

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO INFANTIL

**Encarnación Castro Martínez
M^a Angeles del Olmo Romero
Enrique Castro Martínez**

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO INFANTIL

**Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada
Facultad de Ciencias de la Educación
Campus de Cartuja s/n.
17081 Granada
Encarnación Castro Martínez
Angeles del Olmo Romero
Enrique Castro Martínez
Depósito legal: GR-1173-2002
I.S.B.N. : 84-932510-3-8**

TEMA I	3
MATEMÁTICA EN LA INFANCIA	3
1.1 OBJETIVOS Y FUNCIONES DEL ÁREA DE CONOCIMIENTO DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA	3
1.2 TEORÍAS DEL APRENDIZAJE	3
1.3 TEORÍA CONDUCTISTA	4
1.4 TEORÍA COGNITIVA	5
1.5 IMPLICACIONES PEDAGÓGICAS DE ESTAS TEORÍAS	5
1.6 PIAGET	7
1.7 DIENES	9
1.8 MIALARET	10
1.9 CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE LOS NIÑOS EN EDAD INFANTIL	11
1.10 EL JUEGO	12
1.11 PRINCIPIOS PEDAGÓGICOS DEL JUEGO	13
1.12 RECURSOS DIDÁCTICOS	14
TEMA 2	17
DISEÑO CURRICULAR DE EDUCACION INFANTIL	17
2.1 ANTECEDENTES HISTÓRICOS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA INFANTIL EN ESPAÑA	17
2.2 ORIENTACIONES PEDAGÓGICAS	17
2.3 LOS PROGRAMAS RENOVADOS	20
2.4 CURRÍCULUM DE MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN INFANTIL	25
2.4.I <i>Noción de Currículum</i>	25
2.4.II <i>Componentes del Currículum</i>	26
2.4.III <i>El Diseño Curricular Base para la Educación Infantil</i>	27
TEMA 3	33
LOGICA EN LA EDUCACION INFANTIL	33
3.1 INTRODUCCIÓN	33
3.2 LA LÓGICA Y EL LENGUAJE DIARIO	33
3.3 LÓGICA NATURAL Y LÓGICA FORMAL	35
3.4 NECESIDADES DE JUSTIFICACIÓN LÓGICA EN LOS NIÑOS	35
3.5 PERÍODOS DE DESARROLLO INTELLECTUAL	35
3.6 DESARROLLO INTELLECTUAL Y ESTRUCTURAS LÓGICAS. OPERACIONES	36
3.7 ESTRUCTURAS LÓGICAS OPERATORIAS	37
3.8 LA CLASIFICACIÓN Y SU RELACIÓN CON LA FORMACIÓN DE CONCEPTOS	38
3.9 GÉNESIS DE LAS ESTRUCTURAS DE CLASIFICACIÓN Y DE SERIACIÓN	39
3.10 LA CLASIFICACIÓN COMO ESTRUCTURAS DE CONOCIMIENTO	42
3.11 LAS CLASES JERÁRQUICAS	42
3.12 FASES DE DESARROLLO	43
3.13 LAS SERIACIONES COMO INSTRUMENTOS DE CONOCIMIENTO	44
3.14 CAPACIDADES A DESARROLLAR EN EL NIÑO	45
3.15 LA INFERENCIA TRANSITIVA	45
3.16 LA LÓGICA DE CLASES COMO INICIO AL DESARROLLO DEL NÚMERO	46
3.17 LA CONSERVACIÓN	48
3.18 MATERIALES, RECURSOS Y ACTIVIDADES	49
3.19 ACTIVIDADES	50
TEMA 4	55
GEOMETRÍA EN LA EDUCACION INFANTIL	55
ESPACIO - TIEMPO	55
4.1 EL ESPACIO	55
4.2 EL TIEMPO	55
4.3 COORDENADAS ESPACIALES	56
4.4 ESPACIO Y GEOMETRÍA	56
4.5 NECESIDAD DE CONOCIMIENTO ESPACIAL	57
4.6 PATRONES SENSORIALES	57
4.7 LA GEOMETRÍA EN LA ENSEÑANZA Y EN LA INVESTIGACIÓN	59
4.8 NOCIONES GEOMÉTRICAS	61

4.9 DESARROLLO DE LAS NOCIONES ESPACIO-TEMPORALES	63
4.10 ETAPAS EN EL DESARROLLO ESPACIAL	64
4.11 ETAPAS EN EL DESARROLLO DE LA NOCIÓN DE TIEMPO.....	66
4.12 DIAGNÓSTICO.....	66
4.13 TAREAS, JUEGOS, ACTIVIDADES.....	68
4.14 EXPLORACIÓN DEL TIEMPO.....	73
4.15 FIGURAS GEOMÉTRICAS	75
TEMA 5	77
EL NÚMERO EN LA EDUCACION INFANTIL	77
5.1 INTRODUCCIÓN	77
5.2 CONTEXTOS NUMÉRICOS.....	77
5.3 SECUENCIA NUMÉRICA.....	78
5.4 ASPECTO CARDINAL DEL NÚMERO.....	79
5.5 EL PROCESO DE CONTAR.....	80
5.6 PUNTOS DE VISTA SOBRE LA ACCIÓN DE CONTAR EN EL APRENDIZAJE DEL NÚMERO	81
5.7 TIPOS DE INVESTIGACIONES.....	81
5.8 CAPACIDADES NUMÉRICAS QUE HAN DE ADQUIRIR LOS NIÑOS.....	84
5.9 APRENDIZAJE DE LOS SÍMBOLOS.....	86
5.10 CONSIDERACIONES SOBRE EL CERO	87
5.11 ESTRUCTURA ADITIVA	88
5.12 ESTRATEGIAS PARA SUMAR.....	89
5.13 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	91
5.14 PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA	92
5.15 NIVELES DE ABSTRACCIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS.....	96
5.16 TAREAS Y SITUACIONES PROBLEMÁTICAS PARA LOS NIÑOS	96
5.17 JUEGOS PARA EL APRENDIZAJE NUMÉRICO.....	97
5.18 ESTIMACIÓN.....	98
TEMA 6	101
MEDIDA EN LA EDUCACION INFANTIL	101
6.1 INTRODUCCIÓN	101
6.2 MAGNITUD.....	101
6.3 MEDIDA.....	102
6.4 APRENDIZAJE DE LA MEDIDA	103
6.5 APORTACIONES DE LA PSICOLOGÍA.....	103
6.6 ESTADIOS A RECORRER EN LA CONSTRUCCIÓN DE UNA MAGNITUD Y SU MEDIDA.....	104
6.7 LA MEDIDA ESPONTÁNEA	106
6.8 CONSTRUCCIÓN DE LA UNIDAD.....	107
6.9 LA LONGITUD	107
6.10 NOCIÓN DE DISTANCIA.....	108
6.11 APORTACIONES DE LA FENOMENOLOGÍA DIDÁCTICA	109
6.12 MODELOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MAGNITUDES	111
6.13.- ACTIVIDADES	115
<i>BIBLIOGRAFIA</i>	<i>116</i>

TEMA I

MATEMÁTICA EN LA INFANCIA

1.1 Objetivos y funciones del área de conocimiento Didáctica de la Matemática

La didáctica de las matemáticas es una disciplina que trata fundamentalmente del aprendizaje y enseñanza de la ciencia matemática. Representa una parcela específica dentro del campo de la Educación Matemática cuya misión es la preparación y formación de un profesorado adecuado para impartir docencia y educar matemáticamente en los distintos niveles del sistema educativo.

Entre las tareas principales del área de conocimiento Didáctica de la Matemática están las siguientes:

- Proporcionar al futuro profesor los instrumentos necesarios para que desarrolle su trabajo, como "educador matemático", de modo competente.
- Investigar los fenómenos de Educación Matemática que se producen en el medio escolar.
- Orientar al profesorado en ejercicio para que mejore su rendimiento y proporcionarle los medios y recursos didácticos necesarios para su posible actualización y mejora de su calidad profesional.

Es necesario, para lograr estos objetivos, tener en cuenta conocimientos aportados desde otras disciplinas, esto hace que en los apartados siguientes se aborden algunos aspectos de dichos conocimientos.

1.2 Teorías del aprendizaje

Todo profesor toma una serie de decisiones y realiza una serie de tareas en su trabajo diario que influyen de manera decisiva en el rendimiento de sus alumnos. En la mayoría de los casos, las decisiones para realizar unas u otras tareas de una determinada forma se toman basándose en las creencias que tiene el profesor de que la actuación va a dar buen resultado. Esto es debido a que las creencias suelen estar basadas en la experiencia, en la intuición y en los buenos deseos de que el resultado del trabajo realizado por dicho profesor sea un éxito. La Didáctica de la Matemática y los investigadores que se dedican a trabajar en esta disciplina entienden que esto no es suficiente. La tarea de profesor es demasiado seria como para andar haciendo especulaciones y dejando en manos de la percepción personal la toma de decisiones en la actuación educativa. Las decisiones tendrán más probabilidad de ser acertadas si están asentadas sobre los cimientos de las teorías que existen sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esta es la razón por la que a continuación vamos a dar algunas nociones sobre dichas teorías.

A lo largo del tiempo han surgido diferentes teorías generales del aprendizaje que, a veces, han sido contradictorias entre sí. Estas teorías se basan en trabajos realizados, sobre todo, por psicólogos que tratan de entender y dar explicación al complejo mecanismo por el cual los seres humanos llegan a adquirir el conocimiento. Estas teorías tienen gran repercusión en las creencias que tanto los educadores como personas relacionadas con el mundo de la educación poseen sobre como llevar a cabo el proceso educativo. De forma muy amplia podemos considerar estas teorías agrupadas en dos grandes bloques. (Gómez B. 1991)

1. *Teoría conductista.*
2. *Teoría cognitiva.*

Cada una de estas teorías da una visión propia y distinta de:

- La naturaleza del conocimiento.
- La forma de adquirir el conocimiento.
- Lo que significa saber.

1.3 Teoría conductista.

A grandes rasgos se puede decir que la teoría conductista considera que:

- ❖ El conocimiento es un conjunto de técnicas y datos a recordar.
- ❖ El conocimiento, en sus primeros niveles, se adquiere estableciendo asociaciones.
- ❖ Una persona que sabe es aquella que tiene mucha información memorizada y es capaz de recordarla.

Thorndike fue uno de los primeros psicólogos conductistas, formuló unas leyes o principios por los que se regía la enseñanza de las matemáticas, dos de dichas leyes son las siguientes:

Ley del ejercicio.

La respuesta a una situación se asocia con esa situación y cuanto más se emplee en una determinada situación, más fuertemente se asocia con esta, por otro lado, el uso poco frecuente de la respuesta debilita la asociación.

Ley del efecto.

Las respuestas inmediatamente seguidas de una satisfacción ofrecen mayor probabilidad de repetirse cuando se produzca de nuevo la situación, mientras que

las respuestas seguidas de una incomodidad tendrán menos probabilidad de repetirse.

De acuerdo con estos principios del conductismo la enseñanza de las matemáticas es un adiestramiento en la relación estímulo-respuesta. Aprender matemáticas es un proceso pasivo por parte del alumno que irá copiando de manera fiable todo lo que se le proponga y el profesor. El profesor no tendrá más que ir llenando cada vez más el "recipiente" que en un

principio está vacío. Psicólogos conductistas son Skinner y Gagné, entre otros.

1.4 Teoría cognitiva.

A grandes rasgos también, la teoría cognitiva considera que:

- ❖ La esencia del conocimiento matemático es la estructura y ésta se forma a través de conceptos unidos entre sí por relaciones que llegarán a configurar un todo organizado.
- ❖ El conocimiento se adquiere, por tanto, mediante la adquisición de relaciones y el aprendizaje se hace por uno de estos dos procesos: asimilación, o sea, estableciendo relaciones entre las informaciones nuevas y las ya existentes en el sujeto o por integración que son conexiones entre trozos de información que permanecían aislados.
- ❖ Una persona que sabe es aquella capaz de crear relaciones.

Se pueden considerar principios de la teoría cognitiva los siguientes:

- Hay que estimular en la formación de relaciones. Como opuesto al aprendizaje de tipo memorístico.
- Hay que ayudar a establecer conexiones y a modificar puntos de vista. Ya que es importante conectar la nueva información con los conocimientos que el alumno posee.
- Hay que estimular favorecer y aprovechar la matemática inventada por los niños ya que estos no imitan de forma pasiva a los mayores sino que son creativos e inventan sus propias matemáticas.

Para la teoría cognitiva la esencia del conocimiento matemático es la *comprensión*.

Mediante la primera teoría se explican, con claridad, las formas de aprendizaje más sencillas como pueden ser la memorización de un número de teléfono o la formación de hábitos, pero no se da una explicación convincente a las formas más complejas de aprendizaje como puede ser la memorización de información significativa o la resolución de problemas.

La teoría cognitiva ofrece una visión más exacta del aprendizaje y del pensamiento, explica de manera más adecuada el aprendizaje significativo y la resolución de problemas y el aprendizaje de las matemáticas en general.

1.5 Implicaciones Pedagógicas de estas teorías.

Las decisiones educativas, tomadas desde la reflexión por los correspondientes responsables, están basadas en alguna teoría del aprendizaje y según se de prioridad a una o a otra, cambian totalmente los papeles asignados al alumno, al profesor, al libro de texto o al desarrollo de la clase.

En cuanto a las teorías a las que hemos hecho referencia anteriormente, durante mucho tiempo ha sido la teoría conductista la que ha organizado toda la enseñanza de las matemáticas,

haciendo especial hincapié en la idea de ir de lo básico a lo complejo en una forma jerarquizada.

Según Gómez podemos considerar ligados a esta teoría las siguientes consideraciones:

- El alumno es el responsable de su fracaso (si lo tiene).
- El profesor desarrolla sus clases realizando exposiciones magistrales.
- Los alumnos se agrupan por similitud de edad.
- No se tienen en cuenta las diferencias individuales entre los alumnos.
- No se tienen en cuenta las nuevas tecnologías aplicadas a la enseñanza, ni se considera la importancia del juego.
- Se prima el trabajo individual frente al trabajo en equipo.
- El libro de texto tiene un papel fundamental, en él se recoge toda la enseñanza que debe de recibir el alumno.

De lo anteriormente expuesto se obtienen, entre otras, las siguientes consecuencias:

- * Aprender matemáticas es memorizar.
- * La comprensión juega un papel secundario
- * La incapacidad de responder con rapidez es señal de inferioridad
- * Siempre hay una regla para resolver cualquier problema
- * Solo hay una manera correcta para resolver cualquier problema

En los últimos años la teoría cognitiva ha dado un marco de referencia distinto para la toma de decisiones de los profesores de matemáticas, sus principios ayudan a explicar aspectos como el aprendizaje de conceptos aritméticos o la adquisición de técnicas y estrategias para resolver problemas. Para su aplicación los profesores han de tener en cuenta que:

- a) El aprendizaje significativo requiere tiempo para consolidarse.
- b) Las capacidades de los individuos y la preparación de cada niño en todo momento, puede ser distinta, y habrá que considerarlo, ya que es poco probable que se de un aprendizaje significativo si un niño no tiene los conocimientos necesarios para asimilar una nueva enseñanza.
- c) Los juegos dan a los niños la oportunidad natural y agradable de establecer conexiones y dominar técnicas básicas y pueden contener un valor incalculable para estimular tanto el aprendizaje significativo como la memorización, por lo que es aconsejable explotar el interés natural de los niños por el juego.

Para la teoría cognitiva se dan los siguientes supuestos:

- El profesor tiene mucho que ver en el fracaso de los alumnos.
- En la clase tienen cabida exposiciones y debates de trabajo realizados por los alumnos.
- Se da gran importancia al uso de material en el aprendizaje, y el juego se toma como una actividad fundamental en este proceso.

- La misión más importante del profesor es poner al estudiante en situación de aprender, para lo cual deberá diseñar, crear y proporcionar situaciones de aprendizaje.

El que estas teorías presenten graves deficiencias todavía, en su aplicación, se debe a su juventud o falta de tradición, lo que conlleva falta de materiales curriculares y normas que expresen claramente cómo se ponen en práctica todas las recomendaciones y "frases hechas" que componen la misma.

1.6 Piaget

A partir de las investigaciones de Piaget empieza a tomar importancia la teoría cognitiva del aprendizaje, hasta entonces los métodos empleados en la enseñanza de la matemática escolar estaban basados en otras teorías. Después de él, muchos investigadores han tomado como punto de partida sus experiencias y conclusiones de las mismas, para realizar investigaciones, que en ocasiones trataban de confirmar y otras criticar los resultados obtenidos por este investigador. Así unos han rechazado sus conclusiones y otros investigadores las han ratificado e incluso avanzado sobre ellas.

Destacamos como puntos importantes, dentro de la extensa obra de Piaget, las dos ideas siguientes: "los niños construyen conocimientos fuera de la clase" y "todos los niños tienen las mismas estructuras mentales independientemente de su raza y cultura. Todos construyen estructuras lógico-matemáticas y espacio-temporales siguiendo un mismo orden general".

Según Piaget el conocimiento está organizado en un todo estructurado y coherente en donde ningún concepto puede existir aislado. Considera, este autor, que hay cuatro factores que influyen en el desarrollo de la inteligencia.

- La maduración.
- La experiencia con objetos.
- La transmisión social.
- La equilibración.

Explica el desarrollo en términos de procesos de abstracción y distingue entre:

Abstracción simple. Se abstrae lo que se ve y observa en los objetos.

Abstracción reflexiva. Se abstraen las relaciones que hay entre los objetos.

Distingue tres tipos de conocimiento según Kamii (1981)

- Físico
- Social
- Logico-matemático

- El conocimiento físico se adquiere actuando sobre los objetos y el descubrimiento del comportamiento de los mismos se produce a través de los sentidos.

- El conocimiento social se obtiene por transmisión oral.

- El conocimiento lógico-matemático se construye por abstracción reflexiva. Además, los conocimientos físico y social tienen en común el que ambos necesitan una información de origen externo al niño, el conocimiento físico está basado en la regularidad de las reacciones de los objetos mientras que el social es arbitrario se origina en acuerdos y consensos y no se puede deducir lógicamente. Estos tres tipos de conocimiento tienen en común la exigencia de actividad por parte del sujeto para su consecución. Entre ellos existen además fuertes lazos de unión, así el conocimiento físico no se puede construir fuera de un marco lógico-matemático, pues no se puede interpretar ningún hecho del mundo exterior sino a través de un marco de relaciones.

Todas las acciones realizadas por un individuo tienen dos aspectos, uno físico y observable en el que la atención del sujeto está en lo específico del hecho y otro lógico-matemático en el que se tienen en cuenta, sobre todo, lo que es general de la acción que produjo el hecho.

El conocimiento lógico-matemático, que es el que ahora nos ocupa, tiene las siguientes características.

- No es directamente enseñable.
- Se desarrolla siempre en una misma dirección y esta es hacia una mayor coherencia
- Una vez que se construye nunca se olvida.

De importancia fundamental en la teoría de Piaget es la idea de que el niño en su desarrollo pasa por una serie de estadios o etapas, cada una de las cuales con una característica especial. La capacidad del niño para aprender y entender el mundo está determinada por el estadio particular en que se encuentre. Estos estadios son:

- período sensorio-motor (edad aproximada 0 a 2 años)
- período preoperacional (de 2 a 7 años)
- período de las operaciones concretas (de 7 a 11 años)
- período de las operaciones formales (desde los 11 años en adelante).

En el primer estadio o período **sensorio-motor** un logro importante del niño es el darse cuenta de que está separado del resto de las cosas y que hay un mundo de objetos independiente de él y de sus propias acciones.

El período **preoperacional** comprende un trecho muy largo en la vida del niño, durante el cual ocurren grandes cambios en su construcción intelectual, hecho que habrá que aprovechar y tener en cuenta en su formación. El niño en este estadio presenta un razonamiento de carácter intuitivo y parcial, razona a partir de lo que ve. Domina en él la percepción. Su estructura intelectual está dominada por lo concreto, lo lento, y lo estático. Es un período de transición y de transformación total del pensamiento del niño que hace posible el paso del egocentrismo a la cooperación, del desequilibrio al equilibrio estable, del pensamiento preconceptual al razonamiento lógico. Se pueden considerar en este período dos etapas:

- a) *preconceptual* de 2 a 4 años en la que el pensamiento está a medio camino entre el

esquema sensoriomotor y el concepto. Las estructuras están formadas por conceptos inacabados que producen errores y limitaciones al sujeto. El razonamiento se caracteriza por percibir solamente algunos aspectos de la totalidad del concepto y por mezclar elementos que pertenecen verdaderamente al concepto con otros ajenos a él.

b) *intuitiva* de 4 a 7 años. El pensamiento está dominado por las percepciones inmediatas. Sus esquemas siguen dependiendo de sus experiencias personales y de su control perceptivo. Son esquemas prelógicos.

El período de las **operaciones concretas** se caracteriza porque el niño ya es capaz de pensar lógicamente en las operaciones realizadas en el mundo físico. Se hace consciente de que algunos cambios son reversibles y comprenden las implicaciones que esto comporta. El pensamiento del niño comienza a descentrarse y es capaz de algunas inferencias lógicas.

El estadio final del desarrollo o de las **operaciones formales** se suele manifestar sobre los 11 años y está caracterizado por la posesión de un pensamiento lógico completo. El niño es capaz de pensar lógicamente, no sólo acerca del mundo físico sino también acerca de enunciados hipotéticos. El razonamiento deductivo característico de la ciencia comienza a ser posible.

1.7 Dienes

Dienes se inspiró en la obra de Piaget y Bruner y realizó experiencias que le llevaron a enunciar una teoría sobre el aprendizaje de las matemáticas, dicha teoría tiene cuatro principios sobre los que se apoya.

Principio dinámico. Considera que el aprendizaje es un proceso activo por lo que la construcción de conceptos se promueve proporcionando un entorno adecuado con el que los alumnos puedan interactuar.

Principio constructivo. Las matemáticas son para los niños una actividad constructiva y no analítica. El pensamiento lógico-formal dependiente del análisis puede ser muy bien una tarea a la que se consagran los adultos pero los niños han de construir su conocimiento.

Principio de variabilidad matemática. Un concepto matemático contiene cierto número de variables y de la constancia de la relación entre estas surge el concepto.

Principio de variabilidad perceptiva. Existen diferencias individuales en cuanto a la percepción de los conceptos.

Refiriéndose a las etapas en la formación de un concepto Dienes las denominó: etapa del juego, etapa de la estructura y etapa de la práctica. Más tarde estas etapas se transformarían en seis y además la del juego podía ser no lúdica para alumnos mayores. Las seis etapas a recorrer en el aprendizaje de un concepto matemático según Dienes son:

Juego libre. Se introduce al individuo en un medio preparado especialmente y del que se podrán extraer algunas estructuras matemáticas, el objetivo es que se vaya adaptando al medio y se familiarice con él.

Juego con reglas. Se dan unas reglas que en cierto modo son restricciones en el juego, éstas representan las limitaciones de las situaciones matemáticas. Cuando se manipulan estas limitaciones se consigue dominar la situación.

Juegos Isomorfos. Como no se aprenden matemáticas solo jugando a un juego estructurado según unas leyes matemáticas. Los niños habrán de realizar varios juegos de apariencia distinta pero con la misma estructura de donde llegarán a descubrir las conexiones de naturaleza abstracta que existen entre los elementos de los distintos juegos.

Representación. Dicha abstracción no ha quedado todavía impresa en la mente del niño para favorecer este proceso es necesario hacer una representación de la actividad realizada a la vez que se habla de ella lo que además permite contemplarla desde fuera del juego.

Descripción. Hay que extraer las propiedades del concepto matemático implícito en todo este proceso del que ya se ha llegado a su representación, para ello es conveniente inventar un lenguaje que describa todo aquello que se ha realizado. En un principio cada niño inventará su propio lenguaje, pero más tarde y con ayuda del profesor será conveniente ponerlos todos de acuerdo y conseguir un lenguaje común. Esta descripción constituirá la base de un sistema de axiomas.

Deducción. Las estructuras matemáticas tienen muchas propiedades, unas se pueden deducir de otras así que se tomarán un número mínimo de propiedades (axiomas) y se inventarán los procedimientos (demostraciones) para llegar a las demás (teoremas).

Según Dienes habrá que contar con estas etapas cuando se vaya a organizar la enseñanza de las matemáticas si se pretende que todos los niños accedan a ella.

1.8 Mialaret

Mialaret, también, considera seis etapas en la adquisición del conocimiento matemático, que se exponen a continuación.

Primera etapa. Acción misma, comienza admitiendo la necesidad de manipulación, de acciones con los objetos sobre las que reflexionar. En esto sigue a Piaget que considera que "las operaciones son acciones interiorizadas".

Segunda etapa. Acción acompañada por el lenguaje, la acción por sí sola no es suficiente y debe de estar apoyada por el lenguaje, iniciándose así en el vocabulario elemental del concepto correspondiente. Las descripciones se hacen significativas, ya que cada una de ellas se sustenta en una acción simultánea.

Tercera etapa. Conducta del relato, sin necesidad de repetir una acción se puede narrar, la acción es evocada y recreada por su simple emisión verbal. Se puede afirmar que es en esta fase en la que la experiencia se transforma en conocimiento.

Cuarta etapa. Aplicación del relato a situaciones reales, actuando y esquematizando las conductas relatadas mediante objetos simples o material no figurativo.

Quinta etapa. Expresión gráfica de las acciones ya relatadas y representadas, supone un

paso más en el camino de la esquematización progresiva de la abstracción creciente y sobre todo en la matematización del problema que se está considerando.

Sexta etapa. Traducción simbólica del problema estudiado, último escalón para la asimilación matemática de un concepto.

Hay que destacar que los conocimientos que han llegado a la sexta etapa pueden convertirse más adelante en objetos sobre los que se inicia de nuevo el recorrido del ciclo completo.

La acción precede y produce el pensamiento. Una primera etapa de aprendizaje consiste en la acción sobre objetos reales; casi en simultáneo aparece la segunda etapa, la acción acompañada de lenguaje, en donde cada acción o conjunto de acciones se asocian con un término específico, por lo general un verbo. La consolidación del lenguaje pasa por la conducta del relato, en donde el alumno describe las causas, etapas y efectos de una determinada acción, una vez realizada ésta, y sin necesidad de volver a repetir la acción. Al destacar los aspectos cuantitativos de las acciones en la conducta del relato se están dando los primeros pasos hacia la expresión formal de las operaciones.

La traducción gráfica puede consistir en un dibujo más o menos esquematizado o en el empleo de uno de los modelos para expresar una relación cuantitativa. En el trabajo con papel y lápiz predominan los gráficos, que son una etapa destacada en el dominio de las operaciones.

Una etapa intermedia, la acción con objetos simples, consiste en operar con objetos totalmente esquematizados, o bien con sus representaciones gráficas. Se trata en este caso de fichas o figuras geométricas, o bien simples trazos: rayas, puntos o asteriscos, que representan a cualquier objeto en general. Se evita así la distorsión que puede suponer emplear objetos concretos cuya asociación mediante una acción real puede atribuirse a alguna causa no operatoria. Finalmente, la traducción simbólica es el último paso de abstracción en la expresión de cada operación.

1.9 Conocimiento matemático de los niños en Edad Infantil

Sobre el conocimiento de los alumnos de nivel infantil las teorías del aprendizaje referidas anteriormente sostienen lo siguiente: La teoría conductista considera que los niños llegan a la escuela como recipientes vacíos los cuales hay que ir llenando, y que aparte de algunas técnicas de contar aprendidas de memoria, que por otra parte son un obstáculo en el aprendizaje sobre aspectos numéricos, los niños de preescolar no tienen ningún otro conocimiento matemático.

La teoría cognitiva por el contrario considera que antes de empezar la escolarización (enseñanza primaria) los niños han adquirido unos conocimientos considerables sobre el número, la aritmética y los objetos que le rodean.

La observación de la realidad de los niños de nuestro entorno, muestra lo que estos son capaces de hacer con la serie numérica antes de llegar a la escuela. Han recibido gran información, en un principio de forma memorística de la serie numérica y la mayoría de los

niños de cuatro y medio a seis años pueden llegar a contar hasta 29 o 39.

- * No tienen problemas para citar el número siguiente a otro o el anterior a otro, al menos hasta el diez, si bien el concepto de anterior les es más difícil que el de siguiente.
- * Pueden aplicar la regla del valor cardinal en colecciones pequeñas.
- * Conocen la relación entre los aspectos ordinales y los cardinales de una misma colección.
- * Pueden leer numerales y entender números expresados oralmente.
- * Hacen estimaciones de conjuntos pequeños de objetos.
- * Comparan tamaños de colecciones utilizando e interpretando correctamente los términos comparativos "mayor que", "menor que" e "iguales".
- * A partir de sus primeras experiencias de contar desarrollan una comprensión de la aritmética, el concepto informal de la adición relacionado con la acción de añadir, y el de la sustracción relacionado con quitar.
- * Esto permite a los niños resolver mentalmente problemas de suma y resta cuando los números utilizados están de acuerdo con su capacidad para contar.

Por lo que se refiere a otros aspectos no relacionados con el número

- * En la mayoría de los casos son capaces de establecer diferencias topológicas (abierto-cerrado)
- * Diferencian las formas curvilíneas y rectilíneas
- * Diferencian las figuras por sus ángulos y dimensiones.

Todo este conocimiento, que se puede considerar como matemática informal, prematemática o simplemente conocimiento matemático, actúa como fundamento para la comprensión y el dominio de las matemáticas que más tarde aprenderán en la escuela. De acuerdo con este análisis y haciendo un repaso de los conceptos matemáticos que los niños van a estudiar en la enseñanza posterior, se puede decir que las raíces de las actitudes matemáticas de los niños están en el período preoperacional que corresponde a la edad infantil.

La evolución depende tanto del proceso de maduración del sujeto como de su interacción con el medio y no se debe olvidar que la escuela forma parte de ese medio.

Apunta Baroody (1988) que el desarrollo matemático de los niños sigue, en muchos aspectos, un proceso paralelo al desarrollo histórico de las matemáticas. Así el conocimiento impreciso y concreto de los niños se va haciendo gradualmente más preciso y abstracto, tal como ha sucedido con el conocimiento de las matemáticas a través del tiempo. Los niños poco a poco van elaborando una amplia gama de técnicas a partir de su matemática intuitiva. La matemática en los niños se desarrolla teniendo como base las necesidades prácticas y las experiencias concretas. Como ocurriera en el desarrollo histórico, contar desempeña un papel esencial en el desarrollo del conocimiento informal y este a su vez prepara el terreno para la matemática formal.

1.10 El juego

Podemos decir del juego que es el conjunto, de actividades que un individuo realiza por

mero placer. El juego se manifiesta como una forma natural de la actividad humana, que aparece en época muy temprana de la infancia y continúa a lo largo de la vida adulta.

Para Múgina (1983), el juego es la actividad principal para un niño pequeño, y no solo porque el niño pase la mayor parte del tiempo jugando, sino porque además origina cambios cualitativos importantes en la psique infantil.

A través del juego se desarrollan cualidades fundamentales en el niño, como son la atención y la memoria activa, con una intensidad especial. Mientras juega, el niño se concentra mejor y recuerda más cosas. Cuando un niño manipula un objeto o realiza una acción con un juguete, se dice que el niño juega, pero la auténtica actividad lúdica solo tiene lugar cuando el niño realiza una acción sobrentendiendo otra y maneja un objeto como si fuera otro. El objeto sustituido se convierte en un soporte para la mente. Al manejar estos objetos, el niño aprende a recapacitar sobre los objetos y a manejarlos en un plano mental. Introduce al niño en el mundo de las ideas.

