INTERNATIONAL ACADEMY OF EDUCATION

INTERNATIONAL BUREAU OF EDUCATION

Enseñanza de las fracciones

por Lisa Fazio y Robert Siegler

SERIES PRÁCTICAS EDUCATIVAS-22

INTERNATIONAL ACADEMY OF EDUCATION

United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization

IBE International Bureau of Education

Academia Internacional de Educación

La Academia Internacional de Educación (IAE) es una asociación científica sin fines de lucro que promueve la investigación educativa, su difusión y la implementación de sus contenidos. Fundada en 1986, la Academia se dedica a fortalecer las contribuciones de la investigación científica, resolviendo problemas críticos de la educación en todo el mundo, y a ofrecer una mejor comunicación entre los responsables de políticas, investigadores y profesionales.

Su sede se halla en la Real Academia de Ciencias, Literatura y Artes en Bruselas, Bélgica, y su centro de coordinación se encuentra en la Universidad Curtin de Tecnología en Perth, Australia.

El objetivo general de la IAE es fomentar la excelencia académica en los campos de la educación.

Para mayor información, consulte el sitio web de IAE, en:

http://www.iaoed.org

IBE/2011/ST/EP22

Prefacio

El presente trabajo, titulado “Enseñanza de las fracciones”, ha sido preparado para su inclusión en la Serie Prácticas Educativas, una publicación desarrollada por la Academia Internacional de la Educación (IAE). Como parte de su misión, la Academia Internacional de Educación proporciona una síntesis oportuna de investigación realizada en temas educativos de importancia internacional. Los textos son publicados y distribuidos por la Oficina Internacional de Educación de UNESCO (IBE) y la Academia. Este es el vigésimo segundo de una serie de folletos sobre prácticas educativas que han demostrado mejoras en el aprendizaje.

Los autores de este folleto son Lisa Fazio y Robert Siegler. Lisa Fazio es una investigadora con post-doctorado en la Universidad de Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Estados Unidos. Su investigación se centra en cómo adultos y niños aprenden de información nueva y cómo corrigen errores en su conocimiento. Actualmente, Fazio se halla inmersa en una investigación acerca de cómo los niños entienden números enteros y la magnitud de fracciones. Robert Siegler es profesor de Psicología Cognitiva de Teresa Heinz y se lo conoce ampliamente por su investigación sobre el pensamiento de niños, resolución de problemas y razonamiento. Ha investigado por muchos años cómo los niños aprenden matemática y cómo la comprensión teórica del desarrollo matemático puede ser aplicada a la mejora del aprendizaje matemático, particularmente en el caso de pre-escolares que proceden de estratos de bajos recursos económicos. El profesor Siegler es un miembro de la Academia Nacional de Educación de los Estados Unidos, fue miembro del Panel Asesor Nacional de Matemática desde 2006 a 2008, y dirigió el Panel Guía para la Práctica de Fracciones para el Departamento de Educación de los Estados Unidos en 2009–2010.

La Academia agradece al profesor Siegler y a la doctora Fazio por la planificación, redacción y revisión del presente folleto cuyo contenido está basado en un informe del Instituto de Ciencias de la Educación del Departamento de Educación de los Estados Unidos, titulado *El desarrollo eficaz de la instrucción de fracciones: Una guía práctica* (Siegler et al.,2010). Comprender fracciones es una de las más importantes habilidades que deben desarrollarse en el plan de estudios de matemática y es esencial para comprender el álgebra, la geometría y otras áreas de la matemática. Sin embargo, las fracciones han demostrado ser muy difíciles de entender para la mayoría de estudiantes del mundo. Esperamos que el presente manual proporcione a los profesores información útil acerca de cómo facilitar la comprensión conceptual de fracciones de sus estudiantes.

Los oficiales de la Academia Internacional de Educación están conscientes de que esta publicación está sustentada en la investigación que se ha realizado principalmente en países económicamente avanzados. Este folleto, sin embargo, se centra en las dificultades que tienen los estudiantes con las fracciones, que por lo general parecen repetirse en todo el mundo. No obstante, la recomendación de este texto necesariamente debe ser evaluada con referencia a las condiciones locales y, en consecuencia, adaptarse a ellas. En cualquier escenario educativo, las guías para la práctica requieren aplicaciones sensibles y una continua evaluación de su eficacia.

STELLA VOSNIADOU
Editor, Series Prácticas Educativas
National and Kapodistrian University de Atenas, Grecia

Títulos anteriores de la serie 'Prácticas educativas'

1. Teaching *by Jere Brophy. 36 p.*
2. Parents and learning *by Sam Redding. 36 p.*
3. Effective educational practices *by Herbert J. Walberg and Susan J. Paik. 24 p.*
4. Improving student achievement in mathematics *by Douglas A. Grouws and Kristin J. Cebulla. 48 p.*
5. Tutoring *by Keith Topping. 36 p.*
6. Teaching additional languages *by Elliot L. Judd, Lihua Tan and Herbert J. Walberg. 24 p.*
7. How children learn *by Stella Vosniadou. 32 p.*
8. Preventing behaviour problems: What works *by Sharon L. Foster, Patricia Brennan, Anthony Biglan, Linna Wang and Suad al-Ghaith. 30 p.*
9. Preventing HIV/AIDS in schools *by Inon I. Schenker and Jenny M. Nyirenda. 32 p.*
10. Motivation to learn *by Monique Boekaerts. 28 p.*
11. Academic and social emotional learning *by Maurice J. Elias. 31 p.*
12. Teaching reading *by Elizabeth S. Pang, Angaluki Muaka, Elizabeth B. Bernhardt and Michael L. Kamil. 23 p.*
13. Promoting pre-school language *by John Lybolt and Catherine Gottfred. 27 p.*
14. Teaching speaking, listening and writing *by Trudy Wallace, Winifred E. Stariha and Herbert J. Walberg. 19 p.*
15. Using new media *by Clara Chung-wai Shih and David E. Weekly. 23 p.*
16. Creating a safe and welcoming school *by John E. Mayer. 27 p.*
17. Teaching science *by John R. Staver. 26 p.*
18. Teacher professional learning and development *by Helen Timperley. 31 p.*
19. Effective pedagogy in mathematics *by Glenda Anthony and Margaret Walshaw. 30 p.*
20. Teaching other languages *by Elizabeth B. Bernhardt. 29 p.*
21. Principles of instruction *by Barak Rosenshine. 31 p.*

Estos títulos pueden descargarse en los sitios web de IEA (http://www.iaoed.org) o IBE (http://www.ibe.unesco.org/ publications.htm). Copias impresas pueden solicitarse a: IBE, Publications Unit, P.O. Box 199, 1211 Ginebra 20, Suiza. Por favor, tenga en cuenta que varios títulos ahora están fuera de impresión, pero pueden ser descargados de los sitios de IEA y IBE.

