1999). Necesitamos, pues, promover el uso de los conocimientos, más que memorizarlos o aplicarlos mecánicamente. Y esto se logra centrando la actividad de la clase en la resolución de problemas contextualizados. Además, los datos del contexto del problema que se quiere resolver demandan que se empleen operaciones mentales complejas.

El desarrollo de conceptos matemáticos necesita partir de las situaciones relacionadas con la vida de los estudiantes, en los contextos donde se desenvuelven. En el relato anterior, el recubrimiento del campo de fútbol con gras natural responde a los intereses de los estudiantes.

“MATEMÁTICA ES MÁS QUE RESOLVER ECUACIONES”

Creencia: Se usan materiales concretos para enseñar matemática solo en primaria o inicial; en secundaria no es necesario.

Enseñaré primero recordando la definición de la potenciación y luego las propiedades

$$a^n = \underbrace{a \times \dots \times a}_n$$

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

En esta unidad enseñaremos la notación científica y empezaré recordando la potenciación con exponente negativo en Q.

Muy bien, recuerden que tenemos que pensar en actividades o tareas que permitan a los estudiantes desarrollar sus capacidades para resolver problemas.



Yo voy a iniciar con la técnica del doblado de papel.

Ese tema es fácil, voy a refrescar a mis estudiantes con la siguiente operación:

$$3(-2)^4 + 5(4 - 9)^4 =$$



Los estudiantes al usar hojas A4 para la técnica del doblado de papel reconocen también la utilidad de la "notación científica".

Muchachos, hoy les tengo un desafío. ¿Doblando una hoja de papel A4 podemos llegar a la Luna?

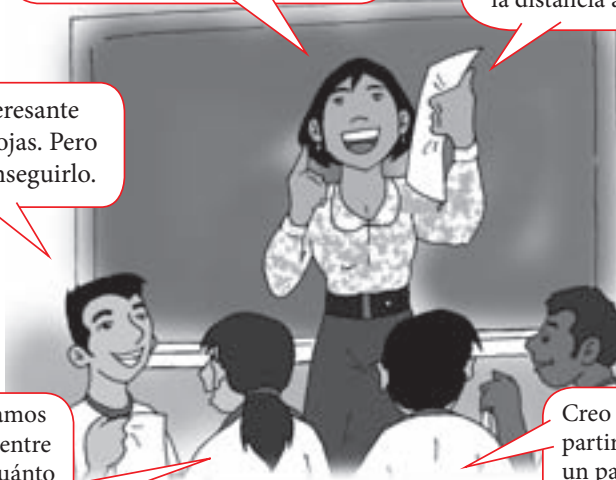
Saquen una hoja y procedan a doblar en partes iguales tantas veces como sea necesario hasta alcanzar la distancia a la Luna.

Me parece interesante trabajar con hojas. Pero creo difícil conseguirlo.

Profesora, ¿cuánto mide el grosor de una hoja de papel A4?

Claro, tendríamos que dividirlo entre 100. A ver, ¿cuánto sale?

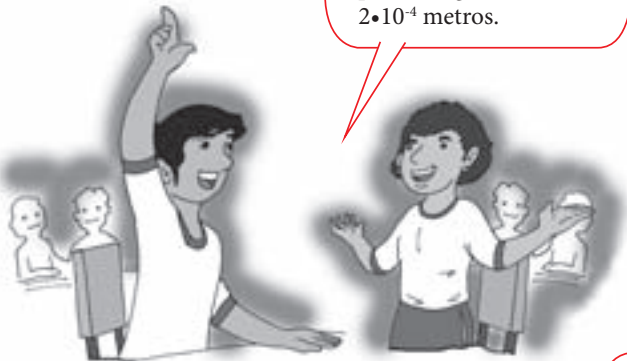
Creo que podemos averiguarlo a partir de la medida del grosor de un paquete de 100 hojas de papel tamaño A4.



Profesora, sale 0,01 cm, que sería igual a 0,1 mm, y esto sería 10^{-4} metros.

Ah, entonces el primer dobléz generaría dos partes: el grosor sería $2 \cdot 10^{-4}$ metros.

El segundo dobléz generaría cuatro partes; el grosor sería $4 \cdot 10^{-4}$ metros.



El tercer dobléz generaría ocho partes, el grosor sería $8 \cdot 10^{-4}$ metros.

Entonces el cuarto dobléz generaría un grosor de $16 \cdot 10^{-4}$ metros.

Si llamamos 'n' al número de veces que doblamos un papel, ¿cómo podemos conocer el tamaño que obtenemos al doblar 'n' veces un papel?
Mediante: Grosor = $2^n \cdot 10^{-4}$ metros

¿Cuál sería el grosor después de 14 dobleces? y ¿después de 19 dobleces?

Tras 14 dobleces, el espesor sería $2^{14} \cdot 10^{-4} = 16\,384 \cdot 10^{-4} = 1,6384$ metros, algo más de metro y medio.

Profesora, la distancia de la Tierra a la Luna es aproximadamente 384 400 km, equivalentes a 384 400 000 metros. Entonces ¿cuántos dobleces podemos hacer?



Tras 19 dobleces, el grosor o la altura sería $2^{19} \cdot 10^{-4} = 524\,288 \cdot 10^{-4} = 52,4288$ metros, algo más de cincuenta y dos metros.

Necesitamos más de 43 dobleces, es decir, $2^{43} \cdot 10^{-4}$, que es equivalente a 380 000 kilómetros o 380 000 000 metros.

Reflexiones:

¿Cuáles son las concepciones que tienen los docentes respecto a los materiales concretos en esta historieta?

- La situación muestra las creencias que tienen algunos docentes respecto a las palabras 'material concreto' y 'problema'; se piensa que no pueden estar planteadas juntas en la actividad de aprendizaje. Cuando se alude al uso de 'materiales concretos' en las sesiones de matemática en secundaria, existe el prejuicio de considerarla una actividad infantil y carente de seriedad para los estudiantes, hasta a veces se considera una pérdida de tiempo.
- Si observamos a los estudiantes, reconocemos en ellos reacciones diferentes cuando se les propone un problema mediante el uso de 'material concreto'. Para algunos estudiantes hablar de un problema matemático trae consigo una serie de creencias; por ejemplo, creen que los problemas tienen que resolverse únicamente mediante el uso del lápiz y papel. Por otro lado, hay docentes que no consideran el uso del 'material concreto' en secundaria, y más bien creen que es pertinente solo para construir nociones básicas en niveles anteriores.
- El empleo de materiales educativos concretos diversos en matemática no solo despierta la curiosidad del estudiante, sino que también provee de significados conceptuales para el aprendizaje. Pero son solo un medio para conseguir algo y no un fin en sí mismos, por lo que debemos darles el justo valor y el tiempo apropiado. Por ello, sugerimos propiciar el aprendizaje de las matemáticas mediante el uso de materiales concretos.

¿Por qué es importante usar material educativo concreto en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el nivel secundario?

Siempre que se piense en desarrollar las capacidades matemáticas para resolver problemas, el proceso óptimo de enseñanza y aprendizaje debería incluir la manipulación de distintos materiales, ya que solo mediante una enseñanza diversificada, rica en recursos y estrategias para abordar un mismo aprendizaje, conseguiremos que se construyan significados y atribuyan sentido al aprendizaje escolar. Después de este trabajo manipulativo con materiales concretos se puede pasar a utilizar, progresivamente, recursos más elaborados de 'representación matemática', por ejemplo: calculadoras gráficas, hojas de cálculo, instrumentos de medición e inclusive simuladores virtuales.

Entre las ventajas que aportan los materiales didácticos concretos en la formación matemática de los estudiantes se pueden mencionar las siguientes:

- Proporcionan información y guían el aprendizaje, es decir, aportan una base concreta para el pensamiento conceptual y contribuyen a construir significados (Ogalde, C. y Bardavid, N., 2007).
- Desarrollan la continuidad de pensamiento, hacen que el aprendizaje sea más duradero y brindan una experiencia real que estimula la creatividad de los estudiantes.
- Despiertan el interés de los estudiantes, facilitan la evaluación de los aprendizajes mediante la técnica de observación sistemática y promueven la comunicación entre los estudiantes.

"MATEMÁTICA ES MÁS QUE REALIZAR CÁLCULOS NUMÉRICOS"

II. ¿Qué aprenden nuestros adolescentes?

El fin de la educación es lograr que los estudiantes desarrollen competencias, las cuales son definidas como un saber actuar en un contexto particular, en función de un objetivo o la solución de un problema. Este saber actuar debe ser pertinente a las características de la situación y a la finalidad de nuestra acción. Para tal fin, se selecciona o se ponen en acción las diversas capacidades y recursos del entorno.

En este fascículo se trabajan dos competencias matemáticas relacionadas con:

- Resolución de situaciones problemáticas en número y operaciones
- Resolución de situaciones problemáticas en cambio y relaciones

Competencia, capacidades e indicadores en número y operaciones

En número y operaciones se desarrolla la siguiente competencia:

Resuelve situaciones problemáticas de contexto real y matemático que implican la construcción del significado y el uso de los números y sus operaciones, empleando diversas estrategias de solución, justificando y valorando sus procedimientos y resultados.

El estándar de aprendizaje que los estudiantes deben lograr al término del VII ciclo es:

Interpreta el número irracional como un decimal infinito y sin periodo. Argumenta por qué los números racionales pueden expresarse como el cociente de dos enteros. Interpreta y representa cantidades y magnitudes mediante la notación científica. Registra medidas en magnitudes de masa, tiempo y temperatura según distintos niveles de exactitud requeridos, y distingue cuando es apropiado realizar una medición estimada o una exacta. Resuelve y formula situaciones problemáticas de diversos contextos referidas a determinar tasa de interés, relacionar hasta tres magnitudes proporcionales, empleando diversas estrategias y explicando por qué las usó. Relaciona diferentes fuentes de información. Interpreta las relaciones entre las distintas operaciones (Mapa de Progreso de Matemática: Número y operaciones).

En este fascículo, un indicador se relaciona con más de una capacidad. Por lo tanto, para dar cuenta del logro de las capacidades matemáticas, se requiere hacer una lectura del conjunto de indicadores.

NÚMERO Y OPERACIONES - VII CICLO

INDICADORES

CAPACIDADES GENERALES	TERCER GRADO DE SECUNDARIA	CUARTO GRADO DE SECUNDARIA	QUINTO GRADO DE SECUNDARIA
<p>Matematiza situaciones que involucran cantidades y magnitudes en diversos contextos.</p> <p>Representa situaciones que involucran cantidades y magnitudes en diversos contextos.</p> <p>Comunica situaciones que involucran cantidades y magnitudes en diversos contextos.</p>	<p>Construcción del significado y uso de los números racionales e irracionales en situaciones problemáticas con cantidades, grandes y pequeñas</p> <ul style="list-style-type: none"> Describe situaciones de medidas en diversos contextos para expresar números racionales en su notación decimal, científica e intervalos. Describe las estrategias utilizadas con las operaciones en intervalos para resolver situaciones problemáticas. Expresa los números racionales mediante notación científica. Ordena datos en esquemas de organización que representan los números racionales y sus operaciones con intervalos. Formula estrategias de estimación de medidas o cantidades para ordenar números racionales en la recta real. Aplica variadas estrategias con números racionales, intervalos y proporciones de hasta dos magnitudes e interés compuesto. Usa los símbolos de $=$, $>$, $<$, \leq, \geq, corchetes, unión, intersección, para comparar y ordenar dos o más cantidades. Utiliza construcciones con regla o compás para ubicar números racionales e irracionales en la recta real. Explica la existencia de los números irracionales como decimales no periódicos a partir de situaciones de medidas de longitudes y áreas de algunas figuras geométricas planas 	<p>Construcción del significado y uso de números reales en situaciones problemáticas con cantidades continuas, grandes y pequeñas</p> <ul style="list-style-type: none"> Propone situaciones de medida con múltiplos y submúltiplos de unidades de magnitudes para expresar números reales mediante notación científica. Ordena datos en esquemas de organización que expresan números reales. Utiliza las formas gráficas y simbólicas de intervalos para representar información. Expresa situaciones de medida de temperaturas, índices financieros, tallas, etc., que implican el uso de los números reales mediante intervalos en su forma gráfica y simbólica. Aplica variadas estrategias con números reales, intervalos y proporciones de hasta dos magnitudes e interés compuesto. Utiliza intervalos y expresiones de notación científica con números reales. Explica la utilidad de la notación científica y los intervalos. Explica las condiciones de densidad de los números reales expresados en la recta numérica. Explica las distinciones entre los números racionales e irracionales. 	<p>Construcción del significado y uso de números reales en situaciones problemáticas con cantidades, continuas grandes y pequeñas</p> <ul style="list-style-type: none"> Modela información de cantidades continuas y discretas de su entorno, usando intervalos de números reales. Plantea situaciones de productos y cocientes de magnitudes que dan otras magnitudes para expresar números reales mediante notación científica. Explica procedimientos deductivos al resolver situaciones comerciales de aumentos y descuentos sucesivos y financieras de interés compuesto. Describe las estrategias de estimación de medidas o cantidades para ordenar números reales en la recta real. Formula estrategias de estimación de medidas o cantidades para ordenar números racionales e irracionales en la recta real. Explica las condiciones de densidad y completitud de los números reales en la recta numérica.

<p>Elabora estrategias haciendo uso de los números y sus operaciones para resolver problemas.</p>	<p>Construcción del significado y uso de las operaciones con números racionales e irracionales en situaciones problemáticas con cantidades continuas, grandes y pequeñas</p> <ul style="list-style-type: none"> • Formula estrategias de estimación de medidas o cantidades para ordenar números irracionales en la recta real. • Aplica operaciones con números, intervalos y proporciones con racionales para resolver situaciones financieras y comerciales. • Describe las estrategias utilizadas con las operaciones y proporciones con racionales para resolver situaciones de porcentajes, interés y de ganancias y pérdidas. • Usa los porcentajes e interés simple en la resolución problemas de textos discontinuos. • Justifica el uso de las operaciones con racionales expresados en notaciones fraccionarias, decimales y científicas para resolver situaciones de contextos variados. • Explica la imposibilidad de representar los irracionales en decimales periódicos puros, mixtos y no periódicos para extender los números racionales a los irracionales. • Elabora estrategias heurísticas (ensayo error, hacer una lista sistemática, empezar por el final, establecer subtemas, suponer el problema resuelto) . • Usa los símbolos de intervalos, como corchetes, desigualdades o gráficas sobre la recta, para resolver operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento de conjuntos de números reales. • Aplica las propiedades de las operaciones aditivas, multiplicativas y potencias con racionales e irracionales. • Explica estrategias de resolución de problemas. • Utiliza la potenciación y la radicación como operaciones inversas para calcular las raíces de números naturales que expresan números irracionales. 	<p>Construcción del significado y uso de las operaciones con números reales en situaciones problemáticas con cantidades continuas, grandes y pequeñas</p> <ul style="list-style-type: none"> • Describe procedimientos deductivos al resolver situaciones de interés compuesto hasta con tres magnitudes en procesos de situaciones comerciales, financieras y otras. • Describe situaciones científicas con cantidades muy grandes y muy pequeñas (por ejemplo, en la nanotecnología o las distancias estelares). • Usa las diferentes representaciones gráficas o simbólicas para representar y operar con intervalos. • Explica estrategias de resolución de problemas simulados y reales de varias etapas aplicando las propiedades de las operaciones aditivas multiplicativas y potencias con números reales. • Elabora estrategias para encontrar números reales entre dos números dados. • Formula estrategias de estimación de medidas para ordenar números reales en la recta real. • Aplica variadas estrategias heurísticas (ensayo y error, hacer una lista sistemática, empezar por el final, establecer subtemas, suponer el problema resuelto) para resolver situaciones laborales, financieras, etc, sobre proporciones de hasta tres magnitudes e interés compuesto. • Aplica operaciones y proporciones con números reales para resolver situaciones financieras, comerciales y otras sobre porcentajes e interés compuesto. • Usa los símbolos de la representación de intervalos sobre la recta para resolver operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento de números reales. 	<p>Construcción del significado y uso de las operaciones con números reales en situaciones problemáticas con cantidades continuas, grandes y pequeñas</p> <ul style="list-style-type: none"> • Relaciona los números reales y sus operaciones como un medio para resolver situaciones financieras y comerciales sobre tasas, intereses y aumentos o descuentos sucesivos. • Relaciona las propiedades de las operaciones en los números reales para resolver problemas de enunciado verbal y simbólico con números reales. • Propone estrategias para resolver operaciones de varias etapas respetando la jerarquía de las operaciones, aplicando las propiedades de las operaciones con números reales. • Formula variadas estrategias heurísticas (ensayo y error, hacer una lista sistemática, empezar por el final, establecer subtemas, suponer el problema resuelto) para resolver problemas con los números reales. • Usa los números reales y sus operaciones para resolver situaciones financieras y comerciales sobre tasas e interés compuesto, aumentos o descuentos simples y sucesivos. • Demuestra conjeturas planteadas a partir de la resolución del problema para situaciones financieras y comerciales sobre tasas e interés compuesto, aumentos o descuentos simples y sucesivos.
<p>Utiliza expresiones simbólicas, técnicas y formales de los números y las operaciones en la resolución de problemas.</p>			
<p>Argumenta el uso de los números y sus operaciones en la resolución de problemas.</p>			

Competencia, capacidades e indicadores en cambio y relaciones

En cambio y relaciones se desarrolla la siguiente competencia:

Resolver situaciones problemáticas de contexto real y matemático que implican la construcción del significado y el uso de los patrones, igualdades, desigualdades, relaciones y funciones, utilizando diversas estrategias de solución y justificando sus procedimientos y resultados.



En la figura adjunta se esquematiza la competencia matemática en cambio y relaciones. En ella confluyen las seis capacidades matemáticas generales que se movilizan de manera sistémica con los conocimientos de patrones, ecuaciones e inecuaciones, relaciones y funciones para resolver situaciones problemáticas de la vida cotidiana.

Adaptación: Modelo de competencia matemática de Mogens Niss, 2011.

El estándar de aprendizaje que los estudiantes deben lograr al término del VII ciclo es:

Generaliza y verifica la regla de formación de progresiones geométricas, sucesiones crecientes y decrecientes con números racionales e irracionales, las utiliza para representar el cambio en los términos de la sucesión. Representa las condiciones planteadas en una situación mediante ecuaciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones lineales con una variable; usa identidades algebraicas y técnicas de simplificación, comprueba equivalencias y argumenta los procedimientos seguidos. Modela situaciones de cambio mediante funciones cuadráticas, las describe y representa con expresiones algebraicas, en tablas o en el plano cartesiano. Conjetura cuándo una relación entre dos magnitudes puede tener un comportamiento lineal o cuadrático; formula, comprueba y argumenta sus conclusiones (Mapa de Progreso de Matemática: Cambio y relaciones).

En este fascículo, un indicador se relaciona con más de una capacidad. Por lo tanto, para dar cuenta del logro de las capacidades matemáticas, se requiere hacer una lectura del conjunto de indicadores.

CAMBIO Y RELACIONES - VII CICLO

INDICADORES

CAPACIDADES GENERALES

	TERCERO GRADO DE SECUNDARIA	CUARTO GRADO DE SECUNDARIA	QUINTO GRADO DE SECUNDARIA
<p>Matematiza situaciones que involucran regularidades, equivalencias y cambios en diversos contextos.</p> <p>Representa situaciones de regularidades, equivalencias y cambios en diversos contextos.</p> <p>Comunica situaciones de regularidades, equivalencias y cambios en diversos contextos.</p>	<p>Construcción del significado y uso de sucesiones crecientes y decrecientes en situaciones problemáticas de regularidad</p> <ul style="list-style-type: none"> • Elabora modelos usando la progresión geométrica a partir de regularidades reales o simuladas. • Ordena datos en esquemas para organizar regularidades mediante progresiones geométricas. • Manifiesta acuerdos consensuados para resolución de problemas que implican progresiones geométricas con números racionales. • Utiliza expresiones algebraicas para determinar la suma de los términos de la progresión geométrica. • Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucran progresiones geométricas. • Verifica la regla de formación y la suma de los términos de progresiones geométricas con números racionales. <p>Construcción del significado y uso de ecuaciones cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales con dos variables en situaciones problemáticas de equivalencia</p> <ul style="list-style-type: none"> • Elabora modelos de situaciones reales o simuladas mediante ecuaciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. • Ordena datos en esquemas para establecer equivalencias mediante ecuaciones cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. • Ubica en el plano cartesiano el conjunto solución de ecuaciones cuadráticas. • Interviene y opina respecto al proceso de resolución de problemas que implican usar ecuaciones cuadráticas y sistema de ecuaciones lineales con dos variables. • Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucran ecuaciones cuadráticas y sistema de ecuaciones lineales con dos variables. 	<p>Construcción del significado y uso de sucesiones crecientes y decrecientes en situaciones problemáticas de regularidad</p> <ul style="list-style-type: none"> • Elabora modelos usando la progresión geométrica a partir de regularidades reales o simuladas. • Ordena datos en esquemas para organizar regularidades mediante progresiones geométricas. • Interviene y opina presentando ejemplos y contraejemplos sobre los resultados de un modelo de progresión geométrica. • Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucran progresiones geométricas. • Utiliza expresiones algebraicas para generalizar progresiones geométricas. • Verifica la regla de formación y la suma de los términos de progresiones geométricas con números reales. <p>Construcción del significado y uso de ecuaciones cuadráticas y sistema de ecuaciones lineales con tres variables en situaciones problemáticas de equivalencia</p> <ul style="list-style-type: none"> • Plantea modelos de situaciones reales o simuladas mediante ecuaciones cuadráticas con coeficientes racionales. • Modela situaciones de contextos reales o simulados mediante desigualdades cuadráticas con coeficientes reales. • Ordena datos en esquemas para establecer equivalencias mediante ecuaciones cuadráticas. • Ubica en la recta real el conjunto solución de ecuaciones cuadráticas. • Describe en forma oral o escrita las estrategias empleadas en la resolución de problemas que involucran ecuaciones cuadráticas y sistema de ecuaciones lineales con dos y tres incógnitas. 	<p>Construcción del significado y uso de sucesiones crecientes y decrecientes en situaciones problemáticas de regularidad</p> <ul style="list-style-type: none"> • Plantea modelos de una sucesión creciente o decreciente a partir de regularidades reales o simuladas. • Ordena datos en esquemas para organizar regularidades mediante sucesiones crecientes y decrecientes. • Interviene y opina presentando ejemplos y contraejemplos sobre los resultados de un modelo de sucesión creciente y decreciente. • Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucran sucesiones crecientes y decrecientes. • Utiliza expresiones algebraicas para generalizar sucesiones crecientes y decrecientes. • Justifica procedimientos y posibles resultados a partir de una regla que genera sucesiones crecientes y decrecientes con números reales. <p>Construcción del significado y uso de sistema de inecuaciones lineales con dos variables en situaciones problemáticas y de optimización</p> <ul style="list-style-type: none"> • Diseña modelos de situaciones reales o simuladas mediante sistemas de inecuaciones lineales de dos variables con coeficientes reales. • Elabora modelos de situaciones que requieren de optimización mediante el uso de la programación lineal. • Ordena datos en esquemas para establecer equivalencias mediante sistemas de inecuaciones lineales. • Grafica en el plano cartesiano las regiones que expresan todos los posibles valores que pueden asumir las variables de un sistema de inecuaciones. • Resume intervenciones respecto al proceso de resolución de problemas que implican usar métodos de optimización lineal.

