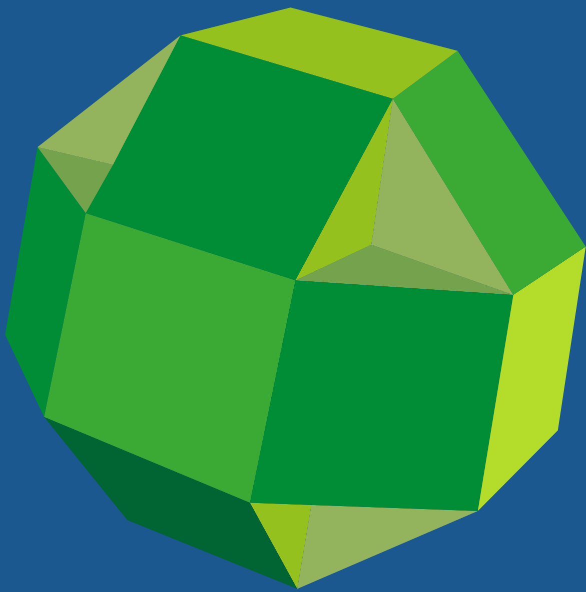
Werner Blum
Christina Drüke-Noe
Ralph Hartung
Olaf Köller



Una publicación del:

Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Instituto para Desarrollo de la Calidad de la Educación de la Universidad Humboldt de Berlín - Alemania

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Articulación primaria-secundaria: orientaciones para las sesiones de aprendizaje, ideas para la capacitación docente, ejemplos de tareas

Cornelsen

Traducido al español por el:

SINEACE
SISTEMA NACIONAL DE EVALUACIÓN,
ACREDITACIÓN Y CERTIFICACIÓN
DE LA CALIDAD EDUCATIVA

Werner Blum

Christina Drüke-Noe

Ralph Hartung

Olaf Köller

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Articulación primaria-secundaria: orientaciones para las sesiones de aprendizaje, ideas para la capacitación docente, ejemplos de tareas

LOS EDITORES

Prof. Dr. Werner Blum, n. 1945. Estudió Matemática entre 1965 y 1969 en la Universidad de Karlsruhe, y se doctoró en la misma institución en 1970, obteniendo el grado de Dr. rer. nat. Desde 1975 ejerce como profesor de Didáctica en la Matemática en la Universidad de Kassel. En 2006 recibió el Premio Arquímedes de MNU. Sus focos de investigación y trabajo abarcan análisis empíricos de la enseñanza matemática y del saber profesional de docentes de la matemática, estudios comparativos nacionales e internacionales de la enseñanza matemática (entre otros, PISA), desarrollo de la calidad de la enseñanza y la creación de modelos. Desde 2003 contribuye y lidera desarrollos en el ámbito de Estándares de Enseñanza Matemática de la Escuela Secundaria.

Prof. Dr. Christina Drücke-Noe. Estudió Matemática e Inglés en la Universidad de Kassel y trabajó como profesora de escuela en el Gustav-Stresemann-Gymnasium en Bad Wildungen, culminando como directora del grupo de trabajo matemático y de ciencias naturales. Ha sido autora de textos escolares, consultora especializada, y desde 2000 participa en diversas capacitaciones, entre otras en la Iniciativa SINUS. Desde 2004 hasta 2014 trabajó como colaboradora científica en el Grupo de Trabajo Estándares de Enseñanza y dirigió por encargo del IQB diversos grupos de desarrollo de tareas. Desde 2014 es consultora especializada para los sondeos de conocimiento de la matemática a nivel de 8º grado. Luego de obtener el grado de Dr., se trasladó en mayo 2014 a la Escuela Pedagógica Weingarten, donde tiene una cátedra junior para Didáctica Matemática. Sus focos de investigación son tareas, en especial para trabajos de clase y para pruebas de grado centralizadas, así como competencias básicas en matemática (grados secundarios I y II).

Ralph Hartung, n. 1971. Estudió Matemática y Química para la enseñanza media en la Universidad de Hannover. Llevó a cabo sus prácticas docentes en el Colegio Selm en el Estado de Renania del Norte-Westfalia. Se desempeñó como docente en la Escuela Ricarda-Huch en Dreieich entre 2000 y 2003. Posteriormente se desempeñó hasta el 2012 en el Ministerio de Educación del Estado de Hesse como referente y director. En el marco de esta actividad fue destacado por un periodo de dos años en el Instituto de Desarrollo de la Calidad en la Enseñanza (IQB) en la Universidad Humboldt en Berlín. Desde el 2012 tiene el cargo de director de secundaria en la Escuela Goethe en Neu-Isenburg, cerca de Frankfurt del Meno.

Prof. Dr. Olaf Köller, n. 1963. Estudió Psicología en la Universidad Christian-Albrecht en Kiel. Posteriormente trabajó en el Instituto para la Pedagogía de Ciencias Naturales en Kiel, donde también obtuvo el grado de Dr. en 1997. Posteriormente laboró en el Instituto Max Planck para Investigación Pedagógica en Berlín, y luego de obtener el grado de profesor en la Universidad de Potsdam, se desempenó como profesor de Psicología Pedagógica en la Universidad Friedrich-Alexander en Erlangen-Nürnberg. Entre 2004 y 2009 fue director del Instituto para el Desarrollo de la Calidad en la Ensenanza-IQB en Berlín. Desde 2009 es director en el IPN y profesor de Investigación de la Ensenanza Empírica en la Universidad Christian-Albrecht en Kiel. Sus focos de investigación abarcan el diagnóstico de habilidades escolares, cuestiones metodológicas en evaluaciones a gran escala (“large-scale assessments”) y en la implementación y evaluación de programas de desarrollo escolar y de enseñanza.

Werner Blum
Christina Drüke-Noe
Ralph Hartung
Olaf Köller

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Articulación primaria-secundaria: orientaciones para las sesiones de aprendizaje, ideas para la capacitación docente, ejemplos de tareas

Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

Cornelsen

SINEACE
SISTEMA NACIONAL DE EVALUACIÓN, ACREDITACIÓN Y CERTIFICACIÓN DE LA CALIDAD EDUCATIVA

SINEACE

SISTEMA NACIONAL DE EVALUACIÓN,
ACREDITACIÓN Y CERTIFICACIÓN
DE LA CALIDAD EDUCATIVA

De la versión en español traducida literalmente del original publicado en idioma alemán titulada: Articulación primaria-secundaria: orientaciones para las sesiones de aprendizaje, ideas para la capacitación docente, ejemplos de tareas
2015 SINEACE. Serie: Estudios e investigación
sineace@gob.pe
Lima, Perú
Tiraje único autorizado para su distribución gratuita: 1 000 ejemplares
Traducción: Talía Guevara
Gestión y edición de la versión traducida: Cecilia Torres Llosa
Estilo y cuidado de edición: Diana Cornejo
Diseño y diagramación: Estación La Cultura

De la versión original en alemán titulada:
Bildungsstandards Mathematik: konkret
Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen
Editores: Werner Blum, Christina Drüke-Noe, Ralph Hartung y Olaf Köller
http://edoc.hu-berlin.de/series/iqb/4/PDF/4.pdf
Edición 2010

IQB: Institut zur Qualitâtsentwicklung im Bildungswesen

TABLA DE CONTENIDO

PRÓLOGO

Felicito la iniciativa de poner al alcance de los lectores de habla castellana este valioso documento, con un trabajo de traducción impecable. Sin este esfuerzo, muchos investigadores interesados en el desarrollo de la educación matemática habríamos perdido la oportunidad de conocer más de cerca el trabajo que se viene realizando en Alemania y en otros países vecinos, cuya propuesta curricular se sustenta en la educación matemática realista.

Es oportuno y pertinente el contar con literatura como la que proporciona este texto, ya que las recientes modificaciones que se vienen realizando en el marco curricular peruano se apoyan básicamente en la perspectiva desarrollada por Freudenthal. Por ello, este texto se convierte en un material de lectura obligatoria para comprender lo que significa adoptar un modelo por competencias en la enseñanza de la matemática.

Entre algunos de los muchos aspectos destacables del texto, se encuentra el complementar el discurso teórico sobre lo que significan estándares de aprendizaje en matemáticas con la presentación de tareas concretas y sus soluciones. De esa manera, se logra ejemplificar cómo podría un profesor de matemáticas propiciar el desarrollo de competencias matemáticas en el día a día.

En ese sentido, es muy valioso también el que se explicite que no todas las tareas son apropiadas para todos los propósitos y que se brinden pautas para ayudar a los docentes a identificar para qué sería más apropiada una tarea específica. Así, se propone considerar que cada tarea podría cumplir algunas de las siguientes cinco funciones: explorar, descubrir e inventar, o sistematizar, recolectar y asegurar, o practicar, conectar y repasar, o diagnosticar capacidades e ideas, o finalmente comprobar desempeños.

Sin embargo, el texto también rescata lo importante que es considerar espacios para la práctica, pero para la práctica inteligente. Así, pese a que puede pensarse que una propuesta curricular basada en estándares de aprendizaje debe privilegiar una práctica matemática centrada en problemas contextualizados, en el texto se reconoce el valor que tienen las tareas de cálculo y las tareas rutinarias. Esto corresponde a reconocer a la matemática como una disciplina que requiere ser organizada y no solo como disciplina que permite organizar el mundo; ambos son principios fundamentales de la educación matemática realista.

Así, presentan la importancia de la práctica en contextos intramatemáticos, pero con un propósito específico. Este tipo de trabajo permite comprender conceptos y resultados a partir de casos particulares y conectar temas, pues se requieren rutinas previamente comprendidas. De esta manera, se ofrece al estudiante la posibilidad de transferir autónomamente sus conocimientos a situaciones análogas. Ello permitirá que los estudiantes transiten entre los distintos niveles de matematización, desde el situacional y referencial hasta el general. Sin embargo, se menciona también la necesidad de hacer explícita la función de cada una de estas actividades, pues no se puede esperar que sea el estudiante quien les otorgue sentido.

El texto también provee de herramientas para poder identificar las distintas competencias en las soluciones de los estudiantes. Así, si bien es posible encontrar que en una respuesta se pondrá de manifiesto más de una competencia, es fundamental delimitar el campo de acción de cada una de ellas. En particular, queda claro lo que significa *modelar* en el sentido de la educación matemática realista, cuando se señala que esto solo se hará evidente cuando el modelo se emplee para otros objetos o problemas similares. La competencia argumentar, que usualmente se asocia también con explicar, queda bien definida cuando se señala que debe hacer referencia a la capacidad de fundamentar, comprobar, demostrar o contradecir y no debe confundirse con el describir. Más aún, la capacidad de explicar una solución, desde la perspectiva del texto, se debería asociar a otra competencia, a la competencia de *comunicar matemáticamente*.

La graduación que se propone para cada una de las competencias matemáticas generales es muy interesante y muestra también que ello depende directamente de la tarea. Se presentan ejemplos concretos para ilustrar de qué manera una tarea puede modificarse para incrementar el nivel de exigencia de esta y también para permitir el desarrollo de otras competencias. Además, se presentan pautas de cómo modificarlas para que cumplan los distintos fines, mencionados anteriormente.

Por otro lado, el hecho de que las tareas hayan sido probadas les otorga una validez externa y se constituyen en una fuente valiosa para el trabajo en el aula. Especialmente, se convierten en un recurso fundamental para la formación de maestros pues se cuenta con soluciones de estudiantes que podrían emplearse en capacitaciones para el desarrollo de la competencia matemático-didáctica, tanto en profesores en ejercicio como en profesores en formación inicial.

Entre las alertas que podemos dar para los lectores es que ya desde una primera revisión del documento se puede identificar la necesidad de que estos cuenten con una formación matemática consistente que les permita identificar los principales fenómenos que se asocian a las ideas matemáticas que se estudian en la educación básica. Así, se requiere de docentes con sólidos conocimientos matemáticos, especialmente en lo que se refiere a los temas de número, espacio y forma, datos y azar, relaciones funcionales y medición. Ese es un requisito indispensable para comprender el porqué de la selección de determinadas tareas para el desarrollo de determinadas competencias.

En esa misma línea, se requiere de docentes que conciban a la matemática como una actividad y como producto de la humanidad, de modo que acepten el error como parte natural del proceso de aprendizaje. Esto es, se revaloriza el error como fuente de aprendizaje.

Asimismo, se requiere que los docentes acepten que, para una determinada tarea, los estudiantes pueden presentar soluciones distintas de las ideales, algunas correctas y otras no, y que lo más importante de ello es tratar de comprender los mecanismos de solución empleados por los estudiantes, así como los significados que estos han construido. Es decir, se pone en evidencia que una competencia fundamental que debe ser desarrollada en la formación inicial y continua de docentes de matemáticas es la competencia diagnóstica. Esto se convierte en todo un reto para los nuevos programas de capacitación de maestros y reformas curriculares en la educación superior pedagógica.

Cecilia Gaita Iparraguirre

PRESENTACIÓN

Durante el año 2014, y en el marco de la elaboración de los estándares de aprendizaje para matemáticas, el gobierno peruano, a través del SINEACE, realizó una búsqueda intensiva de referencias internacionales, entre las cuales destacaron los documentos oficiales sobre estándares de aprendizaje de matemáticas elaboradas por el gobierno alemán.

Se revisó la producción oficial alemana relacionada con estándares y currículo de matemáticas publicada en los sitios web correspondientes, así como información publicada por el Instituto para el Desarrollo de la Calidad Educativa de la Universidad Humboldt de Berlín - IQB y algunos otros análogos en países de habla germana.

Cabe destacar que el mencionado instituto tiene el encargo de implementar las políticas relativas a la aplicación y evaluación de los estándares. Asimismo, es significativo que, a la fecha, dicho instituto atiende requerimientos de las escuelas del sur del Tirol y de los colegios belgas de habla germana, por lo que su acción ya trasciende las fronteras de Alemania.

Es importante mencionar también que, en general, los países y regiones de habla alemana tienden a unificar sus sistemas educativos en torno a los mismos estándares, basados, probablemente, en el hecho de que, desde hace muchos años, comparten las mismas raíces conceptuales provenientes de filósofos, psicólogos y pedagogos europeos. Asimismo, es característico el enfoque experimental y el uso intensivo de la investigación empírica como fundamento de su práctica educativa, lo cual ha dado lugar a un constructo didáctico ampliamente validado y documentado que hoy día busca ser perfeccionado en cuanto a sus resultados educativos y a la calidad de los procesos pedagógicos que se realizan en las aulas. A ello apunta la formulación de estándares.

Los estándares de aprendizaje para matemáticas en la educación básica regular en Alemania comprenden tres cortes: hasta cuarto grado de Primaria, hasta décimo grado/cuarto grado de Secundaria y estándares para para ingresar a la universidad o a las escuelas de ciencias aplicadas.

Como complemento y ampliación de los documentos oficiales —y en conjunto con el Ministerio de Educación—, se emprendió la revisión del libro titulado *Bildungsstandards Mathematik: Konkret* escrito por el grupo de expertos de la IQB (Blum 2006) y publicado por la editorial Cornelsen. El libro compila artículos centrados en la comprensión y en el trabajo concreto en el aula con los estándares de aprendizaje desde quinto grado de Primaria y durante casi toda la Secundaria.

En el libro se presentan, de manera resumida, los estándares de aprendizaje de matemáticas que contemplan seis competencias generales: *Argumentar*; *Resolver problemas*; *Modelar*; *Usar representaciones matemáticas*; *Manejar elementos formales, simbólicos y técnicos de las matemáticas*, y *Comunicar matemáticamente*.

Según los autores, estas competencias "se incrustan dentro de otros aspectos, con los que deben alinearse la adquisición de conocimientos y el desarrollo de las sesiones de aprendizaje [...] Observar únicamente las competencias [...] no basta para un diseño productivo de las clases de matemáticas [...] Sin embargo, las competencias son puntos de referencia importantes para establecer las actividades matemáticas de los estudiantes de forma lo suficientemente amplia como para garantizar la calidad de las sesiones de aprendizaje, tal como lo formula la KMK"[1] (Leiss y Blum 2006).

Los estándares de aprendizaje definen ámbitos de exigencia a partir de quinto grado y se menciona explícitamente que "para que cada una de las competencias también existe un grado previo al ámbito de exigencia I, en el cual la competencia no se exige o no se exige de forma que amerite mencionarse" (*ib. cit*.).

Se enfatiza también que, en la práctica, no es razonable ni posible separar una competencia de la otra.

Por último, los autores señalan que los estándares no explicitan dos aspectos importantes, que son los cimientos sobre los cuales se construyen las competencias. El primero señala *la necesidad del conocimiento básico*; el segundo apunta a *las condiciones para la comprensión matemática*.

En cuanto al primer aspecto, se afirma que:

Debería haber consenso con respecto a la necesidad de contar con habilidades elementales para un trabajo fluido y flexible con números y magnitudes, así como

1 La KMK es la sigla de la Conferencia Permanente de Ministros de Cultura, órgano rector de las políticas educativas de la República Federal de Alemania33..33333.

con objetos geométricos (pregunta directriz: ¿Cómo funciona?). Estas habilidades básicas no se nombran directamente en las competencias de los estándares de aprendizaje, pero se ven como una condición necesaria (*ib. cit*.).

Respecto del segundo aspecto, se explicita que:

Los/as estudiantes pueden formarse una comprensión matemática, siempre y cuando se construyan —con cuidado y a largo plazo— "ideas" con respecto a conceptos y procedimientos matemáticos […]. Activar dichas ideas constituye una base, sin la cual las competencias no serán efectivas. En clase de matemáticas se debe invertir una buena parte de las actividades en esto (*ib. cit.*).

Finalmente, cabe reiterar que, como bien se señala en los documentos, los estándares no abarcan —tampoco lo pretenden— los múltiples y complejos aspectos relativos a la didáctica de las matemáticas, como en efecto se puede intuir al ver la diversidad de temas no abordados y de la abundante literatura de autores mencionados en el libro. Es el caso de Bruder, Freudenthal, Henn, Heymann y Winter, entre otros.

Es más, los autores señalan explícitamente que existen condiciones y requisitos básicos que no se mencionan en los estándares, pero que juegan un rol preponderante en el trabajo que se debe realizar en el aula. En tal sentido, la investigación sobre estándares es solo un paso inicial en el camino de entender a cabalidad la didáctica alemana de las matemáticas que subyace al planteamiento del trabajo por competencias.

El libro que aquí se presenta tiene la siguiente estructura:

En la **parte 1** los autores se ocupan de responder a las preguntas: ¿qué son estándares de aprendizaje? y ¿para qué deberían servir? Asimismo, se proporciona un panorama general del contenido del libro, así como sugerencias de cómo utilizarlo. Finalmente, en esta sección se describen a cabalidad las competencias matemáticas centrales y se ejemplifica la idea directriz *Datos y probabilidad*.

En la **parte 2** se abordan diversos aspectos distintivos de las clases de matemáticas orientadas al desarrollo de competencias. Los aspectos considerados en esta sección son: el rol de las tareas en las sesiones de aprendizaje, el diseño de la sesión de aprendizaje y uso de las tareas orientadas hacia el desarrollo de competencias desde un enfoque diagnóstico, el concepto de práctica inteligente y cómo implementarla en el aula; la orientación a proyectos y su relación con el desarrollo de competencias matemáticas, y la construcción de competencias a largo plazo, durante el año escolar y a lo largo de los grados.

En la **parte 3** se trata sobre las tareas de matemáticas orientadas al desarrollo de competencias; con énfasis en la variación de tareas, consideraciones sobre múltiples caminos de solución de las tareas matemáticas desde el punto de vista de la asignatura, el aprendizaje, la clase de matemáticas y el registro de desempeño, y por último, una descripción ejemplificada de los distintos tipos de tareas matemáticas: dibujar, completar, ampliar, tareas inversas. También se incluyen ítems sobre tareas para marcar, opción múltiple; consideraciones acerca de aprender de los errores; comprender, representar, conectar información; presentar respuestas, así como generar tareas, entre otros. En esta sección también se abordan las referencias a la realidad, es decir, tareas que provienen de contextos reales.

En la **parte 4** se presenta una colección de tareas matemáticas, y por último, en la **parte 5**, se tiene un anexo en el cual se detallan algunas características del conjunto de más de noventa tareas presentadas a lo largo del libro, con una clasificación según idea directriz, grado escolar y ámbito de exigencia correspondiente a cada una.

En conclusión, el libro ofrece un panorama completo, práctico y sumamente útil para conocer el modelo de estándares de aprendizaje de matemáticas desde un punto de vista muy concreto, centrado en el trabajo con tareas matemáticas que se trabajan en el aula.

Lima, diciembre de 2015

PARTE 1

LOS ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

1. INTRODUCCIÓN

Werner Blum

Estándares de aprendizaje es un concepto que pertenece desde hace algunos años a los términos clave del debate educativo en Alemania y despierta en el público tanto expectativas de mejora como los peores temores. En cualquier caso, todos los involucrados en el debate, incluyendo políticos, científicos, profesores[2] y padres de familia, dan por sentado que habrá considerables implicancias en la escuela y la enseñanza.

¿Qué son los estándares de aprendizaje y para qué deberían servir? El presente capítulo introductorio se ocupará de ambas preguntas, primero de forma breve y general, y posteriormente de forma aplicada concretamente a la asignatura de Matemática.

Finalmente, se proporciona un panorama general del contenido del presente libro, así como sugerencias de cómo utilizarlo.

2 En adelante se mencionan en este libro *profesores* y *alumnos*. Dichos términos incluyen a *profesoras* y *alumnas*, respectivamente.

1.1 Estándares de aprendizaje

1.1.1 ¿Qué son los estándares de aprendizaje?

El año 2003, como reacción a los resultados del estudio PISA, la Conferencia de Ministros de Cultura - KMK —ente rector de las políticas educativas en Alemania— decidió desarrollar estándares de aprendizaje para algunas asignaturas centrales. Los estándares rigen para los estudiantes que terminan la escuela básica (al término del cuarto grado), para la *Hauptschulabschluss* (al término del noveno grado) y para la *mittleren Bildungsabschluss* (al término de la escolaridad).

Para ello, se orientó hacia la experiencia de otros países (exitosos en PISA), en los cuales ya existen desde hace algunos años estándares vinculantes que definen lo que el sistema educativo debe lograr. Los fundamentos conceptuales de los estándares de aprendizaje para la decisión de la KMK se basaron en el estudio "Hacia el desarrollo de estándares de aprendizaje nacionales", realizado por un grupo de diez expertos bajo la conducción de E. Klieme (Klieme *et al*. 2003). Acto seguido se describieron los estándares de aprendizaje de las competencias referidas al contenido que los estudiantes debían lograr en cada etapa. Los estándares para matemáticas se basan en una amplia comprensión, anclada en la materia y en la estructura de la disciplina, que reflejan *metas de aprendizaje* que deben lograrse en la escuela y que, nuevamente, se engarzan con las metas de formación que van más allá de la asignatura. En este sentido, los estándares de aprendizaje son, en esencia, también estándares de rendimiento; ellos indican lo que se debería lograr al concluir un segmento de escolaridad. Decididamente no son estándares de enseñanza; por el contrario, los espacios de libertad para el diseño de las sesiones de aprendizaje deberían ser mayores. Es claro que ningún camino deberá ser considerado como la mejor manera de diseñar las clases. Es casi evidente que solo en una clase en la cual el esfuerzo del profesor está centrado en el logro de competencias, en un ambiente de trabajo activo orientado al aprendizaje, los estudiantes podrán alcanzar las competencias esperadas, tal como las formulan los estándares de aprendizaje.

¿Qué es nuevo? El avance fundamental frente a planes de enseñanza tradicionales es el modo como están formuladas las metas a alcanzar. Mientras que los planes de enseñanza por lo general se enfocan al manejo de contenidos, los estándares de aprendizaje nombran las competencias a lograr. ¿Pero qué significa *'competencias'?* Según Weinert (2001), son las capacidades y destrezas cognitivas "que tienen los individuos para solucionar diversos problemas de manera exitosa y responsable en determinadas situaciones". Naturalmente, las competencias solo se pueden lograr de la mano con contenidos concretos de la disciplina, es decir, no existe ninguna contradicción entre ‘contenidos’ y ‘competencias’. Por ello, los estándares de aprendizaje establecen contenidos vinculantes concentrados en contenidos núcleo de las diferentes asignaturas.

Igualmente, los ámbitos de exigencia de las competencias también se diferencian en el, así llamado, *Modelo de competencias*. Tales modelos describen distintas facetas y niveles de las competencias logradas y también dan indicaciones para posibles desarrollos. Para la mayoría de asignaturas aún no existen tales modelos de competencia en una forma elaborada: aquí hay una gran demanda de desarrollo. Lo que existe concretamente son competencias, sus facetas y sus niveles, que pueden ser logrados mediante la elaboración de tareas. En esa medida, los estándares de aprendizaje como tales pueden ser concretados a través de una amplia colección de tareas de la disciplina. Al mismo tiempo, estas tareas permiten que los estándares sean viables para una validación empírica. Cabe mencionar que a partir del trabajo con este tipo de tareas es posible concluir que la competencia se ha logrado.

1.1.2 ¿Para qué sirven los estándares de aprendizaje?

Con la introducción de los estándares de aprendizaje se entrelazan dos expectativas: una mayor claridad en las metas y una mejor oportunidad para la evaluación de logros de aprendizaje, especialmente para poder intervenir en el momento adecuado y con metas precisas. Esto significa que los estándares sirven para la orientación de todos los participantes —sobre todo el cuerpo docente, pero también los estudiantes, padres de familia, administración y público en general— alrededor de exigencias normativas establecidas y así lograr más claridad, mayor objetividad y mayor conexión que antes. Por otro lado, los estándares sirven como base para las pruebas de rendimiento. Sin embargo, se deben diferenciar cuidadosamente los distintos planos y los correspondientes instrumentos a utilizar:

- Los tests estandarizados pueden usarse para evaluar en qué medida se han alcanzado estos estándares en una región. Para ello se deben utilizar tareas ‘calibradas’ (es decir, normadas empíricamente). Dichos tests vienen ‘de afuera’ y solo pueden ser elaborados mediante pruebas muestrales. Sobre la base de su diseño no son adecuados ni para el diagnóstico individual, ni tampoco para determinar los rendimientos de aulas o escuelas. Un monitoreo de la enseñanza de este tipo solo se realiza de vez en cuando.

- Los tests orientados a los estándares (trabajos comparativos, trabajos de orientación o también pruebas centrales en una región) pueden servir para determinar el logro de los estándares en escuelas o en aulas. Aquí deberán utilizarse también tareas calibradas. Dichos tests vienen eventualmente 'de afuera' y serán trabajados por todos los estudiantes. Ellos dan también un punto de referencia para diagnósticos individuales y pueden —según cada diseño— ser utilizados para calificar. Su propósito principal es brindar orientación y sugerencias a los estudiantes. En especial, posibilitan fortalecer determinados formatos de tareas o ámbitos de exigencia. Este tipo de evaluaciones externas se puede realizar una vez al año.

- Los tests escolares internos orientados a los estándares o trabajos en clase sirven en especial para el diagnóstico individual. Provienen 'de dentro' y brindan información periódica al cuerpo docente acerca del rendimiento de la clase. Las tareas que aquí se utilizan no están calibradas; sin embargo, deben reflejar de manera adecuada el espectro de competencias que se debe evaluar cada vez. Estas evaluaciones internas corresponden a la rutina de trabajo de cada cuerpo docente.

Todas estas evaluaciones orientadas a estándares no tienen un propósito en sí mismas: sirven para establecer puntos de referencia para el mejoramiento en todos los planos identificados.

Por eso es importante no buscar alcanzar los estándares recién al final de los procesos educativos, sino de forma adecuadamente anticipada, con el fin de poder implementar medidas de incentivo concretas. 'Medir' y 'desarrollar' no son, de esta forma, conceptos excluyentes, como usualmente se teme. Al contrario, las medidas de evaluación y de desarrollo deben ir siempre de la mano.

¿Qué quiere decir *'mejorar', 'estimular', 'desarrollar'?* El primer lugar para esto es el dictado de clase. Como ya se indicó, solo una enseñanza exigente, cognitivamente activadora y que motive a aprender ofrece a los alumnos la posibilidad de alcanzar las exigencias determinadas por los estándares. A partir de todo lo que se conoce sobre la enseñanza, existe en Alemania (así como en otros lugares) potencial de mejora. La implementación concreta de estándares de aprendizaje implica en el fondo el desarrollo de la calidad en la enseñanza. A través de una formulación lo más clara posible de expectativas de competencias, los estándares de aprendizaje deben brindar a los profesores una ayuda para enfocar adecuadamente el trabajo en clase. En esa medida, la meta detrás de la introducción de estándares de aprendizaje es la mejora de la calidad de la enseñanza[3] (la formulación de esta meta aplicada específicamente a la matemática

3 Lo que 'calidad de enseñanza' puede significar está descrito, entre otros, en Helmke (2003) o Baumert *et al*. (2004). Hay muchos indicios empíricos que indican que solo una formulación de la enseñanza que cumpla con ciertos criterios de calidad tendrá efectos positivos en el rendimiento escolar.

se encuentra en la sección 1.2.4). Una derivación directa, casi deductiva de la acción de enseñanza a partir de los estándares, no es posible.

De manera más concreta, la 'enseñanza orientada a estándares' significa que en cada hora y cada unidad de enseñanza se debe poder saber en qué medida se aporta al fomento y desarrollo de competencias escolares en contenidos. Asimismo, la enseñanza a más largo plazo debe estar concebida de forma tal que la acumulación de competencias esté en el centro. La pregunta más importante no es *"¿qué actividades se han realizado?"* sino *"¿qué habilidades y aptitudes se han desarrollado?"*. Vista de esta forma, la enseñanza orientada a estándares no tiene nada de nuevo. Estos fueron desde siempre los retos de una enseñanza razonable; sin embargo, a menudo fueron relegados a un segundo plano detrás del afán de trabajar los catálogos de contenidos del plan educativo. Los estándares de enseñanza buscan, entonces, brindar un respaldo para la enseñanza como siempre debió ser concebida. Para formularlo de manera un poco más cuidadosa: el propósito de una objetivación de procesos escolares relacionado con la introducción de estándares debe estar en un buen equilibrio con las metas generales de una escuela, es decir, proporcionar a los niños y jóvenes de una educación general y amplia.

Hasta ahora se hablaba repetidamente de tareas que concretan los estándares de enseñanza. ¿Qué se entiende por esto? En este punto tiene sentido, según el contexto de aplicación, distinguir entre diversos roles de tareas. Para pruebas de rendimiento ("preguntas de examen"), las tareas deben satisfacer ciertas condiciones mínimas, como por ejemplo, que puedan ser entendidas sin ayuda externa, completadas en un tiempo razonable, y corregidas con veracidad. Si se trata del fomento de competencias en el salón de clases ("tareas de aprendizaje"), dichas restricciones desaparecen y entra en primer plano el contenido de estimulación y potencial de aprendizaje de las tareas. En cualquier caso, debe estar claro qué potencial de competencias está incluido en una tarea, qué se espera del estudiante al completarla y cómo se evaluará el trabajo del alumno. De esta forma, se está partiendo de una definición amplia de lo que constituye una 'tarea'. Queda claro que la enseñanza en el salón involucra mucho más que una mera serie de tareas, y que estas no son decisivas en sí mismas, sino la forma en que son trabajadas. No obstante, la resolución de tareas es en cualquier caso una actividad dominante en el quehacer del escolar; en ese sentido, está justificado que a las tareas se les asigne un rol fundamental en la formulación de estándares.

1.1.3 Riesgos potenciales

Hasta ahora se describieron las intenciones (orientación, evaluación) y oportunidades (desarrollo de la calidad) de la nueva herramienta "estándares de enseñanza". Pero como cualquier nueva herramienta, también esta trae consigo potenciales riesgos y peligros de abuso. Así, existe el riesgo de que la enseñanza, en el afán de superar estándares, degenere en un mero ejercicio de preparación para los exámenes (*teaching to the test*). Un peligro asociado consiste en que solo se trabajen estándares atomizados soslayando el marco general. No obstante, estos riesgos ya existen en la actualidad, aún antes de aplicar estándares, dado que la enseñanza de la matemática en Alemania consiste en gran medida en un 'campo de prácticas' para ciertos tipos de ejercicio que 'son fijos' para el siguiente examen.

Este peligro es percibido, ahora que 'viene de fuera', de forma más consciente. De esta manera se sabe, a partir de la investigación de la enseñanza y del aprendizaje, que un simple entrenamiento de ejercicios, en el caso de tipos de tarea orientados a procesos, puede llegar a ser inefectivo en el aprendizaje. Para la acumulación de competencias es necesaria una enseñanza de ancha base y orientada a las competencias de forma consecuente. Naturalmente tiene sentido que las tareas de aprendizaje utilizadas se orienten a competencias que, a su vez, se puedan concretar en tareas o preguntas de examen. Un *'teaching to the test'* entendido de esta forma sí es deseable.

Otro peligro consiste en esperar que los efectos buscados (sobre todo desarrollo de la calidad en la enseñanza) sean consecuencia automática de la introducción de estándares vinculantes. Como es sabido a partir de otros procesos de cambio, es imprescindible contar con una *estrategia de cambio* junto con un *conjunto de medidas* bien coordinadas entre sí. A esto último pertenecen en el caso de estándares de enseñanza, sobre todo actividades de fomento al aprendizaje y medidas enfocadas de desarrollo del aprendizaje y de la escuela al estilo del programa SINUS. Adicionalmente, los planes educativos deben ser cambiados conforme a los estándares, concentrados en los contenidos núcleo y orientados a las competencias que se debe alcanzar escalonadamente. En suma, hay mucho por hacer en varios niveles para volver realidad las intenciones de los estándares. Naturalmente, la *plana docente* juega un papel clave en este aspecto: de ella depende el éxito de la introducción de estándares. El desarrollo de competencias de niños y adolescentes siempre ha sido la meta principal de cualquier trabajo de enseñanza. Sin embargo, como ya se mencionó, el alcance de esta meta se ha desviado debido a una orientación excesiva a los contenidos a tratar según el plan educativo y un énfasis sesgado de conocimientos y habilidades. La meta de todas las medidas de acompañamiento de estándares debe consistir en brindar a los docentes el apoyo necesario para traer nuevamente al centro la meta de un desarrollo amplio de competencias.

1.2 Los estándares de aprendizaje de matemáticas

1.2.1 Concepto de los estándares de matemática

El modelo de competencias, que sirve como base a los estándares de aprendizaje en matemáticas, se sirve en parte de dos modelos cuyo valor ya ha sido demostrado en otros contextos[4]. Se distinguen tres dimensiones que se pueden denominar como *proceso*, *contenido* y *requerimiento (Fig. 1)*:

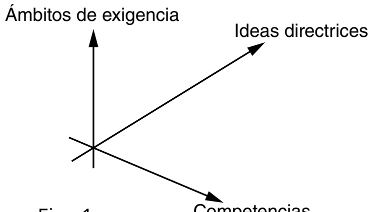


Fig. 1

1. Las *competencias matemáticas generales*.
2. Las *competencias referidas al contenido matemático* ordenadas según *ideas directrices*.
3. Los *ámbitos de exigencia*.

Para 1. Las *competencias matemáticas generales* (*competencias*) son:

- Argumentar matemáticamente.
- Resolver problemas matemáticamente.
- Modelar matemáticamente.
- Utilizar representaciones matemáticas.
- Manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas.
- Comunicar matemáticamente.

Estas competencias forman el núcleo de los estándares de matemática. De esta manera (ver Niss 2003) se abarcan aspectos centrales del trabajo en matemáticas con la amplitud suficiente. Quien hace matemáticas modela, argumenta, utiliza representaciones, calcula, etc. Por lo tanto, no es posible ni deseado separar completamente estas competencias. Más bien existen traslapes naturales entre ellas que, al llevar a cabo ejercicios matemáticos, se presentan en forma conjunta. Cada una de estas competencias tiene un componente *activo* y uno *pasivo*: argumentar frente a

4 Especialmente en la investigación de PISA, ver OECD (2003): diferencian las *competencies* como dimensión de proceso, las *overarching ideas* como dimensión de contenido, y los *competency clusters* como dimensión de exigencia.

recibir, comprender, utilizar o valorar argumentos; modelar frente a utilizar modelos dados, etc. Una descripción más exacta de estas competencias se encuentra en el capítulo 2 de este libro.

Para 2. Las *ideas directrices* son:

- Número.
- Medición.
- Espacio y forma.
- Relaciones funcionales.
- Datos y azar.

Estas ideas directrices buscan capturar los fenómenos (Freudenthal 1983) que se obtienen cuando se ve el mundo con una mirada matemática. Se ven, por ejemplo, cuantificaciones de todo tipo (números), o se ven figuras espaciales, formas, patrones, etc. También pertenece al *mundo* el universo mental de nuestros pensamientos e ideas. A partir de estas ideas directrices se han desarrollado las ramas matemáticas de la aritmética, geometría, álgebra y estocástica. Las ideas directrices y las ramas no son, sin embargo, la misma cosa. Dentro de las ideas directrices se incluyen competencias relacionadas con contenidos (como por ejemplo la "utilidad del cálculo porcentual en procesos de crecimiento como el cálculo de intereses").

Para 3. Las competencias se muestran sobre todo en forma de actividades al solucionar tareas (en un sentido amplio). Los ámbitos de exigencia deben capturar sobre el plano teórico el requerimiento cognitivo que dichas actividades requieren. Se distinguen en los estándares de aprendizaje de la matemática tres ámbitos de exigencia denominados: *I. Reproducir*, *II. Desarrollar interrelaciones*, y *III. Generalizar y reflexionar*. Estas denominaciones proveen orientación, pero no se deberían asumir muy al pie de la letra. Por ejemplo, cuando se puede desarrollar una interrelación con un solo paso, se asignará la actividad al ámbito I. En cambio, si son necesarias actividades complejas, se asignará este proceso al ámbito III. En este punto es necesaria una aclaración importante. Según el contenido curricular ya trabajado, las tareas pueden ser más o menos familiares para el estudiante (y así, de forma tendencial, más o menos difíciles). Esto no se captura con el concepto de ámbitos de exigencia; se trata más bien de la complejidad cognitiva inherente a una tarea. Naturalmente esta está relacionada a su vez con la dificultad de la tarea: en general, los ejercicios correspondientes al ámbito III son más difíciles para los alumnos que aquellos del ámbito I. Una diferenciación más exacta y vinculada con competencias de los tres ámbitos de exigencia se describe también en el capítulo 2.

Aún con esta introducción descriptiva de las tres dimensiones, no se llega a captar el 'espíritu' de los estándares de aprendizaje de forma completa. Los estándares se relacionan de forma explícita con las 'experiencias fundamentales' formuladas por Winter (1995), que deben ser proporcionadas a los alumnos en el curso de matemáticas:

- Percibir y comprender fenómenos del mundo a nuestro alrededor (naturaleza, sociedad y cultura) de forma específica con ayuda de la matemática.
- Conocer y comprender objetos matemáticos como creaciones del pensamiento.
- Adquirir a través del trabajo matemático habilidades heurísticas que superan el ámbito matemático.

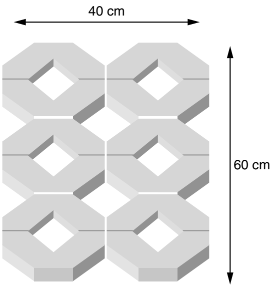
Se podría hablar de aspectos de la matemática orientados a la aplicación, la estructura y los problemas. Todos (en especial el último) apuntan al objetivo central de la enseñanza de la matemática, que es la transmisión de competencias generales. Los estándares de aprendizaje constituyen un intento de capturar y concretar estos objetivos generales en exigencias de competencia más aplicadas. De esta forma se legitima el uso del concepto de estándares de aprendizaje. Nuevamente se hace evidente que los estándares matemáticos son de forma decidida concebidos como específicos a la materia, que parten de un concepto amplio de la matemática y que se basan en tradiciones que se han generado y mantenido en la didáctica de la matemática durante décadas. Los estándares contribuyen a tomar este consenso en serio y a asistir a los profesores en volcarlo al día a día de la enseñanza.

1.2.2 Análisis de ejercicios matemáticos orientados a competencias

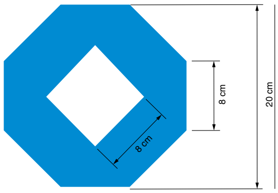
Como se mencionó ya varias veces, los estándares de aprendizaje de la matemática se ilustran y concretan a través de un amplio espectro de tareas matemáticas. En la enseñanza cotidiana de las matemáticas —según la mayoría de los estudios—, dominan por lo general tareas orientadas al cálculo y a procesos, en los cuales el grado de exigencia está determinado por la complejidad técnica de las operaciones a ejecutar. Dichas tareas también son razonables desde un punto de vista de competencias (se trata en este caso principalmente de la competencia del trabajo simbólico, técnico y formal con la matemática); sin embargo, representan solamente una porción minoritaria del espectro de tareas posibles. Cuando hablamos de tareas 'orientadas a competencias', nos referimos sobre todo a aquellas que no requieren exclusivamente habilidades técnicas.

La tarea ‘Empedrados’ servirá para ilustrar este razonamiento.

Empedrados



El pavimento de malla de cemento con pasto de la entrada de una cochera permite que las lluvias puedan escurrir dentro de la tierra y unirse al agua subterránea. De esta forma se mantiene el círculo del agua y las precipitaciones no conducen a inundaciones en los ríos.



La imagen de la izquierda muestra un ejemplo de pavimento de malla, que contiene orificios para dejar pasar el agua y partes de cemento permeable. La loseta mide 40 x 60 x 10 cm y se compone de seis partes iguales. La imagen de la derecha muestra la forma y medidas de una de estas partes.

a) La entrada a la cochera del señor Meier tiene 8 m de largo y 6 m de ancho. ¿Cuántas losetas de pavimento de malla son necesarias para cubrirla?

b) ¿Qué porcentaje de la superficie total de la entrada está compuesta por los orificios?

c) El señor Meier descubre en una tienda de materiales de construcción una torre de losetas. ¿Cuantas losetas se encuentran en dicha torre, si están dispuestas sin espacios intermedios entre sí? Explica cómo llegas al resultado.

d) ¿Se puede transportar todas las losetas necesarias con un camión cuya capacidad es de 7,5 toneladas? (la densidad del cemento es de 2,3 g/cm^3). Explica los pasos que utilizaste para llegar a la solución.

La **tarea parcial a)** pertenece a la idea directriz *Medir*. Para llegar a una solución se debe primero leer el texto de la tarea distinguiendo informaciones relevantes e irrelevantes (esta es una parte fundamental de la competencia *Comunicar*). La traducción de la situación real en la matemática (una parte de la competencia *Modelar*) ya se ha realizado de una forma parcial al proporcionar un dibujo del pavimento de malla, pero es necesaria aún una representación geométrica de la entrada a la cochera. Con ayuda de tal representación (competencia *Utilizar representaciones*) se debe plantear el —bastante simple— plan de solución (establecer una relación entre la entrada a la cochera y los pavimentos enmallados, lo que pertenece a la competencia *Resolver problemas*). Luego se calcula (competencia *Manejar elementos simbólicos, formales y técnicos*, también muy sencillo en este caso), y el resultado (200) se traduce nuevamente a la situación real (nuevamente competencia *Modelar*). Debido a los requerimientos de lectura, se asigna esta tarea parcial al ámbito de exigencia II.

La **tarea parcial b)** pertenece principalmente a la idea directriz *Medir*, aunque la idea directriz *Número* también está involucrada a través del establecimiento de proporciones. Se deben calcular y poner en relación dos áreas de superficie. Nuevamente entran en juego *Comunicar, Modelar, Resolver problemas, Utilizar representaciones* y *Manejar elementos simbólicos, técnicos y formales*. Los requerimientos de lectura y el número de pasos señalan al ámbito de exigencia II.

La **tarea parcial c)** abre un nuevo contexto de problema. Dado que se trata de determinar un número, este ejercicio pertenece a la idea directriz *Número*. Sobre la base de las fotos (*Utilizar representaciones*) se puede idear una estrategia simple de contar (*Resolver problemas*) y de argumentar (*Comunicar*). En este caso, la traducción necesaria Situación real <-> Matemática es trivial. Esta tarea parcial se puede ubicar en el ámbito de exigencia I.

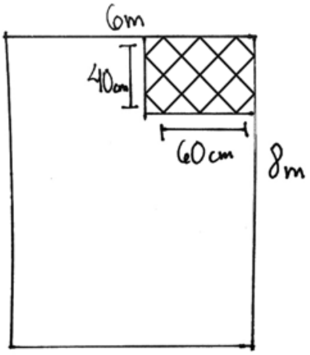
La **tarea parcial d)** pertenece a la idea directriz *Medir* y es algo más compleja. A partir de los datos, proporcionados de forma dispersa, se debe calcular el peso de todas las piezas de pavimento y comparar el resultado con el peso de carga de un camión. Las competencias requeridas son *Comunicar* (leer el texto y argumentar la respuesta), *Modelar* (traducir la situación a cálculos e interpretar los resultados en la realidad), *Resolver problemas* (desarrollar un proceso de solución) y *Manejar elementos simbólicos, técnicos y formales* (llevar a cabo diversos cálculos). Por el número de pasos a seguir, se puede ubicar esta tarea parcial en el ámbito de exigencia II.

La tarea en su totalidad no es de ningún modo inusual, pero se distingue de las tareas corrientes por sus requerimientos de competencias más amplios. En este punto es necesaria una aclaración adicional, que es válida para todos los capítulos de este libro. Cuando hablamos de ‘competencias involucradas en la tarea’ o ‘competencias necesarias para la tarea’, se presupone un análisis cognitivo de la tarea en el ámbito teórico. En el ejemplo de la **tarea parcial a)**, quien resuelva la tarea, independientemente del método, deberá entender el texto, identificar una vía de solución, trabajar con representaciones, matematizar la situación, calcular e interpretar el resultado. Cómo se calcula en detalle, qué representaciones en particular se utilizan, cómo se desarrolla la relación entre forma y tamaño de la cochera así como forma y tamaño de los pavimentos, todo esto es a discreción de la persona que lleva a cabo la tarea. Algo similar es válido para la clasificación en los tres ámbitos de solución, que también ocurre en el plano teórico. En ese sentido, se puede clasificar la tarea *a priori* en el modelo de competencias a tres dimensiones. Naturalmente también es altamente interesante ver cómo los individuos solucionan la tarea, cómo difieren los métodos utilizados.

A continuación se presentan tres soluciones de alumnos a la **tarea parcial a)**:

Solución del escolar 1

a)



En el ancho caben 10 losetas de pavimento
En el largo caben 20 losetas de pavimento
Por lo tanto: $10 \cdot 20 = 200$ losetas

a) Se necesitan 200 losetas de pavimento.

Solución del escolar 1

a) Entrada del garaje:

$8m \cdot 6m = 48m^2$

Losetas de pavimento:

$0{,}4m \cdot 0{,}6m = 0{,}24m^2$

$48m^2 : 0{,}24m^2 = 200$

Se necesitan 200 losetas de pavimento.

Solución del escolar 3

a) $A_p = 2\sqrt{3} \cdot a^2$

$= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 8\,cm^2$

$= 221,703\ cm$

$A_g = a \cdot b$

$A_g = 8\,00\,cm \cdot 600\,cm$

$= 480.000$

$$\frac{480.000\ cm^2}{221,703\,cm^2} = \frac{2165,06}{6} = 360,83$$

Se necesitan ~~2185~~ $\frac{3}{50}$ losetas de pavimento
360

El escolar 1 se hace una imagen relativamente exacta del ingreso a la cochera y reconoce cuántas piezas de pavimento caben una junto a otra (10 y 20, respectivamente). Esto conduce de forma correcta al resultado 10 • 20 = 200.

El escolar 2 solo considera los contenidos de área, no las superficies en sí. De esta forma llega también al resultado correcto de 200, pero no ha considerado si podría ser necesario cortar algunas piezas del pavimento.

El escolar 3 calcula, de forma similar, solo las áreas, pero considera otra forma para las piezas de pavimento. La fórmula aplicada y la división entre 6 apuntan a la forma utilizada: solo considera un polígono de ocho lados. El resultado es falso. El número 360 responde a otra pregunta que no fue planteada en la tarea (¿cuál podría ser?).

1.2.3. Construcción de tareas matemáticas orientadas a competencias

Cuando se trata de utilizar tareas para propósitos didácticos específicos, se dará el caso de que las tareas a disposición no cubran todos los objetivos que se buscan. Entonces, es necesario elaborar nuevas tareas, lo que puede ocurrir mediante la variación de tareas ya existentes o a través de la construcción de tareas desde cero. Tomemos como ejemplo la recién analizada tarea 'Empedrados'. En su forma actual, la tarea no incluye casi partes argumentativas. Cuando el contexto dado también deba ser utilizado para argumentar, se puede pensar en las siguientes tareas adicionales (según el tema de la clase):

- Argumenta: el polígono de ocho lados representado no es regular.
- La entrada a la cochera doble del señor Müller tiene 8,5 m de largo y 12 m de ancho. Jörg dice: "Es muy simple: el señor Müller necesita (8,5 • 12) : (0,4 • 0,6) = 425 de estas losetas de pavimento". Toma una posición respecto de la solución de Jörg.
- Argumenta sobre la base de la imagen izquierda de la página 22: las medidas de la imagen derecha de la página 22 no son correctas.

Otros puntos de vista según los cuales se pueden variar tareas como esta son, por ejemplo:

- Cambio del alcance de informaciones del mundo real (por ejemplo, concentración en el núcleo geométrico de la tarea).
- Cambio del contexto.
- Cambio de la exigencia de modelación (por ejemplo, proporcionar solo una foto del pavimento con una persona como referencia de escala, sin medidas).
- Cambio de la exigencia de la solución del problema (por ejemplo, la tarea consiste solo en encontrar las medidas de las partes **a)** y **d)**, sin datos sobre densidad).

En el capítulo 1, página 152, se encuentran otras consideraciones sobre la variación de tareas.

En la construcción de tareas *desde cero* es importante, por así decirlo, andar por el mundo con los ojos abiertos y descubrir la matemática que se encuentra en todas partes. Tomemos un ejemplo. En el año 2005 un fabricante de rollos de película fotográfica puso en el mercado el empaque ilustrado en la página 27. Este empaque debía recordar a una pelota de fútbol, aprovechando el contexto de la copa mundial 2006. Se puede notar inmediatamente que el empaque no tiene la forma de una pelota de fútbol, dado que esta consiste en pentágonos y hexágonos, mientras que el empaque está compuesto por cuadrados y triángulos. No obstante, este empaque sirve de base para diversas actividades matemáticas. La siguiente tarea desarrolla algunas de estas posibilidades.

Tarea 2: Empaque de película fotográfica

Para el mundial de fútbol, una compañía de película para fotos ideó un empaque especial para sus productos: grupos de cuatro rollos se empacan en cajitas cuya forma asemeja una pelota de fútbol.

Las dos imágenes muestran una de estas cajas desde perspectivas diferentes, para que te puedas hacer una idea de cómo están construidas. Si observas las cajas, verás que tienen algunas superficies cuadradas y otras superficies triangulares que están orientadas hacia adentro. La longitud de un lado de los cuadrados mide 4 cm. Los triángulos son de ángulo recto y aristas iguales. Tres de dichos triángulos configuran una pirámide. El empaque obtiene de esta forma una mayor estabilidad, y además, se ve más interesante.

a) ¿De cuántos cuadrados y cuántos triángulos se compone uno de estos empaques?

b) Calcula la superficie total del empaque.

c) También es importante saber cuánto espacio hay dentro del empaque. Los diseñadores afirman que los empaques contienen un volumen de 528 cm^3 (redondeado). Propón y formula dos métodos que te permitirían calcular el volumen. Calcula con uno de los dos métodos propuestos: ¿obtienes también como resultado 528 cm^3?

d) Cada uno de los cuatro rollos de película se encuentra en un envase de forma cilíndrica (diámetro: 3,1 cm; altura: 5,2 cm). ¿Qué porcentaje de los empaques se mantiene vacío, una vez que las cuatro películas están empacadas? Estima primero el porcentaje y recién después haz el cálculo preciso.

e) Sustenta la siguiente afirmación: dos de dichos envases cilíndricos, uno encima del otro, no caben dentro del empaque.

La **tarea parcial a)** pertenece a la idea directriz *Espacio y forma*. Las competencias esenciales necesarias para una solución son *Resolver problemas* (en concreto, desarrollar una estrategia de contar) y *Utilizar representaciones* (interpretar las fotos y usarlas como orientación). La modelación (pasar del empaque real al cuerpo geométrico idealizado y viceversa) en este caso es trivial. Dados los pasos necesarios en el proceso de soluciones, se clasifica a esta tarea parcial en el ámbito de exigencia II.

Las **tareas parciales b) y c)** pertenecen a la idea directriz *Medir*. Sobre todo en **c)** es necesaria nuevamente una estrategia (*Resolver problemas*) para descomponer el cuerpo en porciones calculables. El trabajo simbólico, técnico y formal también entra en juego como competencia adicional en **b)** y **c)**; ambas tareas parciales pertenecen al ámbito de exigencia II.

También la **tarea parcial d)** pertenece a la idea directriz *Medir*. Asimismo, la tarea genera un vínculo con la idea directriz *Número*, en tanto requiere que una proporción de volumen sea calculada en porcentajes. De forma similar, esta tarea parcial corresponde al ámbito II, debido a los varios pasos que demanda para su solución.

La **tarea parcial e)** se puede asignar principalmente a la idea directriz *Espacio y forma*, ya que un requerimiento esencial constituye es cómo los recipientes de película pueden estar ubicados dentro del empaque. Sobre todo las competencias *Argumentar* y *Resolver problemas* son necesarias en esta tarea. Debido a sus altas exigencias, *Solucionar problemas* se asigna esta tarea parcial al ámbito de exigencia III.

Cuando se trata de utilizar el contexto dado para actividades adicionales, se podría, por ejemplo, traer a colación el precio del empaque de película. Las siguientes tareas parciales adicionales (pertenecientes a la idea directriz Número) podrían ser consideradas:

f) Una tienda de fotografía ha reducido el precio de las películas en cada empaque de EUR 6,99 a EUR 5,99. ¿Qué porcentaje de rebaja supone esta reducción?

g) En la misma tienda de fotografía se puede comprar las mismas películas en una presentación de dos filmes por caja. Cada caja cuesta EUR 1,99. ¿Qué porcentaje se podría ahorrar en comparación con el empaque de la imagen, si se quieren comprar cuatro películas?

1.2.4 Clases con tareas orientadas a competencias

Las tareas como 'Empedrados' o 'Empaque de película fotográfica' y sus variantes pueden ser utilizadas en la escuela de diversas formas. En primer lugar, todas las tareas parciales presentadas son en principio adecuadas, tanto para el dictado de clases como para las pruebas de desempeño (para la diferenciación de estos aspectos, ver capítulo 1, página 81). En la clase misma, se puede emplear este tipo de tareas para diversos propósitos, en especial para la práctica y el reforzamiento (ver capítulo 3, página 113), pero también para un mejor diagnóstico de las fortalezas y debilidades de determinados alumnos en relación con la solución de tareas orientadas a competencias (ver capítulo 2, página 96).

En este contexto se debe recalcar que una tarea no lleva *per se* a la formación, reforzamiento y desarrollo de competencias; esto lo puede lograr solamente su tratamiento adecuado en una forma que permita al estudiante llevar a cabo las tareas por sí mismo, así como reflexionar sobre ellas, argumentar vías de solución, discutir críticamente los resultados, etc. Para abreviar, el desarrollo de competencias de los alumnos debería estar en el centro de los esfuerzos de forma más consciente y consecuente que hasta el momento.

Los aspectos discutidos definen la 'calidad educativa' para el curso de matemática. Podemos distinguir los tres componentes de forma algo más sistemática (derivado de Blum & Leiss 2005):

- Un *diseño de enseñanza con contenidos de fondo*, que ofrezca a los alumnos variadas oportunidades para actividades relacionadas con competencias (para la modelación, argumentación, comunicación, etc.) y que genere variadas interconexiones, tanto dentro de la matemática misma como entre la matemática y la realidad.
- Una *activación cognitiva del alumno*, es decir, que la enseñanza estimule actividades mentales, facilite e incentive al aprendizaje y trabajo autónomo, promueva comportamientos estratégicos de aprendizaje (actividades heurísticas) y exija siempre una reflexión más allá del aprendizaje mismo (actividades metacognitivas).
- Una *enseñanza efectiva y orientada al alumno* ('classroom management'), en la cual las diversas formas y métodos de enseñanza varían de forma flexible, las horas de clase están claramente estructuradas, existe una atmósfera de aprendizaje con pocas distorsiones, etc.

El vehículo más adecuado para la realización de una enseñanza así son las tareas orientadas a competencias. En particular variantes de tareas abiertas, como las mostradas al final de la sección 1.2.3, son especialmente apropiadas para una enseñanza orientada a la autonomía, en la que la fuerza docente diagnostica de forma individual y permite que diferentes soluciones de los alumnos sean presentadas y discutidas.

1.3 Acerca de este libro

La meta principal del libro *Bildungsstandars Mathematik: Konkret* es ilustrar y concretar los estándares de aprendizaje de matemáticas mediante un gran número de tareas matemáticas. Es evidente que ninguna selección —hasta cierto punto razonable— de tareas puede agotar el espectro completo de los enunciados posibles. Para seis competencias, cinco ideas directrices y tres ámbitos de exigencia ya existen noventa combinaciones distintas. Además, en una tarea convergen las competencias en distintas combinaciones. No obstante, mediante la selección de tareas aquí reunidas nos hemos preocupado de esbozar al menos *la más amplia gama de enunciados de tareas matemáticas posible*. Las tareas cubren todas las competencias, todas las ideas directrices y todos los ámbitos de exigencia, en diversas combinaciones. En este proceso no hemos tenido en cuenta los tipos de tareas más recurrentes, ya que suponemos que de por sí pertenecen al repertorio de cualquier profesor de matemáticas. Por otro lado, nos hemos abstenido —en gran medida— de presentar tareas especialmente abiertas, originales o particularmente exigentes, con el fin de mantenernos muy cerca de la enseñanza cotidiana. Con ello, de ninguna manera se debe restar méritos al significado de dichas tareas abiertas originales y exigentes.

Pero el libro es más que una simple colección de tareas: también contiene sugerencias para su aplicación en clase justamente para activar, tanto como sea posible, el potencial que las tareas tienen para desarrollar competencias. El libro busca ayudar al cuerpo docente a optar por tareas orientadas al desarrollo de competencias con fines didácticos (introducción, práctica, diagnóstico, pruebas de rendimiento) y a construirlas por sí mismos, también a partir de la selección de tareas que aquí se entregan. Por otro lado, este libro no ofrece una metodología de enseñanza: el foco del libro son las tareas ilustradas y su entorno de aprendizaje.

Junto con su empleo para fines didácticos, el libro también puede ser utilizado para la capacitación continua de los docentes. Lo que ahora —y en un futuro previsible—

se encuentra sobre el tapete son medidas de capacitación completamente referidas a estándares de aprendizaje. Con ello, la palabra 'capacitación' aún no ha tocado el núcleo: se trata de que cada profesor de matemáticas no solo se convierta en experto en estándares, sino que avance hasta convertirse en un actor en la adecuada realización de los estándares. Esto solo se puede lograr cuando los docentes se familiarizan con el espíritu de los estándares de aprendizaje, es decir:

- con el propósito de describir el rendimiento a través de las competencias, y con el modelo de competencia aquí utilizado (competencias, ideas directrices, ámbitos de exigencia),
- con el análisis de las tareas, tanto antiguas como nuevas, vistas a través de los 'anteojos de las competencias',
- con la construcción focalizada y variación de tareas orientadas al desarrollo de competencias,
- con el empleo variable de tareas afines en una clase de matemáticas orientada al desarrollo de competencias,
- con el uso de dichas tareas para diagnóstico y evaluación,
- con la conversión de resultados diagnósticos y de evaluación en medidas de promoción para estudiantes individuales o para toda la clase.

El presente libro puede ser utilizado como material para actividades de capacitación de diversa índole, ya sea de manera individual o en grupos. Conforme con los puntos arriba mencionados, se puede, por ejemplo:

- aprovechar el cuantioso análisis de tareas en este libro para observarlas desde el punto de vista del desarrollo de competencias (ver capítulo 1, página 152, y capítulo 2, página 162),
- emplear las reflexiones del capítulo 2 (página 96) para incrementar las capacidades diagnósticas del cuerpo docente,
- las propuestas del capítulo 1 o 4 pueden ser puntos de partida para discusiones sobre la calidad de la enseñanza,
- las reflexiones en el capítulo 5 pueden estimular el intercambio de experiencia entre profesores en eventos gremiales.

El libro no pretende ser un recetario sobre cómo se debe llevar a cabo la enseñanza de las matemáticas. Como cualquier material, hay que utilizarlo de manera consciente y siempre evaluando quién es el receptor. Se deben seleccionar tareas o capítulos determinados y utilizarlos en los contextos adecuados. Este libro debe llevar a la reflexión más que a la simple aplicación.

1.3.1 Panorama general de las partes del libro

El libro está organizado de la siguiente manera: en los primeros dos capítulos de la parte 1 se explica de forma detallada el núcleo de los estándares de aprendizaje, es decir, las competencias. El capítulo 2 describe con mayor exactitud seis competencias matemáticas generales. En el capítulo 3, a partir del ejemplo de la idea directriz *Datos y azar*, se explica qué son las competencias al contenido y cuál es la relación entre las ideas directrices y las áreas de conocimiento.

La parte 2 pone el énfasis en la clase. Incluso si los estándares de aprendizaje 'solo' describen el desempeño esperado en los escolares, esto tiene efectos directos en la clase. Esto es así porque en clase se generan las condiciones para que los escolares puedan tener tal desempeño. El capítulo 1 muestra cómo —en diferentes situaciones en clase— se puede recurrir a tareas adecuadas, que aporten al desarrollo de las competencias. El énfasis del capítulo 2 recae en el aspecto diagnóstico; el autor subraya que las tareas también pueden ser un instrumento útil en clase para evaluar las competencias con las que cuentan (o no) los escolares. En el capítulo 3 el foco está en la importancia de practicar y repetir a partir de tareas adecuadas. En el capítulo 4 se aborda otra forma de enseñar las clases, desde un enfoque de proyectos. Mientras que todos estos capítulos se centran más bien en aspectos 'locales', el capítulo 5 tematiza un aspecto 'global', esto es, el desarrollo de competencias a lo largo del tiempo. La autora resalta sobre todo la importancia de las estrategias de aprendizaje. En general, la parte 2 debe elucidar cuán importante es para los docentes mantener una 'mirada de competencias' en todas las fases y situaciones de la clase, es decir, tener en cuenta el desarrollo de las competencias en los escolares cuando se planifiquen y diseñen las clases.

La parte 3 aborda con mayor énfasis las tareas en sí. Se trata de la 'mirada de competencias' sobre las tareas, en sus diferentes facetas. El capítulo 1 demuestra cómo se puede variar una tarea, de forma que tenga sentido. El capítulo 2 enfatiza cuán importante es no solo permitir que los escolares encuentren diferentes soluciones para una misma tarea, sino más bien promoverlo de forma consciente. En el capítulo 3 se muestran los diversos formatos que puede tener una tarea diseñada desde un enfoque de competencias. Finalmente, el capítulo 4 muestra diferentes tipos de tareas vinculadas con la realidad.

La parte 4 contiene un grupo de tareas. De este modo se busca ampliar el espectro de tareas y ámbitos, que no está bien representado en las partes 1-3. Esta parte del libro se asemeja a una colección de tareas. El libro concluye con una síntesis de todas las tareas en la parte 5.

BIBLIOGRAFÍA

Baumert, J. *et al*. (Hrsg.) (1997). Informe para la preparación del programa "Aumento de la eficiencia de las clases de matemáticas y ciencias" *(Materialien zur Bildungsplanung und Forschungsförderung, Heft 60).* Bonn: Bund-Länder- Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung.

Blum, W. & D. Leiß (2005). Modelar en clases a partir de la tarea del tanque. En: *Enseñar matemáticas*, H. 128, S. 18-21.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Helmke, A. (2003). *Registrar, evaluar y mejorar la calidad de las clases*. Seelze: Kallmeyer.

Kirsch, A. (2002). Systematischer Aufbau der 'vollsymmetrischen' Archimedischen Polyeder. In: *Praxis der Mathematik* 44, H. 5, S. 227-229.

Klieme, E., H. Avenarius, W. Blum, P. Döbrich, H. Gruber, M. Prenzel, K. Reiss, K. Riquarts, J. Rost, H.-E. Tenorth, H. Vollmer (2003). Para el desarrollo de estándares de aprendizaje nacionales - Una expertise. En: BMBF (Hrsg.): *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards*. Bonn, S. 7-174.

Messner, R. (2004). Lo que diferencia la formación de la producción. En: *Bildung und Standards* (Hrsg.: Schlömerkemper, J.), 8. Beiheft zu *Die Deutsche Schule*, S. 26-47.

Niss, M. (2003). Competencias matemáticas y el aprendizaje de las matemáticas: el proyecto danés KOM. En: Gagatsis, A. y S. Papastavridis (eds.): *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education.* Athens (The Hellenic Mathematical Society), S. 115-124.

OECD (2003). *El marco de evaluación de PISA 2003: matemáticas, lectura, ciencias y conocimiento y habilidades para la resolución de problemas*. París: OECD.

Weinert, F. E. (2001). Medición comparativa del rendimiento en colegios - un supuesto polémico. En Weinert, F. E. (Hrsg.): *Leistungsmessung in Schulen*. Weinheim und Basel: Beltz, S. 17-31.

Winter, H. (1995). Clases de matemáticas y educación general. En: *Comunicados de la Sociedad para la Didáctica de las Matemáticas*, 61, S. 37-46.

2. DESCRIPCIÓN DE LAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS CENTRALES

Dominik Leiss y Werner Blum

2.0 Notas preliminares: competencias generales y trabajo con las matemáticas[5]

Como se describió en el capítulo 1, los estándares de aprendizaje parten de la idea básica de poder fijar la facultad de los estudiantes en *competencias*, que ellos deben activar cuando trabajan con tareas, en particular:

- C1 *Argumentar matemáticamente.*
- C2 *Resolver problemas matemáticamente.*
- C3 *Modelar matemáticamente.*
- C4 *Usar representaciones matemáticas.*
- C5 *Manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas.*
- C6 *Comunicar matemáticamente.*

Los estándares de aprendizaje toman estas competencias, las reformulan y las escalonan en tres ámbitos de exigencia. Pero, ¿se pueden reconocer razones y un marco detrás de ellas? En general, uno se debería preguntar: ¿qué caracteriza el "trabajar matemáticamente" en el colegio? ¿Se puede estructurar de alguna manera? Y si es así, ¿se puede estructurar en forma de competencias? ¿Son estas competencias típicas de las matemáticas y a la vez centrales para registrar las habilidades y capacidades de los estudiantes?

Los estándares de aprendizaje no pueden responder estas preguntas con profundidad, lo cual sería deseable. Encontrar una respuesta razonable a esto es una tarea básica permanente dentro de la didáctica de las matemáticas. Una respuesta cabal debe englobar diversos aspectos, particularmente una idea de lo que debe ser la educación matemática en la escuela. Por ende, se deben mencionar al menos algunas lecturas como referencia: Freudenthal (1977), Winter (1995), Blume, Drüke y cols. (2006), entre otros.

5 Sugerencias de Michael Neubrand.

Los estándares de aprendizaje asumen una postura más bien pragmática ante las interrogantes aquí planteadas. Dado que los estándares deben servir tanto para el desarrollo de la sesiones de aprendizaje, así como para la verificación del desempeño, las competencias están formuladas de tal manera que se anclan en el trabajo matemático en clase. No se menciona explícitamente que existan aspectos adicionales que recorren toda la clase de matemáticas. A continuación se recuerdan cuatro aspectos de este tipo.

Habilidades y nociones básicas como cimiento para las competencias

Como cimiento sobre el cual se construyen las competencias se pueden mencionar dos aspectos complementarios entre sí: el primero señala la necesidad del conocimiento básico y el segundo señala las condiciones para la comprensión matemática:

- Debería haber consenso respecto de la necesidad de contar con habilidades elementales para un trabajo fluido y flexible con números y magnitudes, así como con objetos geométricos (pregunta directriz: ¿cómo funciona?). Estas habilidades básicas no se nombran directamente en las competencias de los estándares de aprendizaje, pero se ven como una condición necesaria.

- Los estudiantes pueden formarse una comprensión matemática, siempre y cuando se construyan —con cuidado y a largo plazo— 'ideas' con respecto a conceptos y procedimientos matemáticos (pregunta directriz: ¿qué significa?). Activar dichas ideas constituye una base sin la cual las competencias no serán efectivas. En clases de matemáticas se debe invertir una buena parte de las actividades en esto.

El pensamiento matemático como trasfondo de las competencias

Los estándares de aprendizaje deben permitir reconocer qué es lo especial de las matemáticas. Dado que están formulados de manera cercana al acontecer en clase, uno tiende a olvidar que el pensamiento matemático general se debe incorporar en cada competencia. Las siguientes formas de pensar características no se mencionan explícitamente en los estándares de aprendizaje, pero recorren todas las competencias:

- Al inicio de la escuela primaria se utiliza el hecho de que se puede reemplazar un objeto matemático por otro de la misma categoría. Por ejemplo, en vez de un número podría ir el resultado de un cálculo; una figura puede aparecer como una parte de otra más compleja; en vez de un paso en un algoritmo puede insertarse también una subrutina, etcétera. Esta es una forma de pensar universal en las matemáticas que no se explicita en las competencias de los estándares de aprendizaje. Sin embargo, cuando se trabajan las tareas formuladas para todas las competencias, esta forma de pensar se hace evidente constantemente.