Tabla de Contenidos

Esta publicación fue producida en 2010 por la Academia Internacional de la Educación (IAE), Palais des Académies, 1, calle Ducale, 1000 Bruselas, Bélgica, y la Oficina Internacional de Educación (IBE), P.O. Box 199, 1211 Ginebra 20, Suiza. Está disponible de forma gratuita y puede ser libremente reproducida y traducida a otros idiomas. Por favor, envíe una copia de cualquier producción que reproduzca este texto en su totalidad o en parte a IAE y a IBE. Esta publicación también está disponible en la Internet. Visite la sección 'Publicaciones', 'Series Prácticas Educativas' en:

http://www.ibe.unesco.org

Impreso en 2013 por Mantis Comunicación, Quito, Ecuador.
Versión en español realizada por VVOB, Quito, Ecuador

Introducción

Estudiantes de todo el mundo tienen dificultades en el aprendizaje de fracciones. En muchos países el estudiante promedio jamás obtiene un conocimiento conceptual de fracciones. Por ejemplo, en una prueba a nivel nacional solamente 50% de estudiantes americanos del 8vo grado ordenaron correctamente tres fracciones de menor a mayor (Concejo Nacional de Profesores de Matemática, 2007). Aún en países donde la mayoría de los estudiantes obtienen una comprensión conceptual razonablemente buena, como Japón o China, las fracciones son consideradas un tema difícil. Una razón de su dificultad es que, en su primera lección, las fracciones enfrentan a los estudiantes ante una premisa que señala que muchas propiedades son ciertas para números enteros pero no son verdaderas para todos los números. Por ejemplo, con fracciones, las multiplicaciones no siempre conducen a una respuesta mayor que los multiplicandos; la división no siempre lleva a una respuesta menor al dividendo; y los números no tienen sucesores únicos. Superar la creencia de que las propiedades son verdaderas para números enteros pero que no lo son para todos los números, es un gran reto. Aún en la secundaria muchos estudiantes no comprenden que hay números infinitos entre dos fracciones (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Sin embargo, comprender fracciones es esencial para el aprendizaje de álgebra, geometría y otros ámbitos de la matemática superiores.

Esta guía de investigación ofrece sugerencias para profesores y administradores que buscan mejorar la instrucción de fracciones en sus aulas o escuelas. Las recomendaciones están basadas en la publicación *Desarrollando la instrucción efectiva de fracciones. Una guía práctica* (Siegler et al., 2010), que contiene una síntesis de evidencia de investigación producida por el Instituto de Ciencias de la Educación del Departamento de Educación de los Estados Unidos. El panel que produjo el reporte incluyó profesores de matemática, matemáticos y psicólogos. Las recomendaciones están basadas en la investigación científica, aunada a la experiencia y los conocimientos de exitosos educadores de matemática.

Las recomendaciones incluyen una variedad de actividades en el aula y estrategias de enseñanza, todas ellas enfocadas a mejorar la comprensión conceptual de fracciones por parte del estudiante. Definimos el conocimiento conceptual de fracciones como el conocimiento del concepto de fracciones, sus magnitudes en relación con las cantidades físicas y la comprensión de los procedimientos aritméticos con fracciones que están justificados de forma matemática y por qué producen las respuestas obtenidas. Ese conocimiento conceptual puede ser contrastado con los procedimientos del conocimiento, es decir la habilidad de ejecutar una serie de pasos para resolver un problema. Por ejemplo, un estudiante podría dominar el conocimiento de los procedimientos para resolver problemas de división de fracciones, a través de la inversión del divisor y multiplicando el divisor invertido por el dividendo, pero a la vez puede carecer del conocimiento conceptual que explica por qué este procedimiento es matemáticamente justificado y por qué se produce el resultado obtenido.

Las dificultades de los estudiantes con fracciones usualmente se derivan de una falta de comprensión conceptual. Muchos estudiantes ven a las fracciones como símbolos sin sentido o miran el numerador y denominador como números separados, en lugar de comprenderlos como un todo unificado. Las recomendaciones presentadas aquí están diseñadas para asegurar que los estudiantes entiendan las fracciones y puedan resolver con éxito problemas computacionales relacionadas a ellas.

La guía comienza con ideas que introducen conceptos de fracciones en la guardería y en la escuela primaria temprana, y continúa con actividades y estrategias de enseñanza diseñadas para ayudar a estudiantes mayores para que comprendan las magnitudes de las fracciones y los procedimientos de cálculo que involucren a éstas. Luego, examina mecanismos que pueden ayudar a los estudiantes a utilizar fracciones para resolver problemas de tasa, relación y proporción. La última recomendación sugiere métodos que incrementen el conocimiento conceptual de fracciones por parte de los docentes. Los docentes que poseen un firme conocimiento de fracciones, junto con el conocimiento de los errores más comunes y conceptos erróneos de los estudiantes, son esenciales para la mejora del aprendizaje de los estudiantes acerca de las fracciones. A lo largo de la guía, utilizamos el término "fracción" para abarcar todas las formas de expresar los números racionales, incluyendo decimales, porcentajes y fracciones negativas.

Lectura sugerida: Hoffer et al., 2007; Moseley, Okamoto & Ishida, 2007; Mullis et al., 1997; Siegler, Thompson & Schneider, 2011.

1. Introducción temprana a las fracciones

La introducción a las fracciones a temprana edad en los niños se la hace mediante la construcción de la comprensión informal sobre nociones de compartir y de proporcionalidad

Resultados de la investigación

Los niños pequeños comprenden el concepto de reparto equitativo. Niños de cuatro años pueden distribuir un conjunto de objetos en partes iguales, entre un número pequeño de destinatarios (por ejemplo, doce galletas compartidas entre tres personas). A la edad de cinco años, los niños pueden compartir un único objeto entre varios destinatarios (por ejemplo, una barra de chocolate). Adicionalmente, los niños pequeños tienen un conocimiento temprano de relaciones proporcionales. Por ejemplo, a la edad de seis, los niños pueden hacer coincidir proporciones equivalentes representadas por diferentes figuras geométricas o formas cotidianas (por ejemplo, 1/2 de pizza es igual que 1/2 de una caja de chocolates). Este conocimiento temprano puede ser utilizado para introducir el concepto de fracciones, conectando el conocimiento intuitivo de los estudiantes a conceptos de fracciones formales.

