SÍMBOLOS DE LA PATRIA

Bandera Nacional

CORO

Somos libres, seámoslo siempre
y antes niegue sus luces el Sol,
que faltemos al voto solemne
que la Patria al Eterno elevó.

Himno Nacional

Escudo Nacional

DECLARACIÓN UNIVERSAL DE LOS DERECHOS HUMANOS

El 10 de diciembre de 1948, la Asamblea General de las Naciones Unidas aprobó y proclamó la Declaración Universal de Derechos Humanos, cuyos artículos figuran a continuación:

Artículo 1
Todos los seres humanos nacen libres e iguales en dignidad y derechos y, (...) deben comportarse fraternalmente los unos con los otros.

Artículo 2
Toda persona tiene los derechos y libertades proclamados en esta Declaración, sin distinción alguna de raza, color, sexo, idioma, religión, opinión política o de cualquier otra índole, origen nacional o social, posición económica, nacimiento o cualquier otra condición. Además, no se hará distinción alguna fundada en la condición política, jurídica o internacional del país o territorio de cuya jurisdicción dependa una persona (...).

Artículo 3
Todo individuo tiene derecho a la vida, a la libertad y a la seguridad de su persona.

Artículo 4
Nadie estará sometido a esclavitud ni a servidumbre; la esclavitud y la trata de esclavos están prohibidas en todas sus formas.

Artículo 5
Nadie será sometido a torturas ni a penas o tratos crueles, inhumanos o degradantes.

Artículo 6
Todo ser humano tiene derecho, en todas partes, al reconocimiento de su personalidad jurídica.

Artículo 7
Todos son iguales ante la ley y tienen, sin distinción, derecho a igual protección de la ley. Todos tienen derecho a igual protección contra toda discriminación que infrinja esta Declaración (...).

Artículo 8
Toda persona tiene derecho a un recurso efectivo, ante los tribunales nacionales competentes, que la ampare contra actos que violen sus derechos fundamentales (...).

Artículo 9
Nadie podrá ser arbitrariamente detenido, preso ni desterrado.

Artículo 10
Toda persona tiene derecho, en condiciones de plena igualdad, a ser oída públicamente y con justicia por un tribunal independiente e imparcial, para la determinación de sus derechos y obligaciones o para el examen de cualquier acusación contra ella en materia penal.

Artículo 11
1. Toda persona acusada de delito tiene derecho a que se presuma su inocencia mientras no se pruebe su culpabilidad (...).
2. Nadie será condenado por actos u omisiones que en el momento de cometerse no fueron delictivos según el Derecho nacional o internacional. Tampoco se impondrá pena más grave que la aplicable en el momento de la comisión del delito.

Artículo 12
Nadie será objeto de injerencias arbitrarias en su vida privada, su familia, su domicilio o su correspondencia, ni de ataques a su honra o a su reputación. Toda persona tiene derecho a la protección de la ley contra tales injerencias o ataques.

Artículo 13
1. Toda persona tiene derecho a circular libremente y a elegir su residencia en el territorio de un Estado.
2. Toda persona tiene derecho a salir de cualquier país, incluso el propio, y a regresar a su país.

Artículo 14
1. En caso de persecución, toda persona tiene derecho a buscar asilo, y a disfrutar de él, en cualquier país.
2. Este derecho no podrá ser invocado contra una acción judicial realmente originada por delitos comunes o por actos opuestos a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 15
1. Toda persona tiene derecho a una nacionalidad.
2. A nadie se privará arbitrariamente de su nacionalidad ni del derecho a cambiar de nacionalidad.

Artículo 16
1. Los hombres y las mujeres, a partir de la edad núbil, tienen derecho, sin restricción alguna por motivos de raza, nacionalidad o religión, a casarse y fundar una familia (...).
2. Sólo mediante libre y pleno consentimiento de los futuros esposos podrá contraerse el matrimonio.
3. La familia es el elemento natural y fundamental de la sociedad y tiene derecho a la protección de la sociedad y del Estado.

Artículo 17
1. Toda persona tiene derecho a la propiedad, individual y colectivamente.
2. Nadie será privado arbitrariamente de su propiedad.

Artículo 18
Toda persona tiene derecho a la libertad de pensamiento, de conciencia y de religión (...).

Artículo 19
Todo individuo tiene derecho a la libertad de opinión y de expresión (...).

Artículo 20
1. Toda persona tiene derecho a la libertad de reunión y de asociación pacíficas.
2. Nadie podrá ser obligado a pertenecer a una asociación.

Artículo 21
1. Toda persona tiene derecho a participar en el gobierno de su país, directamente o por medio de representantes libremente escogidos.
2. Toda persona tiene el derecho de acceso, en condiciones de igualdad, a las funciones públicas de su país.
3. La voluntad del pueblo es la base de la autoridad del poder público; esta voluntad se expresará mediante elecciones auténticas que habrán de celebrarse periódicamente, por sufragio universal e igual y por voto secreto u otro procedimiento equivalente que garantice la libertad del voto.

Artículo 22
Toda persona (...) tiene derecho a la seguridad social, y a obtener, (...) habida cuenta de la organización y los recursos de cada Estado, la satisfacción de los derechos económicos, sociales y culturales, indispensables a su dignidad y al libre desarrollo de su personalidad.

Artículo 23
1. Toda persona tiene derecho al trabajo, a la libre elección de su trabajo, a condiciones equitativas y satisfactorias de trabajo y a la protección contra el desempleo.
2. Toda persona tiene derecho, sin discriminación alguna, a igual salario por trabajo igual.
3. Toda persona que trabaja tiene derecho a una remuneración equitativa y satisfactoria, que le asegure, así como a su familia, una existencia conforme a la dignidad humana y que será completada, en caso necesario, por cualesquiera otros medios de protección social.
4. Toda persona tiene derecho a fundar sindicatos y a sindicarse para la defensa de sus intereses.

Artículo 24
Toda persona tiene derecho al descanso, al disfrute del tiempo libre, a una limitación razonable de la duración del trabajo y a vacaciones periódicas pagadas.

Artículo 25
1. Toda persona tiene derecho a un nivel de vida adecuado que le asegure, así como a su familia, la salud y el bienestar, y en especial la alimentación, el vestido, la vivienda, la asistencia médica y los servicios sociales necesarios; tiene asimismo derecho a los seguros en caso de desempleo, enfermedad, invalidez, viudez, vejez y otros casos de pérdida de sus medios de subsistencia por circunstancias independientes de su voluntad.
2. La maternidad y la infancia tienen derecho a cuidados y asistencia especiales. Todos los niños, nacidos de matrimonio o fuera de matrimonio, tienen derecho a igual protección social.

Artículo 26
1. Toda persona tiene derecho a la educación. La educación debe ser gratuita, al menos en lo concerniente a la instrucción elemental y fundamental. La instrucción elemental será obligatoria. La instrucción técnica y profesional habrá de ser generalizada; el acceso a los estudios superiores será igual para todos, en función de los méritos respectivos.
2. La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana y el fortalecimiento del respeto a los derechos humanos y a las libertades fundamentales; favorecerá la comprensión, la tolerancia y la amistad entre todas las naciones y todos los grupos étnicos o religiosos; y promoverá el desarrollo de las actividades de las Naciones Unidas para el mantenimiento de la paz.
3. Los padres tendrán derecho preferente a escoger el tipo de educación que habrá de darse a sus hijos.

Artículo 27
1. Toda persona tiene derecho a tomar parte libremente en la vida cultural de la comunidad, a gozar de las artes y a participar en el progreso científico y en los beneficios que de él resulten.
2. Toda persona tiene derecho a la protección de los intereses morales y materiales que le correspondan por razón de las producciones científicas, literarias o artísticas de que sea autora.

Artículo 28
Toda persona tiene derecho a que se establezca un orden social e internacional en el que los derechos y libertades proclamados en esta Declaración se hagan plenamente efectivos.

Artículo 29
1. Toda persona tiene deberes respecto a la comunidad(...).
2. En el ejercicio de sus derechos y en el disfrute de sus libertades, toda persona estará solamente sujeta a las limitaciones establecidas por la ley con el único fin de asegurar el reconocimiento y el respeto de los derechos y libertades de los demás, y de satisfacer las justas exigencias de la moral, del orden público y del bienestar general en una sociedad democrática.
3. Estos derechos y libertades no podrán en ningún caso ser ejercidos en oposición a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 30
Nada en la presente Declaración podrá interpretarse en el sentido de que confiere derecho alguno al Estado, a un grupo o a una persona, para emprender y desarrollar actividades (...) tendientes a la supresión de cualquiera de los derechos y libertades proclamados en esta Declaración.

DISTRIBUIDO GRATUITAMENTE POR EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN - PROHIBIDA SU VENTA

SECUNDARIA

RESOLVAMOS PROBLEMAS - Cuaderno de trabajo de Matemática

5

Resolvamos problemas

Cuaderno de trabajo de Matemática

Secundaria 5

REPÚBLICA DEL PERÚ

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

EL ACUERDO NACIONAL

El 22 de julio de 2002, los representantes de las organizaciones políticas, religiosas, del Gobierno y de la sociedad civil firmaron el compromiso de trabajar, todos, para conseguir el bienestar y desarrollo del país. Este compromiso es el Acuerdo Nacional.