Así, las argumentaciones y los procesos de solución se nutren, por ejemplo, de que uno pueda referirse a algo que ya comprobó o que ya ensayó con éxito en el pasado. En la construcción de modelos se puede recurrir a modelos estándar. El trabajo técnico-formal en las matemáticas siempre utiliza la idea de implantar y substituir.

- Las matemáticas siempre extraen relaciones generales, tanto dentro de la disciplina como al comprender la realidad mediante las matemáticas. La matemática es la disciplina que intenta establecer un orden mental y conceptual en el mundo de los fenómenos (Freudenthal 1983). El desarrollo sostenible de competencias requiere, entonces, que siempre que sea posible se trabajen actividades donde se tenga que precisar, ordenar, clasificar, definir, estructurar, generalizar, etcétera. Esto es factible en todos los ámbitos de las competencias. Por ejemplo, en cuanto a *Argumentar*, se debe esclarecer el valor general de un esquema de pensamiento. Al *Resolver problemas* se debe considerar en qué situaciones generales sirve la solución y cuál es el alcance de las estrategias utilizadas. *Modelar* recién es efectivo si el modelo se puede utilizar para otros objetos. En el caso de *Usar representaciones* se debe verificar constantemente si aquello que se va a representar va bien con la representación elegida. *Trabajar de forma simbólica, técnica y formal* con comprensión requiere también tematizar la validez y condiciones. *Comunicar* puede llevar a malentendidos, si antes no ha habido un consenso con respecto a conceptos generales (y por ende a menudo formales).

Las competencias de los estándares de aprendizaje se incrustan dentro de otros aspectos con los que deben alinearse la adquisición de conocimientos y el desarrollo de la clase. Observar únicamente las competencias no basta para un diseño productivo de las clases de matemáticas. Sin embargo, las competencias —tal como se describirán a continuación según los estándares de aprendizaje— son puntos de referencia importantes para establecer las actividades matemáticas de los estudiantes de forma lo suficientemente amplia como para "garantizar la calidad de las clases", tal como lo formula la KMK como meta.

A continuación se describen en detalle las seis competencias. Para esto nos centramos primordialmente en la descripción de los ámbitos de exigencia, tal como están dados en los estándares de la KMK para los grados quinto a décimo. Los diferenciaremos un poco más y los precisaremos, en la medida en que sea necesario, por lo cual tendremos que apartarnos en ciertos casos de las descripciones originales. Se debe mencionar que para cada una de las seis competencias también existe un grado previo al ámbito de exigencia I, en el cual la competencia no se exige o no se exige de forma que amerite mencionarse. Además, se debe hacer énfasis en que no es ni razonable ni posible separar una competencia de otra. En cada competencia se destacan aquellos aspectos que son particularmente típicos de esta. Sin embargo, es imposible evitar algunas superposiciones.

2.1 La competencia *Argumentar matemáticamente* (C1)

A esta competencia pertenecen tanto el poder unir afirmaciones matemáticas en cadenas de argumentación lógicas como el comprender y evaluar críticamente distintas formas de argumentación matemática. Esto se relaciona con los diferentes ámbitos de las matemáticas, por ejemplo con la fundamentación de resultados o alegatos, la derivación de teoremas o fórmulas matemáticas o la estimación de la validez de procedimientos matemáticos. Tales capacidades deben adquirirse y usarse de forma continua a lo largo de toda la escolaridad, comenzando por simples deliberaciones con respecto a la plausibilidad de algo hasta lograr demostraciones estrictas, en las cuales cada paso en la demostración posee una justificación. Las leyes y convenciones matemáticas fundamentales son la base para dichos procesos argumentativos, aunque a veces sean inconscientes. Por consiguiente, a la competencia *Argumentar* también le pertenece la comprensión de que algunos patrones argumentativos tienen cierta validez general, independientemente del contenido.

El espectro de las tareas que se usan en este marco es grande. En aquellas tareas, que exigen dichas capacidades, se incluyen a menudo formulaciones como las siguientes (lo cual no quiere decir que se tengan que usar de manera esquemática):

- Fundamenta…
- Comprueba…
- Demuestra…
- Contradice…
- ¿Es posible que…?
- ¿Por qué es esto así…?
- ¿Rige siempre que…?
- ¿Por qué son todos casos en los que…?

No siempre se debe exigir una presentación explícita de una fundamentación o justificación, cuando la competencia *Argumentar* es necesaria para resolver una tarea. Una tarea tiene potencial argumentativo también cuando un estudiante se explica, justifica o comprueba consigo mismo un proceso de solución o un resultado, a manera de proceso mental interno.

El espectro de tales argumentaciones va desde la reproducción de patrones argumentativos conocidos (por ejemplo, fundamentar mediante un ejemplo contrario simple) hasta la reflexión sobre el alcance de una cadena de conclusiones. La descripción de los ámbitos de exigencia que se presenta a continuación lo especifica con mayor claridad:

Ámbito de exigencia I: reproducir y utilizar argumentaciones de rutina (teoremas conocidos, procedimientos, derivaciones, etcétera); dar fundamentaciones simples a partir de cálculos; argumentar a partir de conocimientos de la vida cotidiana.

Ámbito de exigencia II: comprender, explicar o desarrollar argumentaciones abarcables de varios pasos.

Ámbito de exigencia III: usar, explicar o desarrollar argumentaciones complejas; evaluar distintos argumentos según criterios tales como su alcance o coherencia.

Aquí se debe poner énfasis en que la calidad de una argumentación matemática —es decir, su valor informativo y la fuerza con la que convence— no depende de su grado de formalidad. Más bien las fundamentaciones matemáticas concluyentes pueden darse en distintos niveles de representación. La siguiente tarea, en la cual se exige una fundamentación matemática, es un ejemplo de ello.

Ejemplo 1 (ámbito de exigencia II)

La suma de números vecinos

Jette opina: "La suma de tres números naturales consecutivos siempre es divisible entre 3". ¿Tiene razón Jette?

Fundamenta tu respuesta.

En este ejemplo existen diferentes soluciones posibles:

1. ***Enfoque paradigmático:***

   Se suman tres números consecutivos, por ejemplo 3, 4, 5.

   $(4 - 1) + 4 + (4 + 1) = 4 + 4 + 4 = 3 \bullet 4;$

   El resultado es divisible entre 3.

   Esto rige siempre.

En este caso se opera con un ejemplo concreto, en el cual los paréntesis y la flecha especialmente permiten hacer evidente que se encontró una estructura general. Así se puede reconocer que esto regirá para todos los ejemplos siguientes.

2. *Enfoque algebraico:*

Si n *es el primero de estos tres números, entonces rige:*

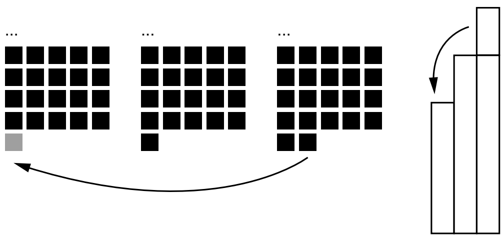
$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3 \bullet (n + 1);$

el resultado es divisible entre 3.

Esta variante es más abstracta, dado que se usan variables. Sería más hábil aún nombrar el número del medio como *n*, en forma análoga al enfoque anterior.

3. *Enfoque gráfico:*

Los tres números se pueden representar mediante patrones de puntos o escaleras; por ejemplo:



Si se traslada un punto, se forman tres cantidades de igual valor; o alternativamente, al equiparar la escalera, se forma una secuencia de tres columnas de igual altura; entonces, el número es divisible entre 3.

Aquí se trabaja con objetos geométricos en lugar de números y variables.

4. *Enfoque de contenido:*

Uno de los tres números debe ser divisible entre 3 (de 3 en 3); otro tiene un residuo de 1 cuando se divide entre 3, y otro tiene un residuo de 2.

Entonces, en la división quedaría la suma de residuos "1 + 2 = 3", lo que significa que la suma es divisible entre 3.

En este enfoque se hacen reflexiones matemáticas recurriendo a conocimientos ya adquiridos. Las variables se necesitan solo de forma implícita.

5. *Enfoque iterativo:*

1 + 2 + 3 = 6, y 6 es divisible entre 3.

2 + 3 + 4 = 9 = 6 + 3, y también es divisible entre 3, etcétera.

La suma crece en 3 y por ende sigue siendo divisible entre 3.

En principio, se trata de una forma previa a la inducción completa que los estudiantes del nivel mediano (a partir de quinto grado) ya pueden llevar a cabo.

El siguiente ejemplo muestra que las fundamentaciones pueden darse en distintos planos y con representaciones diferentes. La elección del plano y la representación en una tarea concreta depende, por ejemplo, de los conocimientos previos, de las preferencias individuales o de la tradición de la clase. Mientras que la tarea no especifique un requerimiento, las variantes deben ser tratadas con el mismo valor.

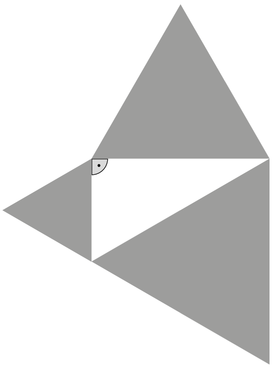
Ejemplo 2 (ámbito de exigencia a) II, b) III)

Triángulos sobre el triángulo rectángulo

En la figura de la derecha puedes ver un triángulo rectángulo cuyos catetos e hipotenusa conforman los lados de tres triángulos equiláteros.

a) Fundamenta, con ayuda del teorema de Pitágoras, por qué es válida la siguiente proposición:
La suma del área de ambos triángulos sobre los catetos es igual que el área del triángulo sobre la hipotenusa.

b) Fundamenta por qué la proposición también vale para polígonos regulares de *n* ángulos.



La **tarea parcial a)** requiere el uso del teorema de Pitágoras en un contexto distinto del geométrico, usado comúnmente en la escuela. Dado que se deben entrelazar distintos elementos del conocimiento en una cadena argumentativa (área de triángulos, teorema de Pitágoras), la tarea es típica del ámbito de exigencia II.

Por otro lado, la **tarea parcial b)** requiere que los estudiantes realicen una generalización a polígonos regulares de *n* lados, por lo que corresponde al ámbito de exigencia III.

2.2 La competencia *Resolver problemas matemáticamente* (C2)

Según los estándares de aprendizaje, la resolución de problemas es necesaria cuando una estructura de solución no es evidente y, por ende, se requiere un proceder estratégico. Por consiguiente, la competencia *Resolver problemas* se muestra cuando se dispone de estrategias adecuadas para encontrar ideas y caminos de solución matemáticos, así como cuando se puede reflexionar al respecto.

Como elementos estratégicos se pueden utilizar distintos principios o recursos heurísticos (ver Bruder 2002), que, a diferencia de los algoritmos, no conducen directamente a la meta, pero que en general son útiles en el proceso de solución. Por ejemplo:

- Principio de descomposición ("¿en qué subprocesos se puede descomponer el problema?").
- Principio de analogía ("¿he resuelto problemas similares en el pasado?").
- Trabajar hacia adelante ("¿qué puedo concluir de los datos que tengo?").
- Trabajar hacia atrás ("¿qué necesito para conseguir lo que estoy buscando?").
- Probar sistemáticamente.
- Ilustrar mediante una figura, tabla o esbozo matemático.

Un aspecto de la resolución de problemas es proponer tareas y problemas matemáticos. Dado que esto no juega un papel primordial en el marco de esta publicación, no profundizaremos en ello por el momento.

Las demandas que surgen en el contexto de los procesos de resolución de problemas se pueden describir mejor a través de los siguientes ámbitos de exigencia:

Ámbito de exigencia I: Resolver una tarea matemática sencilla mediante la identificación y selección de una estrategia evidente (por ejemplo, dibujar una línea de soporte sencilla).

Ámbito de exigencia II: Encontrar un camino de solución a una situación problemática mediante un proceder de varios pasos y que esté apoyado en estrategias.

Ámbito de exigencia III: Construir una estrategia elaborada para, por ejemplo, fundamentar la totalidad de una distinción de casos o para generalizar una conclusión; reflexionar sobre los diversos caminos de solución.

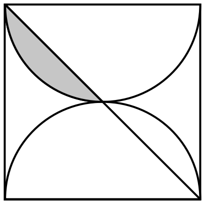
La siguiente tarea debe esclarecer algunos de los aspectos de la competencia *Resolver problemas*.

Ejemplo 1 (ámbito de exigencia II)

Áreas

En el cuadrado de la derecha, con arista de largo *a*, se han dibujado dos semicírculos y una diagonal.

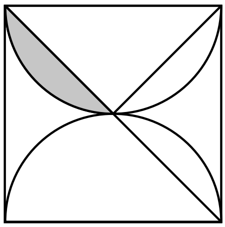
Calcula el contenido del área sombreada.



Aun cuando los objetos matemáticos de la tarea (semicírculos, diagonal, cuadrado) son conocidos para los escolares, la figura construida en combinación con la pregunta sobre el área de un pedazo del círculo constituye sin duda una tarea que requiere un proceder estratégico para llegar a una solución. Una estrategia podría ser, por ejemplo:

- **Dibujar líneas auxiliares:**

  Se podría dibujar la siguiente línea, de modo que solo se necesitaría restar el área del triángulo del área del semicírculo y dividir el resultado entre dos.



La siguiente tarea corresponde al ámbito de exigencia I, ya que se trata de una situación problemática que se puede resolver con ayuda de diversas estrategias simples (por ejemplo, esbozar o descomponer mentalmente).

Ejemplo 2 (ámbito de exigencia I)

Minutero

¿Cuánto mide el ángulo que abarca el minutero entre las horas 9:45 y 10:05?

2.3 La competencia *Modelar matemáticamente* (C3)

Al modelar, se trata de comprender una situación vinculada con el mundo real haciendo uso de medios matemáticos, estructurarla y conducirla a una solución, así como de reconocer las matemáticas en la realidad y juzgarlas. Los modelos matemáticos juegan un rol esencial. En este contexto, con modelos matemáticos nos referimos a una imagen simplificada y matemática del mundo real que solo toma en cuenta algunos aspectos parciales (Hehn 2002), de modo que la situación así descrita se pueda trabajar. Los modelos se usan, por un lado, para describir fenómenos reales, como por ejemplo el crecimiento de algo o los juegos de azar ("modelos descriptivos"). Por otro lado, sirven para poner en práctica ciertas intenciones respecto de situaciones reales; por ejemplo, el procedimiento de elección o de evaluación en el testeo de un producto ("modelos normativos").

El proceso de trabajar con una situación vinculada con el mundo real se puede describir idealmente mediante los siguientes pasos:

1. Comprender la situación problemática real.
2. Simplificar y estructurar la situación descrita.
3. Traducir la situación real simplificada a las matemáticas.
4. Resolver la situación problemática matemática haciendo uso de medios matemáticos.
5. Interpretar desde la situación de origen y verificar el resultado matemático mediante el contexto real.

Cada uno de estos puntos demanda una serie de capacidades en el estudiante, que se pueden describir como *competencias parciales* del *modelar*. En este caso, el paso 4 no se cuenta como parte de la competencia *Modelar* y el paso 1 pertenece a la competencia *Comunicar*. Lo esencial son los procesos de traducción que el estudiante debe realizar para encontrar una conexión útil entre el contexto extramatemático y el contenido intramatemático.

A continuación se detalla la competencia *Modelar* mediante los siguientes requerimientos:

Ámbito de exigencia I: Usar modelos estándar que son familiares y directamente reconocibles (por ejemplo la 'regla de tres'); transferir directamente una situación real a las matemáticas; interpretar directamente un resultado matemático.

Ámbito de exigencia II: Hacer modelados de varios pasos en el marco de pocas restricciones muy claras; interpretar los resultados de una modelado de este tipo; asignar un modelo matemático a situaciones reales pertinentes o modificarlo con respecto a condiciones que han cambiado.

Ámbito de exigencia III: Construir un modelo para una situación compleja, en la que se deben redefinir supuestos, variables, relaciones y restricciones; comprobar, evaluar y comparar modelos.

A continuación se presenta una tarea casi auténtica, en la cual la competencia *Modelar* se encuentra en primer plano.

Ejemplo 1 (ámbito de exigencia III)

Poner gasolina

El señor Stein vive en Trier, a 20 km de la frontera con Luxemburgo.

En su VW Golf, él va a poner gasolina a Luxemburgo, donde hay un grifo justo al pasar la frontera. Ahí el litro de gasolina cuesta solo 1,05 euros, mientras que en Trier cuesta 1,30 euros.

¿Vale la pena hacer el viaje para el señor Stein? Fundamenta tu respuesta.

Se pueden ejemplificar los pasos anteriormente descritos de *Modelar* mediante uno de los posibles enfoques de solución a este problema relativamente complejo.

1. Comprender la situación problemática real: se trata de una tarea de decisión, en la que se debe pensar si vale o no la pena manejar 20 km hasta un grifo en el que la gasolina se vende a un menor precio.
2. Simplificar y estructurar la situación descrita: "valer la pena" se interpreta como la reducción al ahorro de costos personal y directo (por ejemplo: no se toman en cuenta aspectos ecológicos o macroeconómicos). Para esto es necesario recoger y determinar parámetros como el volumen del tanque (por ejemplo: 45 litros), el consumo de gasolina (por ejemplo: 8 litros por cada 100 km), distancia al grifo en Trier (por ejemplo: 1 km), etc.
3. Traducir la situación simplificada a las matemáticas:

$$K_{\text{diferencia}} = K_{\text{Trier}} - K_{\text{Luxemburgo}}$$

$$K_{\text{Trier}} = (1{,}30 \text{ EUR/l} \bullet 45 \text{ l}) + (1{,}30 \text{ EUR/l} \bullet 2 \text{ km} \bullet (8 \text{ l}/100 \text{ km}))$$

$$K_{\text{Luxemburgo}} = (1{,}05 \text{ EUR/l} \bullet 45 \text{ l}) + (1{,}05 \text{ EUR/l} \bullet 40 \text{ km} \bullet (8 \text{ l}/100 \text{ km})).$$

4. Resolver el problema matemático haciendo uso de medios matemáticos: esencialmente trabajar con expresiones algebraicas y ecuaciones (eventualmente también con gráficos).
5. Interpretar y verificar el resultado en el contexto: poner gasolina en Trier cuesta 8 euros más, por lo que el viaje vale la pena. Esto parece ser un resultado realista, dado que uno ahorra aproximadamente 1 euro por cada 4 litros que se llenen en Luxemburgo (10 euros aproximadamente) y uno tiene que pagar algunos euros por los 40 km de recorrido (entonces 6 a 8 euros aproximadamente).

Incluso si se trata de un modelado bastante bueno de la situación problemática, se debe considerar que hay otros factores que son importantes en la situación real que no han sido considerados en este modelo, como por ejemplo la depreciación del valor del auto por el uso extra o la pérdida de tiempo.

Por consiguiente, sería importante afinar el modelo al revisar una segunda vez, ya que el modelado no aspira solo a darle una respuesta al problema matemático sino que también busca una posición seria frente a una situación problemática vinculada con la realidad.

Ejemplo 2 (ámbito de exigencia II)

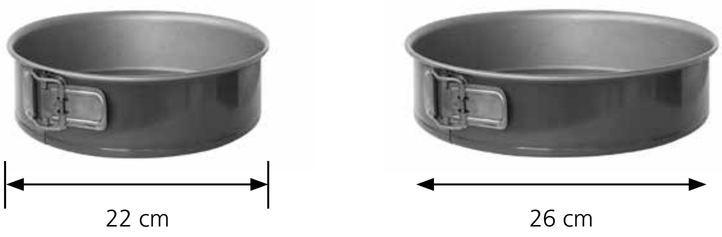
Receta de cocina

Para preparar una torta, Lisa necesita los siguientes ingredientes:

250 g de almendras, 250 g de harina, 125 g de azúcar, 5 huevos, pizca de sal, 40 g de hojuelas de almendra.

La masa de la receta rinde para un molde redondo de 22 cm de diámetro, pero Lisa solo tiene uno de 26 cm de diámetro. Ambas formas tienen igual altura.

Modifica los ingredientes de la lista de Lisa, de tal manera que la masa en ambos moldes tenga igual altura. Redondea adecuadamente.



2.4 La competencia *Usar representaciones matemáticas* (C4)

A esta competencia pertenecen tanto el poder generar por uno mismo representaciones de objetos matemáticos como también el manejo de representaciones que están dadas. Aquí se cuentan, además, representaciones gráficas como:

- diagramas, ilustraciones, fotos, bosquejos de situaciones reales y gráficos estadísticos.

Otras posibilidades importantes de representación son:

- fórmulas
- representaciones mediante el lenguaje
- acciones y gestos
- programas (en un lenguaje de programación)

No se puede concluir que la competencia *Utilizar representaciones* esté jugando un rol tan solo a partir de la mera existencia de estas representaciones. Por ejemplo, las ilustraciones no son necesariamente portadores de información matemática, sino que pueden cumplir simplemente una función motivadora. Además, en las matemáticas uno siempre se ve forzado a recurrir a representaciones para transmitir sus contenidos, por ejemplo cuando se trata de hacer exposiciones (competencia *Comunicar*). Recién cuando se exige que uno trabaje activamente con representaciones de contenidos matemáticos al vincularse con una tarea, las siguientes capacidades se vuelven relevantes:

- producir o cambiar una representación
- interpretar o evaluar una representación dada
- alternar entre diferentes formas de representación

A continuación se describe con más detalle la demanda cognitiva que acompaña estas capacidades:

Ámbito de exigencia I: elaborar y utilizar representaciones estándar de objetos y situaciones matemáticas.

Ámbito de exigencia II: interpretar con comprensión o modificar representaciones dadas; alternar entre dos representaciones.

Ámbito de exigencia III: comprender representaciones que no son familiares y utilizarlas; desarrollar formas de representación propias que son adecuadas para el problema; juzgar distintas formas de representación según un objetivo final.

La siguiente tarea requiere únicamente que el estudiante produzca una representación estándar y por ende corresponde al ámbito de exigencia I.

Ejemplo 1 (ámbito de exigencia I)

Elecciones

Representa el siguiente resultado electoral en un diagrama de círculo:

Partido A: 30%   Partido B: 40%   Partido C: 25%   Otros: 5%

Si la tarea fuera "representa... en un diagrama", la exigencia cambiaría. El estudiante tendría que elegir un formato de representación adecuado, asumiendo como condición que conoce diferentes formatos, como los gráficos de barras, los histogramas, los diagramas de círculo, etcétera. Esto correspondería a un ámbito de exigencia II. Existen dos posibilidades:

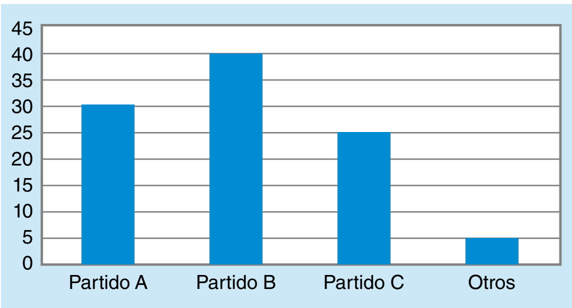


Gráfico de barras

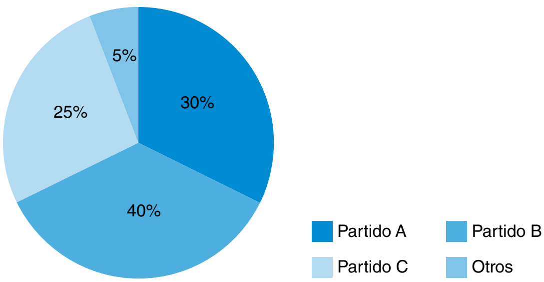
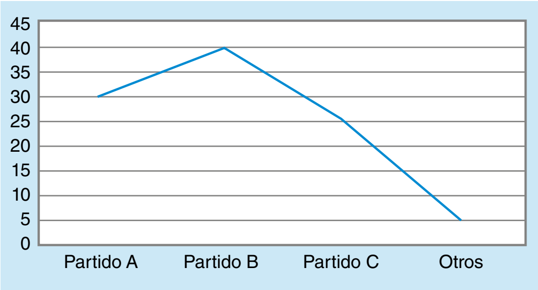


Gráfico circular

En el caso del gráfico de barras, el dibujo se puede hacer directamente. En el caso del diagrama de círculo, se deben traducir los porcentajes en ángulos que definan los sectores del círculo. Ambos gráficos son igual de válidos como resultado. Insuficientes serían gráficos que presentaran relaciones entre magnitudes erradas (por ejemplo que la barra A no sea igual de larga que la barra B) o que fuesen inapropiados, como por ejemplo el siguiente diagrama.



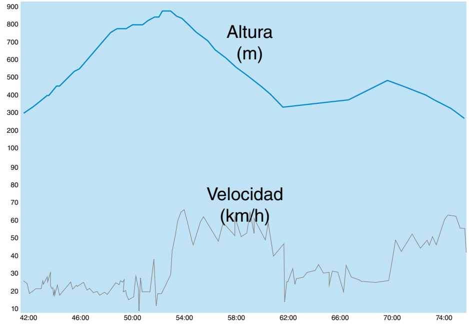
En la siguiente tarea una representación poco común se encuentra en el centro del trabajo matemático. Se trata de una combinación de los gráficos *velocidad-tiempo* y *altura-tiempo*. Se debe encontrar una conexión entre ambos gráficos, así como una interpretación que los vincule con la realidad.

Ejemplo 2 (ámbito de exigencia III)

Análisis de entrenamiento

El siguiente diagrama muestra un segmento de un registro de entrenamiento de un ciclista de velocidad.

c) ¿Cuántas serpentinas (curvas cerradas) aparecieron al bajar la primera montaña?



Naturalmente, ambos gráficos dan pie a muchas otras preguntas e interpretaciones.

2.5 La competencia *Manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas* (C5)

Esta competencia abarca el uso de hechos matemáticos o habilidades matemáticas. Los hechos se pueden expresar como "Saber qué…". Aquí pertenece, por ejemplo, el conocimiento que se puede evocar directamente de la memoria (como la definición de la mediatriz con respecto a dos puntos o el uso de la propiedad conmutativa).

Las habilidades se podrían definir más bien como "Saber cómo…". A esto pertenece, por ejemplo, el uso de algoritmos, cuya secuencia se puede recorrer de forma automática (como calcular α a partir de $\alpha + 5 = 12$). En consecuencia, los siguientes aspectos corresponden a esta competencia:

- Conocer y utilizar definiciones, reglas, algoritmos o fórmulas matemáticas.
- Trabajar formalmente con variables, expresiones algebraicas, ecuaciones o funciones.
- Realizar procedimientos de solución y verificación, siguiendo una secuencia específica.
- Realizar construcciones geométricas básicas.
- Utilizar recursos como recopilaciones de fórmulas o la calculadora.

En esta competencia resulta importante que *se formen rutinas* que descarguen, facilitando así el reconocimiento de relaciones y estructuras y apoyando, a manera de herramienta, el ejercicio de hacer matemáticas, sobre todo la traducción entre la realidad y las matemáticas. Así, esta competencia se requiere a menudo en conjunto con otras que se hallan más cerca del contenido de una tarea.

A continuación se explican con mayor detalle los distintos requisitos de esta competencia:

Ámbito de exigencia I: emplear procedimientos de solución elementales; utilizar fórmulas y símbolos de forma directa; usar herramientas matemáticas sencillas de forma directa (por ejemplo, recopilaciones de fórmulas o calculadora).

Ámbito de exigencia II: hacer uso en varios pasos de procedimientos matemáticos formales; trabajar en contexto con variables, expresiones algebraicas, ecuaciones y funciones; seleccionar y emplear herramientas matemáticas según la situación y el propósito.

Ámbito de exigencia III: realizar procedimientos complejos; evaluar procedimientos de solución y de verificación; reflexionar sobre las posibilidades y los límites de las herramientas matemáticas.

Ejemplo 1 (ámbito de exigencia I)

Ecuación

Resuelve la ecuación $3x + 5 = 27$.

Esta tarea solo demanda habilidades orientadas al cálculo. Dado que se trata de un procedimiento rutinario simple, la tarea corresponde al ámbito de exigencia I.

Ejemplo 2 (ámbitos de exigencia a) I; b) II; c) I)

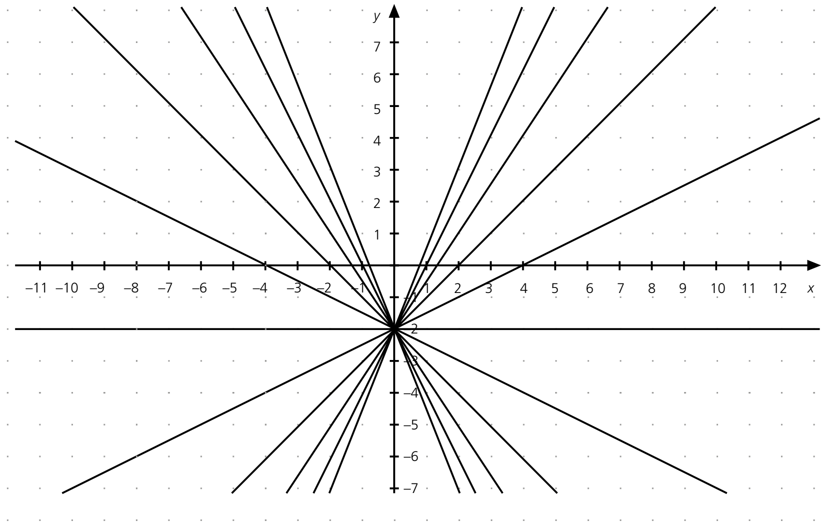
Haz de rectas

Observa el haz de rectas.

a) ¿Qué características comunes tienen todas estas rectas?

b) Indica la ecuación correspondiente a tres de estas rectas.

c) ¿Cómo es la ecuación de las paralelas al eje x en este haz?



2.6 La competencia *Comunicar matemáticamente* (C6)

Esta competencia abarca, por un lado, la comprensión de textos o expresiones orales en relación con las matemáticas, y por otro, incluye la presentación comprensible (y también adecuada en términos del lenguaje técnico) de deliberaciones, caminos de solución y resultados, de forma escrita u oral.

Suele resultar difícil diferenciar entre *comunicar* y *argumentar*. Esto rige sobre todo para la explicación de los caminos de solución o la presentación de conclusiones. En este caso, se debe tener en cuenta que al argumentar se requieren procesos argumentativos explícitos o implícitos que describan, concreten e ilustren un contenido matemático, pero que no estén dirigidos a un receptor en particular. Por el contrario, en el caso de "comunicar", el receptor externo (que puede ser ficticio) es quien juega el rol fundamental. Así, en una tarea se aborda la competencia *Comunicar*, siempre que se trate de explicar un camino de solución (ya sea a la profesora o a los compañeros), por ejemplo. Por consiguiente, el manejo del idioma es sumamente importante en esta competencia.

Dado que ambos aspectos expuestos en un principio (por un lado la recepción, comprensión y evaluación de situaciones matemáticas, y por otro lado su presentación) pertenecen a la competencia *Comunicar*, el espectro de las demandas cognitivas es muy ancho. Los ámbitos de exigencia se pueden concretar de la siguiente manera:

Ámbito de exigencia I: presentación de situaciones matemáticas sencillas; identificación y selección de información de textos matemáticos cortos (el orden en que se presenta la información en el texto coincide en su mayoría con los pasos que se deben dar en el trabajo matemático).

Ámbito de exigencia II: presentación comprensible y en varios pasos de caminos de solución, deliberaciones y resultados; interpretación de expresiones (tanto correctas como incorrectas) de otros con respecto a textos matemáticos; identificación y selección de información de textos ricos en matemáticas (el orden en que se presenta la información en el texto no coincide siempre con los pasos en el trabajo matemático).

Ámbito de exigencia III: desarrollo de una presentación coherente y completa de un proceso de solución o argumentación; captar el sentido de textos matemáticos complejos; comparar, evaluar, y eventualmente, corregir las expresiones de otros.

Las siguientes tareas deben darles una idea que aclare un poco la función de esta competencia.

Ejemplo 1 (ámbito de exigencia II)

Mascotas

Recorte de un periódico del 29 de abril de 2005:

Cada vez hay más mascotas en Alemania

Los alemanes tienen cada vez más mascotas. De 2004 a 2005 el número de perros, gatos, pájaros y pequeños animales (sin incluir peces y reptiles) ha aumentado en 1,3% hasta llegar a 23,1 millones. La población de perros ha aumentado en 6%, alcanzando los 5,3 millones de animales; el número de gatos ha crecido en 2,7%, llegando a 7,5 millones. Un descenso se constató en el caso de los pájaros, cuyo número bajó en 8,7%, llegando a 4,2 millones. Según las estadísticas, la mayoría de mascotas las tienen las personas de 40 a 49 años de edad, que corresponden al 25% de dueños de animales. Aun así, 24%, y con ello casi en la punta, corresponde a personas de la tercera edad mayores de 60 años.

a) ¿Cuántos pájaros y cuántos perros había como mascotas en Alemania el año 2004?

En esta tarea se trata principalmente de recoger de un texto dando la información relevante para una solución, para luego poder hacer un modelado estándar a partir de ella. Para ello se necesita una comprensión de textos matemáticos de un nivel de complejidad medio, dado que se requiere establecer conexiones dentro del mismo texto para poder identificar información relevante. El contenido del contexto del problema no se aprovecharía lo suficiente si nos limitamos a la pregunta **a)**, que es más bien banal. Muchas otras preguntas son posibles, incluso preguntas que vayan más allá del área (por ejemplo sobre la importancia de las mascotas para infantes o personas de edad).

Ejemplo 2 (ámbito de exigencia I)

Adición de fracciones

Describe, con la mayor precisión posible, cómo se suman dos fracciones.

En esta tarea se debe exponer un conocido y muy familiar procedimiento de cálculo a un destinatario ficticio. Se podría precisar mejor la exigencia si se explicita el destinatario, algo así como un estudiante de sexto grado.

BIBLIOGRAFÍA

Baumert, J. *et al*. (1997). *Reporte para la preparación del programa "Incremento de la eficiencia de las clases de matemáticas y ciencias naturales"* (*Materialien zur Bildungsplanung und Forschungsförderung*, Heft 60). Bonn: Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung.

Bruder, R. (2002). Aprender, plantear preguntas adecuadas. En: *Mathematiklehren*, Heft 115, S. 4-8.

Freudenthal, H. (1977). *Matemática como tarea pedagógica* (Bd. 1, Bd. 2). Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Henn, H.W. (2002). Matemáticas y el resto del mundo. En: *Mathematiklehren*, Heft 113, S. 4-7.

Heymann, H. W. (1996). *Formación general y matemáticas*. Weinheim und Basel: Beltz.

Winter, H. (1995). Enseñanza de las matemáticas y formación general. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, N° 61, S. 37-46.

3. LA IDEA DIRECTRIZ *DATOS Y AZAR*

Rolf Biehler y Ralph Hartung

Se desarrollarán ambos aspectos de la idea directriz: el manejo de datos y el manejo de probabilidades. Se harán evidentes las relaciones recíprocas y se ilustrará el manejo de datos mediante tareas que abarcan desde el lidiar con extractos de noticias hasta llevar a cabo una investigación estadística completa. El manejo de probabilidades se ilustrará mediante situaciones de juego sencillas y aplicaciones cotidianas, como por ejemplo la valoración del nivel de certeza de tests médicos. Se ofrecen oportunidades para el uso de la computadora, tanto para el análisis de datos como para la simulación estocástica.

3.1 Introducción

Los escolares adquieren las competencias matemáticas generales descritas en el capítulo 2, al trabajar con contenidos matemáticos (ver capítulo 1). Las competencias matemáticas referidas al contenido corresponden a ideas directrices matemáticas que atraviesan el currículo de matemáticas en forma de espiral y favorecen el pensamiento conectado, que une varias áreas, así como la comprensión de conceptos matemáticos fundantes.

La idea directriz *Datos y azar* une distintos ámbitos de las matemáticas, en especial áreas esenciales de la estocástica. Pero los datos también juegan un rol en el caso de relaciones funcionales o pueden aparecen en experimentos sistemáticos de la geometría. Tal como demuestran muchos estudios, la idea directriz *Datos y azar* ha sido desatendida en el salón de clases debido a un anclaje insuficiente en planes de clase y currículos, lo cual debe ser corregido. En comparación con sus compañeros de otros países, los escolares en Alemania tienen una gran necesidad de ponerse al día con respecto a este tema. Sin duda se puede construir sobre los trabajos de desarrollo e investigación sobre estocástica de la didáctica matemática alemana e internacional.

Desde hace veinticinco años existe una revista especializada en la didáctica de la estocástica dirigida a docentes (www.mathematik.unikassel.de/stochastik.schule), y en el grupo de trabajo “Estocástica”, de la Sociedad de la Didáctica de las Matemáticas (Gesellschaft für Didaktik der Mathematik - GDM) se da un intercambio activo entre los profesionales de la práctica y la investigación (www.mathematik.unidortmund.de/akstoch).

En los estándares de aprendizaje para el *Mittleren Schulabschluss*[6], la idea directriz *Datos y azar* se describe de la siguiente manera:

"Los escolares

- Interpretan representaciones gráficas y tablas de investigaciones estadísticas.
- Planifican investigaciones estadísticas.
- Recogen datos de forma sistemática, los registran en tablas y los representan mediante gráficos y también mediante el uso de recursos adecuados (como *software*).
- Interpretan datos haciendo uso de parámetros.
- Reflexionan en torno a argumentos que se basan en el análisis de datos y los evalúan.
- Describen fenómenos del azar en situaciones cotidianas.
- Determinan probabilidades en experimentos del azar" (KMK 2004b).

En los estándares de aprendizaje para la *Hauptschule*[7] se presenta algo similar, pero se pone menos énfasis en el análisis de datos:

"Los escolares

- Interpretan representaciones gráficas y tablas de investigaciones estadísticas.
- Recogen datos de forma sistemática, los registran en tablas y los representan mediante gráficos, así como mediante el uso de recursos adecuados (como *software*).
- Calculan e interpretan frecuencias y valores medios.
- Describen fenómenos del azar en situaciones cotidianas.
- Interpretan afirmaciones de la vida cotidiana sobre probabilidades.
- Determinan probabilidades en experimentos del azar sencillos" (KMK 2004a).

En comparación con la práctica que se ha dado hasta el momento, el acento se pone en dirección a una dualidad entre datos y probabilidad, tal como se evidencia

6 En el sistema educativo peruano, el nivel *Mittleren Schulabschluss* abarca desde quinto grado de primaria hasta cuarto grado de secundaria.

7 Una de las diversas modalidades de escolaridad en el sistema educativo alemán.

en los conceptos "*data and chance*" de los estándares americanos de la NCTM (Borovcnik & Engel 2001). También se da una muy buena concordancia con lo que exigen desde hace un mucho tiempo los gremios correspondientes (grupo de trabajo "Estocástica" de la GDM 2003).

3.2 Manejo de datos

3.2.1 Examinar datos - literacidad estadística

También en el ámbito internacional se discute ampliamente qué se entiende por *literacidad estadística* (*statistical literacy*) y cómo se puede desarrollar (www.stat.auckland.ac. nz./~iase/publications.php). La competencia, que implica poder lidiar de forma crítica con los reportes de los medios, juega un rol central en esto. La mayoría de los escolares se enfrentará a la estadística desde un rol de consumidores, no de investigadores. El trabajo crítico con recortes de periódicos y gráficos en clase es un medio adecuado para esto. La sensibilización frente al uso dudoso de la estadística también es un objetivo importante (Führer 1997, Krämer 1991). Pero si uno se limitara a este aspecto, no se le haría justicia al estándar de aprendizaje, que se refiere al fomento de competencias más amplias con respecto al manejo de datos. La perspectiva a la que se apunta es más bien la de poder comprender, por ejemplo, reportes serios producidos por departamentos estadísticos, no solo artículos periodísticos problemáticos. Las propias experiencias de los escolares con las distintas fases de una investigación estadística son de gran valor para esto.

Una investigación estadística completa presenta varias fases, que se pueden caracterizar mediante las siguientes palabras clave: *planteamiento del problema - planificación - recojo de datos - análisis - interpretación - conclusión y reporte de resultados*. Distintas competencias resultan centrales en las diferentes fases. El *Argumentar y Comunicar* juega un rol esencial en la última fase. En el análisis y la interpretación entran en juego sobre todo el *Uso de representaciones* (estadísticas) y el *Trabajo simbólico, técnico y formal* (*software*), mientras que al traducir un problema real en una investigación estadística se trata sobre todo de la competencia *Modelar.*

Es importante que los escolares atraviesen por un ciclo de investigación completo. Para eso se puede recurrir a datos que ya estén disponibles, en lugar de la fase *Recojo de datos*, si es que encajan con el problema. Competencias parciales son importantes en los distintos niveles y estas se pueden desarrollar en tareas previsibles, que se pueden trabajar a partir de datos que ya estén disponibles.

En la estadística se diferencia la *estadística descriptiva* de la *estadística inferencial*. En muchas aplicaciones de la práctica estadística se trabaja a partir de muestras de poblaciones. Si la muestra se extrae mediante un método aleatorio, entonces se pueden transferir las características determinadas con ayuda de la estadística descriptiva, por ejemplo valores centrales, a la población total. La estadística inferencial ha desarrollado procedimientos con los cuales se puede definir —dicho de forma muy general— qué divergencia del resultado de la muestra se puede esperar en la población total. Los procedimientos solo pueden hacer afirmaciones con cierto nivel de certeza, por ejemplo de 95% o de 99%. La estadística inferencial presupone, a diferencia de la estadística descriptiva, el concepto de probabilidad.

Desde la perspectiva de la cultura general sería deseable lograr también una comprensión básica y sencilla de la problemática de las inferencias a partir de muestras en el manejo de datos en la *Sekundarstufe I*[8]. La estadística descriptiva como tal ya tiene un gran potencial de aplicación, mientras que a veces se sobreestima la estadística inferencial (Krämer 2001). Su desarrollo en dirección del análisis exploratorio de datos (Tukey 1977) y la 'minería de datos' con el soporte de la computadora (descubrir y extraer información desconocida a partir de grandes volúmenes de datos) también es relevante para las clases, dado que aquí se comprende el análisis de datos como un 'trabajo de detective', lo cual abre nuevas perspectivas para el aprendizaje autónomo por descubrimiento (Biehler 1999, Biehler & Weber 1995, Vogel & Wintermantel 2003).

Una clase que no se limita a trabajar a partir de análisis y representaciones ya hechos, sino que se ocupa de analizar datos, solo podrá abordar ejemplos sencillos con cantidades reducidas de datos si no se apoya en software. Las calculadoras gráficas y los programas de cálculo son una ayuda que no se ha agotado en la práctica actual de enseñanza. Sin embargo, se reconoce que estas herramientas no son un apoyo óptimo para escolares y docentes con respecto al análisis flexible de datos, sino que traen dificultades consigo, incluso cuando se trata del conteo sencillo de frecuencias. Como alternativa se ofrece por ejemplo el software *Fathom* (www.mathematik.unikassel.de/~fathom), que ya tiene una versión en alemán y que se ha desarrollado especialmente para la enseñanza escolar de estocástica. Este *software* es un apoyo también con respecto a la simulación de procedimientos aleatorios. Se puede adaptar y utilizar a lo largo de toda la escolaridad (Biehler, Hofmann, Maxara & Prömmel 2006)[9].

8 A partir de quinto grado de primaria y hasta cuarto de secundaria.

9 La gran mayoría de análisis de datos y simulaciones presentados en este texto se generaron mediante el uso de *Fathom*; los gráficos que se muestran aquí son fotos de la pantalla, que han pasado por una

3.2.2 Conceptos y representaciones

En el núcleo de la estocástica se encuentra el trabajo con la variabilidad, con datos que se dispersan. Se utilizan tablas y gráficos para representar y analizar la distribución (de la frecuencia de datos). Los valores centrales resumen características (numéricas). Las medidas de dispersión cuantifican el fenómeno de dispersión que se hace evidente en los gráficos de distribución (para indicaciones sobre tipos de diagramas e índices ver el grupo de trabajo "Estocástica" de la GDM 2003).

Normalmente se puede elegir entre diferentes gráficos e índices. Los escolares pueden aprender de forma natural a seleccionar representaciones apropiadas para una meta específica de aprendizaje o de comunicación. En este caso, ¿es más apropiado un diagrama de círculo o uno de barras? ¿Cómo cambia una conclusión si se usa el valor central (la mediana) en lugar del promedio? ¿Basta con indicar el promedio para resumir los datos? ¿Qué otros aspectos importantes se muestran en la representación de la distribución de las frecuencias?

El uso de software apropiado facilita enormemente —o incluso hace posible— el probar y evaluar distintas representaciones y formas de resumir los datos. Sin embargo, se debe evitar, mediante el diseño de entornos de aprendizaje adecuados, que solo se juegue y que los escolares pierdan de vista la meta principal, es decir, la interpretación de los datos en el contexto de su uso.

Se deben desarrollar competencias de interpretación para los diferentes tipos de gráficos e índices y esto se puede aprender mediante 'tareas de interpretación' a partir de análisis que ya estén hechos, a manera de preparación para el análisis de datos autónomo.

Otro horizonte para preguntas interesantes se abre cuando los escolares no se ocupan solo de la distribución de una característica y de su descripción, sino que examinan más preguntas sobre las relaciones con otras características y factores, como por ejemplo:

- ¿En qué se diferencian los chicos y las chicas de un mismo grado con respecto a sus actividades deportivas y sus hábitos de lectura?
- ¿Los escolares que tienen una televisión en su cuarto ven más televisión o lo hacen de manera distinta?

---

mejora de la calidad de la imagen. Sin embargo, el análisis se puede realizar también mediante otras herramientas. El lector puede revisar al primer autor nombrado, dado que él es de la opinión (sustentada) de que muchas cosas se pueden realizar de forma más fácil, rápida y realista si se usa el software *Fathom*.

- ¿Cuánto pueden mejorar mis tiempos de reacción mediante un entrenamiento?

Para tareas de 'comparación de grupos' como esta se pueden usar los índices y gráficos para comparar, pero esto implica también otras demandas a los escolares (Biehler 2001).

Mediante diagramas de dispersión también se puede examinar en un nivel elemental la relación entre dos características cuantitativas:

- ¿Cómo se relacionan el desempeño en salto largo y la carrera de 50 m en los escolares? ¿Cómo es la relación entre el rendimiento en salto largo y el lanzamiento de bala? ¿Qué relación será más estrecha? (www.learnline.nrw.de/angebote/eda/medio/bjsp/anregung.htm)

Se abordarán estos aspectos en los ejemplos que presentaremos a continuación.

3.2.3 Recoger y conseguir datos

Internet ofrece una gran variedad de registros de datos actuales, a los que se puede recurrir para las clases. Con cada vez mayor frecuencia los artículos de revistas didácticas suelen poner sus datos a disposición en internet. Los softwares como *Fathom* se ofrecen con más de cien registros de datos listos. Sin embargo, no resulta siempre sencillo evaluar el potencial de contenido y didáctico de tales registros. Sería deseable generar un portal en internet que contuviera los registros de datos que ya han sido probados en el entorno escolar, similar al portal "Data and Story Library" que existe para las universidades estadounidenses (http://lib.stat.cmu.edu/DASL/).

Un recojo de datos realizado por los propios escolares tiene el encanto de lo auténtico y de la relación personal. La planificación y realización de un levantamiento de datos fomenta además competencias de contenido muy importantes. Las características estadísticas deben definirse de tal forma que se puedan 'medir' con claridad. Incluso los escolares de los primeros grados de primaria pueden aprender cuán difícil resulta definir qué se comprende por 'tamaño de la familia'; por ejemplo: ¿quién cuenta como familia y quién no? ¿Cómo se puede medir el consumo de televisión? Si el televisor está prendido como acompañamiento de fondo, ¿se registra también o no? ¿Qué hay del uso de aparatos de TV para jugar videojuegos, escuchar música o ver películas en DVD? ¿Se debería diferenciar los días laborables de los fines de semana? ¿Cuán confiables son las estimaciones que hacen los mismos escolares? Las conclusiones que se saquen dependen en gran medida de cómo se determine la característica. En este caso, el manejo de datos contiene una competencia referida al lenguaje crítico, que puede desarrollarse luego y devenir en una competencia en el manejo de medios.

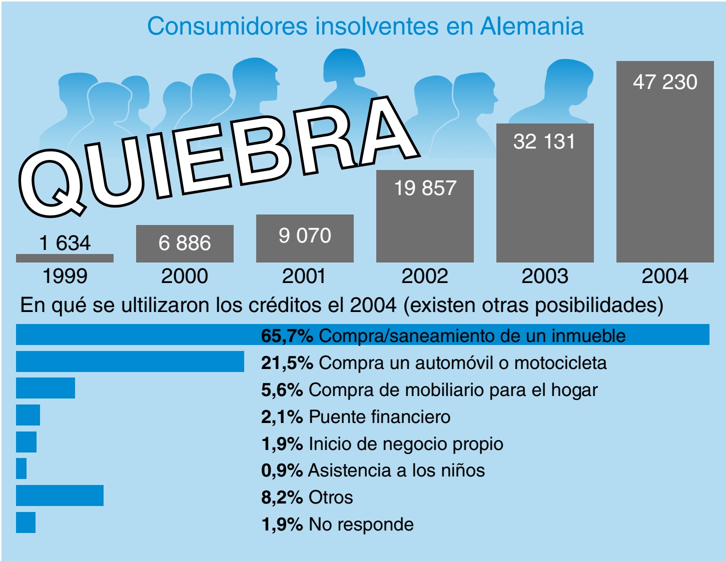
La realización de encuestas y el levantamiento de datos son muy intensivos en tiempo. A menudo queda luego muy poco espacio para el análisis y la interpretación. Si solo se recogen los datos de una clase, entonces se cuenta con pocos casos y no se puede llegar a conclusiones interesantes.

Una posibilidad es recurrir a cuestionarios ya existentes, para los cuales hay datos a disposición. Así, se añaden los datos de la propia investigación y se comparan con los otros. Esta es la idea detrás de los llamados "Data Sharing Projects" (ver www.mathematik.unikassel.de/didaktik/biehler/DataSharing.html). Queremos resaltar el proyecto 'Census at School' (www.censusatschool.ntu. ac.uk). En un marco más pequeño, esta idea se ha realizado en el proyecto Muffins (diseño de medios y tiempo libre para clases de estocástica, www. mathematik.unikassel.de/didaktik/HomePersonal/biehler/home/Muffins/Muffins.htm), en el que las escuelas participantes recogen datos de sus escolares sobre medios y tiempo libre y pueden recurrir a datos ya existentes a través de la página web (Biehler, Kom Brink & Schweynoch 2003, Schweynoch 2003).

Otra perspectiva se abriría si fuese técnicamente fácil que las clases diseñen sus propios cuestionarios en línea y realicen el levantamiento de datos en internet, lo cual haría posible que los datos estén disponibles automáticamente para ser analizados. Un proyecto piloto de la Universidad de Kassel, en conjunto con la escuela de reforma Kassel y con un grupo de escolares de varios grados (grados 6° a 8°), obtuvo buenos resultados en el otoño de 2005. El grupo logró que alrededor de doscientos escolares llenaran en línea un cuestionario de más de cincuenta preguntas, que luego se analizó en la clase tras una repartición de tareas. Este tipo de cuestionarios se puede colgar directamente en internet mediante el software *Fathom* (Biehler 2006).

3.3 Tareas para el manejo de datos

Quiebras y culpas



Salir de la "trampa de deuda"

En vista de los 3,1 millones de hogares sobreendeudados en Alemania, tanto el gobierno como los gremios aconsejan acudir a un centro de asesoría. "También los deudores pueden obtener provecho de una asesoría profesional", se explicó en la inauguración de la semana de acción "La persona detrás de la deuda" (AFP).

Información en www.meineschulden.de

a) En un *talkshow*, un político del partido de oposición atacó fuertemente al gobierno por su política económica y utilizó como respaldo el gráfico ilustrado anteriormente. El representante del partido de gobierno utiliza el mismo material para demostrar que la política del gobierno ya muestra sus primeros éxitos. Ponte en el lugar de ambos políticos y encuentra argumentos para ambas posiciones que se puedan respaldar con los números mostrados.

Tip: el representante del gobierno calculó previamente en qué porcentaje aumentó el número de personas en quiebra ya en el año anterior.

b) El gráfico de los créditos no se puede mostrar como un gráfico circular o 'de torta'. Brinda una explicación numérica y de contenido para esta afirmación.

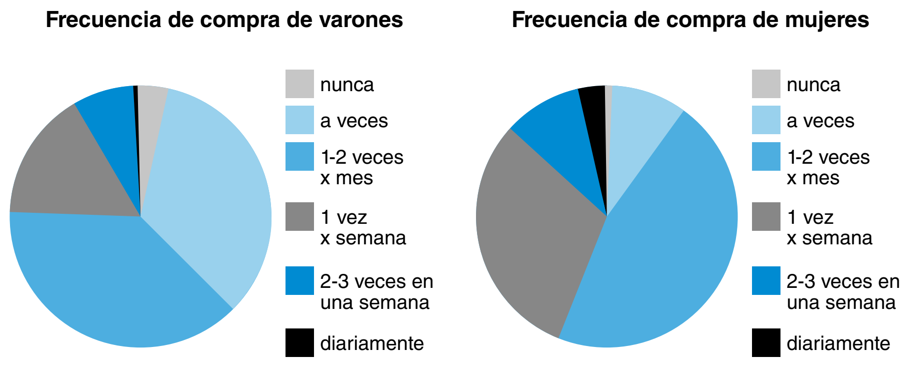
Fuente: Destatis, Schufa Schuldenkompass 2004 20050613- DE02 *AFP*

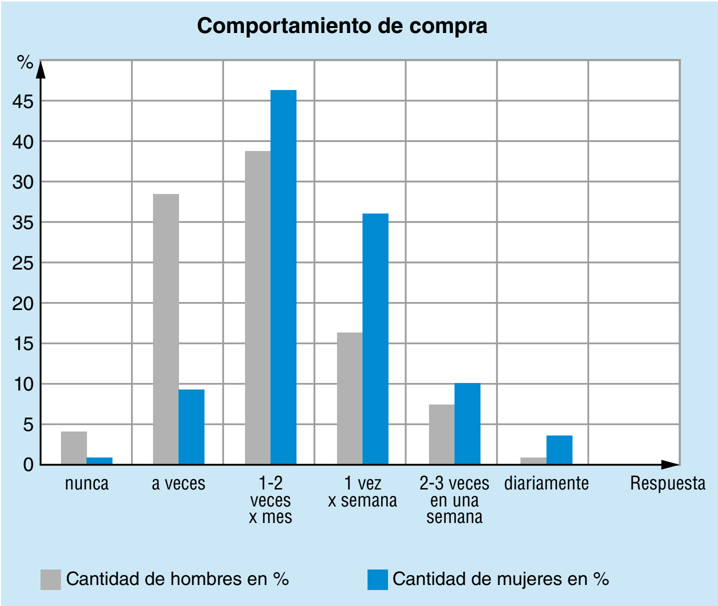
Comentario

a) A partir de un registro de datos sencillo extraído de los medios, se deben simular y comparar distintas argumentaciones que dependen de intereses particulares. Para esto se emplea una idea núcleo muy importante: la de comparaciones numéricas relativas y absolutas.

b) En este caso se debe reconocer que la suma de los números sobrepasa el 100%, lo cual se explica a partir de la posibilidad de nombrar varias respuestas. Sin embargo, esta tarea no se presta para conversar sobre las ventajas y desventajas de los diagramas de círculo y de barras en el sentido de la competencia *Usar representaciones.* Para esto se tendrían que comparar diversas representaciones de los mismos datos.

¿Compran las mujeres con mayor frecuencia que los hombres?





a) ¿Qué porcentaje de los hombres y qué porcentaje de las mujeres acude a comprar una vez a la semana?

b) Alguien afirma: "Las mujeres salen de compras más seguido que los hombres". Toma una posición al respecto.

c) ¿Cuál de los dos diagramas consideras que es mejor para comparar los hábitos de compra?

Los diagramas provienen de una encuesta a 538 alumnos de 11° grado. Se les preguntó sobre la frecuencia con la que van de compras. Se analizaron los datos separando escolares hombres de mujeres. En ambos grupos se presentó en porcentajes (frecuencia relativa) la distribución de cada opción de respuesta. Los diagramas de círculo y de barras representan la misma información. Las comparaciones entre distribuciones suelen ser más fáciles, cuando se usan diagramas de barras. Se reconoce que la distribución de las mujeres está desplazada sistemáticamente hacia la derecha. También es más fácil comparar barras individuales que segmentos de círculo.

Fuente de los datos: Muffins-Datensatz (www.mathematik.unikassel.de/didaktik/HomePersonal/biehler/home/Muffins/Muffins.htm)

Latidos del corazón y expectativa de vida en los animales. ¿Qué ocurre con el tapir?

En la tabla se presentan los latidos del corazón y la expectativa de vida de diversas especies zoológicas.

Especie zoológica	Latidos del corazón x min	Expectativa promedio de vida en años
Mono	192	1,5
Ardilla rayada	684	2,5
Tejón	138	11
Ardilla	354	9
Elefante	35	24
Burro	50	14,6
Jirafa	66	14
Hámster	450	1,5
Perro	115	15
Hiena	56	12
Camello	30	25
Conejo	205	5,5
Gato	120	15

Especie zoológica	Latidos del corazón x min	Expectativa promedio de vida en años
Lobo	40	23
Ratón	600	2
Cuy	280	2
Zarigüeya	180	5
Caballo	44	25
Rata	328	2,5
Cerdo	71	16
Puerco espín	300	10
Tapir	44	5
Tigre	64	11
Ballena	16	30
Cabra	90	9


Fuente de las fotos: www.wikipedia.com

a) Visualiza los datos de los latidos del corazón de los primeros diez animales en un diagrama de barras.

b) ¿En cuál especie zoológica late el corazón más rápido y en cuál más lento?

c) Plantea suposiciones acerca de cómo se diferencian entre sí las especies zoológicas con latidos del corazón más rápidos y más lentos. Compruébalo en la tabla completa.

d) Para mejorar la visión de conjunto, visualiza la tabla completa en una computadora y ordena las barras de menor a mayor.

e) ¿Por qué el diagrama de barras ordenado es más apropiado para la respuesta de la pregunta c) que el diagrama de barras sin ordenar?

f) En la tabla también tienes datos sobre expectativa de vida. Alguien afirma que los animales que tienen latidos del corazón más lentos viven más tiempo. Plantea tu posición. Elabora representaciones de los datos que te faciliten responder esta pregunta.

g) Proporciona otros datos sobre latidos del corazón y expectativa de vida para examinar si la regularidad comprobada se mantiene. Pregunta a tu profesor de biología si existe una explicación biológica para esta relación.

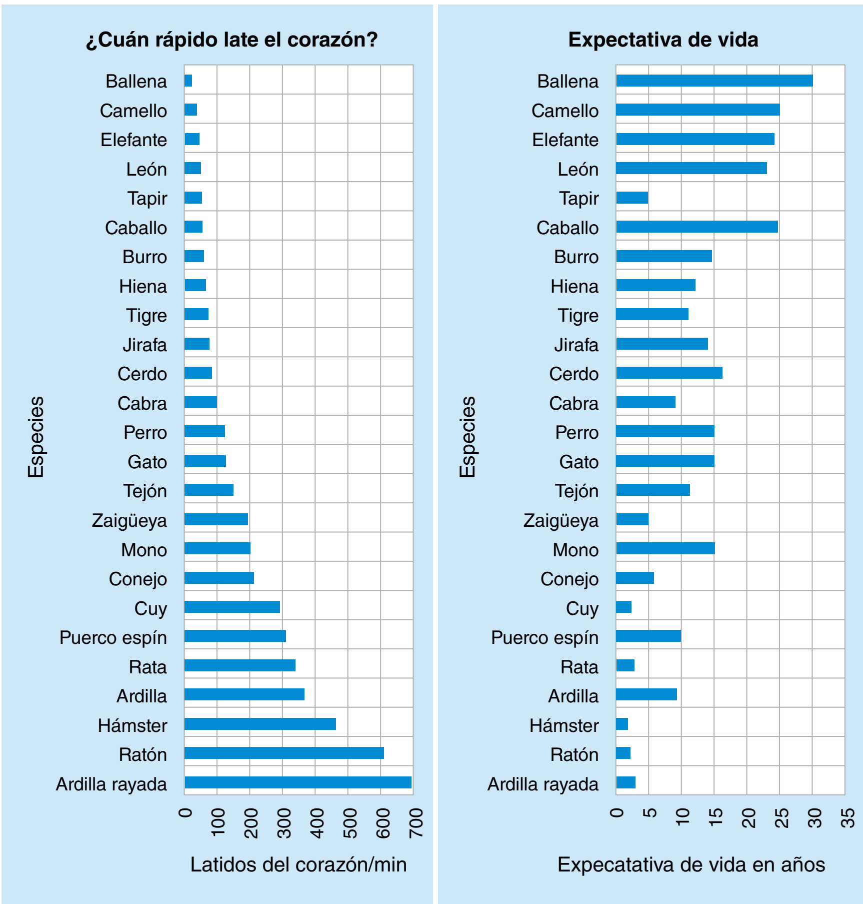
Fuente de los datos: Vogel & Wintermantel (2003), su fuente: Ogborn & Boohan (1991) (Booklet 5, Scatterplots Health and Growth). Fuente original: Spector (1956).

Se puede resolver la tarea (eventualmente tras una reducción de los datos a un subconjunto) a mano, con el apoyo de un software de estadística o mediante un programa de cálculo.

Comentario

En muchos libros escolares de quinto grado ya se encuentran tareas para visualizar tales números. Sin embargo, se suele tratar de la elaboración técnica de gráficos y de tareas sencillas de lectura. Tal como lo formulan Friel *et al*. (2001) de forma muy clara, en tales casos se trata solo de *read the data*, en vez de aspirar también a *read between the data* y *read beyond the data*. Nuestro ejemplo cubre una gran variedad de competencias y niveles de exigencia.

Posibles representaciones elaboradas por los escolares



Comentario

a) Es una tarea en la que se debe elaborar un gráfico. Dependiendo de si se usa una computadora o no, se requerirán distintas competencias. Si lo hacen a mano, los escolares tienen que elegir los recortes, las escalas y los rótulos correctos. Elegir el gráfico apropiado mediante un software requiere competencias sencillas, dado que el software toma algunas decisiones con respecto al formato.

b) Es una tarea sencilla de lectura.

c) Va más allá de los datos e invita a los escolares a formular relaciones con el contexto. Una respuesta posible es que los animales pequeños suelen tener más latidos que los grandes. Es necesario que no solo lean los distintos valores por separado, sino que establezcan relaciones entre ellos.

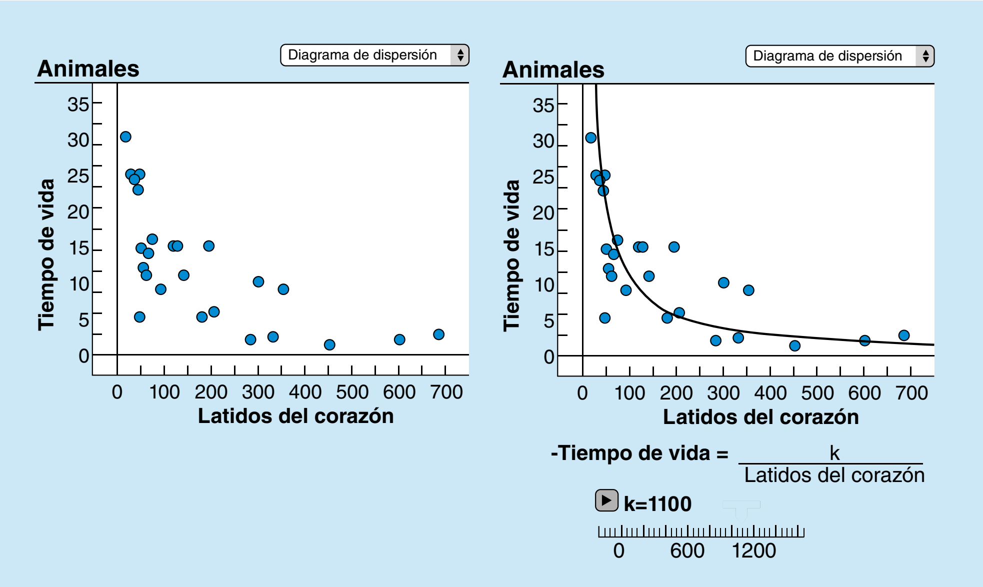
d) y **e)** Contiene la mejora y la evaluación comparativa de los gráficos con respecto a una meta. Los escolares deben aprender que el orden facilita en gran medida la comprensión. Como alternativa se les puede pedir que reordenen datos de los medios, en los que las barras suelen estar ordenadas según el alfabeto de las categorías.

f) Introduce una segunda característica en la discusión. Ordenar la segunda característica de acuerdo con la secuencia de la primera permite hacer afirmaciones sencillas con respecto a una relación estadística: *como tendencia,* los animales con un ritmo cardíaco más rápido tienden a vivir menos tiempo que los animales con un ritmo cardíaco más lento. Esto se observa en el hecho de que las barras en el diagrama de la derecha se van haciendo más cortas.

También existen excepciones muy claras que no se pueden explicar como desviaciones de una tendencia general. Por ejemplo, un tapir vive muy poco para tener una frecuencia cardíaca tan baja. Tales excepciones extremas pueden deberse a errores en la medición o registro o indicar una biología particular en el caso de los tapires. Se podría motivar a los escolares a buscar en internet información sobre la expectativa de vida de los tapires. En Wikipedia uno encuentra que la expectativa de vida de los tapires es de treinta años. Esto encajaría perfectamente con la tendencia descrita líneas arriba. Este error de registro de la fuente original ya se encuentra en Ogborn & Boohan (1991). No se pudo verificar la fuente original.

Aprender a manejar datos reales también implica prestar atención a excepciones interesantes a las tendencias y a posibles errores, para los cuales los valores extremos pueden servir de indicador. El problema de la 'limpieza de datos' y del control de calidad de los datos es un problema general importante.

Se puede ampliar la tarea si se usan los diagramas de dispersión como representación básica para la relaciones entre dos características.



En el gráfico de la izquierda se puede leer la siguiente tendencia: mientras más rápido lata el corazón, menor tiende a ser la expectativa de vida. Ahora se puede establecer un vínculo central con las *relaciones funcionales.* ¿Cómo se vería una correspondencia inversamente proporcional? ¿Cuán bien encajarían los datos? La noción básica e imprescindible que los escolares deberían conocer con respecto a las correspondencias inversamente proporcionales es la equivalencia de producto. La correspondencia debería ser del tipo *expectativa de vida • latidos del corazón* = *k*, es decir, *expectativa de vida* = $\frac{k}{\textit{expectativa de vida}}$. En el diagrama de la derecha hemos dibujado una función de este tipo y variado el elemento regulador hasta que se logró una concordancia relativamente buena, desde lo que se puede observar. Aquí vemos un ejemplo de un modelamiento matemático: el modelo de la correspondencia inversamente proporcional se comparará a continuación con la situación real. El modelo no describe la realidad de forma perfecta, pero refleja bastante bien una tendencia.

Lamentablemente los datos que se encuentran en la mayoría de libros escolares han sido falseados y caen perfectamente sobre el gráfico de la función. La idea directriz *Datos y azar* solo puede desplegarse cuando no se limita a un par de horas de estadística sino cuando propone otros contenidos, como el manejo de funciones.

El punto que se encuentra en la esquina más alejada en relación suroeste es el tapir, cuyos datos aún no hemos corregido. Uno podría proseguir con el trabajo de detective y comprobar si otras desviaciones relativamente fuertes también tienen una explicación especial.

Uso de la computadora

Investiga mediante una encuesta cómo se diferencian el interés y el uso de la computadora entre chicas y chicos.

Mediante este ejemplo queremos ilustrar diversos aspectos del manejo de datos. Se presentará un ciclo completo, desde el planteamiento del problema hasta el análisis. Se pueden escoger partes de la tarea para desarrollar competencias parciales.

• *Planteamiento del problema y planificación de la recolección de datos*

Es importante formular hipótesis y expectativas para pensar en formas de acercarse a los datos, para poder entrar en un 'diálogo' con los datos. Proceder en la forma como lo propone un análisis de datos exploratorio significa respetar los datos reales y prestarle atención justamente a aquello que no se esperaba, es decir, a las excepciones y desviaciones de las expectativas. El tipo de formulación de hipótesis también es un indicador de qué competencias ya se desarrollaron. La suposición "los escolares hombres juegan más en la computadora que las escolares mujeres" se puede formular sin necesidad de grandes competencias estadísticas. Si se aplican tales tareas al final de una unidad de aprendizaje, entonces se podría preguntar en cuántas horas se diferencia el tiempo promedio de juego en mujeres y hombres, o si en los hombres hay más diferencias (dispersión) que en las mujeres. Uno también podría interesarse por la cuota de mujeres que juega al menos tanto como el promedio de los hombres.

Uso de la computadora (continuación)

a) Formula sobre este tema las preguntas adecuadas y las hipótesis de forma precisa. Define los atributos a investigar que quieres explorar a través de preguntas. Reflexiona cuándo corresponde preguntar por valores numéricos (atributos cuantitativos), cuándo se preguntan alternativas textuales (por ejemplo, ninguno, poco, mucho interés, o para nada, a veces, a menudo, etcétera) y cuándo se permiten respuestas abiertas.

b) Reflexiona sobre qué grupo se efectuará la encuesta y llévala a cabo.

c) Captura los resultados en un programa estadístico o de cálculo de tablas.