Las actividades que se presentan a continuación también pueden utilizarse para desarrollar la comprensión de los estudiantes al ordenar y relacionar la equivalencia entre fracciones. Además, las actividades introducen a los estudiantes a dos de las interpretaciones básicas de las fracciones. El compartir actividades puede ser explicado en términos de división-dividiendo. Por ejemplo, compartir ocho caramelos en cuatro grupos iguales; o pueden ser presentados en términos de relaciones: si tres galletas son compartidas por dos niños, la relación de las galletas a los niños es de 3:2. Las fracciones son inculcadas, por lo general, en el primero o segundo grado, pero las actividades que se sugieren a continuación pueden ser aplicadas en preescolar o el jardín de niños.

Participación equitativa en las actividades

Los docentes deben comenzar la introducción con simples actividades de intercambio que involucren la división de un conjunto de objetos en partes iguales, entre un grupo reducido de personas. Es importante que esos objetos se puedan repartir de manera equitativa entre los destinatarios y que no dejen partes restantes (por ejemplo, seis galletas compartidas por dos personas). El docente puede describir el número de objetos y el número de destinatarios, y el estudiante puede determinar cuántos objetos recibirá cada participante.

Los estudiantes deben ser alentados a utilizar objetos concretos, dibujos u otras representaciones que los ayuden a resolver los problemas. Los docentes deben hacer hincapié en que cada receptor debe recibir un número igual de objetos del conjunto repartido. Mientras el conocimiento de los niños mejora, tanto el número de objetos a ser compartidos como el número de destinatarios pueden aumentar.

A continuación, los estudiantes pueden intentar resolver problemas que implican dividir objetos en partes más pequeñas. Por ejemplo, si dos personas comparten una galleta, cada persona recibe 1/2 galleta. En lugar de preguntar cuántos objetos recibirá cada persona, la pregunta será cuánto de un objeto debe tener cada persona. Los docentes pueden comenzar a compartir un único objeto entre dos o tres receptores, y luego pasar a compartir varios objetos. Una pregunta temprana podría implicar cuatro personas compartiendo una manzana, mientras que una pregunta más avanzada podría involucrar cuatro personas compartiendo dos manzanas. Se recomienda que los docentes inicien con actividades de intercambio que permitan a los niños utilizar una estrategia de reducción a la mitad (dividiendo un objeto por la mitad, dividir las nuevas piezas por la mitad, etc.), antes de pasar a actividades compartidas que obliguen a los niños a dividir objetos en tercios o quintos. Los docentes también pueden empezar a introducir los nombres formales de fracciones (por ejemplo, una mitad, un tercio, un cuarto) y permitir que los niños marquen sus dibujos con dichos nombres.

Actividades de intercambio pueden ser utilizadas para ayudar a los estudiantes a entender los tamaños relativos de las fracciones. Por ejemplo, al compartir un objeto entre dos, tres, cuatro o cinco personas, los estudiantes pueden ver cómo se incrementa el número de las personas que comparten y cómo disminuye el tamaño de la pieza que recibe cada persona. La idea también puede estar vinculada a la notación de fracciones, de tal manera que los estudiantes aprenden que 1/4 es menor que 1/3, que a su vez es menor que 1/2.

Actividades de razonamiento proporcional

Los docentes pueden crear en los estudiantes la comprensión informal de tamaño relativo para desarrollar conceptos tempranos de razonamiento proporcional. En el comienzo, los docentes deben presentar problemas que animen a los estudiantes a pensar sobre relaciones proporcionales cualitativas entre pares de objetos. Por ejemplo, el gran oso va a la cama grande y el oso pequeño va a la cama pequeña. Otro problema podría ser determinar cuántos niños se necesitan para equilibrar un 'sube y baja' con un adulto en un lado, frente a balancear el 'sube y baja' con dos adultos en uno de los lados. Los estudiantes también pueden mezclar soluciones más fuertes o más débiles de colorante de alimentos con el fin de comparar diferentes proporciones de agua y colorante para alimentos.

Lectura Sugerida: Empson, 1999; Frydman & Bryant, 1988; Streefland, 1991.

2. Las fracciones son números

Los estudiantes necesitan comprender que las fracciones son números con magnitudes.

Resultados de la investigación

Las fracciones a menudo se enseñan utilizando la idea de que representan parte de un entero. Por ejemplo, un cuarto es una parte de un entero que fue dividido en cuatro partes. Esta interpretación es importante, pero no logra transmitir información vital que indica que las fracciones son números con magnitudes. Como tal, las fracciones pueden ser ordenadas de menor a mayor o tener un valor equivalente *(1/2 = 2/4 = 3/6)*. Los niños que sólo comprenden una parte del enfoque de las fracciones a menudo cometen errores, como decir que 4/3 no es un número por que una persona no puede recibir cuatro partes de un objeto que es dividido en tres partes. El error común de intentar sumar fracciones agregando primero los numeradores y luego los denominadores se debe, en parte, a no entender que las fracciones son números con magnitudes. El confiar solamente en una comprensión parcial de las fracciones, a menudo deja a los niños confundidos en cuanto al significado de las fracciones mayores a 1 y al significado de las fracciones negativas.

Una manera eficaz de asegurar que los estudiantes entiendan que las fracciones son números con magnitudes, es utilizando rectas numéricas durante la instrucción. Las rectas numéricas pueden ser aplicadas a todas las fracciones y ellas ilustran que cada fracción corresponde a una cierta magnitud.

Actividades de medición

Los docentes pueden utilizar las actividades de medición para ayudar a los estudiantes a entender que las fracciones son números. Al medir objetos, los estudiantes pueden aprender que las fracciones permiten una medición más precisa que los números enteros solamente. Una actividad práctica sería utilizar tiras de fracciones para medir diferentes objetos en el aula. Los estudiantes comienzan con una tira de papel o una tarjeta que represente una unidad y utilizan esa tira para medir un objeto. Cuando la longitud de un objeto no es igual a un número entero de tiras, el docente puede pasar tiras que representen 1/2, 1/4, 1/3 u otras fracciones de un entero. Por ejemplo, para medir un lápiz un estudiante puede utilizar dos tiras enteras y media tira. Los estudiantes deben darse cuenta de que el tamaño del objeto no cambia, pero que pueden medirlo con mayor precisión mediante el uso de tiras más cortas o la combinación de tiras más cortas y tiras enteras, en lugar de utilizar únicamente las tiras de tamaño entero. Los docentes que utilizan tiras de fracciones deben destacar que el tamaño del objeto se define por el tamaño de la tira original (la unidad). Por ejemplo, si la clase inició con tiras unitarias largas, entonces cada objeto deberá ser una fracción más larga que si hubiese iniciado con tiras unitarias más cortas.