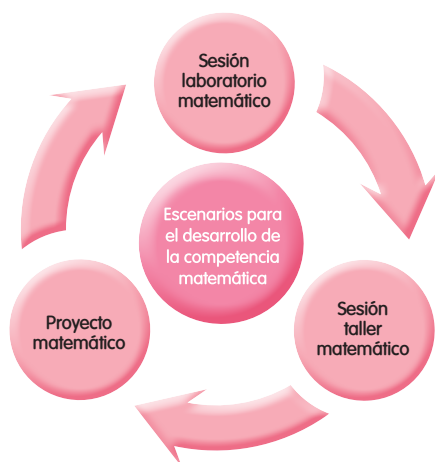
<p>Elabora estrategias haciendo uso de patrones, relaciones y funciones para resolver problemas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Emplea métodos de resolución (reducción, sustitución, gráfico, igualación) para resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. • Utiliza operaciones aditivas y multiplicativas de expresiones algebraicas para resolver situaciones problemáticas que impliquen sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. • Utiliza el sistema de coordenadas cartesianas para resolver problemas que impliquen sistemas de ecuaciones lineales de dos variables. • Utiliza factorización, productos y cocientes notables para simplificar expresiones algebraicas y comprobar equivalencias. • Justifica mediante procedimientos algebraicos o gráficos que la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, o sus expresiones equivalentes, modela una situación problemática dada. 	<ul style="list-style-type: none"> • Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucren inecuaciones cuadráticas y sistema de ecuaciones lineales con tres variables. • Emplea métodos de resolución (reducción, sustitución, gráfico, igualación) para resolver problemas que involucren sistema de ecuaciones lineales con tres variables. • Usa el método de intervalos y de puntos críticos para encontrar las soluciones de inecuaciones cuadráticas. • Utiliza gráficos de rectas en el sistema de coordenadas cartesianas para resolver problemas que impliquen sistema de ecuaciones lineales de tres variables. • Justifica mediante procedimientos gráficos o algebraicos que la inecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c < 0$, o sus expresiones equivalentes, modela la situación problemática dada. 	<ul style="list-style-type: none"> • Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. • Emplea métodos de resolución para resolver problemas que involucren sistemas de inecuaciones lineales con dos variables. • Utiliza el sistema de coordenadas cartesianas para resolver problemas que impliquen sistemas de inecuaciones lineales de tres variables. • Justifica mediante procedimientos gráficos o algebraicos el uso de métodos de optimización lineal de dos variables para resolver problemas.
<p>Utiliza expresiones simbólicas, técnicas y formales de patrones, relaciones y funciones en la resolución de problemas.</p>	<p>Construcción del significado y uso de funciones cuadráticas en situaciones problemáticas de cambio</p> <ul style="list-style-type: none"> • Elabora modelos a partir de situaciones de cambio usando las funciones cuadráticas con coeficientes naturales y enteros. • Ordena datos en esquemas para organizar situaciones de cambio mediante funciones cuadráticas. • Grafica en el plano cartesiano diversos valores a partir de la organización de datos para resolver problemas de cambio que impliquen funciones cuadráticas. • Interviene y opina respecto al proceso de resolución de problemas que impliquen usar funciones cuadráticas. 	<p>Construcción del significado y uso de funciones cuadráticas en situaciones problemáticas de cambio</p> <ul style="list-style-type: none"> • Diseña modelos de situaciones de cambio mediante funciones cuadráticas con coeficientes naturales y enteros. • Ordena datos en esquemas para organizar situaciones de cambio mediante funciones cuadráticas. • Describe procedimientos deductivos en la resolución de problemas que impliquen usar funciones cuadráticas • Grafica en el plano cartesiano diversos valores a partir de la organización de datos para resolver problemas de cambio que impliquen funciones cuadráticas. 	<p>Construcción del significado y uso de funciones problemáticas de cambio</p> <ul style="list-style-type: none"> • Diseña situaciones de cambio reales o simuladas mediante funciones exponenciales. • Grafica en el plano cartesiano diversos valores a partir de la organización de datos para resolver problemas de cambio que impliquen funciones exponenciales. • Ordena datos en esquemas para organizar situaciones de cambio mediante funciones exponenciales. • Resume intervenciones respecto al proceso de resolución de problemas que involucren modelos exponenciales.
<p>Argumenta el uso de patrones, relaciones y funciones para resolver problemas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucren funciones exponenciales. • Utiliza la gráfica de la función exponencial en el plano cartesiano para determinar las relaciones entre valores de variables de situaciones modeladas por esta función. • Justifica mediante procedimientos gráficos o algebraicos que la función exponencial de la forma $y = a^x$, o sus expresiones equivalentes, modelan la situación problemática dada. 	<ul style="list-style-type: none"> • Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucren funciones exponenciales. • Utiliza la gráfica de la función cuadrática para determinar los valores máximos y mínimos y los puntos de intersección con los ejes coordenados para determinar la solución de la ecuación cuadrática implicada en el problema. • Justifica mediante procedimientos gráficos o algebraicos que la función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, o sus expresiones equivalentes, modela la situación problemática dada. 	<ul style="list-style-type: none"> • Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucren funciones exponenciales. • Resume intervenciones respecto al proceso de resolución de problemas que involucren modelos exponenciales. • Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucren funciones exponenciales. • Utiliza la gráfica de la función exponencial en el plano cartesiano para determinar las relaciones entre valores de variables de situaciones modeladas por esta función. • Justifica mediante procedimientos gráficos o algebraicos que la función exponencial de la forma $y = a^x$, o sus expresiones equivalentes, modelan la situación problemática dada.

III. ¿Cómo podemos facilitar estos aprendizajes?

En esta sección desarrollaremos algunas actividades que nos ayudarán a mejorar nuestro trabajo como docentes para que nuestros estudiantes logren sus aprendizajes.

3.1 Desarrollando escenarios de aprendizaje

La competencia matemática de resolución de problemas se desarrolla mediante la movilización sistémica de capacidades, conocimientos y actitudes. Esta movilización es apropiada solo cuando está contextualizada. Por ello, se han seleccionado tres contextos o escenarios en los que comúnmente se organizan y desarrollan las actividades de aprendizaje. A estos escenarios los llamaremos: Sesión laboratorio matemático, Sesión taller matemático y Proyecto matemático.



Además de ser complementarios entre sí, una característica fundamental de estos escenarios es que deben recrear situaciones en las que la competencia matemática tenga sentido.

A continuación, describimos cada uno de estos escenarios de aprendizaje:

a) Sesión laboratorio matemático

Escenario donde el estudiante, a partir de actividades vivenciales, lúdicas y de experimentación, llega a construir conceptos y propiedades matemáticas. En este escenario el estudiante busca regularidades para generalizar el conocimiento matemático, profundiza o moviliza los conocimientos aprendidos o construye nuevos aprendizajes para resolver problemas.

b) Sesión taller matemático

Escenario donde el estudiante usa aquellos aprendizajes que ha ido desarrollando en un periodo de sesiones de aprendizaje. El estudiante despliega diversos recursos (técnicos, procedimentales y cognitivos) con la intención de resolver situaciones problemáticas usando diversas estrategias de solución.

c) Proyecto matemático

Escenario que tiene por finalidad contribuir con la solución de un problema social, económico, productivo o científico de interés de los estudiantes, de la institución educativa o de su comunidad. Para esto, requieren usar sus capacidades y conocimientos matemáticos. El producto es la contribución de la clase con la solución del problema.

3.2 Articulando la progresión del conocimiento matemático en el VII ciclo de la EBR

La competencia de resolución de problemas promueve el desarrollo de las capacidades y conocimientos matemáticos de número y sus operaciones. Los estudiantes adquieren y construyen estos conocimientos en forma progresiva. En primaria y en el primer grado de secundaria se enfatiza en los números naturales. En secundaria se inicia con el estudio de los números enteros y racionales, y se culmina con la construcción de los números reales. Por ello, en los espacios pedagógicos se establecen conexiones entre estos conocimientos.

Hoy estos conocimientos adquieren importancia debido a la gran cantidad de información que recibimos en tablas, expresiones porcentuales, infografías con datos numéricos, etc. Por ello, es significativo usar adecuadamente estos conocimientos matemáticos en diversos contextos. Por ejemplo, usar la notación científica de los números se realiza en mediciones de magnitudes grandes, como la menor distancia entre la Tierra y Marte (102×10^9 m) o magnitudes muy pequeñas, como las que se realizan en la nanotecnología cuando estudia partículas tan pequeñas como los átomos y moléculas (100×10^{-9} m).

De la misma manera los conocimientos de patrones, ecuaciones y funciones están mutuamente relacionados y son adquiridos en forma progresiva desde la infancia, donde se desarrollan las nociones básicas, y a través de los diferentes niveles de la Educación Básica.

DESARROLLO DE LOS CONOCIMIENTOS EN TORNO A NÚMERO Y OPERACIONES					
CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO Y USO DE CONOCIMIENTOS	CICLOS Y GRADOS	VI CICLO	VII CICLO		
		2.º	3.º	4.º	5.º
Porcentajes como la expresión de parte-todo					
Número racional como expresión fraccionaria, decimal y porcentual para expresar cantidades continuas y discretas					
Propiedades de los números racionales					
Potenciación con base fraccionaria y exponente entero					
Potenciación y radicación como operaciones inversas					
Operaciones con los números racionales					
Representación, comparación y orden en los números racionales a partir de cantidades continuas					
Irracionales en situaciones geométricas					
Irracionales en la recta numérica (recta real)					
Notación científica en situaciones de medición de longitud, masa y tiempo					
Notación científica en situaciones de medición de superficie y volumen					
Notación científica en situaciones que involucran magnitudes físicas y químicas					
Interés simple en contextos financieros					
Interés simple y compuesto en contextos financieros					
Densidad de los números reales					
Operaciones con números reales					
Relaciones entre los sistemas numéricos					
Complejidad de los números reales					

En el último grado de primaria y en los primeros años de secundaria, se enfatiza en el estudio de los patrones, y al finalizar la secundaria, se estudian sucesiones en los números reales. Las ecuaciones se estudian prioritariamente en los grados intermedios, mientras que las funciones se formalizan al finalizar el sexto ciclo y se profundizan en los últimos grados.

Todos estos conocimientos se aprenden usándose en la solución de situaciones problemáticas cercanas a la vida de los estudiantes, ya sean reales o simuladas.

A continuación, daremos una explicación de cómo progresan estos conocimientos en la Educación Básica Regular con la intención de mostrar el progreso que tienen los estudiantes en el desarrollo de su competencia matemática.

Uno de los temas centrales del estudio de la matemática se refiere a los patrones. Los estudiantes necesitan reconocer, describir y generalizar patrones. También requieren desarrollar capacidades para construir modelos matemáticos que simulen el comportamiento de los fenómenos del mundo real que muestren patrones observables. En los primeros años de su vida, los niños identifican patrones en movimientos, sonidos y formas. En sus primeras experiencias con su entorno, identifican patrones en objetos concretos y situaciones mediante la observación y la manipulación. Luego, al finalizar los estudios de la primaria y en la secundaria, usan la abstracción y

DESARROLLO DE LOS CONOCIMIENTOS EN TORNO A CAMBIO Y RELACIONES				
CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO Y USO DE CONOCIMIENTOS	CICLOS Y GRADOS	VI CICLO	VII CICLO	
		2.º	3.º	4.º
Patrones geométricos de traslación, rotación y reflexión				
La regla de formación de progresiones aritméticas y de la suma de los términos a partir de regularidades				
La regla de formación de progresiones geométricas y de la suma de los términos a partir de regularidades				
Modelos de una progresión geométrica				
Sucesiones crecientes y decrecientes				
Ecuaciones lineales en situaciones de equivalencia				
Inecuaciones lineales en situaciones de desigualdad				
Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables en situaciones de igualdad				
Ecuaciones cuadráticas en situaciones de igualdad y determinación de máximos y mínimos				
Sistemas de ecuaciones lineales con tres variables en situaciones de igualdad				
Inecuaciones cuadráticas en situaciones de desigualdad				
Sistema de inecuaciones con dos variables (programación lineal) en situaciones de optimización				
Situaciones de proporcionalidad directa e inversa				
Modelación de situaciones de cambio mediante la función lineal y lineal afín				
Modelación de situaciones de cambio mediante funciones cuadráticas				
Modelación de situaciones de cambio mediante funciones exponenciales				

comprenden regularidades en los conjuntos numéricos. Al iniciar sus estudios escolares, los estudiantes emplean tablas, gráficos y descripciones verbales para representar patrones. Los estudiantes comprueban cómo cambian los patrones en las actividades vivenciales y en las tareas propuestas. Esto facilita la comprensión del concepto de variable como una cantidad que cambia y que asume diferentes valores. Esta experiencia continúa hasta la educación secundaria; sin embargo, en este nivel los estudiantes llegan a generalizar y usar expresiones algebraicas de forma fluida.

Las igualdades y desigualdades es otro de los aprendizajes más importantes que necesitan construir los estudiantes en la Educación Básica. Los estudiantes buscan diferentes maneras de usar los números para expresar cantidades iguales o equivalentes y las relaciones entre estas. Las variables se introducen como cantidades desconocidas en las ecuaciones y se desarrollan técnicas para resolverlas. Desde los inicios de la escolaridad, los niños construyen nociones de equivalencia de expresiones aditivas. Al finalizar la educación primaria son capaces de representar las condiciones de una situación problemática mediante ecuaciones lineales. En los primeros grados de secundaria experimentan situaciones reales o simuladas para profundizar la comprensión de las igualdades y desigualdades. En los últimos grados formulan modelos mediante ecuaciones e inecuaciones cuadráticas y sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales para resolver situaciones problemáticas.

En cuanto a las relaciones y funciones, los estudiantes deben comprender, establecer y usar relaciones entre:

- a) cantidades y magnitudes,
- b) las formas de representación de estas relaciones y
- c) el análisis de las situaciones de cambio.

Estos tres aprendizajes están relacionados con los aprendizajes descritos anteriormente, los cuales les sirven de fundamento. Por ejemplo, tener experiencias sistemáticas con patrones ayuda a entender la idea de función. Y para resolver situaciones que implican funciones se necesita del manejo de ecuaciones para comprender las relaciones y hallar la solución.

Cuando los estudiantes entienden que pueden representar situaciones usando la matemática –ya sea en la educación inicial, primaria o los primeros grados de secundaria–, adquieren nociones elementales de la modelización matemática que llegan a formalizarse hacia los últimos grados de la secundaria.

3.3 Planificando nuestras unidades y sesiones considerando los indicadores propuestos

A continuación, presentamos un modelo para la organización de una unidad de aprendizaje y una sesión de aprendizaje, tomando como recurso la matriz de indicadores, correspondiente al cuarto grado de Secundaria.

Unidad de aprendizaje			
Capacidades generales	Indicadores	Escenarios y actividades	Tiempo
<ul style="list-style-type: none"> Matematiza situaciones de cambio en diversos contextos. Representa situaciones de cambio en diversos contextos. Comunica situaciones de cambio en diversos contextos. Elabora diversas estrategias para resolver problemas. Utiliza expresiones simbólicas y formales de relaciones y funciones para resolver problemas. Argumenta el uso de relaciones y funciones para resolver problemas de diversos contextos. 	<ul style="list-style-type: none"> Diseña modelos de situaciones de cambio usando funciones cuadráticas. Ordena datos en esquemas para resolver problemas de situaciones de cambio que implican funciones cuadráticas. Interviene y opina respecto al proceso de resolución de problemas que implican usar funciones cuadráticas. Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucran funciones cuadráticas. Establece relaciones de dependencia entre magnitudes para resolver problemas que involucran funciones cuadráticas. Justifica mediante ejemplos que la función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, o sus expresiones equivalentes, modela una situación problemática. Justifica mediante procedimientos gráficos que la función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, o sus expresiones equivalentes, modela la situación problemática dada. 	<p>Proyecto matemático: Funciones cuadráticas que abaratan costos de viaje de promoción.</p> <ul style="list-style-type: none"> Constituir ocho equipos de trabajo de cinco estudiantes para desarrollar las tareas por comisiones. Realizar el estudio de costos de pasajes para transportar a los estudiantes a la ciudad de Cusco, ida y vuelta. Evaluar todas las ofertas propuestas por las empresas de transporte con la finalidad de abaratar costos. Si amerita, proponer a la junta directiva de la otra promoción incluirlos en la excursión. En caso de aceptar la oferta de la empresa de transportes Cruz Azul, calcular el número de estudiantes adicionales que viajen con la promoción, de manera que no se supere el monto máximo asignado para solventar el costo de pasajes con el presupuesto a recaudarse. 	Sesión de 2 semanas
		<p>Sesión taller matemático Funciones cuadráticas que previenen el envenenamiento.</p>	Sesión de 90 minutos
		<p>Sesión laboratorio matemático Haciendo cohetes interestaciales.</p>	Dos sesiones de 90 minutos

Para la presentación de las actividades, es pertinente mostrarlas de forma global; deben permitir el aprendizaje autónomo de los estudiantes, evitando de esta forma un proceso rígido, secuencial y directivo en el desarrollo de los aprendizajes. Tales actividades son: de indagación y experimentación; de registro de experiencias, datos y prácticas; de reflexión, y de resolución de situaciones problemáticas.

Pudiéndose ser otras que el docente considere para el desarrollo de las capacidades y competencia matemática.

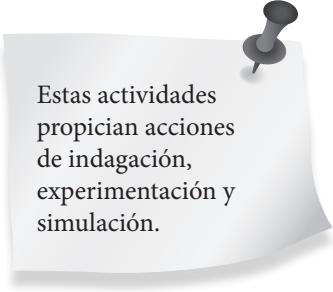
Sesión taller matemático

Sesión	Capacidades	Indicadores	Actividades de enseñanza y aprendizaje
Funciones cuadráticas que previenen el envenenamiento	<ul style="list-style-type: none"> • Matematiza situaciones de cambio en diversos contextos. • Representa situaciones de cambio en diversos contextos. • Comunica situaciones de cambio en diversos contextos. • Elabora diversas estrategias para resolver problemas. • Utiliza expresiones simbólicas y formales de relaciones y funciones para resolver problemas. • Argumenta el uso de relaciones y funciones para resolver problemas de diversos contextos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Elabora modelos de situaciones de cambio usando funciones cuadráticas. • Ordena datos en esquemas (tablas de doble entrada, plano cartesiano) para resolver problemas de situaciones de cambio que implican funciones cuadráticas. • Interviene y opina respecto al proceso de resolución de problemas que implican usar funciones cuadráticas. • Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucran funciones cuadráticas. • Establece relaciones de dependencia entre magnitudes para resolver problemas que involucran funciones cuadráticas. • Justifica mediante ejemplos que la función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, o sus expresiones equivalentes, modela una situación problemática. • Justifica mediante procedimientos gráficos que la función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, o sus expresiones equivalentes, modela la situación problemática dada. 	<ul style="list-style-type: none"> • Actividades para comprender el problema • Actividades para elaborar el plan • Actividades para ejecutar el plan • Actividades para la reflexión y metacognición

3.4 Reconociendo escenarios, herramientas y condiciones didácticas para desarrollar las capacidades matemáticas

A. MATEMATIZAR

Matematizar implica interpretar un problema definido en la realidad o parte de ella y transformarlo en una forma matemática, interpretar o evaluar un resultado o un modelo matemático en relación con el problema original. Se refiere también a tener la disposición de razonar matemáticamente para enfrentar una situación problemática y resolverla.



Estas actividades propician acciones de indagación, experimentación y simulación.

A continuación, proponemos actividades y características que favorecen la matematización.

Las actividades vivenciales del entorno

Son actividades en las que el estudiante entra en contacto directo con situaciones problemáticas reales del entorno. En ellas los estudiantes interpretan la realidad y le dan atributos matemáticos para atender esa problemática.

En el nivel secundario, los proyectos matemáticos son actividades vivenciales que expresan con más claridad la matematización. Algunos procesos característicos para matematizar en la escuela son:

- Realizar medidas.
- Elaborar diseños gráficos o informativos.
- Hacer sociodramas que recojan aspectos de la realidad.
- Planificar y desarrollar diseños de implicancia tecnológica.

Las actividades lúdicas

Consisten en producir resultados matemáticos a partir de retos y reglas de juego con los que se enfrenta el estudiante. Requieren analizar e interpretar el entorno y las condiciones en que se suscita el juego. Son características:

- Reconocer las condiciones del juego.
- Experimentar siguiendo las reglas del juego.
- Modificar las reglas de juego.
- Emplear estrategias que ayuden a ganar el juego.


Actividades apoyadas en esquemas gráficos respecto a la realidad

Hoy estamos rodeados de información que tiene expresiones simbólicas que se asocian de forma directa con aspectos de la realidad. Por ejemplo: un ícono puede hacer referencia a un hospital, una alerta, una condición, etc. Dar solución a problemas a partir de esta información requiere de habilidades para reconocer en ellos aspectos de implicancia matemática. Estos esquemas informativos lo podemos reconocer en:

- Recortes periodísticos.
- Afiches de promoción e infografías.
- Cuadros estadísticos, etc.

B. COMUNICAR

Desarrollar la capacidad de la comunicación matemática implica promover el diálogo, la discusión, la conciliación y la rectificación de ideas. Esto permite al estudiante familiarizarse con el uso de significados matemáticos e incluso con un vocabulario especializado. A continuación, presentamos un grupo de interrogantes a fin de promover espacios de discusión, de acuerdos, de rescatar errores y tomarlos como punto de debate. Asimismo, puede suscitar la participación de los estudiantes en sus grupos de trabajo y en las intervenciones personales.

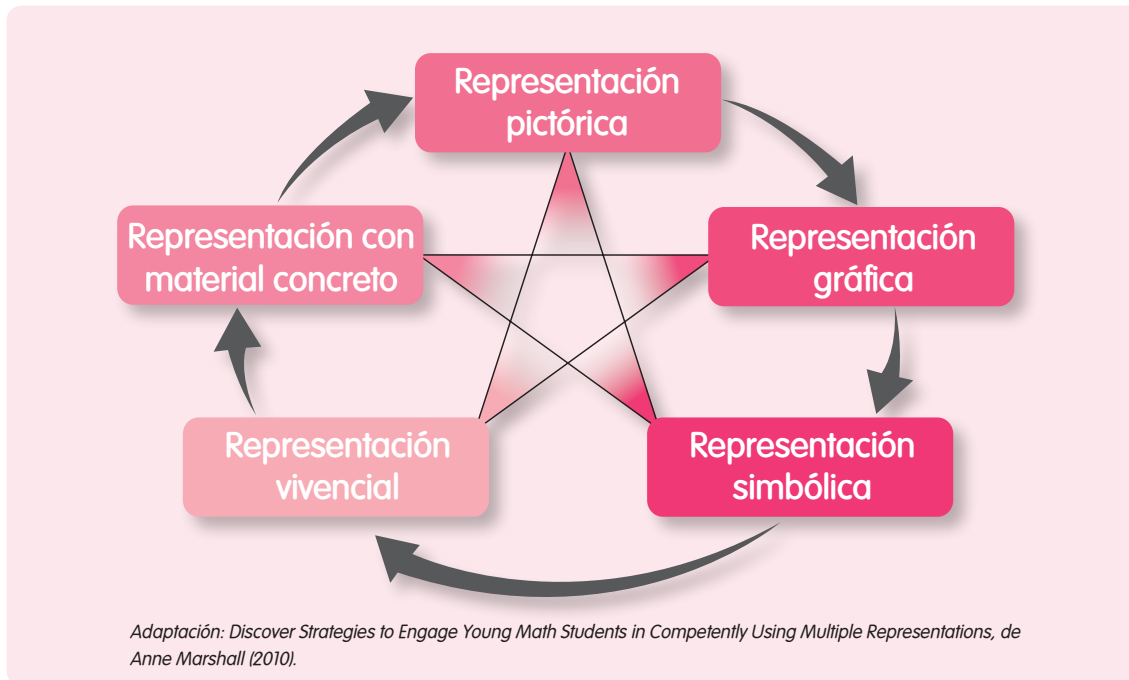


Es importante saber hacer preguntas a los estudiantes para ayudarlos a comprender el problema, trazar el plan para resolverlo y evaluar los resultados.