La pregunta **a)** se relaciona con la idea directriz *Medir* de los estándares de aprendizaje. En la estadística los escolares tienen la posibilidad de definir por sí mismos lo que se debe medir, y a la vez, de inventar nuevas medidas o características, por así decirlo.

La pregunta **b)** tematiza la pregunta sobre el alcance de la investigación: si uno está interesado en un grupo en particular, por ejemplo todos los escolares de un grado, o si se quiere determinar tendencias generalizables a partir de una muestra que de alguna manera se puede definir como representativa.

• *Análisis*

A manera de ejemplo presentaremos algunos análisis parciales del registro de datos original de Muffins (ver arriba)[10]. Se trata de una encuesta a 538 escolares de undécimo grado de varios Gymnasien en el año 2000, sobre todo de la región Renania del Norte-Westfalia. Sin embargo, se debe tener en cuenta que los hábitos de uso han variado en gran medida desde entonces.

De las abundantes cincuenta características a disposición, consideraremos la característica *Comp. propia* (sí/no) y *Tiempo en la comp.*, en la que los escolares han indicado el tiempo que pasan en la computadora. Una parte de la tabla de datos se ve de la siguiente manera.

10 Los datos en Excel y el formato *Fathom* se encuentran en (www.mathematik.uni-kassel.de/didaktik/HomePersonal/biehler/home/Muffins/Muffins.htm).

Muffins_Comp

	Nombre	Sexo	Tiempo en la comp.	Comp. propia
1	A	masculino	4	sí
2	ABXY	femenino	35	sí
3	Abby	femenino	3	sí
4	Adidas-girly	femenino	2	sí
5	Agneta	femenino	8	no
6	Ailton	masculino	10	sí
7	Alaina Macbaren	femenino	0	sí

d) ¿En qué medida depende la posesión de computadoras del sexo de la persona?

Se puede dejar la pregunta así de abierta y dejar en manos de los escolares producir visualización y tablas apropiadas o se pueden dar algunos análisis que se deben explicar. Una primera 'tabla de cuatro campos' se encuentra abajo a la izquierda.

Tiempo libre

		Sexo		Suma de las filas
		F	M	
Comp. Propia	sí	184	114	298
	no	48	190	238
Suma de las columnas		232	304	536

S1= cantidad ( )

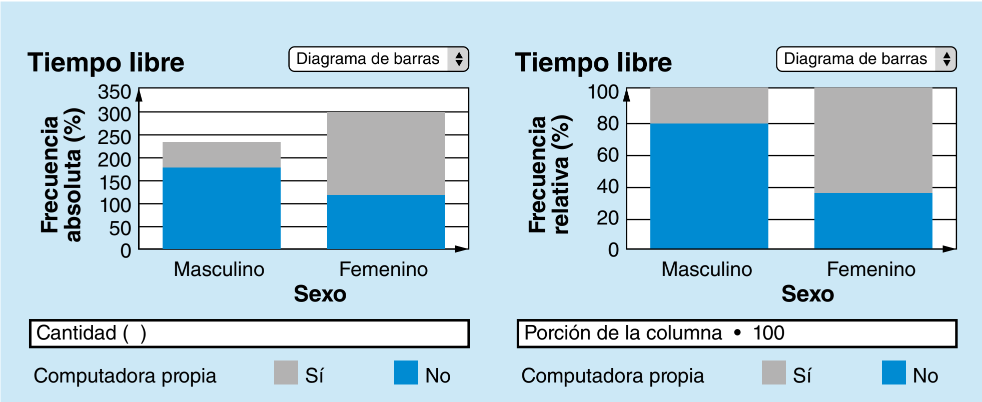
Tiempo libre

		Sexo		Suma de las filas
		F	M	
Comp propia	sí	79	38	56
	no	21	63	44
Suma de las columnas		100	100	100

S1 = redondeado (proporción en columna • 100)

La tabla que aparece en la página 65 contiene —como procesamiento sucesivo— la distribución porcentual de los propietarios o no propietarios de computadora separados en alumnas y alumnos. El redondeo a dos posiciones mejora en gran medida la visión general (competencias para la mejora de representaciones) (tener en cuenta que se dan efectos de redondeo: 38 + 63 = 101).

Ejemplos de otros diagramas



A la derecha se visualizan las cuotas correspondientes a ambos grupos parciales y a la izquierda las frecuencias absolutas. A la izquierda también se puede reconocer una cuota mayor de propietarios de computadoras en el caso de los escolares hombres, si se realizan comparaciones de áreas relativas. A la derecha esta comparación de cuotas es más clara, sin embargo los números absolutos ya no se pueden reconocer. Una respuesta resumida: mientras que la cuota de propietarios es de 79% en el caso de los hombres, es solo de 38% en el caso de las mujeres.

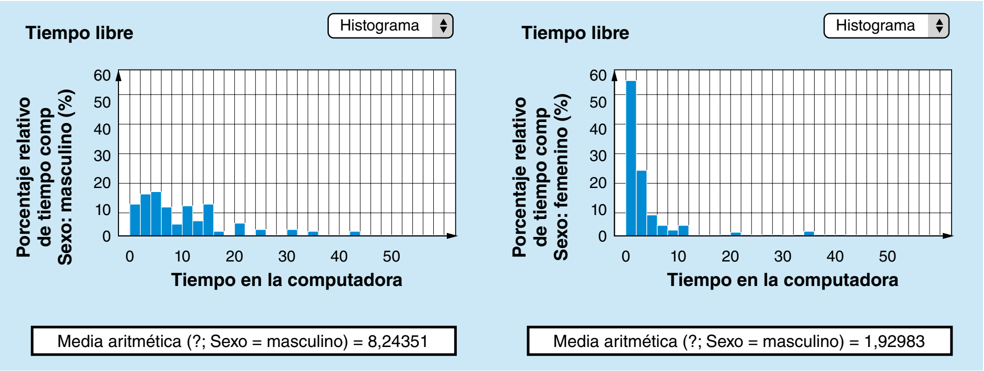
Preguntas abiertas para una mayor exploración de datos:

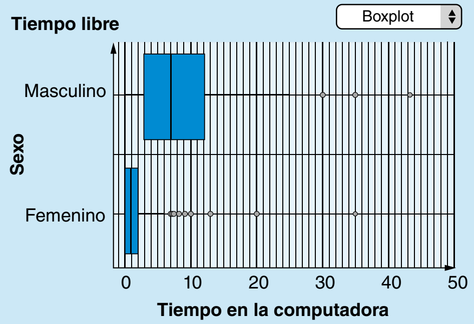
- ¿Qué factores explican las cuotas distintas?
- ¿Expresan las respuestas recogidas con respecto a ‘aparatos deseados’ que las escolares perciben la necesidad de ‘ponerse al día’?
- ¿Se nota en los datos recogidos sobre ‘aparatos deseados’ que las escolares mujeres deben ‘ponerse al día’?

e) ¿Cómo se diferencian los chicos y las chicas en términos de uso de computadora? Expresa inicialmente suposiciones. Completa presentaciones de las distribuciones de frecuencia y compáralas. Utiliza también las medidas de valores medios y de dispersión. Resume tus resultados e interprétalos. ¿Qué preguntas adicionales se te han presentado durante el análisis de datos? Selecciona una de ellas que puedas analizar con los datos que tienes a disposición y realiza un análisis adicional.

La pregunta abierta se restringe en la medida en que se indique la característica hacia la que se debe guiar la investigación. Se debe tratar del tiempo semana de uso (representado por el rótulo *Tiempo de comp.* en el registro de datos). Una pregunta más abierta, que iría en la línea del trabajo por proyectos, dejaría abierta la característica a investigar. Se preguntaría por la frecuencia de escribir correos, jugar, chatear, etc. En este caso las posibilidades de ampliación se posponen hasta la pregunta parcial final. Al finalizar la investigación encargada se incita el 'trabajo de detective' para seguir investigando.

Después de varias reflexiones largas y la generación de distintos gráficos, los escolares podrían optar por el siguiente gráfico. Este muestra la distribución de las frecuencias relativas (necesario, dado que los grupos son de distintos tamaños) con los promedios indicados. Un ejemplo para una respuesta formulada: "Los alumnos (masculino) encuestados usan la computadora en promedio 6,3 horas más que las alumnas encuestadas, que utilizan la computadora solo 2 horas en promedio. Mientras que la mayoría de las alumnas se mantiene en tiempos de uso bajos (casi el 60% de 2 horas a menos), los tiempos de los alumnos son inconsistentes y dispersos: más o menos parejo de 0 a 15 horas, luego hay alrededor de un 10% de los alumnos que usan la computadora por más de 15 horas, y algunos incluso por mucho más de 15 horas. Pero también hay algunas alumnas que pasan más tiempo en la computadora: alrededor de 5% de las mujeres se sientan por más de 8 horas frente a la computadora; eso es más que el promedio de los hombres".





Tiempo libre

	Sexo		Resumen de las filas
	M	F	
Tiempo en la computadora	0 3 7 12 43	0 0 1 2 35	0 1 2 7 43

S1 = Min ( )
S2 = Q1 ( )
S3 = Media ( )
S4 = Q3 ( )
S5 = Max ( )

Una vez que los escolares conocen el Boxplot como una representación que sintetiza una distribución, entonces se puede mejorar la comparación y visualizar las diferencias con mayor claridad. Los escolares hombres no solo pasan más tiempo en la computadora en promedio sino que el grupo es mucho más heterogéneo que el grupo de las escolares mujeres. Sin embargo, en el grupo de las mujeres también hay valores extremos (con relación al promedio de este grupo). La caja del Boxplot va desde el primer cuartil Q1 hasta el tercer cuartil Q3, entre los dos se ha dibujado la mediana, los valores se encuentran en la tabla de la derecha. La distancia entre cuartiles Q3-Q1 muestra la extensión del 50% central de los datos e indica una medida de dispersión muy sencilla e ilustrativa, que tiene —por consiguiente— ventajas didácticas para el nivel de Secundaria I en comparación con la desviación estándar (ver el grupo de trabajo “Estocástica”, GDM 2003).

A este diagnóstico se le podría añadir más preguntas: ¿por qué es esto así? ¿Es deseable un cambio? ¿La situación ha cambiado al día de hoy? (nuevo levantamiento de datos).

3.4 El aspecto probabilidad y azar

El reto de una clase orientada hacia la educación básica consiste en que el trabajo con probabilidades no aparente ser ni una ‘matemática de juegos de dados’ ni una acrobacia combinatoria, sino algo que —dicho de forma concisa— tiene que ver con la ‘vida’. Sin embargo, son justamente las situaciones de juego las que resultan motivadoras y cognitivamente abarcables para los escolares. También resulta significativo que algunos desarrollos conceptuales se hayan fijado históricamente a partir de situaciones de juego, que de cierta forma tienen un carácter prototípico. En tal sentido, las situaciones de juego en clase son importantes para la realización de la idea directriz, pero la clase no debe quedarse ahí. Hemos considerado esto al elegir nuestros ejemplos.

En la escuela, el concepto de probabilidad debe quedar claro en sus dos aspectos: el teórico y el experimental, y también en la relación entre ambos. En algunas situaciones especiales se pueden calcular las probabilidades, como el número de casos deseados entre el número de casos posibles, si se puede partir de un número finito de casos de igual posibilidad. La probabilidad de un evento puede estimarse de forma experimental mediante la frecuencia relativa, determinando cuán frecuentemente aparece el evento en una serie larga de intentos. Esta posibilidad se puede ampliar significativamente mediante simulaciones estocásticas computarizadas, con las que se pueden generar muestras lo suficientemente grandes.

Una clase orientada hacia la educación básica quiere generar un conocimiento que se pueda aplicar y no un conocimiento que coexista sin ser usado en paralelo con el conocimiento que se usa en situaciones de la vida cotidiana. Este peligro existe justamente con el concepto de probabilidad, tal como demuestran diversos estudios. La clase debe ocuparse del conocimiento intuitivo y las estrategias intuitivas de los escolares y ofrecerles la oportunidad para una construcción cognitiva de nociones e intuiciones básicas adecuadas. Las simulaciones pueden permitir que el azar se experimente y pueden producir material para la modelación. En algunas tareas abordaremos cómo se puede enriquecer mediante el uso adecuado de simulaciones estocásticas.

3.5 Tareas sobre probabilidades y azar

La probabilidad de los números de un dado

Alguien te propone un juego de dados. Para ello, se lanzan dos dados al mismo tiempo y se suman los números. Antes de empezar el juego, debes elegir si deseas ganar con los números 5; 6; 7; 8 (resultado A) o con los demás números (resultado B). Fundamenta si es que elegirías alguna de las dos alternativas.

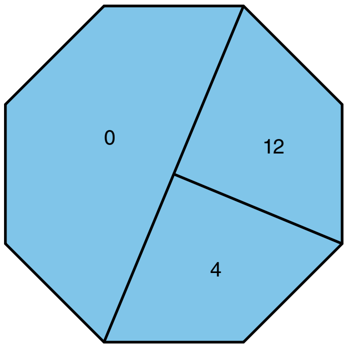
Comentario

Esta es una tarea adecuada para la introducción en sétimo grado. La hemos tomado de Müller (2005), quien documenta al respecto una secuencia de clase interesante.

Se pueden hacer varias aproximaciones teóricas con respecto a las posibilidades de ganar. Mediante experimentos con dados y simulaciones en la computadora se pueden probar las 'teorías'. Lo atractivo de la pregunta reside en que se incita a los escolares a que generen diversos modelos, que se basan en la estimación distinta de casos que son igual de posibles. La solución normativa propone que, de las 36 combinaciones posibles de los dados, 20 son favorables para A, pero si se asume que las 11 posibles sumas de dados son igual de probables, entonces solo 4 son favorables para A. Si un escolar solamente ve las combinaciones 2 + 2 y 1 + 3 (en vez de incluir también 3 + 1; de igual modo con los otros resultados) como casos para la suma de dados 4, entonces llegará a 21 casos posibles, de los cuales 11 son favorables para A. A partir de los diversos enfoques puede surgir una controversia de modelos en la clase que se puede aclarar mediante experimentos y otras argumentaciones. Se vivencian las facetas típicas del concepto de probabilidad y se abordan muchísimas competencias, en especial la social-comunicativa. Para más detalles ver Müller (2005).

Juego del giroscopio

Para el siguiente juego se necesitan dos cantidades iguales de caramelos como 'medio de pago' y un trompo de ocho lados como el que se muestra en la imagen.



Reglas de juego

Heike paga a Martin una cantidad aún por definir de caramelos como cuota inicial, que le permitirá girar el trompo una vez. Si el trompo se detiene en el número 4, recibe de Martin 4 caramelos; si se detiene en el número 12, recibe 12 caramelos de Martin, y si se detiene en el cero, no recibe ningún caramelo.

a) Repite el juego por lo menos 100 veces y anota cuantos caramelos recibe Heike cada vez.

b) ¿Cuánto gana Martin en promedio, si por cada juego recibe 5 caramelos de cuota inicial? ¿Cuánto gana Heike, si la cuota inicial es de solo 3 caramelos?

c) Heike no quiere perder a la larga. Dale un consejo sobre cuántos caramelos debería pagar a Martin como máximo por cuota inicial para cada juego. Argumenta tu respuesta.

d) Martin tampoco quiere perder a la larga. Dale también un consejo sobre cuántos caramelos debería exigir por lo menos como cuota inicial por cada juego. Argumenta tu respuesta.

e) ¿Cómo puede hacer Martin para que el trompo y las reglas de juego sean más atractivas para Heike? Nombra una posibilidad.

Comentario

Esta exigente tarea une las probabilidades y los experimentos aleatorios, en los que se recogen datos para estimar las probabilidades y la ganancia esperada. Las simulaciones por computadora son una extensión natural para aumentar la exactitud y confiabilidad de la estimación. En el fondo se encuentra —en términos matemáticos— el valor esperado, que no tiene que ser tematizado de forma explícita.

A continuación revisaremos las siguientes respuestas de los escolares, que giraron el giroscopio 101 veces.

Respuesta de los escolares

a)

0	4	12
69	15	17
$\frac{69}{101}$	$\frac{15}{101}$	$\frac{17}{101}$

ganancia promedio por juego de Heike

$4.\frac{15}{101}+12\frac{17}{101}=\frac{264}{101}=2,6$

A= Heike gana 2,6 caramelos por juego.

$$4-\frac{25}{100}+12-\frac{25}{100}$$

$$=4-\frac{1}{4}+12-\frac{1}{4}=1+3=4$$

b) Dado que en teoría Heike gana en promedio 4 caramelos y Martín pone 5, entonces ella pierde al rededor de 1 caramelo por juego. Si Heike pone 3, gana al rededor de 1 caramelo por juego. Dado que gana en promedio 4.

c) Ella debe poner 4 como máximo, dado que gana en promedio 4 por juego.

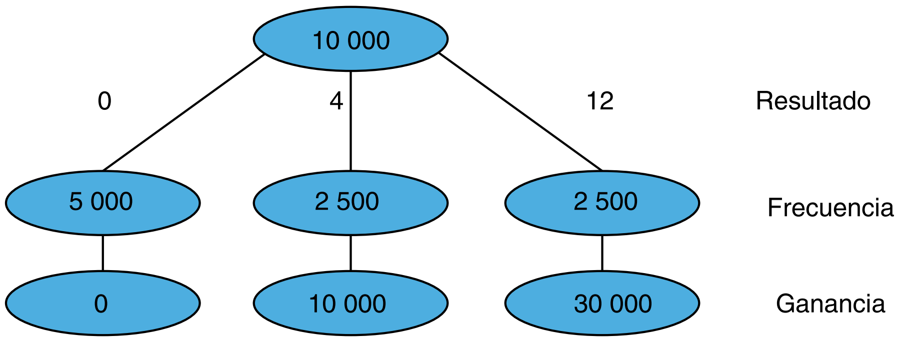
d) Él debe pedir al menos 4, porque debe entregar en promedio 4 por juego.

e)

Otras soluciones para el juego del giroscopio

Para empezar, notamos que la propuesta de la tarea parcial e) es incorrecta, pero muy interesante, porque efectúa un claro cambio en los valores. Lamentablemente no se continúa con la argumentación. Se puede reanudar en este punto para abordar las competencias matemáticas generales *Comunicar* o *Argumentar*.

Ahora entraremos a las posibles respuestas a la primera parte.



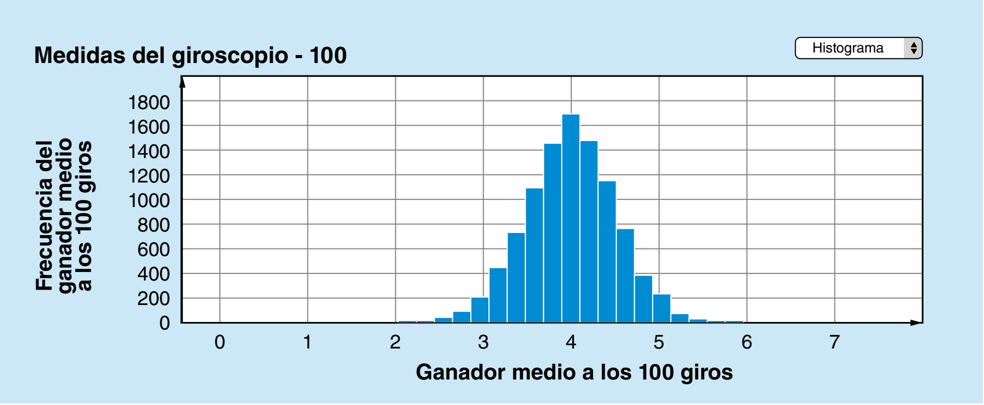
La alumna diferencia la ganancia promedio de la serie de experimentos realizada del 'promedio según la teoría'. Luego continúa trabajando con el valor teórico. Para obtener el valor teórico, se podría proceder —por ejemplo— de la siguiente manera. Si uno juega muchas veces, digamos que 10 000 veces, A no gana nada en la mitad de los casos, 4 caramelos en un cuarto de los casos (2 500 veces), en otro cuarto 12 caramelos, entonces en total 12 • 2 500 = 30 000 caramelos. En total se ganaron 40 000 caramelos en 10 000 juegos, en promedio 4 por juego. En cierto sentido, con esto se ha realizado una simulación 'ideal'. Un diagrama de árbol puede apoyar de forma visual esta argumentación. El diagrama de árbol muestra la estructura general de solución y encierra el núcleo de la generalización y transferencia a situaciones similares. Ya que una fórmula general del valor esperado no es un tema para el nivel Secundaria I.

La alumna del ejemplo argumenta de la misma forma con frecuencias relativas, lo que resulta más difícil para la mayoría de los escolares que argumentar con frecuencias absolutas. Esto se ve sustentado por muchos hallazgos empíricos de la investigación psicológica (Gigerenzer 2002, Wassner 2004, Wass Ner, Martignon & Biehler 2004).

La siguiente argumentación —más abstracta— a partir de promedios también es factible: "Si uno quiere obtener cuatro o doce caramelos, entonces el giroscopio se puede detener en dos aristas respectivamente. En el caso de las otras cuatro aristas no se obtiene nada. Si uno toma las cuatro aristas juntas de un lado del giroscopio, se obtienen en promedio ocho caramelos, y cero caramelos en el otro lado. En total se obtienen en promedio cuatro caramelos en este juego".

En cada caso, la argumentación teórica presupone que se hayan calculado las probabilidades para cada resultado posible.

En clase no basta una simple yuxtaposición del resultado experimental y el cálculo teórico. Puede que los escolares tiendan a construir una argumentación con el promedio empírico de 2,6. La tarea de arriba presupone una comprensión básica de la ley de los grandes números, es decir, que la frecuencia relativa se aproxima a la probabilidad teórica a medida que aumenta el número de intentos. Esto se podría visualizar de forma dinámica mediante una simulación. Se podría proceder de forma similar para demostrar que la ganancia (empírica) promedio se acerca al valor teórico (en este caso 4) a mayor número de intentos.

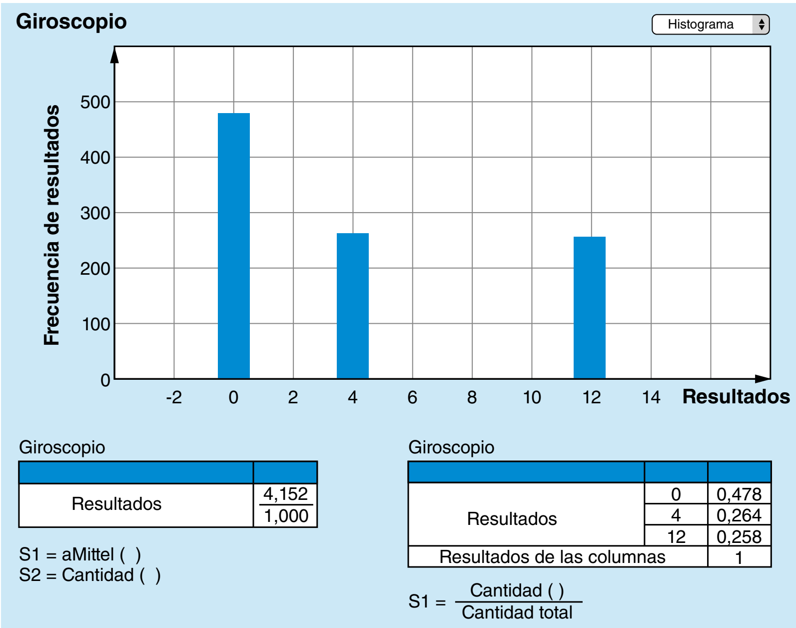


Si como profesor uno permite realizar intentos reales, es recomendable hacerse una idea de qué desviaciones del valor teórico se puede esperar. Hemos simulado 10 000 veces el lanzar 100 veces el giroscopio y calculado en cada caso la ganancia promedio de una serie de 100. Hemos representado la distribución de frecuencias de estas 10 000 ganancias centrales (relación con el aspecto Datos de la idea directriz). Los valores entre 3,5 y 4,5 son comunes. El valor 2,6 mencionado por los escolares es una desviación extremadamente inusual. Con estos conocimientos previos uno dudaría de que los escolares lanzaron bien o que el giroscopio funciona. Para evitar malentendidos, en este caso no se deberían probar hipótesis en la clase, pero como docente uno debería disponer de este contexto y tener un programa de simulación a la mano, si quiere estimar y evaluar probabilidades y valores esperados de forma experimental.

Si, por ejemplo, uno quiere comparar diversos 'planes de desembolso' y variantes de juego no mediante un valor promedio obtenido teóricamente sino mediante la estimación experimental, entonces es importante haber estimado previamente el número de intentos necesarios para tomar una decisión de ese tipo con al menos algo de certeza.

Si uno quiere seguir calculando en clase a partir de valores estimados empíricamente, entonces se tendrían que dar tips a los escolares para que propongan una cantidad de simulaciones razonable (1 000, 5 000, 10 000).

El obtener resultados muy distintos en los experimentos de los escolares en la tarea a) puede ser una ocasión para buscar una solución teórica o una motivación para aumentar el alcance del experimento, de modo que se logre una estimación más exacta. A la derecha mostramos un posible resultado en el caso de 1 000 simulaciones. Una tarea podría ser:



a1) Simula el lanzamiento del giroscopio 1 000 veces e ilustra tus resultados. Ahora, estima qué ganancia promedio por juego se puede esperar (o si es prioritario hacerlo de forma teórica: compara con el resultado teórico).

a2) Repite la simulación cinco veces más y anota los valores promedio. Comprueba tu estimación.

Los resultados de nuestra simulación son 4,02; 3,98; 4,03; 4,10; 3,89. Estimamos que el valor se encuentra alrededor de 4 + 0,1 y nos queda un sentimiento de incertidumbre con respecto a esta estimación. Los escolares también podrían observar la fluctuación de la distribución de frecuencias y así aprender sobre aspectos esenciales de la idea directriz Datos y azar.

El problema de las figuritas coleccionables

Una empresa ofrece paquetes de figuras coleccionables con los jugadores del Mundial de Fútbol 2006. Uno está interesado en juntar tanto como sea necesario hasta tener una 'serie completa', es decir, hasta que estén todos los jugadores.

a) ¿Cuánto tiempo en promedio se tiene que esperar hasta lograr una 'serie completa'?

b) ¿La probabilidad es que la espera sea larga?

c) ¿Cómo se puede prolongar el tiempo de espera promedio si se hace escasear artificialmente a las 'estrellas'?

Al imprimir este libro (durante el Mundial de Fútbol 2006 en Alemania), ese ejemplo era especialmente actual. Las empresas (por ejemplo, Panini) ponen en circulación un número determinado de figuritas del Mundial de Fútbol que se distribuyen bien mezcladas en paquetes con una cantidad específica. Las preguntas que presentamos arriba ya han sido abordadas por locutores radiales y han despertado preguntas críticas a los fabricantes sobre si es verdad que cada jugador aparece con la misma probabilidad. Los oyentes afirmaban que tenían muchos duplicados, pero como máximo un ejemplar de las 'estrellas'.

Si se tiene confianza en el método de simulación, entonces también se le puede utilizar en casos en los que los estudiantes no disponen de posibilidades para verificar teóricamente, como en este ejemplo, para el cual una solución teórica se encuentra más allá de las matemáticas escolares. Con ideas sencillas y una buena herramienta de software donde se puedan trasladar las ideas fácilmente, los escolares del nivel de Secundaria I pueden experimentar por sí mismos la potencia del modelaje estocástico y percibir la simulación con una competencia propia.

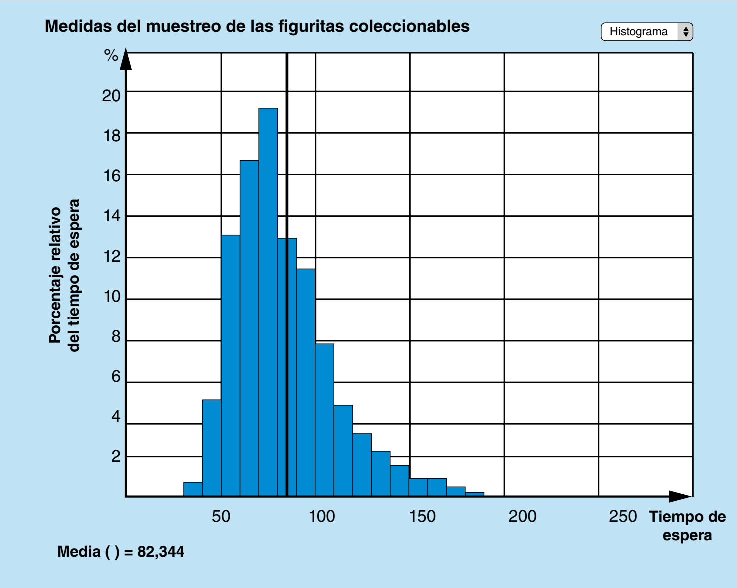
Posible respuesta

Para que resulte más sencillo, asumamos que son 22 jugadores y que las figuritas se compran de manera individual. Luego confiemos en la afirmación de la empresa, que dice que cada jugador aparece con igual probabilidad en una figurita. Entonces podemos imaginarnos la producción de figuritas como si uno las sacara —con devolución— de una urna en la que se encuentran 22 pelotitas distintas, a lo cual se tiene siempre la misma probabilidad de sacar cada imagen. Aquí se espera que los escolares sean capaces de modelar. Ellos imaginan la situación como si hicieran uso de los aparatos de azar, que son conocidos para ellos. Con una urna real uno sacaría hasta que obtener todos los jugadores al menos una vez. El número de 'sacadas' necesarias se anota como 'tiempo de espera'. Luego se repite el procedimiento.

Los escolares tienen la experiencia fundamental, y central para la idea directriz Datos y azar, de que una medida (el tiempo de espera) varía de caso a caso. Si se repite el experimento muchas veces, entonces se forma una distribución (de tiempos de espera). La distribución nos permite calcular cuánto tiempo se debe esperar en promedio y cuán probable es, por ejemplo, que uno tenga que comprar más de 100 figuritas para tener una serie completa de 22.

Para esto son necesarias muchas simulaciones, cuya realización no es factible sin un uso apropiado de la computadora. Mostraremos un resultado en el caso de 1 000 simulaciones, para las que hemos anotado el tiempo de espera correspondiente a una serie completa. Además del promedio (alrededor de 82 figuritas) se pueden estimar las probabilidades. En 208 de 1 000 repeticiones se dio el caso de que uno tenía que comprar incluso más de 100 figuritas para completar la serie. La probabilidad de que este suceso se vuelva a dar en el futuro es de 21% aproximadamente.

En la medida en que se pueda usar un programa de computadora como herramienta cognitiva sencilla, bastará que los escolares cuenten con competencias de modelación estocástica simples en relación con los modelos de urna, para que puedan ocuparse de un problema complejo. El trabajar con distribuciones de características y con la estimación de la probabilidad de un evento mediante la frecuencia relativa, con la que ha aparecido en una serie larga de experimentos, contiene otro aspecto fundamental de la idea directriz *Datos* y *azar*.

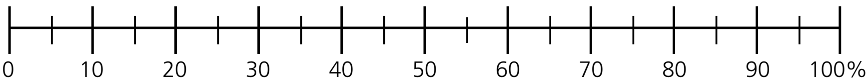


BSE-Test

Durante la llamada 'crisis de las vacas locas' se identificó la enfermedad BSE en dos de cada 1 000 vacas sacrificadas en promedio. Un test rápido recientemente desarrollado reconoce una infección al 98,5%. Por otro lado, el mismo test identifica a las vacas sanas de forma correcta en un 99,9%. Cuando el test señala la presencia de una enfermedad, se denomina al resultado 'positivo'.

Asume que por precaución, muchas de las vacas de un rebaño son sometidas al test, aún antes de presentar síntomas de la enfermedad.

a) Imagina que el resultado del test a una vaca es positivo. Cada alumno de tu clase debe estimar cuán alta es la probabilidad de que una vaca esté realmente enferma. Registren las estimaciones del salón en un diagrama e intenten convencerse mutuamente de sus estimaciones.



b) ¿Qué errores y decisiones correctas pueden surgir en el test?

c) ¿En qué medida se trata en este caso de procesos aleatorios? Representa las diferentes posibilidades y niveles en un diagrama de árbol.

d) ¿Cuán alta es la probabilidad de que un animal cuyo test lo señala como enfermo efectivamente esté enfermo (sano)?

e) ¿Cuán alta es la probabilidad de que un animal cuyo test lo señala como sano en realidad esté enfermo? Haz una estimación primero, antes de calcular.

f) Asume que la tasa de enfermedad ha mejorado a dos de cada 10 000 animales. ¿Cómo cambia entonces la probabilidad calculada en d)?

g) Explica por qué uno se equivoca inicialmente en la estimación. Da una explicación simplificada que también los 'no conocedores' puedan entender.

Wassner et al. (2004) usan una tarea estructuralmente similar, con el test del sida como contexto, como introducción a una serie de clases en noveno grado.

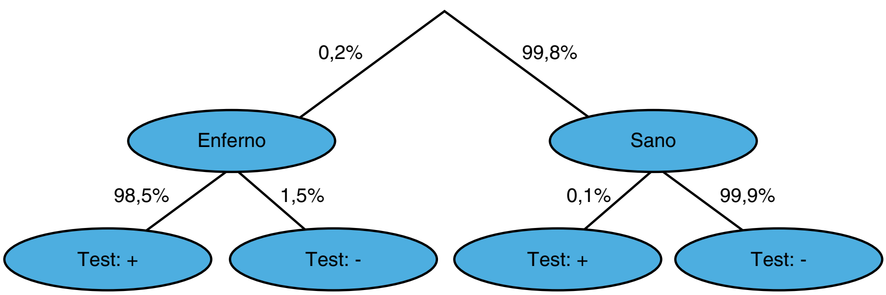
Comentario

En cuanto al núcleo matemático de esta tarea, se trata de la regla de Bayes. Muchas situaciones de contexto tienen una estructura similar, por ejemplo los resultados del test de sida, de mamografías o tests de embarazo. Se trata de una tarea sencilla en la que se observan los datos (el resultado de un test) en relación con las hipótesis (animal enfermo o sano). El significado de tales tareas para la educación general se ha destacado de distintas maneras, por ejemplo en la didáctica de Riemer (1985), en la investigación psicológica sobre las decisiones sobre todo de Gigerenzer (2002) y su equipo de trabajo. La posibilidad, vista en estas investigaciones, de representar información mediante 'frecuencias naturales' también abre accesos a este tema para personas con menos práctica en este tema formal-matemático (Wassner, Martignon & Biehler 2004).

a) Para el desarrollo de nociones básicas sobre situaciones aleatorias resulta importante hacer reconocibles las intuiciones de los escolares y conectar con estas. De otro modo se aprende matemática, que coexiste con intuiciones parcialmente erróneas que seguirán usándose para formarse un juicio con respecto a problemas de la vida cotidiana. La tarea parcial a) sirve a esta meta, que resulta importante sobre todo para un primer acercamiento al tema. La mayoría de las personas estiman la probabilidad entre 98,5% y 99,9%, es decir, que toman las probabilidades de lo que indica la tarea.

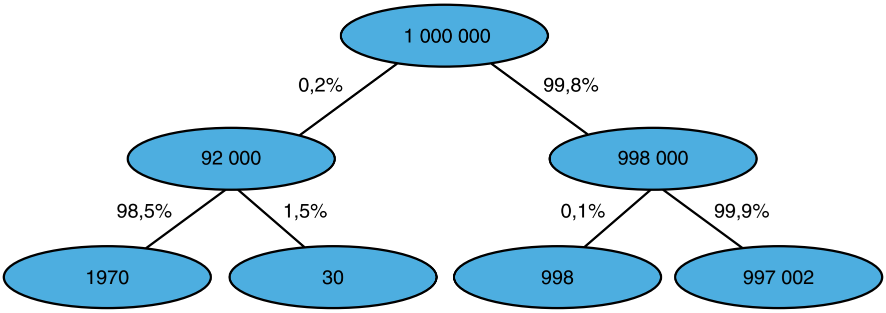
b) Se deben diferenciar cuatro casos: enfermo y test positivo, enfermo y test negativo, sano y test positivo, sano y test negativo.

c) Uno se puede imaginar la situación como un experimento aleatorio de dos fases. En una primera fase se elige un animal de forma aleatoria con 'enfermo' y 'sano' como posibles resultados, en una segunda fase se usa el test con 'test positivo' y 'test negativo' como posibles resultados. Se puede representar la información en un diagrama de árbol.



La solución más simple consiste en empezar por representar en forma de frecuencias absolutas la información que ha sido dado en porcentajes en el caso de una simulación ideal. Nos imaginamos, que muchos animales fueron examinados (1 000 000).

Así obtenemos el siguiente diagrama de árbol, que permite un análisis sencillo. Tenemos 1 970 + 998 = 2 968 tests positivos, de los cuales 1 970 están realmente enfermos, es decir, un porcentaje de $\frac{1970}{2968} \sim 66\ \%$. Un tercio de los animales con tests positivos está sano.



Con la ayuda de las probabilidades obtenemos diversas posibilidades de solución elementales, sin que tengamos que abordar explícitamente la Ley de Bayes. Por ejemplo, se puede calcular de la siguiente manera, si se usan las Pfadregelen ('reglas de camino') para probabilidades.

P(test+) = 0,002 • 0,985 + 0,998 • 0,001 = 0,002968

P(test+ y enfermo) = 0,002 • 0,985 = 0,00197

P(enfermo bajo la condición test+)

$$= \frac{P(\text{test+ y enfermo})}{P(\text{test+})} = \frac{0{,}00197}{0{,}002968} = 0{,}6637$$

Incluso si se lograra una buena motivación para la última relación entre las tres posibilidades, la comprensión se pierde en la cantidad de pequeños números decimales poco transparentes.

d) La probabilidad de que un animal testeado como sano esté enfermo es:

$$\frac{30}{997002+30} \sim 0{,}003\%.$$

e) Se obtienen solo 197 animales enfermos con test positivo y 999 sanos con test positivo. La probabilidad de que un animal con test positivo esté realmente enfermo es solo de $\frac{197}{197+999} \approx 16{,}5\ \%$. Dentro de los tests positivos predominan los 'falsos positivos'.

Este problema es aún más grave mientras más rara sea la enfermedad dentro del grupo testeado. No todos los que asesoran a enfermos son conscientes de los peligros de la estimación errada (Gigerenzer 2000). Este argumento ha contribuido históricamente a prescindir de los tests masivos de sida.

f) En este caso se requieren las competencias *Argumentar* y *Comunicar*. Los escolares reconocen el diagrama de árbol con frecuencias como un medio de comunicación. La estimación errada se dio, entre otros factores, porque no se pensó en los muchos casos de falsos positivos. Además, hace una diferencia si uno determina la fracción de enfermos entre los que tienen un test positivo o la fracción con test positivo entre los enfermos (esto ya está indicado en el porcentaje 98,5%). En este caso se dan conexiones con las competencias para el análisis de datos del párrafo 3.3.

SOFTWARE

Fathom 2. Key Curriculum Press. Adaptación alemana: AG Rolf Biehler. Springer 2006 [Versión para descargar e info: http://www.mathematik.unikassel.de/~fathom]

BIBLIOGRAFÍA

Biehler, R. (2001). La competencia estadística de los escolares - Conceptos y resultados de estudios empíricos a partir del ejemplo de comparaciones de distribuciones empíricas. En: Borovcnik, M., J. Engel y D. Wickmann (Hrsg.), *Anregungen zum Stochastikunterricht* (S. 97-114). Hildesheim: Franzbecker.

Biehler, R. (Hrsg.) (1999). Datos y modelos. *Mathematik lehren*, Heft 97.

Biehler, R. (2006): Idea directriz *Datos y azar* en la concepción didáctica y en un experimento en clase. En: Meyer, J. *et al*. (Hrsg.), *Anregungen zum Stochastikunterricht*, Bd. 3. Hildesheim: Franzbecker.

Biehler, R. y W. Weber (Hrsg.) (1995). Explorative Datenanalyse. *Computer + Unterricht 17* (März 1995).

Biehler, R., K. Kombrink y S. Schweynoch (2003). Muffins - Estadística con conjuntos de datos complejos – Tiempo libre y uso de medios en adolescentes. Estadística en la escuela, 23(1), 11-25.

Biehler, R., T. Hofmann, C. Maxara y A. Prömmel (2006): *Fathom 2* - Una introducción. Heidelberg: Springer.

Borovcnik, M. y J. Engel (Hrsg.) (2001). Los estándares de la NCTM 2000; Una comparación entre la perspectiva clásica y de Bayes; Informe de dos conferencias del grupo de trabajo "Estadística en la escuela" en la Sociedad para la didáctica de las matemáticas del 29/30 de octubre de 1999 y el 10-12 de noviembre de 2000 en Berlín. Hildesheim: Franzbecker.

Círculo de Estudio de la Estocástica de la GDM (2003). Recomendación para los objetivos y el diseño de las clases de estocástica en la escuela. *Stochastik in der Schule*, 23(3), 21-26.

Friel, S.N., F.R. Curcio y G.W. Bright (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.

Führer, L. (1997). Reglas de desconfianza. *Mathematik lehren*, 85, 61-64.

Gigerenzer, G. (2002). La tabla de multiplicar del escepticismo: sobre el manejo adecuado de números y riesgos. Berlin: Berlin Verlag.

KMK (Hrsg.) (2004a). Estándares de aprendizaje de matemática para la *Hauptschulabschluss (al concluír el noveno gado)*. *Beschluss der Kultusministerkonferenz* vom 15.10.2004. München: Wolters Kluwer.

KMK (Hrsg.) (2004b). Estándares de aprendizaje de matemática para el *Mittleren Schulabschluss - Beschluss der Kultusministerkonferenz* vom 4.12.2003. München: Wol ters Kluwer.

Krämer, W. (1991). Así se miente con la estadística. Frankfurt: Campus.

Krämer, W. (2001). Estadística en la economía y en las ciencias sociales. *Allg. Stat. Archiv*, 85(2), 187-199.

Müller, J.H. (2005). La probabilidad de los números de un dado - Representaciones y modelamiento estocástico. *Praxis der Mathematik*, 47(4), 17-22.

Ogborn, J. y D. Boohan (1991). *Making Sense of Data: Nuffield Exploratory Data Skills Project (9 Minicourses with teacher booklets)*. London: Longman.

Riemer, W. (1985). *Nuevas ideas sobre estocástica*. Mannheim: B.I. Wissenschafts-verlag.

Schweynoch, S. (2003). Muffins en la práctica – Un informe sobre un proyecto para el intercambio de alumnos. Stochastik in der Schule, 23(1), 27-30.

Spector, W.S. (1956). *Handbook of biological data*. Philadelphia: Saunders.

Tukey, J.W. (1977). *Exploratory Data Analysis*. Reading: AddisonWesley.

Vogel, D. y G. Abrigo de invierno (2003). *Explorative datenanalyse*. Stuttgart: Klett.

Wassner, C. (2004). Fomento del pensamiento de Bayes – Bases psicológico-cognitivas y análisis didáctico. Hildesheim: Franzbecker.

Wassner, C., L. Martignon y R. Biehler (2004). El pensamiento de Bayes en la escuela. Unterrichtswissenschaft, 32, 58-96.

Wassner, C., R., Biehler, S. Schweynoch y L. Martignon (2004). Evaluaciones y juicios auténticos en condiciones de incertidumbre – Materiales de trabajo y comentarios didácticos para el área temática "Reglas de Bayes". En: Wassner, C. (2004), págs.182-223.

.

PARTE 2

ASPECTOS DE LAS CLASES DE MATEMÁTICAS ORIENTADAS AL DESARROLLO DE COMPETENCIAS

1. EL ROL DE LAS TAREAS EN LAS CLASES DE MATEMÁTICAS

Timo Leuders

Las tareas cumplen diversas funciones en las clases de matemáticas: en el aula deben fomentar la adquisición de diferentes competencias, y en los exámenes o tests de diagnóstico deben hacerse evidentes las competencias que existen o que aún falta desarrollar. Este aporte muestra, a partir de algunos ejemplos, cuál es el significado de 'orientado a competencias' en las diversas situaciones en clase, y sobre todo, cómo se puede llegar de tareas que sirven para la evaluación del rendimiento a aquellas que inician diversos procesos de aprendizaje.

1.1 Acerca del rol de las tareas en las clases de matemáticas

Las tareas pueden cumplir un gran número de funciones diversas en las clases de matemáticas. Cuando uno planifica las clases en conjunto con los docentes y observa los estándares de aprendizaje o el currículo núcleo, encuentra ejemplos de tareas que resultan fundamentales para ilustrar las competencias esperadas en los estudiantes.

Pero luego, uno tiene una clase concreta frente a sí, a escolares de un grado específico y con una historia de aprendizaje particular. Más allá de las competencias obligatorias que proponen los estándares, es seguro que uno tiene metas propias, así como énfasis e ideas sobre las competencias esperadas y su construcción a lo largo de los años. La mejor forma de concretar qué espera uno de los escolares de una clase específica al final de una serie de sesiones de aprendizaje, o de un año, es fijar desde un inicio qué tareas y problemas servirán al final para comprobar el rendimiento del estudiante. Si uno tiene estas metas presentes, entonces será más sencillo tomar decisiones en la planificación, elegir métodos o usar el libro de texto u otros materiales con un propósito.

Sin embargo, sería un mal consejo preparar a los escolares para que puedan resolver precisamente las tareas que se han elegido como concreción de las metas de aprendizaje a largo plazo o aquellas que se usan en evaluaciones centrales. Finalmente, se trata de que los escolares adquieran competencias matemáticas y no de que memoricen y utilicen esquemas de solución. Entonces, se deben elegir tareas y circunstancias en clase que parezcan adecuadas para que los estudiantes adquieran competencias referidas al contenido del año escolar, pero también competencias generales tales como *Argumentar*, *Resolver problemas*, etcétera. Dichas oportunidades para el aprendizaje y la práctica deberían ser más ricas que las tareas que se eligen para la comprobación de las competencias, por ejemplo en los exámenes. Pero las oportunidades y las tareas de evaluación deben referirse a las mismas competencias.

El procedimiento implícito ilustra cómo se deben usar las metas de forma consecuente y continua al planificar las clases; es decir, cómo uno puede usar las competencias esperadas en los escolares a modo de orientación y qué rol juegan las tareas en esto. No todas las tareas son apropiadas para todos los propósitos. Sin embargo, las tareas se pueden modificar de acuerdo con la intención, y eso también rige para las tareas de este libro. Calibrar las tareas y saber usarlas con un propósito no es una ciencia secreta. Cualquier persona lo puede hacer, si se guía de algunos criterios y principios sencillos.

La pregunta fundamental que uno se debe plantear cuando decide usar una tarea se refiere a la situación de clase concreta y a la función que la tarea debe cumplir. Es preciso determinar si la tarea debe servir para…

- … explorar, descubrir e inventar.
- … sistematizar, recolectar y asegurar.
- … practicar, conectar y repasar.

- … diagnosticar capacidades e ideas.
- … comprobar el desempeño.

Las tres primeras situaciones (explorar, sistematizar, practicar) se podrían describir como 'situaciones de aprendizaje'. En este caso se deben facilitar caminos de aprendizaje individuales y estimularse la creatividad. Para ello se deben posponer lo máximo posible los momentos de evaluación de rendimiento. Las dos últimas situaciones (diagnosticar y comprobar el desempeño) son más bien 'situaciones de rendimiento', en las cuales los escolares deben demostrar 'lo que pueden'. En este caso se puede estar buscando que los escolares experimenten un crecimiento en su rendimiento, comprueben por sí mismos su desempeño para que puedan tener una estimación realista de sus propias capacidades u obtengan una retroalimentación del docente. Los docentes inician algunas de estas situaciones de rendimiento con el propósito de hacer un diagnóstico del aprendizaje o una valoración del desempeño.

Cuando uno rinde cuentas a partir de situaciones en clase en las que se usan tareas, entonces es más fácil evaluar luego la pertinencia de esas tareas e incluso modificarlas. No se deben interpretar los cinco ámbitos centrales —explorar, sistematizar, practicar, diagnosticar y comprobar— como fases de la clase que no se superponen: más bien, tienen múltiples intersecciones. Por ejemplo, la práctica es más reflexiva y efectiva cuando los escolares tienen a la vez la posibilidad de hacer descubrimientos (Wittmann 1992, Selter 1995; ver también el capítulo 3, página 113). Una clasificación de este tipo, según la función específica que una tarea debe asumir, puede ayudar a optimizar el uso de la tarea según su propósito (Büchter & Leuders 2005).

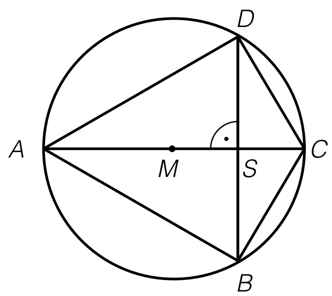
A continuación se presentarán los ámbitos mencionados y se ilustrarán mediante ejemplos de tareas, aunque no se hará en una secuencia cronológica natural. En su lugar se presentará el 'rendir' (evaluación de rendimiento y diagnóstico) antes que el 'aprender' (descubrir, sistematizar, practicar), para indicar de esta forma cómo se ve el proceso de planificación de clases cuando se parte del resultado de aprendizaje esperado.

1.2 Situación en clase: evaluación del desempeño

Varios planes de clase nuevos ya no describen el catálogo de contenidos a trabajar, sino que formulan competencias que se espera que los escolares demuestren al finalizar un período más largo. Para concretar estas expectativas se mencionan tareas —tal como en los estándares de aprendizaje nacionales— que esclarecen de forma ejemplar el desempeño esperado de los escolares. Uno puede imaginar tales tareas como parte de evaluaciones centrales o exámenes, pero también se pueden utilizar para observar, verificar o calificar cómo va el desempeño escolar a lo largo de una secuencia de sesiones de aprendizaje.

Triángulos inscritos en una figura

En la figura que se presenta, los puntos *A, B* y *C* se encuentran sobre un círculo con el centro *M* y el diámetro $\overline{AC}$. *A*, *B, C* y *D* conforman un *romboide simétrico* (cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos iguales). La figura contiene varios triángulos rectángulos, por ejemplo, el triángulo *ASD*. Indica todos los otros triángulos rectángulos inscritos en la figura. Fundamenta en cada caso por qué los triángulos son rectángulos.



Esta tarea ilustra qué se espera de los escolares al final del décimo grado en un nivel de aplicación sencilla, dado que los estándares de aprendizaje formulan la siguiente competencia referida al contenido en el ámbito de la idea directriz *Espacio y forma* (KMK 2003):

- *los escolares utilizan teoremas en el plano de la geometría al hacer construcciones, cálculos y demostraciones, especialmente el teorema de Pitágoras y el teorema de Tales.*

En este caso no solo se trata de conocer el teorema de Tales: se trata de tener la capacidad de usar este teorema cuando la figura de Tales aparece en un contexto distinto. Además se espera que:

- *los escolares puedan reproducir argumentaciones rutinarias (como cálculos, procedimientos, derivaciones, teoremas, que les son familiares en clase).*

El conocimiento de conceptos y relaciones matemáticas es una condición básica para la competencia *Resolver problemas* o *Argumentar*.

Entonces, tal como se describe, la tarea ilustra ciertas competencias. Se puede poner en práctica para evaluar estas competencias al final del año escolar, como parte de un examen que abarque varios temas, o también en una situación de evaluación justo después de tratar el teorema de Tales. Mediante indicaciones como

"Fundamenta tu respuesta..." se puede obtener información complementaria que permita saber cuán diferenciado es el nivel de argumentación de los escolares.

Pero, ¿qué se puede hacer con la solución: "Seis triángulos rectángulos, porque el Tales está ahí dos veces"? ¿El escolar ha comprendido realmente el teorema de Tales, es decir, su condición? ¿O simplemente ha pensado: "Cuando un triángulo se encuentra dentro de un círculo, entonces tiene un ángulo recto", evidenciando una figura argumentativa falsa, más bien superficial y probablemente mal comprendida? Es igual que asumir que un estudiante ha comprendido cómo se suman fracciones si es que puede sumar $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$.

Se puede superar este problema si se reformula una tarea que pone a prueba un procedimiento, convirtiéndola en una tarea que compruebe la comprensión. Esto se logra mediante la puesta en práctica de una serie de técnicas:

1. *Insertar en un contexto intra o extramatemático:* esto ya sucedió en la tarea anterior.

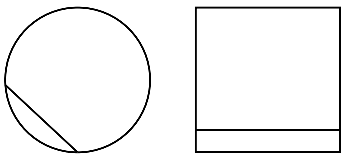
2. *Exigir explícitamente fundamentaciones:* esto también se utilizó en la tarea anterior.

3. *Invertir la pregunta:* dado que al invertir la pregunta no existe una sola respuesta correcta, se espera una mayor flexibilidad en el uso de los conceptos.

Al invertir la pregunta, "Determina el área del triángulo dibujado" se convierte en "Dibuja un triángulo de área 24 cm^2". "Calcula $\frac{2}{15}+\frac{1}{5}$ " se convierte en "Nombra dos fracciones cuya suma sea $\frac{1}{3}$ ". La siguiente variante de la tarea "Triángulos inscritos en una figura" combina ambas técnicas: "Invertir" y "Exigir fundamentaciones".

Variante de "Triángulos inscritos en una figura"

Dibuja un punto *C* sobre el círculo, o bien en el cuadrado, de modo que se forme un triángulo con ángulo recto en *C*. Fundamenta tu procedimiento.



Si antes se ha puesto en práctica un principio de construcción apropiado, entonces esta variante de la tarea solo corresponde a una verificación del procedimiento.

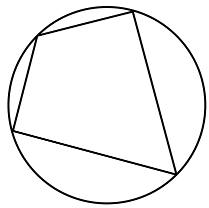
4. *Exigir ejemplos y contraejemplos:* en este caso se comprueba la comprensión mediante la actividad de los escolares de plantear situaciones por sí mismos.

> En un círculo se debe dibujar cuadriláteros que tiene uno, dos o tres ángulos rectos. ¿Qué casos funcionan? ¿Qué casos no? Fundamenta tu respuesta.

5. *'Dinamizar' el planteamiento mediante la pregunta "¿Qué pasaría si…?":* mediante esta pregunta se puede comprobar también si se comprendieron las condiciones importantes de un teorema o algunos aspectos de un concepto.

Cuadriláteros inscritos en el círculo

El cuadrilátero dibujado tiene todos sus ángulos sobre el círculo y dos ángulos rectos. ¿Qué pasa con el número de ángulos rectos cuando se mueve uno de los ángulos sobre la circunferencia y los demás ángulos se quedan fijos en su posición? Fundamenta tu suposición.



Esta última variante de la tarea solo tiene sentido si los estudiantes realizan mentalmente el movimiento y reconocen qué consecuencias geométricas tiene este cambio. La tarea adquiere un carácter muy distinto cuando el movimiento se realiza usando un entorno virtual de geometría dinámica.

1.3 De la evaluación del desempeño a la organización del proceso de aprendizaje

A pesar de que la tarea aquí presentada y sus variantes parezcan muy apropiadas para ilustrar y evaluar las competencias —por ejemplo en exámenes—, sería muy poco razonable utilizar estas 'tareas de rendimiento' para que los escolares descubran el teorema de Tales, es decir, trasladarlas simplemente a una situación de clase distinta. En la primera versión presentada, los escolares reconocerían a simple vista o mediante una medición los ángulos rectos, sin reconocer razones o relaciones. El contenido del teorema de Tales se volvería un mero conocimiento compartido.

Pero si se trata de que los escolares se abran paso por estas relaciones, entonces necesitan tener oportunidades para explorar activamente, para expresar y descartar suposiciones, para comprobar condiciones y para argumentar entre sí. Dichas experiencias no solo ayudan a tener una amplia base de la cual partir y una comprensión más profunda, sino que también fomentan el desarrollo de competencias generales y específicas del área.

Para no solo comprobar competencias, sino también para adquirirlas, una tarea debe ser diferente, por ejemplo así:

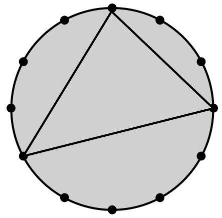
> Con la ayuda de un programa dinámico de geometría, dibuja un cuadrilátero cuyos ángulos se encuentren sobre una circunferencia y explora la pregunta: ¿cuántos ángulos rectos puede tener un cuadrilátero así? ¿Cómo deben posicionarse los ángulos para que el cuadrilátero tenga uno, dos, tres o cuatro ángulos rectos?

Incluso sin la ayuda de una computadora los escolares podrían descubrir el teorema de Tales:

Triángulo inscrito en el círculo

Estira la liga de modo que se formen diferentes triángulos.

Dibuja los triángulos formados, recoléctalos, examina sus ángulos y clasifícalos en grupos. Haz la mayor cantidad de suposiciones. Compruébalas y fundaméntalas, de ser posible.



Las últimas dos tareas son apropiadas para iniciar procesos de aprendizaje, porque estimulan acciones y permiten caminos de aprendizaje individuales en diferente nivel. Además, la tarea no restringe a los escolares al teorema de Tales: también pueden redescubrir el teorema de la suma de los ángulos en el triángulo y practicar cálculos con ángulos, pueden operar mentalmente con los ángulos complementarios, etcétera. Las tareas dan una orientación en la forma de un problema exigente, mas no abrumador. Incluso los escolares que no logren descubrir la figura de Tales —y se puede asumir que existirán en el caso de un planteamiento tan abierto como este—, experimentarán lo suficiente con ángulos y formas triangulares, de modo que podrán comprender sin problemas los resultados de otro grupo. Cuando uno encuentra que existen algunos triángulos con un ángulo de 90°, entonces encuentra que su lado más largo mide siempre igual. Si se colocan uno sobre otro en el lado más largo, entonces se forma la figura de Tales.

Al diseñar la sesión de aprendizaje para esta tarea, es particularmente importante que el docente apoye desde un principio la amplia gama de caminos de solución individuales. En un segundo paso, el docente puede elegir algunos y 'escenificar' qué resultados parciales deben presentarse, para poder resaltar resultados que dan pie a mayor desarrollo y exigir de los escolares que detallen sus descubrimientos e, incluso, que los comprueben.

1.4 Situación en clase: diagnosticar las capacidades y las ideas

Comprobar el rendimiento en clase puede tener propósitos muy distintos. El docente debe ser siempre transparente, ya sea que quiera calificar a los escolares o hacerse una idea del desempeño de la clase.

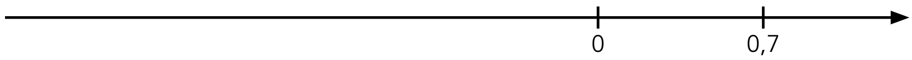
Una mirada general al desempeño siempre es útil para diseñar los procesos de aprendizaje siguientes. Aun más útil es cuando uno no solo sabe qué escolares de una clase ya cuentan con una competencia específica porque pueden resolver una tarea en particular, sino también cuando sabe *en qué* fallan los escolares individuales y cuáles son las posibles causas de sus dificultades. Tales informaciones diagnósticas se obtienen, por ejemplo, a partir del análisis de las soluciones de los escolares ante tareas adecuadas (pero también en conversación con los mismos escolares). Junto a muchos otros aspectos que se presentan en el capítulo 2 (ver página 96), existen varios requerimientos para que una tarea sea apta para el diagnóstico:

- Debe motivar a los escolares a generar productos lo más significativos que sea posible, como por ejemplo escribir (o expresar de forma oral) sus pensamientos e ideas al resolver un problema o al buscar una justificación. Una tarea en la que la producción del escolar consiste en elegir entre varias alternativas o llenar un recuadro es poco significativa en este sentido.
- También es favorable cuando una tarea no solo distingue entre los que la resuelven y los que no la resuelven, sino que se puede resolver en varios niveles y, por ende, informa sobre el nivel de rendimiento.
- Por último, una buena tarea diagnóstica se puede concentrar en competencias parciales específicas para poder hacer afirmaciones focalizadas.

Las siguientes dos tareas cumplen estas características:

La unidad en la recta numérica

Marca de la forma más exacta posible la posición 1 en la recta numérica. Describe tu procedimiento.



Comprensión de fracciones

a) Señala y nombra un número fraccionario en la recta numérica que esté entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$. ¿Cómo llegaste a este número?

Entonces, en el caso de las tareas de diagnóstico, la capacidad de diferenciar y de estimular la producción ("Dibuja", "Pon un ejemplo", "Describe"…) son cualidades importantes.

Un diagnóstico de este tipo es más difícil en tareas que, en el sentido de una calificación del desempeño 'objetivizadora', están construidas según el principio de correcto/incorrecto. Por consiguiente, se deberían incluir más 'tareas diagnósticas' en los exámenes, de modo que uno pueda no solo calificar a los escolares de una clase, sino también obtener información cualitativa sobre el desempeño de cada estudiante en particular (ver Leuders 2006).

1.3 Situación en clase: explorar, descubrir, inventar

El aprendizaje está unido a las experiencias previas, tiene un transcurso muy distinto en cada persona y es impulsado por situaciones que son a la vez retadoras y accesibles. El aprendizaje está condicionado tanto a la actividad individual como al intercambio social. Todas estas son razones por las cuales se requieren tareas especiales para iniciar procesos de aprendizaje, para estimular a los escolares a que exploren de forma autónoma, a que descubran de manera individual y a que inventen con creatividad. Para que las tareas sirvan a estos fines, deben cumplir ciertos criterios (algunos de los cuales ya se mencionaron):

- Disposición a varios caminos de aprendizaje individuales.
- Ninguna guía demasiado estrecha mediante tareas parciales 'atomizadoras'.

- Activación para pensar (no solo para actuar).
- Posibilidad de diversas experiencias.
- Orientación hacia problemas retadores, pero accesibles.
- Apertura al lenguaje coloquial de los escolares y el uso de conceptos interinos.
- Inicio de procesos de comunicación y cooperación.

Naturalmente, no todas las tareas podrán cubrir todas estas demandas. Sin embargo, estos criterios pueden ayudar a 'abrir' —de forma consciente— las tareas hacia procesos de descubrimiento. Las siguientes tareas cumplen con varios de los criterios mencionados.

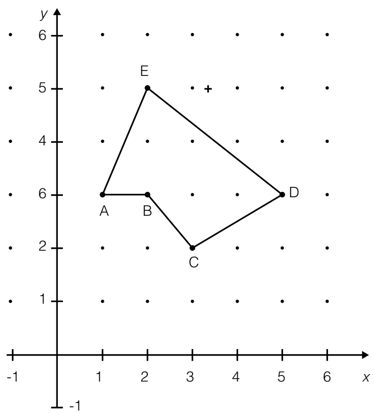
Áreas de polígonos

Se toman en consideración pentágonos cuyos ángulos se encuentran en la rejilla de puntos. La figura muestra uno de estos pentágonos.

a) Busca posibilidades que permitan cambiar la forma de este pentágono mediante la traslación de los ángulos, sin que cambie el área de la figura.

b) Usa estas posibilidades para cambiar el pentágono progresivamente, de modo que el área se mantenga igual, pero el perímetro disminuya.

Documenta tus pensamientos en un cuaderno de investigación.



Trabajar con un cuaderno de investigación tiene la ventaja de que los escolares se ocupan de un problema de forma autónoma por un período más largo. Dado que registran su camino de aprendizaje, pueden alcanzar mayores niveles de reflexión y también revisar procesos de resolución de problemas *a posteriori*.

Ecuaciones cuadráticas

Se puede crear una función cuadrática al multiplicar las expresiones algebraicas de dos funciones lineales. Por ejemplo:

$f(x) = x + 3$

$g(x) = x - 2$

$h(x) = (x - 2) \bullet (x + 3)$

a) Examina las tres funciones: *f(x), g(x)* y *h(x)* al representarlas gráficamente (por ejemplo mediante un plotter de la función, una calculadora gráfica, un CAS o una hoja de cálculo).

b) ¿Qué relaciones entre los gráficos has descubierto?

Describe tus observaciones y comprueba tus resultados en otros ejemplos de este tipo.

A continuación se presentan los resultados de tres escolares:

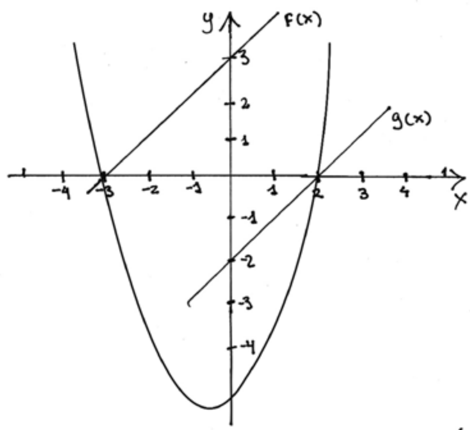
Solución del escolar 1

$(\cancel{x-2)\cdot(x}+3)$

$h(x) = x^2 + x - 6$

$h(x) = x^2 + 0{,}25 - 6 - 0{,}75$

$h(x) = (x + 0{,}5)^2 - 6{,}25$ $\quad S = (-0{,}5 | -6{,}25)$



f(x) ‖ g(x) cortan la parábola h(x) en la posición del cero, al que h(x).

Sin fundamentarlo en detalle, el estudiante constata que las líneas son paralelas e identifica dos de las cuatro intersecciones de ambas rectas mediante una parábola.

Otro escolar ha reconocido la sustancia del ejemplo, aunque solo describe el paralelismo de las rectas y nombra la parábola como tal, pero escribe "recta *h(x)*" en lugar de "gráfico de *h(x)*".

Solución del escolar 2

La recta h(x) es una parábola.

Las rectas f(x) y g(x) son paralelas.

En la solución del tercer escolar se indican las cuatro intersecciones y se describe —al menos de forma aproximada— la relación entre los dos gráficos.

Solución del escolar 3

Ambas paralelas resultan en una parábola.

La parábola corta las rectas en -3/+3/-2/+2.

La multiplicación de los dos valores de la recta dan el valor y de la parábola.

1.6 Situación en clase: recopilar, verificar, sistematizar

A pesar del rol que cumple el descubrimiento autónomo como motor del aprendizaje en clases de matemáticas, el aprendizaje no se agota en el descubrimiento. También se deben clasificar las relaciones, establecer correspondencias entre los conceptos y los procedimientos normados y las terminologías y reflexionar sobre cuál es el alcance de nuevas conceptualizaciones. Normalmente esto sucede mediante la recopilación de los resultados en las conversaciones en clase, en las que el rol fundamental del docente consiste en resaltar la importancia de resultados particulares, incitar a la recapitulación sistemática, y eventualmente complementar la información e incorporar —solo si es necesario— las denominaciones y conceptos vigentes de las matemáticas. Los escolares pueden llevar a cabo tales procesos convergentes de forma parcialmente autónoma si tienen a su disposición una tarea apropiada. Dichas tareas pueden consistir, por ejemplo, en comparar los resultados de una fase previa de desarrollo, recopilarlos y presentarlos sistemáticamente, por ejemplo, en forma de un mapa mental. En esta labor los escolares pueden incorporar otras fuentes, como por ejemplo textos escolares, y hacer conexiones con los conocimientos que han generado de forma individual o grupal.

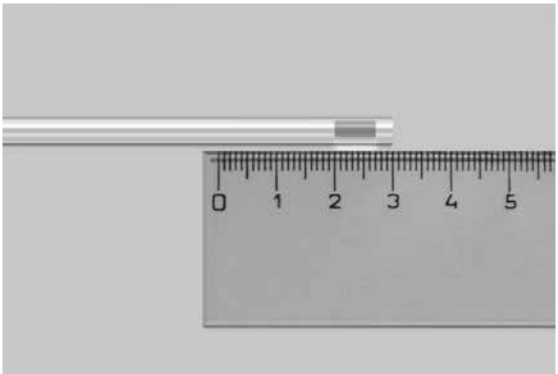
1.7 Situación en clase: practicar, repasar, conectar

El afianzamiento de los conceptos y procedimientos no termina con la compilación conjunta de resultados. Para lograr efectos de aprendizaje duraderos, los escolares deben tener reiteradas oportunidades de practicar y flexibilizar lo aprendido, de repetirlo en diferentes conceptos y de conectarlo con otros conceptos. En el capítulo 3, página 113, se dan pautas más precisas sobre las diferentes posibilidades de practicar.

Muchas tareas (esto también rige para las que se presentan en este libro), que están pensadas para comprobar el logro de capacidades, dado que demandan su uso en diferentes contextos, son apropiadas también como tareas para practicar. El uso en diferentes contextos tiene como meta flexibilizar habilidades y conectar conocimientos. La práctica es particularmente atractiva para los escolares cuando tienen la experiencia de que pueden aproximarse y resolver problemas interesantes con la ayuda de las capacidades que ya adquirieron. Por ejemplo este problema:

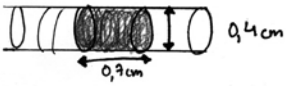
Tarea grupal "Burbuja de jabón"

Se introduce una cañita en una mezcla de jabón, de modo que se produce un tapón en la cañita. A continuación se sopla para formar una burbuja de 8 cm de diámetro aproximadamente. ¿Cuán gruesa será la piel de la burbuja de jabón aproximadamente?



La solución de un escolar, que se presenta a continuación, muestra cómo, a partir del volumen de la gota, se puede determinar el volumen de la piel de la burbuja y, con ello, el radio interno de la burbuja. Mediante la diferencia, el escolar obtiene un valor aproximado para el grosor de la piel de la burbuja de jabón.