Rectas numéricas

Los docentes deben pedir a los estudiantes que encuentren y comparen fracciones en rectas numéricas. Al colocar diferentes fracciones en la recta numérica, los estudiantes pueden comparar las magnitudes y ver que algunas fracciones, como 3/4 y 6/8, son equivalentes. Los docentes pueden comenzar con rectas numéricas que contengan fracciones marcadas, como por ejemplo una recta numérica de 0 a 1 con octavos marcados. Este paso adicional eliminará dificultades que los estudiantes puedan tener al segmentar la recta numérica de manera adecuada. Se debe pedir a los estudiantes que coloquen tanto las fracciones cuyas ubicaciones estén marcadas (por ejemplo, 6/8), como las fracciones cuyo denominador es un factor o múltiplo de la fracción unitaria marcada en la recta numérica (por ejemplo, 3/4, 12/16). También es importante incluir fracciones que sean equivalentes a números enteros, por ejemplo 8/8, de modo que los estudiantes entiendan que los números enteros también puede escribirse como fracciones.

Para ayudar a los estudiantes a entender y comparar fracciones con diferentes denominadores, una recta numérica puede ser marcada con una unidad por encima de la recta y otra por debajo. Por ejemplo, si se pide a los estudiantes comparar 5/5 y 7/8, el docente puede dividir la recta numérica en quintos sobre la recta y en octavos debajo la recta. Mientras los estudiantes avanzan, este apoyo adicional puede ser removido y los estudiantes pueden utilizar rectas numéricas con etiquetas mínimas como, por ejemplo, sólo los puntos finales etiquetados más la mitad de la línea.

También pueden usarse rectas numéricas para ampliar el concepto de fracciones que tienen los niños e incluir los de fracciones negativas y fracciones con un valor mayor a 1, junto con decimales y porcentajes. Por ejemplo, se puede pedir a los estudiantes que coloquen fracciones como 14/3 en una recta numérica que vaya de 0 a 5 con cada número entero marcado, o colocar fracciones positivas y negativas en una recta con -1 a mano izquierda, +1 a la derecha y 0 en el medio. Una estrategia similar puede ser utilizada para ayudar a los niños a conectar conceptos de fracciones, decimales y porcentajes. Los estudiantes pueden colocar una variedad de números como 3/5, 0.25 y 33% en la misma recta de 0 a 1. Con el fin de hacer hincapié en que las fracciones y decimales representan la misma magnitud, los estudiantes podrían colocar fracciones y sus decimales equivalentes en la misma recta numérica.

Finalmente, las rectas numéricas pueden ser útiles para demostrar la idea de densidad de la fracción. Una característica en que difieren las fracciones respecto de los números enteros, es que hay un número infinito de fracciones entre otras dos fracciones. Este concepto, que puede ser difícil de entender, se puede ilustrar utilizando rectas numéricas. Por ejemplo, los estudiantes comienzan con una recta numérica que representa un número entero (de 0 a 1, por mencionar un caso) y dividen la recta en dos mitades. Luego, pueden continuar dividiendo las mitades en mitades creando cuartos, luego octavos, luego décimo sextos, y así sucesivamente. De esta manera, los estudiantes pueden aprender que cualquier fracción es susceptible de ser fraccionada aún en fracciones más pequeñas.

Lectura sugerida: Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001; Siegler, Thompson & Schneider, 2011; Stafylidou & Vosniadou, 2004.

3. Materiales didácticos y representaciones visuales de las fracciones

> Estos recursos pueden ayudar a desarrollar la comprensión conceptual de los procedimientos de cálculo.

Resultados de la investigación

A menudo, los estudiantes reciben enseñanzas sobre los procedimientos de cálculo sin una explicación adecuada de por qué funcionan los procedimientos. Sin embargo, las investigaciones han demostrado una correlación positiva entre la comprensión conceptual de fracciones por parte del estudiante y su éxito al usarla para la resolución de problemas. Niños que comprenden por qué un denominador común es necesario en la adición de fracciones, serán más propensos a recordar el procedimiento correcto que aquellos niños que no comprenden por qué los denominadores comunes son obligatorios. Por lo tanto, los docentes deben enfocarse en desarrollar la comprensión conceptual junto con la fluidez procedimental. Una forma de mejorar la comprensión conceptual es el uso de material didáctico manipulativo y la representación visual de las fracciones. Varios estudios han enseñado fracciones aritméticas utilizando representaciones visuales de fracciones que han demostrado efectos positivos en las habilidades computacionales de los estudiantes.

Suma y resta

Las representaciones visuales se pueden utilizar para ayudar a ilustrar la necesidad de denominadores comunes al sumar y restar fracciones. Por ejemplo, un docente puede exponer sumas utilizando fracciones de un objeto como 1/3 de un rectángulo y 1/2 de un rectángulo. Al colocar 1/3 del rectángulo y 1/2 del rectángulo dentro de un tercer rectángulo, el docente puede demostrar la suma aproximada. Luego, puede mostrar que 1/3 del rectángulo es igual a 2/6 y que 1/2 es igual a 3/6, y que la suma da exactamente 5/6 del rectángulo. Este tipo de demostración concreta puede ayudar a los estudiantes a entender por qué los denominadores comunes son necesarios al sumar y restar fracciones.

Multiplicación

Representaciones gráficas pueden ayudar a los estudiantes a entender cómo multiplicar fracciones, lo que involucra hallar una fracción de una fracción. Por ejemplo, para ilustrar 1/4 por 2/3, un estudiante puede iniciar con un rectángulo, dividirlo en tercios verticalmente y luego sombrear 2/3 del rectángulo con líneas verticales. Luego dividirá el rectángulo en cuartos con tres líneas horizontales y sombreará 1/4 del área ya sombreada con líneas horizontales. Al final, dos de los doce pequeños rectángulos estarán sombreados tanto horizontal como verticalmente, representando la respuesta como 2/12. Este procedimiento puede aplicarse para ilustrar que el producto de dos fracciones, son ambas menores a 1 y a la vez más pequeñas que cualquiera de las fracciones originales. También puede utilizarse para demostrar la necesidad de redefinir la unidad cuando se multiplican fracciones. Al principio, el niño trata el rectángulo como un entero sombreando 2/3 del área. Luego, el niño trata el área sombreada como un entero, examinando el número de rectángulos de igual tamaño dentro de 2/3 de la unidad que fueron sombreados, cuando 2/3 de la unidad fue dividida en cuartos. Finalmente, el niño vuelve a tratar la unidad como un entero y nota que dos de las doce unidades del entero fueron sombreadas en ambos sentidos.

División

Una forma de conceptualizar la división es pensar en cuántas veces puede el divisor estar presente en el dividendo. Por ejemplo 1/2 ÷ 1/4 es la misma pregunta que ¿cuántos 1/4 están en 1/2? Para ilustrar este tipo de divisiones se pueden utilizar tiras de fracciones. En el problema anterior, los estudiantes podrían contar con dos tiras de fracciones de igual longitud, una dividida en mitades y la otra en cuartos. De esta forma podrán descubrir cuántos 1/4 caben en 1/2. Esta actividad también se puede realizar utilizando rectas numéricas. Para ello, el docente dibujará una recta numérica con dos mitades marcadas encima de la recta y cuartos marcados debajo de la recta. Nuevamente, los estudiantes podrán ver que en 1/2 caben dos 1/4 .