Para los psicólogos cognitivos el juego constituye una fuente de conocimiento muy importante sobre todo en los períodos sensorio-motriz y preoperacional, además de cumplir una importante función biológica ya que con él se ejercitan todos los órganos y capacidades evitando así su deterioro. El niño empieza a estudiar jugando. En un principio el estudio es para él como un juego con determinadas reglas, de esta forma asimila los conocimientos elementales.

En las distintas etapas de la infancia, las actividades de tipo productivo, como el dibujo y la construcción, están muy relacionadas con el juego. Cuando un niño dibuja o construye con tacos, con frecuencia está interpretando un argumento.

En el juego colectivo, por otra parte, los niños asimilan el lenguaje de la comunicación y aprenden a coordinar sus acciones con las de los demás.

1.11 Principios pedagógicos del juego

Moyles (1990) enuncia una serie de principios para el juego entre los que hemos seleccionado los siguientes:

- El juego debe aceptarse como un proceso, no necesariamente como un producto pero con capacidad de tener alguno si lo desea el participante.
- El juego es necesario para niños y adultos.
- El juego no es la antítesis de trabajo: ambos son parte de la totalidad de nuestras vidas.
- El juego siempre está estructurado por el entorno, los materiales y el contexto en el que se produce.
- El juego adecuadamente dirigido asegura al niño un aprendizaje a partir de su estado actual de conocimientos y destrezas.
- El juego es potencialmente un excelente medio de aprendizaje.

Recomienda, dicho autor, que en la escuela el juego se organice de forma significativa y no como se puede hacer en cualquier otro lugar. Esto hará que los padres y, en general, la

sociedad le conceda la importancia que en realidad tiene. Hace una clasificación del juego atendiendo a la manera de realizarlo el niño que recogemos en el cuadro siguiente:

FISICO	INTELLECTUAL	SOCIAL-EMOCIONAL
MOTOR GRUESO MOTOR FINO PSICOMOTOR	LINGÜÍSTICO CIENTÍFICO SIMBOLICOMATEMÁTICO	TERAPÉUTICO REPETITIVO COMPRENSIVO LÚDICO.

Los juegos pueden hacerse individualmente o en grupo si bien los juegos colectivos son más idóneos para la construcción del conocimiento lógico-matemático por las razones siguientes:

- Fomenta la interacción social entre los participantes.
- Proporcionando un feed-back entre los niños que constituye una fuente de respuestas correctas.
- Se negocian reglas y se toman decisiones conjuntamente observando las consecuencias que pueden producir dichas reglas.
- Los niños son más activos mentalmente cuando los juegos que realizan han sido escogidos y propuestos por ellos mismos.

1.12 Recursos didácticos

El pensamiento del niño en la infancia es concreto; en etapas posteriores se verificará el paso hacia lo abstracto. Se asegura sin ningún género de duda que es preciso partir de la manipulación de objetos para pasar a una fase representativa y de esta a otra más abstracta.

Hemos dicho anteriormente que el conocimiento lógico-matemático es producto de una actividad interna del sujeto, de una abstracción reflexiva realizada a partir de las relaciones entre los objetos de aquí que sean de gran interés los recursos didácticos que se basen en la manipulación

El material

Al hablar de manipulación, en la enseñanza de las matemáticas, se sobrentiende que no se trata de una manipulación libre, sino que se hace referencia a una serie de actividades específicas con materiales concretos, que facilite la adquisición de determinados conceptos matemáticos. Ha de ser precisada la propuesta de actividades dirigidas al fin que se quiere conseguir. A través de las actividades que el niño realiza, con los materiales didácticos, puede avanzar en su proceso de abstracción de los conocimientos matemáticos. Las ideas abstractas no llegan de forma espontánea al individuo, ni a través de lo que oye sino a través de operaciones

que se realizan con los objetos y que se interiorizan para, más adelante, llegar a la operación mental sin soporte material.

El material didáctico es necesario en la enseñanza de las matemáticas en las primeras edades por dos razones básicas: primera, posibilita el aprendizaje real de los conceptos, segunda, ejerce una función motivadora del aprendizaje sobre todo si con el material se crean situaciones interesantes para el niño, en las que se sienta sujeto activo.

No existe un criterio unánime acerca del uso y tipo de material a utilizar, incluso pueden encontrarse posturas radicalmente opuestas en torno al tema. Hay quien sostiene que debe de ser un material muy estructurado frente a otras personas que sostienen que debe de consistir en un material poco estructurado y polivalente.

Nosotros pensamos que ambos tipos de materiales son recursos didácticos útiles, el empleo de uno u otro dependerá de la situación educativa, del proceso evolutivo del niño, del momento de la adquisición del concepto y del profesor que prepara la actividad.

Uso del material

El niño en su evolución manipula una gran variedad de objetos, todos ellos útiles para su desarrollo cognitivo. El bebé construye sus esquemas perceptivos y motores a partir de materiales como: sonajeros, muñecos, llaves; específicamente pensados para este fin. Así como de los objetos de su entorno como: cuchara, biberón, botes etc.

Cuando el niño pasa al período simbólico, los objetos que utiliza son representativos: los coches, los animales, herramientas, muñecos..., aunque se combinan con otros no figurativos como los bloques de construcciones a partir de los cuales realiza diversas representaciones de objetos de su entorno.

El primer material utilizado para la enseñanza es el que procede de su propio juego, los juguetes representativos como animales, muñecos, coches, etc. son útiles en la medida que con ellos se pueden establecer relaciones lógicas básicas: agrupar, clasificar, ordenar, seriar... Partimos de este material por ser de interés y significativo para el niño.

El material de objetos de desecho y de uso corriente es también de gran utilidad. No debemos olvidar que una misma actividad puede realizarse con materiales diversos y esto ayuda y favorece el proceso de generalización de conceptos.

En una fase más avanzada se introducirá de modo progresivo un material más estructurado y diseñado especialmente para la enseñanza de las matemáticas, como son los bloques lógicos de Dienes, las regletas de Cuisenaire (o números en color), o los ábacos. Estos materiales no son figurativos y presuponen una mayor capacidad de abstracción, pero a la vez son previos al uso exclusivo de los signos numéricos.

Aunque cada tipo de material estructurado ha sido diseñado para favorecer la adquisición de determinados conceptos, la mayor parte de ellos podríamos decir que son multiuso, en la medida que se pueden utilizar para varios conceptos y objetivos.

El material tampoco es privativo de una edad, puede utilizarse en distintas edades de forma más o menos compleja.

Listado de materiales

A título de ejemplo hacemos un listado de materiales con una breve indicación de los principales conceptos que se pueden trabajar con cada uno de ellos:

- Abaco. Concepto de número
- Bloques multibase. Sistema de numeración
- Regletas Cuisenaire. Número
- Juegos de números. Valor posicional
- Juegos de cálculo. Iniciación al cálculo
- Bloques lógicos. Identificación de características. Nociones de lógica.
- Geoplano. Conceptos topológicos
- Tangram. Orientación en el espacio
- Formas Geométricas. Iniciación a la geometría
- Mecanos. Composición y descomposición de figuras
- Espejos. Simetrías
- Balanza. Iniciación a la medida
- Vasos graduados. Comparación de objetos (peso, capacidad)
- Metro. Iniciación a la medida
- Juegos de probabilidad. Iniciación a los conceptos de azar y probabilidad.

Otros recursos didácticos

Además de los recursos mencionados en la lista anterior, se suele utilizar como material didáctico los siguientes:

- Cuentos
- Canciones
- Barajas
- Juegos al aire libre
- Películas

TEMA 2

DISEÑO CURRICULAR DE EDUCACION INFANTIL

2.1 Antecedentes históricos en la educación matemática infantil en España

La historia de la Educación Preescolar (hoy Educación Infantil) en España es bastante reciente. Hasta la década de los setenta existían los parbularios, algunos pedagógicamente muy buenos, otros no tanto y otros, simplemente guarderías, como solución a las madres que trabajaban. Pero el Preescolar como etapa fundamental de la educación era cuestión de una minoría. Poco a poco se fue especializando el profesorado y se llega a crear una nueva especialidad de maestro en las Escuelas de Magisterio, posteriormente transformadas en Facultades de Educación en la mayor parte de las Universidades Españolas.

2.2 Orientaciones Pedagógicas

Quizá, el hecho más significativo fue la publicación por parte del M.E.C de unas *Orientaciones Pedagógicas* para la Educación Preescolar en el año 1973, que hacen referencia a la educación del niño de 2 a 5 años y que iban dirigidas tanto a padres como educadores. En este documento se encuentran formulados objetivos específicos y actividades adecuadas para cada edad de acuerdo con la corriente pedagógica del momento.

La filosofía con que se elaboró este documento puede apreciarse en el siguiente párrafo: "La concepción básica de estas Orientaciones es su enfoque sistemático con la única finalidad de lograr un desarrollo armónico de la personalidad del niño, en una dinámica que favorezca la espontaneidad y la creatividad junto con un progresivo sentido de responsabilidad".

En dicho documento de las Orientaciones Pedagógicas se dedican varios apartados a las matemáticas, dichos apartados tienen títulos y contenidos adaptados a las edades de los niños. A

continuación exponemos dichos apartados.

II.1.- Para los niños de tres años el apartado tres se denomina **Observación, Iniciación al Número y Estructuración del Espacio**. En este punto aparecen una relación de objetivos y actividades de orientación para trabajar en el aula, que no guardan relación directa en la consecución de los objetivos planteados, esto misma situación se presenta en los siguientes apartados:

Objetivos

1. Adquirir el concepto de los números 1, 2, 3.
2. Contar hasta cinco elementos.
3. Hacer agrupaciones elementales.
4. Reconocer cuerpos geométricos elementales.
5. Reconocer formas geométricas elementales: cuadrado, círculo, cruz.
6. Poseer nociones como mucho, poco, más, menos.
7. Poseer nociones espaciales: dentro-fuera, arriba-abajo, delante-detrás.

Actividades

- Observar animales, plantas y rocas.
- Juegos de colores. De colores y formas. De formas y direcciones.
- Distinguir contrarios.
- Distinguir tres colores.
- Distinguir por el tacto dos elementos distintos.
- Distinguir dos sonidos diferentes.
- Ejercicios de silencio.
- Construir rompecabezas muy simples y de pocas piezas.
- Utilizar el mosaico como ejercicio de observación.
- Ejercicio de arriba-abajo, dentro-fuera, delante-detrás.
- Ejercicio de mucho-poco, más-menos.
- Pasar agua o arena de unos cacharros a otros.
- Ensartar bolas grandes.
- Hacer montones y cerrar espacios con piedrecitas o cuentas de colores.
- Emparejar cosas.
- Unir dos mitades de una cosa.
- Ejercicios para la noción de los números 1, 2, 3.
- Aprender a contar hasta cinco elementos.
- Ordenar objetos por tamaños.
- Encajar el triángulo, cuadrado y círculo en sus huecos correspondientes.
- Reconocer en objetos usuales el cuadrado, el círculo y la cruz.
- Sumar y restar progresivamente hasta cinco objetos sin guarismos.
- Observar una serie de cinco objetos y recordar los suprimidos.
- Distribuir los objetos según su forma, color y tamaño en espacios determinados.

- Juegos de evaluación de tamaños.

II.2.- Dentro del apartado seis aparece el título **Iniciación al pensamiento abstracto** dedicado a los niños de cuatro y cinco años; contiene la siguiente propuesta a desarrollar mediante el juego:

- A) Ejercicios sensoriales.
- B) Desarrollo de la observación y de la reflexión.
- C) Iniciación a la Expresión Lógico-Matemática.

Entre otras consideraciones se hacen las siguientes:

* En la Iniciación al Pensamiento Abstracto se incluyen todas aquellas actividades mentales que contribuyen al desarrollo del pensamiento en su camino hacia la abstracción, cuyo final pudiera ser la iniciación al proceso matemático.

* La observación de la naturaleza y de la vida del hombre, los juegos psicológicos, la delimitación del espacio y de lo cuántico van a ser presentados al niño en forma lúdica aprovechando su interés por el mundo exterior.

En el apartado C) Expresión Lógico-Matemática aparecen los siguientes objetivos y actividades:

Objetivos

1. Desarrollo de la actividad mental con reflexión sobre el espacio y el número. Análisis y simbolización de los mismos.
2. Comprensión del espacio con límites y posiciones. Representación gráfica.
3. Desarrollo de la agilidad mental en la solución de problemas.
4. Las actividades lógico-matemáticas deberán ser consideradas como medio de estructuración del pensamiento mediante la conquista y organización de los objetos del espacio.
5. Estimular experiencias sobre el contacto con la cantidad, la magnitud, el peso y la medida.
6. Llegar a los conceptos de orden, serie, grupo, mediante la comparación, clasificación y ordenación de objetos.
7. Adquisición de un vocabulario básico matemático.
8. Aprendizaje de las cifras.

Actividades

- Observar y manipular objetos.
- Clasificar objetos según un criterio definido de antemano: color, forma, tamaño y grosor.
- Formar series de objetos: (ensartado, trenes)

- Resolver problemas de la vida real.
- Medir longitudes con la mano, con el pie, con la braza; capacidades con una vasija, comparación de pesos.
- Ordenar objetos por tamaños.
- Adquisición de la idea de conjunto, elementos de un conjunto, relación de pertenencia y propiedad característica.
- Introducción funcional de la idea de número mediante los conjuntos coordinables.
- Aprendizaje de las cifras.
- Introducción de la ordenación mediante conjuntos no coordinables.
- Idea de posición: arriba-abajo, delante-detrás, derecha-izquierda, fuera-dentro, en el borde.
- Bordear figuras punteadas.
- Manejo de objetos esféricos, cúbicos, ortoédricos.
- Utilización del vocabulario adecuado.
- Contar de diversos modos: agrupando, tocando...
- Realizar trabajos en los que se formen líneas abiertas y cerradas.

2.3 Los programas renovados

Diez años más tarde, aproximadamente, se publican los Programas Renovados. Coincide esta publicación con la reorganización del sistema en ciclos, la obligatoriedad de la enseñanza de los 6 a 14 años, y la gratuidad para esta enseñanza obligatoria. La escuela pública comienza a escolarizar con carácter voluntario y gratuito a los niños de 5 años.

Se incluyen en los programas renovados determinados contenidos que respondían a las exigencias de la sociedad española de ese momento, son los años 80. Así se incluyen objetivos nuevos tales como: educación para la convivencia, para la seguridad vial, del consumidor, para la conservación y mejora del ambiente físico y social, para la salud.

En cuanto a la estructura, los Programas Renovados intentan ofrecer una visión coherente de las diversas áreas de enseñanza y, por tanto, no se limitan a una serie de objetivos sin relación alguna entre ellos. Se organiza el documento de acuerdo con la siguiente estructuración:

- a) Bloques Temáticos
- b) Temas de trabajo
- c) Niveles básicos de Referencia
- d) Actividades

Se puede caracterizar con una sola frase las matemáticas, para la educación infantil, en estas dos etapas. Así las Matemáticas de las Orientaciones Pedagógicas coincidían con las llamadas Matemáticas Modernas y la de los Programas Renovados coinciden con el movimiento de las Matemáticas para todos.

Las matemáticas para Preescolar en los Programas Renovados aparecen como un conjunto diferenciado en tres bloques temáticos:

1. Experiencias con materiales separados y continuos. Iniciación a la seriación.
2. Exploración del espacio y primeros pasos en Geometría.
3. Experiencias numéricas.

Cada uno de estos tres bloques se divide en temas y en los mismos se señalan objetivos y actividades relacionadas expresamente con el objetivo que le precede, de la siguiente forma:

Primer bloque

Experiencias con materiales separados y continuos. Iniciación a la seriación, consta de tres temas.

1.1 Experiencias con materiales separados y continuos

Objetivo: Realizar experiencias con materiales separados.

Actividad

- Llenar un cubo. La progresión podría ser: judías, garbanzos, lentejas, arroz, tierra.

Objetivo: Realizar experiencias con materiales continuos.

Actividad

- Llenar un cubo de arena o agua con una vasija más pequeña observar si tira demasiada cantidad.

1.2 Iniciación a la clasificación y a la seriación

Objetivos: Nombrar y reconocer objetos

Actividades

- Nombrar los objetos que utiliza en el colegio, en la casa, etc.
- Realizar puzzles sencillos que representen un sólo objeto.
- Reconocer con los ojos cerrados una pelota, una caja grande, una caja pequeña.
- Reconocer y representar el círculo, cuadrado y el triángulo (el círculo no tiene ninguna esquina el cuadrado tiene cuatro esquinas y el cuadrado tiene cuatro lados).
- Modelar de barro o de plastilina un círculo, un triángulo aplastando el barro contra la mesa.

Objetivo: Reconocer propiedades de objetos

Actividades

- Reconocer como distintas las formas de: una caja de zapatos, una pelota, un gorro de payaso. (con el lenguaje matemático que tenga el niño).
- Unir tres puntos dados y formar un triángulo. Unir cuatro puntos dados y formar un cuadrado.

(se valorará que los haya sabido unir no la perfección del trazado).

- Distinguir dos tipos de materia muy diferenciados, por ejemplo vidrio y corcho.
- Dibujar sobre el papel la silueta de niños de la clase tumbados en el suelo, reconocer el más alto y el más bajo.

Objetivo: Realizar seriaciones utilizando propiedades de objetos.

Actividades

- Ordenar por tamaños una serie de cinco objetos.
- Seguir una serie de objetos ya comenzada: grande, pequeño.
- Reconocer en la clase algo "más largo", "más corto" que un objeto que se le presente.
- Hacer seriaciones con los criterios: más largo que, menos largo que, igual de largo que; más grueso que, menos grueso que, igual de grueso que; más ancho que, menos ancho que, igual de ancho que.

Objetivo: Realizar clasificaciones utilizando propiedades de objetos.

Actividades

- Clasificar objetos según su longitud, su peso, su grosor, su anchura.

1.3 Experiencias de emparejar y medir

Objetivos: Reconocer y emparejar figuras y objetos simétricos.

Actividades

- Emparejar dos mitades de una figura simétrica conocida por el niño.
- Emparejar dos mitades de una figura simétrica no conocida por el niño.
- Emparejar zapatos.

Objetivo: Encajar formas sencillas.

Actividades

- Meter dentro uno de otro los cilindros de una serie.
- Saber encajar con los ojos cerrados y el "tacto" formas sencillas. Primero las fundamentales y geométricas (círculos, cuadrados, triángulos) y también algunas otras familiares de dibujo esquemático (una niña, una casa, un perro...) u otras similares.
- Reconocer recipientes que estén llenos o vacíos por la vista y por el tacto.

Objetivo: Realizar experiencias de "medir" sin expresar el resultado.

Actividades

- Medir una línea pintada en el suelo con pasos, con una barra, con una cuerda sin exigir el número de veces que el pie, barra etc. está contenido en la línea.
- Hacer la progresión de las barras rojas de Montessori y de las rojas y azules de Montessori.

- Llenar un objeto, por ejemplo, un cubito con arena o con agua y luego vaciarlo.

Segundo bloque: Exploración del Espacio y primeros pasos en Geometría, consta de dos temas.

2.1 Experiencias de exploración del espacio.

Objetivos: Situarse en el espacio con relación a objetos, a edificios, otros compañeros, etc.

Actividades

- Distinguir cuando el niño u otro está en movimiento o parado.
- Saber saltar dentro de una alfombra relativamente pequeña o de un espacio pintado en el suelo.
- Colocarse "dentro de", "fuera de", "en la línea" según se les ordene.

Objetivo: Reconocer posiciones de objetos respecto de él mismo y de otros objetos.

Actividades

- Saber caminar sobre una línea recta y curva trazada en el suelo.
- Realizar órdenes que impliquen ir de un lugar a otro de la clase.
- Dictado de posiciones dándole algún objeto (coloca este cuadro rojo encima del amarillo, odebajo de, o detrás de)

Objetivo: Dibujar, reconocer y organizar trayectos y laberintos.

Actividades:

- Reconocer en un dibujo con caminos el camino más corto y el más largo.
- Trazar el camino que recorrería un niño para ir a su casa.
- Dibujar el trayecto que se seguirá para llegar de un punto a otro de un laberinto, sin y con obstáculo.
- Distinguir cuando otro niño o el mismo está en movimiento o parado.

2.2 Experiencias de tipo topológico y geométrico

Objetivo: Reconocer formas

Actividades:

- Recortar formas sencillas (casitas, patitos, balcones...)
- Dar el nombre a formas geométricas sencillas.
- Representar líneas abiertas y cerradas mediante lanas, cordones, jugando al corro.
- Distinguir una caja cerrada de una abierta.

Objetivo: Organizar rompecabezas, puzzles, frisos etc...

Actividades:

- Pegar figuras formando puzzles.
- Pegar figuras formando frisos.

- Colorear frisos.

Tercer bloque: Experiencias Numéricas. Este bloque está organizado en dos temas.

3.1 Conjuntos y relaciones

Objetivo: Formar conjuntos

Actividades:

- Clasificar los bloques lógicos según un atributo.
- Formar conjuntos, dándoles propiedades características sencillas.
- Formar conjuntos con objetos existentes en el aula (usar lanas para representarlos mediante el diagrama de Venn), señalar los elementos y a estos por su propiedad característica.

Objetivo: Realizar correspondencias entre los elementos de dos conjuntos.

Actividades:

- Unir con trozos (formar cadenas), objetos previamente dibujados, por ejemplo, casas, pájaros, flores, etc.

Objetivo: Captar la correspondencia cuyo criterio es "hay igual" o "tiene tantos elementos como".

Actividades:

- Hacer correspondencias entre conjuntos.
- Llegar a que el niño entienda "hay igual en los dos conjuntos" (por ejemplo uno de tres gatos y otro de tres ratones).
- Manejar bloques lógicos y hacer correspondencias con ellos.

3.2 Numeración

Objetivo: Reconocer y escribir los símbolos para números de una cifra.

Actividades:

- Unir sonido y grafismo.
- Colocar y picar la silueta de un número dada previamente.
- Reconocer los números al tacto.
- Dar correctamente el número de palmadas que se le indique.
- Escribir las cifras de 1 a 9 en orden creciente.
- Distinguir la escritura correcta entre 2, S, 3.
- Relacionar las barras rojas y azules de Montessori con los números que les corresponden. Saber poner las "unidades" correspondientes a cada barra.
- Saber hacer equivalencias con dichas barras. Algunas de estas equivalencias podría representarla con números.

Objetivo: Realizar composiciones y descomposiciones de números de una cifra.

Actividades:

- Colocar sobre la mesa o enfilear, por ejemplo, seis bolas.
- Añadir una bola más y pedirle que escriba la cifra correspondiente a las bolas que tiene ahora.
- Realizar la experiencia análoga quitando un bola cada vez.
- Descomponer o analizar las cifras (por lo menos hasta el cinco) sirviéndose de material (solamente en dos sumandos).
- Realizar ejercicios sencillos de sumas cuyo resultado no exceda en 9.

Objetivo: Asignar adecuadamente a un conjunto su cardinal (igual o menor que 9).

Actividades:

- Contar los elementos de un conjunto dado y buscar la etiqueta correspondiente en la cifra. (juego de la etiqueta).
- Ejercicio inverso del anterior.
- Formar conjuntos con igual número de elementos que uno dado.
- Dado un conjunto tomar otro con más elementos.
- Dado un conjunto formar otro con menos elementos.
- Traer el número de bolas que se le piden (puede ser hasta nueve).

Objetivo: Resolver situaciones problemáticas sencillas.

Actividades:

- Saber resolver problemas sencillísimos gráficamente. Ejemplo: Tenía 8 bolas y se perdieron 2. ¿Cuántas quedan?.

2.4 Currículum de Matemáticas para la Educación Infantil

Es en la reforma de los años 88 y siguientes cuando la Educación Infantil se considera oficialmente en nuestro país como un de los niveles del sistema educativo. En estos años se ha avanzado más en conocimientos de Psicología y de Pedagogía y esto se refleja en todos los documentos de la Reforma. Hay influencias de distintas escuelas y autores si bien creemos que predomina el pensamiento de Ausubel.

2.4.1 Noción de Currículum

Dado que el concepto de currículum es variado y diverso, ha constituido lo que algunos han llamado el debate curricular. Desde la idea de que el currículum es un programa estructurado de contenidos disciplinares hasta la amplia consideración como conjunto de todas las experiencias educativas del alumno bajo la dirección de la escuela, encontramos un amplio espacio de posibles interpretaciones. Más o menos próximo a uno u otro extremo del abanico,

debemos coincidir, no obstante, en la posibilidad de aplicación práctica de cualquier alternativa sobre currículum por la que se opte.

En este punto el Proyecto de reforma deja muy claro que los responsables directos de la planificación del currículum en las aulas son los profesores. Al profesor se le contempla como un generador y organizador del currículum en el aula.

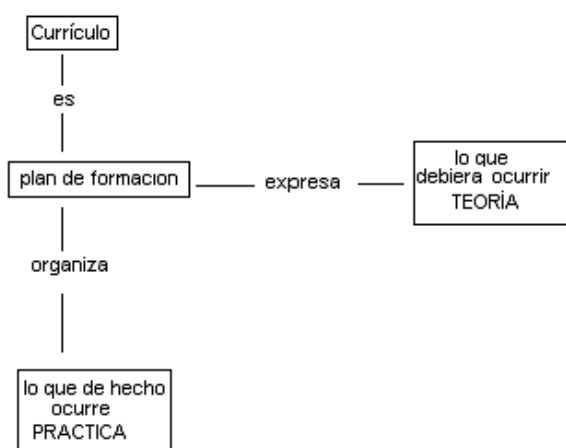
La tarea de planificar el currículum se plantea como un proceso complejo en el que intervienen múltiples variables, desde el sistema social del cual es deudor hasta el propio alumno. Considerar cual tiene que ser la oferta cultural que el sistema educativo presenta a los ciudadanos teniendo en cuenta las necesidades presentes, y lo que es más interesantes las que se prevén como futuras.

El Ministerio de Educación y Ciencia adoptó un planteamiento curricular mixto, es decir, prescriptivo y abierto simultáneamente: se establece un currículum obligatorio pero adaptable a distintos contextos y situaciones. Por tanto el Diseño Curricular Base (DCB) no debe de entenderse como un corsé al que haya que ceñirse de un modo estricto, sino que se pretende sea una pauta flexible y adaptable a distintos contextos y situaciones.

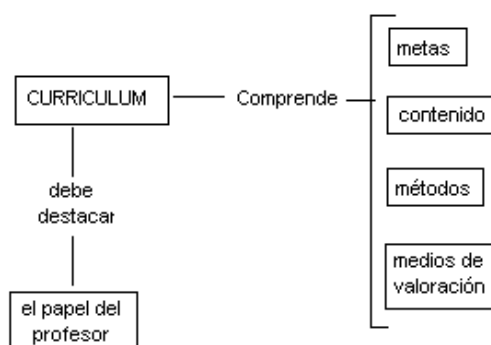
2.4.II Componentes del Currículum

También en las componentes del currículum existe variedad y diversidad, dando lugar a distintos modelos de los que presentamos algunos.

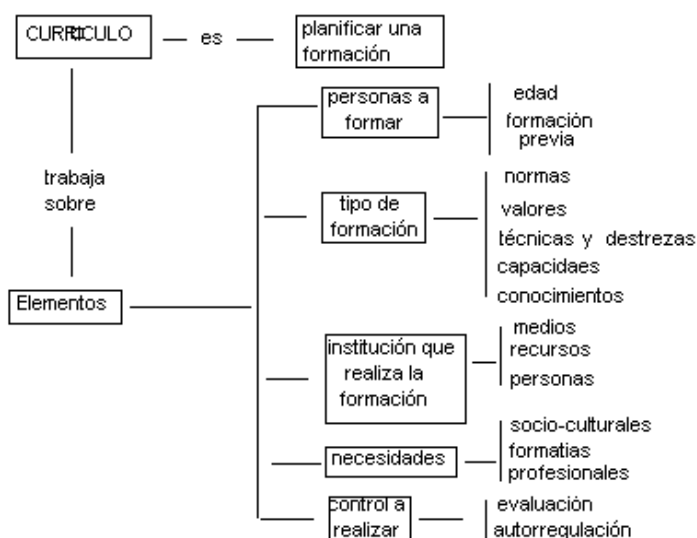
Modelo de STENHOUSE



Modelo de HOWSON, KEITEL, KILPATRICK



Modelo de RICO



12.4.III El Diseño Curricular Base para la Educación Infantil

En el debate que precedió a esta última reforma de nuestro sistema educativo, ganaron las tendencias más progresistas tanto desde el punto de vista de la Psicología como desde la Pedagogía y de las corrientes matemáticas existentes. La psicología cognitiva, el aprendizaje significativo y las matemáticas como una poderosa herramienta de comunicación son tres muestras de ello.

Las matemáticas en el Diseño Curricular base para la Educación Infantil no aparecen aisladas sino integradas en el área 3 titulada "Comunicación y Representación".

Objetivos del área

En relación con el ámbito de experiencias de comunicación y de representación, la intervención

educativa tendrá como objetivo desarrollar unos procesos de enseñanza y aprendizaje que capaciten al niño para:

1. Utilizar diversas formas de representación (lenguaje oral y escrito, expresión plástica, dramática, corporal y musical, lenguaje matemático) para evocar situaciones, acciones, deseos y sentimientos, sean de tipo real o imaginario.
2. Utilizar las técnicas más básicas (pintura, modelado, canto, dramatización) de las distintas formas de representación (plástica, musical, dramática y corporal), para aumentar sus posibilidades expresivas.
3. Interesarse y apreciar las producciones de sus compañeros y algunas de las diversas obras artísticas e icónicas que se le presentan, atribuyéndole algún significado y aproximándose así a la comprensión del mundo cultural al que pertenece.
4. Expresar sentimientos, deseos e ideas, mediante lenguaje oral, ajustándose a los diferentes contextos y situaciones de comunicación habituales y cotidianas y a los diferentes interlocutores.
5. Comprender las intenciones y mensajes que le comuniquen otros niños y adultos, valorando el lenguaje como un medio de comunicación con los demás.
6. Utilizar las normas que rigen los intercambios lingüísticos en relatos, diálogos y conversaciones colectivas (prestar atención, aguardar turno, adecuar la voz, usar formas sociales adecuadas).
7. Utilizar las señales extralingüísticas para reforzar el significado de sus mensajes y atribuir sentido a los que recibe.
8. Comprender y reproducir algunos textos de tradición cultural (adivinanzas, canciones, refranes, dichos, cuentos, poesías, mostrando actitudes de valoración e interés por ellos.
9. Interesarse por el lenguaje escrito y valorarlo como instrumento de información y disfrute y como medio para comunicar deseos, emociones, informaciones.
10. Utilizar a un nivel muy elemental las posibilidades de la forma de representación matemática para describir algunos objetos y situaciones del entorno, sus características y propiedades y algunas acciones que pueden realizarse sobre ellos, prestando atención a los resultados obtenidos (cuantificación, medición, clasificación, ordenación correspondencia...).

11. Leer, interpretar y producir imágenes como una forma de comunicación y disfrute, descubriendo e identificando los instrumentos básicos de su lenguaje (tamaño, luz, color, forma, textura...).

Las matemáticas dentro del área de comunicación aparecen como un bloque, el número seis, el cual transcribimos a continuación.

Bloque 6. relaciones, medida y representación en el espacio.

Contenidos referidos a hechos y conceptos:

1. Atributos y relaciones de objetos y colecciones.

- Atributos y propiedades: color, forma, tamaño, textura, peso, grosor, longitud...
- Relaciones: semejanza-diferencia, pertenencia y no pertenencia, presencia y ausencia de una cualidad, relaciones de equivalencia, relaciones de orden.

2. Cuantificadores.

- Todo, nada; lo mismo, diferente; uno, varios; Grande, pequeño; pesado, ligero; largo, corto; estrecho, ancho; más, menos, igual...

3. El número.

- Unidad. Aspectos cardinales y ordinales del número.
- La serie numérica. los primeros números.