Solución del escolar

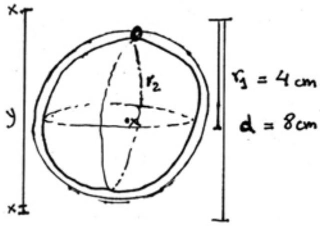


6.2.06

Volumen del cilindro = $r^2 \cdot \pi \cdot 0{,}7$

$0{,}2^2 \cdot \pi \cdot 0{,}7$

$0{,}088\ cm^3$



Superficie de la esfera = $4 \cdot \pi \cdot r^2$

$4 \cdot \pi \cdot 4^2$

$= 201{,}062\ cm^2$

Volumen de la esfera = $268{,}083\ cm^3$

$-\ 0{,}088\ cm^3$

Aire en la esfera = $267.995\ cm^3$

$2x + y = 8cm$

$8 - 2x = y$

$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$

$r^3 = \frac{V \cdot 3}{4 \cdot \pi}$

$r^3 = \frac{267{,}995 \cdot 3}{4 \cdot \pi}$

$r^3 = \sqrt[3]{63{,}979}$

$r_1 = 3{,}9996$

$x = 4 - 3{,}9996 = 0{,}0004\ cm$

$x = r_1 - r_2$

La piel de la burbuja tiene un grosor de aprox. 0,004 mm.

La competencia de trabajar autónoma y cooperativamente se exige aún más cuando la tarea no se propone de esta manera, sino que se entrega una mezcla de jabón y una cañita a los escolares con el requerimiento de determinar el grosor de la piel de la burbuja.

Variante de la tarea de investigación "Burbuja de jabón"

Se introduce una cañita en una mezcla de jabón y luego se retira.

Esto lleva a que se forme un tapón, del cual se sopla una burbuja de jabón.

¿Cuán gruesa será la piel de la burbuja?

Determina en el experimento los datos de salida para esta tarea.

Las tareas en las que los escolares deben estimar o representar magnitudes de la vida cotidiana también permiten establecer uniones entre 'conectar' y 'profundizar', por un lado, y 'sentirse competente', por el otro (ver las tareas del capítulo 4, página 113 en adelante).

Las competencias, incluso aquellas que se consolidan —o automatizan— mediante la práctica y la repetición, se basan siempre en habilidades y conocimientos. La automatización de habilidades tiene como meta descargar al individuo al ponerlas en práctica y generar espacio para otros procesos de pensamiento (ver también el capítulo 3, página XX). Sin embargo, no se debe ejecutar la práctica para automatizar como una repetición terca. "Practicar con el pensamiento desconectado", como sucede en muchos grupos de tareas, puede incluso llevar a que la comprensión se entierre por completo y se lleve a cabo un trabajo rutinario, lejano de la comprensión. Entonces, cuando la habilidad se pierda por falta de práctica, no se podrá volver a la comprensión básica como recurso.

Por consiguiente, las tareas para la práctica automatizada también deben fomentar el pensamiento, deben permitir que se hagan reflexiones y descubrimientos. Por lo general tienen la característica especial de que diferentes escolares trabajan de forma distinta en la misma tarea, según su capacidad de reflexión, de modo que nadie está sub o sobreexigido. Tareas que permiten todo esto no son tan exóticas, como muestra el siguiente ejemplo:

Como 'materia prima' se usa una tarea de un libro escolar que tiene meramente el entrenamiento de habilidades como meta:

Cálculo aproximado

Primero estima y luego calcula:

a) 3 025 : 25	**b)** 2 139 : 31	**c)** 5 278 : 58
8 424 : 24	7 011 : 57	4 140 : 82
49 941 : 93	33 894 : 42	46 257 : 51

En lugar de que los escolares resuelvan todo el paquete de tareas, se les puede plantear una pregunta adicional: ¿qué resultado está más cerca de 100?

Los escolares quizá deberán calcular un poco menos pero, además, deberán desarrollar estrategias y tendrán una buena razón para calcular estimando (ver, por ejemplo, Wittmann 1992; Blum & Wiegand 2000; Leuders 2005).

1.8 Conclusión

Los ejemplos de los párrafos anteriores han demostrado que las tareas se pueden optimizar según la función que se pretende de la clase. En los siguientes capítulos se retoman los diferentes aspectos abordados con respecto a la adquisición y comprobación de competencias. Se profundizará en ello y se ilustrará mediante más ejemplos.

BIBLIOGRAFÍA

Blum, W. y B. Wiegand (2000). Profundizar y conectar - Practicar de manera inteligente durante las clases de matemáticas. Üben & Wiederholen, *Friedrich Jahresheft* XVII, 106-108.

Büchter, A. y T. Leuders (2005). *Desarrollar tareas matemáticas por sí mismo. Aprendizaje para las pruebas de rendimiento*. Berlín: Cornelsen Scriptor.

Leuders, T. (2006). "Explique mediante un ejemplo…". Reconocer y promover competencias matemáticas mediante tareas abiertas. *Friedrich Jahresheft* XXIII. Seelze: Friedich Verlag.

Leuders, T. (2005). *Práctica inteligente estructurada por uno mismo*. Pädagogik 11/05.

KMK (2004). Estándares de aprendizaje para la asignatura de Matemáticas hasta cuarto grado de Secundaria - Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003.

Selter, C. (1995). Practicar descubriendo - descubrir practicando. *Grundschule* 27, Heft 5, 30-34.

Wittmann, E. C. (1992). Contra la marea de los perros coloreados y los paquetes grises: Concepción del aprendizaje activo por descubrimiento y la práctica. En: Müller/Wittmann: *Handbuch produktiver Rechenübungen*, Band 1. Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig: Klett.

2. DISEÑO DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE Y USO DE LAS TAREAS ORIENTADAS HACIA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS DESDE UN ENFOQUE DIAGNÓSTICO

Johann Sjuts

Las tareas orientadas hacia el desarrollo de competencias, que se usan con el propósito de diagnosticar, se distinguen por ciertas características. Estas se pueden parafrasear como ‘explicaciones en un texto’, ‘opinión y reflexión’, ‘análisis de conceptos erróneos’ y ‘recepción de ideas’. Es común a todas estas tareas —y esto es lo que caracteriza el sentido del diagnóstico en el aprendizaje de las matemáticas— que el propio proceso de pensamiento y comprensión se vuelque hacia afuera, es decir, que lo invisible se haga visible, que se devele lo oculto. Así se pueden hacer hallazgos detallados y diferenciados y deducir medidas que estén sintonizadas. Esto se explicará a continuación, mediante tres ejemplos de tareas.

2.1 Uso diagnóstico de tareas en la clase

¿Cómo se construyen tareas que sirvan para el diagnóstico? ¿Cómo se logra obtener mediante tareas apropiadas información sobre el estado del proceso de aprendizaje? ¿Cómo se puede determinar de manera confiable si la clase ha rendido frutos? ¿Cómo se puede averiguar cómo son los pensamientos de alguien que ha resuelto una tarea de un modo específico?

En el acontecer de la clase, los docentes deben reconocer qué sustancia matemática y qué sustancia mental se encuentra en aquello que dicen los escolares. De la misma forma, se debe analizar aquello que escriben en el papel o en la pizarra o lo que presentan en el proyector. ¿Qué es lo que quieren decir? ¿Qué ideas se esconden detrás de sus representaciones?

Si los estándares de aprendizaje se representan mediante tareas, entonces las soluciones a las tareas informan en qué medida las ideas directrices ya se fijaron, las competencias abordadas ya se desarrollaron y las exigencias de un ámbito específico ya se lograron.

Las ideas directrices, las competencias y los ámbitos de exigencia dependen de la asignatura. En relación con el diseño de tareas, esto resulta obvio y no precisa mayor explicación. Sin embargo, en relación con el uso de tareas para fines diagnósticos, esto requiere una mención aparte, sobre todo en oposición a una visión meramente pedagógica del diagnóstico. Se trata de averiguar, con la mayor exactitud posible, hasta qué punto los escolares disponen de herramientas matemático-cognitivas con las cuales puedan acceder y comprender el mundo relacionado con las matemáticas, así como realizar matematizaciones (Cohors Fresenborg, Sjuts & Sommer 2004).

Además, se debe considerar que una tarea bien pensada tiene —por sí misma— un efecto estimulante y propiciador del aprendizaje, que trae a conciencia del que la trabaja las propias fortalezas y debilidades y que, por ende, consolida y estabiliza las competencias, o conduce a buscar ayuda.

En el capítulo 1 se mostraron distintas posibilidades de cómo usar en clase tareas orientadas hacia el desarrollo de competencias. Esto no se volverá a abordar en los siguientes párrafos. Naturalmente, desde un enfoque diagnóstico, el uso de las tareas puede ser muy variado.

La variedad atañe las formas sociales, los medios y los métodos de trabajo. Sin embargo, especialmente importante es el espacio que se da en clase a la evaluación. La construcción de tareas vinculadas con las competencias debe aprovecharse de forma diagnóstica. Por consiguiente, las clases deben armarse también en función del diagnóstico y las consecuencias que se saquen de este, desde el fomento intencional hasta las medidas remediadoras (Helmke 2003).

Los siguientes ejemplos y reflexiones ilustran el potencial que tienen las tareas orientadas al desarrollo de competencias que se usan en clase, para obtener hallazgos confiables.

2.2 Ejemplos de tareas

Los siguientes párrafos presentan tres ejemplos de tareas. Se trata de las tareas "Chicos en un bus escolar", "Sumas de números vecinos" y "Bloques". Los tres ejemplos de tareas se presentan y clasifican según las indicaciones de los estándares de aprendizaje. Varios trabajos de escolares documentan las posibilidades que existen de resolver estas tareas y ofrecen un material muy rico para el análisis diagnóstico.

2.2.1 Tarea: "Chicos en un bus escolar"

Chicos en un bus escolar

Ansgar, Bertram, Carsten, Dieter y Erik van al colegio en el bus escolar todas las mañanas. Dado que suben en el primer paradero, siempre logran sentarse en los cinco asientos de la última fila.

Chicos en un bus escolar (continuación)

a) Un día Erik nota lo siguiente: "El año escolar tiene alrededor de 210 días. ¿Será posible que nosotros cinco nos sentemos siempre de una forma distinta en la última fila? Responde a la pregunta de Erik. Explica tu procedimiento.

b) Dieter dice: "En tareas de este tipo se necesita representar de forma sistemática todas las posibilidades, para estar muy seguros de que no hemos olvidado ninguna".

Esboza una representación sistemática de la que puede concluirse que se contemplan todas las posibilidades que tienen los cinco chicos de sentarse en la última fila del bus.

c) Ansgar explica: "A mí me interesa saber cuántas posibilidades tenemos los cinco en total, si es que yo siempre me siento al lado de Bertram. Es como si Bertram y yo fuéramos una sola persona en un asiento; ustedes tres tendrían tres sitios. Entonces, son 4 • 3 • 2 • 1 = 24 posibilidades".

El resultado de Ansgar no es correcto. Retoma su explicación y continúala hasta que te lleve al resultado correcto.

d) Bertram, por el contrario, piensa lo siguiente con respecto al problema presentado en c): "Yo pienso en todas las posibilidades que tenemos de sentarnos juntos. Así llego a 1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 8 posibilidades".

La reflexión de Bertram tampoco está completa. Continúala hasta llegar al resultado correcto.

Clasificación de la tarea "Chicos en un bus escolar"

Todas las tareas parciales corresponden a la idea directriz *Número*. Se deben poner en marcha reflexiones sobre combinatoria para determinar el número de posibilidades correspondientes. Sin embargo, varias competencias se emplean en simultáneo en todas las tareas parciales.

Las competencias relacionadas con la **tarea parcial a)** son, sobre todo, *Resolver problemas* y *Argumentar*. Se debe desarrollar una estrategia para determinar las posibilidades (ámbito de exigencia II). Se debe comparar el resultado para el número de posibilidades de sentarse (120) y el número de días escolares (210), para poder responder de forma completa a la pregunta. Se debe explicar el camino de solución que se siguió, mediante argumentaciones de varios pasos (ámbito de exigencia II).

Las competencias exigidas en la **tarea parcial b)** son, sobre todo, *Usar representaciones* y *Comunicar.* Sin duda existen diferentes representaciones sistemáticas de la solución. Esto aumenta la probabilidad de encontrar una solución. Sin embargo, la exigencia con respecto a la expresión escrita no es baja (ámbito de exigencia III).

En las **tareas parciales c)** y **d)** se deben recoger los distintos pensamientos presentados y continuarlos. En ambos casos se requieren las mismas competencias, es decir, *Resolver problemas, Argumentar* y *Comunicar* (ámbito de exigencia III).

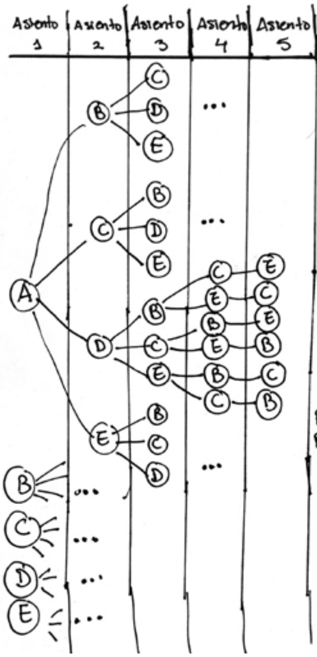
Soluciones de los escolares a la tarea "Chicos en un bus escolar"

Para **a)**:

Soluciones de los escolares
No, porque como son 5 asientos y 5 personas; el primero tiene 5 posibilidades, el segundo 4 y así. Por eso hay 120 probabilidades (5-4-3-2-1). Como el año escolar tiene 210 días y no 120, entonces no resulta.
Pienso que sí funciona. Son: 5 • 5 • 5 • 5 • 5 = 3125, o sea más que 210.
No, nada que ver, porque cada uno tiene 5 sitios para sentarse, o sea, 5+5+5+5+5=25

Para **b)**:

Soluciones de los escolares



Como sería demasiado dibujar el esquema completo, solo he escrito/dibujado la situación en que A se sienta en el primer sitio y B en el segundo sitio. Existen 6 posibilidades en esta situación. Para calcular la situación en la que A se siente en el primer sitio, calculo 6·4 (para B, C, D, E) = 24. Y esto por 5, porque también B, C, D E se pueden sentar en el primer sitio. Obtengo el resultado = 120 posibilidades.

Para **c)**:

Soluciones de los escolares

Es falso, porque Ansgar solo puede sentarse ya sea a la izquierda o a la derecha de Bertram.

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \qquad 24 \cdot 2 = 48$, porque Ansgar puede sentarse a la derecha o a la izquierda de Bertram, o sea por 2.

Calculo: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \qquad 24 \cdot 2 = 48$

Hay 48 posibilidades

Fundamentación: Ansgar empezó bien, después olvidó que Bertram y él mismo podrían intercambiar también los asientos. O sea, B a la izquierda y B a la derecha, y A a la izquierda y B a la derecha. Por eso uno tiene que duplicar el resultado.

Para **d)**:

Solución del escolar

Bertram tiene la posibilidad de sentarse en el sitio elegido por Ansgar. Pero los otros tienen 3 · 2 · 1 posibilidades de sentarse. Entonces 8 · 6 = 48.

Para **c) y d)**:

Soluciones de los escolares

c) d) Las soluciones no me parecen, por eso propongo la siguiente solución:

Ansgar y Bertram pueden sentarse en los asientos 5 y 4; 4 y 3; 3 y 2; 2 y 1, así Bertram está a la derecha o izquierda de Ansgar.

Entonces 4·2 = 8. Los demás tienen 3 asientos en todas las 8 posibilidades. En estos 3 asientos pueden sentarse de 6 formas. Esto quiere decir 6·8 = 48.

Análisis de las soluciones de los escolares a la tarea "Chicos en un bus escolar"

Las soluciones de los escolares proveen indicios que sirven para evaluar la dificultad de las tareas parciales. Sobre todo muestran qué información diagnóstica ofrece este tipo de producciones de los escolares.

La primera solución del escolar para la **tarea parcial a)** es corta y concisa. Evidentemente el escolar cuenta con una comprensión segura de que se requiere multiplicar las posibilidades individuales de sentarse que tienen los chicos. Se examinan la acción de sentarse de los cinco chicos uno después del otro; de la misma manera, podría examinarse la ocupación de los sitios uno después de otro. La comprensión —de la cual el escolar probablemente sea consciente— queda demostrada al presentar el producto completo, incluso el factor 1. No obstante, no es poco común que en una tarea de este tipo aparezcan ideas erradas, tal como lo demuestran las otras dos soluciones de los escolares. En esos casos no se ha considerado que el sentarse o el ocupar un sitio son procesos en los que no se puede pensar solo en una persona o en un lugar (a lo mejor la primera o el primero). Si no se considera este aspecto procedimental, entonces se arriba a la comprensión errada de cinco posibilidades del mismo valor. También es bastante típico que las posibilidades a combinar no se multiplican, sino que se suman de forma errada. En casos como este, el principio de la variación de representación puede resultar de ayuda.

La solución a la **tarea parcial b)** contiene un bosquejo comprensible de todas las posibilidades de sentarse (en el estilo de un diagrama de árbol) y una explicación del bosquejo y de los cálculos. Si no se tienen en cuenta los errores de escritura (en la sexta línea del texto debería decir D en vez de B), entonces se puede reconocer una seguridad notable en las explicaciones del número de posibilidades que resulta, junto con los cálculos. Cabe mencionar que, según la competencia *Comunicar*, resulta plausible que se hayan registrado todas las posibilidades. *Comunicar* requiere un ajuste con respecto a la audiencia; la comunicación puede estar dirigida a un lector, oyente o interlocutor. Se debería poder hacer frente a la crítica posible o efectiva, que se refiera sobre todo a la totalidad de las posibilidades.

Las soluciones a las **tareas parciales c)** y **d)** permiten identificar aquello que falta para una solución completa. La oración "Ansgar no empezó bien" prueba la capacidad de ponerse en los pensamientos de otra persona. La reconstrucción de las ideas de otra persona implica a la vez revelar las propias ideas. Aquí se muestra un elemento importante de *Comunicar.* Una réplica, una respuesta, debe capturar de forma exacta lo que se dijo antes, para poder evaluar su veracidad y poner al descubierto eventuales argumentaciones erradas o falacias.

La última solución (a **c)** y **d)**) pone en claro que se favorece un proceso de pensamiento propio. Esto debido a que la solución parcial $1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 8$ propuesta en la tarea se reemplaza mediante el propio razonamiento $2 + 2 + 2 + 2 = 8$. En este caso dos asientos se ocupan cuatro veces, incluido un intercambio, mientras que en la solución ofrecida en el texto de la tarea es evidente que primero se sienta un chico en un asiento; luego, si se trata de un asiento en el borde, el segundo chico tiene una posibilidad de sentarse al lado; si se trata de un asiento que no está al borde, entonces el segundo chico tiene dos posibilidades. En este caso se puede identificar una preferencia en la estructura cognitiva (Schwank 2003). La idea más bien dinámica se rechaza y en su lugar se elige una más bien estática. Poner esto al descubierto ofrece puntos de partida para un cambio de ideas y representaciones que fomenten un mayor rendimiento.

Las soluciones de los escolares muestran que la competencia *Resolver problemas* se traduce en este caso en la elección de una estrategia apropiada, la competencia *Argumentar* en la presentación de deliberaciones de varios pasos y la competencia *Comunicar* en formulaciones claras y comprensibles.

2.2.2 Tarea: "Números vecinos"

Números vecinos

a) Calcula en cada caso:

$1 + 2 + 3 =$
$9 + 10 + 11 =$
$14 + 15 + 16 =$
$49 + 50 + 51 =$

¿Qué notas? Escríbelo.

b) En clases se da la siguiente conversación al respecto:
Nicole piensa: "Con los cálculos se demuestra que la suma de tres números naturales consecutivos siempre da un múltiplo de 3 como resultado". Jessica complementa: "Lo que rige para 3 debe regir para 4. Eso quiere decir: la suma de cuatro números naturales consecutivos da siempre un múltiplo de 4 como resultado".

Kathrin: "Lo siento. Lo que dicen ustedes dos no lo puedo aceptar. Nicole, a ti te lo explicaría de la siguiente manera: … Y a ti, Jessica, así: …".

Completa las explicaciones de Kathrin, es decir, explícale a Nicole qué parte de lo que ha dicho no está bien e indícale a Jessica cuál es el error en su observación.

Clasificación de la tarea "Números vecinos"

Esta tarea modificada (con fines diagnósticos, en comparación con la versión en el capítulo 1, página 37) pertenece sobre todo a la idea directriz *Número*. Varias competencias son importantes.

En la **tarea parcial a)** se trata sobre todo de *Comunicar*, en la **tarea parcial b)** también están presentes el *Argumentar* y *Manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas.*

En la **tarea parcial a)** se esperaría lo siguiente: el resultado de la adición de los tres números es el triple del número del medio. Llegar a una constatación de este tipo corresponde al ámbito de exigencia I.

En la **tarea parcial b)** primero se deben comprender las declaraciones de Nicole y Jessica antes de completar el pensamiento de Kathrin. En este caso los cálculos sueltos no cuentan como prueba. En eso consiste la noción errada de prueba de Kathrin. De forma irrefutable debe quedar claro que la suma siempre da el triple del número del medio. Para esto existen visualizaciones convincentes, así como demostraciones que recurren a formalizaciones (compara las diferentes fundamentaciones en las pp. 37 y 38). Si x es el número del medio, entonces se obtiene la relación $(x - 1) + x + (x + 1) = 3 \bullet x$, que resulta una evidencia concisa. El caso de Jessica es distinto. Un contraejemplo evidencia que su generalización es improcedente: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ y 10 no es múltiplo de 4. Dado que se trata de hacer uso de medios no muy sencillos en las aclaraciones, explicaciones y argumentaciones, y que se debe presentar el alcance y la coherencia de las fundamentaciones, parece justo clasificar esta tarea parcial en el ámbito de exigencia III.

Soluciones de los escolares a la tarea "Números vecinos"

Para **a)**:

Soluciones de los escolares

Todos los números son divisibles entre 3. El número del medio por la cantidad de la suma. Los dos números de afuera sumados y divididos entre 2 dan el número del medio.

Cuando se multiplica el número del medio de tres una cantidad impar de sumados consecutivos por la cantidad se obtiene la suma de los sumados.

Para **b)**:

Soluciones de los escolares

Nicole	Jessica
falta tu fundamentación, el cálculo no basta.	Cuando calculo: 50 + 51 + 52 + 53 Obtengo 206 y no es divisible entre4

Soluciones de los escolares

b) Nicole: Mediante los cálculos no se puede comprobar que todas las sumas de tres números enteros consecutivos son divisibles entre 3. A continuación, una solución correcta: también se obtiene la suma cuando se multiplica el sumando del medio por 3, entonces las sumas son siempre múltiplos de 3.

Jessica: un contratiempo para ti:

1+2+3+4 = 10 y 10 no es divisible entre 4.

A ti, Nicole, te lo explicaría así:

Puede ser que sea cierto lo de los 3 números consecutivos, pero esto no se comprueba mediante el 'par' de cálculos. Pero es cierto que tres números consecutivos siempre son divisibles entre 3, porque 1+2+3 = 6 es divisible entre 3 y para los siguientes números 2+3+4 siempre dan un número divisible entre 3.

A ti, Jessica, así:

Con 4 no ocurre pues 1+2+3+4 = 10 no son divisibles entre 4, entonces no aporta nada que se agregue 4.

Los números a la derecha e izquierda son siempre el número del medio +1 y -1, respectivamente. De esto se puede concluir que la suma siempre es 3m, el número del medio

Análisis de las soluciones de los escolares en la tarea “Números vecinos”

Las soluciones en la **tarea parcial a)** contienen, tal como lo propone el texto “¿Qué notas? Escríbelo”, descripciones de relaciones que se pueden comprobar. En la primera propuesta de solución se encuentran incluso tres constataciones que son de gran importancia. La oración presentada en la segunda propuesta de solución contiene una generalización, además de la abstracción.

La **tarea parcial b)** verifica la comprensión de la comprobación matemática. No es poco usual que existan nociones erradas considerables con respecto a este punto. Las soluciones presentadas se caracterizan porque resulta claro que una “afirmación universal” no se puede comprobar mediante ejemplos, pero sí se puede refutar mediante contraejemplos.

En estos casos resulta evidente que se trata de una comunicación que ha tenido en cuenta al destinatario. La tercera y la cuarta propuesta de los escolares (para esta parte de la tarea) revelan ideas desarrolladas o ya disponibles, de cómo se puede comprobar la relación que se identificó y describió en un principio. En este caso de trata de la idea de la inducción completa: se empieza con una ecuación $1 + 2 + 3 = 6$. Si se aumenta en uno cada sumando, entonces la suma aumenta en 3. La característica de ser un múltiplo de 3 se mantiene. Y uno obtiene así todas las sumas posibles de tres números naturales consecutivos (ver la idea de solución correspondiente en la página 38). La idea de la inducción conduce luego a la comprensión de que la suma de cuatro números naturales consecutivos no es de ninguna manera un múltiplo de 4. La otra propuesta de solución aprovecha la idea de la compensación de números, que se explica en el texto y se expresa de forma concisa mediante la formalización (Cohors Fresenborg, Sjuts & Sommer 2004).

La forma que asumen las competencias importantes *Argumentar* y *Comunicar* en esta tarea se puede reconocer fácilmente en las soluciones de los escolares. Aquí cabe resaltar sobre todo la comprensión de la comprobación. La disposición especial de la tarea motiva a los escolares a describir en detalle qué caracteriza una argumentación convincente: una comprobación justamente. No se trata de una rigidez externa, sino de generar comprensión y evidencia. Y a esto pertenece también el ser sensible con respecto a que una respuesta esté completa y el dejarse llevar por las exigencias argumentativas y comunicativas. Porque la calidad de la argumentación y comunicación, que suele ser fácil de identificar en una tarea como esta, evidencia cómo se convierte la competencia en un diálogo sincero.

Bloques

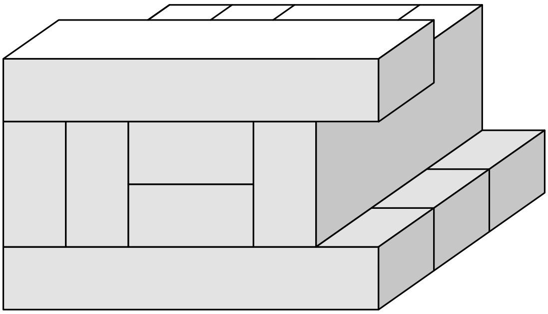
Se han apilado bloques de la misma forma y del mismo tamaño. La arista más corta de un bloque mide 10 cm. Las otras dos aristas miden siempre 4 veces esta longitud.

a) ¿Cuánto miden las otras dos aristas? Escribe cómo llegaste al resultado.

b) ¿Cuál es el volumen de la pila de bloques? Explica tu procedimiento.

c) ¿Qué bloque toca la mayor cantidad de otros bloques? ¿Qué dos bloques tocan la menor cantidad de otros bloques? Fundamenta tus respuestas.

La pila de bloques debe completarse con la menor cantidad posible de bloques, de modo que resulta un paralelepípedo. ¿Cuánto miden las aristas de este paralelepípedo? Explica tus reflexiones.



Clasificación de la tarea “Bloques”

La **tarea parcial a)** corresponde principalmente a la idea directriz *Espacio y forma*, aunque también se abordan las ideas directrices *Número* y *Medir*. El desarrollo de la tarea requiere las competencias *Argumentar*, *Usar representaciones* y *Comunicar*. Se debe fundamentar el cálculo de las aristas que faltan. En esto juegan un rol las reflexiones con respecto a los múltiplos de 10, el registro de longitudes en el espacio, que están reducidas por la representación en perspectiva, así como la identificación de un resultado que se puede calcular rápidamente. Se trata del ámbito de exigencia II, debido a que se pide una fundamentación.

La **tarea parcial b)** es más sencilla. Determinar el número de bloques, calcular el volumen de los bloques individuales y luego el volumen de la pila de bloques y explicar, todo esto pertenece al ámbito de exigencia I. En este caso, las ideas directrices *Medir*, así como la competencia *Argumentar*, son de especial importancia.

La **tarea parcial c)** pertenece a la idea directriz *Espacio y forma*. Se requiere una estrategia para encontrar una solución. Se deben responder dos preguntas, cuyas formulaciones dan algunas pistas sobre el alcance de la solución. Se deben fundamentar las soluciones encontradas mediante la estrategia elegida. Se requiere la competencia *Resolver problemas*, que en este caso pertenece al ámbito de exigencia II.

La **tarea parcial d)** tampoco es tan difícil y corresponde al ámbito de exigencia I. La tarea une la idea directriz *Espacio y forma* con las competencias *Argumentar*, *Usar representaciones* y *Comunicar*. No debe dejar de mencionarse que el recoger información del gráfico exige mecanismos de autocontrol. Es necesaria una verificación psicológica-perceptual, por ejemplo con respecto a la distorsión de los tamaños, a la continuación de las líneas en la representación en perspectiva o a la interpretación de las retículas.

Soluciones de los escolares en la tarea "Bloques"

Para **a):**

Solución de un escolar

La arista más corta corresponde a la altura que mide 10 cm. En el medio de la pila de bloques se encuentran los bloques 4 y 5, que tienen ambas 10 cm de altura y la altura de ambos mide igual que el ancho del bloque 6. Es decir, 2. 10 = 20cm. Entonces el ancho es 20 cm. La longitud se calcula al sumar el ancho de 7, 8 y 9 que tiene el mismo largo que 6 es decir: 3. 20 = 60 cm. Entonces la altura de un bloque es 10 cm, el ancho 20 cm y la longitud 60 cm.

Para **b):**

Solución de un escolar

Un bloque tiene el volumen 10cm. 20cm. 60cm = 12 000cm³
Hay nueve bloques
Nueve bloques tienen el volumen 9 · 12 000cm³ = 108 000 cm³

Para **c)**:

Solución de un escolar

Yo examino los bloques de cada fila

Bloque 1 toca 2, 3, 4, 6 (4)
Bloque 2 toca 1, 3, 7, 8, 9 (5)
Bloque 3 toca 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9 (7)
Bloque 4 toca 1, 3, 5, 6 (4)
Bloque 5 toca 3, 4, 6, 7, 8, 9 (6)
Bloque 6 toca 1, 4, 5, 7, 8, 9 (6)
Bloque 7 toca 2, 3, 5, 6, 8 (5)
Bloque 8 toca 2, 3, 5, 6, 7, 9 (6)
Bloque 9 toca 2, 3, 5, 6, 8 (5)

El bloque 3 toca la mayor cantidad de bloques
Los bloques 1 y 4 tocan la menor cantidad de bloques

Para **d)**:

Solución del escolar

Tiene que aumentar tres.
Las longitudes de las aristas son:
60 cm, 60 cm, 40 cm
Se debe aumentar uno bien a la derecha y dos encima

Análisis de las soluciones de los escolares en la tarea “Bloques”

La solución a la **tarea parcial a)** contiene una argumentación completa, sin hacer uso de interpretaciones de medidas u observaciones. Se usan los conceptos geométricos de forma consecuente.

La solución a la **tarea parcial b)** se caracteriza por su exactitud y por las notaciones que facilitan la lectura. Normalmente en este ámbito suele haber debilidades al diagnosticar. Inexactitudes en la notación suelen traer consigo propensión a los errores.

La solución a la **tarea parcial c)** llama la atención por ser muy clara y ordenada. También es evidente que se trata de una examinación completa. La numeración facilita en gran medida la solución de esta parte de la tarea. Es bastante obvio que el cuidado que se ha tenido favorece la supervisión metacognitiva necesaria.

La solución a la **tarea parcial d)** demuestra una comprensión correcta del concepto de paralelepípedo (se podría confundir con un cubo, por ejemplo).

2.3 Diseño y uso de tareas en el contexto de la clase

La formulación y el diseño de tareas, así como su posición en el proceso de enseñanza-aprendizaje, son métodos efectivos que se encuentran en las manos de los docentes. A estos pertenecen también, independientemente del contexto en que se planteen las tareas, la evaluación y la retroalimentación en clase. Los desarrollos de las tareas y las propuestas de solución deben estar al alcance de los grupos de aprendizaje. Esto puede suceder de varias maneras: como fotocopia de una solución en hojas de trabajo, como una transparencia que se puede proyectar, como solución anotada en la pizarra. A esto se suma la ventaja de que aquel que elaboró la solución puede informar al respecto.

Abordar en clase los trabajos de los escolares permite consolidar conocimientos, estabilizar las habilidades y continuar desarrollando competencias, así como considerar medidas requeridas, en caso que se constate algún déficit, lo cual podría beneficiar a todo el grupo de aprendizaje. La calidad diagnóstica de una tarea consiste en proveer de hallazgos lo más detallados y diferenciados que sea posible.

Las tareas se pueden usar de muchas maneras, tanto para comprobar el rendimiento como para el desarrollo o la consolidación. Las tareas funcionan como instrumentos de navegación. Sirven tanto para la construcción de competencias como para garantizar el cumplimiento de exigencias. Sin embargo, resulta fundamental que lidiar mentalmente con las tareas y las soluciones que se les dan formen parte de la clase. La cognición y la metacognición se encuentran en el foco (Sjuts 2003, Cohorsfresenborg, Sjuts & Sommer 2004). Y uno debe expresarse explícitamente con respecto a esto. Así, se cumple con la demanda de los estándares de aprendizaje de una orientación hacia los procesos y resultados de aprendizaje, así como del análisis de caminos y resultados de aprendizaje individuales y su aprovechamiento.

Entonces, ¿cómo se deben construir las tareas, de modo que se pueda obtener de ellas (es decir, de los productos de los escolares) un diagnóstico sobre el desarrollo de competencias específicas, que permita tomar decisiones fundamentadas con respecto a los próximos pasos? Naturalmente, las tareas pueden proveer información diagnóstica de muchas formas (incluso las tareas de opción múltiple bien pensadas; ver capítulo 3, página 113). A continuación se presentarán solo algunas formas apropiadas para una clase, orientadas al proceso de aprendizaje.

a) Explicaciones en un texto

Las actividades matemático-cognitivas son variadas. Se pueden poner en marcha mediante la presentación de problemas y tareas. Pero las actividades mentales no siempre son evidentes: a menudo permanecen ocultas. Hacer visible lo invisible, descubrir lo oculto, es imprescindible desde un punto de vista diagnóstico. La operación relacionada con esto es la explicación. Explicar significa revelar. También sirven a este propósito el describir, el presentar, el aclarar, el explicitar los propios pensamientos. El planteamiento de las tareas debe identificar estas operaciones, exigirlas de forma explícita. La tarea "Bloques" puede servir de ejemplo. Presenta las formulaciones correspondientes en diferentes lugares: "Escribe cómo llegaste al resultado"; "Explica tu procedimiento"; "Explica tus reflexiones". Esto provoca que los escolares que se enfrentan a la tarea escriban un texto y conlleva volcar las propias ideas hacia afuera. Además, este planteamiento permite reconocer fortalezas y debilidades, y eventualmente encontrar ayuda. No se debe menospreciar que la elaboración de un texto tiene un efecto sobre el pensamiento y la comprensión. Aquel que explica sus pensamientos debe prestar más atención, vigilarse más a sí mismo (Sjuts 2003, 2006). Debe involucrarse en un discurso consigo mismo.

b) Opinión y reflexión

Las tareas que exigen opinión y reflexión tienen un efecto similar. La reflexión se puede relacionar con la planificación, la supervisión y el control del propio trabajo con la tarea, pero también puede estar dirigida a propuestas de solución. Se solicitan comentarios, contraposiciones, comparaciones, diferenciaciones, categorizaciones y sistematizaciones. Como ejemplo se puede nombrar el comentario con respecto a la comprensión de la comprobación en la tarea "Suma de números vecinos".

Las tareas que siguen este principio ponen sobre todo las formulaciones y notaciones en el foco de la atención. Por ende, son apropiadas para detectar diferencias individuales en la construcción de conceptos y procesos de comprensión y para reconstruir concepciones individuales. Dichas reconstrucciones e identificaciones hacen posibles las valoraciones individuales e impiden asumir una perspectiva estrecha o menospreciar un rendimiento no convencional. Las tareas de formato "Asume una posición" conceden espacio a la variedad de pensamiento y amplían el espectro diagnóstico (Kaune 2005).

c) Análisis de nociones erradas

La presentación de escenas de clase, diálogos entre escolares, errores, vacíos, nociones erradas y disonancias cognitivas es un principio de diseño de las tareas diagnósticas especial. La organización de una tarea de este tipo se suele basar en diferentes ideas, que introducen la tarea haciendo referencias sobre todo a las personas mencionadas y que se vuelven objeto de discusión. De esta manera, los escolares se meten en una situación y se meten en los pensamientos de otros. Al lidiar con las ideas de otras personas reconocen el estado de su propia estructura cognitiva (Schwank 2003), lo cual puede dar pie a cambios, ampliaciones o consolidaciones. Encontrar y remediar nociones erradas es una característica, que —entre las tareas presentadas— se encuentra sobre todo en algunas partes fundamentas de las tareas "Chicos en un bus escolar" y "Suma de números vecinos".

La didáctica de las matemáticas ha presentado y discutido esta característica en muchas oportunidades. Recuerde la siguiente tarea: "Un error común de los escolares consiste en la idea: *a es negativo*. ¿Cómo ayudarías?". Las tareas que tematizan notaciones erradas (como por ejemplo el uso de paréntesis), así como las tareas que piden estimaciones y verificaciones, pertenecen a esta categoría, como también aquellas que exigen lidiar con errores o vacíos en la argumentación. Siempre se trata de diseccionar y corregir aquello que no está completo o errado (de ser posible también dar causas y razones).

d) Registro de ideas

Las tareas no deben referirse únicamente a aquello que ya se aprendió sino que deben estimular expresamente que los escolares continúen. Deben proveer nuevas ideas, ayudar a construir nuevo conocimiento y despertar inspiración. Deben animar a los escolares a hacerse más preguntas y a continuar las tareas. Esto les da más realismo, pero también un estímulo para lidiar con ellas. Los estímulos y retos activan y generar un crecimiento en el aprendizaje. Al presentar ideas de solución, se cumple con las metas propuestas. Un diseño de este tipo se encuentra en la tarea "Chicos en un bus escolar". Este tipo de tareas no solo diagnostica falsas nociones, errores y vacíos en el conocimiento, sino también la capacidad que tiene cada nivel de las competencias de establecer conexiones, la medida en que se dispone de competencias específicas, es decir, la capacidad de aprender. Debido al valor que tiene la competencia de aprender, es necesario recoger información sobre su desarrollo que permita tomar decisiones con respecto a los próximos pasos.

BIBLIOGRAFÍA

Cohors-Resenborg, E., J. Sjuts y N. Sommer (2004). Complejidad de las operaciones mentales y formalización del conocimiento. En: Neubrand, M. (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000*. Wiesbaden, S. 109-144.

Helmke, A. (2003). *Calidad de la enseñanza: registrar, evaluar, mejorar*. Seelze.

Kaune, C. (2005). Escribir como estímulo para reflexionar sobre los propios procesos de aprendizaje. Nimm Stellung! Tareas y protocolos de clase. *Praxis der Mathematik*, 47. Jahrgang, Heft 5, S. 7-11.

Schwank, I. (2003). Introducción al pensamiento funcional y predicativo. En: *Zentral blatt für Didaktik der Mathematik*, Jahrgang 35, Heft 3, S. 70-78.

Sjuts, J. (2003): Metacognición. *Journal für Mathematik Didaktik*. Jahrgang 24, Heft 1, S. 18-40.: *Journal für Mathematik Didaktik*, Jahrgang 24, Heft 1, S. 18-40.

Sjuts, J. (2006): Beim Denken gedacht, das Denken überwacht. Ideen der Metakognition beim Umgang mit Termen. *Mathematik Lehren* 136, S. 47-49.

3. PRÁCTICA INTELIGENTE

Alexander Wynands

El aprendizaje como proceso activo se da al ocuparse de tareas y problemas cuyo sentido y propósito uno reconoce y para cuya solución se requiere nuevo conocimiento. Los ejercicios son indispensables para asegurar lo aprendido y para conectar el conocimiento. La práctica inteligente y orientada hacia las competencias hace hincapié en el 'ejercitarse', pero también apunta a otras competencias de los estándares de aprendizaje, como fijar rutinas, usar lo aprendido en casos similares pero nuevos o conectar distintas áreas de contenido.

En este capítulo se trabajarán primero algunos aspectos generales de la práctica inteligente, y luego, se presentarán ejemplos de tareas mediante las cuales se puede llevar a cabo este tipo de práctica.

3.1 ¿Para qué sirve la práctica inteligente en las clases de matemáticas?

La pregunta sobre una clase útil, y especialmente sobre el sentido y la extensión de la práctica en la escuela, parece ser tan antigua como la misma escuela. Winter (1991) cita a Comenius, quien menciona dos razones para el escaso éxito de las escuelas: "Las escuelas se ocupan mucho de cuestiones secundarias e inútiles, y la enseñanza no tiene en cuenta que los seres humanos olvidan con facilidad, sobre todo al leer y escuchar; es como acarrear agua con un colador".

Para que las clases de matemáticas estén determinadas por el sentido y la razón y las competencias no se acarreen como agua con un colador, es indispensable que haya práctica intensiva y frecuente, que no se limite a escuchar y leer sino que genere actividad propia en solitario o con un compañero de trabajo. La práctica y repetición de habilidades básicas son especialmente valiosas. A esto corresponde, por ejemplo, poder calcular mentalmente, redondear a números en escalones de 10 (potencias de 10), calcular con estas potencias de 10, hacer geometría mental, comprender expresiones algebraicas sencillas, comprender magnitudes (unidades y factores de conversión) y contar con habilidades vinculadas con la solución de tareas con relaciones (anti) proporcionales, entre otros. La *expertise* (Baumert *et al*. 1997) para "aumentar la eficiencia de las clases matemático-científicas" destaca, con completa razón, que "en la Secundaria I no se puede renunciar a los así llamados 'procedimientos de cálculo ciudadano'". Si no se presta suficiente atención a esto, faltarán rutinas necesarias que descarguen y permitan reconocer relaciones y generalizaciones en "ámbitos de exigencia más altos" y que respalden las reflexiones, fundamentaciones y demostraciones.

Por ejemplo, Aebli (1991) recalca el sentido de dicha práctica 'pura' o 'simple', es decir, del mantener despiertas las habilidades básicas. Una práctica de este tipo "aspira a la construcción de automatismos" y se deben entrenar "reacciones rápidas y seguras, pero también estereotipadas". Aebli explica el beneficio de esto, porque solo este tipo de automatización permite que haya movilidad y síntesis mentales que permitan que "nuevas operaciones se integren en relaciones de orden más alto". El hecho de que un escolar no tenga que pensar más en los pasos de cálculo le permite resolver nuevos problemas con ayuda de estos pasos. No debe pasarse por alto que, para algunos escolares, el poder llevar a cabo rutinas de forma segura, rápida y exitosa significa una experiencia de logro y es emocionalmente importante.

Sin embargo, según Aebli, la 'práctica pura' no hace que los escolares sean capaces de transferir a una situación nueva el conocimiento adquirido en una situación específica y ejercitado en situaciones similares. Se habla de 'práctica inteligente' cuando las rutinas no se mantienen como un propósito en sí mismas, sino que sirven para hacer comprensibles los conceptos generales, conectar las áreas de conocimiento, descubrir nuevos conocimientos e impulsar la comunicación a partir de fundamentos. Así, los ejercicios adquieren importancia en las clases de matemáticas cuando no están orientados a la repetición testaruda de esquemas, que generan aburrimiento. Winter (1991) señala que la práctica y el aprendizaje por descubrimiento no tienen por qué ser opuestos sino que pueden apuntar en la misma dirección.

Los siguientes ejemplos concretan antiguas demandas, entre otras de Wittmann (1982), de hacer que las tareas, los problemas y las áreas de problemas sean el núcleo del "aprendizaje activo y por descubrimiento" en las clases de matemáticas. La práctica inteligente en la Secundaria I busca fomentar el pensamiento propio, así como retomar y continuar con la meta propuesta por Wittmann & Müller (1992) de 'práctica productiva' sobre la base de habilidades básicas de conteo y cálculo, de forma y medidas. Los ejemplos conectan números, formas y medidas. Demandan que se continúe pensando para reconocer patrones o reglas que se puedan fundamentar y discutir con otros.

De forma resumida se mencionan las siguientes metas de la práctica inteligente orientada hacia las competencias:

- Consolidar rutinas.
- Aplicar lo aprendido a casos nuevos, pero similares, y conectar áreas de conocimiento.
- Descubrir características matemáticas o reglas generales.
- Comunicar experiencias y descubrimientos de forma adecuada mediante una argumentación y un lenguaje matemáticos.

Con esto, la práctica inteligente contiene las seis competencias generales de los estándares de aprendizaje.

3.2 La 'práctica pura' y el conocimiento básico

No es la intención de los estándares de aprendizaje renunciar a la práctica de automatismos, pero sí lo es reducir el alto porcentaje que se asigna al trabajo de cálculo o, en todo caso, reorientarlo. Tareas de cálculo que no están relacionadas unas con otras se pueden reemplazar por secuencias de áreas que no solo entrenan las habilidades de cálculo sino que también dirigen la mirada hacia relaciones, regularidades, reglas, métodos y conceptos.

Primero se muestran ejemplos de tareas pequeñas y sencillas para la práctica de competencias básicas particulares; por ejemplo, el cálculo mental con números de una cifra y potencias de diez, el cálculo aproximado o la conversión de medidas (ver también Wynands & Neubrand 2003). Estas deberían encontrarse con frecuencia en las clases de matemáticas, en ejercicios 'orales' de concentración o en exámenes que retoman contenidos vistos hace un tiempo.

Estas tareas también son apropiadas para formar un pensamiento conectado. Pero, a pesar de las buenas ideas y los buenos deseos, se debe evitar sobreexigir a los escolares, especialmente en la *Hauptschule*[1]. La frustración y los temores contraproducentes serían consecuencias previsibles. Sin embargo, se debe mencionar que los ejemplos dados aquí —que provienen de materiales para una clase de *Hauptschule* (*El mundo del número*, 2001-2004)— no están dirigidos solo al 30% de escolares de alto rendimiento de la *Hauptschule*, cuyas capacidades matemáticas

1 La *Hauptschule* es una de las modalidades de educación secundaria que se ofrece en Alemania y Austria. Empieza luego de cuatro años de escuela primaria. Ofrece educación secundaria de nivel de exigencia 2, según la Clasificación Internacional de Estándares de Educación.

corresponden a las de escolares de la *Realschule* o el *Gymnasium*[2]. En algunos escolares el aprendizaje se fomenta mediante tareas retadoras.

Se nombran solo algunos ejemplos para los grados 5/6, que mantienen vivas algunas habilidades técnicas y que se relacionan con expresiones algebraicas y magnitudes.

Expresiones y medidas

a) Calcula y ordena los resultados de menor a mayor:
4 + 2 • 3 (4 + 2) • 3 4 • (2 + 3) 4 : (2–1)
4 : 2–1 4 - 2 • 0 (4 + 2 : 1) • 0

b) ¿Qué magnitudes corresponden a longitudes y cuáles a áreas? Clasifica y ordena.
0,6 m 0,1 m2 50 mm 80 cm^2 10 cm^2 1 dm^2 $\frac{1}{2}$ km 66 m

¿Qué objetos concretos son de esos tamaños? Nombra ejemplos.

c) Trabaja con estas longitudes:
305 m; 195 m; 95 m; 550 m; 650 m; 450 m; 915 m; 805 m; 85 m.

1) Dos longitudes juntas deben dar al menos $\frac{1}{2}$ km (y 1,5 km como máximo). Escribe *todos* los pares de longitudes que encajan con esto.

2) ¿Cuánto miden x varas de igual taño, que juntas miden igual que la suma de todas las longitudes mencionadas? Determina las longitudes de las varas para diferentes valores de x.

d) Completa los factores, de modo que la ecuación sea correcta.

1) 10 • 6 = 5 • __ •__ 2) 100 •15 = 25 •__3 •__ 3) 9 •40 = __ •__ •__ •__

En los siguientes ejemplos, el cálculo de las tareas presentadas es una mera obligación; el reconocimiento del patrón en las tareas es un estímulo para el descubrimiento, y su fundamentación es un reto.

2 El *Gymnasium*, en el sistema de educación alemán, es un tipo de escuela secundaria con fuerte énfasis en el aprendizaje académico, comparable con el sistema de *grammar school* británico, o con los *prep schools* en los Estados Unidos.

Ecuaciones

a) Calcula y verifica. Completa con ecuaciones similares.

1) $9 \bullet 11 = 10 \bullet 10 - 1$; $19 \bullet 21 = 20 \bullet 20 - 1$; $29 \bullet 31 = 30 \bullet 30 - 1$ …

2) $9 \bullet 1 - 1 = 8$; $9 \bullet 21 - 1 = 188$; $9 \bullet 321 - 1 = 2888$; $9 \bullet 4321 -$ …

b) Observa la serie de ecuaciones y verifica.

1) Continúa la serie con tres ecuaciones más.

2) ¿Cómo se llama la décima ecuación? ¿Es correcta?

3) Dibuja patrones de puntos para ambas partes de las ecuaciones.

$$1 = 1$$
$$4 - 1 = 1 + 2$$
$$9 - 4 + 1 = 1 + 2 + 3$$
$$16 - 9 + 4 - 1 = 1 + 2 + 3 + 4$$

Tip: A la izquierda se encuentran números ‘cuadrados’, a la derecha números ‘triángulos’…

c) Verifica, completa y prueba con otras ecuaciones similares.

$(1 + 2)^2 = 1^3 + 2^3$,

$(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$,

$(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$, …

Con esta tarea se entrena un patrón de pensamiento importante para el trabajo estratégico. Aquel que afine la mirada hacia el trabajo hacia atrás (recursivo) y hacia adelante (inductivo o iterativo), podrá acercar a los escolares con buen desempeño el trabajo recursivo e iterativo y mostrarles el método de demostración de la inducción completa. Lo importante es trabajar primero con números constantes *raros* o *significativos* en lugar de hacerlo con variables. Luego, en retrospectiva, se pueden reemplazar los números *significativos* por variables —o se pueden colorear de rojo— y se puede formular una ley o regla general. Se sugiere revisar la demostración para la secuencia de tareas presentada como una propuesta de conversación en clase, que ejemplifica el descubrimiento guiado (Wynands 2005).

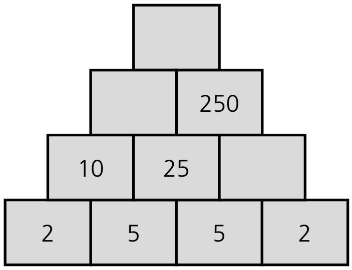
3.3 Ejemplos de tareas sometidas a prueba

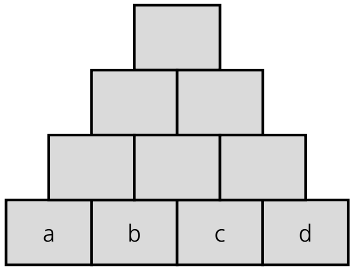
Los siguientes ejemplos de tareas se probaron en distintas escuelas y grados. Situaremos los ejemplos según los estándares de aprendizaje y revisaremos ideas de solución exitosas, así como errores típicos.

3.3.1 Un ejemplo de *Manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas*

Muros de números

Los siguientes muros de cálculo se construyen de tal modo que en un ladrillo que se encuentra sobre dos ladrillos se escribe el producto de los números de las dos piedras.





a) Completa el muro de cálculo (de la izquierda).

b) Se llama *número meta* al que se encuentra más arriba. Escribe cómo puedes calcular el número meta del muro de la derecha, sin calcular los otros números uno por uno.

c) El número meta es 100 000 000 y en la fila de abajo todos los números son iguales. ¿Cuál es el número de la fila de abajo?

- **Observaciones**

Esta tarea, que corresponde a la idea directriz *Número*, exige las competencias *Usar representaciones* y *Manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas*. La **tarea parcial a)** demanda habilidades básicas en el ámbito de exigencia I, la **b)** y la **c)** demandan el reconocimiento de relaciones, de la anotación en potencias y de una estrategia de 'ensayo con propósito' o del cálculo hacia atrás (ámbito de exigencia II).

Los tipos de tarea como las **tareas parciales a)** y **c)**, con 'ladrillos de suma' en lugar de 'ladrillos de producto', ya se pueden usar desde los primeros grados de primaria. La adición/sustracción y la multiplicación/división en el ámbito de los números naturales son y serán siempre tareas comunes en las clases de matemáticas.

En la **tarea parcial b)** podrían encontrarse expresiones de más de un miembro en la fila de abajo, con lo cual surgen diversos ejercicios para la anotación de expresiones. Se ofrece la posibilidad del trabajo en pares: un escolar propone una tarea, el otro la resuelve. De ser necesario, las soluciones deben defenderse ante las objeciones de aquel que diseñó la tarea.

- **Experiencias y resultados**

  En dos clases de octavo grado de un *Gymnasium* la mayoría de los escolares resolvieron de forma correcta las **tareas parciales a)** y **b)**; sin embargo, menos de la mitad de los escolares pudieron resolver la **tarea parcial c)**. En una clase de décimo grado de una *Hauptschule* todos los escolares resolvieron la **tarea parcial a)**. Alrededor de la mitad de la clase encontró probando el resultado para **c)**.

  En una escuela secundaria especializada (*Fachoberschule*) de un año de duración, los escolares solo cometieron errores en la formulación de potencias y en la **tarea parcial c)**.

- En una escuela secundaria especializada (*Fachoberschule*) de dos años de duración, solo algunos escolares pudieron encontrar una formulación adecuada en la **tarea parcial b)**.

3.3.2 Un ejemplo de *Resolver problemas* y *Comunicar*

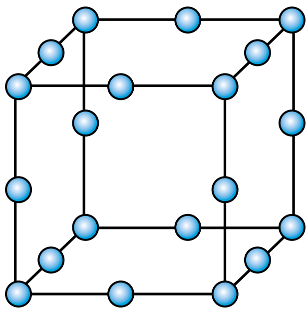
Barras de unión

Se construyen cubos a partir de bolas y barras de unión, tal como se presenta en la imagen. Si se tienen tres bolas en cada arista, esto da un total de 20 bolas.

a) Determina la cantidad total de bolas en el caso de que haya 2 o 4 en cada arista y completa la tabla.

Cantidad de bolas en una arista	2	3	4
Cantidad total de bolas		20	

b) ¿Cuántas bolas se necesita si se quiere fijar 100 bolas en cada arista? Escribe cómo lo calculaste.



- **Observaciones**

  Partiendo de los ejercicios introductorios de la **tarea parcial a)**, en **b)** se debe desarrollar una estrategia de conteo y anotarla mediante un método de cálculo.

  El camino de solución anotado —eventualmente en forma de una expresión algebraica— muestra si se domina el lenguaje matemático y si se hace uso de reglas de prioridad (paréntesis y multiplicación/división antes de adición/sustracción). Estos ejercicios con patrones de puntos se pueden realizar desde los primeros grados de primaria. En la *Sekundarstuffe I*[3] pueden servir para la elaboración de la anotación de expresiones, el descubrimiento de simetrías en la geometría y sus consecuencias *aritméticas*, es decir para la conexión entre aritmética, álgebra y geometría (ver Winands 2005). Este tipo de tareas sirve para verificar el desempeño en todas las competencias, en especial en *Resolver problemas* y *Comunicar*, dado que los escolares deben documentar su camino de solución en la **tarea parcial b)**.

- **Experiencias y resultados**

En dos clases de octavo grado del *Gymnasium* la mayoría de los escolares resolvieron la **tarea parcial a)**, pero solo un tercio resolvió correctamente la **tarea parcial b)**.

En una escuela de artes y oficios (*Gewerbeschule*) de dos años de duración (Tecnología, décimo grado), uno de tres escolares resolvieron ambas tareas parciales; en una escuela secundaria especializada (*Fachoberschule*) (Tecnología, duodécimo grado) fue de uno de cada dos.

Diferentes formas de pensar y estrategias salen a la luz mediante una variedad de métodos de cálculo correctos para **b)**. En clase, estos caminos de solución se pueden recolectar como protocolos de pensamiento, por ejemplo en un 'afiche de aprendizaje'. Luego se pueden comparar y premiar los caminos más 'astutos'. A continuación se presentan algunos protocolos de pensamientos interesantes —y en parte errados— de una clase de octavo grado. El protocolo se puede escribir en la pizarra, para discutir en plenario cómo o qué se estaba pensando:

Solución de un escolar 1

(1) $100 \cdot 4 = 400$, $98 \cdot 8 = 784$ también $K = 400 + 784 = 1184$

(2) $K = 8 + 12 \cdot (100 - 2)$

(3) $K = 12 \cdot 100 - 16$

(4) $K = 4 \cdot 100 + 8 \cdot 98$

(5) $K = (100 + 196) \cdot 2 + 2 \cdot 100 - 8$

(6) $100 + 99 + 99 + 98 + 99 + 99 + 98 + 99 + 99 + 98 + 98 + 98$

3 A partir de quinto y hasta noveno grado.

Resulta asombroso el siguiente cálculo, en el que ya en la hilera de cuatro bolas por arista se llegaba al resultado 32. Se continuó con una cadena de pasos de cálculo (recursivos y correctos):

Solución de un escolar 2

5 ~ $32 + 12 = 44$

6 ~ $44 + 12 = 56$

7 ~ $56 + 12 = 68$

8 ~ $68 + 12 = 80$

9 ~ $80 + 12 = 82$

10 ~ $92 + 12 = 104$

$90 \cdot 12 + 104 = 1184$

Evidentemente, el resultado intermedio de 104 bolas para 10 bolas por arista se usó de forma estratégica para llegar al resultado de 1 184 bolas para 100 bolas por arista. ¡El camino —y no el resultado (1 184)— es la meta de este ejercicio!

El análisis de errores típicos en el método de cálculo permite discutir soluciones erradas, como por ejemplo la siguiente:

Solución de un escolar 3

(1) B = 12.98

(2) B = 12.100 − 6.8

(3) 400 por superficie, 6.400 = 2400

(4)...

(5)...

(8) 3 bolas - 20; 1 bola - 20/6; 100 bolas - 20/6.100

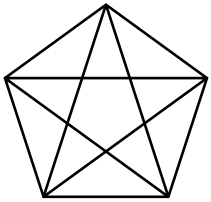
=666.6

3.3.3 Un ejemplo de *Resolver problemas y argumentar*

Diagonales

En el pentágono regular exterior, las cinco diagonales están dibujadas. Completa en la tabla el número de diagonales de los polígonos regulares (convexos) mencionados.

Triángulo	Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono	Heptágono	Octágono	Dodecágono
		5				



Describe cómo encontraste el número de diagonales del dodecágono (polígono de doce ángulos).

- **Observaciones**

Esta tarea conecta las ideas directrices *Número* y, sobre todo, *Espacio y forma*. Es apropiada tanto para la introducción a la exploración de polígonos regulares como para practicar procedimientos de conteo sistemáticos, sobre todo para el desarrollo de métodos recursivos o iterativos. Sería un desperdicio usar este ejemplo como una tarea de evaluación: se adecua mucho mejor al descubrimiento y la fundamentación con autonomía, para lo cual se requiere más tiempo en clase y se deben permitir formas cooperativas de trabajo, como el trabajo en pares. El encontrar una fórmula de solución con la cual se pueda calcular rápidamente el número de diagonales debe ser una meta remuneradora de las reflexiones. El énfasis se encuentra en este caso en las competencias *Resolver problemas* y *Argumentar*. Determinar el número de diagonales en un dodecágono demanda una estrategia. Esta puede apoyarse en los casos previos, que son más sencillos, pero necesita de la reflexión sobre los casos resueltos y de una generalización. La tarea puede servir como ilustración geométrica de la problemática 'tomar 2 de *n* posibles'.

Tareas *vestidas* adecuadas para los escolares podrían ser: "¿Cuántos juegos habrá, si siempre juegan dos de *n* (18 en la Bundesliga de fútbol) equipos uno contra otro?" o "Cada uno le da la mano a otro…". El *modelado* de estos problemas puede conducir a representaciones gráficas en forma de polígonos.

- **Experiencias y resultados**

En ambas clases de octavo grado de *Gymnasium*, la mitad de los escolares llenó la tabla de forma correcta hasta llegar al octágono. Uno de cuatro escolares encontró el número (54) de diagonales en el dodecágono.

Cuatro soluciones correctas estaban estructuradas de forma muy clara; una de ellas se muestra a continuación en el siguiente protocolo de trabajo:

Solución de escolar 1

Pentágono = 5 = 2 + 2 + 1
Hexágono = 9 = 3 + 3 + 2 + 1
Heptágono = 14 = 4 + 4 + 3 + 2 + 1
Octágono = 20 = 5 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
⋮
Dodecágono = 54 = 9 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1

A pesar de que el signo *igual* no fue bien elegido, se entiende el sentido; se aceptó como error *perdonable*. Otros dos escolares trabajaron de forma muy diferente. La tabla de la tarea se amplió en una hilera y se completó 'sin huecos' hasta llegar al dodecágono:

Solución de escolar 2

Tres	Cuatro	Cinco	Seis	Siete	Ocho	Nueve	Diez	Once	Doce	(Número de ángulos)
0	2	5	9	11	20	27	35	44	54	(Número de diagonales)
+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+10		(Diagonales que se añaden cada vez)

Otro camino de solución se indicó de la siguiente manera:

$11 + 10 + 9 + 8 + \ldots + 2 + 1 - 12 = 54$

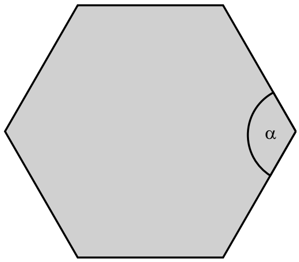
La expresión izquierda de la ecuación corresponde al protocolo de una estrategia correcta. Se hicieron bosquejos a mano para todas las soluciones e intentos.

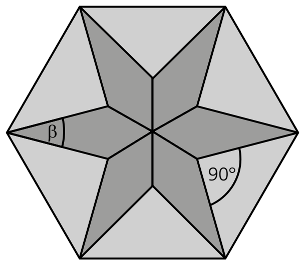
3.3.4 Otro ejemplo de *Resolver problemas* y *Argumentar*

Hexágono

a) En la imagen encuentras seis ángulos internos α de igual medida. Averigua cuánto mide cada uno. Fundamenta tu procedimiento.

b) Del hexágono regular se cortan triángulos rectángulos, tal como muestra la imagen. Queda una estrella. Dibuja esta imagen. ¿Cómo puedes construir triángulos rectángulos? ¿Cuánto mide el ángulo β en la punta de la estrella?





- **Observaciones**

Esta tarea también sirve mejor para fomentar una práctica dirigida al descubrimiento que para evaluar. Se estimulan las competencias *Argumentar* y *Resolver problemas*, principalmente. La tarea está pensada para implementarse a partir del séptimo grado, después de haber trabajado teoremas simples de los ángulos (la suma de los ángulos de un triángulo, teorema del ángulo base). Esta sirve para profundizar y conectar. La **tarea parcial a)** prepara a los escolares para el trabajo con la **tarea parcial b)**. Por consiguiente, en clases con un desempeño alto se podría dejar de lado **a)**. Se deben descubrir las relaciones entre los ángulos de un hexágono regular. Existen varios caminos posibles para construir la estrella. Esta parte de **b)** es 'abierta' con respecto a los métodos de construcción: se puede usar el teorema de Tales, se pueden trazar mediatrices hacia los lados del hexágono, se pueden construir triángulos (a, l, a) = (45°, lado, 45°).

- **Experiencias y resultados**

  Casi tres cuartos de los escolares de ambas clases de octavo del *Gymnasium* encontraron el resultado correcto (120°) en la tarea parcial **a)**. Entre los escolares que fundamentaron su procedimiento, algunos lo hicieron mediante los seis triángulos en el medio (Mittendreieck), otros mediante la descomposición del hexágono en cuatro triángulos y otros mediante la descomposición en un rectángulo y dos triángulos.

  Esta variedad de soluciones es alta, por conocida, y es posible gracias a la creatividad de los escolares, que en tareas como esta —que es abierta respecto del método— surge mejor en trabajo individual o en pares que en una conversación centrada en el docente.

  Cerca de la mitad de los escolares del *Gymnasium* resolvió bien la **tarea parcial b)**. Se debe mencionar que, en el caso de los escolares de octavo grado, no se pidió que dibujaran el hexágono con la estrella. De incluirse como tarea de evaluación, se habría requerido más de los 35 minutos que tenían disponibles para resolver todas las tareas presentadas hasta el momento.

  Varios escolares no calcularon en las **tareas parciales a)** y **b)**, sino que midieron el ángulo β.

El uso de esta tarea en una clase de noveno grado (con relación a la conversación posterior sobre la evaluación del nivel de aprendizaje) demostró que la tarea se puede usar en el marco de una secuencia de clases para practicar y repasar. Las estrellas, como la de la **tarea parcial b)**, resultan atractivas para los escolares por motivos estéticos; esta es la razón por la que se presenta de colores. Si los escolares realmente cortan la estrella, tal como se propone en la tarea, entonces esta también adquiere un matiz de actividad. Dibujar la estrella estimula a los escolares a que empiecen a pensar en la estructura de la figura. Seguidamente se puede plantear la siguiente pregunta: "¿qué otros ángulos reconoces en la figura?". La tarea se puede ampliar en clase y se puede pedir que no solo se corten triángulos rectángulos, sino también triángulos obtusos o agudos, y que se mida en cada caso el ángulo en la punta de la estrella. O, viceversa, se puede dar el ángulo de la punta y pedir que calculen los ángulos del triángulo.

El *software* de geometría dinámico es un buen soporte para extensiones de este tipo. Al poder medir los ángulos, el *software* permite que los escolares verifiquen por sí mismos sus respuestas. La figura debe construirse de tal modo que la estrella cambie (¡pero siga siendo simétrica!), cuando se 'jala' desde un ángulo interno de la estrella. Para poder construirla, los escolares deben tener muy claro cuál es la estructura de la figura.

El *software* también incrementa el valor estético, ya que resulta muy sencillo cambiar el color de la figura.

BIBLIOGRAFÍA

Aebli, H. (1991). *Doce formas básicas de la enseñanza: una didáctica general basada en fundamentos psicológicos*. Klett-Cotta, Stuttgart 6. Auflage.

Baumert, J. *et al*. (Hrsg.) (1997). *Informe para la preparación del programa "Incremento de la eficiencia de las clases de matemático-científicas" (Materiales para la planificación educativa y el fomento de la investigación, Cuaderno 60)*. Bonn: Bund-Länder Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung.

Winter, H. (1991). *Aprendizaje por descubrimiento en las clases de matemáticas 2*. Verbesserte Auflage, Hrsg. Ch. Wittmann, Vieweg, Braunschweig.

Wittmann, E.C. (1982). Los ejemplos de clases como núcleo integrador de la didáctica de las matemáticas. *Journal für MathematikDidaktik*, Jg. 3, H. 1, S. 3–20.–20.

Wittmann, E.C. y G.N. Mueller (1992). *Manual de ejercicios de cálculo productivo*. Stuttgart: Klett, Bd.1 1990, Bd. 2.

Wynands, A. y M. Neubrand (2003). PISA y la formación matemática básica - Impulso para tareas (no solo) en la *Hauptschule* En: Hefendehl-Hebeker y S. Hußmann (eds.). *La didáctica de las matemáticas entre la orientación hacia la disciplina y la evidencia empírica según Norbert Knoche* (pp. 299-311). Hildesheim: Franzbecker.

Wynands, A. (2005). Ver, entender y fundamentar - Patrones, números y expresiones algebraicas. En: *Mathematik Lehren*, Heft 128, S. 47-51.

El mundo del número (2001-2004): Wynands, A. mit Rinkens, H. D. para el tomo 5 y Bauhoff, E. a partir del tomo 7 (Hrsg.) - Edición para la Hauptschule NRW. Tomos 5 (2001) a 10 (2004), Hannover: Schroedel.

4. EL ENFOQUE DE PROYECTOS

Christina Drüke-Noe

Las tareas en clases de matemáticas pueden mostrar diferentes grados de amplitud. El espectro va desde tareas cortas y cerradas para practicar, pasando por tareas cada vez más amplias y abiertas, hasta llegar a tareas parecidas a proyectos. A continuación presentamos el potencial de las tareas tipo proyecto en relación con el fomento de diferentes competencias matemáticas.

4.1 La importancia de una clase con un enfoque de proyectos

Ya en la década de 1920 John Dewey y William Heard Kilpatrick intentaron desarrollar alternativas a las clases tradicionales. Ellos demandaban un cambio en las clases, de modo que los intereses y las necesidades de los alumnos estuvieran en primer plano, de modo que con su trabajo los escolares pudieran unir la planificación, el aprendizaje y la acción en el proceso del aprendizaje autogestionado. Tales metas podían lograrse mediante una clase que tuviese un enfoque —al menos por fases— hacia los proyectos.

Por ende, no se puede concluir que la realización de clases con un enfoque de proyectos sea una consecuencia de los estándares de aprendizaje; tampoco que las clases con un enfoque de proyectos son un nuevo tipo de enseñanza. Más bien, la implementación de este tipo de clases puede, por un lado, ampliar la variedad metodológica de las clases de matemáticas, y por el otro, aportar a llevar a cabo clases orientadas al desarrollo de competencias, dado que al trabajar en proyectos o mediante tareas parecidas a proyectos se activan y fomentan un gran número de competencias.

A menudo, las clases de matemáticas alemanas se enfocan en la adquisición de rutinas y están caracterizadas por la resolución de tareas intramatemáticas estándar. Por ende, pequeños proyectos matemáticos pueden ofrecer la oportunidad a los escolares de resolver problemas de forma activa, de argumentar y de establecer relaciones entre conceptos matemáticos y situaciones de la vida cotidiana y del entorno. Las fases de proyectos en la enseñanza pueden desarrollar y complementar la cultura actual con respecto a las clases y las tareas, de modo que los escolares tengan variadas oportunidades de realizar actividades vinculadas con las competencias y puedan estar cognitivamente activos, a la par que se fortalece el enfoque centrado en los alumnos (ver los criterios de calidad del capítulo 1, página 29).