El acuerdo persigue cuatro objetivos fundamentales. Para alcanzarlos, todos los peruanos de buena voluntad tenemos, desde el lugar que ocupemos o el rol que desempeñemos, el deber y la responsabilidad de decidir, ejecutar, vigilar o defender los compromisos asumidos. Estos son tan importantes que serán respetados como políticas permanentes para el futuro.

Por esta razón, como niños, niñas, adolescentes o adultos, ya sea como estudiantes o trabajadores, debemos promover y fortalecer acciones que garanticen el cumplimiento de esos cuatro objetivos que son los siguientes:

1. **Democracia y Estado de Derecho**

La justicia, la paz y el desarrollo que necesitamos los peruanos sólo se pueden dar si conseguimos una verdadera democracia. El compromiso del Acuerdo Nacional es garantizar una sociedad en la que los derechos son respetados y los ciudadanos viven seguros y expresan con libertad sus opiniones a partir del diálogo abierto y enriquecedor; decidiendo lo mejor para el país.

2. **Equidad y Justicia Social**

Para poder construir nuestra democracia, es necesario que cada una de las personas que conformamos esta sociedad, nos sintamos parte de ella. Con este fin, el Acuerdo promoverá el acceso a las oportunidades económicas, sociales, culturales y políticas. Todos los peruanos tenemos derecho a un empleo digno, a una educación de calidad, a una salud integral, a un lugar para vivir. Así, alcanzaremos el desarrollo pleno.

3. **Competitividad del País**

Para afianzar la economía, el Acuerdo se compromete a fomentar el espíritu de competitividad en las empresas, es decir, mejorar la calidad de los productos y servicios, asegurar el acceso a la formalización de las pequeñas empresas y sumar esfuerzos para fomentar la colocación de nuestros productos en los mercados internacionales.

4. **Estado Eficiente, Transparente y Descentralizado**

Es de vital importancia que el Estado cumpla con sus obligaciones de manera eficiente y transparente para ponerse al servicio de todos los peruanos. El Acuerdo se compromete a modernizar la administración pública, desarrollar instrumentos que eliminen la corrupción o el uso indebido del poder. Asimismo, descentralizar el poder y la economía para asegurar que el Estado sirva a todos los peruanos sin excepción.

Mediante el Acuerdo Nacional nos comprometemos a desarrollar maneras de controlar el cumplimiento de estas políticas de Estado, a brindar apoyo y difundir constantemente sus acciones a la sociedad en general.

Resolvamos problemas

Cuaderno de trabajo de Matemática

Secundaria 5

REPÚBLICA DEL PERÚ

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Resolvamos problemas 5
Cuaderno de trabajo de Matemática

Editado por:
Ministerio de Educación
Calle Del Comercio N.° 193, San Borja
Lima 41, Perú
Teléfono: 615-5800
www.minedu.gob.pe

Propuesta de contenidos:
Alfredo Jesús Alcantara Hernández
Olber Muñoz Solís
Pedro Antonio Martínez Moreno

Revisión pedagógica:
Olber Muñoz Solís

Diseño y diagramación:
Carlos Héctor Boza Loayza

Corrección de estilo:
Mario Jhonny Ávila Rubio

Primera edición: setiembre de 2017
Tiraje: 172 097 ejemplares

Impreso por:
Consorcio Corporación Gráfica Navarrete S.A., Amauta Impresiones Comerciales S.A.C., Metrocolor S.A. Se terminó de imprimir en setiembre de 2017, en los talleres gráficos de Amauta Impresiones Comerciales S.A.C., sito en Juan del Mar y Bernedo 1298 - Lima

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.° 2017-11151
Impreso en el Perú / *Printed in Peru*

Querido(a) estudiante:

Es de sumo agrado para nosotros poner en tus manos el cuaderno de trabajo *Resolvamos problemas 5*, que estamos seguros te ayudará a descubrir la presencia de la matemática en la vida cotidiana y a utilizarla de manera adecuada y creativa en la resolución de problemas vinculados a la realidad.

Este cuaderno ha sido elaborado para ti. En él encontrarás diversas estrategias heurísticas, como diagramas tabulares, diagramas de árbol, diagramas lineales, particularizar, plantear ecuaciones, utilizar ensayo y error, entre otras, que te serán útiles en el proceso de resolución de problemas.

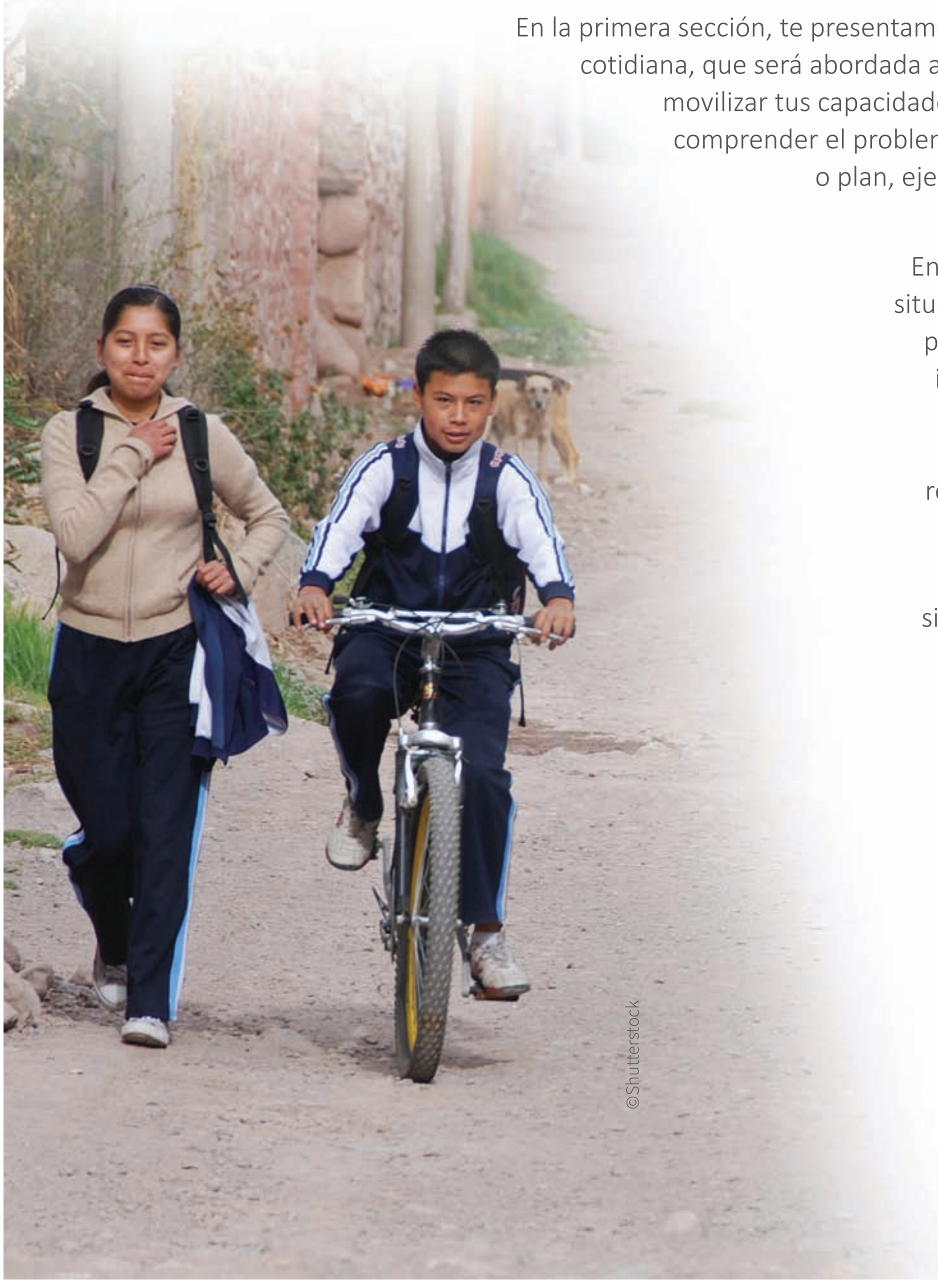
En su estructura, el cuaderno te propone una diversidad de fichas de trabajo, cada una de las cuales se encuentra organizada en tres secciones: Aprendemos, Analizamos y Practicamos.

En la primera sección, te presentamos una situación relacionada con la vida cotidiana, que será abordada a través de interrogantes que pretenden movilizar tus capacidades y conocimientos, lo cual te ayudará a comprender el problema, diseñar o seleccionar una estrategia o plan, ejecutar la estrategia y reflexionar sobre lo desarrollado.

En la segunda sección, te planteamos tres situaciones de contexto, en cuyo desarrollo podrás explicar el proceso de resolución, identificando estrategias y describiendo procedimientos utilizados. Este análisis te permitirá plantear otros caminos de resolución, así como identificar errores y realizar tu propia corrección.