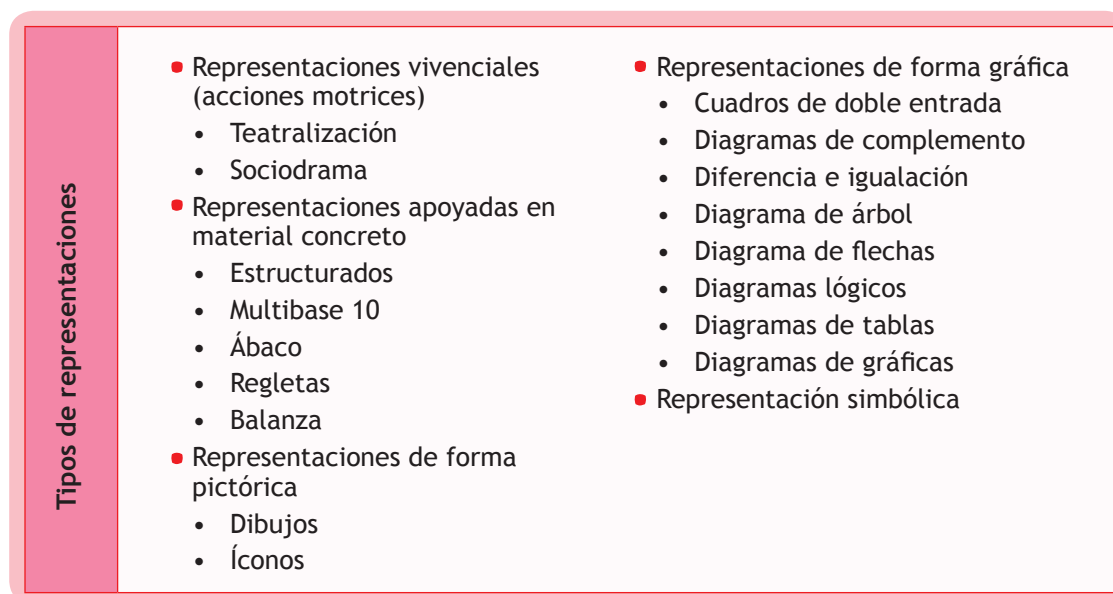
Situaciones para promover las interrogantes	Propuesta de interrogantes
<p>Fase: Comprender los problemas</p> <ul style="list-style-type: none"> • Orientada a promover que los estudiantes puedan movilizar sus aprendizajes, tomando conciencia de lo que ya saben por sí mismos. 	<p>Interrogantes para promover la comprensión del problema:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Interrogantes comparativas (¿en qué se parecen..., cuál es la diferencia?) • Interrogantes de causa-efecto (si modificamos el dato..., ¿qué ocurriría con...?) • Interrogantes de ‘debería’ (¿qué deberíamos hacer primero...?) • Interrogantes de ‘cómo’ (¿cómo procedería usted para desarrollar el problema...?)
<p>Fase: Trazar un plan y resolver el problema</p> <ul style="list-style-type: none"> • Promueve planteamientos y estrategias distintas para resolver problemas. • Considera el orden apropiado de las ideas • Desarrolla actividades de participación grupal. 	<p>Interrogantes para promover la resolución del problema:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Interrogantes de verificación (¿es el procedimiento adecuado?, ¿has realizado las operaciones adecuadas...?) <p>Interrogantes para promover la evaluación de resultados:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Interrogantes de verificación (¿es la respuesta correcta?)
<p>Fase: Evaluar resultados</p> <ul style="list-style-type: none"> • Expresa ideas tanto de los procesos como de los resultados. • Expresa satisfacción de lo experimentado. • Explica sus logros a partir de las actividades desarrolladas. 	<p>Interrogantes comparativas (¿en qué se parece este problema desarrollado a otros?)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Interrogantes de causa-efecto (supongamos que ahora los datos fueran..., ¿cómo afecta el problema?; si el procedimiento hubiese sido..., ¿qué resultados habríamos tenido?, etc.) • Interrogantes de ‘debería’ (cuando tenemos un problema de estas características, ¿qué deberíamos hacer primero?; cuando tenemos planteamientos gráficos, ¿qué deberíamos hacer?, etc.) • Interrogantes de ‘cómo’ (¿cómo procediste para resolver la situación planteada?, etc.) • Interrogantes de generalización (¿en qué situaciones es conveniente desarrollar estas estrategias de resolución?, ¿cuán importante es reconocer el planteamiento desarrollado?, etc.)

C. REPRESENTAR

La representación es un proceso y un producto que implica seleccionar, interpretar, traducir y usar una variedad de esquemas para expresar una situación, interactuar con el problema o presentar el resultado.



Para la construcción de los conocimientos matemáticos, es recomendable que los estudiantes realicen diversas representaciones, partiendo de aquellas vivenciales hasta llegar a las gráficas y simbólicas.



D. ELABORAR DIVERSAS ESTRATEGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Esta capacidad consiste en seleccionar o elaborar un plan o estrategia sobre cómo utilizar las matemáticas para resolver problemas de la vida cotidiana y cómo ir la implementando en el tiempo. Los saberes previos del estudiante de los primeros grados son limitados respecto al manejo de estrategias heurísticas, por lo que desde el aula debemos darle la oportunidad de apropiarse de variadas estrategias.

En la siguiente tabla se describen las estrategias que frecuentemente se elaboran en la resolución de problemas.

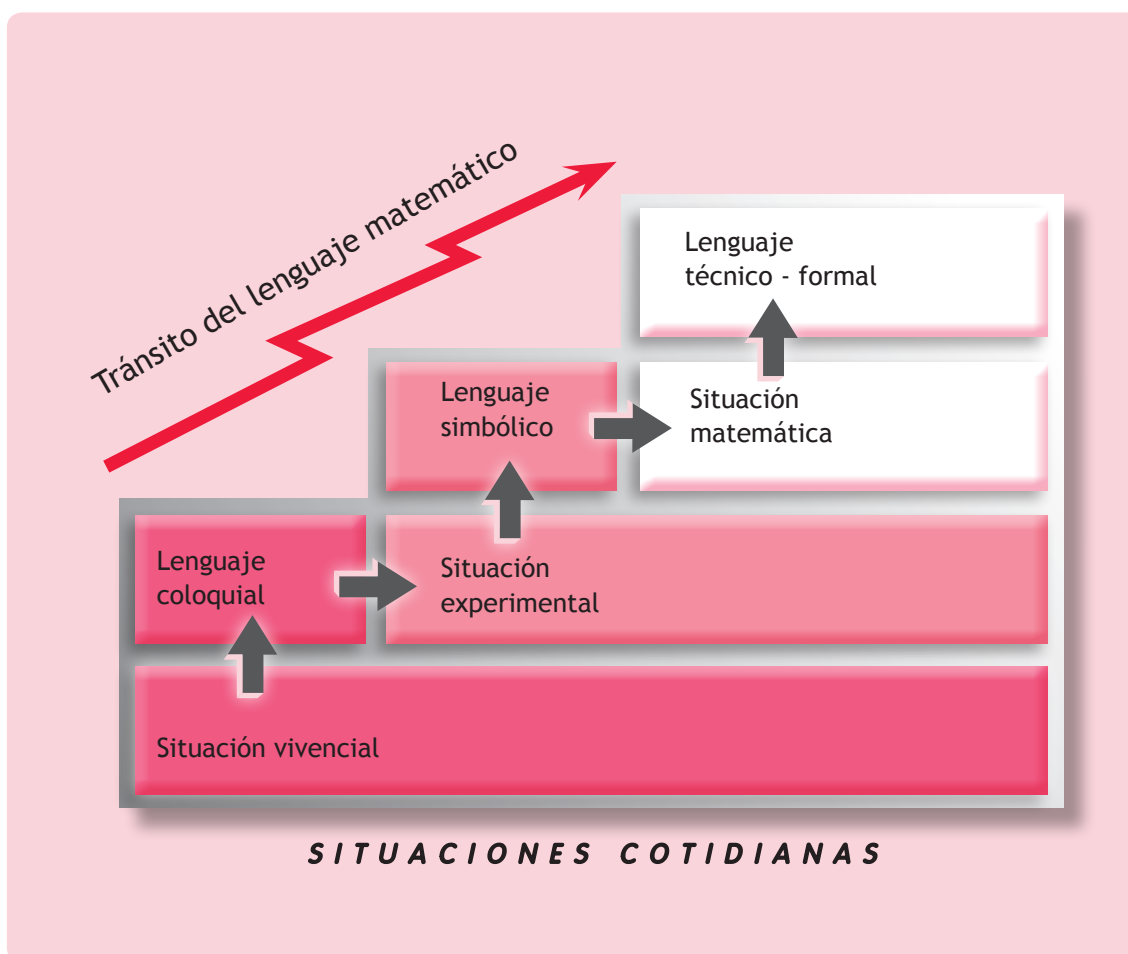
Estrategias heurísticas	
1. Ensayo-error	Tantear es una estrategia muy útil cuando se realiza de forma organizada y evaluando cada vez los ensayos que se hacen. En realidad, algunos métodos específicos de solución, como el de regulación o el de aproximaciones sucesivas, se basan en el uso sistemático de numerosos ensayos y sus respectivas correcciones. La idea es que cada rectificación conduzca a un ensayo que se acerque más a la respuesta.
2. Hacer una lista sistemática	En los casos en que requiere la enumeración de objetos matemáticos, es conveniente realizar un conteo o listado organizado, con el fin de no dejar de lado ninguna posibilidad. Esta estrategia es muy útil al buscar soluciones en una ecuación, para encontrar espacios muestrales o resolver problemas de permutaciones o combinaciones.
3. Empezar por el final	La estrategia de utilizar el pensamiento regresivo se utiliza mayormente en problemas en los cuales tenemos información de una situación final; también para demostrar desigualdades. La combinación de métodos progresivos y regresivos es una potencia técnica para demostrar teoremas.
4. Razonar lógicamente	El razonamiento lógico es muy importante al resolver problemas, pues gracias a él podemos engarzar los pasos y comprender las secuencias y cadenas de razonamiento que se producen en el desarrollo de su solución.
5. Particularizar	Conviene siempre utilizar casos particulares para familiarizarse con el problema. Así, es posible observar algún método que guíe hacia la solución de un problema genérico.
6. Generalizar	En algunos problemas puede ser muy útil simbolizar las expresiones o averiguar si lo que se pide se refiere a un caso particular de alguna propiedad general. A esto se le conoce como la paradoja del inventor. A veces es conveniente investigar más de lo que piden.
7. Buscar patrones	En algunos problemas es necesario experimentar con varios casos con el fin de encontrar pautas o regularidades que después se podrían emplear para llegar a la solución.
8. Plantear una ecuación	Lo primordial para poder aplicarla con éxito es el entrenamiento en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.
9. Resolver un problema semejante pero más simple	Algunas veces, utilizar un método que nos dio resultado con un problema más simple y relacionado con el que tenemos nos conduce a la solución del problema.

Fuente: Manual del docente, Resolvamos 1 y 2, Ministerio de Educación, 2012

E. UTILIZAR EXPRESIONES SIMBÓLICAS, TÉCNICAS Y FORMALES PARA RESOLVER PROBLEMAS

Implica comprender, interpretar, manipular y usar expresiones simbólicas (incluidas las expresiones y las operaciones aritméticas) que se rigen por reglas y convenciones matemáticas, dentro de un contexto matemático. Implica también usar algoritmos. Igualmente, abarca comprender y usar construcciones formales basadas en definiciones, normas y sistemas formales. Los símbolos, normas y sistemas utilizados pueden variar según qué conocimiento matemático particular es necesario para una tarea específica, con la finalidad de formular, resolver e interpretar la matemática.

El uso de las expresiones y símbolos matemáticos ayuda a comprender las ideas matemáticas; sin embargo, estas expresiones no son fáciles de generar debido a la complejidad de los procesos de simbolización. En el desarrollo de los aprendizajes, los estudiantes requieren previamente vivir experiencias y realizar inducciones usando lenguajes que vayan de lo coloquial a lo simbólico, transformándose posteriormente en un lenguaje técnico y formal, que se da con cierta intensidad y énfasis.



F. ARGUMENTAR

La actividad matemática involucra emplear objetos, procedimientos y conceptos matemáticos. Los procesos del pensamiento lógico dan sentido a una situación y determinan, por aproximaciones sucesivas, llegar a la situación óptima.

Argumentar implica varias acciones: cuestionarse sobre cómo conectar diferentes partes de la información para llegar a una solución, analizar la información para crear un argumento de varios pasos, establecer vínculos o respetar restricciones entre diferentes variables, reflexionar sobre las fuentes de información relacionadas o hacer generalizaciones y combinar múltiples elementos de información.

Se reconocen cinco escenarios que propician formas de razonamiento y argumentación:

Estrategias	Características
Escenarios de exposición	Una manera eficaz de estructurar los conocimientos para una exposición o discusión son los organizadores visuales.
Escenarios de discusión	
Escenarios de indagación	Plantear interrogantes, seguido tentativamente de respuestas, implica establecer conjeturas para su posterior validez (justificación) a partir de procedimientos: <ul style="list-style-type: none">• Experimentales.• Formulación de contraejemplos.
Escenarios que promueven prácticas inductivas	Propician una serie de situaciones representativas para establecer relaciones de generalización o particularización. Pueden ser: <ul style="list-style-type: none">• Estudios de casos.• Modelos que posibilitan visualizar lo que no podemos observar directamente.• Simulaciones como formas de ejemplificar.
Escenarios integrativos	Gran parte de los conocimientos matemáticos están organizados de forma integral: se combinan hechos, procedimientos, formas de representación, conceptos y relaciones entre ellos. Una actividad propia de este desarrollo son los mapas mentales

3.5 Promoviendo tareas matemáticas articuladas

Un factor muy importante para el aprendizaje de las matemáticas son las situaciones en que el estudiante se enfrenta a problemas. Por ello, es importante generar situaciones desafiantes que vayan creciendo en complejidad y estén de acuerdo con conocimientos y experiencias previas de los estudiantes.

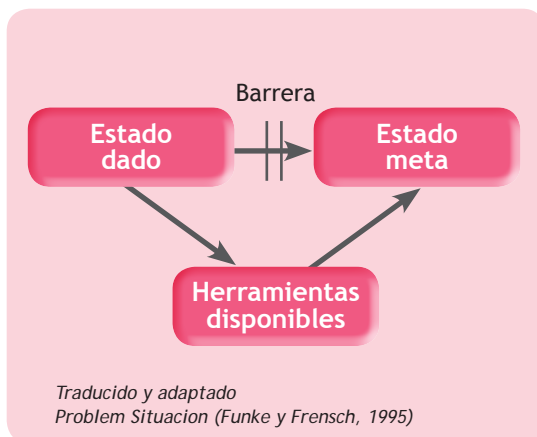
Para cada espacio de aprendizaje, se deben plantear tareas matemáticas que requieran usar diversas capacidades y conocimientos matemáticos. Estamos denominando 'tareas' a cada una de las actividades que proponemos al estudiante en la clase; no a las 'tareas para la casa' ni a las 'tareas para el cuaderno'.

A continuación, presentamos diversos tipos de tareas matemáticas que necesitan usar diversas capacidades y conocimientos de los estudiantes.

Estrategias	Características
De relaciones entre datos	Este tipo de tareas busca establecer una relación o vínculo entre dos o más objetos, procedimientos y conceptos matemáticos, que expresan alguna interacción entre ellos.
De complementación de datos	Consiste en reconocer uno o varios datos, conceptos, procedimientos y objetos matemáticos que no están en un planteamiento original.
De interrogantes para respuestas abiertas	Son aquellas orientadas a recibir respuestas amplias y variadas, destinadas a reconocer apreciaciones y formas de razonar, de argumentar y de proceder según la actividad matemática.
De interrogantes para respuestas cerradas	Buscan reconocer respuestas puntuales, concretas y específicas respecto al dominio de un conocimiento o la espera de una respuesta específica en la resolución de problemas.
De desarrollo de problemas reproductivos y algorítmicos	Promueven planteamientos que se orientan a reproducir conocimientos específicos desarrollados y formas de proceder algorítmicas (es decir, conocer el procedimiento de solución de un problema).
De desarrollo de estrategias heurísticas de resolución	Estas tareas promueven planteamientos que se orientan a niveles profundos de la comprensión de conceptos matemáticos. Usualmente, tienen múltiples formas de representación que involucran un desarrollo flexible de ellas.

3.6 Resolviendo problemas

Un problema existe cuando una persona tiene una meta y no sabe cómo alcanzarla (Duncker, 1945). Esta definición se esquematiza en la siguiente figura:



‘El estado dado’ es el conocimiento que la persona tiene sobre el problema al principio. Los operadores son las acciones posibles de realizar para alcanzar ‘el estado meta’ que es el objetivo deseado con la ayuda de las herramientas disponibles. Las barreras pueden ser la carencia del conocimiento o de las estrategias que dificultan o impiden alcanzar la meta. Superar las barreras puede implicar no solo la cognición, sino también la motivación y el estado afectivo¹.

¿Cómo diferenciar un problema de un ejercicio?

Un problema exige movilizar varias capacidades matemáticas para realizar una serie de tareas que nos permitan encontrar una respuesta o solución a la situación planteada.

Un ejercicio consiste en desarrollar tareas matemáticas, fundamentalmente las vinculadas al desarrollo de operaciones. Muchas veces, estas tareas tienen la característica de ser sencillas y de repetición, por lo cual las llamamos ‘tareas rutinarias’.

Para reconocer cómo diferenciar un problema de un ejercicio, veamos algunas características de las actividades que realizan nuestros estudiantes:

a) Acciones del estudiante

El ejercicio es una actividad simple y reproductiva, implica realizar una acción en la cual basta que se apliquen, en forma algorítmica, los conocimientos ya adquiridos.

En un problema es necesario que el estudiante dedique un tiempo a la comprensión de la situación, diseñe estrategias, las desarrolle y evalúe sus resultados y consecuencias.

b) Cantidad y calidad

Existe la creencia de que un estudiante eficiente en la resolución de problemas desarrolla y resuelve gran cantidad de ejercicios: mientras más ejercicios desarrolle, será mejor resolviendo problemas. Este pensamiento es impreciso.

¹ Peter Frensch, 1995; Joaquim Funke, 2010.

Las investigaciones demuestran que los buenos resolutores de problemas invierten más tiempo en dos procesos: la comprensión y la metacognición o evaluación de sus resultados. Esto implica reconocer que resolver un problema con calidad requiere más tiempo.

d) Desarrollo de capacidades

Un ejercicio tiene por objetivo que el estudiante replique conocimientos aprendidos. En cambio, un problema es un reto para el estudiante, promueve la investigación, la experimentación, la búsqueda de regularidades y el desarrollo de estrategias de resolución.

e) Desarrollo de cualidades personales

Un ejercicio implica reproducir conocimientos, procedimientos, técnicas y métodos dentro de rutinas establecidas, lo que puede generar que el estudiante actúe automáticamente, sin dar significatividad al desarrollo.

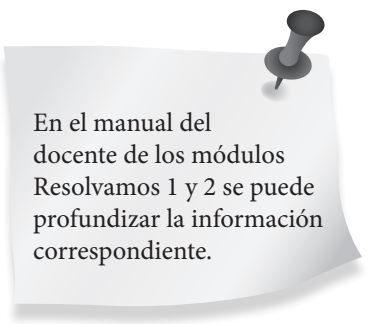
Una situación problemática, por el contrario, despierta una fuerte carga de participación del estudiante por querer resolver el problema. En ella moviliza experiencias previas y conocimientos adquiridos, hace supuestos, traza planes y, por último, siente la satisfacción de haber solucionado el problema.

3.7 Fases de la resolución de problemas

En la resolución de problemas existen varios esquemas que presentan el orden más adecuado para situaciones novedosas. A continuación, presentamos el esquema propuesto por George Pólya (1945), que describe las actividades fundamentales que se realizan en el proceso de resolución de cualquier problema matemático en general. Este esquema muestra cuatro pasos para resolver el problema: comprender, diseñar una estrategia, ejecutar el plan y desarrollar una visión estratégica.

A la nomenclatura formal de cada fase se ha propuesto un nombre coloquial, de manera que facilite su comprensión:

Modelo teórico	Para los estudiantes
Comprender el problema	Antes de hacer, vamos a entender
Búsqueda de estrategias y elaboración de un plan	Elaboramos un plan de acción
Ejecutar el plan	Desarrollamos el plan
Desarrollar una visión estratégica	Le sacamos el jugo a la experiencia




En el manual del docente de los módulos Resolvamos 1 y 2 se puede profundizar la información correspondiente.

3.8 Promoviendo el trabajo cooperativo

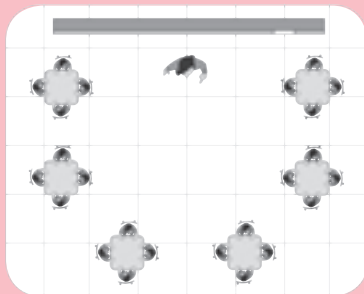
El trabajo en equipo permite intercambiar opiniones entre estudiantes, impulsa el planteamiento de distintas estrategias de resolución y puede ayudar a comprender mejor el problema.

Respecto a las diversas propuestas dinámicas de trabajo cooperativo en la enseñanza y el aprendizaje, se recomienda revisar el documento *Orientaciones para el Trabajo Pedagógico del Área de Matemática* (MED, 2010). A continuación presentamos planes de organización que podrían acompañar tales dinámicas:



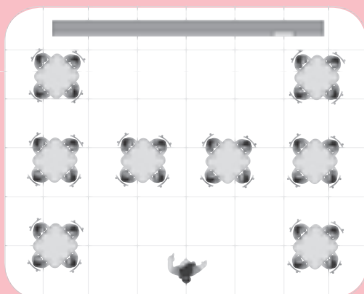
El número de integrantes en los trabajos de grupo depende del criterio del docente; sin embargo, lo conveniente es un promedio de tres o cuatro integrantes.

a) Trabajo simultáneo con equipos



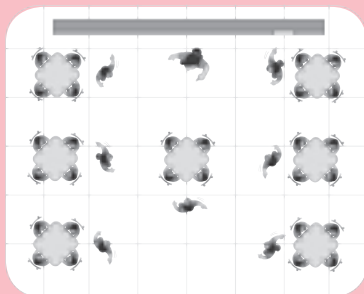
En este esquema de organización, el docente asume un rol mediador con todos los equipos de trabajo; asimismo, permite que los estudiantes intercambien ideas entre los grupos.

b) Trabajo diferenciado con equipos



En esta organización, el docente focaliza el trabajo mediador en el grupo que lo considere necesario; asimismo, deja en libertad a los otros grupos en el desarrollo de la resolución de problemas.

c) Trabajo diferenciado con monitores de equipo



En esta organización, el docente delega el liderazgo a un monitor responsable por cada grupo de trabajo. Los monitores tienen el rol de dirigir y orientar el proceso de la resolución de problemas, en el cual participan todos los integrantes.

IV. ¿Cómo desarrollamos escenarios de aprendizaje respecto al número real?

Hemos reconocido los escenarios de aprendizaje, la progresión de los conocimientos matemáticos, las orientaciones para desarrollar las capacidades matemáticas, la promoción de tareas matemáticas y la resolución de problemas.

A continuación, mostraremos situaciones que permiten integrar los temas que hemos abordado: se desarrollan las situaciones de un proyecto, de un laboratorio y de un taller de matemática.



Recuerda:

El concepto de 'número real' involucra dos procesos de representación claves para su desarrollo, significado y uso. Estos son las notaciones numéricas y los modelos geométricos, y entre ellos se establecen conexiones y relaciones que se dan de forma complementaria y progresiva.

En el estudio de los números reales es preciso afianzar la notación decimal de los números reales, su orden y densidad por medio de la expresión decimal y fraccionaria, realizar aproximaciones con números decimales, establecer la correspondencia entre el número real y la recta numérica, así como realizar medidas de longitudes.