4.2 ¿A qué nos referimos con un 'enfoque de proyectos'?

Dado que las clases de proyectos en su forma más pura se enfrentan a los límites de lo posible en la realidad del salón de clases, hablamos más bien de clases con un enfoque de proyectos, que es más factible y menos intensivo en tiempo. Gudjons (1997) presenta diez características de un proyecto y se refiere —en contraste— a un enfoque de proyectos cuando solo se cumplen algunas de estas características. En este artículo se propone que para una clase con enfoque de proyectos rijan las siguientes características: autogestión y autorresponsabilidad (los escolares participan de la planificación), planificación orientada hacia una meta, generación de un producto, inclusión de muchos sentidos y de un aprendizaje social en el proyecto[4].

El enfoque de proyectos implica un mayor énfasis del proceso, a la par que el resultado del proceso adquiere mayor importancia, es decir, el producto. Idealmente un proyecto se caracteriza por las siguientes cuatro fases —que no son fáciles de distinguir cronológicamente—, y cuya mezcla puede resultar intencional y provechosa:

1. Establecer una meta
2. Planificar
3. Implementar
4. Evaluar

En esta forma de organización del aprendizaje escolar los alumnos adquieren continuamente una mayor co- y autodeterminación. En el caso ideal, son ellos quienes definen las metas de la clase, o al menos de la sesión, y determinan qué métodos usar, desarrollan los problemas y los resultados y finalmente evalúan lo que lograron. Tales evaluaciones finales ayudan a que los escolares piensen sobre el proceso y resultado de aprendizaje, lo cual les permite profundizar en los conocimientos adquiridos y conectarlos con lo que ya sabían. Reflexiones de este tipo aportan a que los procedimientos que se han hecho conscientes puedan ser transferidos con mayor facilidad a otros problemas y son además —y no solo en el caso de fases con un enfoque de proyectos— distintivos centrales de la calidad de una clase.

A continuación, a partir de la tarea "Cajita de jugo", presentaremos cómo se pueden implementar muchas características del enfoque de proyectos mediante la

4 Además de estas características, Gudjon formula las siguientes: relación con una situación (es decir, la tarea surge de la vida real), consideración de los intereses de los participantes, relevancia práctica para la sociedad e interdisciplinariedad. También menciona los límites de los proyectos, por ejemplo que aquello que se aprende en el proyecto se pueda relacionar con una de las áreas y que se puedan sistematizar los conocimientos.

transformación intencional del planteamiento de una tarea (ver también el capítulo 1, página 152). En cada momento se explicitarán las competencias que los escolares pueden adquirir mediante un abordaje orientado hacia los proyectos.

4.3 Un ejemplo de tarea: "Cajita de jugo"[5]

Cajita de jugo

Consigue una cajita de jugo con una cañita pegada, tal como la que se muestra en la imagen.

A partir de este contexto se puede plantear una serie de tareas parciales cuyo desarrollo fomente conocimientos y habilidades básicas, así como también competencias. Las siguientes son posibles tareas parciales:

a) Mide el largo, el ancho y la altura de la cajita. Haz un dibujo en perspectiva a escala.

b) Calcula el volumen de la cajita. Compara con el volumen indicado por el fabricante.

c) Calcula la superficie de la cajita.

d) Si no se tiene cuidado, la cañita se puede deslizar dentro de la caja. ¿A qué se debe esto?

e) ¿Qué cambia, si tomas en cuenta el agujero de la caja? ¿Qué longitud debería tener la cañita para que no se deslice dentro de la caja, en caso que el agujero estuviese en el medio de la caja?

f) ¿Qué problemas surgirían si se pegara una cañita más larga en el empaque? ¿De qué longitud puede ser una cañita recta como máximo?

5 Al usar esta tarea en clase, se debe decidir si se entregará un esquema del modelo. Si se entrega el esquema, entonces el sentido de esta tarea de modelaje cambia y se convierte en una tarea más bien intramatemática.

Al trabajar estas tareas parciales una gran variedad de competencias entra en juego. Los escolares recurren a la competencia Usar representaciones, cuando hacen el dibujo en perspectiva, modelan el volumen y la superficie y trabajan de forma simbólica, técnica y formal. La tarea es especialmente adecuada para las fases de práctica, si se presenta en esta variante.

A partir del análisis de dos soluciones de la **tarea parcial b)**, se mostrará a continuación qué otras competencias y actividades complementarias se pueden fomentar mediante una aplicación de este planteamiento que parta del enfoque de proyectos.

Soluciones de escolares

$V = h \cdot G$

$V = 13{,}5 \cdot (5 \cdot 3{,}5)$

$V = 236{,}25\ cm^3$

En el empaque hay $13{,}75\ cm^3$ menos que lo que se indica

b) $V = a \cdot b \cdot c$

$V = 5 \cdot 3{,}5 \cdot 13{,}5$

$V = 236{,}25\ cm^3$

* En el empaque hay 13,75 cm^3 menos que lo que se indica.

Ambas soluciones de escolares a la **tarea parcial b)** muestran que los escolares disponen de la competencia para el trabajo simbólico, técnico y formal, dado que calculan correctamente el volumen a partir de las medidas. Sin embargo, se reflexiona acerca de volumen de forma distinta. Mientras que en la primera solución —tal como se pide— el volumen se piensa en relación con lo que indica el empaque, en la segunda solución esta comparación queda fuera. En ambos casos falta la reflexión con respecto a la exactitud de los resultados. No se piensa (al menos no de forma evidente), si tiene sentido indicar el volumen (en cm^3) con la exactitud de dos decimales después de la coma, a partir de medidas que están dados en milímetros exactos. Además, falta la relación con las características de la cajita de jugo, que se hincha al llenarse de líquido y por ende contiene los 0,25 l indicados con mayor probabilidad que los 236,35 cm^3 calculados. En general se podría decir que la relación con la realidad no ha sido tomada con suficiente seriedad por los escolares (ver capítulo 4, página 194).

Es más probable que los escolares reflexionen sobre un resultado obtenido si es que este tiene un significado, por ejemplo para el subsiguiente desarrollo de la tarea.

Este es el caso cuando los escolares deben calcular las posibles medidas de la cajita de jugo a partir del volumen dado. Para esto deben verificar diferentes combinaciones de medidas y relacionar los volúmenes calculados con el volumen dado. Las clases con un enfoque de proyectos pueden favorecer tales reflexiones.

4.4 Aplicación de la tarea “Cajita de jugo” desde un enfoque de proyectos

a) La tarea “Cajita de jugo” desde un enfoque de proyectos

Diseña un empaque que contenga aproximadamente 250 ml de jugo. Intenta tener en cuenta aspectos tales como:

- el transporte de los empaques.
- el bajo costo de los materiales.
- una cañita que no se deslice por completo dentro de la caja.

b) El marco de la clase

La implementación en clase de la tarea “Cajita de jugo” desde un enfoque de proyectos puede darse en el marco de una unidad de aprendizaje sobre volúmenes y superficies de cuerpos o en un marco temático más amplio, como por ejemplo con respecto a los ‘empaques’ (una propuesta de este tipo se encuentra en el capítulo 5, página 138). Los métodos de enseñanza se deben elegir de acuerdo con la fase del proyecto. Las formas cooperativas de trabajo (trabajo en pares o grupos) son las más adecuadas; para la presentación de los productos existen diferentes métodos, como por ejemplo el método de expertos, el paseo en el museo[6] o la presentación al pleno. El uso de medios diferentes es ventajoso según el proceso y el resultado de cada una de las fases del proyecto, en especial el uso de modelos, diapositivas, carteles, etc.

c) Fases del proyecto y competencias

A continuación se explicará qué pasos del proyecto y actividades de los escolares se realizan en relación con las cuatro fases del proyecto, así como qué aspectos se

6 Descripciones más detalladas de los métodos nombrados se encuentran por ejemplo en Brauneck *et al.* (1995).

ponen en práctica y qué competencias se activan y fomentan con especial énfasis. En la siguiente presentación se asume que una clase trabaja organizada en varios grupos.

- **Primera fase del proyecto: plantearse una meta**

  Primero se presenta la tarea al plenario, se recogen las primeras propuestas e ideas y se formulan posibles preguntas. Se acuerda cuál será la meta o el tema del proyecto.

- **Segunda fase del proyecto: planificar**

  En esta fase se estructura el procedimiento para la producción de los empaques y se planifican los bocetos de los diferentes modelos de empaque. Para ello puede requerirse que los escolares busquen más información. Durante esta fase del proyecto se hace uso de varias competencias matemáticas. Por un lado está la competencia *Argumentar*, ya que los escolares desarrollan argumentaciones y deben formular las condiciones para lograr el volumen requerido de 250 ml. Para ello pueden trabajar simbólica, técnica y formalmente al calcular volúmenes. Otra competencia es la de *Resolver problemas*, ya que los escolares deben desarmar el problema planteado en problemas parciales y encontrar ideas de solución. Durante la fase de planificación se pueden usar recursos como tablas y bosquejos.

- **Tercera fase del proyecto: implementar**

  En esta tercera fase del proyecto se elaboran en cada grupo los modelos de empaque. Para esto se generan modelos matemáticos de distintos empaques, que pueden tener formas diferentes. Se puede pensar en prismas con bases distintas o en cuerpos que se componen de varios prismas. La reflexión dentro del grupo sobre los resultados puede apoyarse en el dibujo de desarrollos o perspectivas. Ambas formas de representación aportan al análisis, la evaluación y la comparación de las distintas formas de empaque. Elaborar este tipo de representaciones corresponde a la competencia *Usar representaciones.* Además, en esta fase del proyecto se fomenta la competencia *Modelar* con especial énfasis, dado que los escolares traducen en estructuras matemáticas la situación "Diseño de un empaque, que contenga alrededor de 250 ml de jugo" y trabajan luego en el modelo matemático que eligieron (bloque, cubo, cilindro, entre otros). Deben verificar sus resultados continuamente a la luz de la situación dada —esto es central para el modelado— y pensar si es que deben modificar las medidas de los empaques o si están respetando las condiciones formuladas para los empaques (por ejemplo el que se puedan apilar), por nombrar dos ejemplos. Durante este tipo de reflexión dentro del grupo, los escolares obtienen la oportunidad de argumentar, ya que describen y justifican sus caminos de solución.

También se fomenta la competencia *Comunicar*, porque los escolares de un grupo deben presentarse mutuamente y de forma comprensible sus reflexiones, caminos de solución, enfoques. En principio, varias formas de proceder son posibles en esta fase. Puede que se trabajen distintas alternativas de empaque en un grupo pequeño o que se opte por una sola forma, cuya elaboración se realiza mediante la repartición de tareas dentro del grupo. También es posible que un grupo diseñe un empaque, que se compone de varios cuerpos geométricos. Sobre todo en este último caso la cooperación entre los miembros del grupo resulta indispensable y los pasos deben ser estrechamente coordinados. La construcción de un modelo de empaque es la meta de esta fase del proyecto.

- **Cuarta fase del proyecto: evaluar**

  Esta fase final se inicia normalmente con la presentación de los resultados de los grupos. Las reflexiones, que se dieron primero de forma interna en los grupos durante la fase de implementación del proyecto, se pueden profundizar en el plenario. Dado que —como se mencionó anteriormente— se ha trabajado en varios grupos en paralelo, en el plenario se pueden contrastar los enfoques de solución de los grupos, evaluar y reflexionar al respecto. Para ello los escolares utilizarán nuevamente las competencias *Comunicar, Argumentar* y *Utilizar representaciones.* Es posible que en esta fase la clase se decida por uno de los modelos presentados y que, eventualmente, se sugieran algunas mejoras. Como cierre se puede hacer una evaluación del proyecto completo. Para esto se pueden formular preguntas a un nivel 'meta', como por ejemplo "¿Cómo hemos procedido a lo largo del proyecto?", "¿Qué contenidos matemáticos hemos puesto en práctica?", etc. De este modo se aporta a la construcción a largo plazo de competencias (ver capítulo 5).

4.5 ¿Qué cambia mediante un enfoque de proyectos?

Una modificación de la tarea "Cajita de jugo" desde un enfoque de proyectos aporta a perseguir metas distintas a las de la tarea original (ver acápite 4.3).

Así se puede aportar, por un lado, a una activación de los escolares, ya que la tarea "Cajita de jugo" ofrece un mayor énfasis en la resolución de problema cuando se plantea como proyecto. Los escolares pueden experimentar con mayor libertad, ya que el resultado no es accesible *a priori,* sino que debe desarrollarse y obtenerse. A diferencia de una tarea de práctica, ellos no trabajan sobre la pregunta dada, sino que desarrollan una propia y luego la resuelven. Las preguntas que los escolares deben plantearse a sí mismos en el trabajo con el proyecto están dadas cuando se trata una variante cerrada de la tarea. Así como los escolares asumen un papel más activo, el rol del docente también cambia. Él asume con mayor fuerza la posición de un consejero, que apoya o da retroalimentación bajo demanda y que por ende tiene más tiempo para un soporte individual a los escolares.

Además, se ofrecen oportunidades para conectar, pero también posibilidades para fomentar el pensar en relaciones funcionales. Los escolares pueden hacer preguntas como "¿Cómo sería si...?" y pensar bajo qué condiciones son factibles sus ideas. Así se puede hacer un aporte al aprendizaje por descubrimiento, a la flexibilidad cognitiva, a la creatividad, conexión y capacidad de argumentación. También mejoran la concentración y la motivación, lo cual se relaciona con la esperanza de que el contenido de aprendizaje se impregne mejor, y de que se den posibilidades más adecuadas para la construcción sostenible de estructuras cognitivas.

El enfoque de proyectos también puede aportar a la *diferenciación*, dado que los escolares se plantean preguntas a sí mismos y eligen rutinas de solución de forma autónoma. Esto implica a la vez una mayor demanda que la consigna "Calcula el volumen de la cajita de jugo". Este enfoque más abierto puede garantizar las condiciones para la generación de una variedad de soluciones (ver capítulo 2, página 162). Es factible pensar que los escolares diseñen distintos empaques que contengan todos igual volumen, pero que tengan formas diferentes. Una restricción a un empaque en forma de prisma rectangular no es necesaria, sin embargo se debe verificar la practicidad de las diferentes formas de los empaques. La oportunidad y la necesidad de tales reflexiones comparativas se dan casi de forma automática, una vez que los grupos llegan a diferentes resultados. La comunicación y la cooperación entre los escolares se fomentan, de modo que los escolares con menor desempeño reciben apoyo de sus compañeros en las fases de trabajo grupal, en el sentido de hacer un aporte a la diferenciación. A la vez, los escolares de mayor desempeño obtienen la oportunidad de trabajar en preguntas de mayor profundidad y complejidad, por ejemplo al desarrollar formas de empaque más complejas.

No debe dejar de mencionarse que se deben reunir las ideas, en parte divergentes, que surjan de los escolares al trabajar con la tarea modificada. Esto requiere tiempo, también porque el ritmo de trabajo de los grupos varía.

En grupos de aprendizaje de escolares de menor desempeño suele haber (¿con razón?) cierta cautela ante el uso de tareas con mucho texto. La carga de texto de la tarea "Cajita de jugo" surge a partir del alto número de tareas parciales. La reformulación de la tarea desde un enfoque de proyectos implica una clara reducción del texto, dado que la misma meta del proyecto (es decir el producto) se convierte en la tarea. Al trabajarla los escolares hacen uso de la competencia *Comunicar* de tal forma que documentan sus pensamientos, caminos de solución y resultados, los representan de forma clara para sus compañeros y los presentan con un medio de su elección (PowerPoint, afiche, etc.).

La modificación de la tarea original mediante la eliminación y la agrupación de tareas parciales implica un mayor énfasis en metas de proceso. Los escolares usan la competencia *Resolver problemas* con mayor intensidad al trabajar un proyecto, dado que deben descomponer en varios problemas parciales el requerimiento de desarrollar un modelo de empaque adecuado.

El enfoque de proyectos implica, además del proceso descrito, un enfoque de producto. Al trabajo convencional con la tarea se le suman el significado y la forma de los resultados como componentes esenciales. En el caso de una clásica tarea disfrazada el resultado suele tener solo un significado, correcto (adecuado) o incorrecto. En el caso de una tarea desde el enfoque de proyectos la solución tiene un significado real. Así, en la evaluación del desempeño escolar se pueden tener en cuenta otros aspectos distintos, en comparación con la evaluación de otra tarea. La originalidad de una idea, su ejecución y la presentación de un producto pueden jugar un papel.

Todas estas explicaciones no deben conducir a pensar que una tarea solo es 'buena', cuando se plantea desde un enfoque de proyectos o cuando es abierta. Tal como lo propone Helmke (ver Helmke 2004), la pregunta sobre si una modificación de la realización en clase de la tarea "Cajita de jugo" es buena o no solo se puede responder en relación con las preguntas "para qué" (¿Qué metas de aprendizaje? ¿Qué métodos de aprendizaje?), "para quién" (fomento de todos los escolares, en la medida de lo posible - ¿qué métodos?), "medido a partir de qué condiciones de inicio" (composición de la clase), "desde qué perspectiva" (calificación de la calidad de una clase en relación con la perspectiva del evaluador). La respuesta a estas preguntas es responsabilidad del docente que enseña.

Ambas variantes de la tarea tienen su lugar en la clase, pero cada uno de estos tipos de tarea persigue sus propias metas y muestra sus propias fortalezas. Para elegir de forma intencional un tipo de tarea adecuada es necesario considerar el espectro completo de tipos de tarea.

BIBLIOGRAFÍA

Brauneck, P., R. Urbanek y F. Zimmermann (1995). Métodos de recolección, orientaciones y ejemplos para la moderación. En: *Landesinstitut für Schule und Weiterbildung*.

Fröhlich, I. (2001). Matemáticas bien envasadas. *Mathematik Lehren*, Heft 108, S. 61-65.

Gudjons, H. (1997). *Enseñanza y aprendizaje orientados a la acción*. Klinkhardt, Bad Heilbrunn.

Helmke, A. (2004). Calidad de la clase - registrar, evalur, mejorar. *Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung GmbH*, Seelze, 2. Auflage.

Herget, W. (2000): Rechnen können reicht ... eben nicht! En: Mathematik lehren. *Heft* 100, S.4-10.

Ludwig, M. (1998). *Proyectos en las clases de matemáticas en Gimnasio*. Hildesheim: Franzbecker.

5. CONSTRUCCIÓN DE COMPETENCIAS A LARGO PLAZO

Regina Bruder

Objeto de este capítulo son los conceptos y sugerencias para la construcción a largo plazo de competencias durante el año escolar y más allá. Se explicará, mediante ejemplos, cómo se logra un crecimiento en el aprendizaje a partir del trabajo con tareas y cómo el escolar puede tomar conciencia de esto. Además, se abordará la diferenciación y se nombrarán las condiciones de aprendizaje provechosas para la construcción individual de competencias.

5.1 Establecimiento de metas

El propósito de este capítulo es dar sugerencias metodológicas para la construcción a largo plazo de las competencias mencionadas en los estándares de aprendizaje. Para esto se tomará en cuenta el desarrollo de la personalidad individual de los estudiantes de una clase, teniendo como contexto las expectativas de los estándares de aprendizaje y el desarrollo del potencial de cada grupo de aprendizaje. De acuerdo con los estándares de aprendizaje, la construcción de competencias a largo plazo se refiere a lo siguiente:

A partir del perfil de competencias actual e individual del escolar en los diferentes campos matemáticos dentro de un grupo de aprendizaje de un grado en particular, se deben plantear tareas adecuadas para el nivel de desarrollo. A su vez, dichas tareas deben ser también promotoras del desarrollo en unas sesiones de aprendizaje planificadas, que vayan más allá de la unidad de aprendizaje actual. Dichas tareas deben permitir a todos los estudiantes desarrollar sus competencias a lo largo del año escolar y más allá.

Esto implica una exigencia alta con respecto a la competencia diagnóstica del cuerpo docente (ver capítulo 2, página 96). Y se espera que se pongan a disposición —de forma planificada en el largo plazo— entornos de aprendizaje que contemplen niveles de exigencia y fomento individuales en grupos de aprendizaje heterogéneos (Bruder 2000); es decir, que permitan una diferenciación, estimulen los procesos de aprendizaje correspondientes y los acompañen de forma adecuada.

En los capítulos anteriores se explicó, mediante numerosos ejemplos, cómo son las tareas, en clases de matemáticas, mediante las cuales se pueden diagnosticar las competencias en contextos intra y extramatemáticos, y también cómo estas se pueden diseñar. A continuación se dará una mirada a la construcción a modo de espiral de competencias a largo plazo y en red:

- Dentro de un año escolar a lo largo de diferentes temas o ideas directrices[7], es decir, en una conexión horizontal.
- Dentro de una misma idea directriz, pero con conexiones verticales con un enriquecimiento a lo largo de diferentes grados.

Como cierre se abordará cómo es el entorno propicio en clase para la construcción a largo plazo de competencias en los estudiantes.

Hasta el momento, hay pocas investigaciones orientadas a la práctica que den luces sobre las posibilidades de construir las competencias de forma gradual, conectada y sostenible en clase. Nosotros nos concentraremos en los conocimientos que se generaron a partir de los resultados sobre el fomento a largo plazo de la resolución de problemas en relación con el aprendizaje autorregulado (Komorek, Bruder, Schmitz 2004) y que, en principio, se pueden transferir a toda la gama de competencias matemáticas a fomentar.

5.2 Construcción de competencias a lo largo del año lectivo

Para que el escolar sea consciente de la construcción individual de competencias, es decisivo que se aprenda lo máximo posible a partir del trabajo con una tarea o secuencia de tareas. Esto significa que los estudiantes deben tener la oportunidad de aprovechar de forma óptima la situación de aprendizaje, teniendo en cuenta sus posibilidades. Esto se puede entender de varias maneras. Por un lado, los estudiantes adquieren de forma progresiva nuevos conocimientos sobre conceptos, relaciones y procedimientos matemáticos que los ayudarán a lidiar de forma adecuada con fenómenos intra y extramatemáticos y a interpretar y presentar los resultados. Por otro, se trata del aprendizaje sostenible de estrategias apropiadas que sirvan de apoyo a las competencias referidas al proceso. A continuación se presentarán ambos aspectos en mayor detalle. Para esto se requieren entornos de aprendizaje que fomenten progresos individuales y diferenciados de aprendizaje y su reflexión, que se pueden establecer mediante formatos de tareas apropiados. Sin embargo, el progreso de aprendizaje individual no se debería limitar a las competencias exigidas por los estándares de aprendizaje.

7 Nota de la editora: Las ideas directrices adoptadas por los estándares de aprendizaje de matemáticas alemanes son: Número, *Medir, Espacio y forma, Relación funcional, Datos y azar* (KMK 2003).

5.2.1 Destacar de manera explícita la ganancia de aprendizaje en el trabajo con una tarea

Después de que se intentó resolver una tarea —por ejemplo, primero de forma individual, luego en el intercambio con un compañero, y finalmente, en la comparación con el grupo o la clase— y existen resultados, así como (distintos) caminos de solución, se debe destacar de forma explícita en qué consiste la ganancia de aprendizaje de dicha tarea. Con esto debe quedar claro que el potencial de aprendizaje de una tarea no surte efecto en clase de forma automática, sino que requiere siempre una explicitación metódica. No se logrará el crecimiento potencial en conocimientos o cierta sostenibilidad de la experiencia de resolver la tarea si solo se solucionan grupos de tareas o se entrena en la resolución de tareas de evaluación. Sobre todo en el caso de tareas complejas, no basta con comparar los resultados del trabajo individual o grupal. Se trata más bien de reconocer y destacar explícitamente el *patrón de matematización*[8] en los conceptos, relaciones y procedimientos matemáticos en el contexto de aplicación correspondiente.

La reflexión sobre el uso de elementos de conocimiento matemático, por ejemplo mediante la generalización de la pregunta (ver el ejemplo “Bombones”, **tarea parcial a)**, ofrece la posibilidad de transferir autónomamente dichos elementos del conocimiento a situaciones análogas de aplicación.

Con respecto al segundo aspecto, para una construcción de competencias a largo plazo es indispensable destacar de forma explícita algunas estrategias heurísticas, como la descomposición de un fenómeno complejo en partes conocidas con las que se puede lidiar, por ejemplo, al calcular el área de un polígono o el volumen de un cuerpo geométrico compuesto (ver tarea “Empaque”, capítulo 1, página 27), y hacer consciente su alcance y transferibilidad a otros contextos de aplicación. Es este conocimiento sobre estrategias apropiadas —que, si bien no garantiza el encontrar una solución, sí muestra en qué direcciones se puede pensar y sirve de orientación cuando la demanda es alta— el que ayuda a flexibilizar los caminos de solución, fomenta la comprensión de relaciones matemáticas y da soporte a las capacidades de aplicación.

Las *reflexiones guiadas* sobre la forma de proceder en clase después de haber trabajado una tarea son una condición necesaria para que la mayor cantidad posible

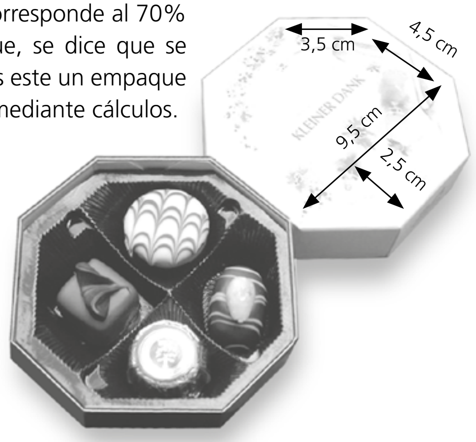
8 Un elemento cognoscitivo —como un concepto, teorema o procedimiento matemático— se convierte en un patrón de matematización cuando el estudiante puede comprobar la relación entre la aplicación concreta y el concepto general.

de estudiantes alcance de forma progresiva un mayor nivel de exigencia en su perfil de competencias. En el ejemplo que presentamos a continuación se muestra cómo se ve esto concretamente.

Bombones

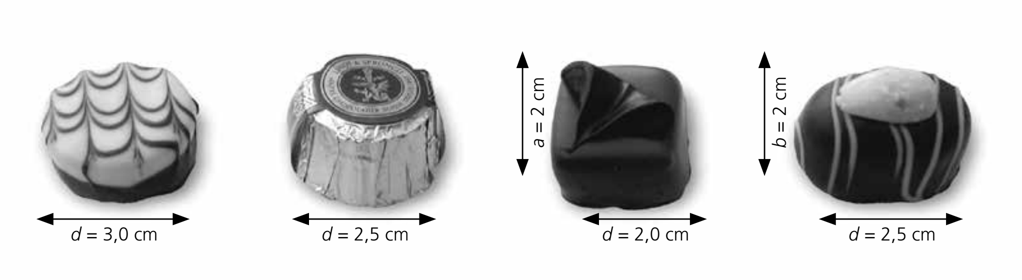
a) Estima el volumen de esta caja y describe tu procedimiento.

b) Cuando el volumen del contenido corresponde al 70% (o menos) del volumen del empaque, se dice que se trata de un ‘empaque engañoso’. ¿Es este un empaque engañoso? Fundamenta tu opinión mediante cálculos.



Tarea parcial a). En tareas como esta, en las que se trata de manejar con flexibilidad conocimientos sobre figuras e ideas de magnitudes, se requieren primero supuestos apropiados y comparaciones de magnitudes. Si uno tiene una idea de lo que mide un bombón aproximadamente, entonces puede imaginar la caja llena de bombones y así estimar *grosso modo* su contenido. O uno se puede acercar a la caja mediante un prisma. Entonces, existen diferentes posibilidades sensatas de llegar a una estimación del volumen (idea directriz: *Medir*; competencias: *Modelar* y *Comunicar*; ámbito de exigencia: II).

Tarea parcial b). Para esta parte de la tarea se necesitan medidas concretas, que pueden obtenerse a partir de objetos reales en clase o indicarse en una hoja. Si las medidas de los bombones están dadas —como en el segundo dibujo de la página 139—, entonces un patrón de matematización es más evidente (prisma o cilindro para los bombones y la descomposición del área de la caja). En el otro caso, tiene que pensarse primero cómo se podría matematizar, para poder identificar qué medidas se necesitan. Por consiguiente, el potencial de aprendizaje de ambas variaciones de la tarea es muy distinto.



Clasificación, cuando las medidas de los bombones están dadas; idea directriz: *Medir*; competencias: sobre todo, *Modelar, Usar representaciones* y *Manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas*; ámbito de exigencia: II.

Clasificación, cuando las medidas de los bombones no están dadas; idea directriz: *Medir*; competencias: *Resolver problemas, Modelar, Usar representaciones y Manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas*; ámbito de exigencia: III.

Independientemente de qué forma de organización se elija para presentar o comparar los caminos de solución y los resultados, al final de un trabajo con una tarea tan compleja debe formularse la siguiente pregunta: *¿qué nos ha ayudado a resolver el problema?*

Se esperan dos direcciones en las respuestas a esta pregunta: por un lado, respecto de las herramientas matemáticas o elementos de conocimiento que se han utilizado (conceptos, relaciones, procedimientos), y por otro, con relación a las ayudas heurísticas usadas (figura informativa, tabla, ecuación) y estrategias o principios como trabajar hacia adelante o hacia atrás, principio de la analogía, principio de la descomposición, etcétera (Bruder 2000b).

En la reflexión sobre la tarea "Bombones", **tarea parcial a)**, se debe destacar que se puede trasladar a situaciones similares. Cuando se debe estimar el volumen de un cuerpo cuyas medidas exactas no están disponibles, entonces ayuda el siguiente procedimiento: buscar medidas comparativas conocidas (idea de medir) y aproximación mediante cuerpos geométricos, que son fáciles de calcular (basarse en lo conocido).

El principio de basarse en lo conocido también resulta útil al trabajar la **tarea parcial b)**: para un cálculo exacto del volumen se puede concebir la caja como un prisma con un octágono como área base y asumir que se trata de un octágono regular, o se puede proceder de forma aún más precisa a partir del principio de la descomposición y dividir el área base, por ejemplo, en un rectángulo y dos trapecios de igual medida.

La ganancia de aprendizaje individual a partir del trabajo con una tarea así puede ser diferente. Sin embargo, para que la mayoría de los estudiantes viva de forma consciente el potencial que tiene esta tarea, se pueden discutir las siguientes preguntas al final del trabajo: ¿Qué estrategias resultaron útiles? ¿Qué herramientas matemáticas nos ayudaron a resolver la tarea? Tales fases cortas de reflexión requieren una orientación clara y el apoyo del docente y no pueden dejarse en manos del escolar sin que haya habido una experiencia a largo plazo, de modo que el estudiante esté habituado a ellas. Aun así, la meta es que aprendan a responder y a plantearse estas preguntas por sí mismos.

La siguiente pregunta también abre la posibilidad de que el potencial de aprendizaje de las tareas planteadas sea vivenciado de forma consciente por cada escolar particular.

Esta pregunta se puede hacer incluso al final de una primera fase de práctica: *¿qué tienen en común todas las tareas de ejemplo que acabamos de trabajar?*

Ejemplos de las respuestas que dan los estudiantes:

- En todas las tareas se podía calcular usando el teorema de Tales, porque siempre se pedían segmentos en paralelas intersectadas.
- Se trataba siempre de pirámides o partes de ellas.
- Siempre se trataba de calcular alguna distancia, pero había distintas formas de hacerlo.

¿En qué se diferencian las tareas entre sí?

Ejemplos de las respuestas que dan los estudiantes:

- En algunas tareas se tenía que trabajar hacia atrás, porque te pedían aquello que normalmente siempre te dan.
- Los cálculos se hacían cada vez más difíciles. A pesar de que el texto cambiaba cada vez, el camino de solución era siempre el mismo.

También se puede requerir que los estudiantes hagan este tipo de comparaciones como parte de la tarea para la casa o en el contexto de un diario de aprendizaje. Requieren poco tiempo para trabajarse y la comparación de los resultados, pero fomentan que se dé una mirada a lo esencial que se debe aprender en clase y apoyan las conexiones.

Asimismo, se ha demostrado como valioso que los estudiantes se acostumbren progresivamente a dar un paso atrás mentalmente frente a un problema y a responder las siguientes preguntas:

- ¿De qué trata esta tarea?
- ¿Qué cosas ya sé en relación con este problema?
- ¿Qué métodos y técnicas tengo a disposición?

Así se cierra el círculo de reflexión sobre el procedimiento al final del trabajo con una tarea (Bruder 2002). Si al terminar el trabajo complejo con una tarea se consigue filtrar qué herramientas y estrategias matemáticas fueron útiles, entonces se pueden retomar estas experiencias explícitas en el trabajo con una nueva tarea. De esta forma se construye a largo plazo —y a partir de la experiencia de resolución de problemas— un almacenador de conocimiento y un perfil de competencias que puede usarse de forma flexible. Con ello surge un efecto psicológico secundario: el que aprende ya no se siente tan desvalido frente a un nuevo problema, incluso si las estrategias heurísticas no son garantía de llegar a una solución. Sin embargo, estas indican caminos que se pueden probar.

5.2.2 Apoyar los avances de aprendizaje individuales

En clase, y en las tareas en casa, se suele presentar el problema de que, en tareas cerradas que requieren varios pasos parciales, la valla para empezar es muy alta para estudiantes con un débil desempeño. Por otro lado, en algunos casos los estudiantes con un alto desempeño se sienten subexigidos por la misma tarea. Para que todos los estudiantes puedan lograr los avances de aprendizaje alcanzables para ellos en el momento actual y en los distintos ámbitos de competencias, es necesario diseñar entornos de aprendizaje flexibles, con posibilidades de elección y construcción adecuadas para los estudiantes.

Para esto resultan interesantes las tareas complejas, con tareas parciales graduadas según la dificultad. Las tareas abiertas —especialmente aquellas de varios pasos—

en las que 'florecen' nuevas tareas con final abierto a partir de una tarea cerrada elemental, son apropiadas para procesos de práctica debido a su autodiferenciación y también sirven para tests (estandarizados), con cierta limitación debido a la apertura de los resultados. La autodiferenciación se refiere a lo siguiente: la valla de inicio es tan baja que la mayoría de los estudiantes debería poder resolver la primera tarea de manera autónoma. Con eso se logra una condición importante desde el aspecto motivacional para continuar abordando más tareas parciales. Los estudiantes avanzarán distinto en un tiempo de trabajo dado y por lo general no podrán resolver con éxito todas las tareas parciales. Pero esa tampoco es la meta. Sin embargo, con el formato descrito —que es adecuado sobre todo para la fase de práctica (ver también capítulo 3, página 113)— habremos dado a todos los estudiantes la oportunidad de desarrollar su límite actual de desempeño.

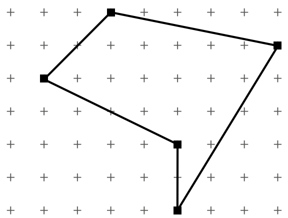
Sin embargo, para un desarrollo de competencias a largo plazo se debe tener en cuenta que, en las primeras tareas parciales —especialmente en las más sencillas de una 'tarea flor'—, se alternen las competencias requeridas, porque de lo contrario se fomenta un desarrollo unidireccional de la competencia *Manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas.* La siguiente tarea tiene esta naturaleza diferenciadora, ya que presenta tareas parciales graduadas en dificultad.

Polígonos de grilla

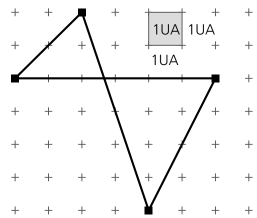
A veces, en clases de geometría, se utiliza papel con puntos dibujados a una distancia uniforme, lo que facilita el dibujo. Los puntos de la grilla están a una distancia de una unidad de longitud (1 UL), tanto horizontal como verticalmente. Para el área se asume una unidad (1 UA) de un cuadrado de longitud = 1.

Sobre esta grilla se pueden dibujar polígonos. Todas las esquinas de dichos polígonos se encuentran sobre puntos de la grilla. Los lados no deben cortarse. Los puntos de los polígonos se deben llamar puntos borde, y los puntos de la grilla que quedan dentro de la figura se deben llamar puntos internos.

Ejemplo de un polígono de grilla



Esto no es un polígono de grilla

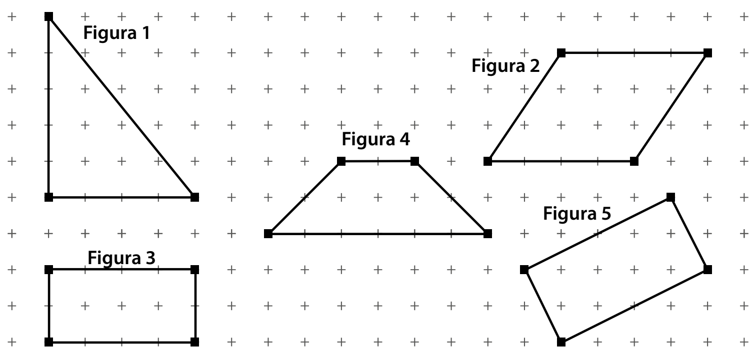


a) Determina la cantidad i de puntos internos y la cantidad r de puntos borde en el ejemplo del pentágono.

b) Examina si los polígonos que tienen el mismo perímetro también tienen igual área.

c) Dibuja cinco polígonos lo más diferentes que sea posible y que tengan solo un punto interno. Determina el área de cada figura. ¿Cuál es la relación entre el área A y el número *r* de puntos de borde en estos polígonos?

d) Determina el área A, la cantidad *r* de puntos borde y la cantidad *i* de puntos internos en cada una de las cinco figuras ilustradas a continuación. Halla una fórmula, mediante la cual se puede calcular el área A a partir de *r* e *i*. Confirma tu suposición en cinco polígonos de grilla.



La **tarea parcial a)** permite una entrada sencilla, que ofrece la oportunidad de familiarizarse con un fenómeno poco usual. En la **tarea parcial b)** ya se trata de una exploración libre en el mundo de los polígonos enrejados, sin que se proponga una estrategia para proceder.

Según la situación de la clase y cuán habituado esté el grupo a tareas abiertas, podría considerarse la posibilidad de que en la **tarea parcial b)** los estudiantes busquen regularidades en el perímetro y el área de los polígonos enrejados, y de que formulen preguntas adecuadas por sí mismos que puedan examinarse en los polígonos. Tal como se ha formulado la tarea, esta pertenece a la idea directriz *Medir* y permite el desarrollo de las competencias *Resolver problemas y Manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas* en el ámbito de exigencia III.

Esta tarea tiene, además, el potencial de fomentar la competencia *Argumentar*, por ejemplo cuando se tematizan las diferentes aproximaciones en la **tarea parcial b)**; entre otros, la búsqueda consciente de un ejemplo contrario como una posible estrategia.

La posibilidad de fomentar competencias —que es un potencial de la tarea— recién hará un aporte al desarrollo del perfil de competencias individual del escolar si el crecimiento en aprendizaje se tematiza y reflexiona con ayuda del docente. La tarea, con sus gradientes, ofrece muchas posibilidades de conectar y complejizar para los estudiantes en todos los grupos de desempeño.

Las preguntas creativas, con resultados abiertos y elementos comunicativos —es decir, preguntas que no suelen aparecer en un test— son un elemento fundamental con el cual los estudiantes pueden aprender a moverse de forma flexible en un tema, de modo que luego, en una situación de evaluación más cerrada, puedan actuar sin bloquearse. De este modo, se hace un aporte fundamental a la construcción individual y a largo plazo de competencias.

5.3 Construcción de competencias durante varios grados

Las tareas “Bombones” y “Polígonos de enrejado” iluminan diferentes aspectos dentro de la idea directriz *Medir*; sin embargo, se asientan de forma horizontal con respecto al perfil de competencias, dado que no se aprenden ni practican nuevos elementos de conocimiento matemático, sino más bien se hace referencia a estrategias generales.

La siguiente tarea —que también pertenece a la idea directriz *Medir*— muestra cómo se puede retomar el mismo contexto en diferentes grados, para permitir y hacer consciente un crecimiento vertical del conocimiento y de las competencias *Resolver problemas* y *Modelar.*

Mediante el aprendizaje de nuevos conceptos, relaciones y procedimientos matemáticos se amplía el repertorio de los estudiantes con respecto a patrones de matematización a lo largo de varios grados.

5.3.1 Desarrollo de competencias en combinación con crecimiento de conocimiento

La siguiente tarea, "Alturas" (para estimar la altura del farol), es un ejemplo de cómo se definen distancias entre puntos parcialmente inaccesibles. Contextos similares son, por ejemplo, determinar el ancho de un río en un lugar dado, calcular la altura de un árbol o edificio, entre otros. Para este tipo de preguntas son adecuados los siguientes patrones de matematización, que se aprenden progresivamente a lo largo de varios años de la escolaridad: diferentes características de los triángulos —como por ejemplo el que sean isósceles— pueden ayudar a determinar el ancho de un río. Solo se tiene que caminar por la orilla hasta que al otro lado se pueda observar un punto previamente determinado con un ángulo de 45°. En tales condiciones, el ancho del río y el camino recorrido en la orilla son catetos de un triángulo rectángulo isósceles. Este camino de solución ya se puede implementar en 5° o 6° grado, si se conocen los ángulos y cómo medirlos.

Otros patrones de matematización con respecto a las distancias, más típicos de los grados superiores, son opciones de cálculo en triángulos rectángulos (teoremas de Pitágoras, funciones trigonométricas), y finalmente, también en triángulos en general (teoremas de Tales, teorema de seno).

De esta manera, se enriquece a lo largo de los años de escuela el repertorio de herramientas matemáticas para modelar y resolver problemas sobre distancias. Pero aquí también es importante hacer que este crecimiento en el aprendizaje sea transparente. Esto se logra al hacer que el problema de aplicación —en este caso, determinar la distancia entre puntos parcialmente inaccesibles— sea centro de las reflexiones de conexión. Estas conexiones que fortalecen las competencias se dan cuando se combinan diferentes herramientas o elementos de conocimiento matemáticos, que son adecuados para trabajar un problema aplicado general. También se pueden considerar las consecuencias del uso de distintas ayudas.

Las tareas mediante las cuales los estudiantes se apropian de forma autónoma de un procedimiento de solución son especialmente valiosas para que ellos vivan de forma consciente un crecimiento en su aprendizaje de los patrones de matematización.

Con ello queda claro de qué tipo de crecimiento en aprendizaje se trata y cuál es la conexión con el conocimiento que se tenía hasta el momento sobre el problema de aplicación.

Alturas

a) Primero, estima la altura del farol. Luego, desarrolla un método de cálculo para determinar su altura. Basta con un resultado que sea exacto en decímetros.

b) Otro procedimiento matemático para determinar la altura es el 'método del leñador' que se describe aquí (citado de www.wdrmaus.de/sachgeschichten/baumhoehe_messen).

En el 'método del leñador', uno se coloca a una distancia del árbol de modo que, si se estira el brazo y se cierra un ojo, la punta del pulgar coincida con la punta del árbol y el meñique coincida con su raíz. Se marca ese lugar.

Luego, se voltea la mano hacia la izquierda de modo que la punta del pulgar señale la pradera. Uno debe memorizar este segundo lugar que señala la punta del pulgar, acercarse y marcarlo.

Christoph marca con un palo el lugar que memorizó y luego regresa al punto de partida. Ahí vuelve a medir: ¡Sí! ¡El palo marca exactamente la posición de la punta de mi pulgar sobre la pradera!

Christoph camina con pasos largos desde el palo hasta el tronco del árbol. Al hacerlo, él cuenta sus pasos. Cada paso mide alrededor de 1 metro.

Christoph ha contado 20 pasos; es decir, 20 metros. Según esta medición, el árbol mide alrededor de 20 metros de altura.

Explica cómo se puede fundamentar matemáticamente este método y usa el 'método del leñador' con tus compañeros con objetos en el patio del colegio.

De manera similar a la tarea “Bombones” del acápite 5.2.1, la entrada a esta tarea también es una estimación. Las estrategias —de las que los estudiantes han sido conscientes al trabajar, por ejemplo, con la caja de bombones— ya se deberían haber interiorizado y probado en tareas análogas en cada grado, de modo que puedan ser utilizadas de forma consciente o no en la tarea actual.

La **tarea parcial a)** de “Alturas” demanda la competencia *Modelar* en un ámbito de exigencia II.

Incluso los estudiantes de 5.º grado pueden estimar la altura del farol. Ellos reconocen que la varilla de medición que la persona sostiene en la mano mide aproximadamente 2 metros de largo y que cabe alrededor de tres veces en el farol. De esto resulta una altura estimada de 6 metros.

Para desarrollar un método de cálculo y determinar la altura, los estudiantes deben disponer de conocimientos sobre el teorema de Tales (noveno grado). La **tarea parcial b)** demanda la capacidad de comprobar si el procedimiento presentado es veraz y matemáticamente correcto, así como describirlo. En este caso, el foco radica en la competencia *Argumentar* en un ámbito de exigencia III, pero también se requiere la competencia *Comunicar* en el ámbito de exigencia II, dado que se debe comprender, trabajar y presentar un procedimiento que consta de varios pasos.

Las soluciones que dan los estudiantes a esta tarea muestran que las explicaciones del ‘método del leñador’ suelen estar en un lenguaje coloquial y sin matematización. Esto no debe sorprender si los estudiantes no han tenido la oportunidad de aprender y practicar, a partir de ejemplos adecuados, cómo se argumenta matemáticamente y qué expectativas se tiene con respecto al uso del lenguaje y a formulaciones lógicas.

Justamente a eso se refiere una construcción de competencias en el largo plazo: antes de que se empiecen a evaluar las competencias, debe haber oportunidades de aprendizaje libres de valoración, de modo que los estudiantes puedan construir las competencias en situaciones reales, hacerse conscientes de ellas y reflexionar al respecto.

La tarea “Alturas” es poco apropiada como introducción a la argumentación matemática. Esto debe suceder mucho antes y en situaciones menos complejas. La tarea “Polígonos en enrejado”, por el contrario, presenta muchas oportunidades adecuadas.

Una reflexión de cierre de esta tarea ofrece gran potencial para continuar desarrollando las competencias *Modelar* y *Argumentar,* así como para tomar conciencia y sistematizar conceptos y relaciones matemáticas como patrones de matematización. Las siguientes preguntas pueden servir de apoyo hasta que se llegue a una transferencia a la práctica:

- Piensa en dos situaciones reales distintas en las cuales sería necesario o interesante determinar la distancia entre dos puntos, de los cuales al menos uno no es accesible.
- Intenta encontrar la mayor cantidad posible de procedimientos matemáticos que podrían ayudarte en un problema de este tipo. Haz una correspondencia entre las situaciones y los procedimientos apropiados.
- Fundamenta por qué los antiguos barcos a vela tenían una atalaya en el mástil principal. ¿Cuán lejos se puede ver desde una atalaya a 20 metros de altura en comparación con una baranda de 3 metros?

De esta forma queda claro cuál es el *marco de orientación para una construcción de las competencias a largo plazo*: primero se requieren ofertas de aprendizaje, con las que se sienta una especie de fundamento basado en conocimientos necesario para el consiguiente desarrollo de competencias. Los estudiantes obtienen la oportunidad de realizar, en un campo temático de las matemáticas, las actividades que se indican en los ámbitos de exigencia de cada competencia. No todas las competencias se exigirán y fomentarán en todas las clases. Luego se amplía el contexto: las competencias que se encuentran en desarrollo se exigen y fomentan en el marco de otra idea directriz. Finalmente, se da un aumento de la dificultad que genera una diferenciación dentro de la misma idea directriz, mediante un enriquecimiento con nuevos conocimientos matemáticos y la consideración progresiva de los tres ámbitos de exigencia.

5.3.2 Desarrollo de competencias a partir de las sistematizaciones

Las *sistematizaciones* —en relación con las ideas directrices— son un elemento didáctico importante para fomentar la transparencia en cuanto a las metas y el desarrollo de las competencias. Diseñar 'mapas mentales' también sirve de apoyo esencial para las sistematizaciones.

Al final del 10.º grado se puede hacer, por ejemplo, una sistematización con la meta de que se asuma consciencia sobre el recurso heurístico de visualización 'triángulo' en diferentes contextos, de modo que se pueda aumentar el potencial de transferencia de este recurso para el *Modelar* y el *Resolver problemas*. Como gancho para una sistematización de este tipo sirven las examinaciones que permiten una síntesis en un nivel meta con respecto a cálculos de distancia con recursos trigonométricos en décimo grado.

Sistematización de triángulos

a) ¿Cómo se pueden clasificar los triángulos según sus diferentes características y qué preguntas matemáticas podrían resultar interesantes en dicho contexto?

b) ¿Qué tipos de triángulos se puede encontrar el mundo real?

Ejemplos de respuestas de estudiantes con respecto a la **tarea parcial b)**:

Solución de un escolar

En el mundo real encontramos triángulos:

- Al calcular distancias o alturas.
- Como triángulos de apoyo en cuerpos (por ejemplo pirámides).
- Al descomponer figuras complicadas (áreas).
- Como triángulos de la elevación de funciones lineales (tasas de cambio locales).

En el mundo real encontramos triángulos:

- al calcular distancias o alturas
- como triángulos de apoyo en cuerpos (por ejemplo pirámides)
- al descomponer figuras complicadas (áreas)
- como triángulos de la elevación de funciones lineales (tasas de cambio locales)

Aquí es claro, nuevamente, cómo se ve la conexión entre componentes de conocimiento matemático desde una perspectiva de aplicación. Los triángulos rectángulos son un elemento central de la matematización en el sentido de recurso heurístico y los patrones de matematización son, por ejemplo, los teoremas de Pitágoras, el teorema de Tales, las construcciones a escala o las funciones trigonométricas, si se tienen que determinar longitudes. En el proceso de aprendizaje, cada procedimiento matemático trabajado por primera vez en clase debería ser dotado de una especie de 'marca de reconocimiento', para apoyar su capacidad de uso flexible. Si se logra cambiar de perspectiva de una sistemática de contenidos a una sistemática de uso, entonces esto será la expresión de un desarrollo de las competencias avanzado.

En resumen, se puede decir que la construcción de competencias a largo plazo dentro de un año escolar y a través de los años requiere tareas específicas que generen actividad cognitiva, que contengan elementos abiertos —es decir, potencial diferenciado—, que estimulen de forma dirigida las reflexiones sobre contenidos y estrategias de las matemáticas, que apoyen el aprendizaje de nuevos elementos de conocimiento matemático, y que ofrezcan oportunidades para sistematizar y conectar.

5.4 Condiciones de aprendizaje para una construcción de las competencias a largo plazo

Las experiencias de docentes exitosos y sus estudiantes, así como los resultados de diferentes estudios (Helmke & Hosenfeld 2004a, Helmke 2004b, Leuders 2001, Gudjons 2004), respaldan las siguientes características de clases efectivas, que van más allá de las demandas que ya se mencionaron y sirven sobre todo para una construcción de competencias a largo plazo (ver capítulo 1, página 29):

- Transparencia con respecto a las metas de las clases de matemáticas, tanto para los estudiantes como para sus papás, con información clara sobre las expectativas de desempeño.
- Estructura clara de las clases en relación con los contenidos a aprender, con elementos de reflexión para describir el estado actual de aprendizaje.
- Oportunidades para la autoevaluación de los estudiantes y para asumir progresivamente la responsabilidad de cubrir los vacíos en el conocimiento base (aprendizaje autorregulado y aseguramiento del nivel inicial). Ver también Bruder, Barzel & Hilgers 2006.
- Uso efectivo del tiempo de aprendizaje con un manejo de la clase profesional. Ver Schrader & Helmke 2004.
- Activación cognitiva en clase con cambios funcionales de las formas sociales y de trabajo.
- Clima de aula positivo, con una atmósfera de trabajo propicia para el aprendizaje, tanto para estudiantes con bajo rendimiento como para aquellos con alto rendimiento, con una cultura de conversación y *feedback*.

Con estas demandas al diseño de la clase, que se enfocan en lograr un manejo flexible de una gran variedad de tareas, los docentes exitosos comprenden su rol como el de un diseñador creativo de entornos de aprendizaje y como moderadores de los procesos de aprendizaje más diversos. Es tarea de las escuelas desarrollar y fomentar esta comprensión del rol docente.

Junto a los aspectos que ya se han discutido con respecto a un desarrollo de competencias duradero, existen otros que aquí solo se pueden mencionar brevemente (ver Bruder 2001a y capítulo 1, página 81):

- Los entornos de aprendizaje que ayudan a comprender un nuevo tema deberían respaldarse en una planificación a largo plazo del trabajo, que garanticen un hilo conductor en el nuevo ámbito.
- Las tareas para la casa tienen un gran potencial para el aprendizaje individualizado y para que los estudiantes asuman mayor responsabilidad sobre su propio aprendizaje, si es que se ofrecen los formatos de tareas correspondientes y se proporcionan opciones para elegir.
- Los entornos de aprendizaje pensados para la práctica productiva y la aplicación compleja requieren también elementos que aseguren la disponibilidad de conocimientos base (ver también capítulo 3, página 113).

Para terminar, se presenta un ejemplo de un ejercicio de cálculo mental que abarca muchos temas y toma diez minutos, incluyendo la autoverificación. Se trata de un método muy económico en cuanto al tiempo de trabajo y que aporta resultados sostenibles. Se pide a los estudiantes que solo anoten sus resultados; ellos resuelven la tarea en su cabeza:

Ejercicios mentales

a) Calcula el cuadrado de 16.

b) Resuelve los paréntesis $2(a - 3b)^2$.

c) Resuelve la ecuación: $3x - 5 = 1$.

d) Haz una aproximación de cuánto mide el perímetro de un círculo que tienen 15 cm de diámetro.

e) Escribe como expresión algebraica: el triple de un número al que se le ha restado 5.

f) Anota las coordenadas de un punto que tú mismo elijas en el tercer cuadrante del sistema de coordenadas.

g) ¿Qué relación existe entre un ángulo circunferencial y el ángulo central en el círculo? Dibuja un pictograma.

h) En un plano con una escala de 1: 200 000, se miden 4 cm entre dos lugares. ¿Cuál es la distancia real?

i) ¿Qué longitud pueden tener los lados de un rectángulo de área 30 cm^2? Da tres posibilidades.

j) Un banco ofrece la opción de invertir a partir de EUR 5 000 con una tasa de interés de 4%. ¿Cuál sería el interés al final del año, si yo hubiera depositado EUR 6 000 al inicio del siguiente mes?

Al calificar los resultados, se puede identificar cuántos estudiantes comenten menos errores que en la semana anterior frente a tareas similares. Se ponen a disposición oportunidades para un aprendizaje individual voluntario que permita cubrir algunos vacíos, por ejemplo, mediante hojas de trabajo para temas específicos. De esta forma se fortalece el asumir la responsabilidad por el propio aprendizaje. Esto también permite descargar el tiempo en clase de repeticiones poco productivas e indiferenciadas.

Las oportunidades regulares para repasar y asegurar el nivel básico, el trabajo con un ‘almacenador de conocimientos’ y con recursos que ayudan a calcular, los protocolos de aprendizaje ocasionales para fomentar la reflexión sobre la comprensión y el diario de aprendizaje son elementos didácticos de un diseño de clases moderno y orientado hacia las competencias (Bruder 2001b). Estos métodos vinculados con el aprendizaje se pueden unir de manera efectiva con la variedad de tareas puestas a disposición con motivo de los estándares de aprendizaje, de modo que se respalde una construcción de competencias en el largo plazo (Bruder 2000c).

BIBLIOGRAFÍA

Bruder, R. (1998). Modelamiento de un currículo matemático. *Mathematische Bildung und neue Technologien. Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik*. Vorträge beim 8. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik, Universität Klagenfurt, 28.9.-2.10.1998, S. 53-60.

Bruder, R. (2000a). Trabajar con tareas. *Mathematik Lehren* 101, S. 12–17.

Bruder, R. (2000a). Tareas enfatizadas y procedimientos heurísticos - Caminos para una sesión de aprendizaje exigente para todos. En: Herget & Flade, *Mathematik Lehren und Lernen Nach TIMSS: Anregungen für die Sekundarstufen*. Berlín: Volk und Wissen, S. 69-78.

Bruder, R. (2000c). Conceptos para una sesión de aprendizaje integral. *Mathematik Lehren* 101, S. 411.

Bruder, R. (2001a). Comprender números, figuras y estructuras. En: Heymann, H. W. (Hrsg.), *Basiskompetenzen vermitteln*. Pädagogik 53, Heft 4, S. 18-22.

Bruder, R. (2001b). Aprender y retener las matemáticas. En: Heymann, H. W. (Hrsg.), *Lernergebnisse sichern*. Pädagogik 53, Heft 10, S. 15-18.

Bruder, R. (2002). Aprender a plantear preguntas adecuadas. Heurística en las clases de matemáticas. *Mathematik Lehren* 115, S. 4-8.

Bruder, R., B. Barzel y A. Hilgers (editores) (2006): *Fichero de aprendizaje matemático. Mathematik*. Seelze: Friedrich Verlag.

Gudjons, H. (2004). Siete características de sesiones de aprendizaje efectivas. *Praxis Schule* 510, Heft 3/2004, S. 9.

Helmke, A. e I./Hosenfeld (2004a). Estándares de aprendizaje y calidad de enseñanza. *Pädagogische Führung*, Heft 4/2004, S. 173-176.

Helmke, A. (2004b). *Calidad de la enseñanza: Captar, evaluar, mejorar* (3. Aufl.). Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Komorek, E., R. Bruder y B. Schmitz (2004). Integración de conceptos de entrenamiento para la resolución de problemas y autorregulación en las clases de matemáticas. En: Doll, J. y M. Prenzel (Hrsg.), *Schulische und außerschulische Ansätze zur Verbesserung der Bildungsqualität*. Münster: Waxmann, S. 54-76.

Leuders, T. (2001). *Calidad en las clases de matemáticas*. Berlín: Cornelsen Verlag Scriptor.

Schrader, F.W. y A. Helmke (2004). Markus y cols.: Resultados centrales del estudio de recepción Walzer y su significado para la investigación de la evaluación y la gestión de calidad. En: Jäger, R.; S. Frey; A. Wosnitza; M. (Hrsg.,: *Lernprozesse, Lernumgebung und Lerndiagnostik. Wissenschaftliche Beiträge zum Lernen im 21*. Jahrhundert (S. 413-427). Landau: Verlag Empirische Pädagogik.

PARTE 3

TAREAS DE MATEMÁTICAS ORIENTADAS AL DESARROLLO DE COMPETENCIAS

1. VARIACIÓN DE LAS TAREAS

Hans Schupp

Sin lugar a dudas, el trabajo con muchas tareas del mismo tipo tiene como resultado la 'cosecha de plantaciones de tareas', es decir, un resultado de aprendizaje ostensible y de corta duración. Aquel que ya puede hacerlo se aburre; aquel que no puede, solo aprende como máximo una técnica aislada sin una comprensión de su trasfondo y sentido. Sobre todo, falta el tiempo para trabajar intensivamente en tareas individuales especialmente seleccionadas que permitirán construir competencias importantes. Para esto existen posibilidades comprobadas, como:

- *el rastreo y la comparación de diferentes caminos de solución (ver Blum y cols., 2010; capítulo 2, página 162)*
- *la extracción y generalización de* métodos y estrategias que se han usado de forma implícita (ib. cit., capítulo 5, *página 135)*
- *el rastreo, análisis y corrección de errores típicos de los estudiantes (ib. cit., capítulo 2, página 96)*
- *la reflexión sobre el sentido de cada tarea, es decir, sobre el progreso de aprendizaje (ib. cit., capítulo 5)*

En este capítulo se presentará otro enfoque menos conocido: el variar juntos una tarea después de haberla resuelto y el trabajar con las variantes encontradas. Esto se explicará a partir de dos ejemplos muy diferentes: el primero es de tipo intramatemático y el segundo es la tradicional tarea en situación de contexto.

1.1 Una tarea intramatemática

La primera tarea puede parecer fuera de lo común en un principio, a pesar de que solo aparecen conceptos que son conocidos desde la escuela primaria. Sin embargo, se demostrará que, junto a sus variantes, esta tarea cumple con criterios importantes de los estándares de aprendizaje y que se encuentra en relación estrecha con contenidos canónicos de los planes de enseñanza. Además, el ejemplo se ha sometido a prueba en clases (en tres clases de *Gymnasium*[9] y dos de *Realschule*), como parte del proyecto de investigación empírica de varios años de duración: "Tema con variaciones" (Schupp 2002).

1.1.1 La tarea "Diferencia de cuadrados"

Diferencia de cuadrados

Si la diferencia de dos números cuadrados es: $21 = 5^2 - 2^2$:

a) Encuentra la mayor cantidad de números naturales que también se pueden escribir como diferencia de dos números cuadrados. Indica la diferencia en cada caso.

b) ¿Qué números naturales no se pueden escribir de esta forma? Fundamenta.

1.1.2 Solución

1. Los escolares formaron muchas diferencias de cuadrados y se *tropezaron* con distintos números naturales, pero con ello no habían resuelto aún ni **a)**, ni **b)**.

2. Rápidamente se sistematizó esta búsqueda, ya que se repasaron los números cuadrados según su tamaño y en cada caso sustrajeron de ellos los números cuadrados más pequeños. O lo hicieron (en parte por sugerencia del profesor) al armar una tabla (de conexiones), en la que escribían los números cuadrados y mostraban las diferencias (en la medida en que no fueran negativas). Pero estos procedimientos también se interrumpen en algún momento, incluso cuando

9 A diferencia del *Realschule*, modalidad de escuela abierta a todos los estudiantes, el *Gymnasium* está restringido a estudiantes de alto rendimiento que se preparan para estudios superiores universitarios.

se traspasan a una hoja de cálculo, lo cual ocurrió dos veces, y fue en un caso una aplicación de la técnica aprendida. De todas maneras, ellos produjeron dos supuestos:

Respecto de **a)**, todos los números impares y todos los números divisibles entre 4 se pueden escribir de esta manera.

Ejemplos: $3 = 2^2 - 1^2$; $7 = 4^2 - 3^2$; $12 = 4^2 - 2^2$; $28 = 8^2 - 6^2$.

Respecto de **b)**, todos los demás números naturales —es decir, todos los números pares, que no son divisibles entre 4—, no se pueden escribir de esta manera.

Ejemplos: 2; 10; 22; 98.

3. Les llamó la atención (especialmente en la tabla) que la diferencia de dos números cuadrados vecinos siempre es impar. En efecto, se dio lo siguiente:

   $(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$.

   Ahora era lógico observar un número cuadrado y el número cuadrado subsiguiente:

   $(n + 2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4 = 4 \bullet (n + 1)$

   Entonces, cada número natural divisible entre 4 es también la diferencia entre dos números cuadrados.

   ¿Pero por qué se niegan los otros números impares a ser representados de esta manera? Podrían aparecer como resultados de las diferencias que aún no se han analizado: $(n + i)^2 - n^2$

   $(n + i)^2 - n^2 = n^2 + 2ni + i^2 - n^2 = 2ni + i^2$

   Si i es par, entonces $2ni$ e i^2 son divisibles entre 4, es decir el resultado es $2ni + i^2$.

   Si i es impar, entonces es $2ni$ par e i^2 impar, el resultado es entonces impar.

   También se podría llegar a una solución mediante $a^2 - b^2 = (a + b) \bullet (a - b)$.

   Si a y b son pares, entonces también lo son $a + b$ y $a - b$ y por ende $(a + b) \bullet (a - b)$ es divisible entre 4.

   Si a y b son impares, entonces rige lo mismo. Si a es par y b es impar (o viceversa), entonces $a + b$ y $a - b$ son impares y también su producto.

   En efecto, no se dan números pares que no sean divisibles entre 4.

1.1.3 Análisis

Dado que la tarea demanda conocimientos elementares de álgebra (fórmulas binomiales, divisibilidad de expresiones algebraicas), se trabajó a partir del noveno grado (en total: tres veces en noveno grado y dos veces en décimo grado). A pesar de —o quizás justamente por— su carácter de novedad, la tarea despertó gran interés en los estudiantes. Fue formulada de tal manera que primero se tenía que recoger los datos (idea directriz *Datos y azar*). Cualquiera podía involucrarse en esta parte. Para poder avanzar, se tenía que sistematizar lo recolectado (competencia *Usar representaciones*), expresar supuestos, y finalmente fundamentar (competencia *Argumentar*), para lo cual se tenía que aplicar los contenidos de álgebra aprendidos (competencia *Manejar elementos simbólicos, técnicos y formales*). Es claro que este trabajo se relacionaba principalmente con la idea directriz *Número*, ya que se revisaban discretamente conocimientos de grados anteriores (números cuadrados, par e impar, divisibilidad), pero también con la idea directriz *Relación funcional.*

En la fundamentación de la **tarea parcial b)** se va más allá de los ámbitos de exigencia I (*recolectar*) y II (*sistematizar, suponer, probar con medios sencillos*). Las dos cadenas de argumentación (alternativas, pero que sucedían en paralelo en dos grupos de estudio) resultaron ser muy largas para algunos escolares de la *Sekundarstufe I*[10], es decir, poco claras debido a las distinciones de casos. Aquí se debía trabajar de forma diferenciada. En un grupo de estudio de la *Hauptschule* se debió dejar de lado la **tarea parcial b)**, o por lo menos la exigencia de fundamentar.

1.1.4 Variaciones

Se pidió a los estudiantes cambiar algo en la tarea resuelta (por ejemplo un concepto, un signo, una pregunta, una condición dada) y generar así una nueva tarea.

En una clase de noveno grado ya se habían hecho variaciones antes. La clase había hecho más de una variante, con las cuales trabajaron más adelante: $a^2 + b^2$ en vez de $a^2 - b^2$, producto y cociente de dos números cuadrados, números cubos en vez de números cuadrados ($c = a^1 - b^1 = a - b$ se resolvió inmediatamente: cada número natural se puede representar muchas veces como la diferencia de dos números naturales).

Después de algunas vacilaciones debido al carácter totalmente nuevo de la situación, en algunas clases se reemplazó *diferencia* por *suma* y se empezó a trabajar

10 Hasta cuarto grado de secundaria.

sobre la nueva tarea. Para ello existían dos posibles procedimientos: inspeccionar las representaciones mediante una modificación de la tabla de la que se disponía y trabajar algebraicamente de forma análoga a las expresiones algebraicas de la diferencia. En dos clases esto sucedió en simultáneo (en dos grupos de trabajo), en las otras sucedió en forma sucesiva.

La inspección resultó al inicio en una imagen difusa. No todos los números impares se pueden representar (por ejemplo 3 y 7); tampoco se pueden representar todos los números divisibles entre 4 (por ejemplo 12 y 24). Por otro lado, hay números pares que solo son divisibles entre 2 y que sin embargo son sumas cuadradas (por ejemplo $18 = 3^2 + 3^2$ y $20 = 4^2 + 2^2$).

¿Acaso no había ninguna regularidad? Sí la había. En una clase un estudiante la notó; en otra, se requirió la ayuda del profesor: 3 y 7 no son los únicos números que no son sumas de cuadrados: también lo son 11; 15; 19, etcétera; es decir todos los números naturales que al ser divididos entre 4 tienen un residuo de 3. ¿A qué se debe esto?

Ahora se debía volver al camino algebraico. Los estudiantes habían examinado primero $(n + 1)^2 + n^2$ y encontrado $2 \bullet n \bullet (n + 1) + 1$. Eso es con seguridad un número impar. Algunos estudiantes concluyeron, de esto, que todos los números impares se pueden representar como la suma de números cuadrados seguidos. Sin embargo, la analogía con $2n + 1$ fracasa: si n recorre todos los números naturales, entonces $2n + 1$ es siempre un número impar, pero no lo es $2 \bullet n \bullet (n + 1) + 1$, como se puede comprobar cuando se reemplazan los valores. (Recién a partir de este análisis de errores fue que los estudiantes entendieron que la expresión $2n + 1$ ¡representaba números impares!). La misma comprensión se dio para $(n + 2)^2 + n^2 = 2 \bullet (n^2 + 2n + 2)$ y los números pares.

Ahora, con respecto a la pregunta anterior, si a y b son pares, entonces también lo es $a^2 + b^2$. Si ambos son impares, entonces $a^2 + b^2$ sigue siendo par. Cuando a es par y b impar (o viceversa), entonces $a^2 + b^2$ es impar. ¿Por qué es imposible entonces que quede residuo *3*? Porque $(2u)^2 + (2v + 1)^2 = 4 \bullet (u^2 + v^2 + v) + 1$.

Se tuvo que conducir a los estudiantes a esta última reflexión. Lamentablemente nuestros estudiantes están poco acostumbrados a utilizar variables y expresiones algebraicas para la formulación de condiciones y afirmaciones y están menos acostumbrados aún a utilizar las transformaciones de expresiones algebraicas para construir relaciones. En este caso, estas técnicas adquieren un sentido que resulta motivador.

En una clase se dio una comparación interesante, motivada por una alumna. Ella mencionó que se pueden escribir más números naturales como diferencias de cuadrados que como sumas de cuadrados. Efectivamente: en el caso de las diferencias cada cuarto número queda fuera (aquellos con *residuo 2*). En el caso de las sumas sucede lo mismo (aquellas con *residuo 3*), pero también quedan fuera muchos otros números naturales (pares e impares). (Que ambos conjuntos numéricos sean equivalentes a los conjuntos de todos los números naturales, y también entre sí, es irrelevante en este contexto.)