En la tercera sección, te presentamos situaciones de contexto de diverso grado de complejidad en contextos variados y apoyados en gráficos. Al desarrollar las actividades que contienen, tú mismo te darás cuenta de tus progresos.

Esperamos que con esta experiencia sientas que hacer matemática es un reto posible de alcanzar. Disfrútalo.



Contenido

Z_MATe5V_PArt0_01-12.indd 4 28/09/17 17:17

Conociendo algunas estrategias

Un buen resolutor de problemas debe llegar a desarrollar la capacidad de resolver un problema con diversos métodos; además, necesita estar en capacidad de combinar estrategias creativamente. En cada etapa de desarrollo de la solución, debemos definir qué estrategia se utilizará en la siguiente fase.

1. Estrategias de comprensión

Lectura analítica

Leer analíticamente un texto es dividirlo en unidades que proporcionen algún tipo de información y establecer, luego, cómo estas partes se interrelacionan y muestran el panorama de lo que se quiere decir. Al leer un problema de manera analítica, uno puede hacerse estas preguntas: ¿quiénes participan en la historia?, ¿qué es lo que no varía a lo largo de la historia?, ¿cuántos estados se perciben en el texto?, ¿cuáles son los datos que nos proporciona?, ¿qué datos son relevantes para resolver el problema?, ¿qué debemos encontrar?, ¿qué condiciones se imponen a lo que buscamos?, entre otras interrogantes que ayudarán a que el estudiante se familiarice y le pierda temor a la situación.

La lectura analítica ayuda mucho en la comprensión lectora del texto que da origen a un problema, pero no garantiza el camino a su solución. Leer analíticamente no es identificar las palabras claves ni buscar *tips* para encontrar la variable (estos son procesos mecánicos que no ayudan a comprender cabalmente un problema). En la vida real, los problemas matemáticos pueden no contener esas palabras claves que aparecen en problemas diseñados para libros de texto, por lo que el estudiante enfocará erradamente un problema si hace uso de este mecanismo.

La lectura analítica es importante en la comprensión de problemas, pues estos textos contienen elementos matemáticos como números, diagramas, relaciones dentro de una historia o un contexto real complejo, por lo que no es lo mismo que leer un cuento o un ensayo. De hecho, hay personas que comprenden perfectamente textos humanísticos, pero no aquellos que contienen elementos matemáticos.

Parafrasear

Parafrasear es decir algo de otro modo para clarificar y comprender un texto. Explicar un problema con nuestras propias palabras ayuda mucho en el proceso de comprensión. Se debe decir que parafrasear no implica aprenderse de memoria un texto y repetirlo; es señalar lo más importante de una historia y expresarlo con palabras, evitando en lo posible particularidades como números, fechas, nombres, locaciones, etc.

Veamos un ejemplo para aclarar este enfoque:

Problema	Parafraseo
Jaime fue el organizador de la fiesta de fin de año de su colegio. Él proyectó ganar S/4800, para lo cual repartió 200 tarjetas; pero, lamentablemente, solo se vendieron 130, lo que le causó una pérdida de S/150. ¿Cuánto invirtió en la fiesta?	Una persona organiza una fiesta. Para ganar necesita vender una cantidad de tarjetas; pero vende menos y pierde. Nos piden saber cuánto invirtió en la fiesta.

Se sugiere que el docente tome todos los problemas del cuaderno y realice una lectura analítica de ellos, que produzca sus propios esquemas de comprensión y realice al menos dos parafraseos por cada problema presentado. Esos ejercicios le ayudarán a mejorar su desempeño en la conducción de las tareas en el aula.

Hacer esquemas

La capacidad de representar una situación compleja mediante esquemas es algo que se va aprendiendo desde los primeros años de escolaridad y continúa en proceso de construcción toda la vida. Hacer e interpretar esquemas son algunas de las capacidades más necesarias en nuestra vida laboral adulta. En diversas situaciones cotidianas se requiere de la esquematización de los sistemas, las situaciones, los procesos, con el fin de comprenderlos mejor. Un esquema apunta a encontrar una estrategia de solución; no existe una relación directa entre hacer un esquema y dar solución a un problema, pero ayuda mucho en este proceso.

2. Estrategias de resolución

Una estrategia importante en la búsqueda de soluciones es representar el problema mediante algún organizador visual. Aquí presentamos algunos organizadores de información que se utilizan frecuentemente en el proceso de resolver problemas matemáticos.

Diagramas de tiras

Se utilizan mayormente cuando la cantidad que interviene en el problema varía en el tiempo o es dividida en partes que se relacionan entre sí.

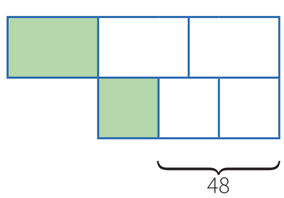
Ejemplo:

La tercera parte de las entradas para el estreno de una película se vendieron días antes de la función, y 1/3 del resto se vendió el día del estreno. Finalmente, quedaron 48 entradas sin vender. ¿Cuál era el número total de entradas previsto para la función de estreno?

Solución:

Cantidad: Número total de entradas.

Elabora un diagrama de tiras.



Diagramas tabulares (tablas)

Se emplean cuando se brinda información sobre características que relacionan dos grupos. También en problemas sobre edades o de proporcionalidad, en los que se debe buscar algún patrón o regla de formación.

Ejemplo:

Dos amigos tienen lápices, borradores y tajadores en sus cartucheras. Hay 8 borradores en total. Mónica tiene el doble de lápices que Felipe, quien tiene 5 tajadores más que lápices. Mónica tiene tantos tajadores como lápices posee Felipe. Mónica tiene 18 útiles y ningún borrador. ¿Cuántos lápices, tajadores y borradores tiene cada uno?

Solución:

Grupo 1: Mónica, Felipe.
Grupo 2: Lápices, borradores, tajadores.

	Lápices	Borradores	Tajadores	TOTAL
Mónica	$2x$	0	x	18
Felipe	x	8	$x+5$	
TOTAL		8		

Diagramas analógicos

Se suelen utilizar en problemas geométricos. Son dibujos que representan la realidad de manera similar, pero esquemática, sin considerar los elementos irrelevantes para el problema.

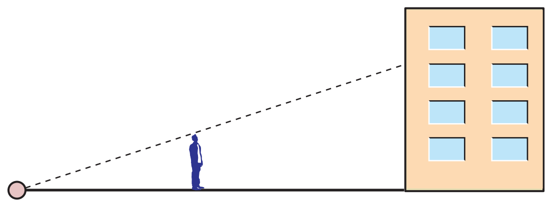
Mediante esta representación es posible visualizar las relaciones entre los datos y las incógnitas.

Ejemplo:

Un hombre de 1,8 m de estatura camina hacia un edificio a razón de 1,5 m/s. Si hay una lámpara sobre el suelo a 15 m del edificio, ¿cuánto mide la sombra del hombre sobre el edificio cuando se encuentra a 9 m de este?

Solución:

Hagamos un diagrama que represente la situación narrada.



Diagramas de flujo

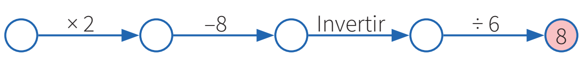
Se emplean cuando una cantidad varía a lo largo de la historia o si tenemos la situación final de esta cantidad. También cuando se dan secuencias de pasos para encontrar objetos matemáticos, entre otras aplicaciones.

Ejemplo:

Un número se duplica, luego se le resta 8 y después se invierten las cifras de este número. Finalmente, se divide por 6 y se obtiene 8. ¿Cuál era el número?

Solución:

Haremos un diagrama que indique las fases por las que pasó el número.



Diagramas conjuntistas

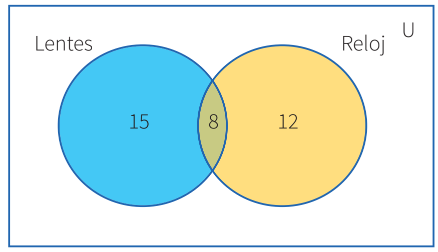
Se suele recurrir a estos cuando se trata de información acerca de dos o más grupos cuyos elementos pueden pertenecer a más de un conjunto. También cuando se deben realizar clasificaciones. Los más conocidos son los diagramas de Venn y los de Carroll.

Ejemplo:

De los 35 estudiantes de un aula, 23 usan lentes, y 20, reloj. ¿Cuántos usan ambas cosas?

Solución:

Grupo 1: Estudiantes que usan lentes.
Grupo 2: Estudiantes que usan reloj.



Diagramas cartesianos

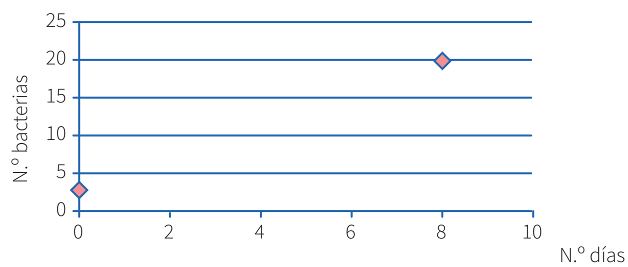
Son de gran utilidad cuando se requiere representar funciones o si tenemos pares ordenados o relaciones entre dos variables.