Para ello, es importante mostrar un desarrollo en la comprensión de este campo numérico a partir de situaciones vivenciales, para luego ir formalizando y constituyéndolo como un aspecto que moviliza la competencia matemática en los estudiantes, en los diversos escenarios de la vida cotidiana.

Sesión laboratorio matemático:
Intervalos que sí cuentan

Sesión laboratorio matemático:
Haciendo operaciones con intervalos

Proyecto matemático:
Cómo ser un comprador informado

Sesión taller matemático:
Intervalos y sus operaciones

4.1 Algunas situaciones de aprendizaje

Situación 1

Sesión laboratorio matemático:

Intervalos que sí cuentan

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA	
En un aula de tercer grado de Secundaria de la IE Fidel Olivas, el profesor busca representar las estaturas de todos sus estudiantes de una forma simple. ¿Cómo podemos representar la estatura de un estudiante del aula?	
Indicadores	Contexto Social
<ul style="list-style-type: none"> Describe situaciones de medidas en diversos contextos para expresar números racionales en su notación decimal, científica e intervalos. Ordena datos en esquemas de organización que representan los números racionales y sus operaciones con intervalos. Aplica variadas estrategias con números racionales, intervalos y proporciones de hasta dos magnitudes e interés compuesto. Usa los símbolos de $=$, $>$, $<$, \leq, \geq, para comparar y ordenar dos o más cantidades. Explica la existencia de los números irracionales como decimales no periódicos a partir de situaciones de medidas de longitudes y áreas de algunas figuras geométricas planas. 	Áreas afines
	<ul style="list-style-type: none"> Ciencia, Tecnología y Ambiente
Conocimiento	Grado
<ul style="list-style-type: none"> Representación de intervalos de números reales Operaciones con intervalos de números reales 	3.º de Secundaria
¿Cuándo hacerla?	
<ul style="list-style-type: none"> Después de ordenar y comparar números reales 	
Sirve para:	
<ul style="list-style-type: none"> Representar, mediante diversas formas, subconjuntos de números reales. Resolver situaciones contextualizadas aplicando operaciones con intervalos. 	
¿Qué necesitas?	
<ul style="list-style-type: none"> Regla Texto del grado 	
Conocimientos previos	
<ul style="list-style-type: none"> Orden y comparación de números racionales e irracionales 	



Importante

Para ampliar estudios respecto al número real, se recomienda visitar:

Aspectos metodológicos en el aprendizaje de los sistemas de números naturales, enteros, racionales y reales en secundaria

http://sistemas02.minedu.gob.pe/archivosdes/fasc_mat/04_mat_d_s2_f1.pdf
[du.gob.pe/archivosdes/fasc_mat/04_mat_d_s3_f3.pdf](http://sistemas02.minedu.gob.pe/archivosdes/fasc_mat/04_mat_d_s3_f3.pdf)

Actividad N.º 1

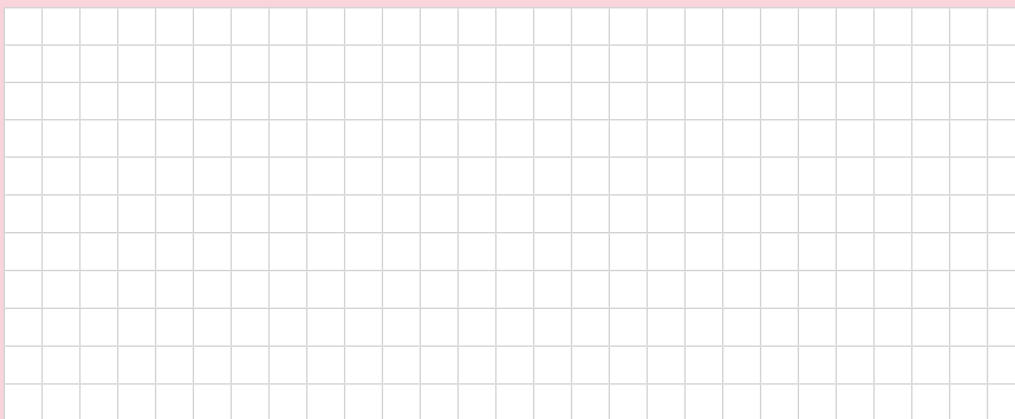


En pareja

1. En un aula de tercer grado de Secundaria de la IE Fidel Olivas, el docente busca representar las estaturas de todos sus estudiantes de una forma simple. A continuación, presentamos el cuadro con las tallas obtenidas.

Estudiante	Estatura
Acosta, Alonso	1,42 m
Aranda, Rocío	1,37 m
Arias, Jean	1,56 m
Barrenechea, Renato	1,67 m
Cermeño, José	1,55 m
Checa, Fernanda	1,51 m
Cruz, Eduardo	1,48 m
Donayre, Alexandra	1,57 m
García, Fredy	1,68 m
Huerta, José	1,35 m
Iribarren, Arturo	1,45 m
Jaramillo, Jessica	1,45 m

2. Usando la cinta métrica, marquen las medidas de las estaturas encontradas.
3. Usando una hoja milimetrada o cuadriculada, representen la estatura de cada estudiante.



4. A partir de las gráficas realizadas, expliquen cómo procederían para indicar la estatura mayor y la menor.



En pareja

5. El profesor plantea las siguientes interrogantes:

Entre los estudiantes, ¿quién o quiénes tienen una estatura...?	Nombre de estudiantes
mayor que 1,37 y menor que 1,45 m	
menor que 1,56 y mayor que 1,42 m	
mayor que 1,54 m	
mayor o igual que 1,48 y menor que 1,50 m	
mayor o igual que 1,35 y menor o igual que 1,55 m	
mayor que 1,37 y menor que 1,42 m	

6. Alonso plantea lo siguiente: si incorporamos a más estudiantes en la tabla, no será posible expresar estaturas entre 1,55 y 1,56 cm, debido a que son números consecutivos. ¿Este razonamiento es cierto? Justifiquen su respuesta usando la recta numérica.

7. El profesor observa la justificación de sus estudiantes y les plantea un reto. ¿Cómo usando la recta numérica se puede representar lo desarrollado anteriormente?

Expresión literal	Expresión en la recta numérica
mayor que 1,37 y menor que 1,45 m	
mayor que 1,54 m	
mayor o igual que 1,48 y menor que 1,50 m	
mayor o igual que 1,35 y menor o igual que 1,55 m	
menor que 1,56 y mayor que 1,42 m	
mayor que 1,37 y menor que 1,42 m	

Actividad N.º 2

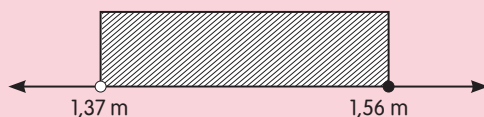
Reflexionen y respondan



En pareja

Entre dos puntos de la recta numérica correspondientes a dos números reales diferentes, existen números reales que tienen la característica de ser infinitos (recuerden lo que encontraron en la tarea n.º 7 de la actividad anterior). Esto hace que pensemos en subconjuntos de \mathbb{R} que en adelante llamaremos intervalos.

Podemos representar, por ejemplo, el intervalo de números reales comprendidos entre -5 y $+1$, incluidos estos extremos. A continuación, para desarrollar las preguntas 1 y 2, debemos considerar lo siguiente:



Cuando decimos que es mayor que $1,37$ m, el subconjunto de los reales expresado en el intervalo no considera dicho número.

Cuando decimos que es menor o igual a $1,56$ m, el subconjunto de los reales expresado en el intervalo considera dicho número.

Nota: Ver texto de tercer grado de Secundaria, pág. 21.

1. ¿Cómo expresarían mediante intervalos usando la representación gráfica?

Expresión literal	Representación gráfica con intervalos
mayor que $1,37$ y menor que $1,45$ m	
mayor que $1,54$ m	
mayor o igual que $1,48$ y menor que $1,50$ m	
mayor o igual que $1,35$ y menor o igual que $1,55$ m	
menor que $1,56$ y mayor que $1,42$ m	
mayor que $1,37$ y menor que $1,42$ m	

2. ¿Cómo expresarían mediante intervalos usando la representación simbólica?

Expresión literal	Representación simbólica con intervalos
mayor que $1,37$ y menor que $1,45$ m	
mayor que $1,54$ m	
mayor o igual que $1,48$ y menor que $1,50$ m	
mayor o igual que $1,35$ y menor o igual que $1,55$ m	
menor que $1,56$ y mayor que $1,42$ m	
mayor que $1,37$ y menor que $1,42$ m	

Actividad N.º 3

Reflexionen y respondan



En grupo

1. Expresen mediante intervalos la altura máxima y mínima de la tabla de datos respecto a la altura de los estudiantes.

Estudiantes	Talla
Justiniano, Antonio	1,45 m
Laguna, Alexander	1,43 m
Mejía, Luis	1,59 m
Mercado, Rebeca	1,69 m
Molina, Esmeralda	1,52 m
Palacios, Eduardo	1,59 m
Príncipe, Joseph	1,63 m
Quintana, Alejandra	1,57 m
Quispe, Fredy	1,67 m
Tarazona, Fernanda	1,49 m
Valdez, Miranda	1,39 m
Venegas, Belén	1,45 m

2. Daniel ha comprado un CD de música y Karla le pregunta ¿cuánto dura una canción? Él expresa que una canción dura entre 3 y 5 minutos. ¿Cómo lo representarían en intervalos?
3. En un centro de salud, de todos los niños que se atendieron el jueves, resultó que la mayor temperatura registrada fue de $40,8^{\circ}\text{C}$ y la menor temperatura, $36,1^{\circ}\text{C}$. Expresen de tres maneras distintas las temperaturas de cualquier niño atendido ese día.

En estas actividades, los estudiantes parten de una situación problemática: ellos expresan las medidas presentadas en una línea recta, las interrogantes los van orientando a responder con la representación gráfica que han elaborado. El objetivo es que los estudiantes adquieran la noción del intervalo a partir de la actividad de experimentación, para pasar de expresar de forma coloquial a formalizar la presentación de los intervalos. Asimismo, esto implica que ellos desarrollen estrategias de solución de problemas asociadas a este tipo de conocimiento. La primera actividad puede plantearse en una variante, los estudiantes pueden empezar haciendo un cuadro de datos de las estaturas del mismo grado o grupo de estudiantes.

Situación 2

Sesión laboratorio matemático:

Haciendo operaciones con intervalos

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

El supervisor de una fábrica de chocolates comunica el tiempo (en horas) que tarda la producción de dos lotes, para lo cual utiliza la expresión simbólica de intervalos.

$$\text{Lote 1: } I_1 = [3,5;5[$$

$$\text{Lote 2: } I_2 = [2,5;4,5[$$

¿Cómo expresarían el tiempo que tardaría la producción del lote 1 o del lote 2? (Texto de Secundaria, tercer grado, pág. 22)

Indicadores

- Aplica operaciones con intervalos para resolver situaciones en contextos diversos.
- Formula estrategias de estimación de medidas o cantidades para ordenar números irracionales en la recta real.
- Ordena datos en esquemas de organización que representan los números racionales y sus operaciones con intervalos.
- Usa los símbolos de $=$, $>$, $<$, \leq , \geq , para comparar y ordenar dos o más cantidades.
- Usa los símbolos de intervalos, como corchetes, desigualdades o gráficas sobre la recta, para resolver operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento de conjuntos de números reales.
- Justifica el uso de las operaciones con racionales expresados en notaciones fraccionarias, decimales para resolver situaciones de contextos variados.

Contexto

Personal y social

Áreas afines

- Educación para el Trabajo
- Historia, Geografía y Economía

Conocimiento

- Representación de intervalos de números reales
- Operaciones con intervalos de números reales

Grado

3.º de Secundaria

¿Cómo hacerla?

Después de ordenar y comparar números reales

Tiempo

90 minutos

Sirve para:

- Representar, mediante diversas formas, subconjuntos de números reales.
- Resolver situaciones contextualizadas aplicando operaciones con intervalos.

¿Qué necesitas?

- Regla
- Texto del grado

Conocimientos previos

- Orden y comparación de números racionales e irracionales

Actividad N.º 1



En pareja

A continuación, trabajaremos con materiales concretos, para lo cual necesitan:

- Hojas cuadriculadas
- Regla
- Tijera
- Tiras de papel celofán de color amarillo y azul y otros parecidos

El supervisor de una fábrica de chocolates expresó el tiempo (en horas) que tarda la producción de dos lotes, mediante los intervalos:

$$\text{Lote 01: } I_1 = [3,5;5[$$

$$\text{Lote 02: } I_2 = [2,5;4,5[$$

¿Cómo expresarían el tiempo que tardaría la producción del lote 1 o del lote 2?

1. Usando una recta numérica, peguen encima de ella una tira de papel celofán que exprese el intervalo del lote 1. Repitan similar situación para el lote 2. Nota: dibujen las características de representación de los intervalos en los extremos de las tiras (se colorea, según sea el caso, el interior de los círculos para expresar intervalos abiertos o cerrados).
2. Dibujen el procedimiento que realizaron.
3. ¿Qué subconjunto representa la tira del celofán amarillo?
4. ¿Qué subconjunto representa la tira del celofán azul?
5. ¿Qué subconjunto representa la tira del celofán verde (resultado de los dos colores)?
6. ¿Cómo expresarían el tiempo que tardaría la producción del lote 1 o del lote 2? Justifiquen su respuesta usando las tiras de celofán.

Actividad N.º 2

Reflexionen y respondan

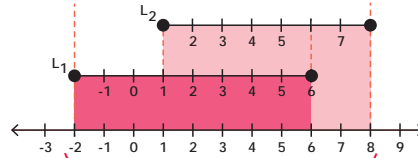
Con los intervalos se realizan diversas operaciones, como:



En grupo

Unión de intervalos:

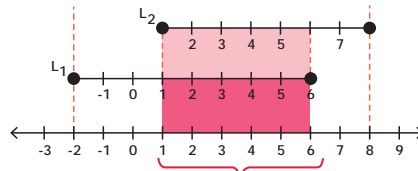
La unión de dos intervalos $L_1 = [-2; 6]$ y $L_2 = [1; 8]$ es el conjunto de números reales que pertenecen al menos a uno de los dos intervalos.



$$L_1 \cup L_2 = [-2; 6] \cup [1; 8] = [-2; 8]$$

Intersección de intervalos:

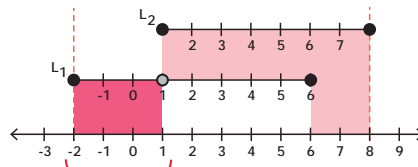
La intersección de dos intervalos es el conjunto de los números reales que pertenecen a la vez a los dos intervalos.



$$L_1 \cap L_2 = [-2; 6] \cap [1; 8] = [1; 6]$$

Diferencia de intervalos:

La diferencia del intervalo L_1 y L_2 es el conjunto de los números reales que pertenecen al intervalo L_1 y no pertenecen al intervalo L_2 .



$$L_1 - L_2 = [-2; 6] - [1; 8] = [-2; 1[$$

Completen la información a partir de la experiencia realizada.

Operaciones de	Color que expresan	Expresión gráfica	Expresión simbólica
Unión			
Intersección			
Diferencia			

Usar como materiales de consulta y apoyo para desarrollar los aprendizajes en el estudiante los textos distribuidos por el Ministerio de Educación en el 2012. (Por ejemplo, ver el libro de tercer grado, pág. 23).

Actividad N.º 3

Para usar expresiones simbólicas



En pareja

Representen en sus cuadernos, en forma gráfica y usando colores, las siguientes operaciones con intervalos:

1. $(3, 9) \cup [2, \infty)$
2. $(-\infty, -4) \cup [3, \infty)$
3. $(-6, 7) \cup [7, \infty)$
4. $[-3, 7) \cap [7, 12)$
5. $(-\infty, 1] \cap [-1, \infty)$
6. $(-8, 4] \cap [5, 13)$
7. $[-3, 9) - [7, 10)$
8. $(-\infty, -1] - [-5, \infty)$
9. $(-8, 4] - [2, 11]$

Actividad N.º 4



En pareja

1. El supervisor de una tienda de golosinas realiza su inventario el 20 de diciembre del 2012. Observa que en el ingreso de productos hay un lote de 200 cajas de galletas que tienen fecha de fabricación 1 de noviembre del 2012 y vencimiento 1 de febrero del 2013. Además, observa que hay un segundo lote de 300 cajas del mismo producto que tiene fecha de fabricación 15 de noviembre del 2012 y fecha de vencimiento 15 de febrero del 2013.

Utilicen la gráfica de intervalos en una recta para representar las fechas de fabricación y vencimiento de cada lote, y respondan a las siguientes preguntas:

- 1) ¿Entre qué fechas podrá vender galletas de los dos lotes?
 - 2) ¿En qué fechas ha vendido o venderá solo galletas del primer lote?
 - 3) ¿En qué fechas podrá vender solo galletas del segundo lote?
2. En una avenida que atraviesa tres distritos y que tiene 52 cuadras de largo, dos de los distritos han acordado colocar luminarias tipo colonial desde el inicio hasta el final de la cuadra 32. Pero uno de los anteriores con el tercer distrito han acordado construir una ciclovía desde el inicio de la cuadra 23 hasta finalizar la cuadra 52. Utilizando las representaciones de intervalos, realicen lo siguiente:
 - 1) Expresen las cuadras que solo tienen luminarias.
 - 2) Expresen las cuadras que tendrán luminarias y ciclovía.
 - 3) Expresen las cuadras que tendrán solo ciclovía.

En estas actividades, los estudiantes parten de trabajar con material concreto, reconocen el nuevo color que se genera a partir de la intersección de las tiras de colores. En la realización posterior de las tareas, van desarrollando sus capacidades en torno a resolver el problema, lo que los lleva a atribuir el significado de las operaciones con intervalos como resultado de la unión, intersección y diferencia. El objetivo no es que el estudiante acabe por realizar procesos netamente matemáticos; por el contrario, es importante que el estudiante resuelva problemas que requieren una interpretación adecuada a diversos tipos de problemas.

Situación 3

Proyecto matemático

Cómo ser un comprador informado

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

En muchas ocasiones tomamos la decisión de hacer compras de diversos productos, sin estar informados de las condiciones que aquellos tienen. Un caso particular ocurre con los productos alimenticios que tienen una fecha de producción y una de vencimiento. Sin embargo, esta información muchas veces no se toma en cuenta a la hora de adquirir las promociones que se ofrecen. En este proyecto conoceremos las características asociadas a las fechas de producción y vencimiento.

Indicadores

- Describe situaciones de medidas en diversos contextos para expresar números racionales en su notación decimal e intervalos.
- Aplica variadas estrategias con números racionales e intervalos.
- Ordena datos en esquemas de organización que representan los números racionales y sus operaciones con intervalos.
- Describe las estrategias utilizadas con las operaciones en intervalos para resolver situaciones problemáticas.
- Usa los símbolos de intervalos como corchetes, desigualdades o gráficas sobre la recta para resolver problemas que involucran operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento de reales.
- Justifica el uso de las operaciones con intervalos para resolver situaciones de contextos variados.

Contexto

Económico, comercial y social

Áreas afines

Historia, Geografía y Economía

Conocimiento

- Porcentajes e interés simple

Grado

3°. de Secundaria

Propósito

- Investigar sobre los diferentes tipos de impuestos a la renta y cómo calcular el impuesto de la cuarta categoría.
- Investigar sobre los tipos de rentas de la Comunidad Andina.

Conocimientos previos

- Operaciones con números enteros
- Cálculo de porcentajes

Tiempo

2 sesiones de 90 minutos

Actividades

- 1) Constituir equipos de trabajo, proyectar las tareas a desarrollar.
- 2) Elaborar una ficha de entrevista a un funcionario de la Sunat y otras instituciones.
- 3) Visitar la oficina de la Sunat para investigar sobre ¿qué es un impuesto a la renta?, ¿qué tipos de rentas existen?, ¿qué es el IGV?, entre otras informaciones.
- 4) Averiguar, en especial, ¿cómo se calcula el impuesto a la cuarta categoría?

Productos parciales/totales de los estudiantes

- Cronograma de actividades
- Fichas de entrevista a funcionario de la Sunat para recojo de datos
- Papelotes con las tareas 1, 2 y 3

Los estudiantes atribuyen el signo positivo o negativo cuando se percatan de que dos objetos tienen la misma distancia, pero son opuestos con relación al "sobre" y "debajo"; en el desarrollo comprenden que es necesario atribuir un símbolo que los diferencie. Posteriormente, en "Reflexionen y respondan" los estudiantes llegan a un acuerdo respecto al significado del "+" y "-", nociones que utilizarán cuando resuelvan problemas.

Actividad N.º 1



En pareja

1. Elaboren una lista de productos alimenticios que se venden en el quiosco de su institución educativa.

	Producto	Fecha de producción	Fecha de vencimiento
Clase 1			
Clase 2			
Clase 3			

Actividad N.º 2



En pareja

1. Elaboren un cuadro informativo de los productos que tienen fecha de vencimiento por periodos de vigencia.

	Producto	Menor o igual a 3 meses	Menor o igual a 6 meses	Menor o igual a 1 año
Clase 1				
Clase 2				
Clase 3				

Actividad N.º 3



En pareja

1. Representen, de forma gráfica y simbólica, los intervalos para expresar las fechas de producción y vencimiento de los productos seleccionados.
2. Un empresario quiere invertir en un producto alimenticio. Ustedes, como asesores de inversiones, usando la tabla de intervalos anteriormente producida, elaboren una ficha informativa para asesorar en el producto a invertir.
3. Como compradores de productos alimenticios, ¿qué criterios relacionados con la matemática deben considerar a la hora de tomar decisiones? Justifiquen su respuesta.

El objetivo es que los estudiantes hagan uso funcional de los intervalos y que reconozcan la importancia de tomar decisiones pertinentes basadas en conocimientos matemáticos.

Situación 4

Sesión taller matemático

Intervalos y sus operaciones

Indicadores <ul style="list-style-type: none">• Describe situaciones de medidas en diversos contextos para expresar números racionales en su notación decimal, científica e intervalos.• Expresa los números racionales mediante notación científica.• Ordena datos en esquemas de organización que representan los números racionales y sus operaciones con intervalos.• Formula estrategias de estimación de medidas o cantidades para ordenar números racionales en la recta real.• Aplica variadas estrategias con números racionales, intervalos y proporciones de hasta dos magnitudes e interés compuesto• Usa los símbolos de $=$, $>$, $<$, \leq, \geq, para comparar y ordenar dos o más cantidades.• Explica la existencia de los números irracionales como decimales no periódicos a partir de situaciones de medidas de longitudes y áreas de algunas figuras geométricas planas.	Contexto Situaciones variadas
Conocimiento <ul style="list-style-type: none">• Operaciones con intervalos	Grado 3.º grado de Secundaria
¿Cómo hacerlo? Los estudiantes emplearán los textos del tercer grado distribuidos por el Ministerio de Educación, para resolver planteamientos problemáticos planteados por niveles de complejidad.	
Sirve para: <ul style="list-style-type: none">• Resolver problemas que implican el uso y operaciones con intervalos.	
¿Qué necesitas? <ul style="list-style-type: none">• Texto del tercer grado de Secundaria distribuido por el Ministerio de Educación.	
Conocimientos previos <ul style="list-style-type: none">• Intervalos• Operaciones con intervalos	



Recuerda:

En esta actividad se usa el texto del tercer grado de Secundaria distribuido por el Ministerio de Educación. A partir del texto se identifican las situaciones que se presentarán, seleccionadas por su nivel de complejidad, que servirán para orientar el desarrollo de las fases de la resolución de problemas.

¿Qué ha ocurrido acerca de las situaciones planteadas en torno al número real?