Lamentablemente este grupo no conocía aún el concepto clásico de probabilidad, de lo contrario se hubiera podido formular también la probabilidad de que un número natural elegido al azar se pueda representar como la diferencia (o suma) de dos cuadrados es $\frac{3}{4}$ ($<\frac{3}{4}$). Con eso se hacía referencia a la idea directriz *Datos y azar*. No se puede negar que esta tarea extra es más exigente que la predecesora. Esto no rige para las representaciones de los números naturales como productos o cocientes de cuadrados.

Las cuatro clases 'principiantes' hallaron rápido (después de formular la tarea de una manera más evidente) que solo los números cuadrados se pueden escribir de esta forma, y que esto aplica para todos los números cuadrados.

La clase con más experiencia en 'variaciones' optó por trabajar $a^3 - b^3$, pero no logró pasar de afirmaciones cualitativas (tal como se esperaba): los huecos en la pizarra crecían cada vez más en cantidad, porque los números cúbicos están menos próximos que los números cuadrados.

Con esto tenemos un ejemplo de que las variantes de una tarea pueden tener diferente grado de dificultad, de banal a fácil, factible, difícil, demasiado difícil por el momento (por lo menos en el colegio), hasta imposible, es decir sin solución. Por consiguiente, se transmite la imagen representativa de unas matemáticas vivas, en comparación con la percepción común —y fomentada sin querer por la matemática escolar tradicional— entre novatos de las matemáticas como disciplina que ya ha resuelto todos sus problemas.

Hasta el momento todas las variantes eran previsibles. Sin embargo, sucedió algo que no solo es inevitable sino también deseado: no solo no se mencionaron algunas de las variaciones que el grupo de investigadores anticipó, sino que se hicieron propuestas (de los estudiantes y sus profesores) en las cuales no se había pensado antes.

Así, en una clase llamó la atención que algunos números naturales tuvieran más representaciones posibles como diferencias de cuadrados, por ejemplo $40 = 11^2 - 9^2 = 7^2 - 3^2$. "¿De qué depende el número de representaciones posibles?", preguntaron. La profesora, sorprendida, pidió como tarea pensar al respecto. En efecto, dos escolares (y la profesora) trajeron una respuesta. De $a^2 - b^2 = (a + b) \bullet (a - b)$ resulta que hay tantas representaciones de las diferencias como representaciones de los productos del número correspondiente. Esto se precisó en clase, al mencionar que solo 'cuentan' los productos en los cuales uno de los dos factores o es par o ambos factores son impares (ver arriba).

$40 = 20 \bullet 2 = 10 \bullet 4$. En el primer caso se da $a + b = 20$ y $a - b = 2$, entonces $a = 11$ y $b = 9$. En el segundo caso se da $a + b = 10$ y $a - b = 4$, entonces $a = 7$ y $b = 3$.

En otra clase, el profesor pidió investigar números naturales específicos con respecto a su representación como diferencias de cuadrados y también con respecto al número cuadrado en sí. Sabemos que todos los números cuadrados son o impares o divisibles entre 4. El resultado: se pueden representar todos los números cuadrados como diferencia de dos números cuadrados. Los estudiantes resolvieron esta tarea de forma espontánea y la continuaron dos veces.

Los números cúbicos son o divisibles entre 8 o impares. Entonces, se pueden representar como diferencias de números cuadrados. Los números primos son impares (excepción: 2). Para ellos rige lo mismo (aunque dado que solo hay un único producto posible, solo hay una representación posible. Pero para llegar a esta comprensión se tendría que haber hecho el mismo análisis que en la otra clase).

Como se ve de manera transversal, las variaciones de una misma tarea pueden llevar a diversos recorridos, a pesar de tener un núcleo común. El tiempo necesario también fue diferente según el grupo y osciló entre $1\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ horas pedagógicas. ¿Valió la pena la inversión?

1.1.5 Resumen

Las experiencias y los comentarios de arriba deben haber dejado claro que recién se aprovecha el potencial didáctico de la tarea —que se evidencia al resolverla— cuando se trabajan las variaciones. Además, es importante tener en cuenta lo siguiente:

a) *Se practica sin ser insistente* (Blum 2010, capítulo 3, página 113): se revisan los componentes de la divisibilidad elemental, que ya se habían olvidado, y se utilizan los conocimientos sobre el manejo de variables y términos.

Pero esta práctica es más que una simple repetición, ya que los contenidos se demuestran unos a partir de los otros y se formulan mediante formas de representación y argumentación cada vez más avanzadas y precisas. Por ende, se trata de un aporte a la adquisición acumulativa de la competencia, tal como proponen los estándares de aprendizaje.

b) La tarea es propuesta por otro, y por ende su solución es una reacción (importante y necesaria). Sin embargo, *sus variaciones son una producción de los propios escolares*. De ellas emana una alta motivación que favorece la actividad de los estudiantes, de modo que profundizan y valoran las siguientes tareas. Esto afecta no solo los resultados, sino también las formas de comunicación y cooperación al obtenerlos (competencia *Comunicar*).

En el mediano plazo se debe aspirar a que los grupos de estudios sean quienes recolecten las variaciones, evalúen su lógica y grado de dificultad, las estructuren y las repartan entre sí, antes de que empiecen a examinarlas (ámbito de exigencia III).

En este proceso el consejo y la ayuda de un profesor son necesarios; sobre todo tendrá efecto sobre la elección de formas adecuadas de armar la sesión de aprendizaje, las relaciones sociales y la diferenciación. La clase de noveno grado, sobre la que se contó anteriormente, ya se encontraba en camino de lograr todo esto.

c) En una clase un profesor volvió a abordar al final de la sesión la **tarea parcial b)** de la tarea original. Se evidenció que en un inicio habían comprendido solo parte de la solución. *El variar tiene un efecto sobre la reflexión*. Así, algunas tareas y su solución se comprenden recién cuando se realizan variaciones. Pero también se da el efecto contrario: una tarea sencilla, y quizás aburrida, gana a partir de cambios atractivos (por ejemplo, cuando se dan las variantes $\frac{2}{x} - 3 = 5$ y $2x^2 - 3 = 5$ de $- 3 = 5$).

d) Las variaciones no se deben trabajar en clase de forma exagerada ni aislada. *Por un lado, para su uso se asume que las clases tradicionales son la regla. Por otro, las variaciones benefician justamente a la clase tradicional*. Esto rige especialmente para estrategias de variación, que se utilizan implícitamente en un inicio (o que se utilizan porque han sido indicadas), y que se explicitan gradualmente, para que se pueda hacer un uso consciente de ellas. En el ejemplo anterior se trata de las siguientes estrategias:

- 'Tambalear' (cambiar levemente: por ejemplo, usar el exponente 3, en vez del 2).
- 'Reemplazar' (formar analogías: por ejemplo +; • ; : en vez de –).
- 'Aumentar' (condiciones, es decir 'especializar': representar números cuadrados, cúbicos o primos).
- 'Comparar' (relacionar: representaciones de sumas y diferencias).
- 'Cambiar de perspectiva' (descentrar: de una representación a varias representaciones).

Se encuentran otras estrategias de este tipo en Schupp (2002), página 31. Evidentemente se trata de estrategias heurísticas elementales, de las cuales los estudiantes deberían disponer (y en las cuales muchas veces fracasan, por una falta de flexibilidad), sobre todo en el caso de tareas difíciles o propuestas por otros.

e) Variar es un método natural y muy útil en el quehacer del matemático investigador, como se puede comprobar a partir de muchas declaraciones de los expertos (y también a partir de la historia de las matemáticas). Al tener en cuenta las variaciones en el aprendizaje escolar y de las matemáticas se hace un aporte a la *clase 'investigadora'*, que se fomenta tanto pero se pone en práctica tan poco. Naturalmente este enfoque no elimina la posibilidad —más bien lo exige— de que el docente sea quien varíe en clase de tiempo en tiempo y haga consciente esta estrategia. Eventualmente se puede añadir la pregunta: "¿qué más se podría cambiar?".

A continuación el segundo ejemplo, muy diferente:

1.2 Una tarea en contexto

El ejemplo aquí presentado parte de una tarea en un contexto más bien tradicional. Se tomó de la base de tareas de la KMK y está pensada para los grados 7/8. Sin embargo, aún no se cuenta con la experiencia de poner esta tarea en práctica.

1.2.1 La tarea "Pintar la fachada"

Pintar la fachada

La familia Meister quiere pintar el frente de su casa con pintura para fachadas.

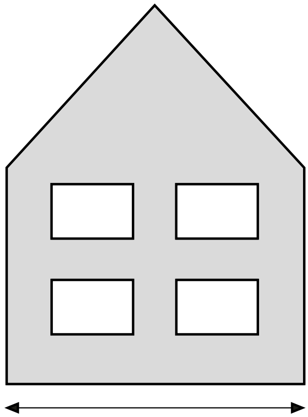
Una cadena de tiendas ofrece pintura para fachadas como oferta del día:

Consumo: 1 litro para 5 m^2 aproximadamente

2,5 litros (EUR 8,20/litro)

5,0 litros (EUR 7,80/litro)

10,0 litros (EUR 6,90/litro)



El señor Meister piensa: "Compraré el balde de 10 litros, ya que así el precio por litro es más barato y ahorro más".

¿Qué piensas tú al respecto? Argumenta tu respuesta.

Nota: Las otras medidas se pueden obtener del dibujo a escala (ojo: en esta versión el dibujo no está a escala).

1.2.2 Solución

Con las medidas dadas se puede calcular el área que se va a pintar: son alrededor de 35 m^2. Si se considera un balde de 5 litros y otro de 2,5 litros, entonces se tiene suficiente pintura para 37,5 m^2. Si el señor Meister compra los dos baldes, paga EUR 20,50 + EUR 39,00 = EUR 59,50. Por consiguiente, paga bastante menos que EUR 69,00 por el balde de 10 litros. Su deliberación no era correcta.

1.2.3 Análisis

Se requiere actividades en el marco de las ideas directrices *Número, Medir* y *Espacio y forma*. Estas requieren las competencias *Argumentar, Modelar, Usar representaciones* y *Manejar elementos simbólicos, técnicos y formales.* Los pasos aislados no son difíciles, pero son muchos y deben poder resumirse y representarse de forma estructurada y argumentativa. La tarea corresponde al ámbito de exigencia II.

1.2.4 Variaciones

Naturalmente, se pueden 'tambalear' las medidas dadas. Pero esto solo resulta interesante si es que tiene un efecto en la decisión del señor Meister. Nos preguntamos: ¿bajo qué circunstancias habría tomado una decisión diferente?

Algunas posibilidades:

- El balde de 10 litros es más barato (por ejemplo EUR 5,80/litro).
- Los baldes más pequeños son más caros (por ejemplo EUR 9,99/litro y EUR 8,99/litro).
- El consumo es mayor que el consumo dado (por ejemplo 1 litro solo alcanza para 4 m^2). Sobre todo esta última medida es crítica (como se puede suponer de la indicación 'aproximado' en la oferta). El señor Meister debe mirar de cerca su fachada. ¿Es lisa o rugosa (lo cual aumenta la superficie)? ¿Se ha pintado antes? ¿Cuánto de la pintura absorberá el yeso? ¿Está muy sucia por el clima, de modo que pueda ser necesario darle dos manos (una de ellas con pintura diluida)? ¿Es posible que baste solo una mano si se usa una pintura más cara?

Se recomienda repartir las distintas posibilidades entre los grupos de trabajo, hacer los cálculos respectivos y discutir las decisiones correspondientes en plenario. Este tipo de 'crítica' constructiva de la tarea inicial la hace más interesante y de hecho también más auténtica. Este esfuerzo se puede reforzar mediante una 'actualización' de la situación: ¿qué pinturas para fachada venden en otras tiendas? ¿En qué envases y a qué precios se vende la pintura? ¿Cómo se plantearía ahora la tarea?

A manera de ejemplo, queda claro que en las decisiones respecto de preguntas extramatemáticas no solo influyen deliberaciones intramatemáticas, sino también aquellas referidas al contexto; que el cálculo matemático no es el decisivo, sino que ayuda a elegir. Así, algunas de las tareas de aplicación de nuestros libros de texto se podrían enriquecer mediante la variación crítica.

¿Cómo llega el señor Meister a la punta del frontis que mide más de 8 metros? ¿No hay un zócalo en esta casa? ¿Por qué pinta solo un lado de su casa? ¿Por qué no pinta los otros lados? ¿Cómo podrían verse los lados? Nombra diferentes posibilidades, elige una, dibújala, calcula el área a pintar, súmala y llega a un consumo total de pintura, así como de los envases correspondientes. Estas son preguntas y estímulos complementarios que le dan un carácter casi de proyecto a la pregunta inicial, que es bastante cerrada (ver *ib. cit.*, capítulo 4, página 126).

Blum (2005) presenta otro ejemplo de una variación, que permite profundizar en la aplicación; él parte de un ejemplo de los estándares de aprendizaje (ver KMK 2003, página 16).

1.3 Conclusiones

Evidentemente, las mismas variaciones y también las formas (estrategias) de variar dependen del tema, pero también de los conocimientos y las experiencias heurísticas previas de cada grupo de aprendizaje, así como de las intenciones del docente. Este debe decidir previamente cuándo y dónde —y, de ser el caso, cuán extensiva e intensivamente— se debe variar, mediante la liberación de algunos conceptos y componentes de la tarea inicial. Ya que uno puede variar todas las tareas, se debe poner especial énfasis en lo siguiente: lo decisivo no es la cantidad de variaciones realizadas o de las variantes resultantes, sino la *diversidad* y *calidad* del proceso de variar. Las variaciones pequeñas —por ejemplo, de una sola característica de la tarea— también pueden avivar la clase, sobre todo cuando son los estudiantes quienes las proponen (lo que sucede pronto).

También se recomienda incluir variaciones como parte de las evaluaciones de desempeño. Por ejemplo:

Cuadrados parciales

a) Dibuja un cuadrado y divídelo en 4 cuadrados parciales.

b) Demuestra que se puede dividir el cuadrado en 9; 16; 25… cuadrados parciales, es decir, siempre de tal forma que el número de cuadrados parciales es un cuadrado. Basta con que hagas un bosquejo.

c) ¿Es posible hacer otras divisiones muy distintas del cuadrado en cuadrados parciales?

Variar no es un fin es sí mismo. Si se utiliza de forma dosificada, contribuye a hacer las clases más abiertas, exigentes, productivas y esenciales, tal como lo proponen los estándares de aprendizaje.

BIBLIOGRAFÍA

Blum, W. (2005). Kann man eine Abkürzung ausweiten? *Mathematica didactica* 28, H.1, S. 7-14.

KMK (2003). Estándares de aprendizaje para la asignatura de matemáticas para el nivel medianos. *Beschluss der KMK* vom 4.12.2003.

Schupp, H. (2002). *Tema con variaciones. Variación de tareas en la clase de matemáticas*. Hildesheim und Berlin: Franzbecker.

2. MÚLTIPLES CAMINOS DE SOLUCIÓN EN LAS TAREAS: EL SIGNIFICADO PARA LA MATERIA, EL APRENDIZAJE, LA CLASE Y EL REGISTRO DE DESEMPEÑO

Michael Neubrand

En este libro aparecen numerosos ejemplos de cómo los escolares pueden resolver las tareas tomando distintos caminos. Los múltiples caminos de solución no están atados de manera fija a ciertos propósitos didácticos. En principio, el desarrollo de las clases de matemáticas se beneficia del hecho de que diferentes caminos de solución estén a disposición de los escolares. Por un lado, esto es importante porque los múltiples caminos de solución son parte de las matemáticas, pero también porque respaldan el aprendizaje individual, de modo que la clase se vuelve así cognitivamente más rica.

2.1 Los múltiples caminos de solución son necesarios desde la perspectiva de la materia

¿Existe un camino o quizás la mejor solución para una tarea? A veces uno escucha la respuesta: "Matemáticamente sí, quizás podría ser distinto en el primer encuentro con el contenido". Ya sea de forma consciente o no, esta respuesta parte de una noción de las matemáticas como algo estático y esquemático. Pero, ¿deberían presentarse las matemáticas en la escuela como una colección de procedimientos y conceptos óptimos? Es comprensible asumir esta postura, ya que la 'matemática escolar' parece tan 'pensada hasta el final', que uno pierde de vista su vitalidad y su potencial genético. Incluso se puede hablar de una "problemática básica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela" (BLK 1997, capítulo 5.1): "Los ámbitos de contenidos y los problemas que se trabajan en clase se cubren mediante conceptos y procedimientos que han sido probados, asegurados y pensados para poder mostrar rendimiento. Esto promueve la tendencia de aspirar a procedimientos terminados de forma lo más directa y efectiva posible. Entonces, la representación matemática en sí misma parece ser la estructura de enseñanza óptima". Este encuadre obstruye el acceso a unas clases de matemáticas orientadas hacia la comprensión.

Las mismas matemáticas, cuyo 'carácter de proceso' (Neubrand 1986) es decisivo, muestran un camino distinto: "Las matemáticas surgen cuando uno se enfrenta a tareas y problemas intra y extramatemáticos. En principio, los caminos de solución están abiertos. Incluso se aspira a una variedad de caminos de solución, porque cada nuevo camino permite profundizar en la comprensión de la estructura" (Wittmann 1995, página 16). De esto surgen —para empezar, solo "a partir de la materia" (Wittmann)— dos significados centrales que dan la bienvenida a una apertura, cuando no a una búsqueda, a múltiples caminos de solución:

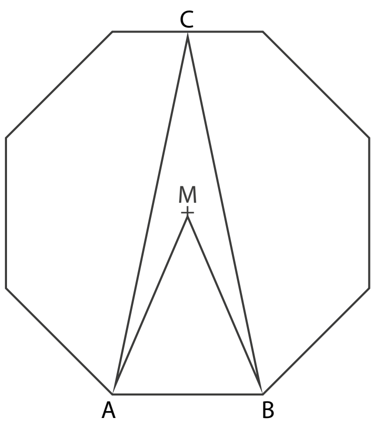
- Cada nuevo camino de solución abre una nueva perspectiva hacia el objeto de estudio, de modo que surge una 'comprensión estructural'. Esto va más allá de producir simplemente un resultado final.
- Cada nuevo camino de solución muestra que la resolución de problemas y el modelar requieren apertura. Mostrar múltiples caminos de solución ayuda a comprender que las soluciones a los problemas siempre pueden variar y mejorar, y que las afirmaciones fundamentadas matemáticamente solo pueden llegar a ser tan buenas como los modelos en los cuales se basan.

La primera función remite a la necesidad de una transferencia vertical y una construcción sistemática; la segunda se relaciona con la conexión horizontal. Así, Weinert (2000) y otras muchas fuentes indican que diferentes tipos de conexión aportan en la misma medida a lograr que una clase sea productiva. La siguiente tarea (tres tareas parciales) muestra el significado de los múltiples caminos de solución desde la perspectiva de la materia.

Descomposición de un octágono - tarea parcial a)

Se ha dibujado el triángulo ABC circunscrito en el octágono regular, de modo que la base del triángulo coincide con uno de los lados del octágono y C es el punto central del lado opuesto del octágono.

a) ¿Qué parte del área total del octágono representa el triángulo ABC? Fundamenta tu resultado.



Esta primera tarea parcial reúne diferentes contenidos de la clase de geometría. En la tarea se pueden unir de forma apropiada las áreas de triángulos y las operaciones con ellas, los polígonos regulares y su construcción interna, así como los procedimientos para calcular la longitud de segmentos y el contenido de áreas. La tarea corresponde primordialmente a la idea directriz *Medir*, aunque también se abordan las ideas directrices *Espacio y forma*.

Respecto de las competencias generales, e independientemente de cuál sea el camino de solución elegido, los escolares activarán principalmente la competencia *Resolver problemas matemáticamente.* Si no se pone en práctica un procedimiento, es decir, "elegir y utilizar apoyos heurísticos, estrategias y principios apropiados" (estándares de aprendizaje), entonces no se llegará a una solución. Es crucial dibujar líneas de soporte que cumplan un propósito.

También, independientemente del camino de solución, esta tarea corresponde al ámbito de exigencia II de los estándares de aprendizaje, ya que se trata de que "se conecten conocimientos, habilidades y capacidades que se adquirieron en el trabajo con diferentes dominios matemáticos". Un primer camino de solución se hace evidente a partir de ciertos indicios en la tarea. Al mostrar el triángulo *ABC*, se muestra también el triángulo *ABM* en el dibujo. Si esto se tiene en cuenta, entonces se puede interpretar qué se pensó en el siguiente camino de solución:

Camino de solución 1: relación con el triángulo central

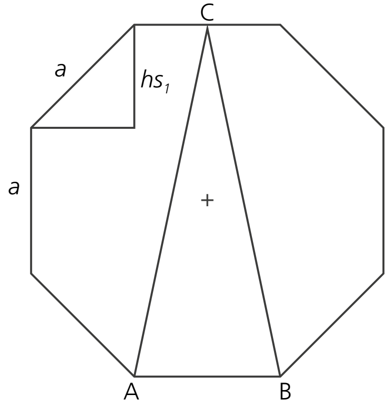
El área del Δ *ABC* mide el doble que el área del Δ *ABM*, porque el Δ *ABC* tiene el doble de altura y la misma línea de base. El octágono completo se forma a partir de 8 triángulos congruentes con el Δ *ABM*. Por consiguiente, el Δ *ABC* abarca un cuarto del área del octágono.

No todos los escolares captarán este indicio en la tarea. Más bien, los escolares empezarán por encender la 'máquina de calcular': ¿por qué no se puede calcular el área de Δ *ABC* de la misma forma como se calcula el contenido de un triángulo: $\frac{1}{2}$ • línea base • altura? Entonces surgen las siguientes deliberaciones: la línea base de Δ *ABC* también es un lado del octágono. Pero, ¿cuál es la altura?

Camino de solución 2: altura ABC

Intento 1: Con ayuda de Pitágoras, pero, además, del lado del octágono, falta el tercer lado del triángulo. Este enfoque no permite continuar de inmediato.

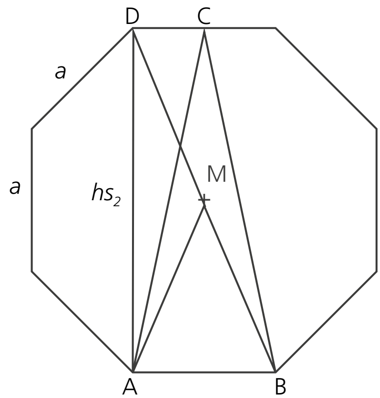
Intento 2: Orientarse del lado exterior del octágono: la altura de Δ *ABC* se compone del lado a del octágono y de dos segmentos parciales, que forman un triángulo isósceles, cuando se tiene el lado del octágono como hipotenusa. Uno de estos triángulos está dibujado. El segmento de soporte hs1 se tiene que sumar dos veces al del lado del octágono. Esto permite determinar la longitud de la altura buscada, es decir para el área $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})a^2$. Pero, ¿cuál es la relación con el área completa del octágono? Aquí se estanca el enfoque.



A pesar de que estos caminos de solución se interrumpen y no conducen directamente a la meta, como se verá, son importantes para el proceso completo de resolución de problemas. Otro camino de solución permite continuar con las ideas que se han expuesto hasta el momento.

Camino de solución 3: otra estructuración

Se puede representar el área de Δ *ABC* de otra forma. El segmento de ayuda hs_2 permite reconocer que los triángulos *ABC* y *ABD* tienen iguales el área, la base y la altura. Esta área mide el doble que el triángulo central *ABM*, dado que visto desde *AB* se observa la misma línea base y el doble de altura, desde *BD* se ve la misma altura y la mitad de la línea base (es decir, más caminos de solución dentro de múltiples caminos de solución). También se identifica, tal como en el camino de solución 1, que el Δ *ABC* abarca un cuarto del área total del octágono.



Los múltiples caminos de solución para una tarea fomentan el adentrarse en un fenómeno, incluso si las diferencias entre los caminos son mínimas. Ya con eso se puede conectar conocimiento. En esta tarea los accesos esbozados se respaldan mutuamente, aún si no están completos. Justamente por eso se abre la perspectiva hacia la estructura interna del octágono. Con un único camino de solución esto no sería posible.

Así, el primer intento interrumpido alude implícitamente a las tareas básicas al trabajar con polígonos regulares, esto es, a establecer las relaciones entre los lados de los polígonos y los radios de los círculos externo e interno. El segundo intento, interrumpido inicialmente, muestra que el octágono se puede descomponer en dos rectángulos que se cruzan y en cuatro triángulos rectángulos isósceles en las esquinas, lo cual señala una posibilidad de hallar el área del octágono (incluso si no es la más elegante). Finalmente, el tercer camino de solución muestra cómo se pueden usar los conocimientos geométricos elementales (misma área) de forma flexible, es decir, con segmentos de referencia que se pueden alternar. En combinación con la comprensión del camino 2 del segundo intento de que $\Delta\, ABC$ tiene el área $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})a^2$, se obtiene del tercer camino de solución: que el área del octágono regular es $2(1+\sqrt{2})a^2$.

Una construcción de este tipo es un buen ejemplo de estructura de conocimiento acumulativa, sistemática y conectada verticalmente, pero "local" en este caso. Muchos conocimientos individuales se reúnen en una gran relación y permiten continuar. Tales procesos de trabajo 'locales' deben hacerse conscientes en las clases (Neubrand 1986) y el andar por múltiples caminos de solución respalda esto. Además, los distintos caminos de solución proveen resultados de diferente calidad. Como resultado, se puede verificar solamente que $\Delta\, ABC$ representa un cuarto del área del octágono, pero también se puede producir un resultado numérico para el área de $\Delta\, ABC$, incluso si no se ha pedido explícitamente. Esto lleva a determinar el contenido del octágono completo. También se deben explicitar estas cualidades distintas, para estimular desde la misma materia el aprendizaje conectado.

Estas interpretaciones ilustran la importancia que tiene desde la misma materia mantener la apertura hacia distintos caminos de solución. Además, se debe tener en cuenta el siguiente aspecto, que también es característico de la disciplina, pero que además es indispensable para el aprendizaje autónomo:

- El trabajo con una tarea implica siempre la exhortación a seguir pensando, a conectar y establecer relaciones. Esto puede respaldar los múltiples caminos de solución, incluso cuando la tarea en sí misma es 'cerrada'.

En el ejemplo esto se hace evidente, ya que esta tarea se continúa en subsiguientes tareas parciales, que son en verdad 'abiertas':

Descomposición del octágono - tareas parciales b) y c)

b) En el octágono, dibuja un rectángulo cuya área sea la mitad que el área del octágono. Fundamenta tu procedimiento.

c) Existen muchas posibilidades de sombrear la mitad del octágono. Dibuja tres posibilidades (para la tarea completa con bosquejos.

Evidentemente, los caminos de solución presentados anteriormente para la **tarea parcial a)** ya contienen algunas aproximaciones para responder a las tareas parciales **b)** y **c)**. Estos exigen directamente que se trabaje el octágono regular como una figura con estructuras internas. La pregunta es 'abierta', porque diferentes soluciones son posibles. Pero si la tarea parcial 'cerrada' **a)** ya se trabajó como una tarea para reconocer estructuras a partir de los múltiples caminos de solución, entonces los accesos a **b)** y **c)** ya se han preparado, y son justamente una retrospectiva acumulativa y sistematizadora de lo que ya se pensó.

2.2 Los múltiples caminos de solución respaldan el aprendizaje con comprensión

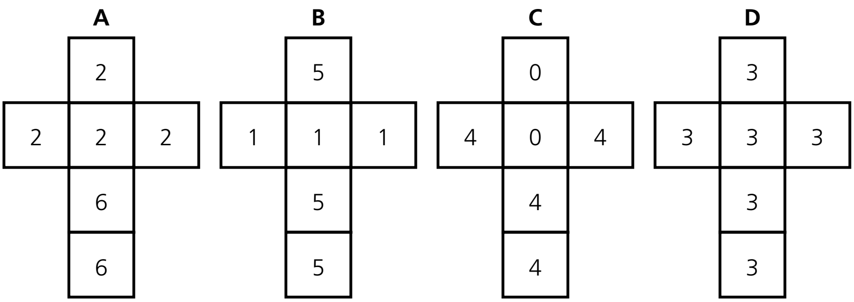
¿Qué es el 'aprendizaje con comprensión'? Weinert (2000) se refiere a un conocimiento inteligente: "Tener un conocimiento inteligente significa poseer un conocimiento, que tiene un significado y un sentido. El conocimiento bien comprendido es un conocimiento que no está 'encapsulado', que no está muerto en la memoria, que no está 'atado' a la situación en la que se adquirió, sino que es vivaz, útil de forma flexible, inteligente justamente". Él enfatiza que la mediación del conocimiento flexible es "la meta de aprendizaje primordial y más importante". ¿Cómo se logra esto?

- Los múltiples caminos de solución respaldan el aprendizaje con comprensión. Esto se debe a que trabajar con caminos de solución variados permite desatar el conocimiento de las situaciones en las que se adquirió originalmente. Así, la unicidad de la situación se rompe y el conocimiento se puede usar en otros contextos.

Esto también se puede reconocer en la tarea presentada anteriormente "Triángulo en el octágono": sin importar cómo se adquirieron conocimientos previos sobre los polígonos regulares, la tarea demanda una reorganización de estos conocimientos y los desata así del contexto original. Un segundo ejemplo muestra esta función de los múltiples caminos de solución. Las soluciones que los escolares dan a esta tarea remiten que el aprendizaje con comprensión se debe impulsar y organizar mediante intervenciones adecuadas.

Victoria segura

Se dan estos cuatro dados, descritos por sus desarrollos.



Dados de Bradley Efron (dados chinos)

Dos jugadores eligen un dado uno después del otro. Luego, cada uno lanza el dado una vez. Gana quien obtiene el número más alto.

Expresa lo que piensas respecto de las posibilidades de ganar.

Claramente la tarea "Victoria segura" corresponde a la idea directriz *Datos y azar*, según la clasificación de los estándares de aprendizaje. Se deben activar varias competencias, de las cuales *Matematizar* es la más resaltante.

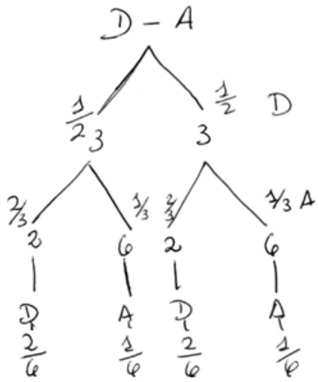
El camino de solución más evidente, sobre todo si esta técnica se ha adquirido previamente en clases, es el uso de diagramas de árbol. Así se pueden anticipar de forma más o menos sistemática los diferentes resultados de este experimento de varios niveles.

Se presentan las soluciones de un séptimo grado. *Todos* los escolares siguen este camino y llegan, en gran mayoría, a soluciones útiles.

Camino de solución 1: un diagrama de árbol

Entre los seis diagramas trabajados sistemáticamente por un escolar, se encuentran dos diagramas con la siguiente estructura.

El escolar reconoce que el dado *D* ganaría con una probabilidad al dado *A*.



El escolar utiliza esta variante del diagrama de árbol, que en un principio parece confuso, para comparar los dados **D** y **A**, así como **D** y **B**, pero no para comparar **C** y **D** (¡secuencia!). Aparentemente no podría mantener el esquema de diagrama de árbol, si el árbol empezara con una sola rama.

Sin embargo, el escolar no quiere apartarse de este camino de solución e inventa así una ramificación en la parte superior del árbol. Entonces, el escolar no está en condición de separar sus conocimientos sobre las probabilidades de ganar en experimentos multietapa del 'contexto de adquisición' (Weinert 2000), que en este caso se trata del esquema 'diagrama de árbol'. ¿Cómo se reacciona ante esto, si se trata de construir conocimientos comprensivos?

La reacción en clase frente al diagrama presentado se puede detener si se hacen pequeñas correcciones: "¿No hubiese sido más fácil para ti…?". Sin embargo, con esto uno se mueve en el mismo nivel que los escolares. Se trata de 'conocimiento atado'. Pero uno también puede remitir a soluciones alternativas, eventualmente mediante la incitación a continuar pensar por uno mismo —o mediante una ampliación del planteamiento—; en todo caso, la intervención del docente debe tener un propósito. La meta es alejarse de la fijación en la solución estándar en beneficio del aprendizaje con comprensión. En este caso, podría verse así: ¿de verdad se tienen que dibujar seis diagramas de árbol? ¿O hay casos en los que se podría llegar a una decisión de otra manera? La respuesta a la segunda pregunta es 'sí':

Camino de solución 2: separar primero los casos sencillos

Todas las comparaciones con el dado **D** pueden resultar a partir de los números del dado de comparación correspondiente. Así se obtiene, sin necesidad de armar un diagrama de árbol completo, que **C** gana contra **D** y **D** gana contra **A**, así como que en la comparación **B** contra **D** las chances son inciertas.

Una reacción análoga ante los (inevitables) errores de cálculo —es decir, otra vez el intento de separarse del esquema del diagrama de árbol— sería dar el indicio de que las probabilidades de ganar deben sumar 1. Esta es una posibilidad de verificación que puede fomentar la comprensión conceptual.

Hacer referencia a variantes de solución puede ayudar a desplegar el aprendizaje comprensivo, de tal modo que estrategias de orden superior, metacognitivas, entren a tallar:

- Recorrer múltiples caminos de solución implica también abrir posibilidades de verificación, separar los casos sencillos, evaluar el actual camino de solución. Estos son elementos de un conocimiento comprensivo, 'inteligente'.

En este ejemplo, también puede entrar en acción el 'continuar pensando', que es inmanente a toda tarea y que se menciona en la página 166. Por ende, uno no se debe dar por satisfecho con la solución solamente, sino que debe seguir preguntando: ¿existen concepciones erróneas típicas que pueden conducir a conclusiones equivocadas en esta tarea? En efecto, una de las escolares argumenta de la siguiente manera: "si uno suma los números de los dados, obtiene: **A** 20; **B** 18; **C** 16 y **D** 18. Se ve que **A** tiene el valor más alto". Anteriormente ella había trabajado con diagramas de árbol. Debido a que no usó formas de verificación —la suma de las probabilidades no era siempre 1—, llegó a resultados errados. Ahora ella quería tener un argumento extra en pro de sus resultados (falsos), pero esto no es concluyente en esta situación.

El hablar sobre los resultados, así como sobre los resultados errados, forma parte del aprendizaje con comprensión. El conocimiento se enlaza con modelos que se pueden aplicar y se deslinda de elementos de conocimientos que no corresponden a esta tarea (en este caso: la suma de los números, pero también el valor esperado). Entonces rige:

- Los múltiples caminos de solución, incluso si se muestran como 'no transitables', pueden remitir anticipadamente a contenidos matemáticos enriquecedores y así respaldar el aprendizaje con comprensión.

2.3 Los múltiples caminos de solución se pueden llevar a cabo en clase

En clases no se trata solo de permitir que haya múltiples caminos de solución; eso simplemente no se podrá evitar. Lo central es, más bien, que la variedad de caminos de solución sea de acceso abierto para los escolares. Se trata de una tarea didáctica, que implica una clase que genere el espacio y el estímulo para accesos alternativos y que defina el marco correspondiente. ¿Existen modelos didácticos que cumplan esta función?

Una primera variante, que conjuga tanto aspectos didácticos como metodológicos, se observa en unas sesiones de clase en Japón, que se registraron en el estudio de videos de Timss (Baumert *et al*. 1997; Neubrand 2002). Esta estructura de clase asegura que los múltiples caminos de solución sean accesibles para todos los escolares. La apertura y a la vez la coherencia construida didácticamente de la sesión son aspectos complementarios y no se deben pensar como opuestos.

Otra variante es el enfoque didáctico de Gallin & Ruf (1993). Aquí también se ha diseñado didácticamente la tensión entre los caminos de solución 'singulares' de escolares individuales y su incorporación consciente en caminos de solución 'regulares', que sucede a partir de la reflexión. Lo siguiente es común a ambos enfoques:

- Los caminos de solución múltiples pueden estructurar la clase, cuando permanecen abiertos para las escolares y se introduce una evaluación de los caminos de solución.

Mantener la apertura y contrastar distintos caminos de solución en clase abre opciones, pero también requiere algunas condiciones: así se puede introducir y acompañar la 'práctica inteligente' (ver capítulo 3, página 113). Los escolares trabajan diferentes soluciones para la misma tarea, y luego comparten sus caminos de solución. Una segunda opción se refiere a la diferenciación interna, pero de una forma un poco distinta de lo común. No se plantean tareas variadas, sino que la misma tarea tiene un efecto diferenciador de forma natural, ya que permite diferentes caminos de solución que los escolares pueden recorrer según sus capacidades. La condición esencial para que los múltiples caminos de solución puedan funcionar como 'conectores de conocimiento' es la relación interna de los temas abordados. Depende de las dos funciones de los múltiples caminos de solución, que han sido descritas aquí, que se pueda profundizar en el mismo contenido y adquirir así una comprensión reflexiva.

- La condición para un uso productivo en clase de los caminos de solución múltiples es que las sesiones de aprendizaje tengan una estructura coherente; es decir, que se dé una profundización acumulativa y sistemática del tema elegido. En ese caso, los múltiples caminos de solución pueden usarse para la práctica inteligente y la diferenciación interna natural.

La siguiente tarea, "Construcción de pirámides", ilustra estas funciones de los múltiples caminos de solución en clase.

Construcción de pirámides

Se deben construir pirámides haciendo uso de un set de imanes. El área de base y las áreas laterales son triángulos equiláteros.

Las piezas de color son imanes; entre dos imanes se encuentra siempre una bola. Un imán mide 27 mm de largo, una bola tiene un diámetro de 13 mm.

Primero se construye la punta, para lo cual se usan cuatro bolas y seis imanes. A partir de ahí se construye el primer piso hacia abajo. Para que la construcción sea más estable, se coloca un imán como barra transversal en cada bola. En la imagen se muestra una pirámide de dos pisos.

a) Examina cuántos imanes y cuántas bolas se necesita para construir la pirámide ilustrada.

b) Monika dice: "La longitud del borde de la pirámide ilustrada es 8 cm". ¿Cómo llega a esta respuesta?

c) Calcula el volumen de la pirámide usando el valor de Monika.

d) ¿Cuántos triángulos pequeños y cuántos paralelogramos se encuentran afuera en la pirámide ilustrada?

e) ¿Cuántos imanes se necesitan para construirle un piso más a esta pirámide?

f) Monika tiene 80 imanes y 50 bolas en su set. ¿Qué largo tiene el borde de la pirámide más grande que puede construir?

g) ¿Identificas un sistema para el número de imanes y el número de bolas en el borde n?

Escribe una expresión algebraica mediante la cual se pueda determinar el número de imanes y bolas.

La tarea "Construcción de pirámides" corresponde a la idea directriz *Espacio y forma*, pero con un énfasis distinto que el de la tarea "Descomposición del octágono" presentada en 2.1. Solo las tareas parciales **b)** y **c)** corresponden a la geometría 'para medir'; las otras son parte de la geometría 'para contar'. La **tarea parcial g)** aborda una relación funcional y se conecta con el álgebra. En el centro se encuentra siempre la forma espacial de la pirámide.

Solo a partir del hecho de que haya tantas referencias cruzadas entre las tareas parciales se dan suficientes posibilidades de elección diferenciadoras para la clase. Sin embargo, antes se debe elegir el tema. Una posibilidad es hacer que la tarea sirva para que los escolares se ocupen de forma activa y descubridora del tema "contar de forma estructurada y representar con variables". Para eso se pueden combinar las tareas parciales **a)**, **e)** y **g)**, y eventualmente también **d)**, de modo que este tema se trabaje mediante tareas de distintos niveles, es decir para que se dé una 'práctica inteligente'. Las otras tareas parciales, en las que se calcula el volumen, abordan otra temática. Es mejor posponerlas en pro de la profundización acumulativa y sistemática. El diseño coherente de sesiones de aprendizaje demanda tareas que estén en sintonía unas con las otras, un precepto que rige tanto para las clases en las que se trabaja un tema como para las fases de repetición y práctica.

Todas las tareas parciales permiten caminos de solución variados, incluso la **tarea parcial b)**, que deja libertad para elegir cómo determinar las magnitudes características del tetraedro. La **tarea parcial g)** cierra el tema, por decirlo de alguna manera. Les resultó muy difícil a los escolares de noveno del *Gymnasium*. Se dieron muchas soluciones erradas y a menudo los resultados se compartieron sin posibilidad de reconocer la estrategia que estaba detrás, lo cual hace referencia a la competencia tan desatendida de poder compartir con otros los propios pensamientos de forma comprensible (competencia comunicativa). Las soluciones más útiles para la clase fueron aquellas que describían la estrategia y la compartían en forma de expresión algebraica. El siguiente es un camino de solución de este tipo:

Camino de solución 1: contar en anillos

Bolas:	2^{do} piso = 3 + 2 + 1 = 6	
	3^{er} piso = 4 + 3 + 2 = 9	¡3 bolas más por cada piso!
	4^{to} piso = 5 + 4 + 3 = 12	(la diferencia)
	5^{to} piso = 6 + 5 + 4 = 15	

f(bolas en un piso, n) = (n + 1) + n + (n – S 1)

Imanes:	2^{do} piso = 5 + 4 + 3 = 12	
	3^{er} piso = 7 + 6 + 5 = 18	¡6 imanes más por cada piso!
	4^{to} piso = 9 + 8 + 7 = 24	(la diferencia)
	5^{to} piso = 11 + 10 + 9 = 30	

f(imanes en un piso, n) = (2n + 1) + 2n + (2n – 1)

La forma de la expresión, en la cual no se simplifica a 3n o 6n, y el hecho de que primero se cuenten las bolas y luego los imanes, permite reconocer la estrategia: por lo visto, se registran primero las bolas, y luego los imanes en forma de anillo alrededor de los tres lados de la pirámide en cada piso.

Los escolares se benefician si ya desde la **tarea parcial a)** evitan contar simplemente, y usan de forma consciente una estrategia para contar. Sin embargo, es común encontrar tablas —sin ningún comentario— como la siguiente:

	1 bola	0 imanes
	3 bolas	6 imanes
	6 bolas	12 imanes
En total:	1 + 3 + 6 bolas,	6 + 12 imanes

Las conclusiones a las que se llega a partir de los valores iniciales pueden ser distintas, tal como lo muestran los siguientes ejemplos. La idea —útil en sí misma— de observar los cambios de piso a piso conduce a resultados erróneos si se continúa simplemente la regularidad numérica entre las filas 2 y 3 de manera esquemática, sin prestar atención a las relaciones geométricas y estructurales.

Camino de solución 2: Transición al siguiente piso

1. Piso :	1 Bolas		0 Imanes	
2. Piso :	3 Bolas		6 Imanes	+6
3. Piso :	6 Bolas	+3	12 Imanes	+6
4. Piso :	9 Bolas	+3	18 Imanes	+6

Siempre hay el doble de imanes que de bolas.

Term: ?

1. Piso :	1 Bola		0 Imanes	
2. Piso :	3 Bolas		6 Imanes	
3. Piso :	6 Bolas	·2	12 Imanes	·2
4. Piso :	12 Bolas	·2	24 Imanes	·2

Las bolas, así como los imanes, se duplican de piso a piso.

Un diseño de *sesiones de aprendizaje coherente* significa en este caso tematizar la dependencia de ambas tareas parciales **a)** y **g)**. Entonces debería poderse identificar el camino que lleva de contar de manera estructurada a usar variables.

2.4 Los múltiples caminos de solución dan indicios sobre el nivel de rendimiento

Si la clase se mantiene abierta a múltiples caminos de solución, entonces los docentes podrán reconocer qué sustancia intelectual pueden movilizar los escolares individuales. Esta idea ya se desarrolló en el capítulo 2, página 96. Este proceder supone un conocimiento profesional de tal tipo que el docente sepa con seguridad cuáles son las diferentes posibilidades de solución de una tarea y —de forma más general— cuáles son las diferentes posibilidades de representación de un concepto o procedimiento. Sobre esta base debe darse en clase la evaluación de los caminos de solución y también la revelación de los criterios para esto.

En bibliografía relevante se presentan enfoques factibles para resolver el problema de la evaluación de caminos de solución individuales. Gallin & Ruf (1993) proponen un sistema de ponderación para considerar si los escolares prefieren expresarse de forma verbal-reflexiva o mediante representaciones mentales. Becker & Shimada (1997) hacen una evaluación *a priori* de los caminos de solución, según la profundidad cognitiva que quiere dar el docente a cada camino. Dos soluciones de escolares para los siguientes ejemplos —que hacen referencia a la competencia *Resolver problemas*— son ilustrativas:

Rombo

Se conoce el área de un rombo: 120 cm^2. La longitud de los lados y la longitud de ambas diagonales son números enteros (medidos en cm). ¿Puede construirse un rombo a partir de estas especificaciones? Si no, ¿por qué no?

A este tipo de tareas se les puede llamar también 'tareas inversas' (Neubrand 2002), ya que el planteamiento va en dirección contraria a la común, en la que se pide determinar el área de una figura dada. Aquí es al revés. En principio, tales tareas son adecuadas para recorrer múltiples caminos de solución. Sobre todo, provocan estrategias de ensayo y, por ende, enfoques de solución individuales.

Dos escolares de noveno grado recorren caminos distintos. El escolar 1 no llega a la solución correcta. Pero ambos escolares se encuentran en condición de enfrentarse a una situación problemática abierta; muestran por completo una comprensión del trabajo matemático en relación con los problemas.

Ambos estudiantes muestran un pensamiento flexible y utilizan la estrategia del ensayo, tal como se espera a partir del planteamiento de la tarea. Es decir, no renuncian apenas reconocen que no lograrán avanzar si se limitan a aplicar un método estándar.

Camino de solución 1: dos triángulos, probar

Texto y dibujo del estudiante:

Área del rombo = $120 cm^2$

Dado que el rombo está dividido por el medio y hay dos triángulos, he intentado obtener el resultado con ayuda de uno de los triángulos.

1 triángulo = $60 cm^2$

Ahora bien, ensayando, encontré la altura y ancho del triángulo.

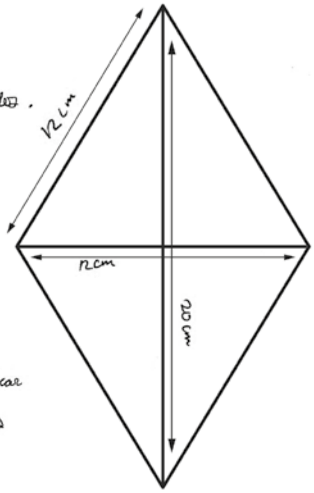
Fórmula: $\frac{h \cdot b}{2}$ = área del triángulo

$$\frac{10 \cdot 12}{2} = 60 cm^2$$

¡Ahora conozco las longitudes de ambas diagonales! Debo duplicar la altura para tener dos triángulos. Ya que conozco ambas diagonales, puedo construir el rombo.

Aristas: 12 cm

Diagonales: 20 cm y 12 cm

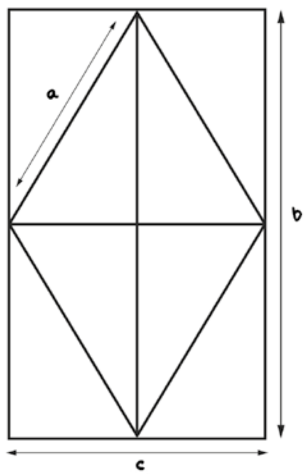


Camino de solución 2: rombo en un rectángulo, probar

Texto y dibujo del estudiante

"Para calcular un rombo con el área 120 cm^2, en el cual las dos diagonales y los lados deben ser números enteros, he pensado que un rectángulo de un área de 240 cm^2 debería tener espacio para un rombo con el área de 120 cm^2. Entonces, empecé a probar.

Primero tomé un rectángulo con las medidas 20 por 12 cm, pero este no dio líneas de números enteros. A continuación traté con las medidas 24 por 10, y así llegué a mi resultado final".



a = 13cm b=24cm c= 10cm

El primer escolar interrumpe su procedimiento de ensayo apenas encuentra un resultado parcial. Evidentemente él mide en el dibujo; al leer de forma poco precisa se puede llegar a un valor entero de 12 cm para el lado del rombo.

En contraste, el segundo escolar parece tener claro que se debe probar más de una vez para poder cumplir con todas las condiciones. La primera solución muestra, entonces, un trabajo menos profundo respecto de la estructura del problema.

No se pueden formular reglas generales para juzgar el valor de caminos de solución alternativos. Esto depende en gran medida de la tarea, y también de las "herramientas" mentales de las que disponen los escolares (ver capítulo 2, página 96). Pero lo siguiente puede servir de orientación: se puede calificar mejor una estrategia general que un cálculo para un caso individual; considerar varios aspectos es más exigente que un procedimiento unidimensional; captar el significado de un objeto es más valioso que considerar únicamente aspectos sintácticos; utilizar varios métodos de representación es más valioso que quedarse en un solo modo, etcétera. Por consiguiente, esta función de los múltiples caminos de solución es la que rige para constatar el nivel de rendimiento:

- Los múltiples caminos de solución pueden evaluarse según su demanda cognitiva. Así, permiten una estimación del nivel de rendimiento de los escolares.

Los docentes deben realizar con anterioridad tales evaluaciones de los diferentes caminos de solución. La base para ello es el análisis del espectro de soluciones posibles para una tarea y de las competencias matemáticas generales. Esto supone el conocimiento de la materia, pero sobre todo conocimientos sobre las formas de pensar de los escolares.

La evaluación de los caminos de solución que muestra la clase completa puede indicar también qué desempeño cognitivo ya se ha logrado y cuál debe seguir trabajándose en clase. Una estimación del espectro de desempeño de una clase completa puede servirse de lo siguiente como orientación: si los caminos de solución observados se encuentran en un mismo nivel cognitivo o en diferentes niveles; si los enfoques matemáticos son iguales o diferentes; si las estrategias de solución se presentan de forma clara o si solo se reportan resultados desnudos, etcétera. Los ámbitos de exigencia de las competencias matemáticas generales, definidos en los estándares de aprendizaje, pueden dar indicios de cómo estimar la demanda cognitiva al aparecer las competencias individuales. Sin embargo, esto no reemplaza el análisis de la tarea, que se relaciona con el caso particular.

BIBLIOGRAFÍA

Baumert, J., R. Lehmann, M. Lehrke, B. Schmitz, M. Clausen, I. Hosenfeld, O. Köller y J. Neubrand (1997). *TIMSS Comparación internacional de clases de matemáticas y ciencias naturales: Fundamentos descriptivos*. Opladen: Leske & Budrich.

Becker, J.P. y Sh. SHIMADA (eds.) (1997). *La aproximación abierta - Una nueva propuesta para enseñar matemáticas*. Reston (VA): NCTM.

BLK - Comisión Regional para la Planificación Educativa y la Investigación (eds.) (1997). *Informe para la preparación del programa: "Incremento de la eficiencia de las clases de matemáticas y ciencias naturales"* (= BLK - Materialien zur Bildungsplanung und Forschungsförderung, Heft 60). Bonn: BLK.

Gallin, P. y U. Ruf (1993). Lenguaje y matemáticas en la escuela: un informe a partir de la práctica. *Journal für Mathematik Didaktik* 14, S. 3-33.

Neubrand, M. (1986). Aspekte und Beispiele zum Prozesscharakter der Mathematik. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, S. 25-32.

Neubrand, J. (2002). *Una clasificación de las tareas matemáticas para el análisis de situaciones de trabajo autónomo [...] del estudio de videos TIMMS*. Hildesheim: Franzbecker.

Neubrand, J. y M. Neubrand (1999). Efecto de los múltiples caminos de solución: Ejemplos de una clase de matemáticas japonesa. En: Selter C. & G. Walther (Hrsg.), *Mathematikdidaktik als design science - Festschrift für Erich Christian Wittmann* (S. 148-158). Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Ernst Klett Grundschulverlag.

Wittmann, E.Ch. (1995). Pensamiento activo y aprendizaje social en clases de cálculo a partir del niño y el material. En: Müller, G. N./Wittmann, E. Ch. (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen (= Beiträge zur Reform der Grundschule*, Bd. 96). Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule, S. 10-41.

Weinert, F.E. (2000). Enseñar y aprender para el futuro. Exigencia para el aprendizaje en la escuela. *Vortrag* 29. März 2000, Pädagogisches Zentrum Bad Kreuznach. Quelle: http://pz.bildungrp.de/pn/pn2_00/weinert.htm#Bildungsziele (download Januar 2006).

3. TIPOS DE TAREAS

Wilfried Herget

Tareas abiertas o cerradas, con cálculos y símbolos o con textos, con respuesta libre o con respuesta de opción múltiple, reproducción familiar o resolución de problemas exigente; al mirar más de cerca, la variedad de formatos y tipos de tarea resulta muy rica. En este aporte se dará una visión conjunta, estructurada sobre todo a partir del diseño exterior de las tareas y de las distintas actividades de los escolares.

3.1 Visión general

Las tareas de aprendizaje y de rendimiento que se encuentran en los libros escolares y en clases suelen tener una formulación precisa y unívoca y se espera para ellas una respuesta igual de unívoca, es decir, las llamadas tareas cerradas. Por lo general son del tipo "Calcula…" o "Resuelve…". A menudo la respuesta consiste en un número o una medida y el resultado rige para todos los involucrados. Este tipo de tareas permite a los escolares entrenar capacidades y habilidades en caminos familiares para ellos y adquirir competencias matemáticas sobre esta base. Cuando estas tareas se resuelven únicamente haciendo uso de los procedimientos de cálculo de las últimas clases, entonces se están abordando principalmente —si no únicamente— habilidades de cálculo y procedimentales. Las ventajas de dichas tareas consisten en que suelen ser fáciles de variar, en que con ellas se puede 'coger' práctica y en que las soluciones de los escolares se pueden corregir rápidamente. Todo esto permite una alta densidad de ejercicios; sin embargo, la sostenibilidad de aquello que se ejercita no está garantizada si es que lo aprendido se usa solo de forma mecánica y a modo de receta.

Entiéndase bien: entre las tareas cerradas también existen aquellas que permiten el aprendizaje sostenible de un amplio espectro de competencias. Además, muchas de las tareas en las cuales la exigencia en la resolución de problemas se encuentra en primer plano son en realidad 'cerradas.

Sin embargo, los formatos de tarea cerrados no son suficientes cuando no se trata solo de habilidades sino también de la comprensión y argumentación sostenibles, entre otros. Las tareas abiertas ofrecen buenas posibilidades de ampliar las competencias en estos ámbitos.

Una serie de tipos de tarea como estas se enumera a continuación:

- Dibujar, completar, aplicar.
- Tareas inversas.
- Aprender de errores.
- Comprender representaciones.
- Conectar, procesar e interpretar información.
- Representar resultados.
- Generar tareas propias.
- Preguntas-foto: modelar situaciones matemáticamente.

Esta visión general se guía sobre todo del diseño exterior de las tareas y de las diversas actividades de los escolares. Otra visión estructuraría los tipos de tarea de otra manera; por ejemplo, "Tareas para empezar", "Descubrir relaciones matemáticas", "Encontrar estrategias de procedimiento", "Interpretar resultados", entre otros.

Los siguientes ejemplos y caminos muestran cómo se puede practicar de forma variada (ver capítulo 2, página 97), a veces incluso mediante pequeños cambios al planteamiento de las tareas, y también cómo se puede fomentar y comprobar el desarrollo de las capacidades y competencias mencionadas.

3.2 Dibujar, completar, ampliar y tareas inversas

Un tipo de tarea bastante sencillo en cuanto a su formato (no necesariamente en cuanto a la exigencia), que demanda mayor creatividad y se basa menos en la reproducción, es el requerimiento de anotar algo en un dibujo. Un ejemplo de esto es la tarea "Unidad en la recta numérica" (ver capítulo 1, página 81) o de completar un cálculo.

- En los cuadrados faltan los signos. Completa de modo que la afirmación sea correcta:

  $3 \square 5 \square 7 = 38.$

Completar signos o números bajo ciertas condiciones suele ser poco usual para los escolares e implica por lo tanto una forma de práctica inteligente (ver capítulo 3, página 113).

- Escribe una ecuación cuadrática que dé 0 y 3 como resultado.

Quien pueda resolver esto con éxito ha aprendido más —o al menos algo distinto— que resolver simplemente una ecuación cuadrática: no solo se trata de usar un procedimiento aprendido, sino de *comprender* la relación entre las posiciones cero (*Nullstellen*) de una ecuación cuadrática y la posible representación de una expresión cuadrática.

En este caso se trata de una *tarea inversa* típica: no se debe calcular el resultado sino que se debe encontrar la tarea que corresponde al resultado dado según condiciones secundarias fijas. Aquí se llega a la meta mediante el ensayo repetido o, según la capacidad de rendimiento, mediante una estrategia desarrollada por uno mismo. Esta diferenciación se da naturalmente.

Estas *tareas inversas* tienen una función clave en el proceso de aprendizaje, que va más allá de la misma actividad y que no puede ser sobrevalorada. Se pueden diseñar a partir de tareas estándar y enriquecen tanto la situación de aprendizaje como de rendimiento. Lo importante es que, en general, la tarea inversa se debe presentar de forma casi simultánea con la tarea original, porque ambos tipos de tarea se complementan mutuamente.

Los formatos de tarea como estos son apropiados especialmente para situaciones de aprendizaje, pero también para situaciones de rendimiento (ver capítulo 1, página 81) y se encuentran con cada vez mayor frecuencia en los libros escolares.

3.3 Tareas para marcar, opción múltiple y ampliaciones

En los tests se suelen encontrar tareas para marcar y, en un sentido más estricto, tareas del *formato de opción múltiple*. Si han sido bien preparadas, entonces pueden dan información sobre las capacidades y déficits y así servir de base para un fomento individual.

Lo siguiente es el inicio de una tarea del estudio internacional de rendimiento escolar TIMSS 2, pensada para las clases de sétimo u octavo grado:

Tres números naturales

Christian ha intentado encontrar tres números naturales consecutivos cuya suma es 81.

Ha escrito la siguiente ecuación: $(n - 1) + n + (n + 1) = 81$.

¿Cómo continúa la tarea?

Lo usual son preguntas de tipo "¿Cuánto es *n*?" o "¿Cuáles son los tres números?". Con esto se alude directamente a un procedimiento de solución que quizá se acaba de trabajar en clase y que se debe recorrer sin cometer errores, en la medida de lo posible.

De hecho, la tarea de TIMSS continúa de una forma diferente:

Tres números naturales (continuación)

¿Qué significa la *n*?

- El número más pequeño de los tres números naturales.
- El número del medio de los tres números naturales.
- El número más grande de los tres números naturales.
- La diferencia entre el número más pequeño y el más grande de los tres números naturales.

Se puede resolver esta tarea si uno se da cuenta de que la expresión de la izquierda se compone de los números $n - 1$ (el número más pequeño), n (el número del medio) y $n + 1$ (el número más grande). Por consiguiente, con esto se comprueba en qué medida los escolares *leen* e *interpretan* de forma correcta la ecuación, en especial la expresión izquierda. Por cierto, solo 21% de los escolares alemanes de sétimo grado y 27% de los escolares de octavo grado resolvieron esta tarea correctamente; en el resto del mundo fueron 31% y 37%, respectivamente.

En clase, donde se pueden abordar repreguntas y se puede explicar una pregunta si resulta necesario, basta con una pregunta como:

- ¿Qué ha pensado Christian para llegar a esto?

Algunas de las tareas publicadas de TIMSS y PISA muestran cómo se puede evaluar de forma razonable mediante estas tareas para marcar.

Mitad de *a*

¿Cómo se puede escribir "la mitad del número *a*"? Marca en cada caso la respuesta que corresponde.

$\frac{a}{2}$	Sí	☐	No	☐
$a - \frac{1}{2}$	Sí	☐	No	☐
$\frac{1}{2} \bullet a$	Sí	☐	No	☐
$a - \frac{a}{2}$	Sí	☐	No	☐
$0{,}5 \bullet a$	Sí	☐	No	☐
$a : \frac{1}{2}$	Sí	☐	No	☐
$\frac{1}{a} a$	Sí	☐	No	☐

Se reconoce cómo las alternativas reflejan las estrategias erradas que podría esperarse de los escolares. Por lo tanto, es posible concluir cuáles son los probables errores subyacentes. Por ejemplo, en a $-\frac{1}{2}$ se podría pensar que se debe restar la mitad del valor de una variable, pero incluso si se lee a media voz, se debería notar que '*a* menos un medio' no es lo mismo que '*a* menos la mitad del número *a*'. Por el contrario, en el caso de $a - \frac{1}{2} \bullet a$, algunos pasos mentales son necesarios: se requiere un control de la propia comprensión de la expresión. Por cierto, $\frac{1}{2} a$ se interpreta de forma correcta como $\frac{1}{2} \bullet a$. Evidentemente el signo de multiplicación tiene un ligero efecto sobre la inseguridad. Un análisis detallado y relacionado con las clases de esta y otras tareas se encuentra en Cohors-Fresenborg, Sommer & Sjuts (2004).

A propósito, en la evaluación PISA 2000 en Alemania solo 13% de los jóvenes de 15 años marcaron las siete respuestas de forma correcta.

La siguiente tarea también muestra cómo se pueden capturar nociones erradas comunes mediante este formato de marcar *Sí-No*:

13 por 24

Se debe calcular 13 • 24. ¿Qué caminos de cálculo son correctos?

a) Marca, en cada caso, si la respuesta aplica.

a1) 13 • 20 + 13 • 4	Sí	☐	No	☐
a2) 10 • 20 + 10 • 4 + 3 • 4	Sí	☐	No	☐
a3) 20 • 10 + 3 • 4	Sí	☐	No	☐
a4) 20 • 10 + 4 • 10 + 20 • 3 + 4 • 3	Sí	☐	No	☐
a5) 20 • 13 + 4	Sí	☐	No	☐

La tarea puede resultar un estímulo para tematizar las nociones erradas en relación con las expresiones algebraicas y para aclararlas (repetición que permite profundizar en el manejo de expresiones). Para esto se debe abrir primero el estrecho formato *falso-correcto*:

13 por 24 (continuación)

b) ¿Cómo han surgido estos cálculos?

¿Qué errores se han cometido en los caminos de solución incorrectos?

Finalmente, se puede plantear incluso este tipo de tareas a los escolares:

13 por 24 (continuación)

c) Desarrolla por ti mismo una tarea similar con alternativas de respuestas correctas e incorrectas. Piensa en una secuencia.

Aquel que genera o varía una tarea por sí mismo (ver capítulo 1), aprende más —o al menos algo distinto— que al trabajar únicamente con la tarea. Esto también rige para el docente, por cierto.

En principio, todas estas preguntas abiertas, que estimulan el *Comunicar* y el *Argumentar*, son apropiadas para situaciones tanto de aprendizaje como de rendimiento.

3.4 Aprender de los errores; corregir lo falso de manera fundamentada

También da buenos resultados presentar en una conversación ficticia soluciones falsas o sorprendentes y pedir que las comenten:

13 por 24 (continuación)

d) Klaus: "¿13 • 24? ¡Yo calculo 10 • 20 + 3 • 4!".

¿Qué opinas? Asume una posición y fundamenta tu opinión.

Lidiar con errores de una forma crítica y constructiva es una meta importante de las clases de matemáticas, y a menudo resulta más fácil o divertido descubrir un error y corregirlo con fundamento que tener 'solamente' que calcular bien.

En principio, aquí (también) se trata de las competencias *Argumentar* y *Comunicar*.

Ecuación

a) La ecuación $3x + 5 = 27$ se resolvió de la siguiente manera:

$3x + 5 = 27 \mid :3$

$x + 5 = 9 \mid -5$

$\underline{x = 4}$

Examina los pasos de solución y decide si el resultado es correcto o incorrecto. Corrígelo de ser el caso.

Si un escolar no está acostumbrado a probar si una solución presentada es correcta, mostrará la tendencia a calcular 'como siempre' y a presentar su solución (ojalá correcta) de forma aislada en mayor o menor medida.

Solución del escolar 1

$3x + 5 = 27 \mid -5$ El camino de la solución está mal.

$3x = 22 \mid :3$

$x = 7{,}55$

Solución del escolar 2

$$3x + 5 = 27 \quad | -5$$
$$3x = 22 \quad | :3$$
$$x = 7{,}33$$

La solución en la hoja está mal, porque la solución correcta es 7,35

Esta perspectiva de que ‘calcular por uno mismo basta’ conlleva el sesgo de que una prueba con la solución $x = 4$ por sí misma determinaría si el resultado es falso o correcto.

La meta explícita de la tarea es iniciar un análisis y una discusión sobre los pasos de la ‘solución’ presentada, tal como lo muestra el siguiente trabajo de un escolar:

Solución del escolar 3

$$3x + 5 = 27 \quad | :3$$
$$x + 5 = 9 \quad | -5$$
$$x = 4$$

Cuando él calcula, debe dividir todos los números.
No ha dividido el cinco.

La experiencia muestra que un trabajo así de diferenciado de la solución propuesta es muy poco común si no se conoce este tipo de tareas. Entonces, el buscar el error debe abordarse en la preparación en clase, para que los escolares no se queden solamente en una fijación estrecha y automatizada en ‘el’ cálculo correcto o en ‘la’ secuencia correcta, sino que sean conscientes del sentido de cada paso. Solo así se abordan las competencias *Argumentar* y *Comunicar.*

En los periódicos también suelen encontrarse errores (Herget & Scholz 1998), sobre todo en el ámbito de “Partes y porcentajes”. El siguiente fragmento se ha convertido en algo así como un clásico:

Conductores veloces

Si hace unos años un décimo de los conductores manejaba rápido, ahora es 'solo' uno de cada cinco. Pero incluso el 5% es demasiado, y por eso se sigue controlando, y los conductores veloces tienen que pagar.

Der Spiegel 41/1991, p. 352

Encuentra todos los errores en este artículo del periódico.

Escribe una carta de lector en la que corrijas todos los errores.

Aquí no se trata de calcular el porcentaje o el total; más bien se trata de la comprensión básica de la relación entre porcentaje y parte, así como de reconocer y corregir el segundo error del periodista: las fracciones como $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{10}$ se ordenan mal si solo se presta atención al denominador como *número natural.*

Respuesta del escolar

Cada quinto chofer no es 5% sino 20%.
Además, cada quinto conductor
es mucho más que cada décimo,
y no menos.

Descubrir argumentaciones falsas, destapar errores y corregir fenómenos, fundamentar puntos de vista mediante las matemáticas, todo esto implica lidiar con los recursos verbales de forma crítica. Por eso se recomienda permitir en un inicio que este tipo de tareas se trabaje en clase de forma grupal o en pares, que se recolecten los resultados en plenario y que se intente formular luego como tarea para la casa. Esto se debe conversar en detalle, los diferentes caminos deben tener su lugar y su valor (ver capítulo 2).

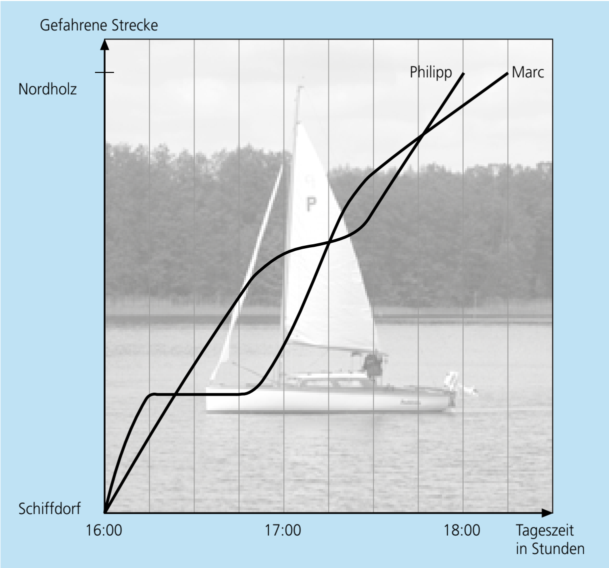
Más adelante es apropiado evaluar de forma individual las formulaciones de la carta del lector. Con el tiempo se puede desarrollar así una postura crítica y constructiva en la clase con respecto a artículos periodísticos errados, llevada a cabo a partir de éxitos preparados con cautela con respecto a la argumentación verbal-matemática. ¡Qué edificante resulta poder demostrarle al periodista formado, al adulto sabelotodo, que se ha equivocado!

3.5 Comprender representaciones, conectar información, presentar resultados

Lidiar con representaciones de forma comprensiva, establecer conexiones adecuadas entre la información contenida en ellas e interpretar un resultado matemático apropiadamente, todas estas son capacidades esenciales que también deben requerirse en las tareas, como por ejemplo en la siguiente:

Reporte de carreras

El gráfico muestra el recorrido de Marc y Philipp en una carrera de veleros de Schiffdorf a Nordholz. Dependiendo del tiempo se muestra el trecho cubierto:



a) Al respecto, escribe un reporte haciendo uso de los siguientes conceptos: orden y distancia entre Marc y Philipp, velocidad (baja, media, alta), aceleración, adelantamiento, parada técnica, llegada a la meta.

¿Qué titular le pondrías a tu informe?

En esta tarea se trata sobre todo de que los escolares lean, analicen e interpreten gráficos (competencia *Usar representaciones*). Se debe verbalizar la información (competencia *Comunicar*), y luego comprimirla de tal forma que se genere un titular significativo. Si se renuncia a la enumeración de los conceptos a utilizar, entonces la tarea resulta más abierta.

El siguiente ejemplo muestra cómo podría verse una variante para este gráfico, cerrada y para marcar.