Ejemplo:

El crecimiento de un grupo de bacterias se da con el paso de los días de manera constante. Al inicio, había 3 bacterias, y después de 8 días llegan a 20. ¿Cuántos días transcurrirán desde el inicio para que la colonia tenga 400 bacterias?

Solución:

Cantidad:
Organizaremos los datos en un gráfico cartesiano.
Pares ordenados: (0; 3) (8; 20)



Diagramas lineales

Se usan cuando se cuenta con información acerca de una característica de un solo grupo. Generalmente se emplean para ordenar los elementos del grupo con respecto a esa característica.

Ejemplo:

Si tanto Roberto como Alfredo están más alegres que Tomás, mientras que Alberto se encuentra menos alegre que Roberto, pero más alegre que Alfredo, ¿quién está menos alegre?

Solución:

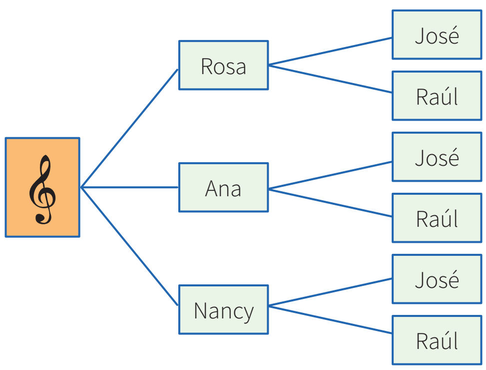
Alfredo, Alberto, Roberto, Tomás.

Roberto Alberto Alfredo Tomás + →

Diagramas de árbol

Se suelen utilizar en conteos de casos posibles o para hacer listas sistemáticas. Es la representación gráfica de los principios de adición y multiplicación.

Ejemplo: Un productor de cumbia quiere armar un dúo mixto (varón y mujer). Puede elegir entre 3 cantantes mujeres y 2 cantantes varones. ¿Cuántos dúos mixtos diferentes puede formar?



3. Otras estrategias

Busca patrones

En algunos problemas es necesario experimentar con varios casos con el fin de encontrar pautas o regularidades que después se podrán emplear para llegar a la solución.

Ejemplo:

El arreglo mostrado se conoce como el triángulo de Pascal.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 5 4 1
1 5 10 10 5 1

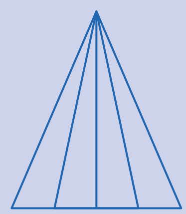
Escribe las tres filas siguientes de este arreglo. Como observas, cada fila empieza por uno. ¿Qué número sigue al 1 en la fila 75?, ¿cuál es la suma de los números que ocupan la fila número veinte?, ¿puedes encontrar un patrón en las diagonales del triángulo de Pascal?

Haz una lista sistemática

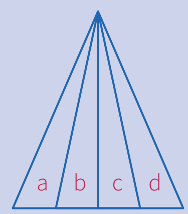
En los casos en que se requiere la enumeración de objetos matemáticos, es conveniente realizar un conteo o listado organizado, con el fin de no dejar de lado ninguna posibilidad. Esta estrategia es muy útil al buscar soluciones en una ecuación polinómica, para encontrar espacios muestrales o resolver problemas de permutaciones o combinaciones.

Ejemplo:

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Pongamos una etiqueta a cada uno de los cuatro triángulos en que se ha dividido el triángulo mayor.



Solución:

- Contemos ahora los triángulos identificándolos por el número de letras:

  Triángulos con una letra: a-b-c-d

  Triángulos con dos letras: ab-bc-cd

  Triángulos con tres letras: abc-bcd

  Triángulos con cuatro letras: abcd

- En total tenemos: 4 + 3 + 2 + 1 = 10 triángulos.

Generaliza

En algunos problemas puede ser muy útil simbolizar las expresiones o averiguar si lo que piden se refiere a un caso particular de alguna propiedad general; a esto se conoce como *la paradoja del inventor*. A veces, es conveniente investigar más de lo que piden.

Ejemplo:

Halla el valor de $(234\ 756\ 474)^2 - (234\ 756\ 473)^2$.

Solución:

Se observa que elevar al cuadrado cada número y luego realizar la resta sería demasiado laborioso, así que se trata de ver en la estructura del problema alguna particularidad. Lo primero que se observa es que consiste en una diferencia de cuadrados, lo que nos hace recordar las fórmulas algebraicas pertinentes. Además, se aprecia que los números son consecutivos.

- Al generalizar el problema, se observa que se solicita:

  $(n + 1)^2 - n^2$, cuando n vale 234 756 474

- Factorizando por diferencia de cuadrados, se tiene:

  $(n + 1 + n)\ (n + 1 - n) = (n + 1) + n$

- Luego, podemos afirmar que, para cualquier n entero positivo, se cumple:

  $(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1) + n = 2n + 1$

- Ahora el problema se ha simplificado bastante; para hallar la respuesta, solo basta duplicar el número dado y aumentarle 1.

  Entonces:

  $(234\ 756\ 474)^2 - (234\ 756\ 473)^2 = 469\ 512\ 949$

Particulariza

Conviene siempre utilizar casos particulares para familiarizarse con el problema; de este modo, es posible observar algún método que guíe hacia la solución de un problema genérico.

Ejemplo:

En una tienda de remates te ofrecen un descuento del 12 %, pero, al mismo tiempo, debes pagar el impuesto general a las ventas (18 %). ¿Qué preferirías que calculasen primero, el descuento o el impuesto?

Solución:

- Particularicemos para algunos casos: Si el artículo vale S/100 y elijo primero el descuento, termino pagando S/106. Pero si elijo pagar el impuesto antes, entonces termino pagando la misma cantidad.
- Podemos probar con otros precios y obtener un resultado análogo. Esta experimentación me da pie para inferir que es lo mismo elegir primero el descuento o el impuesto.
- Ahora deberé evaluar mi conjetura.

Razona lógicamente

El razonamiento lógico es muy importante al resolver problemas, pues gracias a él podemos engarzar los pasos y comprender las secuencias y cadenas de razonamientos que se producen en el desarrollo de su solución. Un ejemplo clásico es el siguiente acertijo.

Ejemplo:

José, Jaime, Tito y Rosa son guardias en un museo. Ellos hacen guardia cuatro días a la semana. Dos personas solamente hacen guardia cada día. Nadie hace tres días de guardia seguidos. ¿Cuál de los tres hombres no hace guardia con Rosa?

Solución:

- Veamos una lista parcial que muestra los días de la semana en los que cada uno hace guardia:

Dom.	Lun.	Mar.	Miér.	Juev.	Vier.	Sáb.
José	Tito	Rosa	José	Jaime	Tito	Rosa
Jaime						

Empieza por el final

La estrategia de utilizar el pensamiento regresivo se utiliza mayormente en problemas en los cuales tenemos información de una situación final; también para demostrar desigualdades. La combinación de métodos progresivos y regresivos es una potente técnica para demostrar teoremas.

La utilización del razonamiento regresivo nos evitará tener que trabajar con ecuaciones complicadas.

Ejemplo:

El nivel del agua de un pozo desciende 2 centímetros por debajo de su mitad en cada hora, hasta quedar vacío luego de 4 horas. ¿Qué profundidad tenía el agua inicialmente?

Solución:

- "3 cm debajo de su mitad" se interpreta como ÷ 2, −3.
- Esto ocurre en cada hora y se repite 4 veces, ya que todo el suceso ocurre en 4 horas; de modo que al final el nivel es cero (0).
- Las operaciones directas serían así:

  $x \rightarrow (\div 2, -3, \div 2, -3, \div 2, -3, \div 2, -3) \rightarrow 0$
- Ahora, operando al revés, obtenemos: $x = 90$

Plantea una ecuación

Una de las técnicas de modelación por excelencia a nivel elemental es el planteo de ecuaciones. Lo primordial para poderla aplicar con éxito es el entrenamiento que se tenga en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico. Es conveniente ponerse de acuerdo en cuanto a convenciones generales de redacción para no crear ambigüedades.

Ejemplo:

Dos velas de la misma longitud se encienden al mismo tiempo. La primera se consume en 4 horas, y la segunda, en 3. ¿Cuánto tiempo pasa, después de haberse encendido, hasta que la primera vela tenga el doble de longitud que la segunda?

Solución:

- La primera vela se consume en su cuarta parte cada hora.
- La segunda se consume en su tercera parte cada hora.

  Tiene que verificarse; por tanto:

  $L - (1/4)Lx = 2\,[L - (1/3)Lx]$; simplificando:

  $1 - (1/4)\,x = 2 - (2/3)x$; de donde $x = 2{,}4$ horas
- Es decir, pasan 2 horas 24 minutos.