Lectura sugerida: Hudson Hawkins, 2008; Nishida, 2008.

4. Estimación antes del cálculo

Se debe enseñar a los estudiantes a estimar las respuestas a los problemas antes de calcular las respuestas, de modo que puedan juzgar la razonabilidad de las respuestas calculadas.

Resultados de la investigación

Los errores que cometen muchos estudiantes con fracciones aritméticas pueden evitarse si estiman sus respuestas antes de intentar utilizar un algoritmo formal. La estimación de fracciones, sin embargo, no es fácil para muchos estudiantes. Al practicar la estimación, los estudiantes pueden mejorar sus conocimientos sobre magnitudes de fracciones y su comprensión de fracciones aritméticas. La estimación obliga a los estudiantes a pensar en sus respuestas y permite que éstos se enfoquen en el significado de sumar y multiplicar fracciones, en lugar de seguir una regla memorizada sin comprenderla.

Actividades en aula

Durante la resolución de problemas de fracciones aritméticas, se puede solicitar a los estudiantes que estimen la respuesta y expliquen su razonamiento antes de calcularla. Al comprobar que sus respuestas calculadas son razonables, los estudiantes pueden reconocer cuándo y cómo utilizaron un procedimiento de cálculo incorrecto o si cometieron un error al ejecutar el procedimiento de cálculo. Por ejemplo, un estudiante puede estimar que 1/2 + 1/3 debe ser mayor que 1/2 pero menor a 1, ya que 1/3 es menor que 1/2 y 1/2 + 1/2 = 1. Entonces el estudiante si calcula de manera incorrecta que 1/2 + 1/3 = 2/5, el docente puede señalar que la respuesta no puede ser correcta ya que 2/5 es menos que 1/2. A continuación, el docente puede animar al estudiante a determinar si la respuesta incorrecta es el resultado de una ejecución incorrecta del proceso o del uso de un procedimiento incorrecto y, si este último resulta ser el caso, el estudiante puede ser alentado a realizar el procedimiento correcto.

Estrategias de estimación con fracciones

Una estrategia de estimación es el uso de puntos de referencia que deben ser fracciones con las que los estudiantes se sientan cómodos, como 0, 1/2 y 1. Los estudiantes podrán decidir luego si cualquier fracción entre 0 y 1 es la más cercana a 0, 1/2 o 1. Por ejemplo, si se les pide sumar 6/7 y 5/8, el razonamiento de un estudiante podría ser que 6/7 está más cerca a 1 y que 5/8 está más cerca de 1/2, por lo que la respuesta debe estar cerca de 1 1/2.

Los estudiantes también pueden considerar el tamaño de las unitarias correspondientes (fracciones con 1 como numerador) cuando hagan sus estimaciones. Una vez que los niños entiendan que las fracciones unitarias disminuyen de tamaño cuando el denominador aumenta (por ejemplo, 1/6 es menor a 1/5), pueden utilizar este conocimiento para ayudarlos a estimar. Por ejemplo, si se les pide estimar 7/8 + 1/9, los estudiantes pueden razonar que 7/8 está 1/8 de distancia de 1, y ya que 1/9 es menor a 1/8 la respuesta será ligeramente menor que 1.

Lectura sugerida: Behr, Post & Wachsmuth, 1986; Cramer & Wyberg, 2009.

5. Enfrentar directamente los conceptos erróneos más comunes de la aritmética de fracciones

Los docentes deben discutir y corregir los conceptos erróneos de las fracciones aritméticas.

Resultados de la investigación

Los niños suelen confundir las reglas de la aritmética de números enteros con fracciones aritméticas. Es importante identificar las ideas erróneas sobre las fracciones aritméticas y abordar directamente por qué los conceptos erróneos llevan a respuestas incorrectas, así como el por qué los procedimientos correctos llevan a las respuestas correctas. Los docentes pueden dirigir discusiones de grupo sobre diferentes procedimientos de cómputo y explicar cómo es que algunos llevan a respuestas correctas mientras otros no. El docente puede enfatizar que, con la excepción de las multiplicaciones, los procedimientos que funcionan con la aritmética de números enteros no funcionan con fracciones aritméticas. Los estudiantes obtendrán un mayor entendimiento conceptual de las fracciones aritméticas cuando comprendan por qué los procedimientos de números enteros no funcionan, en lugar de sólo aprender un nuevo procedimiento para fracciones.

Conceptos erróneos comunes

Las fracciones aritméticas que trabajan muchos niños reflejan uno o más conceptos erróneos. Discutimos tres de los más comunes y lo que los docentes pueden hacer para corregir cada uno de ellos.

El tratamiento de numeradores y denominadores de las fracciones como números enteros separados. Cuando se les pide restar fracciones, los estudiantes a menudo restan los numeradores y luego restan los denominadores (por ejemplo, 5/8– 1/4 = 4/4). Estos estudiantes fallan cuando tratan la fracción como un número unificado en lugar de abordar al denominador y numerador como números enteros separados. Los docentes pueden ayudar a sus estudiantes a superar la idea errónea de que este es un procedimiento aceptable, ya que presenta problemas significativos dentro del aula. Por ejemplo, pueden preguntar: “Si tienen 3/4 de una naranja y dan 1/3 de la naranja original a un amigo, ¿qué fracción de naranja les queda?" Los estudiantes, operando bajo el concepto erróneo descrito anteriormente, responderán "2/1" o "2". El pedir a dichos estudiantes si tiene sentido que empiecen con 3/4 de una naranja, dar parte de ella a otra persona y terminar con dos naranjas, deberá aclarar el problema del concepto erróneo. Después de exhibir el por qué su procedimiento es erróneo, los estudiantes deberán ser más receptivos a aprender los procedimientos correctos.

Dejar el denominador sin cambios en problemas de multiplicación de fracciones. Al multiplicar fracciones con denominadores iguales, los estudiantes a menudo dejan el denominador sin cambios (por ejemplo, 4/5 x 1/5 = 4/5). Este error puede deberse a que los estudiantes se enfrentan con mayor frecuencia a problemas de suma de fracciones que a problemas de multiplicación de fracciones, lo que lleva a que confundan incorrectamente los procedimientos de suma con la multiplicación para sumandos con denominadores iguales. Los docentes deben corregir este error al recordar a sus estudiantes que el problema puede ser reformulado como "4/5 de 1/5". Ya que el problema pide una parte de 1/5, la respuesta no puede ser mayor a 1/5.