Reporte de carrera (continuación)

b) Marca en cada caso, la respuesta que corresponde.

b1) Philipp pasa a Marc dos veces.	Sí	☐	No	☐
b2) Philipp pasa a Marc tres veces.	Sí	☐	No	☐
b3) Marc pasa a Philipp dos veces.	Sí	☐	No	☐
b4) No se puede afirmar nada con respecto a quién sobrepasa a quién.	Sí	☐	No	☐
b5) Marc gana esta carrera.	Sí	☐	No	☐
b6) No se puede afirmar nada con respecto al vencedor.	Sí	☐	No	☐
b7) Philipp paró dos veces.	Sí	☐	No	☐
b8) Marc hizo el recorrido sin parar.	Sí	☐	No	☐

En esta variante la competencia *Usar representaciones* es aún más central, en cambio, la competencia *Comunicar* casi no se aborda.

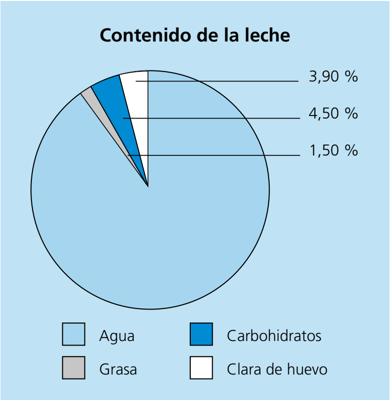
Por consiguiente, se debe comprender información textual o gráfica de diagramas de barras o circulares, procesar matemáticamente de forma adecuada y elegir finalmente una representación apropiada para los resultados:

Diagrama de leche

¿Cuántos gramos de proteína tiene un vaso de leche (200 g)?

¿Cuántos gramos de agua tiene un vaso de leche (200 g)?

¿Cuántos litros de agua tiene un vaso de leche (200 g)?



Primero se debe identificar en el gráfico el porcentaje que corresponde a la proteína y se debe calcular el porcentaje de agua; esto implica *Usar representaciones matemáticas* y sustraer información de ellas. A continuación se deben calcular los porcentajes correspondientes para 200 g de leche y transformar a la medida especificada, lo cual es más bien una tarea estándar del ámbito *Resolver problemas.*

Mascotas

De un artículo de periódico del 29 de abril de 2005:

Cada vez más mascotas en Alemania

Los alemanes tienen cada vez más mascotas. Entre los años 2004 y 2005 el número de perros, gatos, pájaros y animales pequeños (sin contar peces ornamentales ni animales de terrario) ha aumentado en 1,3% hasta llegar a 23,1 millones. La población canina sube en 6% hasta alcanzar 5,3 millones, el número de gatos en 2,7% hasta llegar a 7,5 millones. En cambio, se constató una reducción en el caso de los pájaros, cuyo número disminuyó en 8,7% a 4,2 millones. Según las estadísticas, las personas de 40 a 49 años tienen la mayor cantidad de mascotas; estas personas conforman el 25% de los dueños de animales. El 24% corresponde a las personas mayores de 60 años, que se ubican así muy cerca de la punta.

AFP

a) ¿Cuántos pájaros y cuántos perros había en el año 2004 en Alemania?

b) Representa el número de perros, gatos, pájaros y de animales pequeños en el año 2005 en un gráfico circular.

c) ¿Contiene el artículo información suficiente como para calcular el número de animales pequeños en el año 2004? Fundamenta tu respuesta.

d) Michael dice: "Uno de cada cuatro de los cerca de 80 millones de ciudadanos tiene una mascota, es decir alrededor de 20 millones". Christina piensa que esta afirmación es errada.

Encuentra argumentos en pro de Christina. De ser el caso, explica el problema aplicado en un ejemplo que tú elijas.

Mientras que **a)** apunta solo a la comprensión de textos y **b)** debería resultar un planteamiento familiar, **c)** demanda una reflexión fundamental sobre la problemática a partir de todo el texto. En **d)** surge nuevamente un diálogo ficticio e incitador, un formato de tarea que, como ya se ha descrito, ha demostrado su eficacia en dar pie a una argumentación crítica.

3.6 Generar tareas

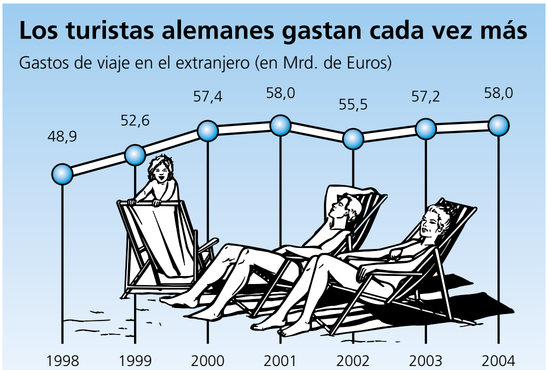
En vez de pedir ‘solamente’ que los escolares resuelvan tareas, puede resultar útil permitir que desarrollen por sí mismos una tarea. De forma similar a las tareas inversas, descritas en párrafos anteriores, estas permiten aprender otras cosas y por otros caminos.

Vacaciones en el extranjero

El gráfico muestra cuánto gastan los alemanes durante sus vacaciones en el extranjero entre los años 1998 y 2004 respectivamente (datos en miles de millones de euros).

a) Verifica el texto debajo del gráfico. ¿Qué te llama la atención?

b) Formula tres preguntas que se puedan contestar mediante este gráfico. Responde cada una de ellas.



Los ciudadanos alemanes se dan el gusto durante sus vacaciones: durante los últimos seis años los gastos en el extranjero se incrementaron en casi 10%.

Fuente: Deutsche Bundesbank/Dresdener Bank, BAT Freizeit, Forschugsintitut

Un procedimiento parecido aplicaría también al artículo del periódico y al gráfico en el caso de las dos tareas anteriores.

3.7 Preguntas-foto: modelar situaciones matemáticamente

Por lo general, una situación se trabaja matemáticamente a partir de una foto. Normalmente se tienen que hacer suposiciones auxiliares, que permiten simplificar, y también se estiman las magnitudes necesarias para poder continuar calculando (Herget, Jahnke & Kroll 2001; Herget & Klika 2003; Büchter, Herget, Leuders & Müller 2006). Esto es bastante característico de los problemas que se presentan en la vida cotidiana en el colegio o más adelante en la profesión.

El globo de fútbol

Un globo de fútbol transportable hizo un viaje por todas las doce sedes del Mundial de Fútbol 2006. En esta pelota gigante se realizaban eventos bajo el lema "Festival cultural en el globo del Mundial". La pelota gigante se iluminaba de noche y representaba el globo terráqueo.

a) Si un futbolista jugara con esta pelota, ¿cuánto mediría él? Describe tu procedimiento.

b) ¿Qué longitud tendría el campo de fútbol correspondiente, si se jugara con esta pelota? Describe tu procedimiento.

El globo de fútbol (continuación)

El pie de bronce gigante de Uwe Seeler recibe a los fans a la entrada del estadio de fútbol de Hamburgo. Este pie de bronce mide 3,50 m de alto, 2,30 m de ancho, 5,50 m de largo y pesa 1,5 toneladas.

Actualmente se está verificando si la escultura puede aparecer como "el pie más grande del mundo" en el libro de récords Guinness.

c) ¿La medida de este pie corresponde al pie del futbolista de la tarea parcial a)?

En un primer momento, esta tarea resulta muy poco usual. La situación es poco estructurada, la herramienta matemática que se debe utilizar no está dada y evidentemente falta información necesaria: ¿cuánto mide el globo de fútbol? ¿Cuánto mide una pelota de fútbol normal? Ambos se deben estimar o investigar. La respuesta a **a)** se halla, entonces, mediante la sencilla regla de tres. Así se llega rápidamente a una buena solución aproximada.

Para las siguientes soluciones de los escolares se había medido antes un diámetro de 70 cm en una pelota común.

Solución del escolar 1

La pelota mide 10 m. Nos hemos orientado con la puerta de 2 metros de altura. Un futbolista de estatura normal mide cerca de 1,70 cm. La pelota de fútbol mide 22 cm.

Cálculo: P = 70 cm : π = 22 cm

Ahora calculamos 1,70 cm : 0,22 · 10 m

El resultado es 77,26 m.

Eso quiere decir que los futbolistas que deben jugar con una pelota de 10 metros de altura, deben medir cerca de 77,26 m.

El pie no puede pertenecer a los jugadores gigantes, porque es muy pequeño.

Cálculo: 1,80 cm : 25 cm = 7,2 cm

77,26 cm : 5,50 cm = 14,04

77,26 : 7,2 = 10,73 cm

Esto quiere decir que el pie de los jugadores gigantes tiene que medir 10,73 cm.

El manejo errado con unidades de longitud en este ejemplo debe saltar a la vista a más tardar cuando se lee la oración final. Es concebible retomar esta solución y usar la tarea en el sentido de aprender del error.

Los resultados se suelen presentar primero —tal como sucedió en este ejemplo— con demasiada exactitud. Luego, la discusión sobre las diferencias entre los resultados dentro de la clase conduce a una ‘modestia’ adecuada, en el sentido de saber que en este tipo de tareas la inexactitud de los resultados es en principio inevitable.

Más allá de habilidades sencillas, se ponen en práctica ideas centrales como las de medir, aproximar, y también la idea directriz *Espacio y forma*, así como la idea de la linealización (ver también la tarea de investigación “Burbuja de jabón” en el capítulo 1, página 92).

Solución del escolar 2

Nosotros calculamos que la pelota mide 10 metros de altura, pues estimamos que la puerta mide cerca de 3 metros y entra tres veces un metro.

a) Una pelota tiene 70cm y el promedio 22,28cm.

$P = \pi \cdot d \mid : \pi$

$P/\pi = d$

$70/\pi = 22{,}28\text{cm}$

Un futbolista normal mide aproximadamente 1,75 de altura.

La relación de la pelota grande a la pequeña es de 44,88.

El cálculo:

10 m = 1 000 cm

1000cm : 22,28 = 44,88cm

La relación de persona grande a persona pequeña es 7 854 cm : 100 = 78,54 cm

Persona pequeña	Persona grande
1,75m	22,28 m
Persona grande 78,54m	Pelota grande 10m

No cabe, porque el pie de Uwe tendría que ser cerca de 12 para que quepa.

Yo mido 1,75

El largo de mi pie 28

La relación 1,75 : 28 = 6,25cm

Luego dividimos el enorme con la relación 78: 6,25 = 12m

Entonces no resulta, porque el pie de Uwe Seeler mide 5,50m.

Al resolver estas tareas, los escolares pueden (aprender a) decidir cómo estructurar, idealizar y matematizar la situación y qué procedimiento elegir en cada caso. Pueden (aprender a) buscar, elegir, estimar, interpretar y evaluar de forma autónoma. Por ende, una tarea de este tipo aborda muchas competencias matemáticas diferentes a lo largo del proceso de solución.

Y en todo esto no existe *un único* camino correcto, *una única* respuesta correcta: las tareas son más bien de tal forma que demandan varias soluciones, que permiten ideas de solución muy diversas. Es interesante que estas tareas resulten apropiadas incluso para los grados menores y se pueden aplicar antes de que los contenidos matemáticos 'correctos' se aborden en clase.

El rol del docente cambia, sobre todo cuando se usan estas tareas en clase: pasa de ser un 'proveedor de conocimiento' a ser un 'moderador de conocimiento'. Se vuelve cada vez más importante observar con mucho cuidado los enfoques de solución de los escolares, estimular y acompañar su trabajo a partir de un propósito específico, y finalmente reflexionar con los grupos y con la clase completa sobre las diferentes estrategias de solución, así como señalar las ideas centrales que se encuentran en cada una. En esto rige siempre que, ante situaciones tan abiertas y procesos de solución tan variados, se evidencie el 'hilo conductor' en clase.

Se requiere, en mucha mayor medida que en el trabajo con tareas estándar, argumentos en vez de algoritmos:

- Un manejo soberano tanto de la riqueza como de los déficits de información.
- Una investigación limpia y creativa, así como una idealización autónoma.
- Una idea de las magnitudes y estimaciones.
- La diferenciación entre lo importante y lo accesorio, lo correcto y lo cuestionable.
- La elección de herramientas matemáticas apropiadas.
- La inserción y conexión en una reserva de conocimientos, que uno mismo se apropia.
- La comunicación con otros, la argumentación y la reflexión a lo largo de los diferentes procesos de solución.
- La hábil combinación de información y resultados para mostrar a los otros.

BIBLIOGRAFÍA

Büchter, A., W. Herget, T. Leuders y J. Müller (2006). *Los materiales Fermi-Box. Para las clases de matemáticas de Secundaria*. I. Erscheint bei: Kallmeyer, Seelze.

Cohors-Fresenborg, E., J. Sjuts y N. Sommer (2004). Complejidad de los caminos de pensamiento y formalizaciòn del conocimiento. En: Neubrand, Michael (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland*. *Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000*. Wiesbaden, S. 109-144.

Herget, W., T. Jahnke y W. Kroll (2001). *Tareas productivas para las clases de matemáticas en el nivel Secundaria I*. Berlín: Cornelsen.

Herget, W. Y M. Klika (2003). Fotos y preguntas. Medir, adivinar, reflexionar - muchos caminos, muchas ideas, muchas respuestas. *Mathematik Lehren*, Heft 119, S. 14-19.

Herget, W. y D. SCHOLZ (1998). La algo distinta tarea del periódico. Mathematik - Aufgaben Sek. I. - Kallmeyer, Seelze.

4. REFERENCIAS A LA REALIDAD

Timo Leuders, Dominik Leiß

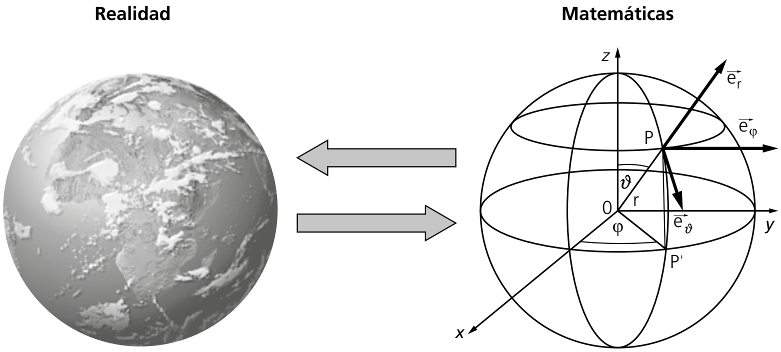
Las matemáticas viven también de su referencia a la realidad. Ellas ofrecen, sobre todo, diversos modelos para la descripción de fenómenos reales en nuestro mundo natural y técnico. El siguiente aporte busca alumbrar estas relaciones entre las matemáticas y la realidad mediante un espectro de tareas referidas a esta última. Las tareas utilizadas describen diversos aspectos de la referencia a la realidad, así como la variedad de competencias que se pueden desarrollar en el marco del uso de modelos matemáticos.

4.1 Matemáticas y realidad

Cualquiera que hace matemáticas —sea un escolar o un científico— no puede evitar notar en algún momento que llevan una doble vida interesante: por un lado, sirven para registrar, describir y clarificar situaciones del mundo que nos rodea, para comprender e incluso predecir fenómenos; por otro, en las matemáticas se debe lidiar con ideas abstractas y estructuras mentales, por ejemplo con variables. Por lo tanto, los objetos de las matemáticas son tanto ideas abstractas como modelos para describir la realidad concreta, incluso simultáneamente. Las clases de matemáticas deben permitir que el escolar experimente ambas caras de las matemáticas. Deben tener la experiencia de saber cómo se examinan patrones abstractos y se reconocen estructuras, como por ejemplo las relaciones entre los ángulos o las regularidades en secuencias numéricas, pero también deben enfrentarse a problemas y situaciones relacionadas con la realidad, para cuyo registro y comprensión las matemáticas constituyen una herramienta poderosa. Este es el contenido de las experiencias básicas, tal como exige H. Winter para las clases de matemáticas (ver capítulo 1, página 21).

La forma como las matemáticas y la realidad se encuentran en la clase determina, en gran medida, qué imagen desarrollarán los escolares de las matemáticas. El uso de las matemáticas en situaciones reales está impregnado de una variedad de actividades: los escolares deben experimentar en clase cuál es el poder, pero también cuáles son los límites de los modelos matemáticos. Ellos deben usar y evaluar los modelos vigentes, pero también formular modelos de forma autónoma y emplearlos. Deben interpretar las soluciones a las que llegaron mediante un modelo matemático, y evaluar a continuación si el modelo ayudó a resolver el problema planteado de forma adecuada. Todas estas acciones pertenecen a *Modelar* *matemáticamente* (Leuders & Maaß 2005; Blum & Leiß 2005 y la descripción de la competencia *Modelar*, en el capítulo 2, página 33).

Naturalmente, no todas estas actividades deben ser incitadas en todas las tareas en todo su despliegue: es posible promover solo procesos parciales del modelado mediante una tarea y el trabajo con ella.



Para que los escolares puedan tener estas experiencias, es necesario cumplir dos condiciones: (i) las tareas que trabajan deben ofrecer oportunidades apropiadas para aprender, y (ii) el docente debe organizar una clase que los apoye en ello de forma adecuada y suficiente. Con respecto a las condiciones de la clase, se incluyen, por ejemplo, formas de enseñar que permitan un trabajo activo y autónomo con problemas variados, el respaldo del docente y una comunicación abierta a críticas sobre los enfoques de solución, los errores y las diversas interpretaciones (ver Leiß, Möller & Schukajlow 2006, entre otros).

Las tareas que encarnan de forma apropiada las referencias a la realidad pueden tener una naturaleza muy distinta. Se trata, por ejemplo, de tareas en las que los escolares:

- Usan modelos matemáticos para registrar y resolver problemas referidos a la realidad.
- Desarrollan prescripciones matemáticas para tomar decisiones o evaluar situaciones.
- Esbozan ilustraciones de medidas o las cuestionan.
- Encuentran por sí mismos las matemáticas en el mundo mediático o real.
- Utilizan y desarrollan conceptos o procedimientos matemáticos al trabajar con problemas de la realidad.

4.2 Registrar y resolver problemas referidos a la realidad

Mermelada

Carola Lützel prepara mermeladas y jaleas muy ricas. Ella decide vender sus productos para generar una ganancia y ya no regalarlos más a sus amigos y familiares.

a) Las mermeladas de Carola están hechas de una parte de azúcar y dos de fruta.

Calcula cuántos potes de 450 g de mermelada puede preparar Carola, si tiene 100 kg de fruta.

b) Para la mermelada, Carola necesita potes vacíos de diferentes tamaños. Un comerciante ofrece potes con tapa en tres tamaños distintos. Ella sabe que en un pote de 350 ml de capacidad se puede poner alrededor de 450 g de mermelada.

Calcula cuántos gramos de mermelada caben en un pote de 190 ml y en uno de 280 ml.

c) Carola ha calculado que el costo de los materiales para la producción de 1 kg de mermelada de frambuesa asciende a EUR 2,10. El pote vacío con tapa para 450 g de mermelada cuesta EUR 0,51 en el mercado mayorista.

¿A qué precio debería vender Carola el pote de 450 g de mermelada de frambuesa? Propón un precio de venta y fundaméntalo.

Las competencias necesarias para resolver estas tareas parciales son, sobre todo, *Modelar* y *Comunicar*. Así rige que —más allá de comprender los fenómenos descritos— se deben establecer numerosas conexiones entre los datos de proporción y cantidad para poder llegar a un resultado. La siguiente respuesta a la **tarea parcial a)** muestra que los escolares no deben dejar de lado el contexto:

Respuesta del escolar 1

a) Fruta $= \frac{2}{3} = 100$ kg $= 100\ 000$ g

Azúcar $= \frac{1}{3} = 50$ kg $= 50\ 000$ g

$150\ 000$ g $: 450 = 33,3$

1350
1500
1350
1500
1350
150

Rpta: puede preparar 333 pots.
Sobra 150g (100g de fruta y 50g de azúcar).

Un procedimiento que no tome en cuenta la situación real habría llevado a proponer 333,33 como resultado final. Sin embargo, hubiese sido deseable una reflexión más del escolar con respecto a los límites del modelo. El escolar no habría respondido entonces con un número exacto (333) de potes, sino con un número redondeado (por ejemplo "alrededor de 330") y habría hecho referencia a la pérdida de peso en fruta, ya sea por las pepas, el desperdicio, entre otros.

En el siguiente trabajo con la **tarea parcial b)** también se hace evidente que una reflexión crítica sobre la exactitud, que tenga en cuenta la situación real, queda fuera:

Respuesta del escolar 2

b) 450 : 350 = 1,28 = ≈ 1,3
350
1000
700
3000
⋮

190 · 13
190
570
247,0g

280 · 13
280
840
64,0g

Rpta: en los de 190 ml caben 247g, en los de 280 ml caben 364g.

La competencia *Comunicar* se refiere, en primer lugar, a la comprensión del texto, y luego a una presentación comprensible del camino de solución. Así, en el caso de la siguiente solución a la **tarea parcial c)**, no es evidente qué calculó la escolar y, sobre todo, queda poco claro en qué reflexiones se basa para llegar al precio de EUR 2 por pote. En el sentido del *Comunicar*, la presentación de los pasos dados, así como del razonamiento, era un componente necesario de la solución a esta tarea.

Respuesta de un escolar 3

c) 1kg = 2,10 €
1000g = 210 ct

100g = 21ct
0,21 · 4,5
84
105
0,945 € = 0,95

95ct
+ 51ct
1,46 €

Rpta: debería cobrar cerca de 2 euros por pote.

Lo que se indica en esta tarea para las partes **a)**, **b)** y **c)** son preguntas que se proponen una situación de venta de este tipo o similar. El manejo comprensivo de los números dados forma la base para resolver de manera adecuada un problema relacionado con la realidad. En una situación auténtica los pasos de solución no estarían separados unos de otros de forma tan clara y los datos necesarios no se presentarían de manera tan limpia: por ejemplo, el volumen de los tres tipos de pote se tendría que averiguar en internet, mediante una llamada telefónica o haciendo mediciones.

Si uno quiere que los escolares realmente hagan uso de las competencias de modelado que se describieron anteriormente, entonces se puede plantear la tarea de forma más abierta:

> Carola Lützel prepara mermeladas y jaleas muy ricas. Ella decide vender sus productos para generar una ganancia y ya no regalarlos más a sus amigos y familiares.
>
> **a)** Recopila todo lo que Carola debe saber o calcular para poder hacerlo.
>
> **b)** Luego, haz una propuesta fundamentada de cuánto debería costar cada pote de mermelada.

Este tipo de problemas abiertos refleja de forma más realista aún cuál es el uso de las matemáticas. Sin embargo, son laboriosos y no siempre se pueden implementar en clase. En este caso, por ejemplo, los escolares necesitarán acceso a internet y tendrán que experimentar con potes, fruta y agua. Naturalmente, entre las dos variantes presentadas existen niveles intermedios de apertura.

Pero sin este tipo de apertura también se puede reforzar el carácter realista de tareas como esta. Para evitar que los escolares solo vean la tarea matemática detrás de esta situación y que dejen de lado la relación con la realidad en sus cálculos, se puede exigir una reflexión seria sobre el contexto y los supuestos que devienen para el modelo. Por ejemplo:

> **c)** ¿Qué simplificaciones y supuestos se hallan en la tarea que uno quizás debería observar? ¿Qué efecto tienen sobre los cálculos? ¿Qué otras preguntas podría hacer Carola y responder quizás con la ayuda de las matemáticas?

Todas las actividades que se espera a partir de estas preguntas corresponden a problemas auténticos, que se pueden resolver mediante las matemáticas. Nadie exigiría que se calcule el volumen de un prisma de base hexagonal si en la situación real lo que se haría es medirlo.

Uno podría objetarle a la tarea "Mermelada" que finalmente no representa un uso auténtico de las matemáticas. Esta limitación aplica en principio a todos los problemas que se plantean en el contexto escolar, dado que se puede ver a la escuela como un espacio libre para probar sin compromisos. Esto cambia cuando las situaciones de aplicación dejan de ser hipotéticas; por ejemplo, se debe planificar la compra de bebidas para una fiesta escolar o la compra de material para alguna remodelación. En tales oportunidades se prueba el uso de las matemáticas en la práctica. Una clase organizada en forma de proyecto puede garantizar esto y debería llevarse a cabo de tiempo en tiempo (ver capítulo 4, página 126).

4.3 Desarrollar prescripciones matemáticas para tomar decisiones o evaluar situaciones

Los modelos que se mencionaron en los párrafos anteriores describían en principio fenómenos reales. Sin embargo, también hay situaciones como la siguiente, en las que la realidad recién se determina a partir de la elección del modelo matemático (ver Büchter & Leuders 2005, página 127):

Costos de vacaciones

En agosto de 2003 las familias Ritterbach y Fleig pasaron sus vacaciones de catorce días juntas en un departamento en el Mar Báltico. La familia Ritterbach está compuesta por dos adultos y un hijo; la familia Fleig, por el señor Fleig, papá soltero, y su hija. Ambos niños tienen 10 años. Han gastado EUR 960 en alimentación y paseos conjuntos en el carro de la familia Ritterbach.

El señor Ritterbach propone que cada familia pague la mitad de los costos totales. El señor Fleig no está de acuerdo. ¿Qué repartición podría proponer el señor Fleig? Piensen en al menos una propuesta. Calculen los costos para cada familia según cada propuesta.

Los escolares suelen encontrar tres modelos: cada persona paga lo mismo, los niños no pagan o los niños pagan la mitad. Esto lleva a prorrateos de relación 3 : 2; 2 : 1 o 2,5 : 1,5. ¿Qué modelo de prorrateo es mejor? No se puede decidir cuál es más cercano a la realidad; más bien se debe tomar una decisión racional y consensuada, haciendo uso de un 'modelo normativo', y determinar qué distribución se debe realizar.

De hecho, en la **tarea parcial c)** de "Mermelada" es necesaria una modelación normativa del mismo tipo: el precio a fijar no se fundamenta solo en consideraciones matemáticas. Lo importante es que los escolares lo reconozcan y perciban los espacios de maniobra que se generan al resolver la tarea.

4.4 Hacer ilustraciones o cuestionar críticamente magnitudes dadas

En las situaciones presentadas hasta el momento se mostraban problemas para cuya solución era necesario elaborar un modelo matemático. También existen situaciones en las que un problema ya está resuelto, por ejemplo en las que ya se calculó una cantidad o ya se conoce una magnitud. En esos casos rige permitir que esta magnitud 'hable': ¿cuánto es US$ 50 000 millones (la fortuna estimada de Bill Gates)? ¿Cuánto es un millón de cálculos (el rendimiento de una computadora de un megaflop)? También en estos casos se pueden usar modelos matemáticos y dar a los resultados (matemáticos) un significado, es decir, traducirlos a una situación imaginable, tal como en la siguiente tarea:

Desmonte

En el año 2007 se realiza en Gera y Ronneburg, en Thüringen, una exposición nacional de jardines. En marzo de 2005 empieza la limpieza de las últimas dos laderas de desmonte de la mina de uranio en las cercanías de Thüringen.

Hasta 2007 se deben despachar alrededor de 8,2 millones de m^3 de desmonte de una antigua explotación a tajo abierto.

En un comunicado de prensa, publicado por la empresa WISMUT-GmbH el 17 de marzo de 2003, aparece la siguiente imagen:

Elige una comparación de la vida cotidiana para esta cantidad de desmonte.

Solución del escolar 1

8 200 000 m^3

Edificio con terreno: 20m 20m = 400m^2

20m de alto: 4 000 m^3

→ 2 000 edificios.

Solución del escolar 2

Volumen de esta habitación: 6m · 3m · 10m = 180m^2

8. 200. 000 : 180 = 46 000

⇒ Se deben despachar 46 000 habitaciones de desmonte.

El manejo de números y magnitudes también es un componente fundamental de la formación matemática general. La información en los medios actuales es muy rica —quizás demasiado—en números. Uno debe estar en condición de cuestionar críticamente esta información numérica e incluso de poder verificarla (Herget & Scholz 1998, Brauner & Leuders 2006). Un ejemplo:

Orangután

Este es un fragmento de un artículo del periódico sobre la destrucción de la selva en Borneo. Comprueba los datos comparativos de la última parte del artículo.

No hay lugar para el orangután

En Borneo, la selva desaparece cada minuto en una magnitud de dos canchas de fútbol, lo cual tiene consecuencias catastróficas, no solo para los monos.

"Cada año talamos dos millones de hectáreas", dice Soetino Wibowo, director general del Ministerio de Bosques indonesio. Dos millones de hectáreas. Sí, dos millones. La mitad de Israel. Cada año. Más de dos canchas de fútbol por minuto. […]

Frankfurter Rundschau,
8 de junio de 2005

Un atractivo especial de tareas de este tipo es permitir diferentes posibilidades de solución, que no se evalúan según el criterio correcto o incorrecto, sino según su utilidad y claridad.

4.5 Encontrar las matemáticas en el mundo real

Mientras que la mayoría de tareas para modelar son impuestas por el docente o por el libro de texto, también se puede incitar a los escolares a que busquen por sí mismos ocasiones para usar las matemáticas en el mundo real y mediático. En el artículo del periódico del ejemplo anterior, las preguntas matemáticas que se pueden hacer son bastante obvias. Más allá de estas, se puede dar el encargo mucho más abierto de observar el mundo a través de lentes matemáticos por un tiempo y de anotar todo aquello que se puede registrar mediante las matemáticas en una especie de 'diario matemático'.

4.6 Desarrollar conceptos o procedimientos matemáticos para resolver situaciones reales

En las tareas anteriores se usaron como modelos, en situaciones reales, conceptos y procedimientos matemáticos que probablemente se aprendieron antes; por ejemplo, se utilizó el procedimiento de la regla de tres, y con ello, el modelo de la correspondencia proporcional para convertir magnitudes. Tales tareas —si se usan de forma unidireccional y sin acompañarlas de reflexión— pueden dar la impresión equivocada de que las matemáticas no son más que un depósito de modelos o procedimientos que se usan en problemas de la realidad, mediante la elección y aplicación del modelo adecuado.

Esta perspectiva oculta el hecho de que los modelos matemáticos no son predecesores de los problemas, sino que suelen haberse desarrollado a partir de problemas concretos. Esto rige para la mayor parte de las matemáticas que se trabaja en el colegio y, más que una constatación, se trata de un hecho histórico. Esta perspectiva es una gran oportunidad para el diseño de procesos de aprendizaje exitosos. En el así llamado "aprendizaje genético", los conceptos matemáticos no se transmiten como si estuvieran terminados y luego se utilizan. Más bien los escolares pueden vivir en carne propia cómo los conceptos matemáticos surgen de forma orgánica de la solución a problemas. Hans Freudenthal se expresó de la siguiente manera con respecto a este tipo de relación con la realidad: "Uno usa las matemáticas al crearlas de nuevo" (Freudenthal 1976, página 114). Este principio no puede determinar cada proceso en clase, pero tampoco debe echarse al olvido.

Una tarea que refleja este principio es la siguiente:

Licencia de conducir

A los 12 años, Karina recibió de su madrina una cuenta de ahorros con EUR 600. La cuenta se abrió por un período de 6 años (plazo fijo) con un interés de 3,5%. Al final de cada año, ella recibe como interés el 3,5% del dinero que ya se encuentra en la cuenta.

"¡Con esto pagaré mi licencia de conducir!", le dice Karina a su amiga Sabine.

"¡Jamás te alcanzará!", le responde Sabine. "La licencia cuesta por lo menos EUR 1 000!".

a) ¿Por qué piensa Karina que alcanza?

b) ¿Tiene razón Sabine? En ese caso, ¿cómo así? Si no, ¿por qué no? Puedes usar tablas o gráficos para fundamentar tus afirmaciones; incluso puedes trabajar con una hoja de cálculo en computadora.

c) ¿Puedes presentar una situación propia y similar en la que uno también se equivoque en su estimación en un primer momento?

Es decisivo que esta tarea se aplique antes de trabajar con el crecimiento porcentual (exponencial). El contexto realista y de fácil acceso respalda a los escolares en la exploración de la situación. Las representaciones y los conceptos que ellos encuentran son transitorios y conducen al concepto buscado de crecimiento porcentual.

Tareas como esta se caracterizan porque no eliminan la complejidad (en este caso: la contraposición de crecimiento lineal y porcentual), sino que le dan la oportunidad y el tiempo a los escolares de pasar por estas aparentes contradicciones y de tener experiencias propias.

Los escolares no sacarán a relucir todos los aspectos matemáticos fundamentales en esta tarea, pero habrán recolectado suficientes experiencias como para comprender una posterior formalización matemática.

Recién después se concretarán sus conceptos transitorios y sus ideas aún poco precisas. También se introducirán las representaciones y nomenclaturas matemáticas normadas. La tarea muestra cómo una referencia a la realidad exitosa puede respaldar a los escolares en que ellos mismos desarrollen conceptos y procedimientos matemáticos.

4.7 Vestimentas: éxitos y fracasos en las referencias a la realidad

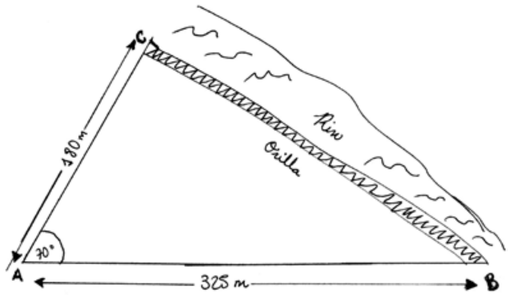
En tareas como las precedentes los escolares aprenden que las matemáticas son un instrumento adecuado para describir y lidiar con situaciones en la realidad. Sin embargo, también existen tareas en las que esta imagen se distorsiona. Esto sucede, sobre todo, cuando los contextos reales son solo 'pseudocontextos', es decir, situaciones reales que fueron inventadas para estimular actividades matemáticas. El desempeño de los escolares que resuelven dichas tareas consiste menos en modelar que en 'desvestir' una tarea. A continuación un ejemplo:

Terreno de camping

Los miembros de la asociación de camping Rheinaue quieren reparar el camino de la orilla del Rhein.

El Directorio de la asociación asume que el trabajo terminará en una semana, si es que cada día se logra avanzar 50 m.

¿Tú qué opinas? Fundamenta tu respuesta.



Camping Rheinaue (El bosquejo no está a escala).

La vestimenta realista de esta tarea es problemática porque, si uno tiene sentido común, se pregunta: ¿cómo así se conoce con tanta exactitud la distancia hasta el río, pero no la longitud paralela al río? ¿Por qué no se puede estimar la longitud de la orilla midiéndola con pasos? Uno fuerza justamente a que los escolares no tomen en serio el contexto para resolver esta tarea. Entonces, el efecto de aprendizaje implícito es: "Las matemáticas solo sirven para resolver tareas del libro".

¿Cómo nace este tipo de tareas? El propósito es bueno: un procedimiento matemático, como la ley de los cosenos, se debe aplicar en una situación. Sin embargo, la aplicación solo está 'actuada', se ha 'vestido' la ley de los cosenos. ¿Cómo se podría remediar esto? O se desviste el procedimiento y se pide a los escolares que calculen sobre un triángulo, o se encuentra una aplicación que presente de forma verosímil la utilidad de la ley de los cosenos, lo cual hace necesario tener conocimientos más exactos de agrimensura. Quizás la ley de los cosenos no sea un mandato para el cálculo práctico, sino una relación que resume de forma simbólica la situación estándar de calcular triángulos a partir de tres magnitudes parciales.

Pero tampoco se debe exagerar: no toda tarea vestida se debe evaluar solo a partir de su autenticidad. Las vestimentas también tienen un lado positivo. Estas ofrecen a los escolares un contexto comprensible y accesible, en el que se pueden mover con sus experiencias cotidianas. Se debe sopesar con cuidado si las metas justifican el uso de una tarea vestida, porque la imagen de las matemáticas que se transmite mediante ellas resulta siempre problemático.

Un ejemplo de una tarea 'vestida' bien lograda quizás sea el siguiente:

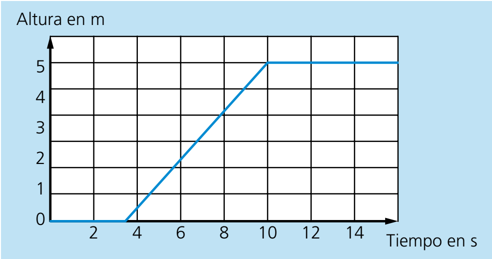
Escalera eléctrica

Hanna sube por las escaleras mecánicas de un centro comercial. Se puede representar su movimiento mediante un gráfico de función:

a1) ¿Qué se puede leer de este gráfico?

a2) El gráfico no refleja del todo el movimiento. Haz propuestas de mejora.

a3) Haz un gráfico correspondiente para el movimiento de un ascensor (de un remonte de esquí, de un paternóster - ascensor cíclico) y compara.



Pero, ¿por qué es esta una tarea 'vestida' bien lograda y la tarea del camping una problemática? El siguiente principio puede servir para diferenciar entre pseudocontextos problemáticos y tareas 'vestidas' justificadas (según Jahnke 2005):

- *¿La tarea muestra cómo así las matemáticas ayudan a comprender la realidad?*

  Entonces hay una referencia auténtica a la realidad.

- *¿La tarea muestra cómo la realidad ayuda a comprender las matemáticas?*

Entonces se trata probablemente de una tarea 'vestida' útil. Sin embargo, si la tarea sugiere una referencia a la realidad en el sentido de la primera pregunta, pero realmente no se presenta así o es incluso disparatada en la práctica, entonces se trata de un pseudocontexto problemático.

La transición es difusa. No es fácil determinar cuándo deja de ser una simplificación didáctica y se vuelve una falsificación. Si uno quiere evaluar una referencia a la realidad de este tipo, entonces uno puede preguntarse, quizás:

- ¿Se ha reflejado aquí el tipo de uso de las matemáticas de una forma —en principio— correcta?
- ¿Habría mejores contextos?
- ¿Se podría resolver un problema real usando las matemáticas de esta manera?
- ¿El contexto sugiere un carácter lúdico y poco serio, o sugiere, sin razón, que las matemáticas se ejercen de esta manera?

4.8 Notas finales

La mirada retrospectiva a los ejemplos de tareas aquí presentados muestra que las referencias a la realidad en las clases de matemáticas abarca un gran espectro. Desde las aplicaciones auténticas en proyectos hasta las tareas 'vestidas', todos los tipos tienen su justificación específica. La situación se vuelve problemática recién cuando la clase o el libro escolar restringen demasiado la referencia a la realidad o, por el contrario, cuando esta se vuelve el único criterio.

La meta de tener en cuenta las referencias a la realidad es, por un lado, el fomento de competencias matemáticas, y por otro, la transmisión de una imagen adecuada y rica de las matemáticas. Ambas son condiciones para que los escolares conozcan, valoren y usen las matemáticas como una herramienta útil más adelante en sus vidas.

BIBLIOGRAFÍA

Blum, W. y D. Leiß (2005). Modelar en clase con la tarea "Poner gasolina". *Mathematik Lehren*, Heft 128, S. 18-21.

Brauner, U. y T. Leuders (2006). Es cierto, lo leí en el periódico… Las matemáticas como medio de emancipación. *Pädagogik* 5/2006.

Büchter, A. y T. Leuders (2005). *Desarrollar tareas matemáticas por sí mismo*. Berlín: Cornelsen Scriptor.

Freudenthal, H. (1976). *Matemáticas como tareas pedagógicas*. Stuttgart: Klett.

Henn, H.-W. (2000). Referencias a la realidad en las clases de matemáticas. En: Flade, L./Herget, W. (Hrsg.): *Mathematik Lehren* und *Lernen Nach TIMSS*, Volk und Wissen, Berlin, S. 13-24.

Herget, W. y D. Scholz (1998). *La algo distinta tarea del periódico*. Seelze: Kallmeyer.

Jahnke, TH. (2005). *Para la autenticidad de las tareas matemáticas. Aportes para las clases de matemáticas 2005*. Hildesheim: Franzbecker.

Leuders, T. y K. Maaß (2005). Modelar - Puentes entre el mundo real y las matemáticas. *Praxis der Mathematik* 3/05.

Leiß, D., V. Möller y S. Schukajlow (2006). Cerveza para el bosque de lluvias - Diagnosticar e investigar con tareas de modelado. *Friedrich Jahresheft* XXIV, S. 89-91.

Winter, H. (1985). *Cálculos en situaciones de contexto real en la escuela primaria*. Cornelsen Scriptor.

PARTE 4

COLECCIÓN DE TAREAS

Compilación de Christina Drüke-Noe/Ralph Hartung/Alexander Roppelt

Esta parte contiene una compilación de tareas orientadas al desarrollo de competencias realizada por los grupos regionales (ver parte 5). La correspondencia de las tareas y sus respectivas subtareas con las ideas directrices, las competencias matemáticas generales y los ámbitos de exigencia se pueden consultar en el capítulo 5.2.

Diferencias

Se tiene la recta *g* con la ecuación $y = 2x - 3$ y la parábola *p* con la ecuación

$y = x^2 - 4x + 7$.

a) ¿En qué puntos es menor la diferencia entre los valores de función de ambos gráficos?

b) Traslada la recta g en dirección y (hacia ambos lados) y examina la influencia de la traslación sobre la solución de a).

El puente Fehmarnsund: la percha más grande del mundo

El puente Fehmarnsund une la isla Fehmarn con la tierra firme alemana.

Datos técnicos:

Longitud total del puente: 963,4 m
Altura del punto más alto del arco sobre la superficie marina: 68 m
Altura del puente disponible para tránsito de barcos: 23 m
Longitud de base del arco: 248 m
Altura del arco sobre la vía: 45 m

El arco del puente tiene forma parabólica.
Define una ecuación de la función que describa al arco del puente.

Desperdicio

En el curso de Formación Laboral se debe producir una esfera, lo más grande posible, a partir de un cubo de madera con longitud de arista de 10 cm.

Klaus dice: "Eso genera casi 50% de desperdicio".

Petra responde: "No, como máximo una cuarta parte".

¿Quién tiene razón? Argumenta tu respuesta.

©panama fotoproduktion, Dirk Krüll, Düsseldorf

Copa de árbol

Los árboles son nuestra fuente más importante de oxígeno. Por ese motivo, la tala de un árbol maduro debe ser reemplazada por la siembra de múltiples árboles jóvenes. Los árboles de copa producen por cada centímetro cuadrado de superficie de hoja aproximadamente 1,9 ml de oxígeno al día. La producción total de oxígeno del árbol depende del número total de hojas. Para una estimación gruesa se asume que la densidad de hojas es constante en todas las partes de la copa de un árbol.

Durante los trabajos de habilitación en una zona industrial, se debe talar un árbol maduro (ver foto) con un diámetro de copa de 12 m. La empresa constructora debe compensar esta tala con la siembra de 100 árboles jóvenes de la misma especie con un diámetro de 1,5 m cada uno. Realiza un cálculo que permita determinar si esta plantación es suficiente para compensar inmediatamente la producción de oxígeno del árbol viejo. Describe tu procedimiento.

Clavo récord

Para entrar al libro de récords de Guiness, el señor Clavo desea colocar frente a su hospedaje un clavo de acero sobredimensionado como reloj solar. Ya ha realizado un diseño en la computadora que permite ver cómo se debería ver el clavo.

El clavo tiene aproximadamente 7 m de longitud y un diámetro aproximado de 22 cm. La grúa que está disponible para instalar el clavo en su posición puede levantar una masa de 1,5 t como máximo (tip: 1 cm^3 de acero pesa 7,85 g).

¿Se puede colocar el clavo con esta grúa?

Describe tu procedimiento.

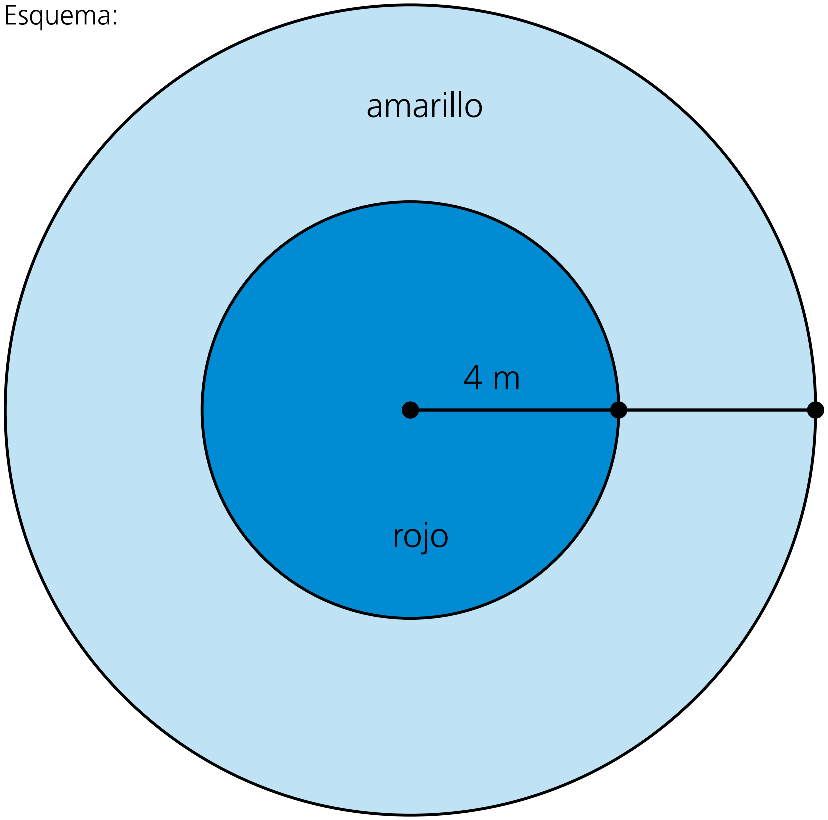
El rosedal

Un jardinero ha recibido del dueño de un jardín el encargo de plantar un rosedal con rosas rojas y amarillas. El cliente tiene un terreno amplio y desea un rosedal redondo, que esté cubierto de rosas rojas en el centro y rosas amarillas en el borde.

El jardinero ha recibido dos entregas de igual número de rosas rojas y amarillas. Reflexiona que las rosas rojas alcanzan para sembrar un rosedal redondo con un radio de 4,0 m. Las rosas amarillas se deberían sembrar alrededor del rosedal rojo, alcanzando una superficie del mismo tamaño (ver esquema).

¿Cuán ancho debería ser el anillo externo de rosas amarillas? Redondea el resultado.

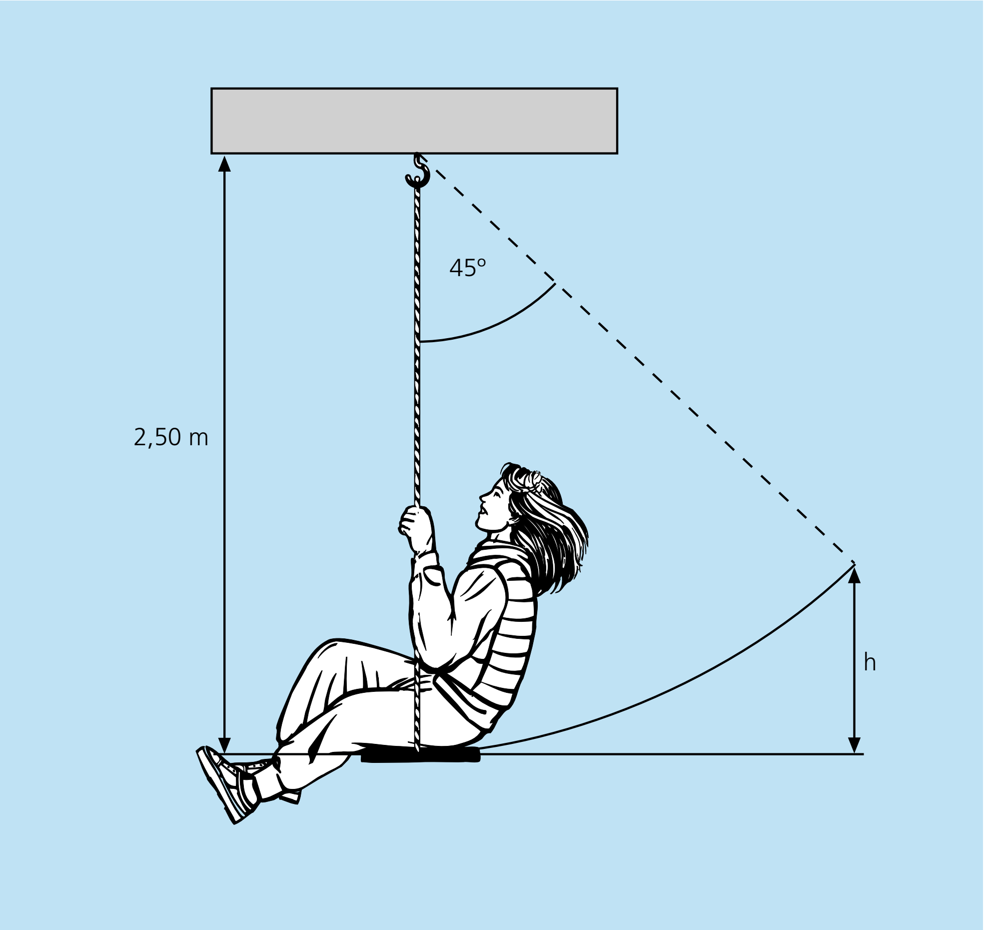
Esquema:



Columpio

¿Qué altura *h* sobre la posición inicial alcanza el columpio cuando gira 45 grados hacia arriba según la ilustración?

Indica el método de solución.



Buscar ejemplos en ejemplos de parábolas

Se observa una parábola con la regla de correspondencia: $p: x \rightarrow 0{,}5\,x^2 - 2$.

a) Señala ejemplos para dos puntos, que se encuentren arriba y debajo de la parábola, respectivamente.

b) Dibuja la parábola *p* y la recta *g* con la ecuación $y = 0{,}5x + 1$ en el mismo plano de coordenadas.

Proporciona la ecuación de otra recta que también intercepte la parábola en dos puntos.

Proporciona la ecuación de una parábola que no intercepte la parábola en ningún punto, así como otra recta que intercepte la parábola en solamente un punto.

c) Proporciona la expresión de la función de una parábola, que se encuentre completamente por encima de la parábola *p*.

Decide, en cada caso, si la afirmación es verdadera o falsa.

	Verdadera	Falsa
Una parábola que está abierta hacia abajo y cuyo ápice se encuentra debajo del ápice de la parábola p no tiene con certeza ningún punto de intersección con p.	☐	☐
Una parábola que está abierta hacia arriba y tiene una apertura más ancha que p no tiene con certeza ningún punto de intersección con p.	☐	☐
Una parábola que tiene la misma apertura que p y está abierta hacia abajo puede tener puntos de intersección con p, pero no necesariamente.	☐	☐

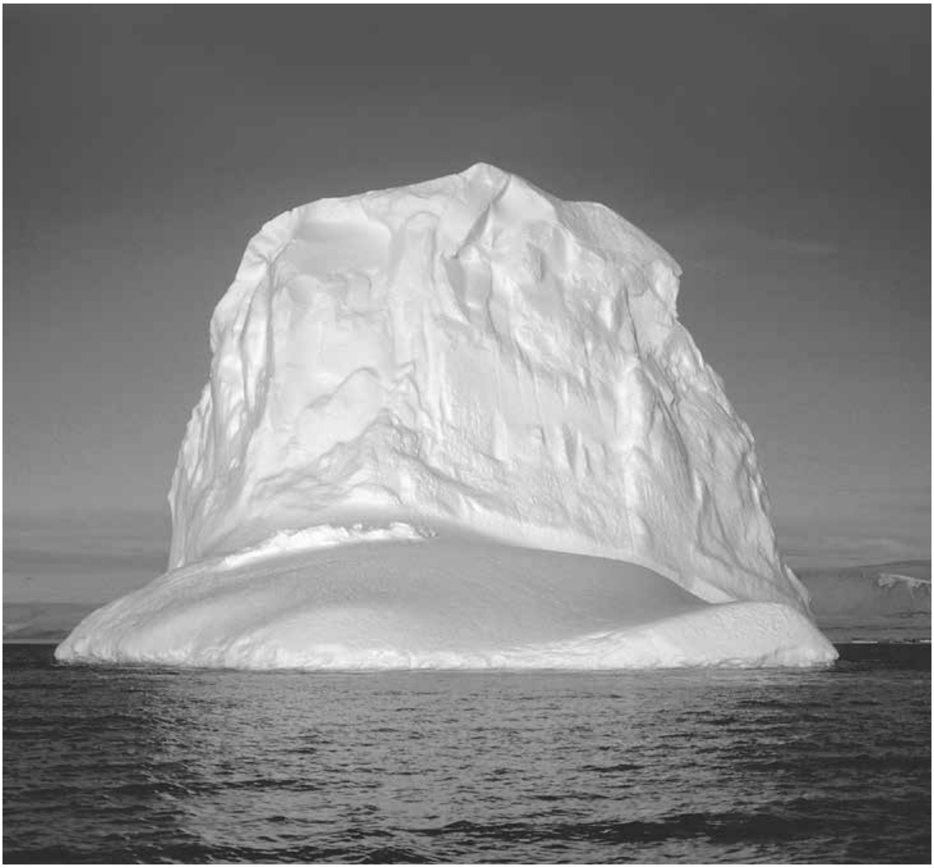
d) Inventa afirmaciones similares a las de la parte **d)** respecto de relaciones de situación entre rectas (con intercepto y e inclinación *m)* y la parábola *p*. Indica en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa, asegurando que tu respuesta sea plausible.

Iceberg (témpano de hielo)

Un iceberg pierde por año aproximadamente 10% de su volumen.

a) ¿Qué porcentaje de su volumen pierde el iceberg en cinco años? Indica tu razonamiento para llegar a la solución.

b) Inicialmente, el iceberg tiene un volumen de 800 km^3. ¿Cuántos litros pierde en un año?



Precios de fotografías

Peter manda a imprimir fotos a través de un servicio de impresión a distancia (envío a domicilio). La imagen muestra una porción de la cuenta:

Le agradecemos por su pedido del 20.03.2005					
Su número de pedido:	200001253		**Fecha de facturación y despacho:**		
Su número de cliente:	61923		2.03.2005		
Post.	**Cód. artículo**	**Descripción del artículo**	**Cantidad**	**P.U.**	**Total**
1	1802	Impresión online formato 10 MA	46	0,10 €	4,60 €
2	99020	Costos de envío	1	2,59 €	2,59 €
Medio de pago:			**Neto**	**I.G.V.16%**	**Total**
Depósito bancario			6,20 €	0,99 €	7,19 €

a) ¿Qué porcentaje del importe total constituyen los costos de envío?

b) Peter está muy satisfecho con el servicio de envío de fotos. "Además es más barato que en la tienda de la esquina. Ahí la impresión en un formato de 10 cuesta 12 centavos; en el servicio a distancia solamente 10 centavos", le comenta a su amigo Markus. Markus responde: "Bueno, tan simple no es la cosa. Tienes que considerar los gastos de envío". Decide, a través de un cálculo, si el servicio a distancia en este encargo en concreto es más barato que la impresión en la tienda de la esquina.

c) Indica una regla de la función que describa los costos del servicio a distancia, así como de la tienda, dependiendo del número de fotos encargadas. Asume que los costos de envío del servicio a distancia siempre son de 2,59 euros.

d) Mientras más fotos se ordena, menor es la porción de gastos de envío sobre el costo total. Identifica a partir de qué número de fotos resulta más barato el servicio a distancia que la impresión en la tienda.

e) Markus también hace su pedido en un servicio de impresión fotográfica online. Este servicio, sin embargo, tiene un sistema de tarifas bastante complicado, que se presenta en dos tablas (para el formato 10). Representa gráficamente qué costos totales resultan según la cantidad de fotos que se pidan.

Número de fotos solicitadas	Precio por copia
1 hasta 9	15 cent
10 hasta 49	12 cent
50 hasta 99	10 cent
100 hasta 300	8 cent
A partir de 301	Preguntar por condiciones especiales

Número de fotos solicitadas	Porción de costos de envío
1 hasta 9	1 €
10 hasta 200	2 €
A partir de 201	Costos asumidos por el establecimiento.

f) Markus explica a Peter: "Esta tarificación es de alguna forma poco racional, pues si alguien pidiera 95 o 98 fotos, sería bastante tonto".

¿Qué quiere decir Markus con esto? ¿Cómo debería proceder un cliente que necesita 95 fotos?

Valor aproximado para el número π

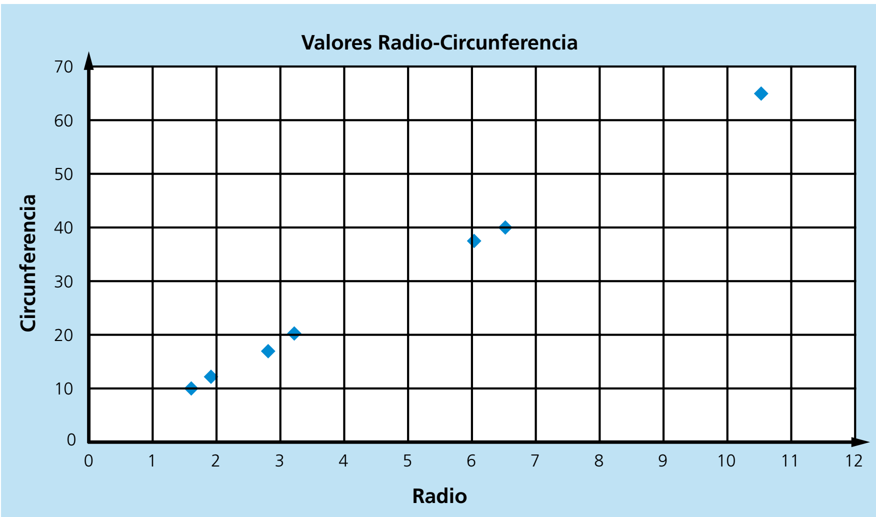
Ya en la antigüedad eran conocidos los valores aproximados para el número π. Con este número se podía calcular la superficie o la circunferencia de un círculo cuyo radio era conocido: $U = 2\pi \bullet r$ y $A = \pi \bullet r^2$, respectivamente.

a) Se pueden calcular valores aproximados de π en tanto que se mida el radio y la superficie de objetos concretos (ruedas, tapas redondas, etcétera). Busca identificar de forma experimental un valor aproximado para π. Documenta con precisión tu forma de proceder.

b) Calcula en qué porcentaje el valor obtenido en a) difiere del valor de π que muestra tu calculadora. Compara tu valor también con el valor $\frac{22}{7}$, un valor aproximado para π muy conocido en la antigüedad.

c) Describe brevemente una posibilidad según la cual, sobre la base del procedimiento de a), podrías obtener un valor de π más preciso.

d) En el diagrama presentado se muestran diversos resultados de medición de un radio y la correspondiente circunferencia. Sandra observa el diagrama y dice: "Muy bien, se puede apreciar claramente que la relación entre radio y circunferencia es directamente proporcional". ¿Qué quiere decir Sandra con esto? ¿Dónde se puede reconocer esto en el diagrama? Indica cómo se puede obtener un valor aproximado de π utilizando el diagrama.



Pagoda de chips

El desarrollo de la tecnología de las computadoras avanza a pasos agigantados. En 1965, el cofundador de Intel Gordon Moore formuló la siguiente regularidad: cada dos años se duplica el número de transistores en un chip, es decir, para la misma cantidad de transistores solo es necesaria la mitad de la superficie. Esta ley se ha visto confirmada en los últimos cuarenta años: cada dos años la superficie requerida se reduce a la mitad. Este desarrollo se halla representado en la obra de arte mostrada en la fotografía. El nivel más bajo de la pagoda de chips representa el año 1965 y tiene una superficie de 270 cm por 270 cm *(el término pagoda se origina en el lejano oriente y representa un tipo de construcción de templos en forma de torre. En la foto no se ven los niveles más bajos de la pagoda)*.

a) Determina las superficies del nivel más bajo (correspondiente al año 1965) y el segundo más bajo (correspondiente a 1967).

b) ¿Qué medidas tiene el cuadrado que representa el tamaño de chips del año 1967?

c) ¿Cómo varía la longitud de los lados de un cuadrado respecto del cuadrado inmediatamente anterior?

d) Encuentra una expresión algebraica con la que la superficie A*(n)* del cuadrado del nivel *n* de la pagoda de chips se pueda calcular (observa la **tarea parcial a)**: las superficies *A (1)* y *A (2)* ya las conoces). Aplica esta expresión a los niveles 11 y 21.

e) Determina (de forma óptima a través de una tabla de cálculo) todos los cálculos de las superficies de cada nivel de la pagoda. El cuadrado que representa el año 2005 tiene en la pagoda una longitud de lado = 3,25 mm. Comprueba numéricamente, con ayuda de tu tabla, si este valor también es correcto teóricamente.

f) Si has trabajado en la **tarea parcial e)** con una tabla, responde también a la siguiente pregunta: ¿qué peso total tiene la pagoda? Estima primero, y calcula después (las planchas de plexiglás tienen una altura de 4 cm cada una. El plexiglás tiene una densidad de $p = 1{,}18$ g/cm^3.)

La Caja-Pagoda se encuentra en el museo Heinz Nixdorf (HNF) en Paderborn.

Helado

Para su vigésimo cumpleaños, Sybille quiere fabricar helado casero y congelarlo en el recipiente mostrado en la foto.

Estima cuántos litros de helado caben aproximadamente en el recipiente.

Describe los pasos que realizas para llegar a la estimación.

Zurdos

a) Representa los datos proporcionados en el artículo en un diagrama de árbol. ¿En qué porcentaje los niños son zurdos y en qué porcentaje son diestros?

b) ¿Con qué probabilidad ha chupado un diestro su dedo pulgar izquierdo al nacer?

Zurdos desde antes de nacer

La decisión ya está dada antes de lo que se pensaba

Londres ▪ Que una persona sea zurda o diestra ya se puede determinar durante la gestación: la mano cuyo pulgar el nonato prefiere apretar en el vientre de la madre será, en la mayor parte de los casos, la que la persona preferirá utilizar durante el resto de su vida.

Esto lo respalda un estudio de psicólogos de Gran Bretaña, según reporta la revista *New Scientist*. Este descubrimiento es sumamente sorpresivo. Las teorías usuales asumen que el hecho de ser zurdo o diestro se define recién en los primeros tres a cuatro años de vida. Peter Hepper, de la Queen's University en Belfast, y sus colegas analizaron las imágenes de ultrasonido de más de mil fetos. Nueve de cada diez nonatos prefieren chupar su pulgar derecho en la semana 15 del embarazo, observaron los investigadores. Posteriormente, hicieron seguimiento a la vida de 75 de dichos infantes luego de su nacimiento. Esto les permitió descubrir que todos los niños que habían preferido chupar su pulgar derecho eran diestros a la edad de 10 a 12 años. Dos tercios de los niños que preferían chupar su pulgar izquierdo en el vientre de la madre eran zurdos en la misma edad.

Los resultados de Hepper y sus colegas ponen en entredicho la teoría hasta ahora vigente del desarrollo del uso de las manos. Esta postulaba que el ser zurdo o diestro era un efecto secundario del desarrollo cerebral. ddp

Pirámide de vidrio

Extracto del informe de un guía turístico en París.

Pirámide de vidrio del Louvre

"También los amigos de lo moderno pueden disfrutar en París. En esta ciudad abundan las edificaciones modernas, como la pirámide de vidrio en el patio del Louvre. Francois Mitterrand encargó su diseño al arquitecto chino-americano Io Ming Pei entre 1984 y 1988. La pirámide cuadrática tiene una longitud de lados en la base de 35 metros. Se compone de 666 piezas de vidrio en forma de rombos, a través de las cuales la luz inunda el salón subterráneo. Para la construcción de la estructura principal de la pirámide se necesitaron 272,5 metros de columnas de acero inoxidable (esta longitud se obtiene cuando se suman las longitudes de las cuatro aristas de la pirámide).

La pirámide se encuentra en el Patio Napoleón y sirve como entrada al museo más grande del mundo, que alberga, entre otras, obras tan famosas como la Mona Lisa, la Venus de Milo y la Nike de Samotracia. Bajo la pirámide se encuentran, por ejemplo, un auditorio, una cafetería, una librería, un restaurante gourmet y mucho más. No obstante, esta construcción no quita al Louvre su fascinante majestuosidad. Constituye un buen ejemplo de que lo tradicional y lo moderno se pueden complementar de forma armónica."

a) Durante una posterior rueda de preguntas, uno de los visitantes pregunta cuál es la altura de la pirámide. Da una respuesta.

b) Otro visitante, que es un limpiador de ventanas, quisiera saber cuánto vidrio fue utilizado para la pirámide. Da una respuesta.

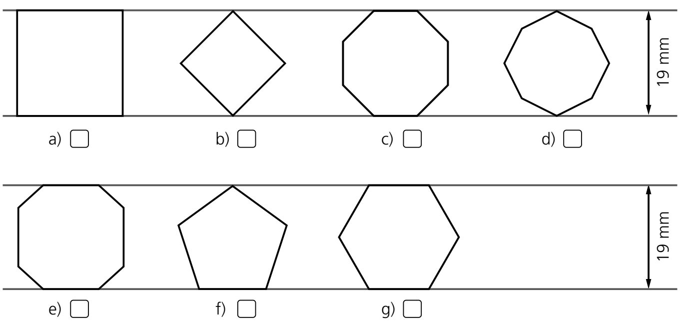
Llave de tuercas

La imagen 1 muestra una así llamada llave de tuercas 19 (19 quiere decir que la apertura es de 19 milímetros).

Diversos pernos se deben ajustar con una llave de 19. En la imagen 2 se representa la vista superior de estos pernos.

Marca cuáles de los pernos pueden ser ajustados con la llave mostrada.

Imagen 1: Llave de tuercas de 19 mm



Piscina

La imagen 1 muestra una oferta especial de un catálogo por correo. Debido a su forma geométricamente regular (ver imagen 2), se busca tomar la piscina como un punto de partida para que los alumnos de matemática de noveno grado desarrollen una hoja de tareas relacionadas con la geometría.

a) Piensa en dos tareas geométricas relacionadas con la piscina.

b) Soluciona una de las dos tareas que desarrollaste para la tarea.

Imagen 1: Extracto de un anuncio de catálogo por correo

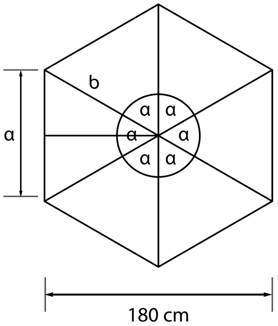


Imagen 2: Esquema de la piscina (en donde *a* = *b*)

Cuerda de barco

Una cuerda de barco (de 4 cm de grosor) ha sido enrollada en forma de espiral sobre el piso (observa la ilustración).

1 cm^3 pesa aproximadamente 2 g.

Tantea cuánto pesa esta cuerda. Redondea tu resultado a kilogramos.

Escribe cuál ha sido tu procedimiento.

PARTE 5

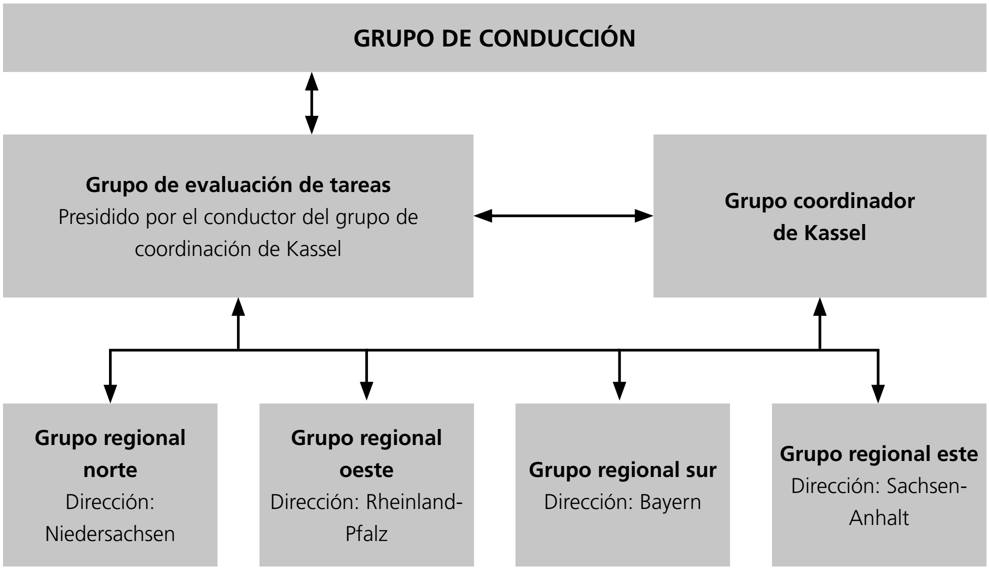
ANEXOS

1. LA GESTACIÓN DE LAS TAREAS

Ralph Hartung

Las tareas publicadas en este libro son el resultado de un extenso proceso de desarrollo. Fueron elaboradas por cuatro grupos regionales, conformados por docentes de las dieciséis regiones de Alemania. Cada grupo de trabajo contó con un asesor de la disciplina. Algunas de las tareas fueron sometidas a prueba. Luego, las tareas fueron auditadas y observadas constructivamente por un grupo de evaluación de tareas conducido por el profesor doctor Blum (Universidad de Kassel). Luego de una revisión por los grupos regionales y por el grupo de coordinación de Kassel (Universidad de Kassel), las tareas fueron retomadas por el grupo de evaluación de tareas y parcialmente reelaboradas. Finalmente, las tareas fueron pilotadas en aulas de escuelas de todas las modalidades, a partir de lo cual se obtuvo conocimiento sobre sus enunciados. Durante el pilotaje surgieron comentarios de los escolares que también han sido reproducidos en este libro, los cuales no han sido publicados en su versión original con el fin de proteger los datos. El proceso estuvo dirigido por el Instituto para el Desarrollo de la Calidad Educativa de la Universidad Humboldt de Berlín - IQB y la Conferencia Permanente de Ministros de Cultura - KMK.