Establece submetas

Muchas veces, para llegar a la solución de un problema, se deben resolver problemas más pequeños. Es como escalar una gran montaña: se sabe que se debe llegar a alturas menores para conquistar la cima. De igual manera, para resolver un problema original, se necesita de un problema auxiliar que sirva de medio.

Ejemplo:

Supongamos que la población actual del Perú es de 22 millones de habitantes y se sabe que la tasa de crecimiento es de un 5 % anual. ¿En cuánto tiempo se duplicará la población?

Solución:

- La primera meta es hallar una fórmula que modele el comportamiento de la población, y solo después de formada se igualará a 44 millones. Si bien, aquí la incógnita es el tiempo, se busca en su lugar la relación entre el tiempo y el número de habitantes.

Utiliza el ensayo y error

Tantear es una estrategia muy útil cuando se hace de forma organizada y evaluando cada vez los ensayos que se realizan. En realidad, algunos métodos específicos de solución, como el de regulación o el de aproximaciones sucesivas, se basan en el uso sistemático de numerosos ensayos y sus respectivas correcciones. La idea es que cada rectificación conduzca a un ensayo que se acerque más a la respuesta.

Ejemplo:

Un libro se abre al azar. El producto de las dos páginas observadas en ese momento es 3192. ¿Cuál es el número de las páginas en las que se abrió el libro?

©Shutterstock

Solución:

- Primero se observa que 50 × 50 = 2500, número que no llega; y que 60 × 60 = 3600, el cual se pasa. Con esto observamos que los números están en el rango entre 50 y 60.
- 55 × 56 no puede ser, pues el producto termina en 0. Se quiere que termine en 2 y que los números sean consecutivos.
- Al probar 53 × 54 = 2862, el resultado no corresponde.
- Pero, al hacer la prueba con 56 × 57 = 3192, se observa que cumple con el resultado que plantea el problema.
- Entonces, las páginas que se observaron fueron la 56 y la 57.

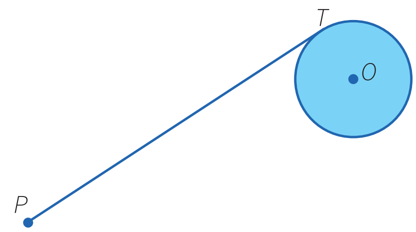
Supón el problema resuelto

Ejemplo:

Usando solo regla y compás construye una tangente a una circunferencia dada, desde un punto exterior a ella.

Solución:

Para resolver este problema, se supone que se debe hallar la tangente a una circunferencia, trazada desde un punto exterior a ella.



- El punto *T* es de tangencia. Entonces, ¿qué relación existe entre la tangente y algún elemento de la circunferencia? ¿Hay algún teorema que los relacione?
- Existe un teorema que nos dice que el radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia.
- Por tanto, si unimos *O* con *T*, tendremos que *OT* es perpendicular a *PT*.
- Además, como tenemos tres puntos involucrados, *P*, *T* y *O*, es posible hacer un triángulo uniendo el punto *P* con el punto *O*. Se observa que el triángulo es rectángulo.

Ficha 1

Usamos cantidades grandes y pequeñas

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de cantidad	Traduce cantidades a expresiones numéricas.	Establece relaciones entre datos y las transforma a expresiones numéricas (modelos) que incluyen operaciones con notación exponencial y científica.
	Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones.	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico una cantidad muy grande o muy pequeña en notación científica. Asimismo, compara cantidades expresadas en notación científica.
	Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.	Selecciona, combina y adapta estrategias de cálculo, estimación, recursos y procedimientos diversos para realizar operaciones con cantidades en notación científica y para simplificar procesos usando las propiedades de los números y las operaciones.

Aprendemos

Según el informe realizado en el 2015 por el Programa Conjunto de las Naciones Unidas sobre el VIH/SIDA (Onusida), existen alrededor de 36 900 000 personas en el mundo que viven con el VIH. El continente más afectado es el africano, con 25 800 000 personas infectadas. En Latinoamérica se encuentran 1 700 000, y en el Perú 65 000 personas viven con el VIH.

A pesar de que los últimos informes señalan que el contagio del VIH/SIDA ha bajado considerablemente, los números de infectados aún se mantienen altos. Por ello, se deben tomar todas las precauciones que nos sugieren las instituciones de salud.

Desde el 2011, los países de bajos y medianos recursos económicos reciben apoyo con los medicamentos. En el Perú, el Ministerio de Salud (Minsa) invierte millones de soles para la atención a las personas afectadas por el VIH/SIDA que han sido diagnosticadas, pero hay muchas que viven con el virus sin saberlo.

1. ¿Cómo se pueden escribir de forma abreviada las cantidades citadas en este informe?
2. ¿Qué porcentaje del total de infectados, expresados en notación científica, pertenecen al continente africano y por qué es considerado el más afectado?
3. ¿Cuál es el porcentaje de infectados con el VIH en el Perú respecto del total de infectados en Latinoamérica? Expresa el resultado en notación científica.

Comprendemos el problema

1. ¿De qué datos dispones en el problema?

2. ¿Sabes a qué quieres llegar?

3. ¿Qué conocimiento te ayudará a resolver el problema?

4. ¿Esta situación es similar a algún otro problema que has resuelto anteriormente?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia te sirve para resolver el problema? ¿Por qué?

   a) Establecer submetas **b)** Diagrama conjuntista **c)** Diagrama tabular

Z_MATe5V_PArt1_13-129.indd 14 28/09/17 17:25

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Inicia el plan elegido. Indaga cómo escribir en forma exponencial y en notación científica. Propón ejemplos sencillos.

2. Expresa las cantidades del problema en notación científica.

3. Completa la tabla para responder a la pregunta 2 de la situación inicial.

	Número de infectados	Porcentaje
África		x
Mundo		100 %

4. Calcula el porcentaje desconocido. Expresa la respuesta en notación científica.

5. Procede de manera similar para resolver la pregunta 3 de la situación inicial.

		x
		100 %

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Podrías haber resuelto la situación sin necesidad de expresar las cantidades en notación científica? ¿Presenta ventaja o desventaja?

2. Describe y explica la estrategia que seleccionaste para resolver la situación.

Analizamos

Situación A

El Fondo Mundial financia para combatir el sida un tratamiento que cuesta 9600 dólares por enfermo al año si se realiza con medicamentos de marca; y si se lleva a cabo con tratamientos genéricos, vale 5200 dólares. Si se tratara a las 25 800 000 personas infectadas en el continente africano con medicamentos genéricos en vez de con medicinas de marca, ¿cuántos soles se ahorraría? Utiliza notación científica y considera que $1 ≡ S/3,4.

Resolución

Convertimos en notación científica:

- Población africana infectada:
  $25\,800\,000 = 2{,}58 \times 10^7$ personas.
- Gasto por enfermo con medicamentos de marca al año: $\$9600 = \$9{,}6 \times 10^3$
- Gasto por enfermo con medicamentos genéricos al año: $\$5200 = \$5{,}2 \times 10^3$

Calculamos el gasto total de la población africana infectada:

- Con medicamentos de marca:
  $9{,}6 \times 10^3 \times 2{,}58 \times 10^7 = \$2{,}4768 \times 10^{11}$
- Con medicamentos genéricos:
  $5{,}2 \times 10^3 \times 2{,}58 \times 10^7 = \$1{,}3416 \times 10^{11}$

El ahorro sería la diferencia entre los gastos totales:

$2{,}4768 \times 10^{11} - 1{,}3416 \times 10^{11} = \$1{,}1352 \times 10^{11}$

Convirtiendo a soles:

$1{,}1352 \times 10^{11} \times 3{,}4 = S/3{,}859\,68 \times 10^{11}$

Respuesta:

Se ahorraría $3{,}859\,68 \times 10^{11}$ soles.

1. ¿Qué estrategia ayuda a resolver la situación?

2. Describe el procedimiento realizado en la resolución del problema.

3. ¿Qué aspectos del procedimiento realizado son semejantes al utilizado en la situación inicial de Aprendemos?

Situación B

Al realizar una prueba de paso para determinar el grado de confiabilidad de un condón, muchos investigadores determinaron que este no es muy seguro para evitar los embarazos ni, mucho menos, el contagio de virus como el VIH. Para formular esta tesis, ¿cuál fue el tamaño de los poros del condón, aproximadamente en metros, que los investigadores observaron, si el tamaño del diámetro del virus VIH es de 100 nanómetros y 30 veces menor que dichos poros?

Resolución

- El diámetro del virus VIH lo convertimos a metros, sabiendo que

  1 nanómetro $\equiv 10^{-9}$ metros.

  Diámetro del virus: $100 \text{ nm} = 10^2 \text{ nm} \times \dfrac{1 \times 10^{-9} \text{ m}}{2} = 1 \times 10^{-7} \text{ m}$

- Calculamos el tamaño del poro del condón, teniendo en cuenta que el diámetro del virus es 30 veces menor.

  Tamaño del diámetro del poro de un condón:

$$1 \times 10^{-7} \times (3 \times 10^{1}) = 3 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Respuesta: Aproximadamente, un poro del condón medirá 3×10^{-6} m.