4. La medida.

- Situaciones en que se hace necesario medir. Comparación de magnitudes.
- Unidades de medida naturales (mano, pie, brazo, paso...) y arbitrarias (cuerda, tablilla, recipiente...).
- Introducción a la medida y estimación del tiempo (mucho rato, poco rato, rápido, lento; día, semana...).
- Instrumentos de medida del tiempo (reloj, reloj de arena, de agua...).

5. Formas, orientación y representación en el espacio.

- Formas planas: círculo, cuadrado, rectángulo, triángulo.
- Cuerpos geométricos: esfera y cubo.
- Las formas y cuerpos en el espacio: arriba, abajo, sobre, bajo; dentro, fuera; delante, detrás, lejos, cerca; derecha, izquierda; cerrado, abierto...

Contenidos referidos a procedimientos:

Atributos y relaciones de objetos y colecciones

- 1 - Comparaciones de distintos objetos en función de sus cualidades.
- 2 - Agrupación de objetos en colecciones atendiendo a sus semejanzas y diferencias.
- 3 - Verbalización del criterio de pertenencia o no pertenencia a una colección.
- 4 - Ordenación de objetos atendiendo al grado de posesión de una determinada cualidad.
- 5 - Utilización de los cuantificadores adecuados para referirse al grado de presencia de una determinada cualidad en objetos y colecciones.

El número

- 6 - Comparación de colecciones de objetos (correspondencia término a término); igual que, menos que, más que.
- 7 - Aplicación del cardinal en pequeñas colecciones ordenadas.
- 8 - Construcción de la serie numérica mediante la adición de la unidad.
- 9 - Utilización de la serie numérica para contar objetos de la realidad.
- 10 - Representación gráfica de la cuantificación de las colecciones de objetos mediante códigos convencionales y no convencionales.
- 11 - Resolución de problemas que impliquen la utilización de sencillas operaciones (quitar, añadir, repartir).

La medida

- 12 - Comparaciones (más largo que, menos largo que, más corto que, más grande que, más pequeño que...).
- 13 - Exploración del tamaño de objetos mediante la unidad de referencia elegida.
- 14 - estimación de ciertas rutinas de la vida cotidiana en relación con las unidades de tiempo, (día, noche, mañana, tarde, semana, festivo...).
- 15 - Utilización de los elementos de la medida de tiempo para estimar la duración de ciertas rutinas de la vida cotidiana.

Formas, orientación y representación en el espacio.

- 16 - Situación y desplazamiento de objetos, en relación a uno mismo, en relación de uno con otro, de uno mismo en relación con los objetos.
- 17 - Utilización de las nociones espaciales básicas para explicar la ubicación propia, de algún objeto, de alguna persona.
- 18 - Exploración sistemática de algunas figuras y cuerpos geométricos para descubrir sus propiedades y establecer relaciones.

Contenidos referidos a actitudes valores y normas

1. Gusto por la exploración de objetos, contarlos, compararlos, y por las actividades que impliquen poner en práctica conocimientos sobre las relaciones entre objetos.
2. Apreciación de la utilidad de los números y las operaciones en los juegos y problemas que se plantean en la vida cotidiana.
3. Curiosidad por descubrir la medida de algunos objetos e interés en la medición del tiempo.
4. Actitud de precisión y rigor en la descripción de situaciones, orientaciones y relaciones.

Los Proyectos de Educación Infantil, posteriores a la reforma, de las distintas autonomías con plena competencia en materia de educación no presentan diferencias fundamentales con el D.C.B. si bien, en algunos de ellos se detectan lagunas e incluso ausencia total de contenido matemático.

Así por ejemplo, en el Proyecto de Decreto de Educación Infantil de La Junta de Andalucía, el papel asignado a la matemática está ligado a su utilidad como lenguaje, y vehículo de comunicación, además de considerar su presencia en la vida real y su importancia como herramienta útil para resolver situaciones y problemas cotidianos. Se recomienda trabajar los cuantificadores así como procedimientos de comparación y organización de objetos, comparación de cantidades con magnitudes continuas y discretas interesar a los niños a través del lenguaje en los procesos de contar y medición.

Comparando estos documentos entre sí, se observa de manera general que los grandes bloques matemáticos a trabajar se mantienen con ligeras diferencias. Esto, pensamos que es así porque hay determinados conceptos básicos que impregnan y en gran medida controlan toda la estructura de nuestro pensamiento adulto ordinario.

Entre estos conceptos podemos decir que los más importantes son: Las nociones de espacio, tiempo, número, orden, medida, forma, tamaño y las nociones lógicas fundamentales (el todo y las partes, las clases). Estos conceptos son los que nos proporcionan un marco de referencia coherente con nuestro mundo real y con nuestro pensamiento por el que interpretamos todas las impresiones y experiencias que vivimos.

Donde sí encontramos un cambio que nos parece un avance positivo es en la metodología propuesta que van siendo cada vez, mas activas y lúdicas.

Utilizando esta nueva metodología es necesario trabajar los conceptos señalados en el párrafo anterior con los niños de educación infantil, pues como señalan Sastre y Moreno es erróneo pensar que se produce una evolución espontanea en los individuos y que lo único que hay que hacer es esperar a que el sujeto tenga el nivel necesario de maduración para entonces enseñarle el contenido adecuado.

TEMA 3

LOGICA EN LA EDUCACION INFANTIL

3.1 Introducción

La lógica, desde sus orígenes con Aristóteles hasta el presente, se ha ocupado de establecer métodos mediante los cuales se determinen la validez de los razonamientos o inferencias deductiva. Con este fin investiga las relaciones de consecuencia lógica existentes entre las premisas y conclusiones de un razonamiento.

Supongamos el siguiente razonamiento:

P_1 - Si María está enferma entonces no asistirá a la escuela.
 P_2 - María está enferma.
 C - Luego María no asistirá a la escuela.

Ante este razonamiento la lógica se pregunta si las premisas implican lógicamente la conclusión o lo que es análogo si la conclusión es consecuencia lógica de las premisas, si esto sucede se dice entonces que el razonamiento, o inferencia, es correcto.

En un razonamiento lógico correcto las premisas implican la conclusión independientemente de que estas premisas sean verdaderas o falsas. La condición de verdad o falsedad de las premisas tendrá su influencia en la verdad o falsedad de la conclusión lógica. Indicamos con esto que la validez de un razonamiento es independiente de la verdad o falsedad de sus enunciados y depende de la forma lógica del mismo.

3.2 La lógica y el lenguaje diario

Las reglas habituales del pensamiento lógico exigen o que se alcance una conclusión general de premisas particulares (proceso de inducción) o bien que se obtenga una conclusión particular a partir de premisas generales (proceso de deducción). Estos procesos son estudiados desde la óptica de la lógica de las proposiciones. Piaget describe el pensamiento del niño y lo llama transductivo esto quiere decir que va de lo particular a lo particular. El niño se centra en los rasgos sobresalientes de los acontecimientos y extrae conclusiones de ellos mediante un proceso de continuidad o semejanza más que por exactitud lógica. Lo que hace que la lógica de las proposiciones quede fuera del alcance de los niños pequeños.

Señalamos un estudio realizado por Walter en el que una de sus conclusiones es que el primer paso para lograr un nivel mental racional es el uso correcto de los términos lógicos. Según este autor cuando los estudiantes aprenden a usar la lógica en términos correctos en las frases, tienden a usar esos mismos términos lógicos correctamente en las conclusiones. Por ejemplo: Los estudiantes usan mal la partícula "o" la confunden con la "y" y así deducen

incorrectamente que "Pepito está en casa" de la expresión "Pepito está en casa o la piscina no tiene agua". Cosa que corrigen después de un aprendizaje de deducciones lógicas.

Los términos de la lógica se usan en el lenguaje diario, aunque, algunas veces, su significado difiere del significado que tienen en el lenguaje de la lógica formal o lógico-matemático. Por ejemplo si un niño dice: "Todos mis amigos van al cine" puede estar en realidad queriendo decir que sus amigos Juan, María y Pedro van al cine y algunos otros de sus amigos como Carmen y Antonio no van. Esto que es correcto coloquialmente hablando en donde se hace uso de la expresión "todos" cuando en realidad se trata de "algunos" no es correcto para la lógica formal que considera que "todos" hace referencia general, esto es comprende a toda la colección considerada sin exclusión de objeto alguno. Igual sucede con el uso de "ninguno" por "alguno".

La conclusión que podemos sacar de este estudio es que las expresiones del lenguaje de la lógica formal habrá que trabajarlas y utilizarlas de tal manera que lleguen a ser familiares al niño en su forma correcta.

A este respecto, Bertolini y Frabboni recomiendan una adquisición natural y espontánea de lenguaje, de un método y una mentalidad lógica por parte de los niños. Esto, indican, puede hacerse a través de tareas del tipo siguiente:

- Reconocimiento de enunciados oportunos en contextos particularmente simples atribuyéndoles un valor de verdad.

- Hacer uso de conexiones elementales y habituales: Usar espontánea y correctamente las partículas "y", "o", "no".

- Seleccionar objetos atendiendo a uno o más atributos dados.

- Introducir, al niño, en el uso de palabras que en idioma natural tienen la función de cuantificadores. Uso correcto y espontáneo de los términos: **todos, ninguno, cualquiera, no todos, uno sólo** etc.

- Introducir, igualmente, en las ideas y el lenguaje base de la combinatoria y a la terminología probabilística: En situaciones particularmente simples, individualizar todos los posibles casos de combinaciones de objetos (cantidades de objetos mínimas). Usar de manera significativa y coherente las siguientes expresiones: quizás, es posible, es seguro, es imposible, es más probable.

- Hacerles valorar el lenguaje natural en sus componentes sintácticas y semánticas relacionados con la formación y el reconocimiento de enunciados: A partir de sujetos y predicados componer frases que tengan sentido.

- Iniciar al niño en la capacidad de expresar actividades típicas en ámbito matemático, como definiciones, reglas. En situaciones lúdicas y de la vida práctica, describir oralmente las reglas de un juego es un ejemplo de actividad en este sentido.

- Iniciarles, así mismo, en la conciencia de las ideas de causalidad y de tiempo: Organizar secuencias oportunas en función del orden temporal. Individualizar un hecho o una situación como causa de otra.

3.3 Lógica natural y lógica formal

Castorina, J. y Gladis, D. afirman que lo que formaliza a la lógica es la culminación de un proceso de formalización de las acciones constitutivas de la inteligencia, dicho de otra manera, un estado lógico es la culminación de un largo proceso de construcción que se apoya en los procesos naturales de la inteligencia tanto de los niños como de los adultos. Así la ciencia de La Lógica construida por los lógicos prolonga el proceso natural de abstracción presente en los sujetos.

Según esta idea existe una lógica natural propia de los sujetos construida espontáneamente a partir de las coordinaciones de las acciones y cuyo desarrollo hace posible la ciencia de la lógica formal.

Las diferencias que existen entre una y otra forma de lógica son las siguientes:

- La lógica natural es más pobre y menos coherente que la lógica formal.
- La lógica natural (desde el punto de vista psicológico) es más rica e interesante que la lógica formal.

3.4 Necesidades de justificación lógica en los niños

En opinión de Piaget, el niño hereda las funciones de acomodación y asimilación y a través del uso de estas funciones el sujeto interactúa con el mundo avanzando en una secuencia invariante de estadios. Las experiencias que requieren habilidades que estén más allá del nivel de desarrollo del niño en este momento, no pueden ser asimiladas. Por tanto, el niño en principio es incapaz de realizar de una forma correcta las tareas que requieren una lógica avanzada, pero finalmente adquiere la capacidad suficiente para resolverlas.

Al principio actuará mediante un proceso de ensayo y error, más tarde, la ejecución correcta llega a ser necesaria desde un punto de vista lógico.

Los estudios sobre el desarrollo de las estructuras lógico-matemáticas en el niño revelan que la necesidad de las mismas no se impone al sujeto desde el principio sino, muy gradualmente y llega un momento que cristalizan de modo repentino.

Un estudio realizado en 1973 por Miller intentó aclarar las contradicciones de los niños sobre la necesidad, o no, de las deducciones lógicas, Miller llegó a la conclusión de que se alcanza antes la fase de estabilización de cualquier concepto que el grado de significación necesario para el sujeto, es decir, los sujetos no alcanzan la necesidad lógica inmediatamente sino que les lleva un tiempo considerable llegar a la misma. La necesidad lógica, sólo puede tener utilidad cuando los niños tienen una amplia experiencia con una tarea determinada que siga dichas reglas lógicas.

3.5 Períodos de desarrollo intelectual

El objetivo principal de la educación, para Piaget y sus seguidores, es desarrollar la inteligencia y "enseñar" cómo desarrollarla. En este contexto del desarrollo intelectual se considera el aprendizaje como "la naturaleza activa del conocimiento". El conocimiento se

vuelve virtualmente sinónimo del proceso del pensamiento lógico que es la función esencial de la inteligencia. La inteligencia resulta de la coordinación de las acciones que inicialmente se dan abiertamente de forma física y más adelante de forma interiorizada y reflexiva.

Actualmente se acepta que las representaciones mentales de los niños están fuertemente unidas a acciones y rasgos perceptivos.

Piaget en su estudio sobre la evolución del pensamiento lógico desde el niño hasta el adolescente obtiene un primer resultado plasmado en su teoría sobre los períodos de desarrollo de la inteligencia: Sensoriomotor, preoperacional, operacional concreto y operacional abstracto.

Esta teoría, no solo es una simple enumeración de lo que el niño puede o no puede hacer en cada uno de los períodos, sino que da una explicación de porqué los niños en una determinada etapa son capaces de realizar ciertas acciones y en cambio otras no.

En sus investigaciones sobre las estructuras operatorias de la lógica del adolescente, Piaget e Inhelder descubrieron que dichos estudios no sólo eran interesantes en sí mismos sino que proyectaban, de forma retroactiva, una luz sobre el conjunto de las estructuras anteriores características de la lógica concreta del niño. A través de dichas investigaciones descubrieron que las únicas operaciones que el niño es capaz de realizar en la época del pensamiento concreto consisten en "agrupaciones elementales" de clases y de relaciones fundadas sobre una primera forma de reversibilidad que puede llamarse inversión (o negación) y otras sobre una segunda forma de reversibilidad, la reciprocidad. Pero no existe en el nivel de las operaciones concretas una estructura de conjunto general que fusione en un sistema único las transformaciones por inversión y las transformaciones por reciprocidad.

Descubrieron que para analizar las estructuras operatorias del pensamiento formal del adolescente era necesario no sólo emplear los algoritmos de la lógica de las proposiciones, sino además el grupo de las cuatro transformaciones (inversiones y reciprocidades) necesarios para el pensamiento formal. Ya que su estudio puso de manifiesto que el pensamiento formal no sólo consiste en razonamientos verbales (lógica de las proposiciones) sino que implica la formación de una serie de esquemas operatorios que aparecen sincrónicamente: operaciones combinatorias, proporciones, sistemas de referencia, esquemas del equilibrio mecánico (igualdad entre la acción y la reacción), probabilidades, correlaciones etc.

3.6 Desarrollo intelectual y estructuras lógicas. Operaciones.

Piaget se planteó el problema de describir las estructuras características de los períodos operatorios del pensamiento del niño, para llevar a cabo este trabajo eligió el lenguaje de la lógica y de la Matemática Moderna o matemática basada en las estructuras de la teoría de conjuntos.

Define "Operación" como una acción interiorizada, es decir, una reconstrucción de las acciones sensoriomotrices mediante la función semiótica y con las siguientes características.

- Se trata de acciones representadas significativamente mediante instrumentos semióticos como las imágenes y el lenguaje.

- Una operación, consiste en la dependencia de una acción respecto de otra dentro de un sistema estructurado.
- Pueden ser efectuadas en un doble sentido (directo e inverso), es lo que se conoce como reversibilidad.

Las estructuras tienen un carácter formal o abstracto, en el sentido de que una misma estructura es generalizable a diversos contenidos.

Las estructuras de conjunto constituyen sistemas en equilibrio ya que las acciones involucradas son capaces de compensar perturbaciones.

Las acciones implícitas en los símbolos matemáticos son todas ellas ejemplos de operaciones como se muestra en el cuadro siguiente.

símbolo matemático	acción que representa
+	juntar
-	separa
x	reiterar
:	repartir
<	ordenar
=	sustitución

Todas estas acciones tienen su contrapartida lógica así "y" hace referencia a la acción de juntar, "excepto" la acción de separar... De esta forma las estructuras de la lógica pueden usarse para representar las estructuras del pensamiento, unas sirven de modelo de las otras. El sujeto que piensa de esta manera tiene una estructura cognoscitiva que puede representarse en términos lógicos. Otras formas de pensar que no estén basadas en la lógica llegarán al fracaso, según Piaget, ya sea al comienzo de la estructura o bien en el uso de la misma una vez formada.

La lógica natural sigue un proceso progresivo que va desde las estructuras de conjunto elementales, las cuales permanecen todavía indiferenciadas de sus contenidos extralógicos, a estructuras más avanzadas que se caracterizan por el hecho de haber logrado el máximo nivel de abstracción posible respecto de esos contenidos.

3.7 Estructuras lógicas operatorias

Cada período de desarrollo se caracteriza por estar relacionado con una estructura de conjunto responsable de los logros cognoscitivos específicos.

La primera estructura operatoria que se construye y la más elemental de todas es el agrupamiento o clasificación simple.

Otras estructuras lógicas a las que Piaget da gran importancia en sus investigaciones son la conservación, la cuál se considera de gran importancia en el proceso de formación del

pensamiento racional. Así mismo se considera importante la lógica de las clases (relación parte-todo) y el desarrollo de la seriación para el conocimiento del número, fundamentalmente, ya que Piaget consideraba que el desarrollo de número sigue al desarrollo de la lógica. Así mismo, Piaget considera que las leyes de la lógica se han desarrollado merced a las exigencias que supone la vida en un universo ordenado de acuerdo con unas leyes.

Las acciones que originalmente manifestamos y que más tarde interiorizamos son el comienzo de un sistema firmemente organizado, pero es en el período de las Operaciones Concretas cuando el énfasis se centra en el examen de las relaciones entre pensamiento y lógica simbólica, esbozando brevemente las propiedades de los "agrupamientos" y de las "operaciones" que caracteriza este período de desarrollo.

3.8 La clasificación y su relación con la formación de conceptos

Hemos visto que para Piaget la primera, y quizá más importante, de las estructuras operatorias es el agrupamiento, esta misma idea la presenta Skemp para el que las clasificaciones están en la base de la formación de los conceptos. Así mismo Bermejo asegura que las conductas de clasificación realizadas desde una edad temprana, son una actividad importante en el desarrollo cognitivo del niño.

La acción de clasificar está asociada a varias actuaciones cotidianas.

- 1º El hecho de nombrar un objeto lleva implícito una clasificación del mismo. Decir la palabra "mesa" supone hacer referencia a una gran variedad de objetos todos ellos con una serie de características y de funciones similares.
- 2º Definir un objeto es otra forma de clasificarlo, por esta forma se llega a conocer la función del mismo y permitirá conocer cómo conducimos respecto a él.
- 3º También se realiza una clasificación cada vez que se reconoce un objeto como "uno que hemos visto antes", aunque no hay dos ocasiones en que los datos sensoriales sean exactamente iguales.

El proceso consiste en abstraer ciertas propiedades invariantes que persisten en la memoria más tiempo que el recuerdo de una particular forma de representación del objeto.

Una vez formada la abstracción, cualquier experiencia posterior se reconoce, a través de una comparación de semejanzas y diferencias.

Las siguientes definiciones de abstraer y clasificar son de Skemp

Abstraer es una actividad por la cual nos hacemos conscientes de similitudes, en el sentido cotidiano no en el matemático, entre nuestras experiencias.

Clasificar significa reunir nuestras experiencias sobre las bases de estas similitudes.

Una abstracción es un tipo de cambio mental duradero, el resultado de abstraer, que capacita para reconocer nuevas experiencias como poseedoras de similitudes con una clase ya formada. Es algo aprendido que capacita para clasificar; es la propiedad definidora de una clase. Abstraer es una actividad que tiene como resultado una abstracción o concepto.

Para Skemp, queda claro que en la base de la formación de los conceptos está el proceso

de clasificación el cuál dará lugar a estos después de verificarse la abstracción.

Queremos llamar la atención sobre el hincapié que hace el autor en la distinción entre un concepto y su nombre. Un concepto es una idea, el nombre de un concepto es un sonido, o una marca sobre el papel, asociada con él. Esta asociación puede producirse después de que el concepto haya sido formado. Al estar asociado con un concepto, el uso de un nombre ayuda a clasificarlo, es decir, a reconocer que pertenece a una clase ya existente. El nombrar puede igualmente jugar una parte esencial en la formación de nuevos conceptos. Escuchar el mismo nombre en conexión con experiencias diferentes predispone a reunirlos en la mente, e incrementar la oportunidad de abstraer sus similitudes intrínsecas.

Para Skemp existen dos tipos de conceptos, los que se derivan de las experiencias sensoriales y motoras del sujeto con el mundo exterior como el color rojo, un automóvil, que dan lugar a conceptos primarios y aquellos otros extraídos de conceptos primarios y que se denominan conceptos secundarios. Añade, que los conceptos primarios pueden formarse y utilizarse sin el empleo del lenguaje, sin embargo considera que el lenguaje es esencial en la formación de conceptos de orden superior.

3.9 Génesis de las estructuras de clasificación y de seriación.

Por todo lo expuesto hasta ahora, se puede considerar que las estructuras operatorias de clasificación y de seriación son básicas y fundamentales para el pensamiento del niño. Vamos a dedicar nuestra atención a las mismas comentando las reflexiones que sobre la génesis de estas estructuras se hace en el prólogo del libro "Génesis de las estructuras elementales" de Piaget e Inhelder en el que se reflejan las investigaciones realizadas por los autores sobre estas estructuras.

Dado que en el proceso de descripción de la génesis de un concepto se pueden considerar dos partes: en primer lugar reconstruir lo que se presenta como dado, del concepto, en el punto de partida de dicha génesis y en segundo lugar mostrar de qué manera y bajo la influencia de qué factores estas estructuras iniciales se van transformando, vamos a tratar aquí esos dos apartados.

Los autores, anteriormente citados, tratan el problema de la génesis de las clasificaciones y seriaciones de forma simultánea, haciendo un inventario de los factores estructurales necesarios a partir de los cuales se desarrollarán las estructuras de clasificación y de seriación.

Para Piaget e Inhelder son cuatro las hipótesis posibles que pueden aportar una explicación sobre los factores estructurales que dan origen como punto de partida a las operaciones de clasificación y de seriación, dichas hipótesis son el resultado de establecer varias dicotomías sucesivas, son las siguientes:

- I.- a) Solo interviene el lenguaje en la construcción de las operaciones de clasificación y seriación. Hipótesis (H_1).
- b) Dicha construcción depende de factores distintos al lenguaje.

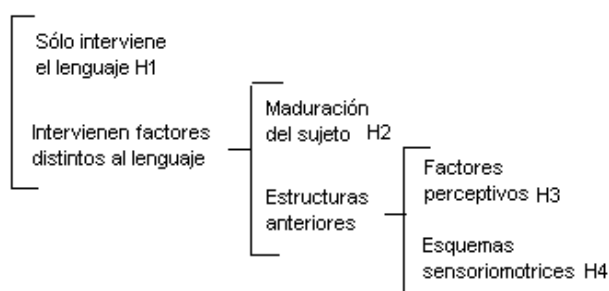
II.- a) Por coordinaciones del sujeto independientes del medio. Hipótesis (H₂)

b) Por estructuras elaboradas anteriormente.

III.- a) El origen es la percepción. Hipótesis (H₃).

b) Su origen está en la diferenciación de esquema sensoriomotrices. Hipótesis (H₄).

Esquemáticamente sería



Para cada una de estas hipótesis se dan argumentos a favor y en contra basadas, algunas de ellas, en resultados de experiencias realizadas.

En cuanto a la hipótesis primera, *Solo el lenguaje interviene en la construcción de las operaciones de clasificación y de seriación*, los argumentos que se dan son los siguientes:

Es cierto que el lenguaje comporta tanto estructuras de clasificación como de seriación, hemos dicho anteriormente que nombrar un objeto es una forma de clasificarlo, se puede pensar entonces en atribuir íntegramente al lenguaje la formación de las operaciones de clasificación y de seriación, la otra alternativa es asignarle un papel auxiliar o secundario en la formación de estas estructuras. Piaget considera para dar respuesta a estas dos posibilidades tres métodos de control: El examen de los sordomudos, el análisis de los primeros esquemas verbales, el examen de los esquemas operatorios ligados al lenguaje corriente.

El examen de los sordomudos y su comparación con lo que ocurre en personas sin problemas de sordera ha dado como conclusión que la evolución de las seriaciones es análoga en estas dos situaciones. Por lo que a las clasificaciones se refiere, los sordomudos logran las mismas clasificaciones elementales que los sujetos sin esta deficiencia, sin embargo, presentan un retraso en el caso de clasificaciones más complejas. Se concluye, por tanto, que la esencia de estas operaciones está en los sordomudos por lo que no parece que el lenguaje sea necesario en la formación de dichas estructuras operatorias, sino que parece más bien que su función es condición necesaria para el acabado de estas estructuras.

El análisis de los primeros esquemas verbales ha llevado a la conclusión de que si bien el lenguaje acelera la formación de las categorías y permite la transmisión de las clasificaciones colectivas no ocurre esto desde el principio y así vemos que un mismo significante es aplicado

por el niño a significados de distinta generalidad. Desde el principio el lenguaje favorece una serie de asimilaciones sucesivas que dan lugar a otras relaciones de semejanza y de diferencia, pero hasta que estas relaciones se consideren como relaciones de parte-todo ha de pasar algún tiempo.

Los exámenes de los esquemas operatorios ligados al lenguaje, da como resultado que aunque se utilicen dichos esquemas en el lenguaje no quiere esto decir que se tenga asimilada la comprensión y formado su estructura, ya que esta no se trasmite sino que se construyen sobre la base de la actividad del sujeto.

Para la hipótesis segunda, *La maduración del sujeto da lugar a la formación de tales estructuras*, se dan las siguientes razones: Si la causa de la formación de las estructuras operatorias no corresponde sólo al lenguaje y suponiendo que estas causas correspondan a mecanismos más profundos, hay que pensar que estos mecanismos están ligados a coordinaciones nerviosas que nada tienen que ver con el ambiente y que irán avanzando progresivamente a una maduración. Los autores exponen el problema que esto presenta ya que no se tienen conocimiento de ninguna estructura que emerja espontáneamente de factores ligados a la maduración. Sin embargo apuntan estar a favor de reservar una pequeña parte de influencia a la maduración debido al cambio existente en los niños a la edad de 7 a 8 años y que sin duda alguna corresponde a algún cambio en las estructuras nerviosas, y la maduración del sistema nervioso proporciona mayores posibilidades a los sujetos.

Para la hipótesis tercera, *Los factores perceptivos son los causantes de la formación de las estructuras tratadas*, se exponen las siguientes razones:

Antes de aprender a clasificar y a seriar objetos los niños perciben relaciones de semejanza y diferencia entre los objetos y puesto que las estructuras cognoscitivas más simples son las perceptivas y las sensomotrices, se puede pensar que estas relaciones perceptivas son el origen de las clasificaciones y las seriaciones. En apoyo a esta idea tenemos la opinión de los psicólogos que están de acuerdo en reconocer que los niños captan relaciones y no solamente términos aislados, lo que indica que la percepción estaría en la base del conocimiento de todo tipo de conocimiento.

Piaget e Inhelder distinguen entre lo que llaman las colecciones figúrales y las clasificaciones operatorias, e igualmente distinguen la configuración serial perceptiva de la seriación operatoria.

La percepción se realizará sobre colecciones figúrales y sobre configuraciones seriales y no sobre las clasificaciones y seriaciones operatorias, el paso de unas a las otras requiere de un largo y complejo proceso.

Por último para la Hipótesis cuarta, *Los esquemas sensomotrices influyen totalmente en la formación de clasificaciones y seriaciones*, se señala:

Se sabe que antes de la constitución del lenguaje el niño es capaz de conductas que anuncian un tipo de organizaciones relacionadas con las clasificaciones. Así por ejemplo: Los niños reconocen cuando se coloca un objeto en determinadas situaciones, sus caracteres, su

posible utilidad. Estas conductas corresponden a clasificaciones prácticas.

Se encuentra el esbozo de las clasificaciones en el acto de apilar objetos semejantes o en construir objetos complejos y el esbozo de las seriaciones en determinadas construcciones, por ejemplo: superposición de cubitos colocados primeramente al azar y más tarde ordenados según su volumen. Pero si bien es verdad que a nivel sensoriomotriz se observan conductas que anuncian las clasificaciones y las seriaciones, también es cierto que queda una gran distancia por recorrer entre estas organizaciones elementales y las estructuras operatorias correspondientes.

Se concluye así que ninguna de las cuatro hipótesis planteadas dan satisfacción separadamente a la pregunta de cuál es el factor que da origen a estas estructuras, parece más bien que son todos ellos actuando conjuntamente los que dan lugar al inicio y posterior desarrollo de tales estructuras de conjunto.

3.10 La clasificación como estructuras de conocimiento

Ha quedado expuesto, con todo lo anterior, que las clasificaciones son unas de las estructuras básicas de conocimiento, estas responden a una serie de características, así: tienen una estructura operatoria y anteceden, en su aparición, a las clasificaciones matemáticas.

Piaget sostiene que para reconocer una clase es necesario:

- Comprensión del género y de la diferencia específica de los elementos de una clase (para clasificar es necesario saber establecer semejanzas y diferencias).
- Comprensión de la relación parte-todo (pertenencia a una clase e inclusión de una clase en el universal).
- Comprensión y utilización correcta de los cuantificadores: todos, alguno, algún, un, ninguno.

3.11 Las clases jerárquicas

La clasificación matemática da lugar a la formación de clases las cuales cumplen una serie de propiedades entre ellas las siguientes:

- En una clase no existen elementos aislados
- No existen clases aisladas.
- La clase A contiene a todos los elementos de carácter "a".
- La clase A sólo tiene los elementos de carácter "a".
- Dos clases del mismo rango son disjuntas.
- Toda clase tiene una complementaria.
- Toda clase A está contenida en otra de rango superior.
- Las inclusiones de una clase en otra se producen por el orden del mínimo criterio de clasificación o criterio más fino.
- Se deben de emplear los mismos criterios para distinguir las clases del mismo rango.
- Si una clase A se divide en dos clases, una clase B de su mismo rango debe dividirse también en dos subclases simétricas entre las subdivisiones.

3.12 Fases de desarrollo

Las fases en el desarrollo de esta estructura, también llamados estadios, fueron estudiados por Piaget y sus colaboradores y posteriormente por otros muchos investigadores que han ido completando y corrigiendo algunos aspectos de la teoría de la escuela de Ginebra.

Piaget, centra la atención de sus estudios en dos tipos de clasificaciones, las que se perciben por el sentido de la vista y que llama visuales y las que se perciben por el tacto (sin necesidad de la vista) las denomina táctiles.

Tanto para las unas como para las otras distingue tres estadios desde el punto de vista evolutivo, si bien en lo que se refiere a las clasificaciones de forma táctil se reserva un retraso de un año respecto a las visuales.

Las clasificaciones táctiles son las que se obtienen mediante el tacto, en ausencia del sentido de la vista. La utilidad de realizar clasificaciones por el tacto con los niños reside principalmente en el hecho de prescindir de las sensaciones que percibe por la vista, lo que obliga al niño a centrarse en otro tipo de sensaciones y buscar la generalización entre estas.

A continuación se enumeran los distintos estadios y la edad aproximada de los mismos, para las clasificaciones visuales.