Los estudiantes, a partir de un escenario de laboratorio matemático, han reconocido las características y propiedades de los intervalos; posteriormente, a partir de otra actividad de laboratorio, realizaron operaciones con intervalos tomando como recurso, el material concreto; a continuación, desarrollaron un proyecto matemático y un taller.

4.2 Algunas actividades para el desarrollo de las capacidades vinculadas a números reales

A. RECONOCIENDO ALGUNAS ACTIVIDADES PARA EL DESARROLLO DE LA CAPACIDAD DE MATEMATIZAR

Respecto a los números reales, es importante reconocer que estos están conformados por el conjunto de los números racionales e irracionales. Asimismo, los intervalos expresan un subconjunto de los números reales, con características de reconocer, en aquellos, infinitos números reales.

Un buen recurso para iniciar las actividades matemáticas y orientarnos a desarrollar la capacidad de matematizar es recurrir a esquemas informativos.

A continuación, se muestra un ejemplo:



Ojo con este dato

Una tarea matemática es una propuesta de acción que los docentes plantean a sus estudiantes para desarrollar sus capacidades matemáticas. En ellas se pueden realizar varias capacidades de forma dinámica y variada.

En un aula de tercer grado de Secundaria de la IE Fidel Olivas, el docente busca representar las estaturas de todos sus estudiantes de una forma simple. A continuación, presentamos el cuadro con las tallas obtenidas.

Estudiante	Estatura
Acosta, Alonso	1,42 m
Aranda, Rocío	1,37 m
Arias, Jean	1,56 m
Barrenechea, Renato	1,67 m
Cermeño, José	1,55 m
Checa, Fernanda	1,51 m
Cruz, Eduardo	1,48 m
Donayre, Alexandra	1,57 m
García, Fredy	1,68 m
Huerta, José	1,35 m
Iribarren, Arturo	1,45 m
Jaramillo, Jessica	1,45 m

Los problemas propuestos en estas tareas no se pueden resolver con los números racionales ni sus operaciones. Por ejemplo: ¿cuánto mide el lado de un cuadrado que se forma con dos cuadrados?

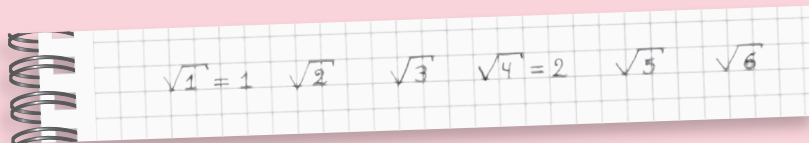
1. Usando la cinta métrica, marquen las medidas de las estaturas encontradas.
2. Usando una hoja milimetrada, representen la talla de cada estudiante.

A continuación, mostramos otro ejemplo, en que el estudiante, a partir de un desafío matemático, realiza procesos de construcción geométrica para reconocer los números irracionales.

¿Qué pasaría si en la secuencia tendríamos que hallar la longitud del lado de un cuadrado que se forma con dos, tres, cinco o seis cuadrados según la secuencia anterior?



¿Cuántos casilleros hay en cada lado?



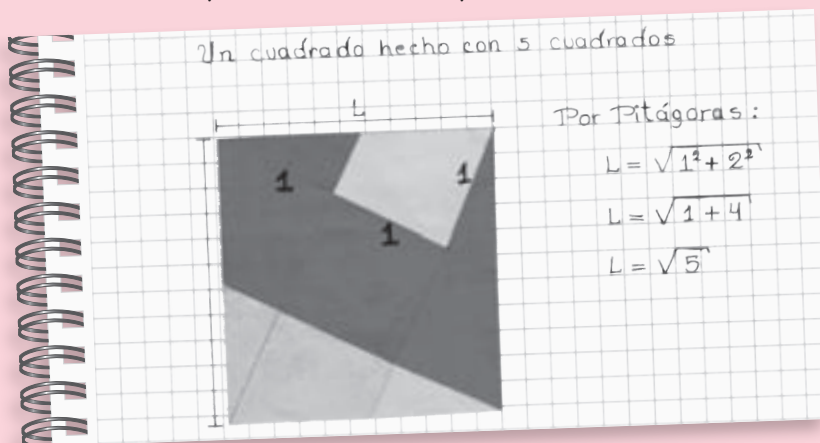
Tarea 3: ¿Cómo construir un cuadrado con dos cuadrados?

- 1.º Se entrega a cada alumno dos cuadrados de colores diferentes.
- 2.º ¿Cómo deberían cortar los cuadrados para formar con todas las piezas un cuadrado grande?
- 3.º Peguen las piezas en su cuaderno.
- 4.º Si formaron un cuadrado con dos cuadrados, ¿cuánto mide su lado, según la lógica anterior?



Su lado mide $\sqrt{2}$

Tarea 4: Ahora, construyan un cuadrado con cinco cuadrados de una unidad cualquiera de lado e indiquen la medida de su lado.



Las tareas matemáticas tienen distintos niveles de complejidad. De acuerdo con Stein, hay dos grupos de tareas según su demanda cognitiva. Uno de **baja demanda cognitiva**, en que se encuentran tareas de memorización y procedimientos sin conexiones. El otro grupo es de **alta demanda cognitiva**, en que los procedimientos requieren establecer conexiones. En este último grupo de tareas, los estudiantes movilizan varias de sus capacidades matemáticas.

B. RECONOCIENDO ALGUNAS ACTIVIDADES PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DE REPRESENTACIÓN

Es necesario comprender los números reales por medio de representaciones con material concreto. Por ejemplo, medir objetos, establecer relaciones entre sus medidas, graficarlos, ubicarlos en la recta numérica y simbolizarlos. Se pueden usar recursos manipulativos, como reglas, compases y otros instrumentos que permiten varias posibilidades de representación de los números reales y sus operaciones. El uso de esquemas gráficos, como cuadros y tablas, permite establecer un puente entre la situación problemática y el lenguaje de las matemáticas.

A continuación, mostramos cómo partiendo de actividades de medida se expresan en la recta numérica, números racionales como un proceso de entrada a la construcción del significado y uso de los intervalos.

En un aula de tercer grado de Secundaria de la IE Fidel Olivas, el docente busca representar las estaturas de todos sus estudiantes de una forma simple. A continuación, presentamos el cuadro con las tallas obtenidas.

Estudiante	Estatura
Acosta, Alonso	1,42 m
Aranda, Rocío	1,37 m
Arias, Jean	1,56 m
Barrenechea, Renato	1,67 m
Cermeño, José	1,55 m
Checa, Fernanda	1,51 m
Cruz, Eduardo	1,48 m
Donayre, Alexandra	1,57 m
García, Fredy	1,68 m
Huerta, José	1,35 m
Irribarren, Arturo	1,45 m
Jaramillo, Jessica	1,45 m

1. Usando la cinta métrica, marquen las medidas de las tallas encontradas.
2. Usando una hoja milimetrada, representen la talla de cada estudiante.



Atención
 A continuación, se reconoce cómo el estudiante, en el desarrollo de la actividad, moviliza diversas formas de representación referidas a la construcción del significado de los intervalos.

1. ¿Cómo expresarían mediante intervalos, usando la representación gráfica?

Expresión literal	Representación gráfica con intervalos
mayor que 1,37 y menor que 1,45 m	
mayor que 1,54 m	
mayor o igual que 1,48 y menor que 1,50 m	
mayor o igual que 1,35 y menor igual que 1,55 m	
menor que 1,56 y mayor que 1,42 m	
mayor a 1,37 y menor que 1,42 m	

C. RECONOCIENDO ALGUNAS ACTIVIDADES SOBRE LA CAPACIDAD DE COMUNICAR

Si pensamos que los números reales no son parte de nuestras vidas es porque no comprendemos el significado de los números racionales ni de los irracionales. Necesitamos dialogar permanentemente con los estudiantes sobre sus dudas. También necesitamos promover el diálogo en el aula entre equipos de trabajo y dentro de ellos. Por ejemplo, explicar por qué la diagonal de un cuadrado no se puede expresar como un número racional.

A partir del uso de materiales manipulativos se establecen las condiciones para comprender el número real y sus operaciones.

Un ejemplo de ello son las actividades que se desprenden del fragmento de la historia "El diablo de los números", que presentamos inmediatamente.

Situaciones para promover interrogantes

En la comprensión de problemas:

- Fomentar que los estudiantes usen lo que ya saben para entender el problema.

En la resolución de problemas:

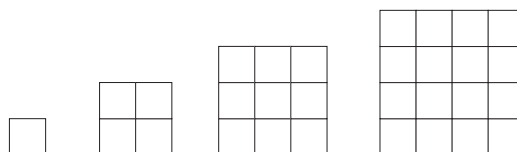
- Promover el uso de planteamientos y estrategias distintas en la solución de problemas.
- Considerar el orden apropiado de las ideas.
- Desarrollar actividades de participación grupal.

En la evaluación de los resultados:

- Expresar ideas tanto de los procesos como de los resultados.
- Expresar satisfacción de lo experimentado.
- Explicar sus logros a partir de las actividades desarrolladas.

- Espantoso –dijo–, no tiene ningún sentido.
Una auténtica ensalada de números. No me oriento en ella.
- Nadie se orienta en ella, mi querido Robert. De eso se trata. El rábano de dos es precisamente un número irrazonable.
- ¿Y cómo voy a saber qué sigue detrás de las últimas tres cifras? Porque ya me sospecho que sigue siempre.
- Cierto. Pero, por desgracia, tampoco yo puedo ayudarte en eso. Solo averiguarás las próximas cifras matándote a calcular hasta que tu calculadora se ponga en huelga.
- ¡Qué absurdo! –dijo Robert, completamente enloquecido–. Y eso que ese monstruo parece tan sencillo cuando se escribe así: $\sqrt{2}$

- Y lo es. Con un bastón puedes dibujar cómodamente $\sqrt{2}$ en la arena. (Trazó unas cuantas figuras en la arena con su bastón).
- Mira:



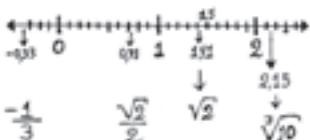
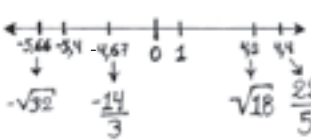
Fragmento de la lectura "El diablo de los números", pág. 77.

D. RECONOCIENDO ALGUNAS ACTIVIDADES EN TORNO A LA CAPACIDAD: ELABORA ESTRATEGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

El estudiante necesita ser expuesto a verdaderas situaciones problemáticas que le permitan usar diversas estrategias. Para resolver problemas con números reales, necesitamos el apoyo de la recta numérica, las operaciones, los materiales concretos y los esquemas para organizar los datos, además de un panorama de la situación planteada. Otra estrategia a desarrollar es la ubicación de números reales sobre la recta numérica. Para comprender esto, usamos gráficos construidos con regla y compás.

En los siguientes ejemplos se muestra cómo la recta numérica se puede utilizar como una estrategia para comparar u ordenar números reales.

Tarea 1: Observen el cuadro y completen.

Pedro tiene el siguiente grupo de números que debe ubicarlos en la recta real.	Gaby tiene este otro grupo de números que debe ubicarlos en la recta real.
$\sqrt{2}; \sqrt[3]{10}; \frac{-1}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{\frac{9}{4}}$  <p>A number line from -3 to 2 with tick marks every 0.1. Points are marked for $-\frac{1}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2}$, and $\sqrt{\frac{9}{4}}$. Arrows point from the numbers above to their positions on the line.</p>	$-5, 4; \frac{-14}{3}; \frac{22}{5}; \sqrt{18}; -\sqrt{32}$  <p>A number line from -6 to 3 with tick marks every 0.5. Points are marked for $-\sqrt{32}$, $-\frac{14}{3}$, $\sqrt{18}$, and $\frac{22}{5}$. Arrows point from the numbers above to their positions on the line.</p>
<p>¿Qué número del grupo de Pedro estará más alejado del cero?</p> <p>$\sqrt[3]{10}$ es el más alejado</p>	<p>¿Qué número de este grupo estará más cerca del cero?</p> <p>El número más cerca es $-\sqrt{18}$</p>

Tarea 2: ¿Qué estrategias han utilizado para ubicar los números de cada grupo en la recta real?

Haciendo el cálculo respectivo de cada fracción o raíz, determinando cuál es menor o mayor.

Asimismo, una estrategia importante en la búsqueda de soluciones es representar el problema mediante algún organizador visual. En los siguientes ejemplos se muestra cómo el estudiante representa el problema en una recta numérica y a partir de ella se encuentra la solución.

La solución del problema planteado en la actividad 4 del laboratorio matemático "Haciendo operaciones con intervalos" permite visualizar cómo el estudiante puede utilizar la recta numérica para resolver esta situación problemática.

(1).

1) Se puede vender galletas de los dos lotes entre el 15 de noviembre del 2012 y el 1 de febrero de 2013.

2) Del 1 al 15 de noviembre de 2012 se han vendido galletas solo del primer lote.

3) Del 1 al 15 de febrero de 2013 se podrán vender solo galletas del segundo lote.

(2).

$[1; 22]$ = solo tienen luminarias	$1 \leq x \leq 22$, x luminarias
$[22; 23]$ = luminarias y ciclovia	$22 \leq y \leq 23$, y luminaria y ciclovia
$[32; 52]$ = solo tienen ciclovia	$32 \leq z \leq 52$, z solo tienen luminaria

E. RECONOCIENDO ALGUNAS ACTIVIDADES SOBRE EL USO DE EXPRESIONES SIMBÓLICAS, TÉCNICAS Y FORMALES

El estudiante, mediante de experiencias vivenciales, empieza a dar sentido a la construcción de expresiones asociadas a los intervalos y a comprender que estos se pueden representar por medio de expresiones gráficas y simbólicas; asimismo, que en un lenguaje coloquial adquieren cierto significado en las diversas actividades que realizamos. Por ello, es importante reconocer que el estudiante en su vida cotidiana emplea los intervalos en un lenguaje coloquial; en ese sentido, las actividades lo deben conducir al manejo adecuado del lenguaje simbólico y formal.

El profesor plantea las siguientes interrogantes:

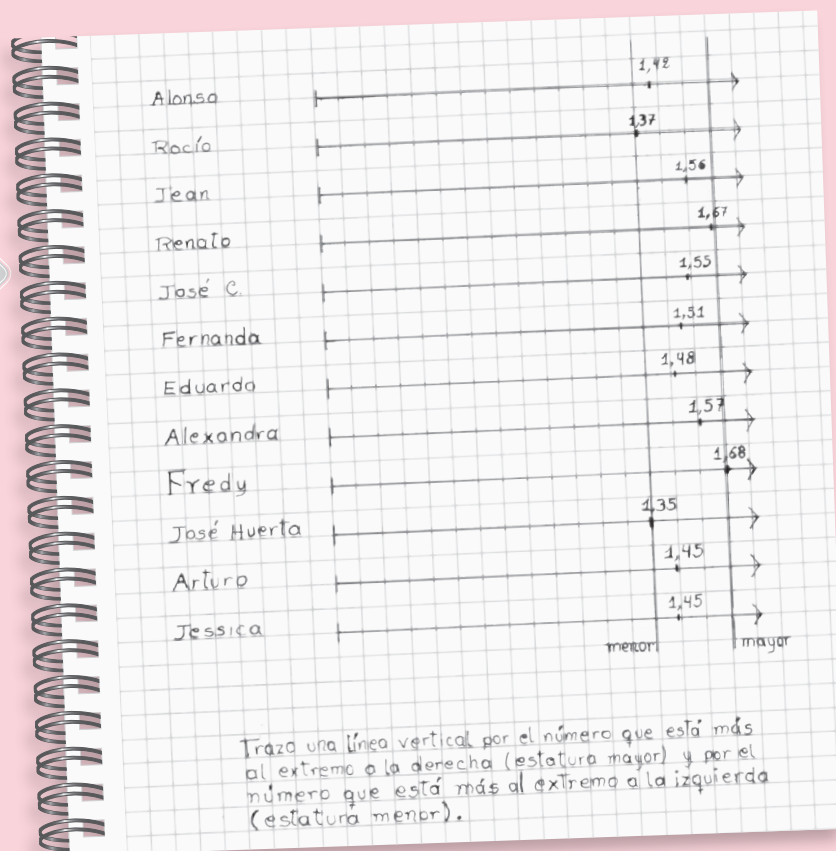
Qué estudiante o estudiantes tienen una estatura...	Nombre de estudiantes
mayor que 1,37 y menor que 1,45 m	Alonso Acosta
menor que 1,56 y mayor que 1,42 m	Jesica Jaramillo, Eduardo Cruz, Fernanda Checa y José Cermeño.
mayor que 1,54 m	José Cermeño, Jean Arias, Alexandra Donayre, Renato Barrenechea y Fredy García
mayor o igual que 1.48 y menor que 1,50 m	Eduardo Cruz
mayor o igual 1,35 y menor o igual que 1,55 m	José, Rocío, Alonso, Jessica, Eduardo y Fernanda
mayor que 1,37 y menor que 1,42 m	

En el siguiente grupo de tareas se puede reconocer cómo el estudiante, a partir de una situación en la que se expresa un lenguaje común, sobre la base de diversas tareas, va ordenando y usando expresiones simbólicas, técnicas y formales.


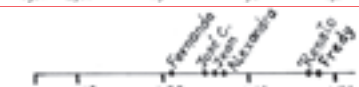
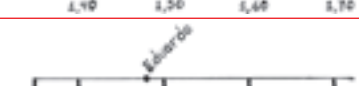

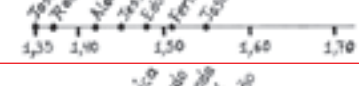
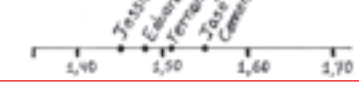
Escenarios que propician el razonamiento y la argumentación

Son escenarios que promueven la exposición, la discusión, la indagación, la inducción, el cuestionamiento y la integración de conocimientos o capacidades.

La generalización es un proceso que se basa en prácticas inductivas. Desde el punto de vista didáctico, es muy importante para que los estudiantes, ante el problema planteado, pongan en juego su intuición, descompongan el problema en supuestos o casos pequeños, para así llegar a las generalizaciones.



El profesor observa la justificación de sus estudiantes y les plantea un reto. ¿Cómo usando la recta numérica se puede expresar lo desarrollado anteriormente?

Expresión literal	Expresión en la recta numérica
mayor que 1,37 y menor que 1,45 m	
mayor que 1,54 m	
mayor o igual que 1,48 y menor que 1,50 m	
mayor o igual que 1,35 y menor o igual que 1,55 m	
menor que 1,56 y mayor que 1,42 m	
mayor que 1,37 y menor que 1,42 m	

Tarea 4: Completen el cuadro:

Simbólica 1	Gráfica	Simbólica 2
$\{x/x \in \mathbb{R}, -\frac{3}{5} < x < \sqrt{11}\}$		$x \in]-\frac{3}{5}; \sqrt{11}[$
$\{x/x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq \sqrt{2}\}$		$x \in [-3; \sqrt{2}]$
$\{x/x \in \mathbb{R}, -3 \leq x < 7\}$		$x \in [-3; 7[$

E. RECONOCIENDO ALGUNAS ACTIVIDADES ACERCA DE LA ARGUMENTACIÓN

Luego de un trabajo organizado, los estudiantes pueden expresar qué comprenden sobre los números reales y sus operaciones en sus diversas situaciones, representaciones y contextos. Sin embargo, es importante que tengan juicios basados en argumentos que vengan de la experiencia. De allí la necesidad de promover la formulación de conjeturas para luego explorar sus posibles respuestas, verificarlas y justificar sus procedimientos. Lograr este razonamiento permite comprender en profundidad los números reales y sus operaciones.



Ojo con este dato

El uso de expresiones simbólicas y de formalización matemática está muy relacionada con la representación. La base de todo este proceso de uso de símbolos está en la experiencia de resolver problemas.

Situación 1

Sesión laboratorio matemático

Título: Intervalos que sí cuentan

Alonso plantea lo siguiente: de que si incorporamos más estudiantes en la tabla, no será posible expresar estaturas entre 1,55 y 1,56 m debido a que son números consecutivos. ¿Este razonamiento es cierto? *Justifiquen su respuesta usando la recta numérica.*

A continuación, se muestra una serie de interrogantes que promueven el desarrollo de habilidades en torno a la capacidad de argumentación.

Se puede reconocer que estas interrogantes están precedidas de tareas que orientan previamente al estudiante a construir significados matemáticos. Esto se realiza mediante experiencias vivenciales, actividades lúdicas, secuencias de tareas que buscan establecer relaciones lógicas, regularidades, entre otras.

Situación 2

Sesión laboratorio matemático

Título: Haciendo operaciones con intervalos

Usando una recta numérica, peguen encima de ella un tira de papel celofán que exprese el intervalo del lote 1. Repitan similar situación para el lote 2. Nota: dibujen las características de representación de los intervalos en los extremos de las tiras (se pinta, según sea el caso, el interior de los círculos para expresar intervalos abiertos o cerrados).

- Dibujen el procedimiento que realizaron.
- ¿Qué subconjunto representa la tira del celofán amarillo?
- ¿Qué subconjunto representa la tira del celofán azul?
- ¿Qué subconjunto representa la tira del celofán verde (resultado de los dos colores)?
- ¿Cómo expresarían el tiempo que tardaría la producción del lote 1 o del lote 2? *Justifiquen su respuesta usando las tiras de celofán.*

Situación 3

Proyecto matemático

Título: Cómo ser un comprador informado

- Representen, de forma gráfica y simbólica, los intervalos para expresar las fechas de producción y vencimiento de los productos seleccionados.
- Un empresario quiere invertir un producto alimenticio. Ustedes, como asesores de inversiones, usando la tabla de intervalos, elaboren una ficha informativa para asesorar en el producto a invertir.
- Como compradores de productos alimenticios, ¿qué criterios relacionados con la matemática deben considerar a la hora de tomar decisiones? *Justifiquen su respuesta.*

V. ¿Cómo desarrollamos escenarios de aprendizaje respecto a las funciones cuadráticas?

Una de las mayores dificultades para abordar las funciones cuadráticas a partir de la resolución de situaciones problemáticas es que estas funciones se asocian comúnmente a contenidos de la Física, sobre los cuales no tienen dominio los estudiantes del grado correspondiente. Sin embargo, tal como lo hizo Galileo en el siglo XVII, es posible estudiar las funciones cuadráticas a partir de situaciones que pueden ser modeladas con estas funciones y no en camino inverso. La falta de conocimientos previos del estudiante para resolver la ecuación del movimiento de proyectiles se puede superar realizando las sesiones correspondientes, en forma paralela, con el docente de Ciencia, Tecnología y Ambiente. Cuando no sea posible, es recomendable que el docente de Matemática aborde, en forma simultánea, ambos contenidos en la misma sesión. Esto es viable por la formación de la mayoría de docentes de Matemática.

Por otro lado, las funciones cuadráticas pueden ser abordadas mediante el desarrollo de proyectos de aprendizaje. El propósito fundamental de los proyectos es resolver una situación problemática real con la participación de los estudiantes. La dificultad radica en la selección de un proyecto, cuya problemática esté asociada a un conocimiento particular, como, en este caso, a las funciones cuadráticas. Sin embargo, la abundante información que se tiene, por ejemplo, usando el recurso de Internet, facilita encontrar una situación problemática adecuada a las necesidades e intereses de los estudiantes.

A continuación, presentamos una unidad didáctica compuesta por taller, proyecto y laboratorio matemáticos. Todos parten de contextos de la vida de los estudiantes o cercanas a ella. Implican el uso de las funciones cuadráticas o la construcción de estos conocimientos en el contexto de la resolución de situaciones problemáticas.