1. ¿Todos los pasos del procedimiento son correctos?

2. En el caso de que hubiera un error, ¿cuál sería su corrección? De ser correcta la respuesta, busca otra forma de resolver el problema.

Situación C

En febrero del 2004 se aprobó la norma técnica del Tratamiento Antirretroviral de Gran Actividad (TARGA) en adultos, la cual marcó el inicio de la aplicación del TARGA en los pacientes de VIH en el Perú. En abril de ese año, empezó la evaluación de los pacientes en los hospitales de Lima y Callao, con pruebas de CD4 y carga viral, con el soporte del Fondo Mundial. Actualmente, la inversión del Fondo en el componente de VIH en el país ha alcanzado aproximadamente los $11 000 000, el 53 % de los cuales se ha invertido en medicamentos e insumos para el tratamiento de VIH y el monitoreo de pacientes.

Con la información brindada, determina cuánto dinero en soles es aproximadamente el 53 %. Da la respuesta en notación científica, considerando que 1 dólar estadounidense equivale a 3,4 soles.

Resolución

(Encuentra el error)

- Primero convertimos los datos en notación científica:

  $11\ 000\ 000 = 1{,}1 \times 10^7$ dólares

- Luego calculamos el porcentaje del total que es destinado en medicamentos e insumos para el tratamiento del VIH y su monitoreo:

  $53\ \%$ de $(1{,}1 \times 10^7) = (0{,}53 \times 1{,}1) \cdot (0{,}53 \times 10^7) = (0{,}583) \cdot (5\ 300\ 000) = 3\ 089\ 900$ dólares

- Expresándolo en notación científica:

  $3{,}0899 \times 10^6$ dólares

- Convirtiendo a soles:

  $3{,}0899 \times 10^6 \times 3{,}4 = 1{,}050\ 566 \times 10^7$ soles

Respuesta: Se han invertido $1{,}050\ 566 \times 10^7$ soles.

1. Utiliza tu calculadora para comprobar el resultado sin hacer uso de la notación científica. ¿Es correcto tu resultado? Si tu respuesta es sí, propón una nueva resolución. Si es no, di cuál es el error y corrígelo.

Practicamos

La Organización de Aviación Civil Internacional (OACI) presentó las estadísticas mundiales sobre el número de pasajeros peruanos transportados durante 14 años. La siguiente tabla tiene los datos aproximados escritos en notación científica:

Año	2001	2002	2003	2004	2005
Número de pasajeros	$2,25 \times 10^6$	$2,09 \times 10^6$	$2,23 \times 10^6$	$3,23 \times 10^6$	$4,33 \times 10^6$

Año	2006	2007	2008	2009	2010
Número de pasajeros	$4,22 \times 10^6$	$5,27 \times 10^6$	$6,18 \times 10^6$	$5,84 \times 10^6$	$7,11 \times 10^6$

Año	2011	2012	2013	2014
Número de pasajeros	$8,61 \times 10^6$	1×10^7	$1,15 \times 10^7$	$1,23 \times 10^7$

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. ¿Cuántos pasajeros peruanos, aproximadamente, fueron transportados en estos 14 años?

a) $8,516 \times 10^7$

b) $8,516 \times 10^6$

c) $5,474 \times 10^7$

d) $5,474 \times 10^8$

2. ¿Qué porcentaje representan los pasajeros transportados en los últimos 3 años con respecto al total de los 14 años?

a) 40 %

b) 6,2 %

c) 33,8 %

d) 85 %

La siguiente lista detalla las emisiones anuales de CO_2 de Latinoamérica por países, de acuerdo con estadísticas de la Organización de las Naciones Unidas monitoreadas en las Metas de Desarrollo del Milenio:

México: 471 459 toneladas	Ecuador: 29 989 toneladas	El Salvador: 6700 toneladas
Brasil: 368 317 toneladas	Bolivia: 13 190 toneladas	Uruguay: 6219 toneladas
Argentina: 183 728 toneladas	Guatemala: 12 930 toneladas	Nicaragua: 4591 toneladas
Venezuela: 165 550 toneladas	Honduras: 8834 toneladas	Paraguay: 4133 toneladas
Chile: 71 705 toneladas	Costa Rica: 8119 toneladas	
Perú: 42 988 toneladas	Panamá: 7250 toneladas	

Con la información dada, responde las preguntas 3 y 4.

3. ¿Cuántas toneladas en total de CO_2 emiten los países latinoamericanos anualmente? Expresa la respuesta en notación científica.

a) 1 405 702 toneladas de CO_2

b) $0{,}140\,570\,2 \times 10^7$ toneladas de CO_2

c) $1{,}405\,702 + 10^6$ toneladas de CO_2

d) $1{,}405\,702 \times 10^6$ toneladas de CO_2

4. ¿Qué porcentaje del total de las toneladas de CO_2 que emiten todos los países latinoamericanos representa la cantidad emitida por los países del Pacífico, como el Perú, Ecuador y Chile?

5. Las distancias de la Tierra a la Luna y al Sol, en un momento en que están alineados, son 4×10^5 km y $1{,}5 \times 10^8$ km, respectivamente. ¿Cuántas veces es mayor la distancia de la Tierra al Sol que a la Luna, y cuál es la distancia aproximada de la Luna al Sol?

a) 1500 veces mayor; $1{,}496 \times 10^8$ km

b) 1500 veces mayor; $0{,}1496 \times 10^9$ km

c) 375 veces mayor; $1{,}496 \times 10^8$ km

d) 375 veces mayor; $0{,}1496 \times 10^9$ km

6. Si una persona tiene 5 litros de sangre y aproximadamente 4 500 000 glóbulos rojos en cada milímetro cúbico, calcula en notación científica su número aproximado de glóbulos rojos.

a) $2{,}25 \times 10^{13}$ glóbulos rojos

b) $22{,}5 \times 10^{12}$ glóbulos rojos

c) $22{,}5 \times 10^{6}$ glóbulos rojos

d) $2{,}25 \times 10^{7}$ glóbulos rojos

7. Se sabe que el crecimiento del cabello humano es muy rápido. Si su velocidad promedio es, aproximadamente, $1{,}6 \times 10^{-8}$ km/h, y si no te lo cortas por un mes (30 días), ¿cuántos centímetros habrá crecido? (Da una cantidad aproximada).

8. Por muchos factores, es difícil controlar las fábricas para que no contaminen el ambiente. Se ha detectado que los desperdicios echados a un río son una función cuadrática del tiempo. Si se echaron $1{,}15 \times 10^{1}$ toneladas en un periodo de 5 días, y $2{,}08 \times 10^{1}$ toneladas después de 8 días, determina un modelo algebraico en función del tiempo en notación científica.

a) $f(t) = 0{,}1 \cdot t^2 + 1{,}8 \cdot t$

b) $f(t) = 10 \cdot t^2 + 47{,}7 \cdot t$

c) $f(t) = 10 \cdot t^2 + 4{,}77 \cdot 10^{1} \cdot t$

d) $f(t) = 0{,}1 \cdot t^2 + 0{,}18 \cdot 10^{1} \cdot t$

9. El dióxido de carbono emitido en el mundo por uso de combustible queda atrapado en la atmósfera, lo cual causa el efecto invernadero, que se manifiesta en el calentamiento global de la Tierra. Si la cantidad promedio anual de gas que se emite en el mundo es de 5500 toneladas, ¿qué modelo algebraico en notación científica será pertinente en kilogramos para la situación presentada y cuántos kilogramos se emitirán en 30 años?

a) $f(t) = 5{,}5 \cdot 10^{6} \cdot x$; $16{,}5 \cdot 10^{7}$ kg

b) $f(t) = 5{,}5 \cdot 10^{6} \cdot x$; $1{,}65 \cdot 10^{8}$ kg

c) $f(t) = 5{,}5 \cdot 10^{3} \cdot x$; $16{,}5 \cdot 10^{4}$ kg

d) $f(t) = 5{,}5 \cdot 10^{3} \cdot x$; $1{,}65 \cdot 10^{5}$ kg

10. Las vacunas exponen a nuestro organismo a una cantidad muy pequeña y muy segura de bacterias o virus previamente debilitados o destruidos. Así, nuestro sistema inmunitario aprende a reconocer y atacar la infección si nos exponemos a ellos posteriormente en nuestras vidas. Como consecuencia, no resultaremos infectados o solo tendremos una infección leve. Esta es una forma natural de hacer frente a las enfermedades infecciosas. La dosis de una vacuna es de 0,05 cm^3. Si tiene cien millones de bacterias por centímetro cúbico, ¿cuántas bacterias habrá en una dosis? Exprésalo en notación científica.

Ficha 2 Las medidas de tendencia central para tomar decisiones

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre	Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.	Representa las características y el comportamiento de los datos de una muestra, mediante medidas de tendencia central, y para ello selecciona los más apropiados a las variables estudiadas.
	Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.	Adapta y combina procedimientos para determinar medidas de tendencia central y adecúa los procedimientos utilizados a otros contextos de estudio.
	Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.	Plantea y contrasta afirmaciones o conclusiones sobre las características o tendencias de una población a partir de sus observaciones o análisis de datos y reconoce errores en sus conclusiones o las de otros estudios y propone mejoras.