- 1º estadio de 0 a 4 años y medio, se caracteriza porque el niño realiza colecciones figurales.
- 2º estadio desde los 4 años y medio hasta los 6 años está caracterizado por las colecciones no figurales, que realiza atendiendo solamente a una característica de los objetos.
- 3º estadio de los 6 a los 7 años, el niño elabora clases jerárquicas, lo que supone el reconocimiento de más de una características de los objetos.

- Colecciones Figurales

La colección figural, según Piaget e Inhelder, constituye una figura en virtud de los enlaces entre sus elementos, como tales elementos. Así dispone los elementos según configuraciones espaciales que para el niño tienen un significado, por ejemplo colocar unas figuras dadas formando una estrella, o colocar un cuadrado y encima un triángulo por que lo considera una casa.

En sus investigaciones encontraron distintos tipos de colecciones figurales como:

- Alineaciones pequeñas y parciales. El niño no trata de clasificar todos los objetos que se le entregan y, por tanto, no tiene en cuenta todas las piezas. Le basta con construir, con algunas piezas, una colección no exhaustiva y sin relaciones entre sí.

- Alineamientos continuos, pero con cambios de criterio. Coloca todas las piezas construyendo una sola fila y no sigue un criterio único. Estos cambios de criterio manifiestan claramente las dificultades de la coordinación entre las relaciones de semejanza y las de parte-todo.

- Intermediarios entre los alineamientos y los objetos colectivos complejos. Alineamientos múltiples en los que una línea está orientada en distinta dirección que la primera, las figuras que en principio comienzan como alineamiento, después se completan como

superficies.

- Objetos colectivos. Son colecciones figurales de más de una dimensión. Estaría formada por una agrupación de dos o tres dimensiones de elementos semejantes, pero que forman juntas una figura unida.

- Objetos complejos de forma geométrica y empírica. Hace montones, busca simetrías, realiza formas geométricas.

Los autores señalan que en la génesis de las clasificaciones infantiles, las colecciones figurales son como esbozos de la síntesis entre la comprensión y la extensión.

- *Colecciones no-figurales*

Hace colecciones no figurales, cuando hace pequeñas agrupaciones fundadas en la semejanza, aparecen yuxtapuestas y a veces no son exhaustivas. Son del siguiente tipo:

- Pequeñas colecciones yuxtapuestas sin criterio único y dejando restos heterogéneos.

- Sin dejar restos o residuos.

- Con criterio único, ejemplo: el color.

- Agregando diferencias interiores.

3.13 Las seriaciones como instrumentos de conocimiento

Seriar es ordenar colecciones de objetos manteniendo constante unos atributos de los objetos a excepción de otros (uno o varios) que sirven de comparación.

Según Piaget, la seriación es una estructura operatoria que antecede a la relación de orden

estricto (con las propiedades antisimétrica y transitiva).

Para el niño es un conocimiento básico, al igual que las clasificaciones, para posteriores conceptos matemáticos. Aparece en el niño durante el período sensorio-motriz y se desarrolla hasta los 7-8 años.

Tipos de series

- Cualitativas o reiterativas. Se ordenan diferentes valores de una misma cualidad. Suele reiterarse un trozo de serie.

- Cuantitativas. Se ordenan tamaños de una magnitud.

- Mixtas. Se ordenan cantidades y valores.

- Prenuméricas. Hacen referencia al número.

Todas ellas se pueden combinar entre sí.

Igual que ocurre con las clasificaciones, podemos distinguir seriaciones visuales o por tacto.

Seriación visual

La seriación visual comienza a partir de los 4-5 años. Antes de esa edad los niños

fracasan si intentamos con ellos estas tareas.

Primero aparecen las seriaciones figurales. Se dan desde los 4-5 años hasta los 6-7. El niño distribuye el material a seriar según una figura con forma de montaña, de tobogán, escalera etc. A los 6-7 años tantea la seriación operatoria (tiene un proyecto de seriación). Sobre los 7 años realiza la seriación operatoria (tiene proyecto de seriación y sabe intercambiar piezas).

La anticipación de una serie es el comportamiento más avanzado y consiste en poder realizar un dibujo de la serie antes de realizarla.

Seriación por tacto

La seriación por tacto ayuda a eliminar el factor figural. Presenta los mismos estadios que la seriación visual pero con un retraso de un año. Es decir, los niños fracasan hasta los 5-6 años, tantean entre los 6-7 y realizan la seriación desde los 8 años en adelante.

3.14 Capacidades a desarrollar en el niño

En el Informe piagetiano se dan una serie de capacidades que los niños han de desarrollar en relación con las estructuras de clasificación y de seriación, a continuación las enumeramos.

Clasificaciones

- Reconocimiento de semejanzas y diferencias entre objetos.
- Emparejar objetos idénticos y formar pequeños grupos de objetos similares. (Colecciones).
- Escoger criterios para hacer grupos. Enumerar criterios por los que se hizo el agrupamiento.
- Seleccionar criterios apropiados para la clasificación.
- Clasificar coherentemente según un criterio.
- Desplazar criterios en la formación de nuevos grupos, una vez efectuada una clasificación inicial, considerar la posibilidad de nuevos criterios que produzcan otras clasificaciones sobre el mismo material.
- Construir sistemas jerárquicos de clasificación y comprender las relaciones entre los niveles.

Seriaciones

- Reconocer diferencias relativas entre dos o más objetos.
- Clasificar de forma dicotómica un conjunto de objetos según un criterio de relación.
- Utilizar razonamiento transitivo.
- Ordenar de modo seriado entre cinco y diez objetos (por tanteo).
- Dada una serie, insertar de dos a cinco objetos de modo apropiado.
- Construir correspondencias entre dos secuencias ordenadas.

3.15 La inferencia transitiva

Una propiedad de la relación de orden es la propiedad transitiva, mediante la cual

suponiendo que $A > B$ y $B > C$ se infiere que $A > C$. En términos de tarea podemos suponer tres bastones:

rojo el más largo

azul es el mediano

amarillo el más pequeño o menos largo.

Si se muestra a un niño dos bastones el rojo y el azul, será capaz de decir cual es el más largo de los dos, igualmente ocurrirá si se le muestra el azul y el amarillo. Estas respuestas que son correctas incluso con niños de tres años, son debidas a la apreciación de la longitud de los bastones y coinciden con las que daría un adulto. Si después de esto se le pregunta al niño cuál es el bastón más largo el rojo o el amarillo, sin mostrárselo (no hay percepción) ocurre, que las respuestas de los niños varían con la edad. Hasta los 4 años darán una respuesta aleatoria, sobre los 7 años comenzarán a responder de forma análoga a los adultos.

La explicación que Piaget da a este hecho es que la respuesta correcta exige un proceso lógico de inferencia transitiva y los niños carecen de dicho mecanismo lógico. El pensamiento preconceptual no hace posible la combinación de proposiciones de manera inferente.

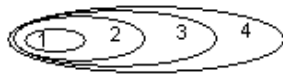
Pero no todos los investigadores aceptan esta interpretación. Los críticos de esta forma de entender los hechos, no están de acuerdo con la idea de que los niños fracasan en las pruebas de inferencia transitiva que Piaget realizaba, y creen que hay explicaciones alternativas a este fracaso. Por una parte, se asegura que aunque es posible que tal conducta pueda producirse a través de una inferencia transitiva, no quiere esto decir que tenga que hacerse necesariamente así, se podría dar el caso de que se reconstruyera en la memoria un cuadro con los tres bastones y se comparasen las tres dimensiones. Por otra parte, los niños pueden fracasar, cuando realizan la tarea, por muchas razones que no sean sólo las basadas en su inmadurez lógica. Así, puede suceder que no entiendan la pregunta formulada, o que no recuerden la información dada sobre la manera de llevar a cabo la tarea o que no comprendan la información.

Todas estas razones han dado lugar a interrogantes y a numerosas investigaciones que no han conseguido poner de acuerdo a los investigadores en sus posturas. Los tipos de pruebas empleados y los distintos procedimientos han proporcionado resultados que en principio parecen contradictorios.

3.16 La Lógica de clases como inicio al desarrollo del número

Las tareas sobre inclusión de clases se refieren a la capacidad del niño para comparar un conjunto con un subconjunto suyo, o sea, un todo con una de sus partes.

Piaget sostenía que el desarrollo del número surge de la comprensión de la lógica de las clases y del desarrollo de la seriación. El concepto de número es el resultado de una síntesis entre dos tipos de relaciones que el niño establece al actuar sobre los objetos: el orden y la inclusión jerárquica. Así por ejemplo, para cuantificar una colección de ocho objetos, el niño ha de establecer entre ellos, mentalmente, la relación de inclusión jerárquica siguiente: uno se incluye en dos, dos en tres, tres en cuatro etc.



Piaget asegura que la relación jerárquica de clases es difícil para el niño que se encuentre en el estadio preoperacional y lo pone de manifiesto con tareas como la siguiente:

Sobre una colección de animales compuesta por perros y gatos (hay más perros que gatos) a los que el niño previamente ha identificado, se les hace responder a la pregunta ¿hay más perros o más animales?. El niño de cuatro años responde que hay más perros. Si se le vuelve a preguntar ¿más perros que qué? Responde: que gatos. Esto, según Kamii, se debe a que los niños oyen una pregunta distinta de la que se les plantea ya que cuando han separado una colección en dos subcolecciones, sólo son capaces de comparar dichas partes entre sí y no el todo con las partes. El todo deja de existir, para el niño en cuanto está pensando en las partes. Puede pensar en el todo pero no a la vez que piensa en las partes.

Para comparar el todo con las partes el niño ha de realizar dos acciones opuestas al mismo tiempo: dividir el todo en partes y volver a unir las partes en el todo. En opinión de Piaget un niño, normal, de cuatro años no tiene capacidad lógica de hacer esto.

Sobre los siete u ocho años, el pensamiento del niño es lo suficientemente móvil como para permitir la reversibilidad y dar lugar a este tipo de relaciones.

Tareas semejantes a esta, consisten en mostrar al niño bolas de madera, unas blancas y otras negras (el número de bolas negras y el de bolas blancas es distinto) y preguntarle ¿qué hay más bolas blancas o de madera?

Algunos investigadores no están de acuerdo con la interpretación que se hace de las repuestas dadas por los niños en estas tareas, se han realizado numerosas experiencias para poner de manifiesto que la competencia de los niños en problemas de inclusión de clases es mayor de lo que Piaget afirma. Intentan poner de relieve que si los niños no realizan la tarea correctamente puede ser debido a otro tipo de dificultad, como por ejemplo, no entender la pregunta y no saber que es lo que se espera que realicen, la incomprensión del niño puede ser debida a que la pregunta no esté formulada en un lenguaje adecuado a la edad del niño o bien por que intervengan algunos factores perceptivos debidos al material utilizado.

Hay autores que consideran que los errores que los niños cometen al realizar una tarea de inclusión se deben a la dificultad que tienen para entender la pregunta y han intentado otras formas de preguntar, así por ejemplo, Wilkinson introduce la pregunta en una historieta, Winer enumera los objetos al hacer la pregunta *Tenemos tres perros y dos gatos...* Markman utiliza nombres colectivos para las clases *¿Quién obtendrá más madera el que corte los robles o el que corte el bosque?*. Todos ellos aseguran obtener mejores resultados que los que indicados por Piaget. La utilización de verbos distintos de "tener" y "haber" (que fueron los utilizados por Piaget) como "coger", "comer", "ir", "dar", han proporcionado, en las pruebas, mejores resultados.

En otra línea de argumentos, Mac Namara no está de acuerdo en la importancia dada a la

lógica de las clases para el desarrollo del número, señala varias contradicciones en este sentido. Los niños, asegura, dominan los números antes que la lógica de las clases. Las operaciones entre clases son diferentes que las operaciones aritméticas. Las clases son grupos de objetos que comparten determinados atributos mientras que las operaciones aritméticas se pueden aplicar a series de objetos arbitrarios. Por otra parte, la seriación no puede utilizarse para distinguir los miembros de una clase, pues ya deben de diferenciarse para poder realizar la seriación.

3.17 La conservación

Siguiendo la teoría piagetiana, la fase preoperacional está marcada por la ausencia de ciertas operaciones cognoscitivas tales como la inclusión de clases y la conservación. Por otra parte, para dicha teoría, la conservación se considera como una condición necesaria para todo pensamiento racional.

La capacidad de conservación se refiere a la comprensión de algunas propiedades de los cuerpos que no cambian aunque se les manipule y se produjeren cambios de situación en los mismos que puede llevar a engaño. Estas propiedades se refieren a aspectos como: el número, el peso, la longitud, el área, el volumen etc. Así por ejemplo, un cambio en la disposición de los objetos de una colección, puede llevar a pensar que el número de dichos objetos ha cambiado. El hecho de anudar una cuerda puede sugerir un cambio en la longitud de la misma.

No cometer errores en estas situaciones supone el conocimiento de que muchos cambios son reversibles, esto supone que se puede volver a la posición inicial en el momento deseado.

Normalmente la capacidad de conservar las cantidades discretas se considera como el inicio de la comprensión del número, y la capacidad de conservar el peso y el volumen como el inicio de la capacidad y de las operaciones concretas.

Las características que se deben de tener en cuenta en los niños, en cuanto a la adquisición y desarrollo de estas capacidades, según el Informe Piagetiano, son las siguientes:

- Conocimiento de qué acciones son reversibles y cuales no. Por ejemplo, se puede invertir el efecto de verter limonada de una jarra a un vaso, pero no se puede invertir el efecto de disolver azúcar en la limonada.
- Reconocimiento de qué propiedades cambian (textura del azúcar) y qué propiedades permanecen (cantidad de azúcar) cuando se realizan sobre las mismas varias acciones como triturar, disolver...
- Conocer que el número no cambia aunque la organización de los objetos sea diferente.
- Reconocer que la longitud de un objeto no cambia aunque el mismo cambie de forma.
- Conocer que la distancia entre los objetos no se ve afectada aunque entre los mismos se coloquen otros objetos.
- Conocer que el paso del tiempo es independiente de las actividades que se realicen.

Gelman realiza una crítica a la teoría de Piaget, sobre la conservación, en los siguientes términos: Asegura que las pruebas que Piaget realizó sobre la conservación del número además

de una prueba de capacidad lógica suponían un control de la atención, de las destrezas semánticas y de la capacidad de estimación, por lo que cualquier error en uno de estos aspectos suponía un error en la tarea, que no tiene porqué ser atribuido solamente a una falta de capacidad lógica como supone Piaget.

Por lo general, las críticas realizadas sobre las teorías piagetianas coinciden en señalar que se atribuye a los niños unas capacidades muy por debajo de sus posibilidades reales y, además ignoran el contexto en el que tiene lugar el proceso de pensamiento.

Las mismas personas que hacen estas críticas coinciden en señalar que es más interesante conocer lo que el niño puede hacer en realidad y avanzar a partir de ese punto, o sea, dar mayor énfasis a lo que el niño puede hacer que a lo que el niño no puede hacer.

Estamos de acuerdo con estas sugerencias y apoyamos el que los niños trabajen en tareas lógicas pues consideramos que amplían y refuerzan los procesos mentales, ya que actúan como puntales de toda actividad de aprendizaje.

3.18 Materiales, recursos y actividades

Todo tipo de material puede servir para trabajar la lógica con los niños pequeños. El material no-estructurado, especialmente aquel que esté más cercano a los niños, se puede utilizar en actividades de reconocimiento de características, así en un objeto cotidiano decir lo que es y lo que no es. Por ejemplo: de un plátano se puede decir que es alargado, es amarillo, es comestible... No es tan largo como mi brazo, no es rojo...

Existen materiales estructurados que son los que llevan implícito en el material conceptos y relaciones lógicas. Han sido ideados para ser utilizados en el aprendizaje de dichos conceptos. El ejemplo más característico es el de los bloques lógicos inventados por Dienes. Actividades y juegos a realizar con los bloques lógicos aparecen en muchos libros aconsejamos dos de la editorial Teide "Los primeros pasos en matemáticas" y "Lógica y juegos Lógicos" ambos de Dienes y Golding.

A semejanza de los bloques lógicos, han aparecido en el mercado otros materiales para trabajar la lógica mediante las variables que presentan las distintas características que poseen sus elementos.

Un tipo de actividad que favorece el desarrollo de lógica en el niño es la pregunta (el diálogo) tanto del profesor dirigida al alumno como las preguntas formuladas por los propios alumnos.

La pregunta es una forma de ejercicio intelectual (García N.) que el niño realiza, a través de ella se establece una relación directa con la capacidad de exploración, de investigación y de adecuación a la realidad. Responder a la pregunta favorece el descubrimiento de las leyes que rigen la legalidad de los objetos, y por tanto el funcionamiento de la realidad. No responder empobrece, también empobrece aquellas respuestas que consolidan la dependencia (es el caso en que el niño pregunta lo que ya sabe o lo que puede descubrir por sí mismo). La autora

justifica sus afirmaciones anteriores indicando que quien se pregunta por la realidad está buscando otras respuestas distintas de las que ya conoce. Asegura que la escuela debe de utilizar la pregunta del niño como recurso metodológico. Se deben de favorecer las preguntas de exploración.

El trabajo manipulativo no sólo consiste en una actividad motriz, también se "manipula" un objeto cuando se pregunta y se reflexiona sobre él. La escuela invalida la pregunta cuando se empieza el aprendizaje por la respuesta.

La pregunta es un proyecto de acción o de operación, que contiene un esquema anticipador que centra la atención en una operación concreta como se muestra en el cuadro siguiente:

Tipo de pregunta	Acción a la que obliga
¿Qué es?	clasificar (objetos o situación)
¿Cómo es?	describir
¿Es más o menos?	comparar (evidenciar semejanzas, diferencias)
¿Cuanto?	contar
¿Donde?	ordenar en el espacio
¿Cuando?	ordenar en el tiempo
¿Por qué?	explicar una situación
¿Para qué?	evaluar (fines, medios)

En esta misma línea Piaget considera que los niños han de inventar su propio sistema de pensamiento lógico. No nacen con el sistema lógico que empleamos los adultos. Todos logramos sistemas lógicos equivalentes porque tenemos capacidades y limitaciones humanas y porque vivimos en un mundo donde la lógica funciona.

Podemos facilitar que el niño construya su sistema lógico observando qué tipo de sistema utiliza, planteando preguntas que provoquen el establecimiento de relaciones y proporcionen abundantes experiencias físicas que reflejen la forma en que opera el mundo real.

3.19 Actividades

Las siguientes actividades las propone Tavernier indicando los fines que se pretenden conseguir con las mismas:

Fines: Distinguir propiedades: Observar los objetos (percibidos con todos los sentidos) para reconocer sus diferencias y semejanzas).

Actividades: Se distinguen actividades realizadas con los distintos sentidos.

*** vista**

Con materiales que pueden ser cartas, fotos, tarjetas postales...

- Juegos de emparejamientos, poner juntas dos imágenes que se complementan.
- Reunir cartas idénticas.
- Buscar diferencias entre dos imágenes (progresivamente, una, dos, tres...)
- Encontrar gemelos en una serie.
- Descubrir el intruso
- Encontrar lo que se ha quitado o añadido, lo que se ha cambiado de lugar etc. en una colección de objetos dispuesta previamente.
- Reproducir una configuración de objetos colocada previamente y luego ocultos.

*** Tacto**

- Reconocer por el tacto los objetos que hay en una bolsa.
- Poner juntas las cosas que van juntas con los ojos vendados.

*** Olfato, Gusto, Oído**

Con los ojos vendados reconocer objetos o sustancias por el olfato o el gusto, y distintos sonidos.

Fines: Seleccionar objetos: Sea reuniéndolos, sea separándolos, en función de sus propiedades, forma, color, longitud, espesor, materia, peso, sabor, olor...

Los objetos a utilizar pueden ser variados.

- fichas de distintos colores;
- objetos de madera;
- bloques lógicos;
- juegos de cartas;
- cartas de animales;
- elementos naturales;
- objetos usuales de la clase;
- material de educación física;
- los propios niños;
- ropa...

Fines: Comparar diversas agrupaciones entre sí: Hacer aparecer en los agrupamientos efectuados la propiedad común y darles el valor del criterio de clasificación.

Actividades Buscar

- Lo que se pone en la maleta, en la caja de costura, en el cofre de los disfraces...
- Lo que va con. Árboles y frutas, madres e hijos.

- Lo que se parece a: la ropa, la cartera...
- Lo que sirve para limpiar...
- Lo que pertenece a... explicar por qué.

Fines: Clasificar elementos de acuerdo con un criterio dado.

Actividades: Disponer

- Por color
- Por forma

Representar la situación

- Por un cuadro de doble entrada
- Por un diagrama

Fines: Colocar series en un orden enunciado

Actividades: Series ordenadas

- De mayor a menor
- Del más claro al más oscuro

Ritmos

- De dos en dos, de tres en tres...

Simetrías

- Descubrir las distintas series posibles a partir de una dada.

Fines: Iniciación a las nociones de tamaños relativos (más, menos, tanto)

Actividades: A través de las manipulaciones con la balanza, el agua...

- trasvases
- medidas
- pesadas

Reconocimiento global de cantidades semejantes por manipulación.

- objetos
- cartas
- material de cualquier otro juego

Comparación de cantidades por correspondencia término a término.

El niño de Educación Infantil debe de realizar seriaciones espaciales y temporales. Así por ejemplo: distinguir hechos; recordar una secuencia de tres o cuatro sucesos temporales, ordenar secuencias y experiencias con arreglo a una conexión lógica.

TEMA 4

GEOMETRIA EN LA EDUCACION INFANTIL

ESPACIO - TIEMPO

4.1 El Espacio

El término Espacio, en este documento, lo vamos a asociar a la idea de "recipiente en el cual están contenidos todos los objetos". La noción de espacio adquiere sentido en función de la existencia de los objetos.

El diccionario abreviado de Espasa Calpe lo define del siguiente modo "Continente de todos los objetos sensibles que coexisten".

Los objetos están en el espacio pero no se confunden con él, así, para un objeto concreto podemos pensar en el espacio que ocupa e imaginar tal objeto fuera de su espacio.

De esta manera, el Espacio está estrechamente unido a los objetos, lo que obligará a que el estudio del espacio pase por una consideración importante de la idea de objeto.

En sentido habitual, los objetos son entes observables, palpables o puras creaciones mentales, imaginaciones que a veces se toman como materia de reflexión.

Conocer un objeto requiere realizar bien una serie de tareas relacionadas con el mismo, como pueden ser, reconocerlo entre otros objetos, encontrar diferencias al compararlo con otros objetos, caracterizarlo por algunos rasgos propios, reconocer propiedades que posee, nombrarlo.

4.2 El Tiempo

Kant consideraba que tanto el espacio como el tiempo eran categorías o sustancias. Algunos autores anteriores a Kant, incluso, sostenían que las categorías de espacio, tiempo, sustancia y causalidad constituían un marco de referencia indispensable para la elaboración del conocimiento. Actualmente, tanto espacio como tiempo han pasado a ser entes de conocimiento y a su vez se han diversificado en objetos científicos distintos.

Para el niño pequeño, las nociones de espacio y tiempo son indivisibles pues sus acciones y su pensamiento se sitúan en el marco espacio-tiempo. Posteriormente, conforme avanza su desarrollo evolutivo, estas nociones se van distanciando al presentarse muy separadas en la vida diaria, no obstante la organización material va unida a una organización temporal. Los objetos están en un tiempo y las actuaciones sobre ellos interfieren con la percepción del espacio y del tiempo.

Este es el motivo por el que vamos a realizar simultáneamente, siempre que sea posible, el estudio de estos dos conceptos, si bien aparecerán algunas diferencias de tratamiento debido al distinto rango matemático de cada uno de ellos. Actualmente, se considera que el análisis la organización y sistematización de los conocimientos espaciales da lugar a la rama de la matemática que se conoce como Geometría; el tiempo, por su parte, es una magnitud o sea un

concepto matemático.

4.3 Coordenadas Espaciales

La solución de los problemas espaciales exige de parte del sujeto manipular las relaciones que se pueden establecer entre varios sistemas de coordenadas espaciales. Saegrin (1961) establece las siguientes categorías de coordenadas:

* Coordenadas corporales, o relativas al sujeto (S) que son: izquierda, derecha, cabeza, pies, (arriba, abajo) delante, detrás.

* Coordenadas relativas a los objetos (O) y son: parte superior, parte inferior o base, parte derecha, parte izquierda.

* Referentes al espacio local (EL). Relacionadas con los objetos y cuyos límites están determinados psicológicamente: cerca, lejos, arriba, abajo.

* Referentes al espacio geográfico: norte, sur, este y oeste.

* En cuanto al espacio cosmológico fallan las coordenadas convencionales y se describe el mismo bajo el punto de vista del observador o en términos de relaciones entre dos o más objetos contenidos en ese espacio. Así por ejemplo, la relación entre los planetas y sus soles.

Los sujetos ante un problema espacial, en el que se han de considerar las relaciones entre dos o más objetos, lo enjuiciarán bajo la óptica de uno de estos sistemas de coordenadas espaciales.

Cabe suponer, de manera razonable, que los sistemas de coordenadas en el orden anteriormente enunciado; respecto al sujeto, objeto, espacio local, espacio geográfico, espacio cosmológico; presenten este mismo orden de dificultad psicológica y se adquieran también en el mismo orden, presuponiendo además que el control de un sistema de referencia complejo está basado en el dominio de un sistema más simple. Esto lleva a pensar que el niño ha de adquirir la noción de espacio referido a las coordenadas relativas a su propio cuerpo antes que referidas a las coordenadas de los objetos y posteriormente el espacio local.

4.4 Espacio y Geometría

Se considera que **La Geometría** es la ciencia del **Espacio**, o sea, *la geometría es el cuerpo de conocimiento organizado referente al espacio*. Por esto consideramos que el inicio de la geometría está en el conocimiento de los objetos, fundamentalmente, como paso previo al conocimiento del espacio.

Las acciones geométricas se van a desarrollar en el espacio, pero el comportamiento de este será distinto según el tamaño de espacio que se considere. En cuanto al trabajo geométrico se refiere se pueden considerar cuatro "tamaños" para el espacio que proporcionarían nombres distintos al mismo.

Micro-Espacio. En el trabajo geométrico se utiliza el microscopio.

Meso-Espacio. Se trabaja con los objetos que se pueden disponer sobre una mesa.

Macro-Espacio. Los objetos tienen unas dimensiones entre 0,5 y 50 veces el tamaño del sujeto. Trabajo de campo, cortes topográficos etc.

Cosmo-Espacio. Se consideran aquí los fenómenos geográficos, topográficos, astronómicos. (Alsina y otros 1987).

4.5 Necesidad de conocimiento espacial

Toda la actividad de los seres vivos se desarrolla en el espacio y en el tiempo, el espacio se puede considerar como un marco de referencia donde se realizan los desplazamientos.

De aquí que el conocimiento de este "medio" sea de gran importancia para todas las personas.

Muntaner (1987) considera que la incapacidad de una persona para situarse en el espacio bloquea su desarrollo mental. Por el contrario todo aprendizaje en el campo espacial conlleva el aprendizaje espontáneo en otros campos, justifica esta afirmación señalando que es el propio funcionamiento de la inteligencia, el que explica la construcción del espacio.

Por su parte, Tavernier (1987) afirma que una administración correcta del tiempo es una de las condiciones necesarias para una actividad eficaz, relaciones armoniosas con las personas que nos rodean y un modo de vida más relajado.

El adolescente para llegar a tener un desarrollo normal en nuestra sociedad, habrá de adquirir como mínimo los siguientes conocimientos

- Con respecto al espacio. La posición de su cuerpo en el espacio. La posición relativa de distintos objetos que le servirán de referencia en sus desplazamientos. Saber orientarse. Apreciar distancias y dimensiones. Conocer la forma de los objetos familiares. Poder agrupar estos por familias.

- Con respecto al tiempo. Tener conciencia del carácter temporal de todas las cosas ya sean animales o plantas. Igualmente, que todas nuestras acciones tienen un comienzo y un final y que esto ocurre también con los fenómenos naturales. Que ciertos acontecimientos o transformaciones se repiten a intervalos regulares. Adquirir las referencias sociales del tiempo articuladas con las referencias naturales.

Todo esto constituye un bagaje de conocimientos, para cuya elaboración la humanidad ha necesitado miles de años.

Vamos a referirnos, en los apartados siguientes, al proceso de desarrollo de estos conocimientos en el niño.

4.6 Patrones Sensoriales

Según Mújina (1975) el ser humano desde muy temprana edad utiliza sus receptores sensoriales para captar información sobre el mundo que le rodea, mucha de esta información sensorial es de carácter espacio-temporal. Así, los cambios de postura de su cuerpo, el balanceo, los movimientos de la cabeza y los primeros intentos para ponerse en pie, le proporcionan sensaciones, que a su manera, le informarán sobre el espacio.

La infancia del niño es un período de gran desarrollo sensorial, en este período adquiere su capacidad para orientarse en relación con los objetos y para establecer relaciones espaciales de unos objetos con respecto a otros. Aprende a orientarse en el espacio y en el tiempo. Esto sucederá porque el niño percibe y manipula los objetos llegando a apreciar su color, forma, tamaño, peso, temperatura y cualquier otra cualidad de los mismos.

La manipulación de los objetos permitirá al niño descubrir, en los mismos, las características que estos posean.

Las impresiones que el niño recibe a través de los objetos que le rodean le servirán de marco de referencia con el que comparar las propiedades de los demás objetos que posteriormente vaya descubriendo.

El movimiento de la cabeza y de los ojos hacia una fuente de estímulos, constituye, una gran experiencia de relaciones espaciales. Cuando un niño pequeño balancea los pies y sigue su trayectoria con la mirada, vive doblemente esta acción ya que es emisor y receptor de la misma.

La actividad visual es una gran fuente de información espacial sobre la que los investigadores han experimentado con frecuencia. Aseguran que todos los puntos de una fuente de estímulo visual no retienen la atención del niño con la misma intensidad. Por ejemplo, ante la vista de un triángulo se fijarán mayoritariamente en los vértices. Los niños un poco mayores, van saltando la vista sobre los puntos más notables de la figura.

Todas estas experiencias espaciales se verán reforzadas desde que el niño empieza a andar, acción que supone coordinar la alternancia de sus pasos y aunar en uno solo los ritmos del espacio y del tiempo. Descubrirá que la perspectiva de los objetos cambia a medida que va cambiando su posición respecto a estos. Llegará a diferenciar la horizontalidad de la verticalidad a través de la posición de su propio cuerpo.

La estructura temporal de la conciencia, está en un principio estrechamente unida a las necesidades y satisfacciones (hambre, sueño...) poco a poco se enriquece y perfecciona con las relaciones sobre el medio ambiente, y sobre todo con el aprendizaje del lenguaje. El niño es capaz, entonces, de recuerdos más organizados y más extensos y de anticipaciones más precisas y más lejanas. El lenguaje y los conceptos a los que sirve de vehículo revelan y sin duda refuerzan las nuevas capacidades del niño de proyectarse en un porvenir más o menos lejano, de comparar su presente con lo que esperaba de él, de organizar su actuación no sólo en función de sus tensiones internas (en particular las fisiológicas) sino también en función de referencias sociales. En el plano del comportamiento, se convierte en un ser capaz de esperar, de tener paciencia, como asegura Tavernier

Durante el período infantil, el niño va a pasar de utilizar modelos especiales contruidos a partir de sus experiencias con los objetos a utilizar patrones sensoriales aceptados socialmente y de uso común. Son los patrones que la humanidad ha establecido y usa para comparar y apreciar las propiedades de los objetos: color, forma, tamaño. Para las formas se utilizan como patrones, las figuras geométricas. Para el color, los colores del arco iris. Toma conciencia del tiempo, cosa que ocurrirá muy poco a poco, con estancamientos aparentes y a veces bruscas

iluminaciones.