Malinterpretar números mixtos. Usualmente, los estudiantes tienen dificultades al resolver problemas con números mixtos. Algunos estudiantes ignoran las partes fraccionarias y en su lugar sólo se centran en el número entero (por ejemplo 4 2/3 – 1 2/5 = 3). Otros deciden que los números enteros en el problema deben tener el mismo denominador que las fracciones (por ejemplo, 3 – 2/5 = 3/5 – 2/5 = 1/5). Otro error relacionado, es la suma de un número entero al numerador o parte fraccionaria (por ejemplo, 2 2/5 x 5/6 = 4/5 x 5/6 = 20/30). Todos estos errores reflejan un malentendido fundamental de lo que son los números mixtos y de las magnitudes que representan. Los docentes deben estar seguros de utilizar fracciones propias y números mixtos en el aula, y de traducir a menudo entre números mixtos y fracciones impropias.

Lectura sugerida: Ashlock, 2010; Mack, 1995, Stafylidou & Vosniadou, 2004.

6. Contextos del mundo real

Los docentes deben presentar problemas de fracciones en contextos del mundo real con posibles números.

Resultados de la investigación

Los niños adquieren mayor capacidad para resolver problemas de fracciones aritméticas cuando estos problemas son presentados en contextos significativos del mundo real. Proporcionar un contexto del mundo real anima a los niños a utilizar su intuición en estrategias para la resolución de problemas, en lugar de confiar en procedimientos memorizados. Muchas son las fuentes de contexto del mundo real en las que intervienen las fracciones, tales como comida, bebida, tiempo y herramientas de medida como relojes y reglas. El recurrir a fuentes de contexto del mundo real, puede permitir a los docentes personalizar aún más los problemas.

Conexiones entre los problemas del mundo real y la notación de fracciones

Los niños pueden contestar correctamente a un problema dentro del contexto del mundo real y aún así calcular una respuesta incorrecta cuando el problema es escrito en notación de fracciones. Por ejemplo, un niño puede saber que dos mitades forman un entero, pero puede interpretar que $1/2 + 1/2 = 2/4$. Los docentes deben hacer hincapié en la conexión entre los problemas del mundo real y la notación de fracciones utilizada para representar el problema. Los estudiantes pueden practicar la creación de contextos del mundo real para resolver problemas presentados en notación de fracciones, y practicar su traducción desde problemas del mundo real para convertirlos en notación de fracciones. Este tipo de actividad ayudará a mejorar el conocimiento intuitivo de los estudiantes en cuanto a fracciones con notación formal.

Lectura sugerida: Anand & Ross, 1987; Irwin, 2001.

7. Razonamiento proporcional

Los estudiantes deben entender el razonamiento proporcional antes de aprender acerca del algoritmo de la multiplicación cruzada.

Resultados de la investigación

Con el fin de abordar con éxito temas avanzados de matemática, los estudiantes primero deben entender el razonamiento proporcional, un elemento particularmente importante para comprender tasas, relaciones y proporciones, tres interpretaciones de fracciones que no se enseñan con tanta frecuencia como la representación de partes/enteros. El razonamiento proporcional es también necesario en la vida cotidiana. Revisar una receta de arriba hacia abajo, calcular las provisiones necesarias para un proyecto de mejora en casa, o determinar el precio unitario de un artículo comprado en una tienda son actividades del mundo real que requieren el uso del razonamiento proporcional.

Es importante que los estudiantes aprendan a resolver problemas de razonamiento proporcional utilizando sus propias estrategias intuitivas, antes de aprender el algoritmo de multiplicación cruzada. De hecho, incluso después que los estudiantes aprenden el algoritmo, los docentes deberían continuar hablando acerca de las estrategias de razonamiento informales del estudiante y de cómo resultan en la misma respuesta que el algoritmo. La razón es que una vez que los estudiantes aprenden el algoritmo de multiplicación cruzada, a menudo ignoran el significado de los problemas, lo que conduce a realizar usos incorrectos del algoritmo. Los docentes pueden hacer hincapié en que el algoritmo de multiplicación cruzada hace posible solucionar problemas que serían difíciles de resolver utilizando otra estrategia, pero a la vez debe rescatar la importancia de que los estudiantes tengan una base conceptual sobre el razonamiento proporcional, más que el hecho de saber cómo resolver problemas con multiplicación cruzada.

Los docentes deben ser conscientes de que muchas veces los estudiantes no logran generalizar sus estrategias para la resolución de problemas a través de los tipos específicos de problemas. Problemas paralelos con diferentes historias de portada serán tratados de manera diferente por estudiantes que no reconozcan la similitud fundamental entre ellos. Tomar en cuenta las similitudes subyacentes entre los problemas superficialmente disímiles, es por lo tanto aconsejable.

Construir sobre nociones intuitivas de razonamiento proporcional

Antes que los niños reciban enseñanza para la resolución de problemas de tasa, relación y proporción con el algoritmo de multiplicación cruzada, deben aprender cómo resolver algunos problemas utilizando estrategias intuitivas. Es deseable que los estudiantes descubran estas estrategias por cuenta propia y que luego en clase se discutan las fortalezas y debilidades de cada estrategia.

Si los estudiantes no pueden descubrir estas estrategias sin ayuda, los docentes pueden presentar problemas de historias que estimulen su descubrimiento. Un problema como este, por ejemplo: "Paul puede comprar tres galletas por $2. ¿Cuántas galletas puede comprar con $6?" Esto fomenta el uso de estrategias de aumento. Los niños, en repetidas ocasiones, pueden sumar tres galletas más y $2, de modo que obtengan seis galletas por $4 y nueve galletas por $6. Otra estrategia informal común es el uso de coeficientes unitarios. Cuando se expone la pregunta: "Julie compró cinco coches de juguete por $25; ¿cuánto costarían cuatro carros?", los estudiantes pueden razonar que un carro cuesta $5, de modo que cuatro carros costarían $20.

Una vez que los estudiantes comprendan las estrategias informales para la solución de problemas de razonamiento proporcional, el algoritmo de multiplicación cruzada puede ser introducido como método para lidiar con números grandes y/o problemas que no son resueltos fácilmente, utilizando estrategias de aumento de valor y estrategias de relación unitaria. Los estudiantes deben seguir resolviendo problemas utilizando los tres métodos y la clase puede discutir cuál estrategia es más útil. Los estudiantes también deben resolver problemas utilizando estrategias de multiplicación, de modo que puedan ver que obtienen la misma respuesta.