Aprendemos

Felipe, todos los días, de lunes a viernes, sale de casa y va caminando a su colegio, que se halla a 3 km de distancia. La profesora, quien se encuentra preocupada por la tardanza e inasistencia de algunos estudiantes, le pide que registre en una hoja la hora a la que sale de casa y la hora a la que llega a su colegio, y él lo hace así:

Hora	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Salida	5:20	5:10	6:20	5:30	5:25
Llegada	7:35	8:10	7:20	7:40	7:35

Luego la profesora le pide calcular el tiempo que demora y obtener el promedio.

Frente al pedido, Felipe cae en la cuenta de que el martes se encontró en el camino con Melquiades y se detuvieron a lanzar piedras al río, y que el miércoles Alicia lo trajo en su bicicleta.

1. ¿Cuál es el valor de la media?

2. ¿Qué otras medidas de tendencia central hay? ¿Cuáles serían sus valores?

3. ¿Cuál sería el valor más representativo?

4. ¿Qué medida permitiría tomar una decisión para mejorar la puntualidad?

Comprendemos el problema

1. Describe la situación inicial.

2. ¿Qué pretendes hallar?

3. La tabla mostrada en la situación inicial, ¿será suficiente para resolverla?

4. ¿Has resuelto o visto algún problema similar?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia te sirve para resolver el problema?

a) Lista sistemática **b)** Buscar patrones **c)** Diagrama tabular

Z_MATe5V_PArt1_13-129.indd 26 28/09/17 17:26

Ejecutamos la estrategia o plan

1. ¿Qué proceso realizarías primero?

2. Calcula el promedio o la media aritmética.

3. Interpreta el valor hallado.

4. ¿Se repite algún dato más que el resto? ¿Cómo se llamaría?

5. ¿Qué medida te falta calcular? ¿Qué debes hacer?

6. Calcula la medida faltante y da la interpretación al valor obtenido.

7. ¿Cuáles serían tus respuestas a las preguntas 3 y 4 de la situación inicial?

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Tu respuesta satisface lo que te pide el problema?

2. ¿Puedes emplear la misma estrategia en algún otro problema? Escribe un ejemplo.

Analizamos

Situación A

En el aula de quinto grado, el profesor de Educación Física pide a los estudiantes que, utilizando una balanza, midan su masa corporal. Los datos obtenidos se organizan en la tabla que se muestra a la derecha.

Calcula la mediana y da tu interpretación.

Masa (kg)	Marca (x_i)	Número de estudiantes (f_i)	Frecuencia acumulada (F_i)
[50 ; 55[	52,5	3	3
[55 ; 60[	57,5	8	11
[60 ; 65[	62,5	12	23
[65 ; 70[	67,5	7	30
[70 ; 75[	72,5	3	33
[75 ; 80]	77,5	2	35
Total		35	

Resolución

- Reconocemos datos: $n = 35$
- Ubicamos la posición de la mediana: $\frac{n}{2} = 17{,}5$
- Redondeamos a 18 el valor encontrado.
- Identificamos la clase que contiene la mediana: sería [60 – 65[.
- Se deduce que la clase anterior tiene una frecuencia acumulada igual a 11 y que la amplitud o tamaño de clase es 65 – 60 = 5.
- Aplicamos la fórmula para datos agrupados:

$$Me = 60 + \left(\frac{\frac{35}{2} - 11}{12} \right) \cdot 5 = 62{,}71$$

Respuesta:

La mediana de las masas corporales es 62,71 kg.

Significa que el 50 % de los estudiantes tiene una masa corporal comprendida entre 62,71 kg y 80 kg.

También se puede decir que el 50 % de los estudiantes tiene una masa menor que 62,71 kg, pero mayor o igual a 50 kg.

1. ¿Qué debemos hacer primero para hallar la mediana?

2. ¿Cómo nos damos cuenta de cuál es la clase mediana?

3. ¿Qué aspecto del procedimiento realizado se podría usar en algún otro problema?

Situación B

Las estaturas (en metros) de los once jugadores de una selección de fútbol son: 1,73; 1,89; 1,70; 1,84; 1,85; 1,79; 1,90; 1,87; 1,88; 1,79; 1,83.

¿Cuál es mayor, la media o su mediana?

Resolución

- Calculamos la media:

$$\bar{x} = \frac{1{,}73 + 1{,}89 + 1{,}70 + 1{,}84 + 1{,}85 + 1{,}79 + 1{,}90 + 1{,}87 + 1{,}88 + 1{,}79 + 1{,}83}{11}$$

$$\bar{x} = 1{,}82 \text{ m}$$

- Calculamos la mediana:

  Ubicamos su posición: $\frac{n}{2} = 5{,}5$. Está en el sexto lugar.
- Ordenamos los valores para determinar el valor de la mediana: 1,70; 1,73; 1,79; 1,79; 1,83; 1,84; 1,85; 1,87; 1,88; 1,89; 1,90.
- La mediana sería 1,84, que está en el sexto lugar.
- Comparando se obtiene que 1,84 > 1,82

Respuesta: De la comparación se deduce que la mediana es mayor que la media.

1. ¿Por qué para calcular la media no se ordenan los datos como para la mediana?

2. En otros casos, ¿la mediana será siempre mayor que la media?

Situación C

En un restaurante, debido al reclamo de los comensales por la demora en la atención, se decide tomar nota del tiempo que se emplea en atender un pedido. En la tabla de la derecha, se muestran los datos organizados.

¿Cuál de las medidas de centralización es la más adecuada para representar el tiempo que demora en atenderse un pedido en dicho restaurante?

Tiempo (min)	Marca de clase (x_i)	Cantidad de pedidos (f_i)	Frecuencia acumulada (F_i)
[1 ; 5[	3	6	6
[5 ; 10[	7,5	12	18
[10 ; 15[	12,5	15	33
[15 ; 20[	17,5	26	59
[20 ; 25[	22,5	8	67
[25 ; 30]	27,5	3	70
Total		70	

Resolución

(Encuentra el error)

Calculamos las medidas de centralización.

- Media

Puesto que conocemos los tiempos medios (marcas) de cada clase, que son seis, entonces:

$$\bar{x} = \frac{3 + 7{,}5 + 12{,}5 + 17{,}5 + 22{,}5 + 27{,}5}{6} = 15{,}08$$

- Mediana

Ubicamos la posición de la mediana: $\frac{n}{2} = 35$. Ya que este valor está en la frecuencia acumulada 59, deducimos que la clase mediana es [15 – 20[y el punto medio o mediana sería $\frac{15 + 20}{2} = 17{,}5$

- Moda

Aplicamos directamente su fórmula: $Mo = L_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot A_i$

$$Mo = 15 + \frac{26 - 15}{(26 - 15) + (26 - 8)} \cdot (20 - 15) = 16{,}95 \approx 17$$

Respuesta:

La medida más adecuada es la media, porque tiene el menor valor.

1. ¿Todos los pasos del procedimiento y la respuesta son correctos?

2. En el caso de que hubiera error, ¿cuál sería su corrección? De estar todo bien, busca otra forma de resolver el problema.

Practicamos

Campaña de recolección de botellas

La sección del cuarto "A" de la I. E. "Saber" participó en una campaña de recolección de botellas de plástico con los siguientes resultados:

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cantidad de botellas (en kg)	8,1	5,2	6,7	1,5	7,3	6,2	6,7	7,3	8	6,8	6,8	3,2

Con la información dada, responde las preguntas 1; 2; 3 y 4.

1. La media de la cantidad de botellas recolectada por el cuarto "A" es 6,15 kg. Esto quiere decir que:

a) La mayoría de los estudiantes de esta sección recolectó 6,15 kg de botellas.

b) Es como si todos los estudiantes de esta sección hubiesen recolectado 6,15 kg de botellas.

c) Es la cantidad de botellas que recolectó el estudiante ubicado en la posición central, luego de ordenarlas por cantidad de botellas recolectadas.

d) Es lo que le falta recolectar al estudiante de la sección que recolectó la menor cantidad de botellas.

2. La mediana de las botellas recaudadas por el cuarto "A" es 6,75 kg. Esto quiere decir que:

a) La mayoría de los estudiantes de esta sección recolectó 6,75 kg de botellas.

b) Es como si todos los estudiantes de esta sección hubiesen recolectado 6,75 kg de botellas.

c) Es la cantidad de botellas que recolectó el estudiante ubicado en la posición central, luego de ordenarlas por cantidad de botellas recolectadas.

d) Es lo que le falta recolectar al estudiante de la sección que recolectó la menor cantidad de botellas.