Estos patrones el niño los irá asimilando a medida que realiza sus actividades normales. Incluso en el caso de no tener intencionalidad de enseñar al niño estas propiedades, el propio material que maneja contiene los modelos necesarios que le permitirán asimilar patrones sensoriales y captar las distintas propiedades de los objetos.

Empezará asimilando los patrones mas frecuentes por lo que a las formas se refiere, el círculo y el cuadrado serán las formas que adquiera con más facilidad, posteriormente, la forma triangular también será asimilada.

Cuando domina algunos patrones, comprende con mayor facilidad las propiedades de los objetos que coinciden con dichos patrones y, por el contrario, "ve" de forma incompleta otras propiedades para las cuales aún no tiene patrones establecidos.

Aunque todos los individuos van a llegar al dominio de estos patrones, no obstante, existe una gran diferencia entre los niños según que hayan tenido, o no, una educación sensorial intencionada.

Alrededor de los 4-5 años un niño, con desarrollo sensorial normal, pose un repertorio de patrones sobre forma y color bastante completo si bien patrones como el tamaño todavía son incipientes. La percepción del tamaño la adquieren, los niños, por la comparación y relación de los objetos entre sí. En un principio solo será capaz de relacionar dos objetos (grande-pequeño). Posteriormente conocerá las relaciones dimensionales de tres (el grande, el mediano, el pequeño) y comenzará a designar como grandes o pequeños algunos objetos, aunque no aparezcan comparados con otros. Para llegar a determinar el tamaño de los objetos aislados tendrá que reconstruir en su memoria el lugar que ocupa entre otros objetos.

Por lo que al orden temporal se refiere, se ha puesto de manifiesto a partir de investigaciones realizadas sobre el tema que, los niños de 4 años tienen pocas dificultades para recordar historias sencillas que estén bien organizadas, realizando una ordenación lógica temporal adecuada.

Una de las tareas más importantes para la educación sensorial del niño es según Mújina la de ponerle en contacto con los distintos patrones sensoriales de manera gradual y sistemática ayudándole así a asimilar estas imágenes. Para esto recomienda tareas como dibujar, modelar y similares.

4.7 La Geometría en la enseñanza y en la Investigación

Durante mucho tiempo la Geometría ha estado muy alejada de la enseñanza oficial, no sólo en nuestro país sino también fuera de él. En un trabajo titulado "Espacio y Geometría". Alan Bishop denuncia como hecho grave la poca importancia que se da en la enseñanza y en la investigación educativa a las cuestiones espaciales y geométricas. Comparando con el tópico número las investigaciones realizadas en geometría han sido pocas, para hacer estas afirmaciones se basa en tres fuentes. Una es un volumen dedicado a la recopilación de

investigaciones matemáticas (Shunway 1980) en el que espacio y geometría reciben una atención mínima; otra, el catálogo anual de artículos de investigación del Journal for Research in Mathematics Education de Julio de 1980, en el que sólo 10 de los 161 artículos que aparecen son de geometría en cualquiera de sus variantes. En el año anterior solo 8 de los 215 artículos eran de geometría y la tercera, la Fourth Annual Conference on the Psychology of Mathematics Education at Berkeley en 1980, sólo dos o tres comunicaciones hacen referencia a temas de geometría.

No ha mejorado mucho esta situación desde entonces, la misma revista Journal for Research in Mathematics Education de julio de 1990 presenta una recopilación (llevada a cabo por Marilyn Suydan y Deborha Crocker) de artículos y tesis doctorales. Su recuento nos ha dado la información siguiente: Entre 23 artículos de investigación sólo uno es de geometría, de aritmética, por ejemplo, hay 6. En otros 167 artículos (no de investigación) 19 son de geometría, mientras que de aritmética hay 51. Sobre 255 tesis doctorales, 12 son de geometría y 38 de aritmética.

Para hacer este recuento hemos considerado como geometría los temas que hacen referencia a visualización, habilidad espacial, matemática con logo, problemas con cuerpos geométricos, niveles de Van-Hiele. Como aritméticos hemos considerado los temas referidos a números, resolución de problemas, estimación, calculadora.

Esta falta de investigaciones de problemas geométricos se refleja en la educación, pues los profesores no tienen un campo de investigaciones suficientemente amplio, que le permita tomar ideas y abordar de manera fructífera la enseñanza de la geometría, aunque muchos profesores estén preocupados por ayudar a sus alumnos a desarrollar destrezas y construir conocimiento que les permitan interpretar el espacio.

En este mismo sentido, Muntaner, asegura que Piaget estudió tanto la construcción de las operaciones lógicas como las operaciones espacio-temporales entre las que estableció un paralelismo y unas diferencias fundamentales, por centrarse estas operaciones sobre aspectos distintos de la realidad. Ahora bien su interés se decantó más por el estudio de las operaciones lógicas, existiendo una gran diferencia en estudios realizados sobre estos dos tópicos y por tanto en la bibliografía que es mucho más abundante en el apartado de operaciones lógicas que en el de espacio-tiempo.

Por su parte, Jean et Simonne Sauvy (1980) apuntan, que la educación tradicional se preocupa muy poco por ayudar al niño a construir el espacio y cuando lo hace a través de la geometría se circunscribe casi siempre al espacio euclideo, esto es el espacio de las distancias y de las medidas, siendo este uno de los tres componentes del espacio "total" los otros dos componentes son el topológico, y el proyectivo. De acuerdo con Piaget, consideran que las relaciones espaciales topológicas (nociones de continuo y discontinuo, vecindad, frontera, apertura y cierre, interior y exterior, agujereado y no agujereado) son construidas por los niños antes que las relaciones espaciales proyectivas (izquierda, derecha, delante, detrás etc.) y sobre

todo antes que las euclideanas. Su explicación de que la enseñanza no se preocupe por estas relaciones topológicas se basa en que existe mucha confianza en que los niños las adquieren solos, a través de sus juegos y vivencias espontáneas. Pero consideran que aunque en realidad sea así, estas adquisiciones en orden disperso, dependen mucho de las oportunidades que tenga cada niño y en la mayoría de los casos quedan lagunas en su educación.

Considerando que el dominio del espacio es esencial para el hombre, se aconseja que desde pequeños, los niños reciban una educación adecuada que les haga descubrir paso a paso sus propiedades y relaciones.

La adquisición de la idea de espacio como marco familiar, no se realiza de golpe según señalan los psicólogos, comienza con los primeros gestos coordinados del bebé y sigue en la adolescencia.

4.8 Nociones Geométricas

Siguimos a Dienes (1969) para hacer un breve repaso de algunas nociones geométricas.

Hemos señalado ya anteriormente que el mundo en el cual estamos inmersos está constituido por objetos. El estudio de la manera de incorporarse los objetos al espacio constituye una rama de la geometría. En un sólido, que ocupa una parte de espacio, se pueden distinguir su superficie que delimita el exterior y el interior del sólido, dicha superficie es la frontera del mismo. Así las superficies se consideran las fronteras de los sólidos. Por otra parte, se consideran las líneas como fronteras de las superficies y a los puntos como fronteras de las líneas. Algunas superficies no poseen frontera, por ejemplo la superficie de una pelota, ya que es posible moverse en ella sin encontrar nunca un punto a partir del cual ya no se pueda continuar. También hay líneas que no tienen frontera como la circunferencia.

Se puede considerar la geometría como el estudio de las propiedades de los sólidos, de las superficies, de las líneas y de los puntos así como las relaciones entre estas propiedades, según Dienes.

Otra manera de abordar el estudio de la geometría es a través de las propiedades de los objetos que permanecen invariantes en las distintas transformaciones a que pueden ser sometidos. Siguiendo al mismo autor, citado anteriormente, tomamos sus palabras relativas a esta idea, dice. El estudio de las propiedades de las transformaciones de los objetos constituye una rama de la geometría.

Los objetos que están en el espacio pueden sufrir distintas transformaciones, por ejemplo, desplazar un objeto es una transformación del mismo que modifica su posición, es lo que se conoce con el nombre de traslación. Otra transformación es el giro alrededor de un punto cualquiera fijo o alrededor de un eje fijo (estas transformaciones se llaman rotaciones). Estirar un objeto o doblarlo constituye una transformación del mismo. La sombra también es una transformación del objeto que la produce.

No todas las transformaciones son iguales, en cuanto a los cambios que producen en el objeto. Algunas transformaciones conservan las distancias y la medida de los ángulos. Así, si un segmento mide 5 centímetros y un ángulo 45 grados, en su figura transformada también seguirán midiendo 5 centímetros y 45 grados, a tal transformación se le llama isometría. Los desplazamientos son isometrías, pero no lo es la sombra.

Algunas transformaciones se pueden "deshacer", en el sentido de volver el objeto a su estado inicial a través de una transformación inversa de la primera, se dice que son reversibles. Doblar un objeto (sin romperlo) es una transformación reversible.

Una transformación se llama continua si puntos que están próximos en un principio siguen manteniéndose próximos después de la transformación. Si la transformación anterior tiene una inversa que también es continua, se llama bicontinua. Ejemplo, doblar una cuerda sin romperla.

Ramas de la Geometría

Se llama **topología** la rama de la geometría que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes cuando se le aplican transformaciones bicontinuas.

Las propiedades que se conservan invariantes en las transformaciones topológicas son el interior, el exterior. Por ejemplo, si a un globo (lleno de aire) le hacemos un hueco (empujando sin romperlo) habremos hecho una transformación topológica del mismo. Se conserva el interior y el exterior del mismo, en el sentido de no poder pasar del interior al exterior sin abrir el globo.

Se conoce como **geometría proyectiva** a la rama de la geometría que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras que, representadas en un plano y proyectadas a través de un foco luminoso, permanecen invariantes. La sombra de dos tiras de papel, rectilíneas, unidas de manera que se cortan, nos dará dos segmentos que también aparecerán cortados. Así, en geometría proyectiva las rectas y las intersecciones de rectas son invariantes. Los conceptos de línea recta, dirección (orden), convexidad, interior y exterior son conceptos proyectivos.

La transformación afín es un caso particular de transformación proyectiva. Si un foco luminoso se aleja suficientemente del objeto se obtiene un efecto similar al que produce el sol tomado como foco. Al estar tan lejos, el sol, sus rayos nos llegan casi paralelos y la proyección de rectas paralelas son a su vez, rectas paralelas. Consideremos que este hecho no sucede cuando el foco luminoso está muy cerca de la figura en donde las paralelas se deforman considerablemente. Ocurre con los raíles del ferrocarril que parecen juntarse a lo lejos, aunque siguen siendo paralelos. El paralelismo es un concepto afín.

La **geometría euclídea** estudia las propiedades de las figuras que permanecen invariantes en las transformaciones que conserven las distancias y los ángulos. Todas las propiedades relativas a distancias y ángulos son propiedades euclídeas.

La geometría euclídea se basa en relaciones establecidas entre rectas paralelas o ángulos y se cumplen cuando las distancias que se consideran son medibles con instrumentos

que están al alcance de los hombres, sin embargo cuando aparecen distancias astronómicas, los teoremas euclidianos sobre rectas paralelas, dejan de ser ciertos.

Cuanto más restricciones se impongan en la transformación de una figura más propiedades se conservarán en la misma. Así, en las transformaciones topológicas en las cuales se pueden torcer, doblar, estirar las figuras, se conservan pocas propiedades. En las transformaciones proyectivas se permiten menos cosas por lo que se conservan más propiedades. Las transformaciones euclidianas son las que más propiedades conservan por lo que la geometría euclidea es la más rica de entre las tres anteriormente citadas. Todo lo que es cierto en topología lo es en geometría proyectiva afin y euclidea, y todo lo que es cierto en geometría afin lo es en euclidea, pero no ocurre lo contrario.

4.9 Desarrollo de las nociones espacio-temporales.

El espacio, según Muntaner, necesita ser construido por el niño desde una perspectiva intelectual para lo cual ha de descubrir las propiedades y relaciones que lo conforman y organizan. Se ha constatado que la construcción del espacio, por el niño, es paralela a la del número en los diferentes planos evolutivos, con la diferencia siguiente: el esquema lógico-aritmético procede de la acción de los sujetos sobre objetos discontinuos y el esquema espacial de la acción sobre los objetos continuos del mundo real.

Piaget e Inhelder estudiaron la génesis de los conceptos espaciales en función de su teoría del desarrollo intelectual. Establecen una diferencia entre espacio cognitivo representacional y espacio perceptual. Consideran que la interacción entre el sujeto y el objeto le llevará a las nociones espaciales y geométricas. Las acciones de los niños se organizarán y estructurarán en distintos planos según su momento evolutivo. En un principio, las acciones motoras se organizarán en el plano sensoriomotor. Más tarde se volverán intuitivas al interiorizarse dichas acciones, por el sujeto, en el plano preoperacional. Pasando posteriormente a convertirse en sistemas operacionales en el plano operativo.

Para Piaget la construcción de las representaciones espaciales por el niño tiene en sus orígenes las relaciones topológicas debido a su carácter no métrico y su limitación a las propiedades inherentes de un objeto particular, sin necesidad de situar este objeto en relación con otro. Las estructuras topológicas provocan la construcción de las relaciones proyectivas y euclidianas que se desarrollarán independientemente unas de las otras, pero de forma paralela. Dowell (1963) señala las dificultades para comprender la evolución de los conceptos espaciales en los niños, ya que parecen contradecir la situación natural y lógica "Uno tiende a pensar en la geometría euclidea como la natural de aquí que al niño rápidamente se le quiera hacer comprender el espacio en términos euclidianos"

Según Sauvy, los niños pequeños viven el espacio, lo exploran con los ojos y con las manos. Lo descubren a través de sus gestos, sus movimientos y sus marchas.

A lo largo del segundo año de su vida el diálogo del niño con el espacio se enriquece en una nueva dimensión ya que el niño comienza a representarse las cosas, es decir es capaz de sustituir acciones sobre objetos por imágenes, las cuales pueden ser evocadas independientemente de la acción misma.

Hacia los tres años es capaz de representar, con trazos, sus imágenes, "se le abre desde ese momento la vía hacia la geometría". En esta etapa su cuerpo es el centro, el punto de partida sobre el que determinará todas las direcciones como delante, detrás; derecha e izquierda. Su mano derecha (con la que la mayoría realizan sus acciones cotidianas) la distingue pronto de la izquierda y por referencias a ellas otras partes de su cuerpo consideradas a la derecha o a la izquierda del mismo. No comprenderá sin embargo el aspecto relativo de estos conceptos, como que un objeto que para él está a su derecha, para otras personas puede estarlo a su izquierda.

Más tarde, una vez que consiga orientarse en el espacio, descubrirá las relaciones entre los objetos. Detrás de..., delante de..., a la derecha de..., a la izquierda de... Durante la época denominada "egocentrismo" el niño verá el espacio como un mosaico, o sea construido a partir de trozos yuxtapuestos.

La madurez que el niño alcanza alrededor de los siete años hace que su concepción del espacio evolucione hacia una situación más objetiva global y homogénea. Esto sucederá de manera progresiva. Será entonces capaz de considerar su posición como una más entre los distintos objetos del espacio. Será capaz de apreciar distancias y longitudes tanto cuantitativamente como cualitativamente. La geometría métrica le será entonces accesible.

La condición para que haya coordinación espacial estriba en la capacidad de tomar conciencia de los demás en tanto que sujetos situados a la vez que tomar conciencia de uno mismo en tanto que objeto situado. Esto permite situarse mentalmente en cualquier lugar y percibir el espacio desde todos los puntos de vista a la vez, y llegar a considerarse observador no situado.

También Piaget abordó el estudio de la recuperación del orden temporal, llegó a la conclusión de que las narraciones de los niños no están ordenadas desde un punto de vista causal o cronológico antes de los 7-8 años. Algunos investigadores tachan a Piaget de que siempre creyó que los niños eran capaces de comprender menos cosas de lo que en realidad comprenden, en esta línea y en estudios realizados sobre el mismo concepto de recuperación del orden temporal Brown pone de manifiesto que el fracaso de los niños pequeños no se debe a una incapacidad para reconstruir el pasado sino a una dificultad en la comunicación oral.

4.10 Etapas en el desarrollo espacial

Sostienen Bertolini y Frabboni que es muy importante respetar las etapas de desarrollo de los niños, pues no son los niños los que han de adaptarse al aprendizaje sino que por el contrario son los aprendizajes los que han de adaptarse a la edad mental del niño.

Los tres grandes períodos de desarrollo espacial que Piaget describió después de sus

trabajos de investigación fueron los mismos que utilizó para explicar el desarrollo de la inteligencia.

- Período sensomotor
- Período preoperacional
- Período de las operaciones concretas
- Período de las operaciones formales.

En cada uno de estos períodos se desarrolla un aspecto de la escala jerárquica de los conceptos espaciales y en cada uno de ellos el niño habrá de superar las mismas dificultades referidas, en cada caso, a su contexto.

En el período sensomotor las relaciones espaciales se inician con las acciones del niño sobre los objetos por lo que la noción de dichos objetos es necesaria para que estas relaciones se organicen. Se llega de esta forma a un espacio práctico e inmediato que se construye por cada uno de los sentidos sobre la base de las diferentes actividades motrices. El niño vivirá tantos espacios como campos sensoriales tiene, esto le proporcionará una representación heterogénea del mismo. Posteriormente, todas estas percepciones se irán uniendo formando una idea de espacio propia y centrada en el sujeto. En este período se pueden distinguir tres ideas fundamentales en cuanto a la formación de relaciones espaciales se refiere:

- Construcción de la noción de objeto
- Vivencias de los distintos campos sensoriales
- Descubrimiento del espacio cercano.

El período preoperacional comprende, aproximadamente, la edad de 2 a 7 años, durante este tiempo se desarrolla en el niño una idea intuitiva de espacio y una imagen mental estática. Las imágenes están ligadas a acciones materiales vividas por el niño. Estas imágenes se coordinan entre sí dando lugar a ciertas transformaciones simples, pero no llegan a alcanzar una estructura de conjunto, ni la reversibilidad propia del nivel operatorio.

En este período Piaget distingue cinco aspectos referentes a la representación espacial.

- El niño adquiere una forma de representación espacial que no es ni proyectiva ni euclídeana, sino topológica. Se interesa por figuras abiertas o cerradas y situaciones de dentro y fuera.
- La representación proyectiva está ausente y la perspectiva no se comprende.
- Alrededor de los 4-5 años captan las formas euclídeas pero no conservan la longitud, distancia ni superficie.
- No hay conservación porque la representación del mundo físico depende estrechamente de sus percepciones.
- El razonamiento del niño no se ejerce sobre un sistema de transformaciones sino sobre situaciones actuales.

En el período de las operaciones concretas el pensamiento del niño se hace reversible y se va desligando del dominio de la percepción aunque todavía depende mucho de actos motores,

reales o representados. Este período se desarrolla entre los 7-8 años y los 11-12. Entre los 7-8 años, se inicia la reversibilidad en las relaciones topológicas, más tarde (9-10) años hay una consideración de las propiedades proyectivas y euclidianas en cuanto a la aparición de relaciones y posteriormente se comprenderá la medida.

En el período de las operaciones formales, el sujeto alcanza un dominio tanto de las relaciones proyectivas como de las euclidianas, en el ámbito operatorio que les permitirán disponer de un nivel de referencia capaz de coordinar varias perspectivas métricas de longitud, área, volumen. Las operaciones espaciales concretas dan lugar a unas estructuras que hacen posible la comprensión de un espacio único y general lo cual permitirá un mejor desarrollo operatorio y una visión estructurada del espacio.

4.11 Etapas en el desarrollo de la noción de tiempo

La tabla siguiente proporciona un resumen de las etapas por las que el niño pasa en la construcción del tiempo según señala Tavernier.

BEBE	Tiempo vivido de manera afectiva
EDAD DE LA ESCUELA INFANTIL 2-6 Años	Paso a la representación mental. Descubrimiento y organización de referencias.
EDAD DE LA ENSEÑANZA PRIMARIA	Construcción del concepto abstracto de tiempo mensurable.

4.12 Diagnóstico

Todo proceso educativo parte del conocimiento de la situación del sujeto en lo que se refiere al programa de actuación previsto. Este conocimiento permite al profesor acomodarse a las posibilidades reales de cada niño.

El objetivo del diagnóstico es conocer la etapa evolutiva en la que el niño se encuentra, para acomodar los programas de intervención educativa a las posibilidades reales de cada niño.

El diagnóstico no ha de presentarse con un enfoque negativo del pronóstico del desarrollo del niño, sino, que servirá de orientación para preparar la programación que ayude a alcanzar los niveles de desarrollo a los que el niño debe de acceder.

La teoría de Piaget proporciona una herramienta eficaz para realizar un diagnóstico. El Informe Piagetiano basado en dicha teoría, presenta distintas competencias esperadas en los niños para cada una de las capacidades espaciales.

a) Recinto

- Distinguir espacios completamente cerrados de espacios parcialmente cerrados en dos o tres dimensiones. Esto incluye una comprensión de relaciones generalmente expresadas.

b) Separación

- Capacidad de tratar relaciones parte-todo, incluyendo diferenciaciones ilustración-entorno.
- Capacidad para dividir y reconstruir un todo en su disposición original (puzzles).
- Capacidad de utilizar diferentes partes para hacer "todos" comparables (utilizar tacos grandes para hacer una valla igual que la que se ha hecho con tacos pequeños).
- Reconocer que la elección de lo que se considera el "todo" es arbitraria y depende de las demandas inmediatas. Por ejemplo, se puede considerar la clase como el todo y la mesa como una parte, o también se puede considerar la mesa como un todo y una pata de la misma, como parte.

c) Proximidad

- Capacidad para hacer juicios de distancia (incluye, comprensión de relaciones que se expresan verbalmente como: cerca, lejos, junto a, al lado de, sobre...
- Destreza para mover el propio cuerpo en el espacio.
- Buen juicio para mover objetos relacionados entre sí.

d) Orden (sucesión espacial):

- Capacidad para mantener la dirección y la secuenciación coherente al reproducir una disposición lineal de cinco objetos, o más, (relaciones expresadas verbalmente como al lado de, entre).
- Capacidades para disponer objetos de las siguientes maneras: en disposición lineal exacta, extendidos o apretados, en orden inverso del original, desde una orientación distinta.

e) Continuidad

- Capacidad para ver el espacio como algo continuo, de forma que varios caminos puedan llevar al mismo punto.
- Reconocer que una ruta indirecta puede llevar al mismo punto que una línea recta. Tomar desvíos alrededor de un obstáculo al alcanzar una meta; la solución a los laberintos requiere este tipo de comprensión.
- Desarrollar rutas alternativas para llegar a una meta, para uno mismo o para otro.

Capacidades euclidianas y proyectivas

a) Cuantificar la distancia

- Capacidad para medir a través del uso repetido de una unidad de medida.

b) Cuantificar la dirección

- Capacidad para concentrarse en grados de cambio en la dirección y grados de similitud en la dirección.

c) Reconocer diferencias en puntos de vista desde diferentes posiciones en el espacio

- Coordinación de capacidades para cuantificar distancia y dirección.

Para realizar un diagnóstico sobre el desarrollo de los conceptos espacio y tiempo, por edades, podemos tomar como referencia el cuadro que presentamos en la página siguiente. Es una adaptación de una tabla de Gessel (tomado de Vayer) en el que parecen las capacidades referidas a espacio y al tiempo que los niños desarrollan durante sus primeros cinco años de vida.

4.13 Tareas, juegos, actividades

Las tareas y actividades propuestas a los niños, para que sean efectivas, han de tener sentido para ellos, por lo que es recomendable que a ser posible participen tanto en la ejecución de las mismas como en su elección y puesta en práctica.

Consideramos de gran utilidad las sugerencias sobre actividades y cómo llevarlas a cabo recogidas de varios autores.

	LOS OBJETOS	EL ESPACIO	EL TIEMPO
1 año	- primeras experiencias, al principio visuales y auditivas, luego oculo-manuales.	- discriminación levantado-echado	- instantaneidad

2 años	<ul style="list-style-type: none"> - transporte de objetos, - construcciones simples, - preferencia por un juguete determinado, - relación objeto propietario - construcciones y alineaciones, - preferencia por el color, - vivo sentido de la posesión. 	<ul style="list-style-type: none"> - exploración - nociones de dirección y localización de objetos y personas - nociones de: <ul style="list-style-type: none"> *arriba y abajo * dentro y fuera. 	<ul style="list-style-type: none"> - noción de ahora, - comprensión de una sucesión simple sin referencia al pasado.
3 años	<ul style="list-style-type: none"> - construcciones ordenadas y equilibradas, - da nombre a su obra, - prefiere la construcción al resultado, - empieza a colocar. 	<ul style="list-style-type: none"> - orden de los objetos familiares, - representación del espacio al que se dirige la acción. - noción de morada - orientación en itinerarios simples 	<ul style="list-style-type: none"> - vocabulario con una docena de palabras designando el tiempo
4 años	<ul style="list-style-type: none"> - construcciones en común, - complicaciones en las combinaciones de construcciones, - empieza a representar determinados objetos. 	<ul style="list-style-type: none"> - nociones de ciudad y de calle, - representación mental de itinerarios, - empleo de vocabulario espacial. 	<ul style="list-style-type: none"> - noción de duración de las situaciones, - concepto de ahora, - complicación del vocabulario.
5 años	<ul style="list-style-type: none"> - precisión y destreza en las actividades motrices simples, - se interesa tanto por el material pequeño como por el grande, - le gustan los colorines. 	<ul style="list-style-type: none"> - comienzo de distinción entre derecha e izquierda, - alguna noción de relación geográfica y límites específicos, - sabe dirigirse por la calle. 	<ul style="list-style-type: none"> - se interesa especialmente por el presente, - comprende el ayer y el mañana, - maneja bien las palabras usuales del léxico temporal.

Tavernier recomienda el uso de una serie de verbos de acción relacionados con situaciones en el espacio, estos son: entrar, salir, colocar, colocarse, caminar, desplazarse, subir, bajar, situarse en un espacio dado.

Cada uno de estos verbos está relacionado con una noción espacial concreta y su

utilización puede dar lugar a tareas relacionadas con dichas nociones. El autor anteriormente citado indica además lugares y situaciones en donde se pueden trabajar estos conceptos con los materiales que normalmente existe en ellos.

- En la clase.

- Con las cajas para guardar los objetos.
- Con el material educativo.
- Con los propios niños; llegadas entradas y salidas.
- Con los juegos de construcción.

- En la sala de juegos.

- Con los accesorios de educación física.
- Itinerarios de obstáculos y su representación gráfica.
- Juegos cantados y bailados.
- Danzas.
- Juegos de persecución.

- En la escuela.

- Ir de una sala a otra y representar gráficamente el trayecto.
- Realizar un trayecto trazado sobre el plano de la escuela.
- Situar una posición respecto a diferentes puntos de la escuela (aseo, portería...).

- En el barrio.

- Ir de compras. Representar gráficamente el trayecto.
- Hacer una maqueta o plano del barrio.
- Hacer vivir a otro un trayecto con la ayuda de un plano.
- Situar la escuela en relación con un edificio popular y conocido.
- Hacer diferentes trayectos para ir de la escuela a un sitio concreto, comparar los trayectos (noción de longitud asociada a la de tiempo).

Como ejemplo de trabajo geométrico propone realizar tareas sobre un laberinto y con las sombras de los propios niños.

Se pueden realizar un estudio de las posibilidades del juego y su influencia en la construcción del espacio por el niño siguiendo el ejemplo del análisis que Pérez Negro hace de las capacidades espaciales de dos juegos populares:

El **pilla-pilla**, permite explorar el espacio en toda direcciones. Ocurre también con otros juegos similares como son: La gallinica ciega. Ratón que te pilla el gato. La prenda escondida...

Moros y cristianos, en este juego se divide el espacio en regiones con fronteras

definidas. Interviene la orientación al haber sentidos contrarios. Aparecen las nociones de dentro-fuera, las ideas de pertenencia y no pertenencia. Juegos de las mismas características son: el pañuelo, el juego de las estatuas, la sartén, la rayuela...

Puesto que el niño llegará a estructurar el espacio a través del movimiento de su cuerpo, todos los ejercicios de psicomotricidad serán apropiados para este fin, hemos de tener en cuenta la observación que hace Jaulin-Mannoni en el sentido de que no se puede confundir psicomotricidad y estructuración espacial. Si bien esta última la elabora el sujeto no podemos perder de vista que el objetivo principal de disociar la toma de conciencia del movimiento respecto de sí (adelanto o retardo mi pie) de la toma de conciencia del movimiento respecto del espacio (desplazo mi pie en tal o cual dirección).

La simple psicomotricidad no tiene el poder elemental de engendrar todas las significaciones que configuran el espacio representado. Sin embargo, nos parece muy interesante la clasificación que de la organización espacial y temporal hace Vayer para diseñar toda una gama de actividades motrices.

I.- El niño frente al espacio

A) Orientación en el espacio.

- Nociones de derecha-izquierda. Ejemplos: Sobre un bloque o taco, saltar a la derecha y a la izquierda.

- Organización de los objetos con relación a sí mismo. Colocar objetos delante, detrás, a la derecha, a la izquierda. El niño puede adoptar distintas posiciones: de pie, sentado, echado sobre la espalda o sobre el vientre.

- Organización del niño respecto a los objetos. Situarse a la derecha, izquierda etc. de un objeto.

B) Relaciones en el espacio.

- Noción de superficie. Cubrir una superficie con bloques, balones...

- Noción de situación. Dispersión por la sala y detenerse a una señal.

- Noción de distancia. Todos los tipos de lanzamiento contra la pared; de cerca, de lejos.

- Noción de intervalo. Efectuar desplazamientos sobre tacos colocados a intervalos.

C) Representación

- Transcripción gráfica de las nociones precedentes.

- Recorridos realizados por el niño. Tacos dispuestos regularmente, desplazamientos sobre ellos siguiendo consignas: adelante, a la derecha...

II.- El niño en el espacio.

A) Orientación en el espacio.

- Automatización de las nociones de derecha e izquierda. Salto a la derecha y a la izquierda, el educador tratará de que el niño no lo haga mecánicamente e intentará despistarlo.
- Cambio de orientación. Salto adelante con media vuelta.
- Orientación con relación a los demás. Niños frente a frente colocarse a la derecha, a la izquierda... del otro.

B) Relaciones en el espacio.

- Noción de situación. Evoluciones colectivas modificando el lugar o situación de cada componente del grupo.
- Asociación espacio-tiempo. Realización de sucesiones y estructuras temporales.

C) Representación.

- Todos los tipos de transcripciones gráficas. Simbolización de los desplazamientos del balón en el espacio vertical.
- Recorridos. Realizar recorridos dibujados en el papel o la pizarra.
- Interiorización de los recorridos. Aprender un recorrido realizado utilizando tacos de madera, después realizarlo con los ojos cerrados.
- Organización del espacio gráfico. Llevar sobre el papel todos los ejercicios de organización perceptiva y de estructuración espacial.

III.- *El niño y los demás en el espacio*

A) Relaciones en el espacio.

- Orientación con respecto a otro que está en movimiento. Los niños en grupos de dos, uno de ellos se mueve el otro ha de situarse a su derecha...
- Organización del grupo en el espacio horizontal y vertical. Todas las variantes de lanzamiento-recepción.
- Ocupar y conservar el espacio. Situaciones de lanzar-recibir con un sujeto que trata de entorpecer el resultado.
- Coordinaciones de acciones diferentes. Lanzamiento de precisión andando.
- Asociación espacio-tiempo. Adaptación de los desplazamientos a la velocidad, a la cadencia... en relación con las referencias espaciales.

B) Representaciones.

- Realización de recorridos. Organización de un recorrido y simbolización en el papel.
- Interiorización de recorridos. Ir a un punto indicado con los ojos cerrados evitando los obstáculos.
- Memorización de los recorridos. Realización de desplazamientos con los ojos cerrados

(previamente habrán sido recorridos por los niños.