Proyecto matemático:
Funciones cuadráticas que abaratan costos de viaje de promoción

Sesión laboratorio matemático:
Haciendo cohetes interesaciales

Sesión taller matemático:
Funciones cuadráticas que previenen el envenenamiento



Importante

Para ampliar estudios respecto a las funciones, se recomienda visitar:

Aspectos metodológicos en el aprendizaje de funciones en secundaria

http://sistemas02.minedu.gob.pe/archivosdes/fasc_mat/04_mat_d_s2_f3.pdf

5.1 Algunas situaciones de aprendizaje

Situación 1

Proyecto matemático

Funciones que abaratan costos de viaje de promoción

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Este año los estudiantes de la promoción Mario Vargas Llosa de la IE Santa Isabel de Huancayo tienen planificado viajar a la majestuosa ciudadela de Machu Picchu. Por ello, realizan todas las gestiones posibles para que este anhelo se haga realidad con dos años de anticipación; inclusive, ya reservaron hospedaje.

Sin embargo, temen no poder hacer el añorado viaje por los altos costos de pasajes que suben a fin de año. Y ni pensar viajar en avión. El tutor de la promoción les comunica que el pasaje de ida debe estar alrededor de S/.70 por estudiante. Solo una empresa, Cielo Azul, tiene la siguiente oferta: por cada estudiante adicional que viaje, el costo de pasajes por estudiante bajará en S/.1.

Por ello, el tutor ha solicitado buscar alguna estrategia para abaratar costos de manera que no supere los S/.3000, monto que se recaudará con la cotización mensual de los padres de familia hasta 15 días antes del viaje. Además, ha pedido que no deje de asistir ningún estudiante, y, si es posible, incluir a algunos de la otra sección que solo tendrán fiesta de promoción.

Indicadores

- Elabora modelos a partir de situaciones de cambio usando las funciones cuadráticas con coeficiente naturales y enteros.
- Ordena datos en esquemas para organizar situaciones de cambio mediante funciones cuadráticas.
- Grafica en el plano cartesiano diversos valores a partir de la organización de datos para resolver problemas de cambio que impliquen funciones cuadráticas.
- Interviene y opina respecto al proceso de resolución de problemas que implican usar funciones cuadráticas.
- Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucran funciones cuadráticas.
- Utiliza la gráfica de la función cuadrática para determinar los valores máximos y mínimos y los puntos de intersección con los ejes coordenados para determinar la solución de la ecuación cuadrática implicada en el problema.
- Justifica mediante procedimientos gráficos o algebraicos que la función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, o sus expresiones equivalentes, modela la situación problemática dada.

Contexto

Contexto social

Duración

El tiempo estimado es de tres semanas y cinco días

<p>Conocimiento</p> <ul style="list-style-type: none"> • Inecuaciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + bx + c$ 	<p>Grado</p> <p>4.º de Secundaria</p>
<p>Propósito</p> <p>Buscar alguna estrategia para que el monto recaudado para pasajes no supere los S/.3000, de manera que ningún estudiante se quede. Si es posible, incluir a los estudiantes de la otra sección que pueden pagar el valor de los pasajes para abaratar costos de transporte.</p>	
<p>Conocimientos principales</p> <ul style="list-style-type: none"> • Funciones cuadráticas • Valores máximos y mínimos de funciones cuadráticas 	<p>Conocimientos relacionados:</p> <p>Ecuaciones cuadráticas Cálculo de costos</p>
<p>Actividades</p> <p>Para cumplir con el objetivo, se tienen previstas las siguientes actividades:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Constituir ocho equipos de trabajo de cinco estudiantes para desarrollar las tareas por comisiones. • Realizar el estudio de costos de pasajes para el transporte de los estudiantes a la ciudad de Cusco, ida y vuelta. • Evaluar todas las ofertas propuestas por las empresas de transporte con la finalidad de abaratar costos. • Si amerita, proponer a la junta directiva de la otra promoción incluirla en la excursión. • En caso de aceptar la oferta de la empresa de transportes Cruz Azul, calcular el número de estudiantes adicionales que viajen con la promoción, de manera que no se supere el monto máximo asignado para solventar el costo de pasajes con el presupuesto que se va a recaudar. 	<p>Productos</p> <p>Productos parciales o totales de los estudiantes:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Documento con la conformación de comisiones para desarrollar las tareas • Informe dirigido al tutor con las propuestas económicas de por lo menos tres empresas de transporte terrestre de la ciudad • Documento de compromiso firmado por los padres de familia de la sección para que asuman los costos de pasajes, hospedaje, alimentación y visita a Machu Picchu • En caso de optar por la propuesta de la empresa Cruz Azul, adelantar una parte del monto recaudado y emitir un documento de precontrato

Actividad N.º 1



En pareja

1. Para elaborar el estudio de costos de los pasajes, se emitirán oficios a las diversas empresas de transporte para que remitan su propuesta económica del servicio del traslado de estudiantes de la promoción a la ciudad de Cusco, ida y vuelta. La distribución de oficios se realizará en grupos de tres estudiantes.
2. Se analizará cada una de las propuestas económicas alcanzadas, teniendo en cuenta, como criterio de selección, las condiciones de calidad del servicio y el costo mínimo ofertado para trasladar a todos los estudiantes de la promoción.
3. Para sistematizar las propuestas económicas alcanzadas por las empresas de transportes, se recomienda adjuntar como mínimo tres propuestas. Se organizarán los datos en la siguiente tabla:

N.º de propuesta	Nombre de empresa de transporte	Precio de un pasaje (en S/.), incluido IGV	Precio por 40 pasajes (en S/.), incluido IGV	Precio por más de 40 pasajes (en S/.), incluido IGV
1				
2				
3				

Actividad N.º 2



En pareja

1. Si se ha optado por la propuesta de la Empresa de Transportes Cruz Azul S. A., organizar los datos en la siguiente tabla:

N.º de estudiantes	Precio de pasaje (en S/.) por todos los estudiantes, incluido IGV	Costo total de pasajes (en S/.) incluido IGV
40	70	
40 + 1	70 - 1	
40 + 2		
40 + X		

2. Formular la función precio como $P = f(x)$ que modele el costo total de pasajes (en S/.), incluido IGV.
3. Determinar el valor del número de estudiantes, para el cual la función precio total de pasajes $P = f(x)$ tiene un valor máximo.

Actividad N.º 3



En pareja

1. Determinar el número de estudiantes que viajarán, de manera que puedan incluirse los de la otra sección para que el costo de los pasajes no supere el monto estimado de recaudación que ascenderá a S/.3000.



Importante

REFERENCIAS E INSTITUCIONES

Manual del docente del texto de Matemática del tercer grado de Secundaria (pág. 129). Grupo Editorial Norma S. A. C. Lima, 2012.



Recuerda:

Para desarrollar el proyecto, se sugiere una secuencia de actividades ordenadas en función de la información requerida. Este orden puede cambiar, así como la forma de desarrollar las tareas, lo que depende de muchos factores; por ejemplo, de hábitos y estilos de aprendizaje de los estudiantes, de las estrategias metodológicas y didácticas que usualmente pone en práctica el docente en el desarrollo de la sesión de aprendizaje y, fundamentalmente, del contexto cultural que influye en la forma de resolver un problema.

Este proyecto permite al estudiante realizar un estudio de costos. En esta actividad, los estudiantes modelarán la situación planteada para analizar la oferta que facilite la selección de la empresa de transportes.

Situación 2

Sesión laboratorio matemático

Haciendo cohetes interestaciales

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Los cohetes espaciales requieren de combustible suficiente para alcanzar la aceleración que les permita escapar de las fuerzas de atracción gravitacional. Un problema que debió ser resuelto por los científicos y los ingenieros que participaron en el diseño y construcción de estos vehículos fue la relación entre el peso de la nave y la fuerza de empuje. Esta última debe ser mayor para que la nave se pueda elevar.

El análisis de algunas de las variables que intervienen en un proceso es determinante para obtener los resultados que deseamos; por ejemplo, en el caso planteado, nos interesa conocer cuál es la potencia máxima alcanzada con el mínimo de combustible. Por ello, construiremos un cohete hidrodinámico y experimentaremos con él. Así podríamos saber cuál es el mínimo requerido de combustible para alcanzar la máxima altura.

Indicadores <ul style="list-style-type: none">• Elabora modelos a partir de situaciones de cambio usando las funciones cuadráticas con coeficientes naturales y enteros.• Ordena datos en esquemas para organizar situaciones de cambio mediante funciones cuadráticas.• Grafica en el plano cartesiano diversos valores a partir de la organización de datos para resolver problemas de cambio que impliquen funciones cuadráticas.• Interviene y opina respecto al proceso de resolución de problemas que implican usar funciones cuadráticas.• Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucran funciones cuadráticas.• Utiliza la gráfica de la función cuadrática para determinar los valores máximos y mínimos y los puntos de intersección con los ejes coordenados para determinar la solución de la ecuación cuadrática implicada en el problema.• Justifica mediante procedimientos gráficos o algebraicos que la función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, o sus expresiones equivalentes, modela la situación problemática dada.	Contexto <p>El contexto es científico</p> Áreas afines <p>Ciencia, Tecnología y Ambiente</p>
Conocimiento <ul style="list-style-type: none">• Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$	Grado <p>4.º de Secundaria</p>
Propósito <ul style="list-style-type: none">• Desarrollar la comprensión de la función cuadrática a partir de su uso para resolver un problema mediante experimentación.	Tiempo <p>Dos sesiones de 90 minutos</p>
¿Qué necesitas? <ul style="list-style-type: none">• Botella de plástico con capacidad máxima de dos litros• Tapón de caucho o corcho que cierre herméticamente la boca de la botella• Cartón o plástico rígido• Pegamento o cinta adhesiva• Válvula para inflar pelotas• Probeta de 1000 ml graduada• Cronómetro• Papel milimetrado	
Conocimientos previos <ul style="list-style-type: none">• Ecuación• Nociones de gravedad y de aceleración	

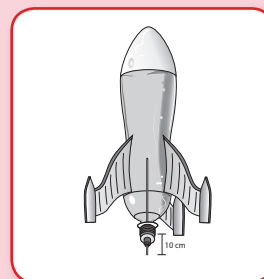
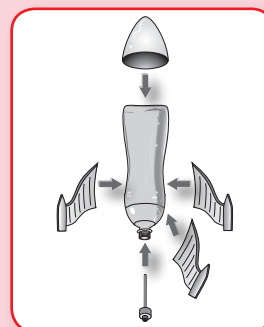
Actividad N.º 1

Reflexionen y respondan

1. Lo primero es verificar que el tapón se ajuste perfectamente a la boca de la botella. Luego perfórenlo insertando en él una válvula.
2. La botella se convertirá en el cuerpo del cohete; su base será la delantera, por lo que deben modificarla a fin de reducir la resistencia del aire al movimiento. Por ello, pueden construir un cono de cartulina o mica que encaje perfectamente en el diámetro de la base. Usen pegamento o cinta adhesiva para pegar las piezas.
3. Después deberán construir la base del cohete, utilizando mica o cartón, con lo que se formarán las alas que le darán estabilidad a la nave durante el vuelo; estas irán pegadas a los costados de la boca de la botella, tal como se muestra en la figura adjunta. Pueden optar por cualquier diseño. ¡Solo asegúrense de que queden bien pegadas! Tomen en cuenta que debajo debe quedar un espacio de 10 cm para conectar la manguera a la bomba y a la válvula introducida en el tapón. Ahora que han terminado de armar el cohete, píntelo o decórenlo a su gusto.
4. Para iniciar la cuenta regresiva, lo primero que deben hacer es colocarse en un área más o menos despejada; enseguida, llenar la botella con 200 ml de agua. A continuación, coloquen firmemente el tapón con la válvula puesta. Es importante que quede lo más apretada posible, pues mientras más presión soporta el cohete, la altura alcanzada será mayor. Ahora solo necesitamos conectar la válvula de la base del cohete a la bomba de aire para comenzar a bombear hasta que la presión expulse el tapón de caucho y el cohete salga disparado. Asegúrense de que esté dirigido verticalmente hacia arriba y... ¡fuera...!
5. Deben tomar el tiempo que el cohete permanece en el aire para después calcular la altura alcanzada. Hay que poner mucha atención para activar el cronómetro justo cuando el cohete salga disparado y detenerlo en el momento en que este toque el piso. Después irán aumentando en 200 ml el volumen del agua para determinar el tiempo de vuelo.



En grupo



Adaptación: Ocampo, O. Un dúo dinámico: Física y Química. UNAM. Págs. 6-7

Actividad N.º 2



En pareja

El cálculo de la altura es muy sencillo. Este movimiento se realiza con aceleración constante y su valor es igual a $9,81 \text{ m/s}^2$. Supongamos que el rozamiento del aire no afecta y que el movimiento es un tiro vertical.

Apliquen la ley del movimiento con aceleración constante, es decir: $h = V_i t \pm gt^2$

$h = \text{altura (m)}$

$V_i = \text{velocidad inicial } \left(\frac{\text{m}}{\text{n}}\right)$

$t = \text{tiempo (s)}$

$g = \text{aceleración gravitacional}$

Como se habrán dado cuenta, no podemos calcular la altura alcanzada porque no conocemos la velocidad inicial. Sin embargo, si dividimos el movimiento en dos partes, ascenso y descenso, tenemos una alternativa, pues en el punto de máxima altura la velocidad final –al subir– es igual a cero. Pero si consideramos el movimiento al bajar, la velocidad inicial será cero. Para no confundir, consideremos solo el movimiento de ascenso. Entonces:

$$V_f = -gt$$

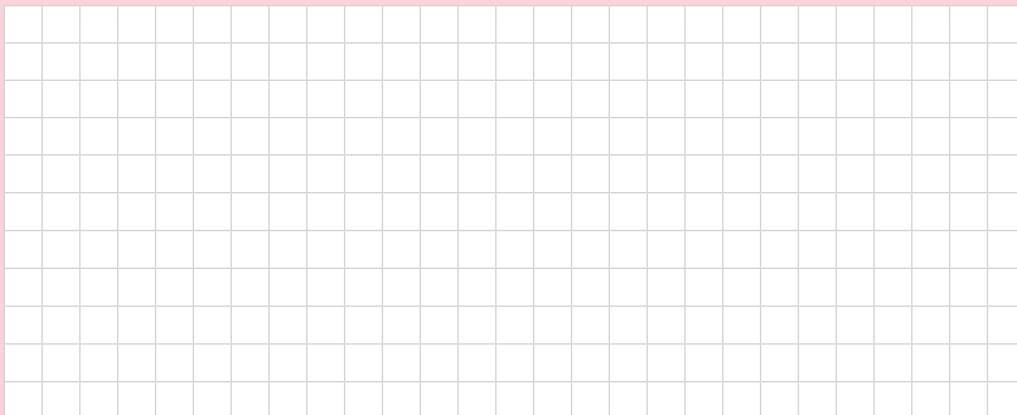
(Atención: en este caso $g = -9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

1. Anota los datos en el siguiente cuadro:

Una vez realizados todos los cálculos, completen la tabla de datos.

Volumen del agua (ml)	Tiempo de vuelo (s)	Altura alcanzada (m)
0		
200		
400		
600		
800		
1000		
1200		
1400		

2. Realicen la gráfica de la altura alcanzada en función del volumen del agua y observen el comportamiento. Tracen, además, una línea de tendencia utilizando preferentemente papel milimetrado o algún programa de computación para realizar gráficas.



Actividad N.º 3

Reflexionen y respondan

La función cuadrática, denominada también función general de segundo grado, es aquella que tiene por regla de correspondencia $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde los coeficientes a , b , c son números reales, $a \neq 0$.

Para comprender cómo se representa gráficamente una función cuadrática, intentaremos hallar la gráfica de una función sencilla: $y = x^2$. Para esto, en primer lugar, elaboraremos una tabla:

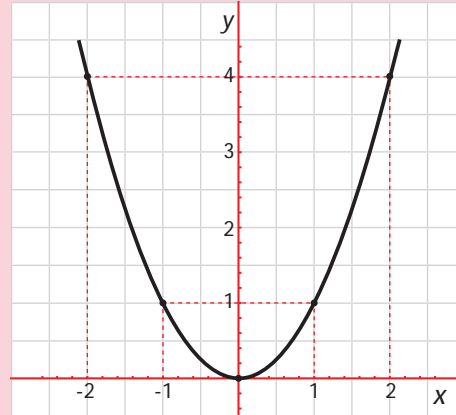
x	$y = x^2$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



En grupo

El siguiente paso será representar estos datos en el plano cartesiano:

El dominio de la función estaría constituido por todos los valores que puede tomar "x". Asimismo, el rango de la función estaría conformado por todos aquellos resultado de "f(x)".



El gráfico obtenido para $y = x^2$ se denomina **parábola**, al igual que el gráfico de cualquier función cuadrática.

Observemos que el menor valor que toma y es 0, cuando $x=0$, y que y no puede tomar valores negativos pues es de la forma $y = x^2$.

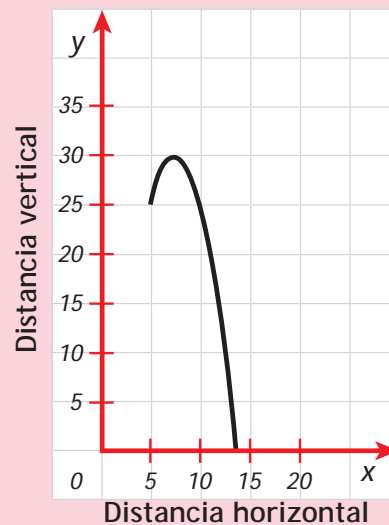
El punto (0;0) se denomina **vértice** de la parábola. Es el punto en el que la parábola alcanza un valor máximo o uno mínimo.

A partir de la experiencia realizada, expresarla de forma tabular, gráfica y simbólica, reconociendo a su vez el dominio y el rango de la función.

Actividad N.º 4

Resolver problemas

1. Este gráfico muestra una parte de una parábola, que representa la posición de un zambullidor (la distancia horizontal y vertical) en el borde de un fondo y cómo él se zambulle a una distancia de 5 metros de largo y 25 metros respecto al nivel del agua.



- a) Identifiquen puntos sobre el gráfico que representan cuando el zambullidor inicia su salto. Identifiquen el punto cuando él alcanza su altura máxima y cuando entra en el agua.
- b) Bosquejen un gráfico de la posición del zambullidor si él se zambulle desde una base de 10 metros de largo y 10 metros por encima del nivel del agua. (Asuman que él inicia su salto en el mismo ángulo y con la misma fuerza).
2. La altura A metros de una pelota lanzada verticalmente, t segundos después del lanzamiento, está dada por $A(t) = 36t - t^2$.
- a) Organicen los datos de forma tabular y gráfica.
- b) Expresen el dominio y el rango de la función.
- c) ¿Cuánto se demora la pelota en alcanzar la máxima altura?
- d) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza la pelota?
- e) ¿Cuánto se demora la pelota en llegar nuevamente al suelo?
3. La temperatura T° (expresada en grados Celsius) en un invernadero, t horas después del anochecer (7 p. m.), está dada por $T(t) = \frac{1}{4}t^2 - 5t + 30$, ($t \leq 20$)
- a) Organicen los datos de forma tabular y gráfica
- b) Expresen el dominio y el rango de la función
- c) ¿Cuál es la temperatura en el invernadero al anochecer?
- d) Un cierto tipo de geranio no sobrevive en temperaturas menores a 2°C . Entonces, ¿se pueden cultivar estas plantas en el invernadero? Expliquen.
- e) ¿A qué hora la temperatura en el invernadero es de 9°C ?



Importante

Las calculadoras estimulan la actividad matemática. Mediante el empleo de esta herramienta, los estudiantes tienen mayores posibilidades para tomar una decisión, discutir con mayor libertad, etc. Incluso aumenta la motivación de los niños por la matemática (Fielker, 1986). Se descarta así la creencia de que la calculadora reduzca la comprensión matemática por parte de la persona que la emplea (Cockcroft, 1982).

Se recomienda visitar: **Uso de los recursos tecnológicos en el aprendizaje de la matemática**
http://sistemas02.minedu.gob.pe/archivosdes/fasc_mat/04_mat_d_s1_f6.pdf

Situación 3

Sesión taller matemático

Funciones cuadráticas que previenen el envenenamiento

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Una persona se ha intoxicado al ingerir accidentalmente un medicamento vencido. Se estima que el porcentaje de sangre contaminada, t horas después de ocurrida la intoxicación, está dada por la función cuadrática $g(t) = 20t - t^2 + 10$. Halla el valor máximo de la función e interprétala.

Indicadores <ul style="list-style-type: none">• Elabora modelos a partir de situaciones de cambio usando las funciones cuadráticas con coeficientes naturales y enteros.• Ordena datos en esquemas para organizar situaciones de cambio mediante funciones cuadráticas.• Grafica en el plano cartesiano diversos valores a partir de la organización de datos para resolver problemas de cambio que impliquen funciones cuadráticas.• Interviene y opina respecto al proceso de resolución de problemas que implican usar funciones cuadráticas.• Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucran funciones cuadráticas.• Utiliza la gráfica de la función cuadrática para determinar los valores máximos y mínimos y los puntos de intersección con los ejes coordenados para determinar la solución de la ecuación cuadrática implicada en el problema.• Justifica mediante procedimientos gráficos o algebraicos que la función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, o sus expresiones equivalentes, modela la situación problemática dada.	Contexto Científico
Conocimiento Función cuadrática de la forma	Grado 4.º de Secundaria
¿Cuándo desarrollarla? Es recomendable resolver problemas que involucren funciones cuadráticas cuando los estudiantes hayan adquirido nociones de funciones lineales y funciones lineales afines, correspondientes al primer y segundo grados de Secundaria, respectivamente. La actividad se desencadena a partir de preguntas que al ser respondidas por los estudiantes en forma grupal promueven la comprensión del problema, la elaboración del plan de resolución, la ejecución del plan y, finalmente, la reflexión y la autoevaluación del estudiante.	
Sirve para: <ul style="list-style-type: none">• Resolver situaciones problemáticas de contexto real que impliquen aplicar funciones cuadráticas.• Desarrollar estrategias de resolución de situaciones modeladas por funciones cuadráticas.	
¿Qué necesitas? <ul style="list-style-type: none">• Texto distribuido por el Ministerio de Educación para el tercer y cuarto grados de Secundaria y otros textos de consulta que contengan la descripción de situaciones problemáticas que involucren la aplicación de funciones cuadráticas.• Papel cuadriculado o milimetrado para construir la función cuadrática. Si tienes una calculadora que grafica funciones, puedes utilizarla.	
Conocimientos previos <ul style="list-style-type: none">• Números racionales, representación y equivalencias	

I. ANTES DE HACER, VAMOS A ENTENDER ¿De qué trata el problema?

1. ¿Qué conocimiento necesitan saber para resolver este problema?
2. ¿El porcentaje de sangre contaminada está en función de qué variable?
3. En la ecuación $g(t) = 20t - t^2 + 10$, ¿qué representan t y $g(t)$?
4. En la función anterior, ¿cuál es la variable independiente y dependiente? Justifiquen su respuesta.
5. ¿Qué significan las variables independiente y dependiente de la función en el contexto del problema? Describan su interpretación.
6. ¿Qué les pide el problema?
7. ¿Qué significa hallar el valor máximo de la función? Expliquen en forma escrita.



En pareja

II. ELABORA UN PLAN DE ACCIÓN

1. ¿Qué estrategia pueden utilizar para hallar el valor máximo de la función?
2. ¿Cómo graficarían la función?
3. ¿Les convendría graficar con mayor precisión la función cuadrática dada? ¿Cuál sería la estrategia más eficiente? Pueden elegir más de una respuesta.
 - a) Elaborar una tabla de doble entrada calculando diferentes valores de $g(t)$, asignando valores arbitrarios de t .
 - b) Sustituir distintos valores arbitrarios de t hasta obtener un valor máximo para $g(t)$.
 - c) Igualar la función cuadrática a cero para hallar los valores de t , con la finalidad de determinar los puntos de intersección con el eje de las abscisas.
 - d) Utilizar una calculadora o una computadora con programa informático para graficar funciones.