Contextos múltiples

Los docentes deben utilizar contextos múltiples al presentar problemas de tasa, relación y proporcionalidad. Un objetivo clave es lograr que los estudiantes comprendan las similitudes subyacentes entre problemas similares presentados en diferentes contextos. Los docentes deben ayudar a sus estudiantes a identificar las características clave de los problemas y cómo métodos similares pueden ser utilizados para resolver problemas superficialmente diferentes. Como se discutió en la Recomendación 6, los problemas deben ser presentados utilizando contextos de la vida real que sean significativos para ellos. Por ejemplo, pueden aprender a comparar precios al ver los precios unitarios. Si una persona puede comprar cuatro barras de caramelo por $3, o seis barras de caramelo por $4.25, ¿qué compra tiene el mejor valor? Otros contextos para problemas de razonamiento proporcional incluyen ampliar o reducir el tamaño de una fotografía, y alterar una receta para alimentar a más o menos personas.

Lectura sugerida: Ahl, Moore & Dixon, 1992; Cramer, Post & Currier, 1993.

8. Comprensión del docente

Programas de Desarrollo Profesional deben centrarse en mejorar el conocimiento de los docentes sobre fracciones y cómo enseñarlas.

Resultados de la investigación

Para enseñar fracciones, los mismos docentes deben tener un conocimiento profundo de los conceptos de fracciones y operaciones. Investigadores hallaron que el rendimiento matemático de los estudiantes está positivamente correlacionado con el conocimiento matemático del docente. Desafortunadamente, muchos docentes carecen de una comprensión conceptual profunda de fracciones, especialmente de fracciones aritméticas. Esta comprensión profunda es particularmente importante cuando se utilizan representaciones visuales para enseñar los conceptos de fracciones. Los docentes deben ser capaces de utilizar diferentes representaciones y a la vez estar aptos para elegir una representación adecuada para cada situación. Los docentes además deben conocer los diferentes tipos de errores y conceptos erróneos en los que los estudiantes pueden incurrir durante la instrucción de fracciones. Cuando los docentes conocen las razones que causan dificultades a sus estudiantes, pueden abordar directamente los conceptos erróneos que generan esa situación.

Una comprensión más profunda de los conceptos de fracciones

Los docentes deben estar preparados para explicar no solo cómo resolver un problema, sino también para argumentar por qué el procedimiento es apropiado y por qué los enfoques erróneos son inapropiados. Este tipo de explicación requiere un profundo conocimiento de cálculos de fracciones. Las oportunidades de desarrollo personal deben centrarse en el cultivo de este nivel más profundo de conocimiento de los docentes. Los profesores deben ser capaces de explicar cómo un algoritmo funciona y también de resolver problemas profundos que les permita identificar conceptos que no comprendan en su totalidad. Por ejemplo, casi todos los docentes saben que los problemas de división de fracciones pueden resolverse con el procedimiento 'invertir y multiplicar'. Sin embargo, muchos docentes carecen de una comprensión profunda de por qué este procedimiento es eficaz.

Es importante que los docentes no sólo conozcan los conceptos de fracciones que se enseñan en su nivel de grado, sino también conceptos que vienen antes y después. Al comprender lo que estudiantes aprendieron antes, los docentes pueden construir sobre el conocimiento ya adquirido e identificar las fuentes de los conceptos erróneos de los estudiantes. Comprender el material que se enseñará posteriormente ayuda a los docentes a conocer lo que los estudiantes necesitan aprender durante el año en curso, para proporcionar una base sólida que antecederá a la instrucción posterior.

Una comprensión profunda de los conceptos de fracciones también es necesaria para el uso efectivo de representaciones visuales en el aula. Durante el desarrollo profesional, los docentes deben aprender cómo utilizar representaciones de manera efectiva y cómo estas representaciones pueden conectar los conceptos que se enseñan. Diferentes representaciones son más o menos apropiadas para diferentes situaciones. Por ejemplo, los diagramas pueden ser útiles al explicar escenarios de compartición (como el ejemplo de dividir tres galletas en cinco partes iguales) y al comprender la división de fracciones. Las rectas numéricas también pueden ayudar a los estudiantes a enfocarse en la magnitud de las fracciones, mientras los modelos de área (rectángulos o círculos que están parcialmente sombreados) pueden ilustrar parcial/totalmente la representación de fracciones. Los docentes deben estar familiarizados con las dificultades que puedan surgir al utilizar representaciones visuales. Por ejemplo, los estudiantes podrían tener dificultad dibujando partes iguales o podrían malinterpretar la longitud de una recta numérica, colocando ½ como punto medio de una recta numérica de 0 a 5, en lugar de colocarlo cerca de 0.

La capacidad de acceder al conocimiento de fracciones

A través de actividades de desarrollo profesional, los docentes deben aprender cómo los estudiantes desarrollan una comprensión de los conceptos de fracciones y las dificultades que enfrentan en el proceso de entender las fracciones adecuadamente. Esta discusión debe estar enmarcada en torno a la investigación realizada sobre el aprendizaje de fracciones y las observaciones en el aula por parte del docente. Una forma en la que los docentes pueden obtener una mayor comprensión de cómo los estudiantes aprenden a representar fracciones es examinar el trabajo escrito y las grabaciones de los estudiantes cuando trabajan en la solución de problemas de fracciones. Los docentes podrían discutir entre ellos la razón por la que los estudiantes tienen dificultades al resolver distintos tipos de problemas específicos, en diferentes puntos del conocimiento de fracciones que los estudiantes han desarrollado. Los docentes deberían discutir además los distintos tipos de errores cometidos por los estudiantes y qué conceptos erróneos subyacen en cada uno de estos errores. Este tipo de discusión permite a los docentes aprender más sobre los tipos de problemas relacionados a fracciones y qué deben preguntar a sus estudiantes, con el fin de detectar las fuentes de malentendidos. Una vez que los profesores comprendan por qué sus estudiantes tienen problemas en ese contexto, pueden abordar los malentendidos específicos en el aula.

Lectura sugerida: Hill, Rowan & Ball, 2005; Ma, 1999; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010.

Conclusión

Las fracciones son un importante peldaño para el aprendizaje de matemática avanzada y también son utilizadas comúnmente en la vida cotidiana. Sin embargo, muchos estudiantes siguen luchando con fracciones, aún después de años de instrucción. Creemos que las recomendaciones presentadas en esta publicación ayudarán a fortalecer la enseñanza de fracciones e incrementarán el número de estudiantes que comprendan las fracciones y resuelvan problemas de fracciones aritméticas de forma correcta. Es importante tener en cuenta que las fracciones son un tema difícil. Aún tras la exposición de recomendaciones contenidas en este folleto, los estudiantes no lograrán comprender de forma inmediata lo que son las fracciones y cómo difieren de los números enteros. Sin embargo, con aplicaciones repetidas de la idea y diversos ejemplos, estas recomendaciones mejoran la comprensión del estudiante en cuanto a fracciones. Estas sugerencias están diseñadas para aplicarlas en conjunto, aunque cada una de ellas producirá ganancias en la comprensión conceptual, incluso si se aplican solas.