Mirarse en un espejo es quizá la situación espacial que suscite mayores conflictos en los niños. El sujeto no sólo debe construir una perspectiva con respecto a su propia persona, sino que incluso esa perspectiva es diferente de la que encuentra cuando otra persona se le enfrenta, en cuanto a las nociones de derecha e izquierda se refieren. Lo que hace aconsejable el trabajo con el espejo.

La mano del sujeto es un objeto interesante sobre la que se pueden construir problemas espaciales. Su importancia reside en que se puede considerar como un objeto casi independiente, y a su vez se puede mover a voluntad.

4.14 Exploración del tiempo

Las siguientes sugerencias en cuanto a la exploración del tiempo, las encontramos en Tavernier:

- Tener en cuenta el ritmo de las actividades vitales. Esto dará lugar a que el niño construya referencias temporales estables.
- Utilizar el lenguaje para reflexionar sobre esos ritmos, ya que la verbalización favorece la toma de conciencia.
- Los niños se harán cargo progresivamente de la organización de su trabajo, mediante la realización de una actividad dada o el desarrollo de una jornada.
- Realizarán juegos y tareas específicas preparadas por el profesor destinadas a perfeccionar la conciencia del tiempo.
- Posteriormente, se llevará a cabo un aprendizaje de los sistemas sociales relativos al tiempo.

Este autor propone ejemplos de actividades agrupadas en torno a lo que llama ejes de la noción de tiempo.

Simultaneidad. Sucesión. Reconstruir la "película" de una jornada desde que se levanta hasta el momento de acostarse. Puede ser un trabajo oral o apoyarse en la expresión gráfica. Se invita a los niños a dibujar los diferentes momentos del día. Después de comentarlos una crítica colectiva establecerá si se han olvidado etapas importantes.

Ritmo. Periodicidad. Actividades musicales, rítmicas, de baile. Cultivo de plantas y cría de animales de crecimiento rápido para descubrir el ciclo en las plantas y la transformación de los animales.

Proceso. Transformación continua. Evolución. Observación de los cambios que se producen en la naturaleza. Enfoque de la noción de edad, ayudar a los niños a no confundir "bajo" con "joven" y "alto" con "mayor".

Transformación reversible. Transformación irreversible. Esta noción es difícil y supone haber adquirido el concepto de siempre-nunca que normalmente no se adquiere hasta los

siete u ocho años de edad.

Duración. Medir el tiempo.

El reloj. Actualmente la existencia de tipos distintos de relojes de esferas numéricas y digitales exige de la comprensión y estudio comparado de cada uno de estos utensilios que miden el paso del tiempo. Los relojes de agujas son los más sencillos de entender por lo que se recomiendan para el trabajo inicial.

El calendario. La comprensión de cómo funciona un calendario es un proceso muy complejo. Habrá que ir graduando las dificultades, se aconseja para los pequeños comenzar con un tipo de calendario de los que se les va quitando cada día una hoja.

Vayer propone una serie de actividades dentro de su clasificación en la organización del tiempo, de la que recogemos un resumen.

I.- Nociones elementales: Asociación espacio-tiempo.

A) Noción de velocidad. Deslizamiento hacia adelante, hacia atrás (andando, corriendo).

B) Noción de duración. Conducta respiratoria asociada a un sonido continuo.

C) Noción de cadencia regular. Utilizando tacos de madera dispuestos regularmente, realizar marchas (viva, lenta).

D) Noción de sucesión. Hay que tener en cuenta aquí las siguientes situaciones. El instante, salidas y llegadas, antes y después, simultaneidad y sucesión. Ejemplos: Niños en línea resbalando por el suelo, detenerse en el momento indicado.

II.- Relaciones en el tiempo.

A) Asociación espacio-tiempo

- Adaptación a velocidad exterior. Desplazamiento simultaneo de dos niños con velocidades prefijadas.

- Asociación, duración y velocidad. Ir de un lugar a otro con una duración de desplazamiento determinada.

- Adaptación a cadencia exterior. Con bloques, con tacos de madera. Marcha viva, marcha lenta.

B) Sucesión temporal

- Organización de relaciones en el tiempo.

- Sucesión de tiempos fuertes y débiles. Realizar sucesiones propuestas.

- Realización de estructuras temporales. Pasar de la acción al símbolo, del símbolo a la acción. Estructuras dibujadas en la pizarra, dar palmadas.

- Noción de intervalo. Bloques dispuestos en intervalos cortos o largos, marcha saltando los bloques.

C) Representación

- Interiorización de cadencias uniformes. Escuchar un pandero y seguirlo dando ligeras palmadas.

- Cadencia con acentuación. Niño sentado, las manos caídas sobre el banco, tiempos débiles. Lanzar a la vertical, tiempos fuertes.

- Cadencias entrecortadas. Lanzamiento de los brazos y palmada en la vertical. Realización de cadencias diversas.

III.- *Adaptación a las referencias temporales*

A) Asociación espacio-temporal

- Adaptación a la cadencia y a la velocidad. Marchando, adaptación a cadencias uniformes y diferentes.

- Adaptación del grupo a cadencias y velocidades diferentes. Dos grupos ocupando todo el espacio en la sala, uno marchando a cadencia viva y el otro a cadencia lenta.

B) Sucesión temporal: adaptación y representación.

- Adaptación de los desplazamientos y del material para realizarlos. Cadencias con acentuación regular.

- Realización de sucesiones temporales con fines fuertes y débiles. Marcha, carrera, saltos.

C) Representación.

- Noción duración vacía. Ejercicios de retención de la respiración asociados a la duración contada.

- Apreciación de los intervalos. Transcripción gráfica de cadencias regulares sucesivas: escuchar, repetir.

4.15 Figuras Geométricas

Como se pone de manifiesto en este tema, el trabajo que los alumnos de edad infantil pueden realizar para interiorizar el espacio, que se corresponde con un trabajo en geometría, no consiste únicamente en trabajar las figuras geométricas.

Una figura geométrica (dibujo no representativo cuyos elementos son esencialmente figuras y distancias) constituye un islote espacial estructurado dentro del espacio total.

La organización progresiva del espacio "personal" hace posible la percepción y reproducción de figuras geométricas simples. Poco a poco se van desligando de lo que les rodea y se configuran en un "todo" aislado, móvil que conservan sus características propias ante desplazamientos y modificaciones dimensionales. Para esto es necesario que se cumplan una serie de condiciones respecto a la figura:

- Que continúe existiendo más allá de la percepción inmediata.

- Que pueda ser percibida, identificada, imaginada o construida a través de cualquier desplazamiento, desde cualquier perspectiva y en cualquier posición.

- Que sea reconocida después de algunas modificaciones dimensionales.

TEMA 5

EL NÚMERO EN LA EDUCACION INFANTIL

5.1 Introducción

Cuando al hablar se dice la palabra "tres", parece que nos estamos refiriendo a una cuestión muy sencilla (quizá sea por la costumbre que tenemos de utilizarla). Sin embargo un análisis cuidadoso de la cuestión nos hace ver que, la expresión "tres" o cualquiera otra elegida de entre los términos numéricos, encierran múltiples conceptos algunos de ellos complejos.

La razón fundamental para abordar este tema es que consideramos que el aprendizaje del número por los niños, constituye una base de aprendizaje informal, sobre el que se van a apoyar los conceptos de aritmética formal que posteriormente va a necesitar desarrollar.

Estamos de acuerdo con Baroody cuando asegura que el aprendizaje informal es la base fundamental para comprender y aprender las matemáticas que se estudian en la escuela, ya que los niños tienden a abordar la matemática formal en función de la matemática informal que conocen.

Creemos que la etapa infantil es de una importancia fundamental para la educación matemática del niño. En ella se van a formar los conceptos básicos o primarios y los primeros esquemas sobre los que, posteriormente, se construirá todo el aprendizaje.

Si estos esquemas básicos están mal formados o son frágiles, pueden llegar a impedir o a dificultar, en el mejor de los casos, el aprendizaje posterior.

En la escuela infantil, el niño ha de ser encauzado para que evolucione hacia procesos más abstractos de pensamiento. Está demostrado que, desde pequeños, los niños son capaces de desarrollar métodos, a veces sofisticados, de contar y de resolver problemas sencillos.

La cita siguiente de Montessori (1934) refuerza las ideas que tratamos de explicitar en todo este apartado. "Se ha repetido siempre que la Aritmética y en general la ciencia matemática, tiene en la educación el oficio importante de ordenar la mente juvenil, preparándola, con rigurosa disciplina, para ascender a las alturas de la abstracción". Mas adelante añade: "El cálculo, después, no es sino una ulterior abreviación de la operación de contar."

5.2 Contextos numéricos

Las palabras numéricas se utilizan en distintos usos y contextos así:

- Uso en la secuencia convencional numérica.
- Empleo de dicha secuencia para contar.
- Asociación de cada palabra con un símbolo.
- Utilización para indicar la numerosidad de un conjunto.
- Utilidad para indicar la posición relativa de los objetos.

- Función de código.

Según el uso, o el contexto, en el que se utilicen las palabras numéricas, tendrán un significado distinto. Se supone que, en un principio, el niño va aprendiendo los términos numéricos como palabras que están asociadas a varios contextos distintos. Poco a poco, estos significados diferentes del término se van fusionando y darán lugar a un bloque, conformado por los distintos significados de la palabra. Este proceso le llevará a un niño, medio, cinco o seis años de su vida.

Parece que no hay duda de que es durante el período de la **educación infantil** cuando se va desarrollando lentamente la noción de número y la escuela tiene influencia sobre los niños durante este período.

Muchas investigaciones se han realizado sobre la noción de número y la forma en que los niños llegan a adquirir dicha noción. Los resultados de las mismas constituyen una valiosa aportación para la formación de los profesores, que las pueden tomar de guía y conseguir así un mejor desarrollo en el aprendizaje de sus alumnos.

5.3 Secuencia numérica

Fuson y Hall (1980) establecen que entre las primeras experiencias que los niños tienen con los números está la que surge del contacto con los términos o palabras numéricas. Se trata de la sucesión convencional: uno, dos, tres... como palabras que en un primer momento no tiene por qué ser utilizadas para contar.

La secuencia verbal de los números naturales, en nuestro idioma, se forma a partir de unos vocablos "simples" que ocupan, por lo general, los primeros puestos en dicha secuencia y otros vocablos "compuestos" que se forman a partir de los anteriores mediante unas reglas lógicas. Vocablos simples son uno, dos, tres, cuatro, cinco, ... nueve, diez y todos los cambios de decena, la centena, etc. Vocablos compuestos consideramos a *diez y seis* (por contracción dieciséis), *veinte y uno* (por contracción veintiuno). El aprendizaje de la secuencia requiere aprender los vocablos simples, las reglas de formación de los compuestos, y las irregularidades que existen en nuestro idioma, esto es once, doce, trece, catorce y quince que deberían de decirse según la regla que rige para todo el sistema, dieciuno, diecidos, diecitre, diecicuatro, diecicinco. Así como quinientos que debería de ser cincocientos.

Alrededor de los 6 o 7 años, el niño debe de dominar la sucesión hasta 100, correctamente, y lo conseguirá incorporando distintos tramos de la sucesión convencional. Alrededor de los cuatro años domina un primer tramo "uno, dos, tres, cuatro cinco" y repite un segundo tramo de forma no convencional estable "cinco, ocho, nueve, doce" (por ejemplo) y un tercer tramo no convencional de forma no estable.

Para lograr el dominio de la secuencia numérica, el niño recorre cinco niveles:

- Nivel Cuerda. La sucesión empieza en uno y los términos no están diferenciados. Por ejemplo, uno, cuatro, treinta y dos. El niño repite esta secuencia cuando se le pide que diga los números que sabe.

- Nivel Cadena Irrompible. La sucesión comienza en uno y los términos que conoce están diferenciados. Uno, dos, tres, cuatro. No es capaz de repetir esta secuencia si se le pide que la diga empezando en un término distinto del uno.
- Nivel Cadena Rompible. La sucesión de los términos que conoce la puede comenzar en un término cualquiera.
- Nivel Cadena Numerable. Puede recitar n términos de la secuencia numérica desde a hasta b .
- Nivel Cadena Bidimensional. Desde un término cualquiera, a , se puede recorrer la sucesión en ambas direcciones.

Una vez alcanzado este nivel, en un tramo de la secuencia, es posible obtener relaciones entre estos números tales como: "después del número a viene el b "; "delante del número c está el d "; "antes de", "después de".

El dominio de la secuencia permitirá utilizar el número en los demás contextos.

5.4 Aspecto cardinal del número

El número se usa bajo un contexto cardinal cuando se está indicando con él, la cantidad de elementos que tiene una colección. Se trata de dar respuesta a la pregunta ¿Cuántos hay? El contexto, o significado, de **cardinalidad**, ha sido el que más se ha investigado.

Los niños toman pronto contacto con el significado cardinal del número. Para el término **dos**, por ejemplo, como muy tarde, cuando cumple dos años y se le insiste que cumple dos años a la vez que se levantan dos dedos de la mano. Además de ésta, tendrá otras experiencias diferentes asociadas con el número **dos** en otros contextos, cada una de dichas experiencias aportará al niño un significado distinto que posteriormente reunirá y darán lugar a un concepto de **dos** de tipo general.

Se considera un momento importante en el desarrollo del concepto de número aquel en que el niño descubre la cardinalidad: El último número que dice al contar una colección de objetos es el cardinal de dicha colección.

Se admite que un niño ha adquirido la regla de la cardinación cuando es capaz de realizar uno de estos comportamientos.

- a) Responder inmediatamente a la pregunta ¿Cuántos hay?
- b) Enfatizar la última palabra al contar los elementos de una colección.
- c) Repetir el último término al realizar un recuento.

Se supone que un niño no ha adquirido la regla, si comienza, a contar de nuevo cuando se le pregunta ¿Cuántos hay?

La mayoría de los niños, con un desarrollo normal, son capaces de aplicar la regla de la cardinalidad a la edad de 4 años.

Se reconocen tres fases en la consolidación de la regla de cardinación.

- Transición de contar a cardinal, en donde el último término contado se convierte en el

adecuado para el cardinal.

- Comprensión de que el cardinal puede estar asociado a un recuento.
- Integración de ambos significados: cada término obtenido al contar, lleva simultáneamente un sentido de cardinación.

5.5 El proceso de contar

Contar consiste en asignar a cada uno de los objetos de una colección, los nombres de los términos de la secuencia numérica. Se establece, en un principio un apareamiento término-objeto mediante la acción de señalar. La acción de señalar interiorizada dará lugar al proceso de contar.

Sobre los tres años, el niño toca, normalmente, los objetos con la mano mientras que los cuenta. Alrededor de los 5 años no necesita tocar los objetos sino que los señala en un principio con el dedo y posteriormente con la mirada. De esta forma, en la acción de contar aparecen implicadas tres tipos de correspondencias.

- Un apareamiento temporal del término con la acción de señalar.
- Un apareamiento entre la acción de señalar y un objeto concreto.
- Un apareamiento entre el término y el objeto.

En la acción de señalar se crea una unidad espacio-temporal que conecta el objeto (que existe en el espacio) con la palabra (que existe en el tiempo).

Se han determinado cinco principios implícitos en el proceso de contar que son los siguientes.

- Principio de orden estable. Para contar, los términos de la secuencia se han de recitar, siempre en el orden establecido. No se obtendría un buen resultado si al contar se utiliza una secuencia como uno, tres, siete, cuatro, ocho, para contar una colección de cuatro elementos.
- Principio de correspondencia. Al contar los elementos de un conjunto, ya hemos dicho, se va recitando la secuencia y a la vez se van señalando los elementos de la colección. Hay que tener en cuenta no asignar más de un nombre numérico a cada uno de los objetos de la colección.
- Principio de biunivocidad. En el proceso anterior, no basta solo con establecer una correspondencia entre palabra numérica y objeto, sino que dicha correspondencia ha de ser biunívoca. Esto supone que a cada elemento del conjunto se le asignará una palabra numérica y recíprocamente, cada palabra estará asociada con un elemento. No es válido según este principio, repartir una misma palabra numérica entre varios objetos.
- Principio de cardinalidad. El último término obtenido, al contar todos los objetos de la colección, indica el número de objetos que tiene dicha colección.
- Principio de irrelevancia del orden. El cardinal de un conjunto, o sea, el número de elementos obtenidos al contar, no depende del orden en que estén dispuestos los elementos para contarlos. Al contar una colección el resultado no depende de a qué elemento le asignemos el uno, el dos etc.

- Principio de abstracción. Cualquier conjunto o colección de objetos es contable. Puede suceder que los elementos que forman el conjunto sean todos homogéneos (lápices), o que no lo sean (lápices y bolígrafos), en este último caso el resultado de contar habrá que expresarlo en una categoría superior que comprenda a las dos anteriores como subconjuntos (en este ejemplo puede ser: útiles para escribir).

5.6 Puntos de vista sobre la acción de contar en el aprendizaje del número

Los investigadores no se ponen de acuerdo sobre la importancia que tiene el acto de **contar** en el desarrollo de la noción de número.

Piaget y sus colaboradores dan poca importancia a la acción de contar en la construcción del número. Sostienen que dicha construcción se basa en los conceptos lógicos de seriación y clasificación y estos conceptos pertenecen a un estadio algo avanzado del desarrollo del pensamiento, el test de la conservación determinará si un niño ha llegado, o no, a ese estadio. El número se construye, según Piaget, mediante una síntesis de dos tipos de relaciones que el niño establece entre los objetos por abstracción reflexiva: el orden y la inclusión jerárquica de clases.

El conocimiento del número, según esta teoría, está subordinado a la evolución del pensamiento lógico. Para contar significativamente, el niño ha de entender tareas como la conservación de cantidades y las equivalencias entre conjuntos, establecidas mediante correspondencia biunívoca.

Otros investigadores entre los que se encuentran Gelman, Schaeffer, Clements; aseguran que contar es esencial para el desarrollo de la comprensión del número y que la dificultad del niño para entender la conservación se debe, a que el niño no sabe contar.

La enseñanza, que se desarrolle teniendo en cuenta uno u otro de los dos puntos de vista anteriores, será distinta. Los seguidores de la primera teoría, propondrán al niño actividades que le ayuden en el desarrollo de sus capacidades lógicas y pospondrán las tareas de contar, ya que estas no tienen significado para el alumno. Los seguidores de la segunda teoría, por el contrario, piensan que es bueno centrar la atención en actividades que desarrollen técnicas específicas de contar y tareas que fomenten su aplicación.

Así, para unos la enseñanza del número habrá de hacerse formalmente sobre una base lógica, para otros, habrá de hacerse de manera informal, contando.

5.7 Tipos de investigaciones

Las investigaciones que Piaget, y sus discípulos, realizaron en este campo estaban montadas sobre tareas en las cuales el niño tenía que comparar conjuntos a través de correspondencias o formar conjuntos equivalentes a un dado, botellas y vasos, jarrones y flores.

Desde dichas investigaciones se identificaron tres estadios examinando la ejecución de las tareas por los niños.

- Estadio I (niños de edad entre 3,6 y 5,6 años). Hay una comparación global entre las colecciones, no se forma la correspondencia biunívoca, ni hay equivalencia.
- Estadio II (niños cuya edad estaba entre 4,6 a 6 años). Hay una correspondencia biunívoca, sin equivalencia perdurable. El niño obtiene una colección equivalente a la primera, pero piensa que una colección es mayor cuando se cambia de forma y adquiere mayor extensión.
- Estadio III (edad de los niños entre 4,11 a 5,6 años). Crean colecciones equivalentes a las dadas y además están seguros de que el número no cambia, aunque cambie la posición de una de sus colecciones.

Una de las conclusiones a las que llegan a partir de la hipótesis de que la construcción del número es una síntesis de las estructuras de agrupamiento y de la inclusión de clases es que no hay una construcción del número cardinal separadamente de la del número ordinal sino que ambas se constituyen de manera indisoluble, a partir de las clases y de las relaciones de orden que estará consolidada para los primeros números alrededor de los 7 u 8 años y posterior y progresivamente para el resto de la serie.

Clements (citado por Van de Valle 1983) realizó un estudio con niños de 4 años y llega a la conclusión siguiente: Las actividades de contar debidamente estructuradas llevan al niño a mejorar su formación tanto en habilidades numéricas como en operaciones lógicas. Sus resultados fueron en la línea que se expone a continuación:

- Niños entrenados en tareas lógicas ganan significativamente, en test de tareas lógicas, a niños que no han sido entrenados en este tipo de tareas.
- Niños entrenados en estrategias de contar ganan significativamente en test de criterios numéricos a niños que no habían sido entrenados.
- Niños entrenados en tareas lógicas, ganan poco en test de criterios numéricos a los que no habían sido entrenados.
- Niños entrenados en estrategias de contar ganan espectacularmente en test de tareas lógicas a los que no habían sido entrenados.

La explicación de estos resultados la basa en la consideración de que todos los principios implícitos en la tarea de contar son operaciones lógicas.

En la misma línea están Donalson, Gelman, Schaeffer. Este último, como resultado de sus investigaciones, divide en cuatro estadios el proceso de adquisición del número, cada uno de los cuales presenta unas características propias. En cuanto al tipo de acciones que los niños son capaces de realizar, las explicaciones que dan Gelman y Schaeffer sobre un mismo hecho, son distintas en algunos de los casos.

Los diferentes estadios, en la construcción del número con las características que los mismos presentan, según Schaeffer y Gelman, así como las diferencias que presentan el punto de

vista de cada uno de estos investigadores.

1º estadio (edad de los niños, de 2 a 5 años). Este estadio se caracteriza porque los niños no son capaces de contar una colección de más de cinco objetos.

Según Schaeffer el niño distinguen como diferente el número de objetos de dos conjuntos basándose en su configuración perceptual.

Gelman, sin embargo, asegura que en este estadio el niño es capaz de reconocer colecciones pequeñas de objetos contando. En su opinión, los niños han captado el aspecto cardinal del número en colecciones muy pequeñas pero no disponen de un aspecto ordinal implícito que le permita asignar una secuencia de nombres de números a una serie de objetos.

En este estadio las tareas que los niños son capaces de realizar son:

- Reconocer el número de elementos de un conjunto cuyo cardinal sea menor que cinco.
- Distinguir qué colección es mayor, en el caso que al menos una de ellas tenga menos de cinco elementos.
- Reconocer entre colecciones más amplias, relaciones de mayor y menor cuando los objetos están alineados y vea la existencia o no de correspondencias biunívocas.

2º Estadio (niños de 3,9 años). La edad de los niños que están en este estadio es, en algunos casos, menor que la de los niños del estadio anterior.

- Saben contar correctamente cinco objetos dispuesto en fila.
- No aplican la regla de cardinalidad en la mitad de los casos.
- Con números mayores el recuento no está dominado. Cometan errores en la separación de los elementos ya contados o en la coordinación entre palabra y objeto.
- No se ha comprendido aún la conexión entre el proceso de recuento y su resultado, que es el último número recitado y que representa la numerosidad de la colección, ni que dicho número es invariante frente al orden que presenten los elementos del conjunto.
- Para números pequeños, cuentan siempre la colección para dar el resultado, no subitizan. La explicación de Schaeffer a este hecho es que el recuento les da mayor seguridad a no equivocarse. La explicación de Gelman es que el niño todavía no ha aprendido a reconocer grupos de configuraciones, esto ocurrirá posteriormente, cuando el niño esté familiarizado con los números.

3º Estadio (niños de edad entre 3,3 y 5,3).

- Saben aplicar la regla de cardinalidad, pero todavía no conocen cuando un número es mayor que otro (eje: 7 mayor que 5).
- Conectan el proceso de recuento con la regla de cardinalidad.
- Los niños muestran mayor disposición para reconocer el número de elementos de una colección pequeña de objetos, sin contarlos.

4º Estadio (niños de 5 a 5,11 años).

Se caracteriza por la capacidad que presentan los niños para:

- Reconocer el mayor de dos números.
- Contar sin cometer errores.
- Comparar el tamaño de dos colecciones.

Todo esto, al menos, en colecciones que no sobrepasen los diez elementos.

Conclusiones de otros investigadores son:

Case, citado por Fuson y Hall, asegura que las tareas de contar dan al niño capacidad para aplicar el recuento automáticamente por lo que el niño se puede concentrar en otros aspectos y relaciones numéricas, como por ejemplo, establecer relaciones entre recuento y tamaño de una colección.

Brianerd asegura que la idea de ir emparejando los objetos de dos colecciones, con el fin de comparar sus tamaños, es un logro relativamente tardío en el desarrollo intelectual de los niños.

Want señala que el emparejamiento biunívoco y las destrezas de recuento se desarrollan simultáneamente.

Tomando todos estos puntos de vista en consideración Dikson y col. indican que se puede reflexionar sobre la excesiva importancia que en los últimos años se ha dado a las correspondencias biunívocas en el aprendizaje infantil, en detrimento de uso de la práctica de contar.

Como consecuencias de las reflexiones sobre todos estos estudios se pueden considerar las siguientes:

- Los niños, a los cinco años, poseen una comprensión adecuada y operativa de los diez primeros números naturales, al menos en su forma oral.
- El conocimiento oral da suficiente capacidad para resolver problemas aritméticos sencillos expuestos oralmente.
- Es muy importante el papel del recuento para adquirir las nociones de cardinalidad y ordinalidad del número.

Las conclusiones de las investigaciones citadas proporcionan evidencia de que el proceso seguido para alcanzar la comprensión de la noción de número tiene grandes dificultades, en muchos casos una mala actuación, repercute en que dicho proceso no tenga un desarrollo adecuado.

5.8 Capacidades numéricas que han de adquirir los niños

En la línea de la Escuela de Ginebra, en el Informe Piagetiano editado por el M.E.C en 1987, se hace un listado de las capacidades que un niño debe de adquirir en relación con el concepto de número y las tareas que los mismos pueden desarrollar para conseguirlas. A

continuación las enumeramos.

1 Capacidad para hacer comparaciones cuantitativas entre dos grupos de objetos.

- a) Comparaciones brutas, mucho comparado con poco, comparado con la misma cantidad.
- b) Hacer comparaciones exactas, colocando dos grupos de cinco a diez elementos en correspondencia provocada de uno a uno.
- c) Hacer comparaciones exactas, colocando dos grupos de cinco a diez objetos en correspondencia no provocada de uno a uno. En este caso, los grupos de objetos no van juntos, necesariamente.

2 Comprensión global de los efectos de añadir objetos a un grupo o de quitar objetos de ese grupo.

- a) Comprender que añadir objetos a una colección aumenta su número (lo hace más) de modo que si se cuentan los números llegamos a un número más alto.
- b) Comprender que si se quitan objetos de un grupo reduce el número (lo hace menos).

3 Capacidad para distinguir números de atributos como disposición, color, tamaño. Esto permite al niño conservar el número, es decir, que el número permanece igual a pesar de cambios perceptivos. Esto es aplicable tanto a condiciones de identidad (realizando cambios dentro de un solo grupo) como a condiciones de equivalencia, involucrando cambios en un grupo cuando para empezar, había varios grupos equivalentes.

a) Identidad I. - El número de objetos de un grupo que se ha modificado, puede ser reestablecido cuando se vuelvan a colocar los objetos en su forma original. Un niño que se da cuenta de esto no tiene por qué darse cuenta de que el número ha permanecido invariable todo el tiempo

b) Identidad II. - El número de objetos es el mismo incluso cuando se modifique la disposición original y no se vuelva a restablecer.

c) Equivalencia I.- El número de objetos en colecciones equivalentes permanece igual cuando se construye la correspondencia destruida.

d) Equivalencia II.- El número de objetos en grupos equivalentes permanece igual cuando ya no exista una correspondencia "uno a uno". El niño no tiene la necesidad de reconstruir la correspondencia.

4.- Comprender cómo funciona el sistema decimal.

- a) Saber contar de uno a veinte en secuencia.
- b) Sumar uno a cualquier número da el siguiente.
- c) Todos los números menores que uno determinado, están incluidos en ese número. Si tienen cuatro canicas, es cierto que tienen dos canicas. Para comprender esta propiedad es necesario saber que cuando señala un objeto y dicen "siete" están identificando a todo el grupo

de objetos. El señalado es solamente, el séptimo objeto contado.

Tareas

A diferencia de estas y complementarias a ellas hay otras tareas que ayudan al niño en su proceso de adquisición del número. A continuación proponemos una serie de actividades.

- Para desarrollar la capacidad de contar y la utilización de números para representar una cantidad.
- Alumnos y profesor con los brazos levantados, empezando por la izquierda, doblar atrás cada dedo mientras se dicen los números.
- Cuando el alumno está contando junto con el profesor, dejarle contar solo mientras el profesor dobla los dedos.
- Invertir los papeles. El niño contará los dedos del profesor.
- Batir palmas y contar a la vez, marchar y contar a la vez.
- El profesor empieza a contar, llegado un momento se para y señala a un niño para que diga el número siguiente. Sigue contando y repite la operación con otro niño.
- Con un recipiente de metal y objetos que suenen al caer: Dejar caer los objetos en el recipiente, de uno en uno, e ir contando a medida que estos suenen.
- Se hace rebotar una pelota y se va contando cada bote. Otra posibilidad es tratar de adivinar el número de botes que va a dar.
- Se hace rebotar la pelota y se le pide a un niño que bata tantas palmas como botes haya dado la pelota.

- Los niños escuchan mientras el profesor bate palmas, después se les piden que digan cuantas palmadas se han dado.

- Tareas en donde se familiarice el signo con el nombre de los números.
- Inventar un teatro o cuento para escenificar en donde los personajes sean los números. La puesta en escena se puede hacer colocando a un grupo de niños pegatinas de números en las manos el profesor va narrando el teatro, o cuento, y los niños sacarán la mano adecuada en el momento que le corresponda.
- Aprendizaje de canciones apropiadas para la infancia, en las que los números son tratados en distintos contextos.

5.9 Aprendizaje de los símbolos

Dada la complejidad que supone leer y escribir los signos de los números, se aconseja que su aprendizaje se inicie al comenzar el período de enseñanza primaria.

No obstante hay niños que ya a los cinco años son capaces de leer y escribir signos numéricos por lo que vamos a dar algunas ideas que consideramos de interés en este proceso.

La habilidad de escribir cifras, al igual que la de escribir letras, es una destreza que

requiere una maduración del sistema motor y una coordinación entre la vista y el movimiento de la mano.

En algunos individuos existe descoordinación entre estas dos destrezas lo que se requerirá mas adiestramiento en las mismas para conseguir su dominio.

Las siguientes actividades pueden facilitar la coordinación entre la vista y la mano:

- Pintar con los dedos siguiendo un camino.
- Alinear objetos sobre una marca.
- Recorrer con el dedo las plantillas de las cifras.
- Dibujar las cifras sobre algún material continuo (ejemplo arena) o en el aire.
- Moldear las cifras con plastilina o arcilla.

No debemos pensar que este es un aprendizaje matemático ya que la habilidad para escribir cifras no tiene nada que ver con la capacidad para comprender su valor y utilizarlas correctamente, así mismo, la incapacidad para escribir un número no debe de confundirse con la incapacidad para comprender las matemáticas.

La numeración y los cálculos son, ante todo, una manera de codificar y comunicar información resumida por lo que requiere gran importancia el que dicha escritura sea legible, esto obliga a cuidar el dominio de las técnicas de preescritura necesarias para conseguir el éxito. Entre estas técnicas podemos señalar:

- Coger el lápiz correctamente.
- Colocar el papel de forma adecuada.
- Copiar de un modelo...

Una vez que los niños comienzan a realizar preescritura de números se hace necesaria una gran atención con objeto de corregir los malos hábitos, si se producen, antes de que lleguen a estar consolidados.

5.10 Consideraciones sobre el cero

El número cero fue la última cifra que se incorporó a nuestro sistema de numeración. Durante mucho tiempo se pensó que los números expresaban la esencia de lo existente, por ello lo que "no es" no puede ser expresado de aquí que para el cero no se tuviera ninguna razón que impulsara su aparición. Esto nos puede permitir comprender la dificultad, de tipo lógico, que su aprendizaje representa para el niño.