En pareja

III. DESARROLLA TU PLAN

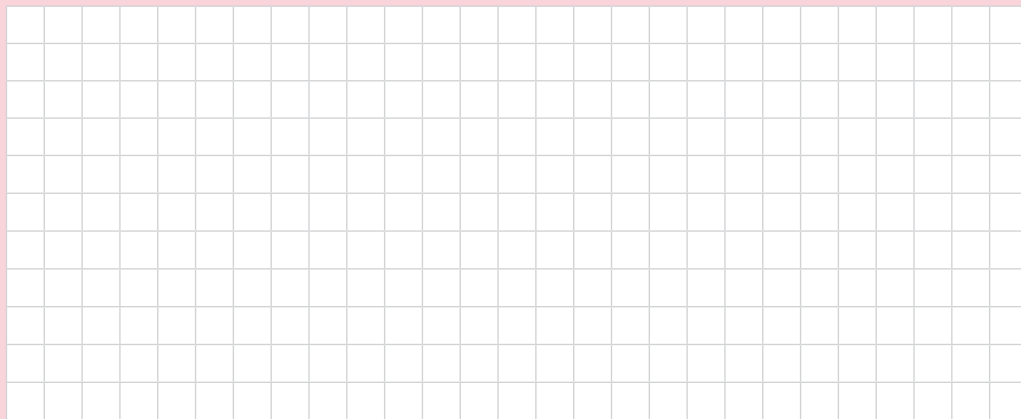


En pareja

1. Completen la siguiente tabla:

t	0	5	9	10	11	15	20
$g(t)$							

2. Con los datos de la tabla anterior, grafiquen la función.



- ¿Qué forma tiene la gráfica? ¿Se parece a alguna curva que ya conocen?
- ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola? ¿Pueden identificarlas?
- Si igualan a cero la función cuadrática, es decir, $20t - t^2 + 10$, ¿qué valores obtienen para t ?
- Ubiquen los valores de t en el gráfico
- ¿Los valores de t pueden ser negativos? Justifiquen su respuesta.
- ¿La gráfica de la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo?
- ¿Cuál es el valor máximo que alcanza la función?
- Interpreten el valor máximo en el contexto del problema.

IV. SÁCALE EL JUGO A TU EXPERIENCIA



En pareja

1. ¿Cuál es la estrategia que les ayudó a resolver el problema? Justifiquen su respuesta.
2. Si se considera al paciente en riesgo vital cuando el porcentaje de sangre contaminada es más de 74 %, ¿en qué tiempo ocurre la situación? Justifiquen su respuesta.

REFERENCIAS

Manual del docente del texto de Matemática del tercer grado de Secundaria (pág. 130). Grupo Editorial Norma S. A. C. Lima, 2012.

Proponemos este taller para estudiantes de cuarto grado porque la resolución del problema implica usar inecuaciones cuadráticas. Sin embargo, la actividad puede ser desarrollada por estudiantes del tercer grado, y en el contexto de la resolución del problema se pueden abordar inecuaciones cuadráticas.



Importante

El programa Excel es un paquete informático que, a pesar de no ser diseñado específicamente para la educación, es muy útil, pues integra tres ambientes propios de la actividad matemática, que permiten:

- 1) La posibilidad de inscribir numerosos datos y relacionarlos con funciones, fórmulas y operadores, mediante una hoja de cálculo
- 2) La posibilidad de organizar los datos de forma sistemática en filas y columnas
- 3) La posibilidad de graficar la información proporcionada por la base de datos

En los nuevos textos de Matemática, pueden encontrar actividades en Excel. Por ejemplo: en el libro de primer grado de Secundaria, pág. 153.

Situación 3

Sesión taller matemático

Indicadores <ul style="list-style-type: none">• Elabora modelos a partir de situaciones de cambio usando las funciones cuadráticas con coeficientes naturales y enteros.• Ordena datos en esquemas para organizar situaciones de cambio mediante funciones cuadráticas.• Grafica en el plano cartesiano diversos valores a partir de la organización de datos para resolver problemas de cambio que impliquen funciones cuadráticas.• Interviene y opina respecto al proceso de resolución de problemas que implican usar funciones cuadráticas.• Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucran funciones cuadráticas.• Utiliza la gráfica de la función cuadrática para determinar los valores máximos y mínimos y los puntos de intersección con los ejes coordenados para determinar la solución de la ecuación cuadrática implicada en el problema.• Justifica mediante procedimientos gráficos o algebraicos que la función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, o sus expresiones equivalentes, modela la situación problemática dada.	Contexto Científico
Conocimiento <ul style="list-style-type: none">• Funciones cuadráticas	Grado 3.º de Secundaria
¿Cómo hacerlo? Los estudiantes emplearán los textos del tercer grado distribuidos por el Ministerio de Educación, para resolver planteamientos problemáticos propuestos por niveles de complejidad.	
Sirve para: <ul style="list-style-type: none">• Resolver problemas que implican usar funciones cuadráticas.	
¿Qué necesitas? <ul style="list-style-type: none">• Texto del tercer grado de Secundaria distribuido por el Ministerio de Educación	
Conocimientos previos <ul style="list-style-type: none">• Función cuadrática	

¿Qué ha ocurrido respecto a las situaciones planteadas en torno a la función cuadrática?

Los estudiantes, a partir de una actividad vivencial, han realizado mediciones. Posteriormente, a partir de una actividad lúdica, establecieron equivalencias entre las diversas expresiones con los números racionales. Asimismo, han resuelto problemas aditivos, apoyados en un recurso gráfico. Finalmente, se propuso una actividad taller donde los estudiantes desplegaron sus capacidades en torno a la resolución del problema.

5.2 Algunas actividades para el desarrollo de las capacidades vinculadas a las funciones cuadráticas

A. RECONOCIENDO ALGUNAS ACTIVIDADES PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DE MATEMATIZAR

Mediante las funciones cuadráticas, se pueden expresar procesos y fenómenos del mundo real. Por ejemplo, se explicita la capacidad de matematización en lo siguiente:

- Medición de áreas de superficies rectangulares para determinar el área máxima, que se expresa en el vértice de la parábola generada.
- Movimiento de cuerpos en campo de fuerza uniforme. Se destacan aquellos en los que el campo de fuerza es la gravedad o un campo eléctrico uniforme.
- Superficies reflectantes con sección parabólica. Son fenómenos en que el foco capta o envía rayos que se reflejan en una superficie parabólica. El proceso de matematización que se inicia para el estudio de estos fenómenos incluye los relacionados con espejos, lentes, antenas parabólicas y lámparas.
- Movimiento variado de cuerpos. Se destacan aquellos que están relacionados con la aceleración constante que experimentan los cuerpos .
- Relación entre ingresos y descuentos para determinar cuánto deben ser mis ingresos máximos que debo tener para evitar el descuento de mi monto.

A continuación, presentamos algunas orientaciones sobre cómo propiciar escenarios adecuados en torno a la matematización.

- **Situación problemática**
Altos costos de pasajes que suben a fin de año.
- **Propósito**
Buscar alguna estrategia para abaratar costos de manera que no supere los S/.3000, monto que se recaudará con la cotización mensual de los padres de familia hasta 15 días antes del viaje.
- **Actividades**

Realizar el estudio de costos de pasajes para el transporte de los estudiantes a la ciudad de Cusco, ida y vuelta.
Evaluar todas las ofertas propuestas por las empresas de transporte con la finalidad de abaratar costos.
Si amerita, proponer a la junta directiva de la otra promoción incluirla en la excursión.
- **Producto**
Optar por la propuesta de viaje que más convenga.

En esta unidad se propone empezar el estudio de las funciones cuadráticas con una actividad vivencial. En ella los estudiantes registran datos a partir de un contexto comercial en que reconocen condiciones de un viaje de promoción sobre la base de la cantidad de estudiantes que participan.

B. RECONOCIENDO ALGUNAS ACTIVIDADES PARA EL DESARROLLO DE LA CAPACIDAD DE REPRESENTACIÓN

Las habilidades en torno a la representación de la función cuadrática implican desarrollar:

- Representación de forma tabular. Por medio de una tabla investigaremos cómo la variación de una magnitud afecta a otra magnitud. Para elaborar la tabla, daremos los diferentes valores que podrían tomar la variable independiente.
- Representación gráfica o geométrica. El empleo del sistema de coordenadas cartesianas constituye una herramienta valiosa para resolver una gran cantidad de problemas. Además, permite reconocer las propiedades de la parábola para identificar puntos máximos o mínimos en la condición del problema, así como establecer relaciones de forma más directa entre las variables.
- La representación algebraica. Pueden intervenir dos o más variables: 'x' e 'y'. El valor de 'y' depende del valor de 'x'; por tal razón, podemos decir que 'y' es la variable dependiente y 'x' es la variable independiente.

Plantear actividades que impliquen procesos dinámicos como la medición

ESCENARIO: Taller matemático

TÍTULO: Funciones cuadráticas que previenen el envenenamiento

Esta capacidad se manifiesta:

- En la presentación en una tabla de doble de entrada de la variación de datos de la función $g(t)$ en dependencia del tiempo. Con esto podrán hallar el tiempo requerido para que la función cuadrática alcance un valor máximo.

Completen en la siguiente tabla:

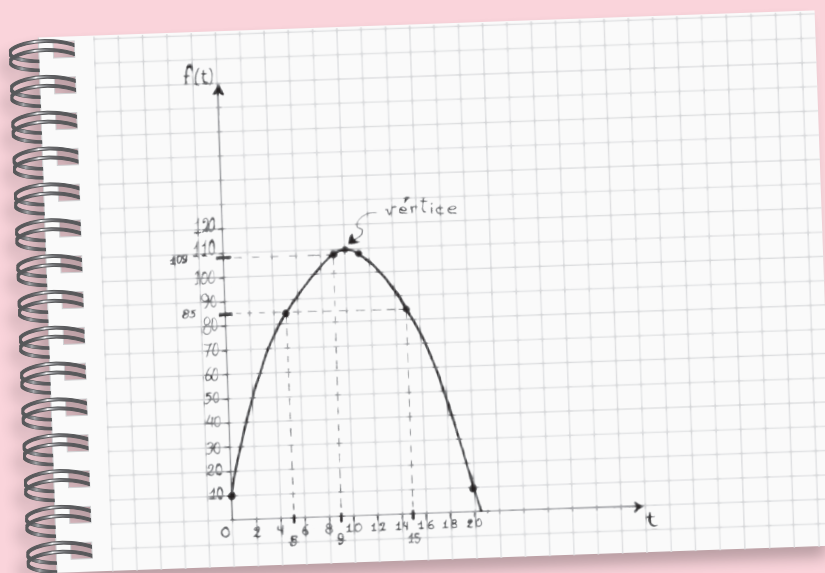
t	0	5	9	10	11	15	20
$g(t)$	10	85	109	110	109	85	10

Plantear actividades que impliquen esquemas para establecer relaciones entre expresiones equivalentes

Esta capacidad se manifiesta:

- En la elaboración de una gráfica donde los datos de la tabla se han trasladado a un gráfico de la función cuadrática, en el plano de coordenadas cartesianas.

Con los datos de la tabla anterior, grafiquen la función $20t - t^2 + 10 = f(t)$



OTRAS ACTIVIDADES

ESCENARIO: Laboratorio matemático

TÍTULO: Funciones cuadráticas para diseñar cohetes interestaciales

Esta capacidad se manifiesta:

- En el uso de esquemas para capturar gráficamente la situación durante el proceso de la resolución del problema. Pueden realizar esquemas de la trayectoria o la forma del cohete, y en ellas señalar las dimensiones, etc.
- En el uso de la tabla para capturar la situación problemática y poder determinar la altura alcanzada del cohete, en función del tiempo de vuelo. El uso de materiales concretos, como la botella, el corcho, la válvula de aire, o modelar el 'cohete interestacial', es otra manifestación de la capacidad de representar.

C. RECONOCIENDO ALGUNAS ACTIVIDADES EN TORNO A LA CAPACIDAD DE COMUNICACIÓN

La comunicación matemática es una de las capacidades fundamentales e inherentes a la competencia de resolución de problemas. Se manifiesta en cada momento del desarrollo de las actividades de aprendizaje.

¿Cómo se manifiesta la capacidad de comunicación en las actividades anteriores?

ESCENARIO: Taller matemático

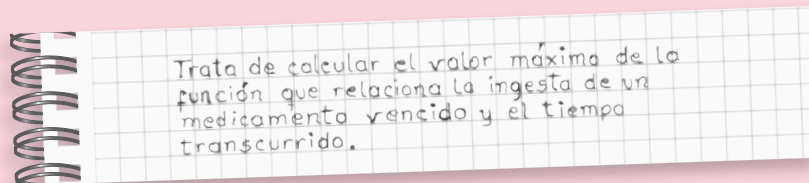
TÍTULO: Funciones cuadráticas que previenen el envenenamiento

Esta capacidad se manifiesta:

- Desde la comprensión del enunciado del problema, pues para ello el estudiante tiene que leer. Para evidenciar la comprensión, se formulan preguntas como las referidas en la sección "Antes de hacer, trata de entender".

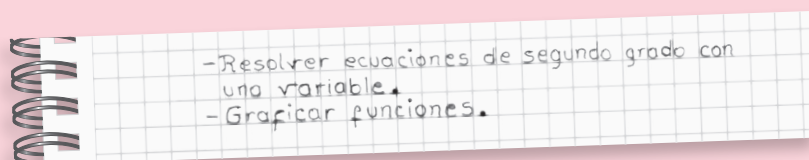
I. Antes de hacer, trata de entender

1) ¿De qué trata el problema?



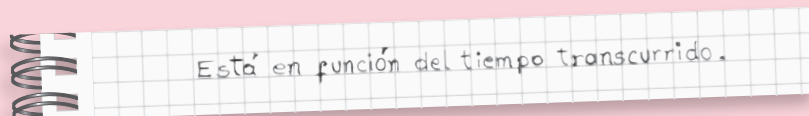
Trata de calcular el valor máximo de la función que relaciona la ingesta de un medicamento vencido y el tiempo transcurrido.

2) ¿Qué conocimiento necesitas saber para resolver este problema?



-Resolver ecuaciones de segundo grado con una variable.
-Graficar funciones.

3) ¿El porcentaje de sangre contaminada está en función de qué variable?



Está en función del tiempo transcurrido.

- Cuando interactúan los estudiantes al trabajar en grupo, emplean el lenguaje oral o escrito en cada una de las etapas de la resolución del problema.
- Cuando se solicita a los estudiantes la presentación de los resultados o los procesos de resolución del problema en forma oral o escrita.

ESCENARIO: Laboratorio matemático

TÍTULO: Funciones cuadráticas para diseñar cohetes interestaciales

Esta capacidad se manifiesta:

- En la interacción entre estudiantes y entre estos con el docente. La naturaleza propia del laboratorio matemático promueve esta relación. En el laboratorio descrito no solamente se pone a prueba la validez de una ley física, sino fundamentalmente se manipulan objetos concretos para la comprensión y la formulación de un problema, y esta forma de hacer matemática implica interacción mediante la comunicación.
- En la comprensión de las instrucciones, sea a partir de la lectura de material escrito o a partir de la comprensión de las indicaciones que da el docente en forma oral.
- En la descripción oral o escrita del procedimiento para aplicar la función cuadrática que describe el movimiento vertical de los cuerpos. Por ello, se recomienda que las actividades sean realizadas en grupo para asegurar la comunicación en forma explícita.

D. RECONOCIENDO ALGUNAS ACTIVIDADES EN TORNO A LA CAPACIDAD Y ESTRATEGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

ESCENARIO: Proyecto matemático

TÍTULO: Funciones cuadráticas que abaratan costos de viaje de promoción

Los proyectos matemáticos implican desarrollar la capacidad de comunicación, pues estas son propiamente actividades grupales. Esta capacidad se manifiesta:

- Cuando el docente formula la situación problemática de buscar estrategias para abaratar los costos de pasajes. Los estudiantes deben comprender la situación, así como las indicaciones que proporciona el docente.
- Al elaborar en forma oral o escrita los informes intermedios del proyecto. En estos informes necesariamente se presentan datos y resultados de cálculos.
- Durante la búsqueda de información de las propuestas de las empresas de transporte. En esta actividad los estudiantes tienen que recoger información en forma escrita u oral.

ESCENARIO: Taller matemático

TÍTULO: Funciones cuadráticas que previenen el envenenamiento

Esta capacidad se manifiesta:

- Durante todo el taller, pues este consiste en resolver una situación problemática. Se sugiere seguir procedimientos de varios pasos que conducen a la solución matemática, para activar mecanismos de control eficaces y sostenidos.
- Al formular preguntas durante la última fase del proceso de resolución del problema, a fin de que los estudiantes interpreten, evalúen y validen la solución obtenida. Por ejemplo, se plantea la estrategia de reflexión modificando las condiciones o los datos del problema y resolver uno nuevo. Este es el caso de la pregunta: ¿cómo cambia la condición del problema, si representamos la situación problemática por la inequación $20t - t^2 + 10 \geq 74$?
- Cuando los estudiantes seleccionan una estrategia para determinar el tiempo transcurrido desde el consumo del medicamento. Para ello, pueden realizar un gráfico en el plano cartesiano, organizar los datos en tablas o usar una calculadora, tal como se observa en el siguiente ejemplo.

Sí se considera al paciente en riesgo vital cuando el porcentaje de sangre contaminada es más de un 74 %, ¿en qué tiempo ocurre la situación?

Handwritten mathematical work on a grid notebook showing the solution to a quadratic inequality:

$$g(t) = 20t - t^2 + 10$$
$$74 = 20t - t^2 + 10$$
$$t^2 - 20t + 64 = 0$$

Aplicando factorización

$$t^2 - 20t + 64 =$$
$$\begin{array}{r} t \quad \quad \quad -16 = -16t \\ t \quad \quad \quad -4 = \frac{-4t}{-20t} \end{array}$$

Luego $(t-16)(t-4) = 0$

$$\begin{array}{l} t-16 = 0 \\ t = 16 \\ t-4 = 0 \\ t = 4 \end{array}$$

•• El tiempo que ocurre es de 4 horas o 16 horas.

ESCENARIO: Laboratorio matemático

TÍTULO: Funciones cuadráticas para diseñar cohetes interestaciales

Esta capacidad se manifiesta:

- Al aplicar la estrategia de resolver un problema más simple. Cuando el estudiante se encuentra con la dificultad de que no puede calcular la altura alcanzada por el cohete debido a que la velocidad inicial es desconocida, divide analíticamente el recorrido en dos partes: uno de subida, en el que la velocidad final se hace igual a cero, y uno de bajada con velocidad inicial igual cero.
- Cuando decide cómo construir la gráfica de la función que relaciona la altura alcanzada por el cohete en función del volumen. Tiene la posibilidad de seleccionar una estrategia: puede graficar la función utilizando lápiz y papel cuadriculado del cuaderno, papel milimetrado, una calculadora gráfica o un *software* matemático.

ESCENARIO: Proyecto matemático

TÍTULO: Funciones cuadráticas que abaratan costos de viaje de promoción

Esta capacidad se manifiesta:

- Al elaborar el diagrama tabular para organizar la propuesta del costo de pasajes de la empresa Cruz Azul. Esta es una estrategia de resolución de problemas.

N.º de estudiantes	Precio de pasaje (en S/.) por todos los estudiantes, incluido IGV	Costo total de pasajes (en S/.), incluido IGV
40	70	
40 + 1	70 - 1	
40 + X		

- Al usar diagramas cartesianos como estrategia de resolución de problemas. En esta actividad, para determinar el valor del número de estudiantes x para el cual la función precio total de pasajes $P = f(x)$ tiene un valor máximo, se grafica la función cuadrática en el plano cartesiano.
- Al realizar una secuencia de actividades desde la comprensión del problema hasta la reflexión sobre la solución obtenida. En esta actividad, para determinar la cantidad de miembros de la promoción que pueden viajar, el estudiante activa mecanismos de control de procesos hasta encontrar la solución del problema.

E. RECONOCIENDO ALGUNAS TAREAS PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DE USO DE LENGUAJE SIMBÓLICO, TÉCNICO Y FORMAL

ESCENARIO: Taller matemático

TÍTULO: Funciones cuadráticas que previenen el envenenamiento

Esta capacidad se manifiesta:

- En el uso de las variables dependiente e independiente de la función
 $g(t) = 20t - t^2 + 10$
- Cuando el estudiante utiliza fórmulas para resolver una ecuación cuadrática, pues está usando expresiones simbólicas que se rigen por reglas y convenciones matemáticas dentro del contexto matemático. Por ejemplo:

Si igualas a cero la función cuadrática; es decir: $20t - t^2 + 10 = 0$, ¿qué valores obtienes para t ?

Handwritten mathematical work on grid paper showing the solution of a quadratic equation:

$$20t - t^2 + 10 = 0$$
$$0 = t^2 - 20t - 10$$

Observación

$t = -0,45$ no puede ser porque el tiempo siempre es (t) .

Aplicando la fórmula general

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$t = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)}$$
$$t = \frac{20 \pm \sqrt{440}}{2} = \frac{20 \pm 20,9}{2}$$

c.s. = $\{-0,45; 20,45\}$

- Al formular una inecuación cuadrática para expresar algebraicamente la condición de que el paciente está en riesgo vital si el porcentaje de sangre contaminada es del 74 %.
- Cuando usa algoritmos para resolver la inecuación $20t - t^2 + 10 > 74$, se explicita esta capacidad.

ESCENARIO: Laboratorio matemático

TÍTULO: Funciones cuadráticas para diseñar cohetes interestaciales

Esta capacidad se manifiesta:

- Cuando el estudiante responde a la pregunta: ¿por qué debemos considerar como negativo el valor de la aceleración gravitacional cuando el movimiento es hacia arriba?, pues está usando expresiones simbólicas que se rigen por convenciones matemáticas.
- Cuando aplica la ley del movimiento con aceleración constante definida por la ecuación $h = V_i t \pm gt^2$, pues implica usar expresiones algebraicas que se rigen por convenciones matemáticas.
- Cuando determina la altura alcanzada en función del tiempo de vuelo, tiene que reemplazar los valores del tiempo de vuelo registrados mediante el uso del cronómetro. Esto implica usar convenciones matemáticas; es decir, la sustitución de los valores del tiempo se realiza considerando que la variable independiente es el tiempo y la altura es la variable dependiente.

ESCENARIO: Proyecto matemático

TÍTULO: Funciones cuadráticas que abaratan costos de viaje de promoción

Esta capacidad se manifiesta:

- Cuando se determina la variación del pasaje en función del aumento del número de estudiantes, pues se está utilizando la operación de adición, que explicita el desarrollo de esta capacidad.
- Para definir la función cuadrática que describe la propuesta de la empresa Cruz Azul, pues para ello se necesita usar expresiones algebraicas que generalizan el número de estudiantes y la correspondiente expresión general de costo del pasaje.
- Cuando se realiza la tarea de determinar el valor del número de estudiantes para el cual la función precio total de pasajes tiene un valor máximo, pues se está recurriendo a expresiones matemáticas sujetas a convenciones matemáticas.