El principio fundamental detrás de todas estas recomendaciones es que los estudiantes necesitan un profundo conocimiento conceptual de las fracciones con el fin de comprenderlas de manera eficaz y recordar lo aprendido. Cuando los estudiantes tienen un conocimiento superficial de las fracciones, el símbolo de las fracciones en sí no tiene sentido, los procedimientos utilizados en fracciones aritméticas parecen arbitrarios y resulta fácil confundirlos unos con otros. Al cultivar la comprensión conceptual, los docentes pueden ayudar a sus estudiantes a entender que las fracciones aritméticas son un procedimiento significativo en lugar de una serie de pasos antojadizos. La comprensión conceptual es difícil de adquirir pero es vital para asegurar una comprensión profunda y duradera de fracciones y fracciones aritméticas.

Referencias

Ahl, V.A.; Moore, C.F.; Dixon, J.A. 1992. Development of intuitive and numerical proportional reasoning. *Cognitive development, 7(1), 81–108.*

Anand, P.G.; Ross, S.M. 1987. Using computer-assisted instruction to personalize arithmetic materials for elementary school children. *Journal of educational psychology, 79, 72–78.*

Ashlock, R.B. 2010. *Error patterns in computation: using error patterns to help each student learn* (10th ed.). Boston, MA: Allyn & Bacon.

Behr, M.J.; Post, T.R.; Wachsmuth, I. 1986. Estimation and children's concept of rational number size. In: Schoen, H.L.; Zweng, M.J. (eds.). *Estimation and mental computation: 1986 yearbook.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Cramer, K.; Post, T.; Currier, S. 1993. Learning and teaching ration and proportion: Research implications. In: Owens, D. (ed.). *Research ideas for the classroom,* pp. 159–178. New York, NY: Macmillan.

Cramer, K.; Wyberg, T. 2009. Efficacy of different concrete models for teaching the part/whole construct for fractions. *Mathematical thinking and learning,* 11(4), 226–257.

Empson, S.B. 1999. Equal sharing and shared meaning: The development of fraction concepts in a first-grade classroom. *Cognition and instruction,* 17, 283–342.

Frydman, O.; Bryant, P.E. 1988. Sharing and the understanding of number equivalence by young children. *Cognitive development,* 3, 323–339.

Hill, H.C.; Rowan, B.; Ball, D.L. 2005. Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American educational research journal,* 42(2), 371–406.

Hoffer, T. et al. 2007. *Final report on the national survey of algebra teachers for the National Math Panel.* Chicago, IL: National Opinion Research Center at the University of Chicago.

Hudson Hawkins, V. 2008. *The effects of math manipulatives on student achievement in mathematics.* Minneapolis, MN: Cappella University. (Unpublished dissertation.)

Irwin, K.C. 2001. Using everyday knowledge of decimals to enhance understanding. *Journal for research in mathematics education,* 32, 399–420.

Ma, L. 1999. *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mack, N.K. 1995. Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for research in mathematics education,* 26(5), 422–441.

Moseley, B.J.; Okamoto, Y.; Ishida, J. 2007. Comparing US and Japanese elementary school teachers' facility for linking rational number representations. *International journal of science & mathematics education,* 5, 165–185.

Mullis, I. et al. 1997. *Mathematics achievement in the primary school years: IEA's third mathematics and science study.* Boston, MA: Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy, Boston College.

National Council of Teachers of Mathematics. 2007. *The learning of mathematics:* 69th NCTM yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nishida, T.K. 2008. *The use of manipulatives to support children's acquisition of abstract math concepts.* Charlottesville, VA: University of Virginia. (Unpublished dissertation.)

Rittle-Johnson, B.; Siegler, R.S.; Alibali, M.W. 2001. Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of educational psychology,* 93, 346–362.

Siegler, R.S. et al. 2010. *Developing effective fractions instruction: A practice guide.* Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. <ies.ed.gov/ncee/wwc/publications/practiceguides/>. (NCEE #2010–009)

Siegler, R.S.; Thompson, C.A.; Schneider, M. 2011. An integrated theory of whole number and fraction development. *Cognitive psychology,* 62, 273–296.

Stafylidou, S.; Vosniadou, S. 2004. The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and instruction,* 14(5), 503–518.

Streefland, L. 1991. *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Vamvakoussi, X.; Vosniadou, S. 2010. How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and instruction,* 28(2), 181–209.

Notas

Notas

SERIES PRÁCTICAS EDUCATIVAS-22

La Oficina Internacional de Educación–IBE

La IBE fue fundada en Ginebra, Suiza, como una organización privada no gubernamental en 1925. Bajo nuevos estatutos se convirtió en la primera organización inter-gubernamental en el campo de la educación. Desde 1969, el Instituto ha sido una parte integral de la UNESCO manteniendo una amplia autonomía intelectual y funcional.

La misión de IBE es funcionar como un centro internacional para el desarrollo de contenidos y métodos de educación. Construye redes para compartir conocimientos especializados y fomentar capacidades nacionales para el cambio curricular y el desarrollo en todas las regiones del mundo. Su objetivo es introducir enfoques modernos en el diseño e implementación del currículo, mejorar las habilidades prácticas y fomentar el diálogo internacional sobre políticas educativas.

IBE contribuye al logro de la Educación de Calidad para Todos (EFA) principalmente a través de: (a) desarrollar y facilitar una red mundial y una Comunidad de Práctica de especialistas en currículo; (b) la prestación de servicios de asesoramiento y asistencia técnica en respuesta a demandas específicas para la reforma curricular o desarrollo; (c) recolectar, producir y otorgar acceso a una amplia gama de recursos de información y materiales sobre los sistemas educativos, currículos y los procesos de desarrollo de currículo alrededor del mundo, incluyendo bases de datos en línea (tal como Datos Mundiales de Educación), estudios temáticos, publicaciones (como Perspectivas, revista trimestral de educación), reportes nacionales, al igual que materiales curriculares y enfoques para la educación sobre VIH y SIDA en los niveles primario y secundario a través del Centro de Información de VIH y SIDA; y (d) la facilitación y el fomento al diálogo internacional sobre políticas educativas, estrategias y reformas entre quienes están encargados de la toma de decisiones y otros interesados, en particular a través de la Conferencia Internacional de Educación organizada por IBE desde 1934—, que puede ser considerada uno de los foros para el desarrollo de políticas a nivel mundial y el diálogo entre el Ministerio de Educación.

IBE es gobernado por un concejo compuesto de representantes de veintiocho estados miembros electos por la Conferencia General de la UNESCO. IBE tiene el orgullo de estar asociada con el trabajo de la Academia Internacional de la Educación y publica este material como un Centro de Intercambio que promueve la transferencia de información en prácticas educativas.

Visite el sitio web de IBE en: http://www.ibe.unesco.org