El siguiente gráfico ilustra el trabajo conjunto:



Grupo coordinador de Kassel:

- Christina Drüke-Noe
- Alexander Jordan
- Katrin Keller
- Dominik Leiß
- Dr. Bernd Wiegand

Grupo de conducción:

- Ralph Hartung (IQB)
- Klaus Karpen (KMK)
- Dr. Christina Kindervater (KMK)
- Prof. Dr. Olaf Köller (IQB)
- Alexander Roppelt (IQB)

En sintonía con los representantes del consorcio alemán PISA:

- Prof. Dr. Werner Blum, FB Mathematik/Informatik, Universität Kassel
- Prof. Dr. Manfred Prenzel, Leibniz-Insitut für die Pädagogik der Naturwissenschaften, Universität Kiel

Miembros del grupo de evaluación de tareas:

- Dr. Götz Bieber, Landesinstitut für Schule und Medien Ludwigsfelde
- Prof. Dr. Werner Blum, FB Mathematik/Informatik, Universität Kassel (Vorsitz)
- Dr. Christa Herwig, Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien Bad Berka
- Prof. Dr. Michael Neubrand, Institut für Mathematik, Carl-von-Ossietzky- Universität Oldenburg
- Prof. Dr. Hans Schupp, Fachrichtung Mathematik, Universität des Saarlands Saarbrücken
- Dr. Johann Sjuts, Studienseminar Leer

Miembros de los grupos regionales (entre paréntesis se indica la región correspondiente)

- Petra Beck, Robert-Schumann-Gymnasium Leipzig (SN)
- Michael Crepin, TGBBZ Dillingen (SL)
- Henri Danker, OSZ Technik Teltow (BB)
- Ingrid Diefenbacher, Realschule Linkenheim (BW)
- Rupert Ernhofer, Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München (BY)
- Angela Euteneuer, Pädagogisches Zentrum des Landes Rheinland-Pfalz Bad Kreuznach (RP)
- Margot Feiste, Landesinstitut für Schule und Ausbildung Greifswald (MV)
- Ines Fröhlich, Landesinstitut für Schule und Medien Ludwigsfelde (BB)
- Jens-Uwe Gerbig, GTBBZ Zella-Mehlis (TH)
- Alois Graelmann, Berufsbildende Schulen am Schölerberg Osnabrück (NI)
- Christa Hermes, Erich-Brost-Berufskolleg Essen (NRW)
- Dr. Jörg Heuß, Staatliches Seminar für Didaktik und Lehrerbildung (Berufliche Schulen) Karlsruhe (BW)
- Regina Hinz, Grund- und Hauptschule mit Werkrealschule Eggenstein-Leopoldshafen (BW)
- Marion Kelly, Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München (BY)
- Jutta Krug-Winkelmann, Hessisches Kultusministerium (HE)

- Eberhard Neef, Schulzentrum Geschwister Scholl Bremerhaven (HB)
- Dr. Andreas Pallack, Landesinstitut für Schule/Qualitätsagentur Soest (NRW)
- Karsten Patzer, Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung Hamburg (HH)
- Angelika Perlich, Berliner Landesinstitut für Schule und Medien (BE)
- Dr. Sabine Prüfer, Landesinstitut für Lehrerfortbildung, Lehrerweiterbildung und Unterrichtsforschung von Sachsen-Anhalt Halle (ST)
- Renate Reble, Berufliche Schulen am Ravensberg Kiel (SH)
- Dr. Hellmut Scheuermann, Brühlwiesenschule Hofheim (HE)
- Ursula Schmidt, Freiherr-vom-Stein-Gymnasium Lünen (NRW)
- Reiner Speicher, Erweiterte Realschule Dillingen (SL)
- Rüdiger Vernay, Gesamtschule Bremen-Mitte (HB)
- Knut Wegel, Berufsbildende Schule Technik II Ludwigshafen (RP)
- Wilhelm Weiskirch, Ratsgymnasium Stadthagen (NI)
- Hans Dieter von Zelewski, Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen in Schleswig-Holstein Kronshagen (SH)

Asesores científicos de los grupos regionales (entre paréntesis se indica la región correspondiente):

- Prof. Dr. Regina Bruder, Fachbereich Mathematik, Technische Universität
- Darmstadt (Ost)
- Prof. Dr. Wilfried Herget, Abteilung Didaktik der Mathematik, Fachbereich Mathematik und Informatik, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg (Nord)
- Prof. Dr. Timo Leuders, Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken, Pädagogische Hochschule Freiburg (Süd)
- Prof. Dr. Alexander Wynands, Mathematisches Institut, Universität Bonn (West)

2. VISIÓN GENERAL Y CLASIFICACIÓN DE LAS TAREAS

Katrin Keller/Dominik Leiß

			Grado				Idea directriz					Competencia						Ámbito de exigencia		
Nombre de la tarea	Tarea parcial	Pág.	5/6	7/8	9	10	ID1 (Número)	ID2 (Medir)	ID3 (Espacio y forma)	ID4 (Rels. funcio.)	ID5 (Datos y azar)	C1	C2	C3	C4	C5	C6	AE1	AE2	AE3
Parte 1: Los estándares de aprendizaje de matemáticas																				
Empedrados	a)	22	X					X						X	X		X		X	
	b)	22		X				X					X	X	X	X	X		X	
	c)	22	X				X						X		X		X	X		
	d)	22		X				X					X	X	X	X	X		X	
Empaque de film	a)	27	X						X				X		X		X		X	
	b)	27		X				X							X	X	X		X	
	c)	27			X			X					X		X	X	X		X	
	d)	27			X			X					X	X	X	X	X		X	
	e)	27			X				X			X	X		X	X	X			X
	f)	28		X			X										X	X		
	g)	28		X			X							X			X		X	
2. Descripción de las competencias matemáticas centrales																				
La suma de números vecinos		37		X			X					X	X			X			X	
Triángulos sobre el triángulo rectángulo	a)	38			X			X				X	X		X				X	
	b)	38			X			X				X	X		X					X
	CD	–			X			X				X	X		X				X	
Áreas		40			X			X					X		X	X			X	
	a)	–			X			X					X		X		X		X	
	b)	–			X			X					X		X	X			X	
	c)	–			X					X			X		X	X				X
	d)	–			X			X				X	X		X					X
Minutero		40	X					X					X					X		
Poner gasolina		42		X						X		X		X		X	X			X

			Grado				Idea directriz					Competencia						Ámbito de exigencia		
Nombre de la tarea	Tarea parcial	Pág.	5/6	7/8	9	10	ID1 (Número)	ID2 (Medir)	ID3 (Espacio y forma)	ID4 (Rels. funcio.)	ID5 (Datos y azar)	C1	C2	C3	C4	C5	C6	AE1	AE2	AE3
Receta de cocina		43			X			X					X	X		X			X	
Elecciones		44		X							X				X			X		
Análisis de entrenamiento	a)	–		X						X				X	X			X		
	b)	46		X						X				X	X					X
	c)	–		X						X				X	X			X		
	d)	–		X						X			X	X	X				X	
	e)	–		X						X			X	X	X				X	
Ecuaciones		47		X																
	–			X																
	–			X																
Haz de rectas	a)	48		X																
	b)	48		X																
	c)	48		X																
Mascotas	a)	49		X																
	b)	–		X																
	c)	–	X																	
Adición de factores		50																		
3. La idea directriz Datos y azar																				
Quiebras y culpas	a)	57/58		X																
	b)	57/58		X																
¿Compran las mujeres con mayor frecuencia que los hoombres?	a)	58/59		X																
	b)	58/59		X																
	c)	58/59		X																
Latidos del corazòn y expectativa de vida en los animales ¿Què ocurre con el tapir?	a)	60	X												X				X	
	b)	60	X				X				X				X			X		
	c)	60		X						X		X		X	X				X	
	d)	60		X							X				X			X		
	e)	60		X							X	X			X					X
	f)	60		X						X		X		X	X		X			X
	g)	60		X						X				X			X		X	

			Grado				Idea directriz					Competencia						Ámbito de exigencia		
Nombre de la tarea	Tarea parcial	Pág.	5/6	7/8	9	10	ID1 (Número)	ID2 (Medir)	ID3 (Espacio y forma)	ID4 (Rels. funcio.)	ID5 (Datos y azar)	C1	C2	C3	C4	C5	C6	AE1	AE2	AE3
Uso de la computadora	a)	64		X							X									
	b)	64		X							X									
	c)	64		X							X									
	d)	65		X							X									
	e)	66		X							X									
La probabilidad de los números de un dado		69		X							X	X		X					X	
Juego del giroscopio	a)	70	X								X				X			X		
	b)	70		X							X		X	X	X				X	
	c)	70			X						X		X	X			X			X
	d)	70			X						X		X	X			X			X
	e)	70			X						X		X	X			X			X
El problema de las figuritas coleccionables	a)	75				X					X		X			X	X		X	
	b)	75				X					X	X	X			X				X
	c)	75				X					X	X	X			X	X			X
BSE-Test	a)	–				X					X				X		X		X	
	b)	–				X					X			X		X				X
	c)	–				X					X			X		X				X
	d)	–				X					X			X		X	X			X
	a)	77				X					X	X		X	X		X		X	
	b)	77				X					X			X			X		X	
	c)	77				X					X			X	X		X		X	
	d)	77				X					X			X		X			X	
	e)	77				X					X			X		X			X	
	f)	77				X					X			X		X	X		X	
	g)	77				X					X			X		X	X			X
Parte 2: Aspectos de las clases de matemáticas orientadas al desarrollo de competencias 1. Tareas orientadas al desarrollo de competencias																				
Triángulos inscritos en una figura		83		X					X			X			X				X	

			Grado				Idea directriz					Competencia						Ámbito de exigencia		
Nombre de la tarea	Tarea parcial	Pág.	5/6	7/8	9	10	ID1 (Número)	ID2 (Medir)	ID3 (Espacio y forma)	ID4 (Rels. funcio.)	ID5 (Datos y azar)	C1	C2	C3	C4	C5	C6	AE1	AE2	AE3
Variantes de "Triángulos inscritos en una figura" "Dreiecke in einer Figur"		85		X					X			X	X		X	X			X	
Cuadriláteros inscritos en el círculo		85		X					X			X	X		X				X	
Triángulos inscritos en el círculo		86		X					X			X			X	X				X
La unidad en la recta numérica		88		X			X								X	X	X	X		
Comprensión de fracciones	a)	88	X				X								X	X	X		X	
	b)	–	X				X								X		X		X	
	c)	–	X				X									X	X			X
Áreas de polígonos	a)	89		X				X					X		X		X			X
	b)	89		X				X					X		X		X			X
Áreas de polígonos	a1)	–		X				X					X	X	X	X			X	
	a2)	–		X				X					X	X	X	X	X			X
	b1)	–		X				X					X	X	X		X		X	
	b2)	–		X				X					X	X	X		X		X	
	b3)	–		X				X					X	X	X		X		X	
	c)	–		X				X					X	X	X		X			X
Ecuaciones cuadráticas	a)	89				X				X						X		X		
	b)	89				X				X					X	X	X		X	
	c)	–				X				X						X			X	
	d)	–				X				X		X				X				X
Tarea grupal: Burbuja de jabón		92				X		X					X	X	X	X				X
Variante de la tarea de investigación "Burbuja de jabón"		94				X		X					X	X		X				X
Cálculo aproximado		94	X				X									X		X		

			Grado				Idea directriz					Competencia						Ámbito de exigencia		
Nombre de la tarea	Tarea parcial	Pág.	5/6	7/8	9	10	ID1 (Número)	ID2 (Medir)	ID3 (Espacio y forma)	ID4 (Rels. funcio.)	ID5 (Datos y azar)	C1	C2	C3	C4	C5	C6	AE1	AE2	AE3
2. Diseño de la clase y uso de las tareas orientadas hacia el desarrollo de competencias desde un enfoque diagnóstico																				
Chicos en un bus escolar	a)	97/98		X			X					X	X	X		X	X	X		
	b)	97/98		X			X						X		X		X	X		
	c)	97/98		X			X					X	X		X		X	X		
	d)	97/98		X			X					X	X		X		X	X		
Números vecinos	a)	102	X				X									X	X	X		
	b)	102		X			X					X				X	X			X
	a)	–	X				X									X	X	X		
	b)	–		X			X						X			X			X	
	c)	–		X			X						X			X			X	
	d)	–		X			X					X	X			X			X	
	e)	–		X			X					X	X			X	X			X
Bloques	a)	106	X						X			X	X		X	X	X		X	
	b)	106	X					X				X	X		X	X	X		X	
	c)	106	X						X			X	X		X				X	
	d)	106	X						X			X	X		X		X	X		
3. Práctica inteligente																				
Expresiones y medidas	a)	116	X				X									X		X		
	b)	116	X					X								X		X		
	c1)	116	X					X					X			X			X	
	c2)	116	X					X								X		X		
	d)	116	X							X			X			X			X	
Ecuaciones	a1)	116	X										X			X			X	
	a2)	116	X				X						X			X			X	
	b1)	116	X				X									X		X		
	b2)	116		X			X						X			X			X	
	b3)	116		X			X						X			X			X	
	b4)	116		X			X						X		X				X	
	c)	116		X			X									X			X	

			Grado				Idea directriz					Competencia						Ámbito de exigencia		
Nombre de la tarea	Tarea parcial	Pág.	5/6	7/8	9	10	ID1 (Número)	ID2 (Medir)	ID3 (Espacio y forma)	ID4 (Rels. funcio.)	ID5 (Datos y azar)	C1	C2	C3	C4	C5	C6	AE1	AE2	AE3
Muros de números	a)	117	X				X									X		X		
	b)	117		X			X						X			X			X	
	c)	117		X			X						X			X	X		X	
Barras de unión	a)	–	X						X			X	X		X			X		
	b)	–	X						X				X		X	X	X		X	
	c)	–	X						X				X		X	X				X
	a)	118	X						X				X		X	X	X		X	
	b)	118	X						X				X		X	X				X
Diagonales		121	X						X			X	X		X		X		X	
Hexágono	a)	123		X				X				X	X		X	X			X	
	b)	123		X					X			X	X		X	X	X			X
	a)	–	X						X						X			X		
	b)	–		X					X			X	X		X				X	
	c)	–		X				X					X		X				X	
4. El enfoque de proyectos																				
Cajitas de jugo	a)	128	X						X					X	X	X		X		
	b)	128	X					X						X	X	X		X		
	c)	128	X					X						X	X	X			X	
	d)	128			X			X						X	X	X			X	
	e)	128			X			X						X	X	X			X	
	f)	128			X			X						X	X	X			X	
5. Construcción de competencias a largo plazo																				
Bombones		–			X			X				X		X	X	X			X	
	a)	138		X				X						X	X	X	X		X	
	b)	138			X			X				X	X	X	X	X				X
Poligonos de grilla	a)	142	X				X								X		X	X		
	b)	142		X				X					X		X	X	X			X
	c)	142			X			X					X		X	X	X			X
	d)	142			X					X			X		X	X	X			X

			Grado				Idea directriz					Competencia						Ámbito de exigencia		
Nombre de la tarea	Tarea parcial	Pág.	5/6	7/8	9	10	ID1 (Número)	ID2 (Medir)	ID3 (Espacio y forma)	ID4 (Rels. funcio.)	ID5 (Datos y azar)	C1	C2	C3	C4	C5	C6	AE1	AE2	AE3
Alturas	a)	145			X		X						X		X	X	X			X
	b)	145		X				X					X		X	X	X			X
Sistematización de triángulos	a)	147		X					X			X	X				X			X
	b)	147		X					X					X					X	
Ejercicios mentales	a)	150	X				X									X		X		
	b)	150		X						X						X		X		
	c)	150		X						X						X		X		
	d)	150		X				X								X		X		
	e)	150		X			X										X	X		
	f)	150		X					X							X		X		
	g)	150		X						X			X		X	X			X	
	h)	150	X					X								X		X		
	i)	150	X					X					X			X			X	
	j)	150		X			X							X		X	X	X		
Parte 3: Tareas de matemáticas orientadas al desarrollo de competencias **1. Variación de tareas**																				
Diferencia de cuadrados	a)	153	X				X						X			X			X	
	b)	153			X		X					X	X			X				X
Pintar la fachada		159		X					X			X		X	X	X			X	
Cuadrados parciales	a)	161	X						X				X					X		
	b)	161	X						X			X	X						X	
	c)	161	X						X				X		X					X
2. Múltiples caminos de solución de las tareas matemáticas: significados desde el punto de vista de la asignatura, el aprendizaje, la clase de matemáticas y el registro del desempeño																				
Descomposición de un octágono	a)	163		X				X				X	X		X				X	
	b)	163		X				X				X	X		X				X	
	c)	163	X					X					X		X			X		
Victoria segura		167		X							X	X	X	X	X		X		X	

Nombre de la tarea	Tarea parcial	Pág.	Grado				Idea directriz					Competencia						Ámbito de exigencia		
			5/6	7/8	9	10	ID1 (Número)	ID2 (Medir)	ID3 (Espacio y forma)	ID4 (Rels. funcio.)	ID5 (Datos y azar)	C1	C2	C3	C4	C5	C6	AE1	AE2	AE3
Construcción de pirámides	a)	171	X						X						X			X		
	b)	171	X					X							X	X	X		X	
	c)	171				X		X							X	X	X		X	
	d)	171	X						X						X			X		
	e)	171		X					X				X		X				X	
	f)	171		X					X				X		X				X	
	g)	171		X						X			X		X	X				X
Rombo		174			X			X				X	X		X	X				X
	a)	–			X			X					X			X				X
	b)	–			X				X				X		X			X		
3. Tipos de tareas																				
Tres números naturales		180		X			X									X		X		
Mitad de *a*		181		X			X									X			X	
13 por 24	a)	182	X				X									X		X		
	b)	182	X				X									X	X		X	
	c)	182	X				X									X	X		X	
	d)	182	X				X					X				X	X		X	
Ecuación	a)	183		X						X						X	X		X	
	b)	–		X						X		X				X	X		X	
Conductores veloces		184		X			X					X		X		X	X			X
Reporte de carreras	a)	186		X						X				X	X		X		X	
	b)	187		X						X				X	X				X	
Diagrama de leche		187		X							X		X		X	X		X		
Mascotas	a)	188		X			X						X			X	X		X	
	b)	188		X							X				X	X	X		X	
	c)	188	X				X					X		X			X			X
	d)	188		X			X					X		X			X		X	
Vacaciones en el extranjero	a)	189		X																
	b)	189		X																

			Grado				Idea directriz					Competencia						Ámbito de exigencia		
Nombre de la tarea	Tarea parcial	Pág.	5/6	7/8	9	10	ID1 (Número)	ID2 (Medir)	ID3 (Espacio y forma)	ID4 (Rels. funcio.)	ID5 (Datos y azar)	C1	C2	C3	C4	C5	C6	AE1	AE2	AE3
El globo de fútbol	a)	189		X				X						X	X	X	X		X	
	b)	189		X				X						X	X	X	X		X	
	c)	189		X				X				X		X		X	X			X
4. Referencias a la realidad																				
Mermelada	a)	196	X				X							X		X			X	
	b)	196	X				X							X		X			X	
	c)	196	X				X					X		X		X			X	
	a)	198	X				X							X			X		X	
	b)	198	X				X					X		X		X			X	
	c)	198		X			X							X		X	X			X
Costos de vacaciones		199	X				X							X		X	X		X	
Desmonte		200			X			X						X		X			X	
	a)	–			X			X						X		X			X	
	b)	–			X			X						X	X	X	X		X	
	c)	–	X						X					X	X				X	
	d)	–		X				X						X		X	X			X
Orangután		201	X					X						X		X			X	
	a)	–	X					X						X		X			X	
	b)	–	X					X						X		X			X	
	c)	–																		
Licencia de conducir	a)	203		X			X					X		X		X			X	
	b)	–		X			X							X		X			X	
	c)	203		X			X							X		X			X	
Terreno de camping		204				X		X					X	X	X	X			X	
Escalera elèctrica	a1)	205		X						X				X	X				X	
	a2)	205		X						X				X	X				X	
	a3)	205		X						X				X	X		X		X	
	b)	–		X						X				X	X				X	

			Grado				Idea directriz					Competencia						Ámbito de exigencia		
Nombre de la tarea	Tarea parcial	Pág.	5/6	7/8	9	10	ID1 (Número)	ID2 (Medir)	ID3 (Espacio y forma)	ID4 (Rels. funcio.)	ID5 (Datos y azar)	C1	C2	C3	C4	C5	C6	AE1	AE2	AE3
Diferencias	a)	207			X					X			X		X	X			X	
	b)	207			X					X			X		X	X				X
El Puente Fehmarnsund		208			X					X			X	X	X	X				X
Desperdicio		209				X		X				X	X			X			X	
Copa de árbol		210				X		X						X	X	X	X			X
Clavo récord		211				X		X						X		X	X			X
El rosedal		212			X			X					X		X	X	X		X	
Columpio		213				X		X						X	X	X			X	
Buscar ejemplos en ejemplos de parábolas	a)	214			X					X					X	X		X		
	b)	214			X					X					X	X			X	
	c)	214			X					X					X	X			X	
	d)	214			X					X		X			X	X			X	
	e)	214			X					X		X			X	X	X		X	
Iceberg (témpano de hielo)	a)	215		X			X									X	X		X	
	b)	215		X			X									X		X		
Precios de fotografìas	a)	216		X			X							X		X		X		
	b)	216	X				X							X		X	X		X	
	c)	216		X						X				X		X	X		X	
	d)	216		X						X				X		X	X		X	
	e)	216		X						X				X	X	X			X	
	f)	217		X						X			X	X	X	X	X		X	
Valor aproximado para el numero π	a)	218			X			X								X	X	X		
	b)	218			X		X									X		X		
	c)	218			X			X					X				X		X	
	d)	218			X					X		X			X	X	X		X	

Nombre de la tarea	Tarea parcial	Pág.	Grado 5/6	Grado 7/8	Grado 9	Grado 10	Idea directriz ID1 (Número)	ID2 (Medir)	ID3 (Espacio y forma)	ID4 (Rels. funcio.)	ID5 (Datos y azar)	Competencia C1	C2	C3	C4	C5	C6	Ámbito de exigencia AE1	AE2	AE3
Precio de chips	a)	219	X					X								X	X	X		
	b)	219			X			X								X	X		X	
	c)	219			X					X			X			X	X		X	
	d)	219			X					X				X		X	X			X
	e)	219			X			X								X	X		X	
	f)	219			X			X								X			X	
Helado	–	220	X					X						X	X				X	
Zurdos	a)	221		X							X			X	X		X		X	
	b)	221		X							X			X		X	X			X
Pirámide de vidrio	a)	222			X			X					X	X	X	X	X			X
	b)	22			X			X					X	X	X	X	X		X	
Llave de tuercas	–	223	X						X				X		X				X	
Piscina	a)	224																		
	b)	224																		
Cuerda de barco	–	225				X		X					X	X	X	X	X			X

ANEXO: ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS. DOCUMENTOS OFICIALES PRODUCIDOS POR EL GOBIERNO FEDERAL DE ALEMANIA

TABLA DE CONTENIDO

ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE

1. ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE AL CONCLUIR EL CUARTO GRADO[1]

1.1. La contribución de la enseñanza de las matemáticas a la formación de la persona

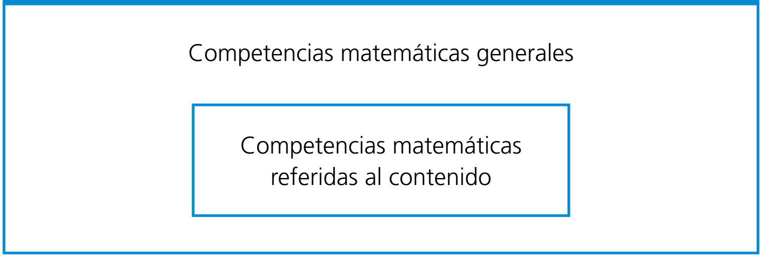
El mandato de la escuela primaria es el desarrollo de la formación básica de la persona. En la escuela primaria se sientan las bases para los aprendizajes posteriores y se genera la capacidad personal de apropiarse de la cultura de manera autónoma. Con ello, el desarrollo de las competencias matemáticas es un componente esencial de este mandato formativo.

Durante la Primaria, las clases de matemáticas *se nutren de las experiencias matemáticas tempranas de los estudiantes:* las profundizan, las amplían, y a partir de ellas, se desarrollan las competencias matemáticas fundamentales. Así se construyen los cimientos para el aprendizaje de las matemáticas en los próximos grados escolares, y también sirven para que las personas se enfrenten a las demandas matemáticas que surjan a lo largo de su vida desde sus primeros años en la escuela.

Esto se logra de manera perdurable en tanto mejor se desarrolle *el conjunto de ideas centrales para las matemáticas, desde los primeros grados*. Por ello, los estándares se orientan solo de manera implícita hacia las áreas tradicionales de las clases de matemáticas en la Primaria, esto es: aritmética, geometría, magnitudes y situaciones o cálculo en el contexto (*Sachrechnen*). Más bien, en un primer plano se ubican ahora diversas *competencias matemáticas generales* y *competencias referidas al contenido*, que *son indivisibles* (ver figura 1).

1 KMK (2004). Conferencia Permanente de Ministros de Cultura de Alemania.

Figura 1. Clases de matemáticas en Primaria



El aprendizaje de las matemáticas en la escuela primaria no debe ser reducido a la apropiación de conocimientos o destrezas. Su meta es *asegurar el desarrollo de una comprensión certera del contenido matemático.* Las competencias matemáticas generales explicitan que el confrontar puntos de vista y aprender a discutir sobre cuestiones matemáticas es un aspecto central de la formación matemática durante la infancia cuyo desarrollo depende no solo de qué contenidos se enseñan sino, al menos en igual medida, de **cómo** *se enseñan*; es decir, en qué medida se ha propiciado que los estudiantes hayan tenido la oportunidad de resolver problemas por sí mismos, de hablar y comunicarse acerca de las matemáticas, entre otros.

Las competencias matemáticas generales son decisivas para construir una actitud y una posición positivas hacia la materia. En una clase de matemáticas que pone el centro de su acontecer en las competencias, se logrará promover la alegría de aprender y una actitud de descubrimiento para seguir aprendiendo.

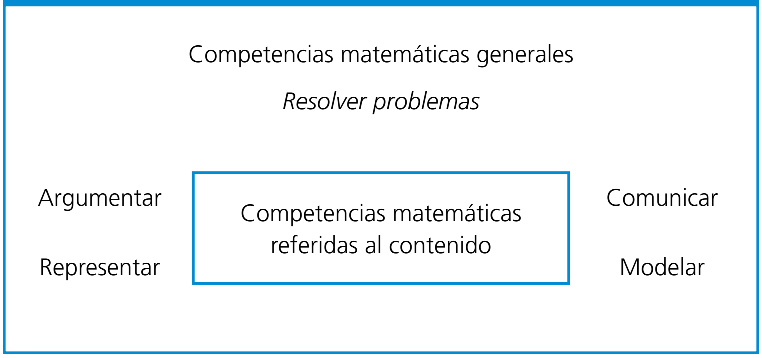
Los estándares describen las competencias generales y de contenido que las niñas y los niños deben haber logrado al concluir el cuarto grado (correspondiente al grado en que concluye el nivel Primaria en Alemania). Se espera que los estudiantes puedan utilizar estas competencias tanto en contextos fuera de las matemáticas (orientado a sus aplicaciones), así como al interior de la Matemática (orientado a sus estructuras). Los estándares deben mostrar a los docentes una perspectiva clara de las metas que se deben perseguir. Al mismo tiempo, deben sincerarse los procesos individuales que siguen los niños y niñas al apropiarse de las matemáticas.

Los estándares se concentran en los objetivos centrales de las clases de matemáticas. Aspectos tales como el desarrollo de competencias sociales y personales no se abordan aquí de manera explícita; sin embargo, son irrenunciables en la formación durante la escuela primaria.

1.2. Competencias matemáticas generales

Las competencias matemáticas generales se muestran —y a la vez se generan— cuando los estudiantes *se involucran con las matemáticas* de un modo vital y activo. Lo ideal es que la manera en que se aprenden las matemáticas corresponda a las formas en que estas se usan. Las siguientes cinco competencias matemáticas generales tienen un significado capital para un aprovechamiento y apropiación exitosa de las matemáticas.

Figura 2. Clases de matemáticas en Primaria



Estas cinco competencias generales se concretan en que los estudiantes, al concluir el cuarto grado, logran lo siguiente:

Resolver problemas

- Utilizar conocimientos, destrezas y capacidades al tratar con tareas problemáticas.
- Desarrollar y utilizar estrategias de solución, por ejemplo:
  - Intentar sistemáticamente (probieren).
  - Reconocer relaciones, utilizarlas y transferirlas a situaciones similares.

Comunicar

- Describir procedimientos propios, entender caminos de solución de otros y reflexionar en conjunto sobre ellos.
- Usar conceptos y símbolos matemáticos de manera adecuada,
- Procesar tareas en conjunto, llegar a acuerdos y mantenerlos.

Argumentar

- Cuestionar enunciados matemáticos y comprobar su veracidad.
- Reconocer relaciones matemáticas y desarrollar suposiciones.
- Buscar fundamentaciones y comprenderlas.

Modelar

- Recoger información relevante de textos para calcular y otras representaciones de la vida real,
- Traducir problemas reales al lenguaje de las matemáticas, resolverlos matemáticamente y aplicar el resultado obtenido a la situación de inicio.
- Formular situaciones para calcular a partir de expresiones matemáticas, ecuaciones o representaciones gráficas.

Representar

- Desarrollar, elegir y utilizar representaciones adecuadas al trabajar problemas matemáticos.
- Traducir de una representación a otra.
- Comparar representaciones entre sí y evaluarlas.

1.3. Estándares para las competencias matemáticas referidas al contenido

Los estándares están orientados a las ideas directrices que tienen un significado crucial para la enseñanza de las matemáticas en su conjunto; es decir, tanto para la escuela primaria como para los aprendizajes futuros.

Figura 3. Clases de matemáticas en Primaria

Competencias matemáticas generales

Competencias matemáticas referidas al contenido

- Número y operaciones
- Espacio y forma
- Patrones y estructuras
- Magnitudes y medir
- Datos, frecuencias y probabilidad

Estas ideas directrices derivan en los siguientes estándares de competencias matemáticas relativas al contenido que se espera para los estudiantes al final del cuarto grado. Cabe destacar que durante las clases de matemáticas estos estándares se entrelazan.

Son ideas directrices y competencias referidas al contenido:

Números y operaciones

- Comprender las representaciones de los números y sus relaciones.
- Comprender y dominar las operaciones de cálculo.
- Calcular en el contexto.

Espacio y forma

- Orientarse en el espacio.
- Reconocer figuras geométricas, nombrarlas y representarlas.
- Identificar, nombrar y representar ilustraciones geométricas simples.
- Comparar y medir superficies y volúmenes.

Patrones y estructuras

- Reconocer regularidades, describirlas y representarlas.
- Identificar relaciones funcionales, describirlas y representarlas.

Magnitudes y medir

- Tener una idea de las magnitudes.
- Manejar magnitudes en situaciones reales.

Datos, frecuencia y probabilidad

- Compilar datos y representarlos.
- Comparar probabilidades a partir de resultados de experimentos con el azar.

A continuación se describen de manera general las cinco ideas directrices, cada una con sus respectivas competencias y ámbito de contenido.

1.3.1. Número y operaciones

Comprender las representaciones de los números y sus relaciones

- Comprender la estructura del sistema de numeración decimal.
- Representar números hasta 1 000 000 de distintas maneras y relacionarlos entre sí.
- Orientarse en el ámbito de los números hasta 1 000 000 (por ejemplo, ordenarlos de mayor a menor, redondearlos).

Comprender y dominar las operaciones de cálculo

- Comprender las cuatro operaciones básicas y sus relaciones.
- Dominar de memoria las tareas básicas del cálculo mental (sumas hasta 20, tablas de multiplicar hasta 10, descomposición de números), inferir las operaciones inversas y aplicar estos conocimientos básicos a ejercicios análogos con números mayores.
- Comprender estrategias de cálculo que son orales y preoperativas (por escrito, usando la descomposición) y utilizarlas para resolver ejercicios adecuados.
- Comprender y desarrollar con fluidez procedimientos escritos (procedimientos estándar) para la adición, sustracción y multiplicación. Aplicarlos en ejercicios adecuados.
- Reconocer, explicar y utilizar reglas y propiedades de cálculo.
- Aproximar resultados y utilizar la operación inversa para verificarlos.

Calcular en contexto

- Resolver situaciones y describir las relaciones entre los pasos de solución y la situación.
- Verificar la factibilidad del resultado.
- Discriminar si es suficiente realizar un cálculo aproximado o si es necesario un resultado exacto.
- Variar sistemáticamente las situaciones para calcular.
- Resolver ejercicios combinatorios simples (por ejemplo, acertijos) probando y, también, mediante un procedimiento sistemático.

1.3.2. Espacio y forma

Orientarse en el espacio	• Disponer de la capacidad de representarse mentalmente el espacio. • Reconocer relaciones espaciales, describirlas y utilizarlas (composiciones, trazos, planos, puntos de vista o perspectivas). • Relacionar las representaciones de cubos en dos y tres dimensiones (por ejemplo, edificios de cubos) – construir siguiendo un plano, dibujar un plano para una construcción, explorar modelos de aristas y de redes.
Reconocer figuras geométricas, nombrarlas y representarlas	• Clasificar cuerpos y figuras planas según sus propiedades y nombrarlos usando los términos correctos. • Reconocer cuerpos y figuras planas en el entorno. • Crear modelos de cuerpos y figuras planas y experimentar con ellos: construir, armar, separar, juntar, cortar, doblar, etc. • Producir dibujos a mano alzada y con ayuda de instrumentos.
Identificar, nombrar y representar ilustraciones geométricas simples	• Reproducir figuras planas en el plano de coordenadas – reducirlas y ampliarlas. • Reconocer las propiedades de la simetría respecto de un eje, describirlas y utilizarlas. • Continuar patrones simétricos y crear los propios.
Comparar y medir superficies y volúmenes	• Comparar superficies de figuras planas, descomponiéndolas y cubriéndolas con cuadraditos de lado 1. • Explorar el perímetro y el área de figuras planas. • Comprar volúmenes y determinarlos según la cantidad de cubos de lado 1.

1.3.3. Patrones y estructuras

Reconocer regularidades describirlas y representarlas

- Entender y usar las representaciones de los números (por ejemplo, el tablero del 100).
- Reconocer regularidades en patrones geométricos y aritméticos (por ejemplo, en secuencias numéricas o en ejercicios estructurados en secuencia), describirlos y continuarlos.
- Desarrollar patrones aritméticos y geométricos propios, modificarlos sistemáticamente y describirlos.

Identificar relaciones funcionales, describirlas y representarlas.

- Reconocer relaciones en situaciones reales, describirlas oralmente (por ejemplo, cantidad/precio) y resolver las tareas correspondientes.
- Representar relaciones en tablas y examinarlas.
- Resolver situaciones simples sobre proporcionalidad.

1.3.4. Magnitudes y medir

Tener una idea de las magnitudes

- Conocer las unidades de medida estándar de dinero, longitud, intervalos de tiempo, masa y volumen.
- Comparar magnitudes, medirlas y estimarlas.
- Conocer "representantes" de las unidades de medida estándar que son importantes en la vida cotidiana.
- Representar datos sobre magnitudes de diferentes maneras – convertirlos.
- Conocer y comprender fracciones sencillas en su relación con magnitudes que se usan en la vida cotidiana.

Manejar magnitudes en situaciones reales

- Medir de manera apropiada usando unidades adecuadas y distintos instrumentos de medición.
- Usar magnitudes referenciales de la propia experiencia para resolver situaciones.
- Calcular con valores aproximados en situaciones reales teniendo en cuenta la estimación de magnitud.
- Resolver tareas o ejercicios relacionados con magnitudes en situaciones concretas.

Compilar datos y representarlos	• Recopilar datos obtenidos de observaciones, investigaciones y experimentos simples, organizarlos y representarlos en tablas, gráficos y diagramas. • Obtener información de tablas, gráficos y diagramas.
Comparar probabilidades a partir de resultados de experimentos con el azar	• Conocer los conceptos básicos (por ejemplo, seguro/cierto, imposible, probable). • Evaluar/estimar los chances de ganar en experimentos simples con el azar (por ejemplo, al jugar a los dados).

2. ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE AL CONCLUIR EL DÉCIMO GRADO[2]

2.1. La contribución del aprendizaje de las matemáticas a la formación de la persona

Las clases de matemáticas aportan a la formación de los estudiantes al permitirles ciertas experiencias básicas que se encuentran en estrecha relación entre sí, algunas de las cuales son:

- Con ayuda de las matemáticas, percatarse de fenómenos y procesos que ocurren en el campo de la técnica, la naturaleza, la sociedad y la cultura; comprenderlos y evaluarlos desde un punto de vista matemático.
- Conocer y comprender la importancia de las matemáticas en cuanto al significado y relevancia del lenguaje, los símbolos, las figuras y fórmulas propios de la Matemática; para la descripción y tratamiento de tareas y problemas dentro y fuera de la disciplina.
- Adquirir la capacidad general de resolver problemas mediante el trabajo con preguntas y situaciones que requieren el uso de recursos matemáticos.

Los estándares de aprendizaje de matemáticas para la *Mittleren Schulabschluss* (nivel Secundaria I, correspondiente a los grados quinto a décimo) denominan las *competencias generales* y las *competencias referidas al contenido* que los estudiantes

2 KMK (2003). Conferencia Permanente de Ministros de Cultura de Alemania.

deben haber logrado al concluir el décimo grado, como resultado del trabajo activo con una multiplicidad de contenidos matemáticos realizado durante las clases de matemáticas.

Para ello, los estudiantes trabajan problemas, tareas y proyectos usando recursos matemáticos, leen y escriben textos matemáticos, se comunican acerca de contenidos matemáticos, entre otros. Esto ocurre en una sesión de aprendizaje que tiene como metas el trabajo autónomo, el desarrollo de capacidades comunicativas y la disposición a cooperar, así como la obtención de información, documentación y presentación de los resultados del aprendizaje.

El mandato de la formación escolar (educación formal) va más allá de la adquisición de competencias específicas de la disciplina. Junto con otras disciplinas, las clases de matemáticas apuntan también hacia el desarrollo de la personalidad, así como a la formación en valores.

A partir del contenido y construcción de los estándares de aprendizaje, es posible derivar puntos de referencia para el diseño de las *clases de matemáticas*, las cuales se orientan a los procesos y resultados del aprendizaje de los estudiantes.

Estos procesos y resultados no dependen exclusivamente de la sistemática de los contenidos de la enseñanza de la disciplina matemática. Ello posibilita analizar diferentes rutas y resultados individuales de aprendizaje y utilizarlos para seguir aprendiendo, con el fin de que el conocimiento matemático resulte funcional, flexible y para que pueda ser utilizado con discernimiento en una diversidad de situaciones relacionadas con el contexto. De esta manera, los estudiantes vivirán las matemáticas como un campo de actividad estimulante, útil y creativo que incluye el uso pertinente de recursos auxiliares, en especial los medios electrónicos.

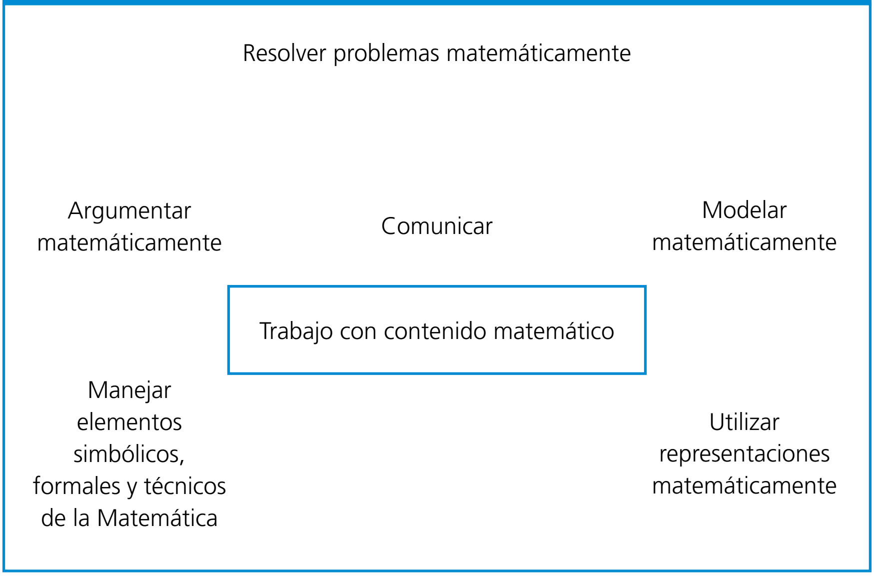
Para lograr este tipo de sesiones de aprendizaje, se ha puesto en primer plano la descripción de *las competencias matemáticas generales* del acápite 2.

El haber estructurado las *competencias matemáticas referidas al contenido* de acuerdo con las *ideas directrices* también aporta a esta idea, dado que al trabajar contenidos matemáticos se debe lograr un pensamiento y una comprensión de las nociones matemáticas básicas de una manera interconectada que abarca más de un dominio. Los ejemplos de casos del capítulo 4 (que se describirán en el producto 2) explicitan las *competencias matemáticas generales* con su respectivo ámbito de exigencia, así como las *competencias matemáticas referidas al contenido,* mediante las ideas directrices De igual manera, dichos casos ejemplifican el logro del estándar, en la medida en que muestran qué calidad concreta de rendimiento matemático se espera para alcanzar el estándar requerido. Por lo tanto, también están pensados para ser adaptados y para generar discusión creativa entre el cuerpo docente y los especialistas[3].

2.2. Competencias matemáticas generales en el curso de matemáticas

Al concluir el décimo grado los estudiantes deberán haber logrado las siguientes competencias matemáticas generales, las cuales son relevantes para todos los niveles del quehacer matemático. Estas competencias siempre se adquirirán, o se usarán entrelazadas.

Figura 4. Competencias matemáticas generales al concluir décimo grado



3 Dichos ejemplos forman parte del producto/entregable 2.

C1 : Argumentar matemáticamente. Esta competencia comprende:

- Plantear preguntas que son características de las matemáticas, tales como: "Existe..." ¿Cómo cambia...? ¿Se cumple siempre que...?" y expresar suposiciones fundamentadas.
- Desarrollar argumentaciones matemáticas, tales como: explicaciones, fundamentaciones, demostraciones.
- Describir procesos de solución y fundamentarlos.

C2: Resolver problemas matemáticamente. Esta competencia comprende:

- Trabajar problemas dados y, también, formulados por sí mismo.
- Elegir y utilizar recursos heurísticos, estrategias y principios adecuados al resolver problemas.
- Comprobar la plausibilidad del resultado obtenido, así como reflexionar sobre nuevas ideas y procesos de solución.

C3: Modelar matemáticamente. Esta competencia comprende:

- Traducir el ámbito o la situación que requieren ser modelados a nociones, estructuras y relaciones matemáticas.
- Trabajar con modelos matemáticos.
- Interpretar y comprobar los resultados en el ámbito o en la situación correspondiente.

C4: Utilizar representaciones matemáticas. Esta competencia comprende:

- Utilizar, interpretar y diferenciar distintas formas de representación de objetos y situaciones matemáticas.
- Reconocer relaciones entre distintas formas de representación.
- Elegir e intercambiar entre sí distintas formas de representación según cada situación y finalidad.

C5: Manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas. Esta competencia comprende:

- Trabajar con variables, expresiones algebraicas, ecuaciones, funciones, diagramas, tablas.
- Traducir símbolos y lenguaje formal al lenguaje natural y viceversa.
- Utilizar instrumentos matemáticos de manera razonable y comprensiva, tales como colecciones de fórmulas, calculadora, software.

C6: Comunicar. Esta competencia comprende:

- Documentar, representar en forma comprensiva y presentar razonamientos, procesos de solución y resultados usando recursos adecuados.
- Utilizar el lenguaje matemático teniendo en cuenta quién es el receptor.
- Comprender y comprobar expresiones de terceros y textos de contenido matemático.

2.3. Estándares para las competencias matemáticas referidas al contenido en el curso de matemáticas

2.3.1. Ideas matemáticas directrices

Los estudiantes adquieren *las competencias matemáticas generales* descritas más arriba cuando trabajan con contenidos matemáticos. Por consiguiente, *las competencias matemáticas generales* —disposiciones de los estudiantes— se concretan de diversas maneras de acuerdo con el contenido. A continuación se detallan los estándares para las competencias matemáticas referidas a los contenidos. Estas competencias se ordenan en función de una selección de ideas directrices matemáticas que permiten comprender las nociones matemáticas básicas, esclarecer las particularidades del pensamiento matemático, así como experimentar el significado y función de la matemática para la configuración y el conocimiento del mundo.

Las ideas directrices propuestas son:

- Número
- Medir
- Espacio y forma
- Relación funcional
- Datos y azar

Una idea directriz reúne contenidos de distintos dominios de la matemática y *recorre el currículo matemático a manera de espiral*. La correspondencia entre una competencia matemática referida al contenido y una idea directriz matemática no siempre es unívoca: depende, más bien, de qué aspectos del trabajo matemático se enfatizan en relación al contenido.

2.3.2. Competencias matemáticas referidas al contenido ordenadas según ideas directrices

Idea directriz *Números* (ID1). Los estudiantes:

- Utilizan representaciones significativas de números racionales, sobre todo los naturales, enteros y fraccionarios; según la necesidad.
- Representan números de acuerdo con la situación; entre otros: la escritura en potencias de 10.
- Fundamentan la necesidad de ampliar los conjuntos de números usando ejemplos.

- Usan reglas de cálculo o propiedades, también para calcular con ventaja.
- Utilizan procedimientos como aproximar, y otros, para comprobar sus resultados al calcular.
- Redondean sus resultados razonablemente, según corresponda a cada situación.
- Aplican porcentaje y cálculo de intereses adecuadamente.
- Explican, usando ejemplos, la relación entre las operaciones de cálculo y sus inversas y utilizan estas relaciones.
- Eligen, describen y evalúan procedimientos y métodos basados en algoritmos y cálculos.
- Usan el pensamiento combinatorio en situaciones concretas, para determinar el número de posibilidades,
- verifican e interpretan resultados teniendo en cuenta, también, una perspectiva crítica del modelo elegido y su uso.

Idea directriz Medir (ID2). Los estudiantes:

- Utilizan los principios básicos de la medición, en especial las de longitud, área y volumen, también en las ciencias naturales y otros ámbitos.
- Eligen unidades de medida adecuados a la situación; sobre todo unidades de medida de tiempo, masa, dinero, longitud, superficie, volumen y ángulos.
- Estiman magnitudes con ayuda de nociones de “representantes” adecuados.
- Calculan el área y el perímetro de cuadriláteros, triángulos y círculos, así como los que resultan al combinar dichas figuras.
- Calculan el volumen y la superficie de prisma, pirámide, cilindro, cono y esfera, así como que los que resultan al combinar dichos cuerpos.
- Calculan segmentos y medidas de ángulos, también utilizando relaciones trigonométricas y de semejanza.
- Realizan mediciones en el entorno, recopilan datos de medidas de diversas fuentes, las calculan y evalúan sus resultados; así como el proceso seguido de acuerdo a la situación real.

Idea directriz Espacio y forma (ID3). Los estudiantes:

- Reconocen y describen estructuras geométricas en el entorno,
- Operan mentalmente con segmentos, áreas y cuerpos, grafican figuras geométricas en el plano de coordenadas.
- Representan cuerpos; por ejemplo, su desarrollo, su dibujo en tres dimensiones y reconocen los cuerpos a partir de su correspondiente representación.

- Analizan y clasifican objetos geométricos en el plano y en el espacio.
- Describen y fundamentan las propiedades y relaciones de los objetos geométricos, tales como: simetría, congruencia, semejanza, relaciones de posición, y las utilizan en el marco de la solución de problemas para analizar.
- Utilizan teoremas de la geometría plana al realizar construcciones, cálculos y demostraciones, en especial el teorema de Pitágoras y el teorema de Tales.
- Dibujan y construyen figuras geométricas mediante el uso de instrumentos como el compás, la regla, el geotriángulo o software dinámico de geometría.
- Examinan la factibilidad y la diversidad de soluciones al realizar construcciones geométricas y formulan los enunciados correspondientes.
- Emplean medios adecuados al explorar casos y resolver problemas.

Idea directriz Relación funcional (ID4). Los estudiantes:

- Utilizan funciones como medio para describir relaciones cuantitativas.
- Reconocen y describen relaciones funcionales y las representan en forma oral, en tablas o gráficos; así como, en algunos casos, usando expresiones algebraicas.
- Analizan, interpretan y comparan distintas representaciones de relaciones funcionales tales como: lineales, directamente proporcionales e inversamente proporcionales,
- Resuelven problemas cercanos a la realidad relacionados con correspondencias lineales, directa e inversamente proporcionales.
- Interpretan gráficos de sistemas de ecuaciones lineales.
- Resuelven ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales mediante el cálculo eficiente algorítmicamente y, también, empleando software adecuado. Comparan la efectividad de sus procedimientos con otros métodos de solución, como soluciones inherentes o probando sistemáticamente.
- Examinan la factibilidad y la diversidad de planteamientos de solución al trabajar con ecuaciones lineales y cuadráticas, así como con sistemas de ecuaciones lineales y formulan los enunciados respectivos.
- Nombran las propiedades características de las funciones y establecen relaciones entre la expresión algebraica y su gráfico.
- Aplican, en especial, funciones lineales y cuadráticas, así como funciones exponenciales al describir y trabajar problemas.
- Utilizan la función seno al describir procesos periódicos.
- Describen las variaciones de las magnitudes mediante funciones también usando programas de cálculo,
- Nombran situaciones que podrían ser descritas mediante dichas funciones.

Idea directriz Datos y azar (ID5). Los estudiantes:

- Evalúan representaciones gráficas y tablas estadísticas.
- Planifican la recolección de datos estadísticos.
- Recopilan datos sistemáticamente, los organizan en tablas, los representan gráficamente, también utilizando medios adecuados como software.
- Interpretan datos a partir de parámetros conocidos.
- Reflexionan y evalúan argumentos basados en análisis de datos.
- Describen sucesos del azar en situaciones de la vida cotidiana.
- Determinan la probabilidad en experimentos aleatorios.

3. ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE AL CONCLUIR EL *ABITUR* O BACHILLERATO GENERAL[4]

3.1 Preámbulo técnico

3.1.1. Metas generales del curso y fundamentos técnico-pedagógicos

El curso de matemáticas realiza un aporte fundamental a las metas educativas del nivel superior *Gymnasium* (nivel Secundaria que conduce a la formación técnica superior y universitaria) y al desarrollo de las competencias de los estudiantes hasta terminar el bachillerato general. Se profundiza en la formación general, se desarrolla la capacidad para estudiar y se imparte la propedéutica científica. De esta manera se sientan las bases para un accionar que abarca lo técnico, pero que va más allá de eso, con una mirada hacia las exigencias de la ciencia y de la formación profesional. Las bases teórico-pedagógicas de la clase de matemáticas son tanto el mandato de "formación general", así como la orientación hacia la práctica del curso de matemáticas. Por lo tanto, la clase de matemáticas se caracteriza por tres experiencias básicas, que deben ser trasmitidas a cada estudiante:

- Las matemáticas como herramienta para percibir y comprender de manera específica los fenómenos del mundo desde la naturaleza, la cultura, la profesión y el trabajo.
- Las matemáticas como creación intelectual y como un mundo particular ordenado deductivamente.
- Las matemáticas como un medio para adquirir capacidades que van más allá de las propias matemáticas, en especial capacidades heurísticas.

4 KMK (Conferencia Permanente de Ministros de Cultura de Alemania 2012).

Al transmitir estas experiencias básicas, la clase de matemáticas desarrolla una fuerza formadora específica y realiza un aporte indispensable para cumplir con el mandato educativo del nivel secundario del *Gymnasium.* Así, la riqueza las matemáticas se puede experimentar cuando se la comprende como fenómeno cultural y social.

3.1.2 Dominios de competencia

Los dominios de competencia del curso de matemáticas tienen la siguiente estructura:

Competencias matemáticas generales	Ideas directrices
• Argumentar matemáticamente (C1) • Resolver problemas matemáticamente (C2) • Modelar matemáticamente (C3) • Utilizar representaciones matemáticas (C4) • Manejar los elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas (C5) • Comunicar matemáticamente (C6)	• Algoritmo y número (ID1) • Medir (ID2) • Espacio y forma (ID3) • Relación funcional • (ID4) • Datos y azar (ID5)

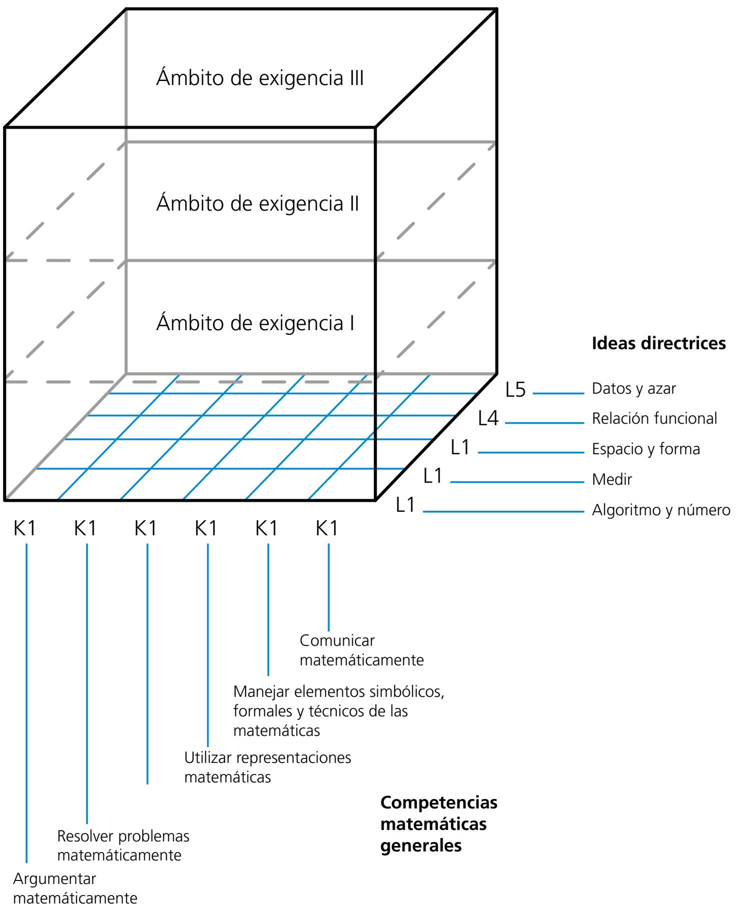
La persona que aprende puede adquirir las competencias matemáticas generales solamente en la medida que trabaje activamente con los contenidos de la materia. En este sentido, los ámbitos de exigencia describen distintas demandas cognitivas de actividades matemáticas vinculadas con las competencias.

Las competencias matemáticas generales se manifiestan en cada contenido matemático, es decir, las competencias matemáticas generales y los contenidos están conectados de manera inseparable (esto se indica mediante la cuadrícula en la figura 5). Recién se podrá hablar de una adquisición suficiente de la competencia matemática general, cuando esta se pueda aplicar para diversas ideas directrices en los tres ámbitos de exigencia.

Para adquirir las competencias en clase es necesario prestar atención tanto a una conexión de los contenidos matemáticos entre sí, así como a una conexión con otros cursos. Los casos para resolver que presentan aplicaciones del mundo real tienen la misma importancia y valor que los casos intramatemáticos

Los estándares de aprendizaje para el nivel Secundaria II (bachillerato general) son una continuación directa y orgánica de los estándares de aprendizaje para el nivel Secundaria I. Las competencias adquiridas en el nivel Secundaria I son una base indispensable para el trabajo en el nivel Secundaria II. Se profundizan y amplían permanentemente y pueden ser objeto de los exámenes de Bachillerato. La representación gráfica (figura 5) empalma directamente con la representación de los estándares de aprendizaje para Secundaria I.

Figura 2



3.1.3. Niveles de exigencia

De acuerdo con el "Convenio para el Diseño del *Gymnasialen Oberstufe* en el nivel Secundaria II" (en su versión modificada), las regiones diferencian el trabajo en clase en dos niveles de exigencia: básico y elevado (no confundir nivel de exigencia con ámbito de exigencia).

Tabla 3

	Nivel de exigencia básico	Nivel de exigencia elevado
Ideas directrices	El alcance de los contenidos matemáticos provee conocimientos básicos. Estos se indican en las ideas directrices.	Se aborda un alcance mayor de contenidos matemáticos que el explicitado en las ideas directrices, a esto pertenece un grado elevado de complejidad, profundidad, precisión y formalización.
Ámbito de exigencia respecto de las competencias matemáticas generales	El acento del desempeño que se debe lograr en las pruebas está puesto en el ámbito de exigencia II. Además, se deben considerar los ámbitos de exigencia I y III. En los cursos evaluados en un nivel de exigencia básico, se deben acentuar los ámbitos de exigencia I y II.	El acento del desempeño que se debe lograr en las pruebas está puesto en el ámbito de exigencia II. Además se deben considerar los ámbitos de exigencia I y III. En los cursos evaluados en un nivel de exigencia básico se deben acentuar los ámbitos de exigencia II y III.

3.1.4. Herramientas matemáticas digitales

El desarrollo de las competencias matemáticas encuentra un apoyo en el empleo con sentido de herramientas matemáticas digitales. El potencial de estas herramientas se despliega en las clases de matemáticas:

- Cuando se descubren relaciones matemáticas, en especial mediante exploraciones interactivas al modelar y resolver problemas.
- Cuando se fomenta la comprensión de relaciones matemáticas, mediante variadas posibilidades de representación.
- Mediante la reducción de procesos esquemáticos y el procesamiento de grandes cantidades de datos.
- Mediante el respaldo de preferencias individuales y diferentes accesos para el trabajo de los caso, incluyendo el uso reflexivo de posibilidades de verificación.

Al uso continuo de herramientas matemáticas digitales en la clase le debe seguir su utilización durante las evaluaciones.

3.2. ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE PARA EL DOMINIO DE COMPETENCIAS EN EL CURSO DE MATEMÁTICAS

3.1.1. Competencias matemáticas generales

En los estándares de aprendizaje para el curso de matemáticas al concluir el duodécimo grado de escolaridad (bachillerato general) se diferencian seis competencias matemáticas generales que cubren el espectro del trabajo matemático que se realiza en el nivel secundario II. Mediante esta diferenciación no es ni posible, ni tampoco es deseable, delimitar completamente una competencia de la otra. Por el contrario, es más bien característico del trabajo matemático que sea necesario hacer uso de una combinación de competencias. Esto también aplica a los ejemplos de tareas matemáticas que se ilustrarán más adelante.

A continuación se describen en detalle las seis competencias matemáticas generales, con especial énfasis en cómo estas toman forma con respecto a los tres ámbitos o niveles de exigencia. Como se mencionó en el acápite 1.2, estas competencias son indesligables de los contenidos matemáticos; los que, a su vez, se concretan en las ideas directrices.

❖ Argumentar matemáticamente (C1)

Pertenecen a esta competencia tanto el desarrollo de argumentaciones y conjeturas matemáticas propias adecuadas para la situación como la comprensión y evaluación de afirmaciones matemáticas dadas. El espectro abarca desde argumentos sencillos sobre la plausibilidad de una afirmación hasta demostraciones formales, pasando por fundamentaciones intuitivas o descriptivas. Formulaciones típicas, que aluden a la competencia de la argumentación, son por ejemplo: "Justifica…", "Refuta…", "¿Existe…?" o "¿Rige en todos los casos…?". Los *tres ámbitos de exigencia* para esta competencia se describen de la siguiente manera:

Ámbito de exigencia I: Los estudiantes pueden:

- Refutar y aplicar argumentaciones rutinarias (teoremas conocidos, procedimientos, etc.).
- Dar fundamentaciones sencillas en base a cálculos o llegar a conclusiones lógicas sencillas.
- Argumentar a partir del conocimiento cotidiano.

Ámbito de exigencia II: Los estudiantes pueden:

- Comprender, explicar o desarrollar argumentaciones suficientemente cortas de varios pasos y conclusiones lógicas.

Ámbito de exigencia III: Los estudiantes pueden:

- Usar, explicar o desarrollar argumentaciones de mayor exigencia y demostraciones.
- Evaluar diferentes argumentos según criterios tales como su alcance y coherencia.

❖ **Resolver problemas matemáticamente (C2)**

La competencia comprende la elección de estrategias de solución apropiadas, así como encontrar y ejecutar soluciones adecuadas sobre la base de la identificación y formulación de problemas matemáticos.

El espectro va desde *el uso hasta la construcción de estrategias nuevas y complejas*. Se seleccionan y usan deliberadamente principios heurísticos, como por ejemplo "hacer un bosquejo", "probar sistemáticamente", "descomponer y completar", "usar simetrías", "usar el principio del extremo", "encontrar invariantes", así como "trabajar hacia adelante y hacia atrás". Los tres ámbitos de exigencia para esta competencia se describen de la siguiente manera:

Ámbito de exigencia I: Los estudiantes pueden:

- Encontrar una solución para una tarea matemática sencilla mediante la identificación y elección de una estrategia evidente; por ejemplo, una analogía.

Ámbito de exigencia II: Los estudiantes pueden:

- Encontrar una solución al planteamiento de un problema; por ejemplo, mediante un procedimiento de varios pasos que se apoya en el uso de estrategias.

Ámbito de exigencia III: Los estudiantes pueden:

- Desarrollar y usar una estrategia para darle solución a un problema complejo; por ejemplo, mediante la generalización de una conclusión o el uso métodos diversos de solución, o para evaluar diferentes caminos de solución.

❖ **Modelar matemáticamente (C3)**

Se trata del alternar entre situaciones reales y conceptos, resultados o métodos matemáticos. Esta competencia se refiere tanto a la construcción de modelos matemáticos adecuados como a la comprensión y evaluación de modelos dados.

Estructurar y simplificar las situaciones reales dadas, traducir hechos reales en modelos matemáticos, interpretar resultados matemáticos desde las situaciones reales y comprobar cuán coherentes y adecuados son los resultados al relacionarlos con la situación real son todos pasos intermedios característicos del modelar. El espectro abarca desde modelos estándar (por ejemplo en el caso de relaciones lineales) hasta modelos complejos. Los tres ámbitos de exigencia para esta competencia se describen de la siguiente manera:

Ámbito de exigencia I: Los estudiantes pueden:

- Usar modelos que les son familiares y que se pueden identificar directamente.
- Trasladar directamente una situación real a un modelo matemático.
- Transferir un resultado matemático a una situación real dada.

Ámbito de exigencia II: Los estudiantes pueden:

- Realizar modelados de varios pasos con pocas restricciones formuladas con claridad.
- Interpretar los resultados de un modelado de este tipo.
- Adaptar un modelo matemático a circunstancias que han cambiado.

Ámbito de exigencia III: Los estudiantes pueden:

- Modelar una situación real compleja en la que las variables y las condiciones se deben definir previamente.
- Comprobar, comparar y evaluar modelos matemáticos en el contexto de una situación real.

❖ **Utilizar representaciones matemáticas (C4)**

Esta competencia se refiere a la selección de formas de representación apropiadas, la creación de representaciones matemáticas y el manejo de representaciones dadas. Las representaciones pueden ser diagramas, gráficos, tablas o fórmulas. El espectro abarca desde representaciones estándar —como, por ejemplo, una tabla de valores— hasta representaciones propias que sirven para estructurar y documentar las reflexiones individuales y para apoyar la argumentación y la resolución de problemas. Los tres ámbitos de exigencia para esta competencia se describen de la siguiente manera:

Ámbito de exigencia I: Los estudiantes pueden:

- Elaborar y usar representaciones estándar de situaciones y objetos matemáticos.

Ámbito de exigencia II: Los estudiantes pueden:

- Interpretar de manera comprensible o modificar las representaciones dadas.
- Alternar entre diferentes representaciones.

Ámbito de exigencia III: Los estudiantes pueden:

- Manejar representaciones y formas de representar que son poco familiares para ellos de manera apropiada y comprensible.
- Desarrollar representaciones propias que son adecuadas para el problema.
- Evaluar diferentes representaciones y formas de representar de acuerdo al uso que tengan que hacer de ellas.

❖ Manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas (C5)

Esta competencia comprende, ante todo, la ejecución de operaciones con objetos matemáticos como números, medidas, variables, expresiones algebraicas, ecuaciones y funciones, así como con vectores y objetos geométricos. El espectro abarca desde procedimientos rutinarios sencillos y previsibles hasta procedimientos complejos, incluyendo su evaluación. La competencia abarca el conocimiento de los contenidos y las reglas que son necesarios para que el trabajo de tareas matemáticas sea eficiente; también al usar los medios, instrumentos y herramientas matemáticas digitales aprendidos. Los tres ámbitos de exigencia para esta competencia se describen de la siguiente manera:

Ámbito de exigencia I: Los estudiantes pueden:

- Emplear procedimientos de solución elementales.
- Usar fórmulas y símbolos de manera directa.
- Utilizar directamente recursos y herramientas digitales matemáticamente.

Ámbito de exigencia II: Los estudiantes pueden:

- Usar procedimientos matemáticos formales.
- Manejar objetos matemáticos en el contexto.
- Seleccionar deliberadamente y usar eficientemente recursos y herramientas digitales matemáticas teniendo en cuenta la situación.

Ámbito de exigencia III: Los estudiantes pueden:

- Llevar a cabo procedimientos complejos.
- Evaluar diversos procedimientos de solución y de verificación.
- Reflexionar sobre las posibilidades y los límites de los procedimientos matemáticos, los recursos matemáticos y las herramientas digitales matemáticos.

❖ Comunicar matemáticamente (C6)

A esta competencia pertenecen tanto el recoger información de textos escritos, expresiones orales u otras fuentes, así como el exponer las propias reflexiones y resultados, haciendo uso de la terminología matemática apropiada. El espectro abarca desde el recojo directo de información a partir de textos de uso diario, o bien el tomar nota de procesos de solución sencillos, hasta la comprensión del sentido de textos de lenguaje técnico, o bien la exposición estructurada de las propias reflexiones. Las exigencias lingüísticas juegan un rol particularmente importante en esta competencia. Los tres ámbitos de exigencia para esta competencia se describen de la siguiente manera:

Ámbito de exigencia I: Los estudiantes pueden:

- Exponer fenómenos matemáticos sencillos.
- Identificar y seleccionar información de textos cortos de contenido matemático, en los cuales el orden en que se presenta la información en el texto sugiere los pasos a seguir en el trabajo matemático.

Ámbito de exigencia II: Los estudiantes pueden:

- Exponer de manera comprensible caminos de solución de varios pasos, reflexiones y resultados.
- Interpretar las expresiones de otras personas (incluso si son falsas) como declaraciones matemáticas.
- Identificar y seleccionar información matemática de textos en los cuales el orden de la información no coincide de manera directa con los pasos del trabajo matemático.

Ámbito de exigencia III: Los estudiantes pueden:

- Exponer o presentar de forma coherente y comprensible una solución matemática compleja.
- Comprender el significado de textos técnicos matemáticos.
- Comparar, evaluar y, eventualmente, corregir las expresiones de contenido matemático de otras personas, tanto de manera oral como por escrito.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

KMK Conferencia Permanente de Ministros de Cultura de Alemania (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* Estándares de aprendizaje para matemáticas en el ámbito de Primaria. Recuperado el 18 de junio de 2014 de www.kmk.org

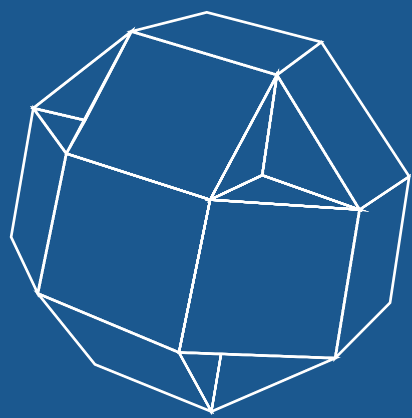
KMK Conferencia Permanente de Ministros de Cultura de Alemania (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Estándares de aprendizaje para matemáticas al concluir décimo grado. Recuperado el 18 de junio de 2014 de www.kmk.org

KMK Conferencia Permanente de Ministros de Cultura de Alemania (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* Estándares de aprendizaje para el bachillerato general. Recuperado el 18 de junio de 2014 de www.kmk.org

En esta entrega de su serie editorial: Experiencias e Investigaciones, el SINEACE cumple con presentar la versión inédita en español del libro editado en idioma alemán titulado: Bildungsstandards Mathematik: Konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen

Se trata de una obra del Instituto para el Desarrollo de la Calidad de la Educación —IQB— de la Universidad Humboldt de Berlín, designado por el gobierno federal de Alemania para gestionar los estándares de aprendizaje de matemáticas en las escuelas alemanas.

Dicha obra fue identificada y consultada por el equipo del SINEACE en el marco de la formulación de estándares de aprendizaje de matemática para el Perú. Debido a la limitada bibliografía en español para este tema, en especial para los grados de la articulación primaria secundaria, el SINEACE tomó la decisión de traducirlo como una contribución a la calidad de los aprendizajes en el área de matemáticas.



SERIE
ESTUDIOS Y EXPERIENCIAS

SINEACE
SISTEMA NACIONAL DE EVALUACIÓN, ACREDITACIÓN Y CERTIFICACIÓN DE LA CALIDAD EDUCATIVA