F. RECONOCIENDO ALGUNAS ACTIVIDADES EN TORNO A LA CAPACIDAD DE ARGUMENTAR

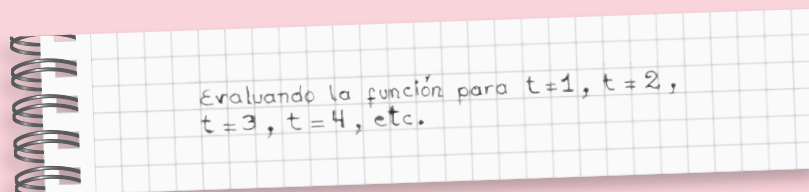
ESCENARIO: Taller matemático

TÍTULO: Funciones cuadráticas que previenen el envenenamiento

Esta capacidad se manifiesta:

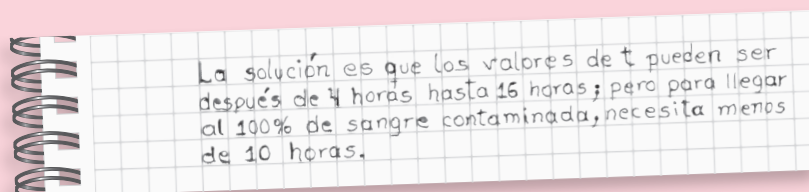
- En cada uno de los pasos que sigue el estudiante en la resolución del problema, pues tiene que justificarse utilizando un lenguaje natural o planteando un argumento matemático. Por ejemplo, en la respuesta a la pregunta: ¿cómo se puede calcular el valor máximo que puede asumir la variable de una función cuadrática?, tiene que dar una justificación.
- Al justificar matemáticamente cómo halla una respuesta. Por ejemplo, cómo determina el valor del número de estudiantes x para el cual la función precio total de pasajes $P = f(x)$ tiene un valor máximo. La siguiente tarea es otro ejemplo del uso de esta capacidad:

¿Cómo se puede calcular el valor máximo que puede asumir la variable de una función cuadrática?



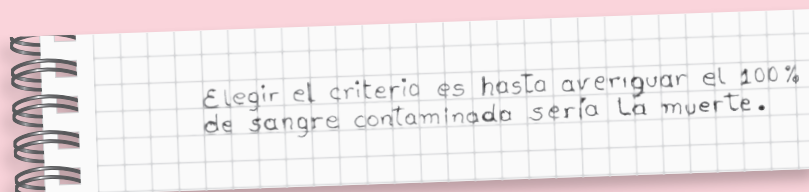
Evaluando la función para $t=1$, $t=2$,
 $t=3$, $t=4$, etc.

Si la inecuación anterior tiene dos soluciones, ¿ambas representan la solución del problema?



La solución es que los valores de t pueden ser después de 4 horas hasta 16 horas; pero para llegar al 100% de sangre contaminada, necesita menos de 10 horas.

¿Cuál es el criterio para elegir una de las soluciones de la inecuación cuadrática?



Elegir el criterio es hasta averiguar el 100% de sangre contaminada sería la muerte.

ESCENARIO: Laboratorio matemático

TÍTULO: Funciones cuadráticas para diseñar cohetes interestaciales

Esta capacidad se manifiesta:

- Cuando responde a la pregunta: ¿por qué debemos considerar como negativo el valor de la aceleración gravitacional cuando el movimiento es hacia arriba?, pues tiene que dar una argumentación matemática a su respuesta.
- Al justificar la selección de estrategias para encontrar la solución al problema. El estudiante puede emplear un razonamiento puramente lógico o utilizar un procedimiento estrictamente matemático.
- Al justificar las condiciones para que el cohete despegue de la Tierra. Puede hacerse recurriendo a principios físicos y en forma verbal, pero también se puede solicitar al estudiante la justificación matemática de su respuesta utilizando ecuaciones.

ESCENARIO: Proyecto matemático

TÍTULO: Funciones cuadráticas que abaratan costos de viaje de promoción

Esta capacidad se manifiesta:

- Para justificar la conveniencia de optar por la alternativa propuesta por la empresa Cruz Azul. Esto implica analizar el comportamiento de la función cuadrática. Hay un incremento en los pasajes a medida que aumenta la cantidad de estudiantes; pero a partir de cierto número de ellos la función alcanza un valor máximo y luego empieza a disminuir. Utilizar este comportamiento de la función para la elección de esta empresa es una justificación estrictamente matemática.
- En el desarrollo del proyecto donde el estudiante tiene que resolver un problema matemático justificando sus procedimientos y resultados.



Ojo con este dato

Las capacidades matemáticas descritas se desarrollan de manera transversal en cada etapa de la resolución de la situación problemática, desde la comprensión del problema hasta la evaluación y reflexión de los procesos y resultados. Por ello, en las situaciones descritas para cada actividad, se hacen explícitas las capacidades, no siendo las únicas. Sugerimos realizar la identificación de las situaciones en las que se explicitan las capacidades en el desarrollo de las siguientes actividades.

A continuación, proponemos la siguiente actividad:

Plantear los siguientes problemas para que resuelvan los estudiantes en grupos de tres o cuatro. En el proceso de resolución del problema, identificar actividades realizadas por los estudiantes en las que se explicitan las capacidades matemáticas.

- 1) En una prueba para metabolismo de azúcar en la sangre, llevada a cabo en un intervalo de tiempo, la cantidad de azúcar en la sangre era una función del tiempo t (tiempo medio en horas) y dada por:

$$A(t) = 3,9 + 0,2t - 0,1t^2$$

Encuentre la cantidad de azúcar en la sangre:

- a) Al principio de la prueba
 - b) 1 hora después
 - c) 2,5 horas después de iniciada
- 2) El número de unidades vendidas semanalmente de cierto producto depende de la cantidad ' x ' en dólares invertida en publicidad ' y ', que está dada por la función $y = 70 + 150x + 0,3x^2$. ¿Cuánto debería invertir a la semana en publicidad para obtener un volumen de ventas máximo? ¿Cuál es este volumen de ventas máximo?

VI. ¿Cómo desarrollamos escenarios de aprendizaje respecto a sucesiones con números reales y programación lineal?

En la naturaleza se pueden encontrar muchos ejemplos de patrones. En los seres vivos que habitan nuestro planeta, basta observar algunas flores, la piel de algunos animales como la cebra, las figuras en las alas de la mariposa o algunas formaciones geológicas, etc. Sin embargo, en las aulas, por lo general, se desarrolla el tema de patrones de manera simbólica y descontextualizada; por ello, hay poco interés de los estudiantes en este tema. Por esta razón, es recomendable que en las sesiones de aprendizaje se motive a los estudiantes dando la oportunidad de observar patrones en la naturaleza.

Otro de los temas que no se aborda en la Educación Secundaria es el referido a la programación lineal, que por lo general se deja para el final por ser un tema de aplicación, y cuando no alcanza tiempo, sencillamente no se desarrolla. La dificultad puede estar asociada a que la programación lineal es una técnica matemática relativamente reciente que se desarrolla en el siglo XX, consistente en una serie de métodos y procedimientos que permiten resolver problemas de optimización en el ámbito, principalmente, de las ciencias sociales.

Por ello, presentaremos problemas simples de programación lineal de dos variables, los llamados problemas bidimensionales. Para sistemas de más variables, el procedimiento es más complejo y se resuelven por el método Simplex, creado por el matemático estadounidense G. B. Danzig en 1951. El matemático indio Narendra Karmarkar publica en 1984 un algoritmo más rápido que el método anterior, para problemas en que intervienen muchas variables. Estos métodos se implementan con el soporte de la computadora.

Finalmente, hay la creencia de que el uso de los materiales concretos para la enseñanza de las matemáticas en secundaria no es pertinente. En realidad, es necesario usar materiales concretos, inclusive para reforzar la comprensión de técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones.

Sesión laboratorio matemático:
Sucesiones de diagonales en la naturaleza

Sesión laboratorio matemático:
Juego de las ranas saltarinas

Sesión taller matemático:
Optimizando ganancias en el negocio de muebles

6.1 Algunas situaciones de aprendizaje

Situación 1

Sesión laboratorio matemático:

Sucesiones de diagonales en la naturaleza

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

¿Es posible reconocer regularidades en la naturaleza? Por ejemplo, en las semillas de eucalipto hay formas muy peculiares de presentarse.



Indicadores

- Plantea modelos de una sucesión creciente o decreciente a partir de regularidades reales o simuladas.
- Ordena datos en esquemas para organizar regularidades mediante sucesiones crecientes y decrecientes.
- Interviene y opina presentando ejemplos y contraejemplos sobre los resultados de un modelo de sucesión creciente y decreciente.
- Elabora estrategias heurísticas (ensayo-error, hacer una lista sistemática, empezar por el final, diagrama de tiras, establecer sus metas, suponer el problema resuelto, reducir el problema a uno más simple) para resolver problemas que involucran sucesiones crecientes y decrecientes.
- Utiliza expresiones algebraicas para generalizar sucesiones crecientes y decrecientes.
- Justifica procedimientos y posibles resultados a partir de una regla que genera sucesiones crecientes y decrecientes con números reales.

Contexto

Científico

Áreas afines

Ciencia, Tecnología y Ambiente

Conocimiento

- Sucesiones crecientes con números reales

Grado

5.º de Secundaria

¿Cuándo hacerla?

Al iniciar las actividades de sucesiones crecientes.

Tiempo

Sesión de 90 minutos

Sirve para:

- Modelar situaciones de la naturaleza mediante sucesiones crecientes

¿Qué necesitas?

- Regla
- Fotocopias de las imágenes de las semillas de eucaliptos para cada grupo

Conocimientos previos

- Sucesiones con números racionales

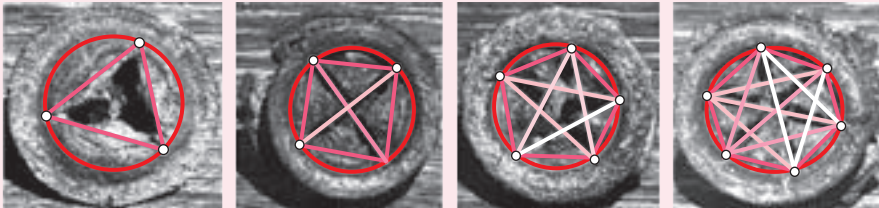
Actividad N.º 1



En pareja

Se propone modelar estas aberturas como polígonos y a su vez se plantea el reto de averiguar: ¿cuántas diagonales tendrá un polígono de cincuenta vértices?

Formen un polígono y diagonales a partir de las semillas de eucalipto.



Con los trazos realizados, completen el cuadro.

Figura	N.º de vértices	N.º de diagonales por colores
Triángulo	3	0
Cuadrilátero	4	1 + 1
Pentágono	5	2 + 2 + 1
Hexágono		
Heptágono		
...	¿Qué relación existe entre el número de vértices y el número con el que empiezan las sumas?	
Polígono de 50 lados	50	47 + 46 + 45 + 44 + 43 + ... + 4 + 3 + 2 + 1
	En general	
Polígono convexo de n lados	n	$(n - 3) + (n - 3) + (n - 4) + (n - 5) + (n - 6) + \dots + 1$

1. ¿Cómo se puede expresar más reducida la suma de $(n - 3) + (n - 3) + (n - 4) + (n - 5) + (n - 6) + \dots + 1$?

Para resolver esta tarea, primero recordemos ¿cómo hallar la suma de números naturales consecutivos?, ya que desde $(n - 3)$ hasta $+ 1$ son números consecutivos.

2. Veamos la famosa anécdota de la infancia de Gauss, en la que su profesor le planteó que hallara la suma de los cien primeros números naturales:
 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 50 + 51 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 =$

¿Cuánto es la suma total? _____

3. En general: la suma de números consecutivos $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n =$
4. Regresando al punto 1, reduzcan la suma $(n - 3) + (n - 3) + (n - 4) + (n - 5) + (n - 6) + \dots + 1$
5. Expresen la generalización para hallar el número de diagonales de un polígono convexo dependiendo del número de vértices.
6. Ahora respondan la pregunta inicial: ¿cuántas diagonales tendrá un polígono convexo de cincuenta vértices?

Actividad N.º 2

Reflexionen y respondan

Expliquen los procesos que han seguido para obtener la relación que permite calcular el número de diagonales de un polígono en función del número de vértices o lados.



En grupo

Actividad N.º 3

Situaciones problemáticas

Resuelvan los problemas 1, 2 y 3 de la página 93 del libro Matemática 5 de Secundaria.



En pareja

Situación 2

Sesión laboratorio matemático:

Juego de las ranas saltarinas

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

La siguiente es una actividad lúdica diseñada para la enseñanza de sucesiones crecientes y decrecientes a estudiantes de Educación Secundaria. Para el juego, se diseñan tableros que tienen figuras de ranas de dos colores. En este tablero hay que intercambiar las posiciones de las ranas de acuerdo con ciertas reglas de juego.

Indicadores

- Plantea modelos de una sucesión creciente o decreciente a partir de regularidades reales o simuladas.
- Ordena datos en esquemas para organizar regularidades mediante sucesiones crecientes y decrecientes.
- Interviene y opina presentando ejemplos y contraejemplos sobre los resultados de un modelo de sucesión creciente y decreciente.
- Elabora estrategias heurísticas (ensayo-error, hacer una lista sistemática, empezar por el final, diagrama de tiras, establecer sus metas, suponer el problema resuelto, reducir el problema a uno más simple) para resolver problemas que involucran sucesiones crecientes y decrecientes.
- Utiliza expresiones algebraicas para generalizar sucesiones crecientes y decrecientes.
- Justifica procedimientos y posibles resultados a partir de una regla que genera sucesiones crecientes y decrecientes con números reales.

Contexto

Lúdico

Áreas afines

Ciencia, Tecnología y Ambiente

Conocimiento

- Sucesiones crecientes y decrecientes

Grado

5.º de Secundaria

¿Cuándo hacerla?

Al iniciar o reforzar procesos de modelación matemática

Tiempo

sesión de 90 minutos

Sirve para:

- Modelar situaciones de juegos usando procesos de generalización

¿Qué necesitas?

- Base para el salto de las ranas
- Ocho ranitas que pueden ser de plástico o cartulina

Conocimientos previos

- Potenciación
- Secuencias numéricas

Introducción

En los tableros de las figuras hay ranas de dos colores. Pues bien, debes conseguir intercambiar las posiciones de las ranas teniendo en cuenta que ellas solo pueden avanzar ocupando la casilla que tienen delante si está vacía o saltando sobre una rana de color distinto y ocupando la siguiente casilla siempre que esta esté vacía.

¿Cuántos movimientos como mínimo se realizarán para pasar todas las fichas grises al lugar de las naranjas y viceversa en la figura A?



Debes resolver primero el juego con una rana de cada color, luego el de dos ranas de cada color, después el juego con tres ranas de cada color y, finalmente, el juego con cuatro ranas de cada color. Hay que registrar los movimientos que vayas efectuando en la tabla que se facilita e indicar el número de movimientos mínimos necesarios en cada caso.



<http://thales.cica.es/olimpiada2/?q=node/316>

Actividad N.º 1



En pareja

1. Completen la tabla y respondan:

N.º de figura	N.º de ranas de cada color	Orden del movimiento de las ranas según el color	N.º de movimientos mínimos
B	1	GRG 111	$3 = 4 - 1 = 2^2 - 1$
C	2	GRRGGRRG 1 2 2 2 1	$8 = 9 - 1 = 3^2 - 1$
D	3		
A	4		
.	.		
.	.		
.	.		
	n		

- ¿Cuál es el orden de los movimientos mínimos que se realizan para cambiar las ranas de color gris a las de color rojo en los casos que faltan? Inicien con una rana gris.
- ¿Cuántos movimientos se realizarán como mínimo para cambiar de ubicación una cantidad cualquiera de ranas 'n' en función del número de ranas de cada color?
- Expresen la generalización del número de movimientos mínimos en función del número de ranas de cada color.

Actividad N.º 4

Reflexionen y respondan



En grupo

Si se construyera un juego con nueve ranas de cada color, ¿cuántos movimientos mínimos se darían para lograr el objetivo de trasladar las ranas de un color hacia el lugar de las del otro color y viceversa?

Situación 3

Sesión taller matemático

Optimizando ganancias en el negocio de muebles

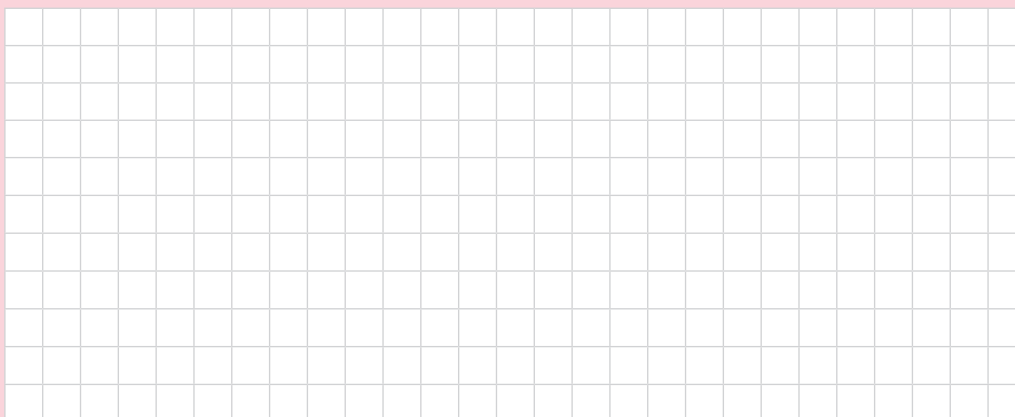
SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Una fábrica de muebles produce dos tipos de sillones: Relax y Elegant. La fábrica cuenta con dos secciones: carpintería y tapicería. Para hacer un sillón de tipo Relax, requiere una hora de carpintería y dos de tapicería; mientras que uno de tipo Elegant requiere tres horas de carpintería y una de tapicería.

El personal de tapicería trabaja un total de 80 horas y el de carpintería, 90. Las ganancias por las ventas por un Relax o Elegant son, respectivamente, S/.180 y S/.150. Calcular cuántos sillones de cada tipo hay que hacer para maximizar las ganancias.

Indicador <ul style="list-style-type: none">• Diseña modelos de situaciones reales o simuladas mediante sistemas de inecuaciones lineales de dos variables con coeficientes reales.• Elabora modelos de situaciones que requieren de optimización mediante el uso de la programación lineal.• Ordena datos en esquemas para establecer equivalencias mediante sistemas de inecuaciones lineales.• Grafica en el plano cartesiano las regiones que expresan todos los posibles valores que pueden asumir las variables de un sistema de inecuaciones.• Resume intervenciones respecto al proceso de resolución de problemas que implican usar métodos de optimización lineal• Elabora estrategias heurísticas para resolver problemas que involucran sistemas de inecuaciones lineales con dos variables.• Utiliza el sistema de coordenadas cartesianas para resolver problemas que implican sistema de inecuaciones lineales de tres variables.• Justifica mediante procedimientos gráficos o algebraicos el uso de métodos de optimización lineal de dos variables para resolver problemas.	Contexto Laboral Áreas afines Educación para el Trabajo
Conocimiento <ul style="list-style-type: none">• Introducción a la programación lineal	Grado 5.º de Secundaria
¿Cuándo hacerla? Después de resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos variables	
Sirve para: <ul style="list-style-type: none">• Optimizar situaciones económicas de producciones, transporte, etc.	
¿Qué necesitas? <ul style="list-style-type: none">• Regla• Hojas de papel milimetrado	
Conocimientos previos <ul style="list-style-type: none">• Inecuaciones lineales con dos variables• Sistemas de inecuaciones lineales con dos variables	

6. Grafiquen las inecuaciones en un sistema de coordenadas cartesianas en papel milimetrado o cuadrículado para determinar la región factible.



7. Evalúen las coordenadas de los puntos vértices de región factible en la función objetivo y determinen ¿en cuál de ellos se maximiza la función objetivo?

Actividad N.º 2

Reflexionen y respondan

1. ¿Por qué solo se evalúan las coordenadas de los vértices en la función objetivo?



En grupo

Actividad N.º 3

Situaciones problemáticas

1. Resuelvan el problema "Para actuar crítica y reflexivamente" de la página 59 del libro Matemática 5.º de Secundaria, en sus respectivos cuadernos.
2. Resuelvan los problemas 5 y 6 de la página 62 del libro Matemática 5.º de Secundaria, en sus respectivos cuadernos.



En pareja

Bibliografía

- Abdón, I. (2006). *Evaluemos competencias matemáticas*. Bogotá: Editorial Cooperativa Magisterio.
- Antonio da Silva, B., Passoni, J., Magalhaes, J., Souza, M., Bittar M., Thadeu, M. (2010). *Aprendizagem em matemática*. São Paulo: Papirus Editora.
- Araujo, M. (2008). *Matemáticas I*. México D. F.: Coordinación de Informática Educativa del Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa.
- Betancourt, J. (2009). *Pensamiento numérico y algebraico*. México D. F.: Editorial Cengage Learning.
- Castiblanco, A. (1999). *Nuevas tecnologías y currículo de Matemáticas*. Bogotá: Editorial Cooperativa Magisterio.
- Coll, C. (coord.) (2010). *Desarrollo, aprendizaje y enseñanza en la educación secundaria*. Barcelona: Editorial GRAÓ.
- D'Ámore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Editorial Cooperativa Magisterio.
- Dante, L. (2005). *Tudo é Matemática*, serie 6. São Paulo: Editorial Ática.
- Díaz, L. (1998). *Reflexiones didácticas en torno a Fracciones, Razones y Proporciones*. Santiago de Chile: Editorial Jordán S.A.
- Goñi, J., Goñi, I., Corbalan, F., Llenares, S., Penalva, C., Planas, N., Valls, J., Vanegas, Y. (2011). *Didáctica de la Matemática*. Barcelona: Editorial GRAÓ.
- Goñi, J., Barragués, I., Callejo, M., Fernández, J., Fernández, S., Font, V., Muños, J., Pujol, R., Torregrosa, G. (2011). *Complementos de Formación Disciplinar*. Barcelona: Editorial GRAÓ.
- Growws, D., Cebulla, K. (2000). *A Improving Student Achievement in Mathematics*. Geneva: Educational Practices Series University of Illinois at Chicago.
- Guelli, O. (2007). *Matemática Ensino Fundamental 3.º a 4.º ciclos*. São Paulo: Editorial Ática.
- Instituto Peruano de Evaluación y Acreditación de la Calidad de la Educación Básica. (2012). *Mapas de progreso de Número y operaciones, y Cambio y relaciones*. Lima.
- Isoda, M., Olfos, R. (2009). *El enfoque de Resolución de problemas*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Ministerio de Educación. (2005). Documento N.º 17. Informe pedagógico de resultados: Evaluación Nacional de rendimiento estudiantil 2004. Lima.
- Ministerio de Educación (2012). *Módulos de Resolución de Problemas: Resolvamos 1 y 2*. Lima.
- Ministerio de Educación (2012). *Matemática 3*. Lima: Editorial Norma.
- Ministerio de Educación (2012). *Matemática 4 y 5*. Lima: Editorial Santillana.
- Monereo, C. (coord.) (2009). *Pisa como excusa. Repensar la evaluación para cambiar la enseñanza*. Barcelona: Editorial GRAÓ.
- Ricotti S. (2006). *Juegos y problemas para construir ideas matemáticas*. Buenos Aires: Editorial Novedades Educativas.
- Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (2000). *Principios y estándares para la educación Matemática*. Sevilla: Proyecto Sur industrias gráficas, S. L.
- Swan, M. (2005). *Improving Learning In Mathematics: Challenges and Strategies*. University of Nottingham, Department for Education and Skills Standards Unit. University of Nottingham: Department for Education and Skills Standards Unit.

Enlaces web -----●

- Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas: El Trabajo de Allan Schoenfeld, recuperado el 1 de enero de 2013, www.cimm.ucr.ac.cr/hbarrantes.
- Marshall, A (2010). Discover strategies to engage young math students in competently using multiple representations, recuperado el 1 de enero de 2013, www.nctm.org/eresources/view_media.asp?article_id=9351
- Niss, M. (2011). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education, recuperado el 1 de enero de 2013, www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/download/672/678
- Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the danish KOM project, recuperado el 1 de enero de 2013, w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf
- Pisa, (2012). *Mathematics Framework*. To OECD, November, 2010. www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46961598.pdf
- Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics, recuperado el 1 de enero de 2013, link.springer.com/article/10.1007%2FBF03217474?l=true#