Otro motivo que aumenta dicha dificultad es que no tiene significado en la mayoría de los contextos numéricos, así:

- En la secuencia numérica, no se suele comenzar por el cero.
- En el recuento, lo usual es empezar a contar desde el uno.
- El contexto cardinal es el único que lo considera al considerarlo como cardinal del conjunto vacío.
- En el contexto de medida no tiene sentido hablar de una medida cero.

- Sin embargo, hay un contexto en donde resulta muy gráfico hablar de cero, la calificación de cero dada a algo indica su falta de valor.

Estas consideraciones hemos de tenerlas en cuenta en la enseñanza del número cero para el que el contexto cardinal y la ausencia de objetos puede facilitar su introducción e incorporación al resto de los números.

5.11 Estructura Aditiva

La estructura aditiva, de la que la suma y la resta son sus representaciones más sencillas, subyace (según Carpenter y Moser) en gran número de conceptos matemáticos, y su desarrollo en el niño ocupa un extenso período de tiempo ya que ha de cubrir la transición desde los recuentos informales y las estrategias propias que los niños realizan al margen de su instrucción hasta el uso de datos numéricos memorizados y los algoritmos formales de la adición y sustracción. Este es un período crítico para el aprendizaje de las matemáticas por los niños y se creé que algunas de las dificultades posteriores en matemáticas tienen su origen en la deficiente instrucción inicial de las operaciones de suma y la resta, debe de entenderse que no nos referimos a los algoritmos.

Según Piaget, los conceptos más elementales del número no están completamente desarrollados en los niños antes de los 7 años de edad (aproximadamente) aún cuando los conceptos de adición y substracción, que suponen conocimientos de conceptos numéricos básicos empiecen a la edad de 6 años.

Muy pronto los niños entienden que la secuencia numérica se puede utilizar para realizar operaciones aritméticas.

Los primeros pasos en este campo se dan en situaciones del tipo $n+1$ y $n-1$ (con n menor que 5), más tarde aparecerán situaciones de la forma $n+2$ y $n-2$ para pasar posteriormente a las del tipo $n+m$.

Las situaciones de suma y resta, entre números naturales, está basada en la idea de que juntando elementos a una colección dada aumenta su número y separando elementos disminuye su número.

Pero una comprensión operatoria de la adición requiere (según Piaget) que un niño reconozca que el todo permanece constante independientemente de la composición de sus partes. Sus estudios le llevaron a señalar una serie de estadios, en el desarrollo de este concepto, paralelo al desarrollo de la conservación.

- I estadio. Los niños no entienden que un conjunto de ocho objetos dividido en dos colecciones de cuatro sea equivalente a un conjunto de ocho objetos separado en dos colecciones de uno y siete objetos.
- II estadio. Se resuelve bien la tarea después de verificaciones empíricas

- **III estadio.** Reconoce que la composición de las colecciones no afecta al conjunto final. En principio, los niños no reconocen que el efecto de añadir elementos a una colección pueda ser neutralizado separando el mismo número de elementos y que añadir elementos a una colección equivalente a otra puede compensarse añadiéndole a la otra el mismo número de elementos.

Dificultades

Las investigaciones realizadas sobre las dificultades que los niños encuentran cuando realizan operaciones de suma y resta han dado los siguientes resultados:

- Las dificultades aumentan a medida que aumentan los números. Es más fácil realizar la suma $3+5$ que la suma $3+8$.
- Las sumas en las que el primer sumando es mayor que el segundo ofrecen menos dificultad que aquellas en las que el primer sumando es menor que el segundo. Es más fácil la suma $5+2$ que $2+5$.
- Las sumas cuyos dos sumandos son pares son más sencillas que aquellas que presentan algunos de ellos impar. La suma $6+2$ es más sencilla que $5+2$.
- El caso de tener los dos sumandos iguales, presenta menos dificultad que en cualquier otro caso.

5.12 Estrategias para sumar

Se ha hecho, desde las investigaciones realizadas una clasificación de las estrategias que los niños utilizan cuando realizan sus primeras operaciones de suma y de resta. Veamos cual es esa clasificación.

Estrategias para la suma

* Elaboración de un modelo con dedos u objetos.

a) Se construyen dos colecciones cuyo número de elementos sean los números dados y se precede de dos formas distintas.

- Juntar las dos colecciones y contar todo.
- Contar sin hacer la unión física de las colecciones.

b) Se construye una sola colección, la que indica el primer sumando y se incrementa en tantos elementos como indique el segundo sumando.

c) Se construye la colección que tiene más elementos, sea esta el primero o el segundo sumando y se incrementa con la colección que tiene menos elementos.

* Secuencias de recuento.

Se cuentan los objetos que se supone se deben de reunir sin realizar ninguna acción

física, se trata de conductas puramente verbales y se puede proceder de varias formas.

- Contar todo, el niño cuenta todos los objetos que indican los sumandos.
- Contar a partir del primero de los números dados.
- Contar a partir del mayor de los números.

* Datos numéricos recordados

Emplean combinaciones numéricas que recuerdan como puede ser:

- Aplicación de la idea de doble.
- Aplicación de sumas conocidas como $6+4=10$.

Estrategias para la resta

* Modelos directos con objetos.

Se construye una colección de objetos que represente al minuendo y de esta se van quitando objetos, esto se puede realizar de varias formas:

- Quitando de. Se quitan tantos objetos como indica el substraendo.
- Quitando hasta. Se van quitando al minuendo elementos hasta que quede el substraendo, el recuento de lo que se ha quitado dará el resto.
- Añadiendo hasta. Se forma un conjunto que representa al substraendo, se van añadiendo objetos hasta tener el minuendo, el número de objetos añadidos es el resto.
- Emparejamiento. Los conjuntos formados se tratan de emparejar. Contando los elementos no emparejados se obtiene la respuesta.

* Recuento.

Sin utilizar objetos físicos, se pueden considerar varias estrategias.

- Contar hacia atrás desde. Contar hacia atrás desde el minuendo tantas veces como indica el substraendo.
- Contar hacia atrás hasta. Contar hacia atrás desde el minuendo hasta alcanzar el substraendo, el número de pasos dados es el resto.
- Contar hacia delante desde. Se cuenta desde el substraendo hasta el minuendo.

- Datos numéricos recordados.

Utilización de algún hecho numérico que conozcan.

Estas estrategias no se enseñan ni se aprenden en la escuela, el niño las elabora para resolver los problemas que encuentra en su medio y a veces las mantiene por encima de su aprendizaje

escolar. Es conveniente que el profesor las conozca y sepa ampliar en cada ocasión y para cada niño su campo de utilidad.

5.13 Resolución de Problemas

Se considera un problema matemático a toda situación que entrañe una meta a lograr y en donde casi siempre existirá un obstáculo para alcanzar dicha meta.

La situación a que se hace referencia es normalmente cuantitativa y casi siempre se requieren técnicas matemáticas para su resolución pero es posible, a veces, resolver un problema por una deliberación caso de no conocer el algoritmo necesario para tal ocasión.

Tradicionalmente, en los curricula escolares de los niveles básicos, los problemas se introducen después del estudio de las operaciones y los algoritmos asociados a dichas operaciones. Detrás de este hecho está la creencia de que para resolver un problema hay que conocer la técnica del cálculo requerido. Se convierten así los problemas en ejercicios sobre los que se aplican técnicas de cálculo que se estudian en dicha lección durante un tiempo.

Actualmente, se aconseja introducir los problemas como introducción o a la vez que las operaciones apropiadas para resolverlos, y esto por dos razones según las consideraciones de Kamii: a) los niños construyen su conocimiento aritmético a partir de la realidad. b) la investigación ha demostrado que los niños pequeños son capaces de resolver problemas, a veces, mejor que los que ya han sido sometidos a un aprendizaje para tal efecto. Los problemas verbales son fácilmente solucionados por los niños sin que haga falta una enseñanza formal. Para estas ocasiones los problemas habrá que tomarlos de la vida real de los niños y de su entorno propio.

Empezar el cálculo sin sentido para pasar después de estas técnicas al mundo real, es contrario a lo que sabemos de la manera de pensar de los niños. Si uno de los fines de la enseñanza de la aritmética es capacitar a los niños para la resolución de problemas de la vida real hemos de animarles a tratar con problemas desde el primer día de entrar en clase.

Es conveniente, ayudarles a sacar provecho de sus tareas diarias y sus conocimientos así como a construir una red de relaciones que sirvan de base a una buena actitud hacia la resolución de problemas.

Wheatley (1984) indica que una buena disposición para resolver problemas se puede alcanzar dentro del marco de la escuela, para lo que señalan los siguientes recomendaciones.

- -Crear una atmósfera propicia para la exploración, ya que los niños responden de manera positiva.
- -Fomentar posturas de interés y desafío hacia la exploración de problemas orales. Trabajando en grupo, presentando los problemas a través de material, problemas relacionados con el juego.
- -Presentar situaciones problemáticas variadas.
- Situaciones que den al niño posibilidad de observar, describir, clasificar, ordenar, comparar,

conjeturar, preguntar o realizar una representación deberán de formar las bases de un buen desarrollo mental.

- -Animar a los niños a desarrollar estrategias de resolución de problemas, ya que la invención de estrategias refleja la contribución del niño en el trabajo del aprendizaje.
- -Introducir estrategias específicas de resolución de problemas. Modelos, suposiciones y pruebas, hacer listas de los datos o una representación de los mismos
- -Dar importancia a las actividades de contar y a la formación de patrones
- -Ayudar a los niños con material manipulativo. El material proporciona modelos que ayudan a los niños a resolver el problema de forma concreta, poco a poco se hará el paso desde la manipulación y asociación de actividades mentales hasta la abstracción.
- -Fomentar la interacción entre los niños. El aprendizaje se consigue por el intercambio de ideas en un grupo y se consigue además (según Piaget) el paso del egocentrismo a respetar el punto de vista del otro.

5.14 Problemas de estructura aditiva

Los problemas de estructura aditiva son aquellos que se resuelven con las operaciones de dicha estructura, esto es las operaciones de suma y de resta. Se dicen problemas de un solo paso aquellos que requieren solamente una operación para resolverlos. Vamos a referirnos aquí a los problemas de estructura aditiva de un solo paso, haciendo una reflexión sobre los mismos mediante una clasificación posible de ellos.

De los problemas de estructura aditiva de un solo paso existen varias clasificaciones dependiendo del tipo de variable que se considere para hacer la clasificación.

Los problemas simbólicos de estructura aditiva variarán según la sentencia abierta dada en el problema. Cambiando la incógnita se generan seis sentencias abiertas para la suma y otras seis para la diferencia.

TIPOS DE SENTENCIAS ABIERTAS

Para la suma	Para la resta
$a + b = ?$	$a - b = ?$
$a + ? = c$	$a - ? = c$
$? + b = c$	$? - b = c$
$? = a + b$	$? = a - b$
$c = ? + b$	$c = ? - b$
$c = a + ?$	$c = a - ?$

El estudio sobre la dificultad que presentan las diferentes sentencias anteriores ha dado las siguientes conclusiones.

- Las sentencias canónicas de adición y sustracción ($a + b = ?$, $a - b = ?$) presentan menos dificultad que las no canónicas ($a + ? = c$)
- Las sentencias de sustracción son generalmente más difíciles que las de adición.
- No hay diferencias notables entre las sentencias $a + ? = c$; $? + b = c$; $a - ? = c$ en cuanto a dificultad.
- La sentencia minuendo desconocido, $? - b = c$, es significativamente más difícil que las otras cinco.
- Las sentencias con la operación al lado derecho del signo igual son significativamente más difíciles que las otras.

Clasificaciones de los problemas se hacen, entre otras, teniendo en cuenta, bien variables sintácticas o bien variables semánticas.

Las variables sintácticas como número de palabras que tiene el problema, la secuencia de la información en el enunciado del mismo, o la presencia de alguna palabra que se asocie con una operación determinada, afecta a la dificultad del problema.

Tomando como referencia su estructura semántica, se ha llegado a la siguiente clasificación de los problemas aditivos.

Problemas de Cambio. Son aquellos problemas en los que se expresa una acción. Se relaciona una cantidad asociada a una situación inicial con otra cantidad asociada a una situación final, mediante una acción que actúa de modificadora, o que cambia la situación inicial.

Según el tipo de cambio impuesto por la acción modificadora, pueden ser:

- Cambio-Unión. Sobre una cantidad inicial se realiza un acción directa que causa un aumento de dicha cantidad.
- Cambio-Separación. Sobre la cantidad inicial se realiza una acción que dará lugar a una disminución de la misma.

En ambos casos el cambio ocurre en el tiempo. La condición inicial se da en un tiempo T_1 el cambio se produce en un tiempo T_2 y el resultado se alcanza en un tiempo T_3 .

Según sea la cantidad desconocida se distinguen tres tipos de problemas de cambio.

1 - La cantidad inicial y la magnitud del cambio son conocidas y la magnitud resultante es la incógnita.

Ejemplos: Ana tenía 5 cromos y compra 3 cromos ¿Cuántos cromos tiene en total?.

María tenía 9 cromos y dio 5 a su amiga ¿Cuántos cromos le han quedado?.

2 - La cantidad inicial y el resultado del cambio son conocidos, la incógnita es en este caso la magnitud del cambio.

Ejemplos: Juan tiene 6 bolas pero quiere tener nueve. ¿Cuántas bolas necesita comprar?.

Susana tiene 7 bolas, da algunas a su primo y le quedan 4 ¿Cuántas bolas ha dado Susana a su primo?

3 - La incógnita es la magnitud inicial, conociéndose la magnitud del cambio y el resultado final.

Ejemplos: Ana tenía algunos lápices, su hermano le dio 4 y ahora tiene 7. ¿Cuántos lápices tenía Ana?.

Pepe tenía algunos lápices, le dio 3 a un amigo y le han quedado 4 ¿Cuántos lápices tenía Pepe?.

Hacer notar que en todos estos ejemplos se ha considerado un mismo esquema de enunciado. Se ha hecho todo el planteamiento del problema, al principio, y se ha insertado la pregunta al final del problema

Problemas de Combinación.

Estos problemas hacen referencia a la relación que existe entre un conjunto y dos subconjuntos disjuntos del mismo. No hay acción, por tanto la relación entre los mismos es estática.

Se presentan dos problemas tipo.

1- Se conocen los dos subconjuntos y hay que encontrar el tamaño de la reunión de los mismos.

Ejemplo: Irene tiene 4 bloques rojos y 5 azules ¿Cuántos bloques tiene Irene?

2 - Se conocen el conjunto total y uno de los subconjuntos y hay que hallar el tamaño del otro subconjunto.

Ejemplo: Luis tiene 10 bloques de ellos 3 son azules y el resto amarillos ¿Cuántos bloques amarillos tiene Luis?

Problemas de Comparación.

Los problemas de comparación suponen la comparación de dos conjuntos disjuntos, las relaciones se establecen utilizando los términos "más que" "menos que" y son estáticas, no hay acción.

Por el hecho de que dos subconjuntos son comparados se suele llamar a uno de ellos el referente y al otro el referido, la tercera entidad es el término de comparación.

En estos problemas una de las tres cantidades puede ser la desconocida, el término de comparación, el conjunto referente o el referido.

A su vez el mayor conjunto puede ser bien el referente o el referido. Por lo que podemos considerar seis tipos distintos de problemas de combinación.

Ejemplos:

1. Antonio tiene 6 galletas y Jaime 4 galletas. ¿Cuántas galletas tiene Antonio más que Jaime?
2. Ignacio tiene 5 galletas. María tiene 3 galletas más que él. ¿Cuántas galletas tiene María?
3. Pilar tiene 3 galletas, ella tiene 2 galletas más que Pedro. ¿Cuántas galletas tiene Pedro?
4. Javier tiene 9 caramelos y Carlos 3. ¿Cuántos caramelos tiene Carlos menos que Javier?
5. Nuria tiene 2 caramelos, ella tiene 3 caramelos menos que Marta. ¿Cuántos caramelos tiene Marta?
6. Lola tiene 4 caramelos y Jesús tiene 2 caramelos menos que Lola. ¿Cuántos caramelos tiene Jesús?

Problemas de Igualación.

Estos problemas se pueden considerar que comparten las características de los de cambio y comparación ya que se produce alguna acción relacionada a su vez con la comparación entre dos conjuntos disjuntos. Lo que hay que responder es lo que hay que hacer a uno conjunto para que resulte igual al otro.

- Si la acción hay que realizarla sobre el mayor de los conjuntos se tendrá una separación-igualamiento.

Ejemplos:

1. Carmen tiene 8 globos y Cesar tiene 6. ¿Para tener tantos globos como Cesar cuántas debe de romper Carmen?
2. Andrés tiene 5 globos, si Tomás rompe 3 tendrá tantos como él. ¿Cuántos globos tiene Tomás?
3. Lucía tiene 8 globos, si rompe 4 tendrá el mismo número de globos que Miguel. ¿Cuántos globos tiene Miguel?

- Si la acción hay que realizarla sobre el más pequeño, se tendrá una unión-igualamiento.

1. Inés tiene 7 cromos y Pablo tiene 4 cromos. ¿Cuántos cromos habrá de ganar Pablo para tener tantos como Inés?

2. Margarita tiene 6 cromos, si gana 2 tendrá tantos como Julián. ¿Cuántos cromos tiene Julián?
3. Enrique tiene 5 cromos, si Elena gana 2 cromos tendrá tantos como Enrique. ¿Cuántos cromos tiene Elena?

5.15 Niveles de abstracción en la resolución de los problemas.

Describimos a continuación los tres niveles de abstracción en los que puede estar un niño en la resolución de problemas y lo vamos a hacer tomando como ejemplo la situación de "quitar" o sea un problema de cambio disminución.

Nivel conceptual. Es el nivel más primitivo, es aquel en el que el niño modela completamente la acción o las relaciones que se dan en el problema usando objetos físicos o dedos. Este nivel se caracteriza por el uso de materiales concretos y descripciones verbales.

Ejemplo: Un niño cuenta en voz alta una colección de objetos y los coloca debajo de un recipiente, a continuación saca de debajo del recipiente y desplaza algunos (o todos los) objetos para que otro niño vea los que ha sacado. Este segundo niño ha de describir verbalmente la acción realizada por el primero y los resultados. Así podría decir el segundo niño "Tu pusiste debajo del recipiente cuatro bloques y has sacado tres luego dentro queda uno". El primer niño descubrirá los objetos y se verificará si la predicción que ha hecho es o no correcta.

Nivel de conexión. En este nivel se siguen utilizando materiales concretos y descripciones verbales, pero además se van introduciendo los símbolos escritos correspondientes. Los niños tenderán a no representar físicamente las cantidades descritas en el problema, sino que poco a poco serán capaces de realizar la operación de recuento por sí sola.

Ejemplo: En la situación de juego descrita anteriormente el segundo niño creará la sentencia numérica, correspondiente a la situación, colocando tarjetas donde estén los números y los signos - e = representados.

Nivel de abstracción. En este tercer nivel, las técnicas de recuento han dado paso a la utilización de los algoritmos para llegar a la solución del problema.

Si se le da al niño una sentencia numérica, como por ejemplo $5 - 3 = ()$, y se les anima a que piensen acerca de acciones previas hechas con los objetos y con las manos. El niño puede necesitar un recuerdo visual de la actividad física, por ejemplo: recuerdo de una situación de juego en donde se modelice la situación de $5 - 3$, que le llevará a determinar mentalmente que quedarán dos objetos de una colección de cinco. Se les debe de animar a que digan en voz alta el proceso que están siguiendo.

5.16 Tareas y situaciones problemáticas para los niños

Asegura Kamii que las situaciones de cada día y los juegos colectivos proporcionan

muchas oportunidades para que los niños piensen y resuelvan problemas. Lo expresa en los términos siguientes:

"Hay muchos momentos en el desarrollo de la clase en los que se puede plantear una votación o cualquier otra situación en cuya resolución interviene aspectos aritméticos, entonces hay que detenerse y discutir ya que los niños se encuentran emocionalmente implicados y su mente es más activa para el aprendizaje."

Asegura, que no creé que los ejercicios repetitivos y mecánicos que se realizan en los cuadernos provoquen una actividad mental tan rica, aunque no quiere esto decir que los niños no aprendan a través de los cuadernos de ejercicios, sino que el aprendizaje es de carácter distinto. En su libro "Los niños Reinventan la Aritmética", esta autora, presenta una serie de situaciones cotidianas en las que analiza los aspectos numéricos que contienen. Así por ejemplo, situaciones de votaciones por distintas causas, control de asistencia a clase, control sobre el material utilizado en un juego o actividad, distribución de un material... Además de una serie de juegos colectivos de entre ellos hemos tomado el siguiente.

Un niño piensa un número y sus compañeros han de adivinarlo. El niño que ha pensado el número debe de escribirlo sus compañeros de juego han de adivinarlo, para ello uno de los compañeros dice un número y el que lo ha pensado responderá es mayor o menor. El niño que consigna adivinar de qué número se trataba será el encargado de pensar el siguiente número.

5. 17 Juegos para el aprendizaje numérico

Presentamos una serie de juegos que no siendo específicos para trabajar los números, se pueden aprovechar y utilizarlos en este sentido.

1. Se dispone de una colección de objetos, los niños han de conocerlos bien, para ello se procederá a una etapa de juego libre, posteriormente se pasará al juego que consiste en esconder varios objetos en la clase y tratar de encontrarlos. Se pueden ir planteando preguntas sobre el número de objetos encontrados el número de los mismos que falta por encontrar, introduciendo así a los niños en las nociones de suma y resta.

2. El juego de las canicas o los bolos se prestan también a planteamientos de preguntas sobre cuantificación cuya respuesta por parte del niño requiere que este resuelva un verdadero problema de estructura aditiva.

3. Los juegos de cartas son útiles para el desarrollo del pensamiento numérico. Estos pueden ser muy variados tanto por la cantidad de los mismos que se pueden realizar como por el grado de complejidad de los mismos. Como ejemplo tomamos el siguiente: Se eligen las cartas de menor puntuación (del uno al siete) barajadas y amontonadas en el centro de la mesa, cada jugador tomará una carta y la pondrá boca arriba, el que saque la carta más alta se llevará todas las demás.

4. Los juegos del dado y del dominó ayudan al niño a adquirir la habilidad de conocer los números que están representados en las caras por la disposición que presentan los puntos sin

necesidad de contar. La variedad de ellos es muy grande y las posibilidades también, pues se pueden utilizar un sólo dado o más de uno. Por ejemplo, para dos jugadores. Con dos dados y unas fichas para apostar, los dos jugadores tiran los dos dados gana el que sume mayor puntuación este juego permite desarrollar gran cantidad de relaciones entre los números. Así por ejemplo, si uno de los jugadores ha obtenido un tres y un cinco y el otro un tres y un seis los niños llegan a darse que no es necesario contar ya que tienen un sumando igual por tanto gana el que tenga mayor el otro sumando, si un niño obtiene en los dos dados mayor puntuación que su oponente en el juego, descubren que no es necesario hacer las sumas para saber que su resultado es el mayor y que el ganador es él.

5.18 Estimación

Las actividades de estimación son de gran importancia para que el niño desarrolle el sentido numérico.

Un investigador presenta a un grupo de niños de primer curso de primaria una calabaza partida y les pidió que dijeran el número de pepitas que pensaban podía haber en ella. Las respuestas que estos niños dieron fueron variadas, desde una pepita hasta un millón. Esto es debido a que estos niños tenían una experiencia limitada con los números. Las respuestas que los niños dan a una situación de estimación a menudo nos resultan irrazonables a los adultos, pero son una consecuencia de su limitado sentido del número. Cuando este sentido no se ha desarrollado suficiente, se piensa que un número como 35 es muy grande y sin embargo la diferencia entre 35 y 100 no es mucha. Las actividades de estimación ayudan a conocer mejor la cantidad de objetos que un número representa. Estas actividades se pueden hacer siguiendo tres estrategias:

- a) Por comparación de una cantidad con otra conocida.
- b) Partiendo una cantidad en otras cantidades conocidas.
- c) Utilizando cálculo mental.

Presentamos algunos ejemplos.

a) Por comparación de una cantidad con otra conocida.

1. Bolas de Navidad y dos cestos iguales. Colocamos en uno de los cestos siete bolas (los niños ven el proceso y saben la cantidad que hay) pedimos a los niños que adivinen el número de bolas que hay en el otro cesto previamente preparado (sin contarlas). Otra variante: Enseñar el cesto con las bolas y pedir que adivinen cuantas hay, una vez que los niños han hecho sus conjeturas y han anotado el número para que no se les olvide, se les enseña el otro cesto donde hemos puesto cinco bolas, se les dice en este cesto hay cinco bolas. ¿Dónde hay más bolas en el primer cesto o en el segundo?. ¿Hay muchas más o pocas más?. ¿Seguís pensando que el número de bolas del primer cesto es el que habéis escrito o queréis cambiarlo? Se termina la actividad contando las bolas del primer cesto y viendo como los niños se han aproximado a la solución.

2. Fichas, clips u otros objetos similares. Se forman dos filas con dichos objetos una fila

de trece y otra de nueve, por ejemplo. Se les pide a los niños que adivinen el número de objetos de una de las filas diciéndole el número de elementos que hay en la otra.

Actividades de este tipo se pueden realizar con otros objetos, como por ejemplo, botes transparentes en cuyo interior podemos colocar elementos discontinuos como canicas, guijarros.

b) Partiendo una cantidad en otras cantidades conocidas.

La estrategia de partir la cantidad desconocida en cantidades conocidas habrá que introducirla gradualmente, utilizando en principio la idea de mitad y doble y con ejercicios sencillos, esta estrategia tiene además un interés añadido, ya que en la partición en cantidades iguales está el germen de la operación de dividir.

1. Dos botes de cristal iguales y canicas. En uno de los botes se introducen canicas y se les pregunta a los niños cuántas creen que puede haber. Han de escribir el número que han pensado. Se sacan cinco canicas y se ponen en el otro bote y se les vuelve a preguntar. ¿Cuántas partes como esta habrá en el primer bote? Según vuestra respuesta ¿estáis de acuerdo con la primera conjetura que habéis hecho? Finalmente se cuentan las canicas para comprobar como de aproximadas han sido sus respuestas.

2. Tomamos una baraja de 20 cartas se separa de la misma un montón de ocho cartas y se les dice a los niños que en el montón hay ocho cartas pidiéndoles que adivinen cuantas puede haber en todo el montón. Se sigue la actividad con el mismo esquema que las anteriores.

c) Utilizando cálculo mental.

El cálculo mental no se puede separar del proceso de la estimación ya que está presente en cualquiera de las estrategias utilizadas. Lo hemos considerado como un caso aparte porque en muchas ocasiones, para estimar, solo es necesario realizar un cálculo y este ha de ser mental, los niños necesitan práctica si queremos que lo realicen de forma eficaz y vean el cálculo mental como una actividad normal. Ejemplos:

1. Realizar mentalmente sumas y restas sencillas procurando que los números sean fáciles de componer o descomponer en otros que les sean más familiares:

$9 + 5$ se puede realizar como $10 + 5$ menos 1.

$7 + 4$ se puede hacer como $5 + 5 + 1$.

Para las actividades de estimación es necesario tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Una actividad no debe darse por terminada hasta que los niños no lleguen a hacer una estimación razonable.
- Reforzar la actividad haciendo que los niños verbalicen sus pensamientos y los razonamientos que usan para hallar sus respuestas. En un principio los niños tendrán dificultades en expresar sus pensamientos pero poco a poco se acostumbrarán a hacerlo de forma espontánea. El educador con sus preguntas puede ayudarle mucho a dar este paso.

TEMA 6

MEDIDA EN LA EDUCACION INFANTIL

6.1 Introducción

La importancia de la medición está justificada por su uso en la vida diaria. Un breve recorrido, con "ojos de medición", al desarrollo de una jornada de un individuo adulto nos proporcionará numerosos ejemplos de lo abundante que es la utilización de las medidas en nuestro quehacer diario. Esta importancia, además, tiene perspectivas de futuro. Es difícil imaginarse un mundo sin medida.

La cantidad de destrezas que conlleva el acto de medir hace que sea aconsejable su enseñanza en los niveles educativos y por tanto que se considere incluido el tópico de las magnitudes en el currículum de los niveles inferiores del sistema educativo.

6.2 Magnitud.

Se suele definir la magnitud como toda aquella cualidad de los cuerpos que es susceptible de ser cuantificada, por ejemplo: se puede cuantificar el largo de un objeto, pero no se puede cuantificar la belleza de una persona.

También se suele decir de las magnitudes que son entes abstractos entre los que se puede definir la igualdad y la suma.

Al hablar aquí de igualdad no nos estamos refiriendo a la identidad matemática, sino a la igualdad de una característica de los objetos. Así un papel, la nieve, la leche, tienen una característica común, según el orden visual, es lo que llamamos "blancura" y esta característica es un ente abstracto, distinta de la característica "verdor" que puedan presentar otros objetos.

De la misma manera hay objetos que al ponerlos en una balanza mantienen la misma en equilibrio, se dice que tienen el mismo peso (prescindimos de todas las demás cualidades) y se da de esta forma nombre a una cualidad genérica.

Otros objetos tienen la cualidad de que sus extremos coinciden cuando se superponen, se

dice que tienen la misma longitud o longitudes iguales.

Hay figuras planas que se pueden hacer coincidir aunque para ello sea necesario descomponerlas, de ellas se dice que tienen la misma área o áreas iguales.

También hay objetos que son capaces de albergar en su interior la misma masa, se dice que tienen la misma capacidad.

La diferencia entre el ente abstracto de "blancura" y los entes abstractos peso, longitud, área o capacidad está en que con todos los últimos se puede realizar la operación de suma.

La operación de suma a que nos referimos en el párrafo anterior, no es una suma numérica sino a la acción de unir dos objetos que presenten dicha característica. Por ejemplo: uniendo dos pesos en un platillo de la balanza esto podemos igualarlo con un solo peso en el otro platillo que se dirá que es la suma de los pesos anteriores. O bien, una longitud es suma de otras dos, cuando unidas estas por uno de sus extremos, los extremos que resulta coinciden con los de la primera longitud.

Al peso, la longitud, el área, el volumen, la capacidad, el tiempo, el dinero, se les llama magnitudes y son las magnitudes que se estudian en la escuela.

Los distintos estados de una misma magnitud se denominan cantidades de dicha magnitud.

No todas las magnitudes son de la misma "clase". Las citadas anteriormente son del tipo de las llamadas magnitudes escalares, y cumplen las siguientes condiciones:

- 1.- Si A y B son cantidades distintas de una misma magnitud entonces $A < B$ o $B > A$.
- 2.- Hay una cantidad menor que todas, la cual se llama cantidad cero.
- 3.- Si es $A > B$ entonces es $A = B + C$ siendo C una tercera cantidad no nula.
- 4.- Cualquiera que sea el entero u, existe una magnitud A' tal que $uA' = A$.
- 5.- Siendo $A < B$ siempre hay un número de sumandos, n, todos iguales a A de tal manera que $A + A + (n \text{ veces}) + A = B$.

Hemos dicho que las magnitudes que cumplen estas cinco condiciones se les llama magnitudes escalares, el nombre les viene por el hecho de poderse ordenar en una escala en sentido creciente. También se les llama lineales como consecuencia de que se pueden representar por los puntos de una resta.

Hay otras magnitudes, que no se pueden ordenar de esta manera, como por ejemplo las fuerzas que tienen intensidad, dirección y sentido se les llama magnitudes complejas o vectoriales. La representación de las mismas se puede hacer en el plano.

6.3 Medida.

Medir una magnitud es asignar un número a cada una de sus cantidades, o estados particulares, de forma que puedan ser dichas cantidades representadas por dicho número. Esto exige que a cada cantidad ha de corresponder un número, y recíprocamente, a cada número una cantidad de magnitud.

El acto de medir se realiza, casi siempre, por comparación con una cantidad "u" llamada unidad.

Si la cantidad de magnitud dada se puede descomponer en h sumandos iguales a "u", o sea, si $A = u + u + \dots$ (h veces) + u, entonces:

$$A = h.u$$

El número h que nos dice las veces que A contiene a u se llama medida de A respecto de la unidad u.

6.4 Aprendizaje de la medida

El aprendizaje de la medida supone en el niño un largo proceso que tiene su comienzo en la infancia (donde está estrechamente ligado al desarrollo de habilidades perceptivas y motrices).

Las tareas de medida, de longitud, de peso, de capacidad deben de ser la prolongación natural de experiencias anteriores.

Antes de llegar a los aspectos cuantitativos del proceso, el niño ha de realizar numerosas actividades referidas a comparaciones de longitud, de peso, de capacidad, de duración.

Las medidas efectuadas por los alumnos de los primeros niveles del sistema escolar están en estrecha relación tanto con el número natural, pues la respuesta a la acción de medir se expresa a través de un número y con la unidad de medida correspondiente, como a las formas geométricas, ya que la medida de magnitudes como la longitud, y la amplitud se realizan sobre los conceptos geométricos de segmento y ángulo. En casos como la medida de las magnitudes superficie y volumen en el contexto escolar casi se reducen también al cálculo de superficies y volúmenes de elementos geométricos.

"Es a través de experiencias con formas y figuras como surgen las cuestiones relativas al tamaño. En cuanto hacemos que se preste atención a la comparación de tamaños, sea por el procedimiento que fuere, estamos penetrando en los dominios de la medición" (Dikson y col.). Esto conlleva el conocimiento previo de conceptos numéricos y de formas geométricas para su medida.

6.5 Aportaciones de la Psicología

Piaget y sus colaboradores hacen las siguientes consideraciones como consecuencia de sus experiencias sobre la medida:

- La medida no es un acto simple sino complejo
- La realización del acto de medir requiere una gran experiencia en la práctica de las

clasificaciones, las seriaciones así como en la realización de estimaciones sobre el atributo que se pretende medir

-Es necesario que el niño tome contacto desde edad temprana con situaciones que le lleven a percibir los atributos o propiedades de las colecciones de objetos que las comparen directa o indirectamente a través de aparatos adecuados, esto les llevará a percibir la parte física de la magnitud, más tarde llegará a la abstracción.

Considera Piaget dos operaciones fundamentales sobre las que se sustenta la comprensión del proceso de la medida: La conservación y la transitividad.

Conservación

La noción de conservación se refiere a los aspectos que permanecen invariantes en los objetos a pesar del cambio de situación de los mismos, así por ejemplo: una cuerda tiene la misma longitud tanto si está enrollada como si se estira, la cantidad de azúcar de un paquete sigue siendo la misma cuando este se vierta en el azucarero, el número de canicas no cambia si caen de su caja y se esparcen por el suelo.

Transitividad

La utilización de un instrumento en una situación de medida se sustenta en la idea de transitividad, así por ejemplo el hecho de comprobar que dos niños tienen la misma estatura utilizando un listón o una marca sobre la pared se basa en el hecho siguiente: conociendo que el niño X es tan alto como el listón y el niño Y también es tan alto como el listón, luego los niños X e Y tienen la misma estatura.

6.6 Estadios a recorrer en la construcción de una magnitud y su medida.

El investigador que más aportaciones ha hecho en el campo del desarrollo de las nociones sobre magnitud y medida ha sido Piaget.

Piaget y sus colaboradores admiten que el niño ha de superar una serie de estadios en el proceso de adquisición de los conceptos referidos a las distintas magnitudes y a la medida de las mismas, son los siguientes:

- Consideración y percepción de la propiedad que posee una colección de objetos sin tener en cuenta otras propiedades que puedan representar, la comparación y ordenación de objetos según el atributo considerado es uno de las acciones que el niño ha de llevar a cabo.

- Conservación, la propiedad que estamos destacando permanece constante aunque el objeto cambie de posición o de forma.

Piaget también distingue estadios en el desarrollo de la conservación.

En un primer estadio, el niño pequeño da muestras de no haber asimilado la idea de conservación de la longitud cuando considera que dos segmentos son desiguales porque sus extremos no estén alineados. En cuanto a las superficies y volúmenes considera mayor aquel que

tiene mayor dimensión lineal. En este estadio es usual que utilice percepciones visuales, y no utiliza un instrumento intermediario al establecer comparaciones de la característica señalada. No utiliza significativamente los instrumentos de medida siendo los errores más cometidos superponer las unidades, dejar huecos entre las mismas o cubrir sólo una parte de lo que se pretende medir. Todo hace pensar que no ha adquirido la noción de conservación ni de la transitividad.

Un Segundo estadio se produce hacia los seis o siete años, el niño muestra la aparición de cierta idea de conservación y transitividad al utilizar algún intermediario o instrumento de medida. Empíricamente descubre que si utiliza más unidades para cubrir X que para cubrir Y entonces X es mayor que Y.

Se considera una nueva etapa, o estadio, aquella en la que el niño es capaz de comparar longitudes iguales utilizando para ello un intermediario. Esto ocurrirá alrededor de los siete u ocho años, no sabe todavía utilizar un instrumento de medida menor que lo medido. Se empieza a apreciar la medición bidimensional como el área encerrada en un recinto y se manifiesta la conservación de cantidades de materia como el que la cantidad de líquido no varía aunque se cambie de recipiente de distinta forma.

Alrededor de ocho a diez años el niño comprende que el procedimiento para medir consiste en recubrir el objeto con unidades más pequeñas. Hasta este momento el proceso de medir está caracterizado por un proceso de tanteo, de ensayo y error. Piaget considera que los procesos de medir longitud superficie y capacidad se dan conjuntamente y que la medida del volumen se consigue posteriormente.

Otro momento importante se produce cuando es posible establecer la relación entre cantidad de magnitud y número o acción de medir. El niño alcanza una comprensión plena del acto de medir cuando es capaz de operar con los resultados de tales medidas para obtener nuevos resultados es la etapa que Piaget denomina "pensamiento operatorio formal" señala que se consigue hacia los doce-trece años. Una vez alcanzado esta etapa se tiene conciencia de que el espacio es un continuo que contiene un conjunto infinito y continuo de puntos. (Dikson y col.).

Estos estadios suponen una madurez mental consecuencia de un desarrollo psicológico por una parte y la realización de las actividades adecuadas por otro lo que hace necesario proporcionar al niño un medio amplio y una variedad de situaciones en el que pueda experimentar, probar y rectificar sus experiencias.

Piaget considera que el concepto de medida depende del pensamiento lógico. El niño ha de comprender que un todo se compone de partes agregadas, ha de tener en cuenta los principios de sustitución e iteración. La medida es la síntesis de la división en partes y de la iteración de la misma manera que un número es la síntesis de la inclusión de clases lógicas en una ordenación serial.

Ejemplificamos con la magnitud masa proponiendo situaciones adecuadas para los distintos estadios.

- En primer lugar se trata de resaltar la cualidad masa, de forma que se perciba y se distinga de otras características como puede ser el color.

- En segundo lugar se trata de alterar la forma de aquellos objetos que lo permitan (ejemplo una bola de plastilina), cambiarlos de posición y comprobar que la masa se conserva.

- En tercer lugar hay que realizar ordenaciones de objetos respecto a la cualidad masa, por ejemplo, ordenar bolas de plastilina atendiendo a dicha cualidad.

- En cuarto lugar se le asignará a cada uno de los objetos el número de gramos obtenidos al pesarlos (corresponde a su medida).

6.7 La medida espontánea

Piaget en sus investigaciones observa que, en un principio, el niño utiliza una medida perceptiva, a partir de impresiones sensoriales. Por ejemplo, compara, a ojo, el largo de dos trenes. Posteriormente, la desconfianza les lleva a aproximarlos para compararlos mejor y llega incluso a buscar un objeto que se desplace sobre ellos. Se aprecia una evolución: medida perceptiva con desplazamientos perceptivos, con desplazamientos manuales, y la construcción de una medida movable (un intermediario).

Distingue tres estadios:

I Comparación perceptiva directa entre dos objetos sin recurrir a desplazamientos ni intermediarios. Se compara con la mirada, la sensación.

Establece dos subestadios.

- espontáneo con la mirada
- compara con alguna parte de su cuerpo.

II. Comparación perceptiva con desplazamiento de objetos.

En este caso distingue dos subestadios:

- con transporte manual, si aproxima los objetos,
- con objeto intermediario pero este no es todavía una unidad independiente: así por ejemplo, los dedos, el palmo el pie.

III. Se hace operativa la propiedad transitiva: se hacen razonamientos deductivos del tipo $A=B$ y $B=C$ implica que $A=C$. Lo que asegura la transitividad es la conservación de la magnitud, así como la subdivisión e iteración sucesiva de la unidad para la medición.

Las edades para el desarrollo de estos estadios indican que el tercero se desarrolla entre los 6 y 8 años de edad para las magnitudes lineales; entre los 7 y 8 años el tiempo y la superficie; entre los 10 y 12 el volumen. Pero hay que entender que estas edades no son uniformes para todos los niños.

6.8 Construcción de la unidad

Al finalizar el III estadio, se desarrolla y perfecciona la idea de unidad. Distingue tres pasos:

- Ausencia de unidad. La primera medida es puramente visual y comparativa. No se observa que el niño utilice algo común e independiente, como ha de ser la unidad de medida.
- Unidad objetal. La unidad elegida sólo sirve para un objeto.
- Unidad situacional. Puede servir para dos objetos si estos se relacionan.
- Unidad figural. La unidad va perdiendo toda relación con el objeto a medir pero permanece una tendencia a medir objetos grandes con unidades grandes y objetos pequeños con unidades pequeñas.
- Unidad propiamente dicha. La unidad se ve totalmente libre de la figura y objeto considerado, tanto en la forma como en el tamaño.

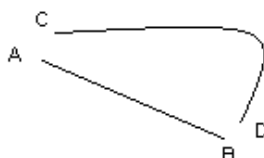
6.9 La longitud

Los psicólogos consideran que los niños perciben lo lleno y lo vacío como cosas diferentes y lo vacío con mayor dificultad que lo lleno. Ocurre así con la longitud tomada como segmento (espacio ocupado) y la distancia (espacio vacío), por lo que vamos a ocuparnos de la longitud por un lado y por otro la formación de la noción de distancia.

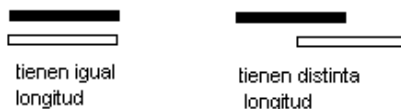
Conservación de la longitud

Piaget distingue tres estadios en el proceso de conservación de la longitud en el niño:

-La longitud depende de la distancia entre los extremos de las figuras. Así aseguran que AB y CD tienen la misma longitud.

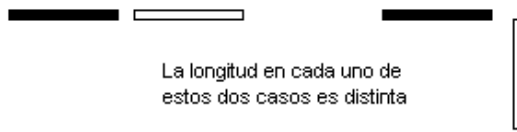


-La longitud depende de los desplazamientos, de la forma:



tienen igual
longitud

tienen distinta
longitud

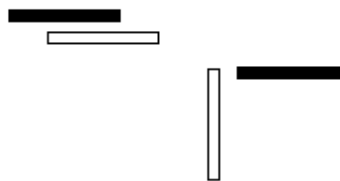


La longitud al juntar los palitos será distinta en cada una de estas dos posiciones últimas.

-El niño conserva la longitud (ocurre alrededor de los 7 años). Situaciones como las anteriores no producen confusión.



No tienen igual longitud



Tienen igual longitud

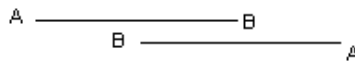
6.10 Noción de distancia

Hacia los 6 años si un objeto se interpone entre otros dos el niño considera que la distancia disminuye. Aparecen diferenciadas tres etapas:

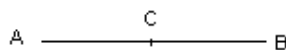
- Se conserva la distancia $d(AB)$ a pesar de la interposición de elementos.



- $d(AB) = d(BA)$. No importa la inversión del orden de los extremos.



- $d(AC) = d(AB)$. Siendo C el punto medio entre A y B.



Alrededor de los 7 años el niño conserva la distancia.

Por lo que a la medida se refiere es necesario para medir longitudes que el niño tenga

algunos conocimientos previos como:

- Que halla construido la unidad
- Que tenga la noción de línea recta
- Que sea capaz de subdividir la línea recta
- Que sea capaz de iterar la unidad sobre la línea.

6.11 Aportaciones de la fenomenología didáctica

Freudhental entiende por fenomenología didáctica de un concepto matemático la descripción de este concepto en relación con los fenómenos de los cuales es el sustento. Indicando qué fenómenos puede organizar, a cuales se extiende y cómo actúa sobre estos fenómenos, siendo un medio para organizarlos e indicando qué poder nos confiere sobre los mismos.

La fenomenología didáctica hace hincapié en cómo la relación entre el concepto y sus fenómenos se adquiere a través del proceso de enseñanza/aprendizaje por lo que proporciona pautas para el tratamiento didáctico de los distintos conceptos.

Fenomenología de la longitud

De acuerdo con la caracterización de fenomenología didáctica de Freudhental y las consideraciones de Piaget sobre el desarrollo de la magnitud realizamos una reflexión sobre la **longitud**.

La cualidad ligada al concepto de longitud se expresa mediante parejas de objetivos o adverbios y que se refieren a aspectos opuestos de la cualidad así:

- largo-corto
- ancho-estrecho
- alto- bajo
- cerca-lejos
- profundo-superficial
- grueso-fino

Parece aceptado que la habilidad para distinguir tales propiedades precede a la expresión lingüística.

Alrededor de todos estos adjetivos hay también expresiones relacionales como más largo que, el más largo, tan largo como, demasiado largo, muy largo etc. Todas ellas sirven para comparar objetos respecto a su longitud y parece necesaria su utilización y comprensión para el desarrollo adecuado de este concepto en el niño.

La relación entre la rigidez y la longitud es un factor a considerar también en cuanto que para medir una longitud es preciso que el objeto se mantenga rígido en la dirección a medir. Esta exigencia de la rigidez se corresponde con la inextensibilidad del objeto, este se podrá curvar o cambiar de forma y, sin embargo, si se cumple la exigencia anterior la longitud permanecerá, lo cual añade algo más a la exposición de Piaget sobre la conservación de la longitud.

Freudhental asegura que la semejanza es un paso mental necesario para el desarrollo cognitivo de la idea de rigidez y, por tanto influirá en el desarrollo de la longitud. Se basa en aseveraciones como ésta "lo que está más lejos parece más pequeño" que claramente expresan una relaciones de semejanza a tener en cuenta cuando se trata de medir en longitud.

Hay que tener en cuenta la invarianza por reflexiones y por ciertas transformaciones de congruencias planas o espaciales, es decir, la relación que puede haber entre las deformaciones que podamos hacer a un objeto sin variar su longitud y la permanencia de la medida de ese objeto cuando le aplicamos transformaciones como traslaciones, simetrías etc. Añadamos el carácter reversible de estas reflexiones y transformaciones que indican que ante cualquier transformación que se haga, siempre es posible deshacerla y volver al estado inicial.

Es clara la influencia de estos aspectos en la construcción de los aparatos de medida de longitudes. Ejemplos: metro de carpintero y cinta métrica enrollable.

A veces, para medir es preciso adaptar o rodar una curva sobre una recta, se ve de nuevo la invarianza al enderezar sin cortar alargar o romper.

Adapta Freudhental la teoría de Bruner cuando expone que la adquisición de la experiencia respecto a la rigidez y a la flexibilidad empieza de forma enactiva, en el curso del desarrollo del niño, se apoya cada vez más en imágenes físicas (fase icónica) y, progresivamente, se hace más consciente para ser verbalizada (fase simbólica).

Hay que considerar también la invarianza de la longitud por las transformaciones de "hacer-deshacer", es decir, transformaciones en las que el objeto se descompone en varias partes más pequeñas y, a continuación, se vuelve a recomponer. En tales transformaciones se pueden observar dos resultados:

- grandes objetos se transforman en grandes objetos
- el orden de la partes componentes no hace variar la longitud.

Tratamiento especial necesita la distancia ya que tanto psicológicamente como matemáticamente la longitud se entiende al considerar las dimensiones de un objeto (medida de un objeto), mientras que la distancia es una función que se refiere a dos objetos (distancia entre A y B).

Hay que señalar que la distancia está ligada a la rectitud la cual se puede sugerir de varias formas, ejemplos:

- * Enactivamente, el niño sigue sus brazos rectos
- * Icónicamente, al seguir las líneas horizontales y verticales de su entorno.
- * Simplemente, por la línea recta en esquemas y por la misma expresión "línea recta".

La medida de la longitud de un objeto se puede considerar como el cálculo de la distancia entre dos puntos límites de ese objeto.

6.12 Modelos para la enseñanza de las magnitudes

Son varios los modelos propuestos por distintos investigadores para llevar a cabo la enseñanza de las magnitudes, veamos algunos de ellos.

I. Modelo de BRIGHT

Se trata de un programa de estimación de la longitud que debe de cumplir los cinco pasos siguientes:

- Crear referentes con objetos familiares.
- Realizar estimaciones de longitudes.
- Practicar las ocho variantes de la estimación.
- Variar las actividades y las unidades.
- Mantener las habilidades adquiridas.

II. Modelo de LIEBECK

Este modelo está pensado para las primeras edades. Propone

- Uso de unidades físicas de longitud, como construir filas de lápices o de regletas en las que se aprecien las marcas. Para que el niño exprese la cantidad (esta hilera tiene tres lápices)
- Trabajo con números, por ejemplo, hacerles expresar que un tren de cuatro lápices (iguales) es más largo que un tren de tres lápices (cuatro es mayor que tres) los dos juntos forman un tren de siete lápices.
- Trabajo de la aproximación, un tren de cuatro palillos y "algo" unido a un tren de cuatro palillos y "algo" pueden formar un tren de ocho sustituyendo los "algo" por otro palillo.
- Uso de longitudes invisibles y unidades también invisibles, medir con palmos o pasos una distancia sin ver la hilera la cual tendrán que imaginarla.
- Estimar prestando atención al significado de los números.
- Usar correctamente las reglas graduadas, los niños enfocan su atención sobre las calibraciones y no sobre los espacios entre ellas que reemplazan a la unidad física previamente usada.
- Medir perímetros, por ejemplo, colocando una cuerda alrededor de los objetos, lo cual conlleva a la conservación de la longitud por parte del niño y haber asumido la transitividad.

III. Modelo de INSKEEP

En este modelo se secuencian las actividades que se deben de realizar atendiendo a cada uno de los principios de que consta:

- Percepción de la longitud
- Comparación de longitudes mediante actividades táctiles y visuales.
- Medir con unidades no estandarizadas: partes del cuerpo y objetos asequibles.
- Medir con unidades estándar.
- Enseñar el sistema internacional de medida.
- Experimentar seguridad en las actividades.
- Adquisición de precisión y efectividad en las tareas de medición.
- Comprobar la utilidad práctica de las tareas de medición.
- Leer escalas e instrumentos.
- Comprobar el carácter aproximado de la medida.
- Realizar interpretaciones de medidas.
- Realizar tareas de medición con frecuencia.

Este puede ser un modelo apropiado para los cursos de primaria completándose con algún apartado del modelo anterior como por ejemplo en el aspecto de la estimación. Los primeros puntos pueden ser aprovechados en la formación infantil.

IV. Modelo de DIENES Y GOLDING

Consta de una colección de juegos que conducen a la comprensión de la medida de longitudes. Se distinguen los siguientes apartados en los juegos:

- Conceptuales
- Ordenación por tamaños
- Evaluación de distancias
- Introducción de unidades arbitrarias
- Presentación de unidades legales
- Empleo de varias unidades distintas en la misma medida
- Diferentes enunciados de una misma medida
- Medir con un mínimo de unidades
- Cambios de unidad.

Algunos de estos juegos son adecuados para introducirlos en la infancia.

V. Modelo de GIL, MORENO Y OLMO

Consta de tres partes con los siguientes contenidos: construcción de la magnitud longitud, medida de la magnitud longitud, interiorización de la medida.

El contenido de la construcción de la magnitud longitud está formado por los siguientes apartados:

- Manipulación
- Apreciación de la cualidad en sus distintas variantes

- Trabajo con comparaciones "más que", "menos que", "tantos como"
- Clasificación y formación de cantidades
- Adición de cantidades
- Orden de cantidades.

Respecto a la medida de la magnitud longitud se distingue:

- Necesidad de un intermediario
- Elección de una unidad de medida según la secuencia: corporal, entorno familiar, entorno escolar, entorno social.
- Necesidad de una unidad universal
- Presentación de las unidades del S.M.D.
- Uso de la reglas y otros instrumentos de medida
- Reconocimiento y uso del carácter aproximado de la medida.

Por lo que se refiere a la interiorización de la medida se consideran los siguientes apartados:

- Búsqueda de referentes
- Práctica de estimaciones

Se recomienda el trabajo en equipo y los comentarios con los compañeros como forma de enriquecimiento de los conocimientos y el refuerzo de habilidades.

Sugerencia para trabajar siguiendo este modelo.

A) *Construir la magnitud*

A través de juegos y actividades dirigidas o no, y construcciones el niño puede tomar contacto con el material que va a utilizar (regletas Cuissner, palillos u otros)

Centrar la atención en aquella cualidad del objeto que resalte la longitud haciendo consideraciones sobre pares de objetos comprobando si son distintos o iguales respecto a la cualidad considerada. Posteriormente los alumnos buscarán objetos de aproximadamente la longitud de uno dado.

Atendiendo exclusivamente a la cualidad escogida se desarrolla la posibilidad de comparación utilizando los términos "mas que", "menos que" y "tanto como". Hay que trabajar a su vez los pares de adjetivos: largo-corto, ancho-estrecho, alto-bajo, cerca-lejos. Las comparaciones se efectúan según la secuencia: objeto de referencia corporal, del entorno familiar, y del entorno social; distinguiendo además tres etapas de comparación:

I) perceptiva dual.

II) con modificación de uno de los objetos que se comparan (fraccionar, mover...).

III) comparación perceptiva de varios objetos pasando por la seriación.

Cada etapa debe reconocerse según los verbos: comparar, reconocer, construir (buscar), por lo que hay posibilidad de realizar un gran número de actividades. Ejemplo: Se trata de realizar una

transformación que llamamos "mover", con un referente corporal "pierna", utilizando como variante de la magnitud longitud el par de adjetivos corto-largo y el criterio comparativo "tanto como".

Se recorrerán las etapas anteriores:

Comprobar: Al mover mi brazo izquierdo es tan largo como cuando está quieto.

Reconocer: Mi brazo es tan largo cuando lo muevo que cuando lo tengo quieto.

Construir: Una varilla que pueda moverse con mi brazo y que sea tan largo como él.

Inventar: Objetos que puedan, o no, moverse y que sean tan largos como mi brazo.

Se conduce a la suma de cantidades de la cualidad considerada haciendo ver la independencia del representante tomado.

Se ordenan las cantidades de magnitud y se finaliza con un conjunto de datos de la vida real.

B) *Medida de la magnitud*

Dadas dos cantidades de magnitud que no pueden compararse directamente, llamamos intermediario a un objeto que permite compararlas. De aquí que los objetos que se tomen para realizar estas actividades han de ser no comparables directamente.

Elección de una unidad de medida según la secuencia: corporal, entorno familiar, entorno escolar, entorno social; necesidad de una medida universal.

Los dos apartados anteriores comprenden actividades que están encaminadas a adquirir la noción de medida. Como ejemplos se citan las siguientes:

- Cortar tiras de papel iguales y engarzarlas.
- Construir una banda de papel trasladando la unidad.
- Construir una banda con cubos de 1 cm.
- Juego de "Yo espero" o "Yo pienso"
- Comparar una regla construida con una estándar
- Efectuar mediciones con una regla.

La presentación del S.M.D. se hace como parte de un proceso más general: se parte de una unidad base, el metro, reconociéndolo en uso real. Posteriormente aparece la necesidad de una unidad más pequeña y se introduce el dm y el cm, interrelacionando las medidas. Se favorece de este modo la referencia al sistema de base diez. Ejemplos de actividades:

- Manipular las unidades, medir con ellas, buscar objetos cuya medida sea dicha unidad.
- Cambiar la unidad repitiendo el esquema anterior.
- Relacionar distintas unidades.
- Usar la notación decimal.

C) Interiorización de la medida

Se tratará de desarrollar la habilidad de estimar considerándose dos tipos de actividades: dado el objeto, estimar su medida, y dada una medida buscar un objeto que la posea, como ejemplos veamos:

- Estimar el largo de la clase estando el metro a la vista de los alumnos.
- Estimar el ancho del encerado, estando el metro ausente.
- Estimar el largo de un autobús estando los niños en el interior del edificio y el metro a la vista.
- Estimar la distancia a un edificio conocido de todos.
- Indicar de entre una colección de segmentos dibujados cuál mide 10 cm en presencia del cm.
- Entre los segmentos dibujados decir cuál mide 50 cm.
- Nombrar varios objetos y preguntar cuantos miden 1 metro en presencia del metro.
- Hacer una lista de varios objetos señalando los que miden 1 dm.
- Realizar estimaciones al aire libre.
- Estimar curvas y distancias.

6.13.- Actividades

- Sugerimos a continuación algunas tareas, en relación con la medida.
- Comparar longitudes (largo, ancho, alto) con una longitud familiar (el cuerpo, u otros objetos).
 - Comparar por contrastes (por ejemplo: largo-corto. grueso-delgado, pequeño-grande...)
 - Comparar por pares primero y un número pequeño de elementos después cantidades de magnitud, viendo si son iguales o una es mayor que la otra.

 - Inventar disposiciones de elementos por orden de longitud.
 - Evaluar distancias. (lanzar la pelota lejos de la caja o cerca de un aro ...).
 - Evaluar longitudes (tomar un cordel bastante largo para rodear una caja, u otro objeto).
 - Partir en dos partes iguales (una cuerda, un trozo de papel).
 - Comparar los contenidos (agua, arena) de varios recipientes.
 - Experimentar las nociones de "lleno" y de "vacío", "no demasiado", "demasiado", "llenar", "vaciar".
 - Comparar por oposición el peso de diversos objetos y descubrir las nociones de pesado, ligero, más pesado que..., más ligero que...
 - Reagrupar por evaluación intuitiva los objetos pesados, los objetos ligeros...
 - Utilizar instrumentos de medida arbitrarios para verificar longitudes, anchuras, alturas, pesos, duraciones...

BIBLIOGRAFIA

- ALSINA C, BURGUES C. FORTUNY J. (1987). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Síntesis. Madrid.
- BARODY A. 1988. *El pensamiento matemático de los niños*. Visor. Madrid
- BERTOLINI P. Y FRABBONI F. (1990) *Nuevas orientaciones para el currículum de la Educación Infantil (3-6)*. Paidós. Barcelona
- BROWN G. y DESFORGES C. (1984). *La Teoría de Piaget: Estudio crítico*. Anaya/2. Madrid.
- CASTORINA J. PALAU G. (1982). *Introducción a la lógica operatoria de Piaget*. Paidós. Barcelona.
- CASTRO E. RICO L. CASTRO E. (1987). *Números y operaciones*. Síntesis. Madrid.
- CHAMORRO C. BELMONTE J. (1988). *El problema de la Medida*. Síntesis. Madrid.
- DIENES Z. (1986). *Las seis etapas del aprendizaje en matemáticas*. Teide. Barcelona
- DIENES Z. GOLDING E. (1971). *Exploración del Espacio y práctica de la Medida*. Teide. Barcelona.
- DIENES Z. y GOLDING E. (1969). *La geometría a través de las transformaciones*. Teide. Barcelona
- DIKSON L. BROWN M. GIBSON O. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Labor. M.E.C. Madrid.
- FUSON K. (1980). *The Counting Word Sequence as a Representational Tool*. En R. Karplus (ed.). *Proceeding of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley.
- FREUDENTHAL H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel Publishing Company. Dordrecht.
- GARCIA N. (1986). *Quiero aprender, dame una oportunidad*. Gedisa. Barcelona.
- GARZON M.; MARTINEZ S. *Una propuesta de trabajo: La práctica de los rincones con niños de 2 a 6 años*. M.E.C.
- GUTIERREZ A 1991. *Area de conocimiento. Didáctica de la Matemática*. Síntesis. Madrid
- INHELDER B. y PIAGET J. (1985). *De la Lógica del niño a la Lógica del adolescente*. Paidós. Barcelona.
- JUNTA DE ANDALUCIA. (1988). *Proyecto de decreto de Educación Infantil*.
- JAULIN-MANNONI F. (1985). *La Reeducción del Razonamiento Matemático*. Visor. Madrid.
- KAMII C. y col. 1981. *La teoría de Piaget y la educación preescolar*. Visor. Madrid.
- KAMII C. (1985). *El niño Reinventa la Aritmética*. Visor. Madrid.
- LAWTON J. y HOOPER F. (1983). *Alternativas a Piaget*. Pirámide. Madrid.
- LOVELL K. (1984). *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños*. Morata. Madrid.
- M.E.C. (1987). *Informe Piagetiano. Proyecto 0-6*. Madrid.
- M.E.C. (1988). *Diseño Curricular Base Para la Educación Infantil*. Madrid.
- MOYLES J. 1990. *El juego en la educación infantil y primaria*. Morata. Madrid.

- MUJIMA 1983. *Psicología de la edad preescolar*. Visor. Madrid.
- MUNTANER J. (1987). La Evolución del Espacio Topológico según la teoría de Piaget. ICE de la Universidad de Islas Baleares.
- ORIENTACIONES PEDAGOGICAS. *Educación preescolar*. Folletos El Magisterio Español. Madrid.
- OLMO M^a. MORENO M. GIL F. (1989). *Superficie y Volumen*. Síntesis. Madrid.
- ORTON A. *Didáctica de la Matemática*. Morata. M.E.C. Madrid.
- PIAGET J. E INHELDER B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. PUF. París.
- PIAGET J. (1971). *La Epistemología del espacio*. Ateneo. Buenos Aires.
- PIAGET J. (1973). *La Géométrie spontanée de l'enfant*. PUF. París.
- PIAGET J. y INHELDER B. (1975). *Génesis de las Estructuras Lógicas Elementales. Clasificaciones y Seriaciones*. Guadalupe, Buenos Aires.
- PINOL-DOURIEZ M. (1979). *La Construcción del Espacio en el Niño*. Pablo del Rio. Madrid.
- PROGRAMAS RENOVADOS de Educación Preescolar y ciclo inicial. Escuela Española. Madrid.
- RICO L. y SIERRA M. 1997. *Antecedentes del currículo de matemáticas*. En L. Rico (edt.). Bases teóricas del currículo de Matemáticas en Educación Secundaria. Síntesis. Madrid
- SAA. M^a.D. 2002. *Las Matemáticas de los cuentos y las canciones*. EOS. Madrid
- SAEGRIN G. (1961). L'Epistemologie de l'espace. Sexto Simposio del Centro Internacional de Epistemología Genética.
- SAUVY J. y SAUVY S. (1980). El Niño ante el Espacio. Pablo del Rio. Madrid.
- SKEMP R. (1980). *Psicología del Aprendizaje de las Matemáticas*. Morata. Madrid.
- TAVERNIER, R. (1984) *La escuela antes de los 5 años*. Martínez Roca. Barcelona
- VAN DE VALLE. *The Early Development of Number Relations*. Arithmetic Teacher nº 35.
- VAYER P. (1977). El niño frente al mundo. Científico-Médica. Barcelona.
- VAYER P. (1984). El diálogo corporal. Científico-Médica. Barcelona.