Z_MATe5V_PArt1_13-129.indd 31 28/09/17 17:26

3. La moda de la cantidad de botellas recolectadas por los estudiantes de cuarto "A" es 6,7 kg. Esto quiere decir que:

a) La mayoría de los estudiantes de esta sección recolectó 6,7 kg de botellas.

b) Es como si todos los estudiantes de esta sección hubiesen recolectado 6,70 kg de botellas.

c) Es la cantidad de botellas que recolectó el estudiante ubicado en la posición central, luego de ordenarlas por cantidad de botellas recolectadas.

d) Es lo que le falta recolectar al estudiante de la sección que recolectó la menor cantidad de botellas.

4. ¿Cuál es la medida más apropiada para representar la cantidad de botellas recolectadas por los estudiantes de cuarto "A"? Explica.

Matrimonios

En un municipio se registraron durante un año 1380 matrimonios. Las edades de los contrayentes se organizaron en esta tabla:

Edad	[15 ; 20[	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[	TOTAL
Hombre	180	300	280	250	220	80	40	20	10	1380
Mujer	180	250	320	220	180	110	60	40	20	1380

Con la información dada, responde las preguntas 5; 6 y 7.

5. El alcalde quiere conocer el promedio de edades de las mujeres y hombres contrayentes para su informe final de cierre de año.

a) 29,6 años y 28,3 años, respectivamente.

b) 28,3 años y 29,6 años, respectivamente.

c) 29,6 años y 28,3 años, respectivamente.

d) 30,6 años y 29,6 años, respectivamente.

6. Un regidor solicitó que calculasen qué edades tenían las mujeres del 50 % de mayor edad.

a) Entre 27,5 años y 60 años

b) Entre 37,5 años y 60 años

c) Entre 32,5 años y 50 años

d) Entre 32,5 años y 60 años

7. El alcalde, luego de ver los datos que solicitó, llegó a la conclusión de que, de todos los contrayentes, las mujeres son mayores que los hombres. Da argumentos a favor o en contra de esta conclusión.

Calificaciones

Las calificaciones de los estudiantes de quinto "A" y quinto "B" en Matemática son las siguientes:

5.° "A"	5.° "B"
13; 15; 14; 16; 18; 12; 11; 09; 10; 15; 12; 18; 13; 12; 08; 15; 09; 17; 14; 16	19; 20; 05; 08; 12; 16; 14; 13; 10; 07; 06; 18; 18; 19; 17; 15; 14; 16; 10; 19; 20; 18; 15; 09.

Con la información dada, responde las preguntas 8; 9 y 10.

8. ¿Cuál es el puntaje que supera a la calificación de por lo menos la mitad de los estudiantes de cada sección?

a) A: 13; B: 15 **b)** A: 14; B: 13 **c)** A: 14; B: 15 **d)** A: 13; B: 14

9. ¿Cuál presenta mejor rendimiento promedio? ¿Cuál es el puntaje más frecuente, considerando a todo el curso de Matemática de quinto?

a) 5.° A; 14 y 15 **b)** 5.° B; 15 y 18 **c)** 5.° A; 12 y 18 **d)** 5.° B; 12 y 14

10. Si desearas hacer una comparación entre las dos secciones en función de sus calificaciones, ¿qué medida de tendencia central utilizarías para realizar dicha comparación?

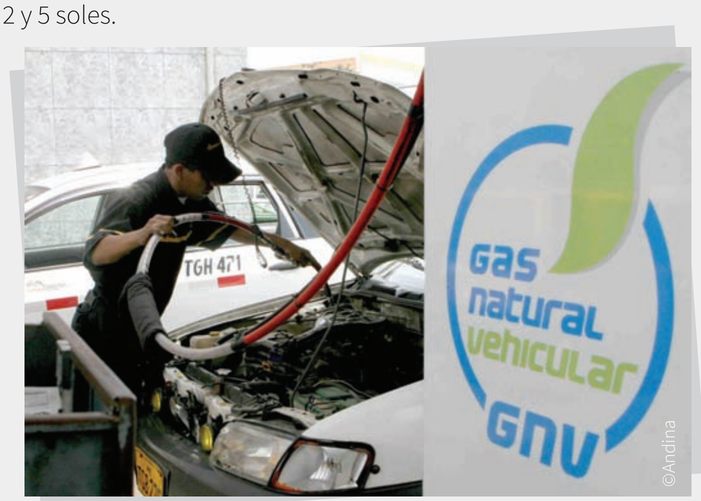
Ficha 3 Establecemos relaciones entre valores desconocidos

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencia, y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, con coeficientes.
	Comunica su comprensión sobre expresiones algebraicas.	Expresa con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre la solución o soluciones de un sistema de ecuaciones lineales para interpretar un problema en su contexto y estableciendo relaciones entre dichas representaciones.
	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos o procedimientos para hallar términos desconocidos sobre sistemas de ecuaciones lineales.

Aprendemos

La utilización del gas natural (GNV) como combustible disminuye la emisión de gases contaminantes como el monóxido de carbono (CO), los hidrocarburos (HC) y el dióxido de carbono (CO_2), que se emiten con el uso de la gasolina y demás combustibles. De esta manera, la utilización de gas natural contribuye a la reducción de las enfermedades respiratorias y del calentamiento global, mejorando así la calidad medioambiental.

En el Perú, cada día hay más personas que convierten sus vehículos a GNV, y actualmente existen alrededor de 18 000 peruanos que utilizan este combustible, como es el el caso del señor Mendoza, a quien le sucedió lo siguiente en un grifo de la ciudad de Lima: pidió que llenaran el tanque de su auto con GNV y, luego, al llenarse, la pantalla del surtidor marcó 19 soles. El señor Mendoza pagó con un billete de 100 soles, pero el grifero solo contaba con monedas de 2 y 5 soles.



1. ¿De cuántas formas el grifero puede dar el vuelto al señor Mendoza, dueño del vehículo con gas natural?
2. ¿Qué dato le agregarías al problema para que el grifero solo tenga una forma posible de dar el vuelto?

Comprendemos el problema

1. ¿De qué datos dispones?

2. ¿Cuáles son las incógnitas?

3. ¿Tienes información suficiente para responder la primera pregunta de la situación inicial? ¿Por qué?

4. ¿Puedes plantear el problema con tus propias palabras?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia te sirve para resolver el problema?

a) Diagrama de flujo **b)** Plantear una ecuación **c)** Utilizar el ensayo y error

2. ¿Cómo puedes proceder para implementar la estrategia elegida?

Z_MATe5V_PArt1_13-129.indd 38 28/09/17 17:26

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Aplica la estrategia elegida para resolver la primera pregunta de la situación inicial.

2. ¿Cómo representarías algebraicamente el paso anterior?

3. ¿Qué dato agregarías al problema para que solo haya una forma posible de dar el vuelto?

4. Haz la representación algebraica del nuevo dato y da solución a la pregunta 2 de la situación inicial.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Cómo extenderías tu solución de la primera pregunta de la situación inicial a un caso general?

2. ¿Hay otra forma algebraica que puedes emplear en el paso 4 del *Ejecutamos la estrategia o plan*?

3. ¿Puedes verificar de manera gráfica la solución a la pregunta 2 de la situación inicial?

Analizamos

Situación A

La tienda de discos

La tienda "El palacio de los discos" recaudó en una semana 1415 soles por la venta de discos compactos de reguetón y rock. El precio de los CD de reguetón es de S/40, y el de los de rock, de S/45. Al momento de contabilizar la venta el fin de semana, la computadora que registra las ventas de la tienda se malogró y se perdió toda la información. La persona encargada solo recuerda que se vendieron 33 discos. Si fueras el encargado de contabilizar las ventas de la semana, ¿cuántos CD de cada género informarías que se vendieron? Elabora su gráfica en el sistema de coordenadas.

Resolución

- Datos

  x: n.° de CD de reguetón

  y: n.° de CD de rock

  Importe de CD de reguetón: $40x$

  Importe de CD de rock: $45y$

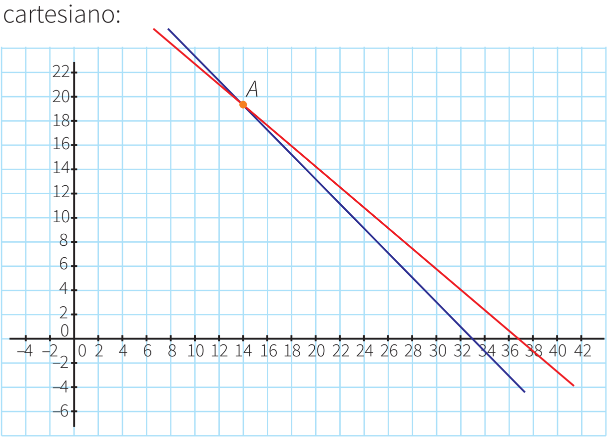
- Por datos: $\begin{cases} x + y = 33 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 40x + 45y = 1415 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$

- Multiplicando la ecuación (1) por –40, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -40x - 40y = -1320 \\ 40x + 45y = 1415 \end{cases}$$

- Reduciendo: $5y = 95$; $y = 19$
- Luego: $x + 19 = 33$; $x = 14$

Elaboramos la gráfica de las ecuaciones en el plano cartesiano:



Respuesta:

14 de reguetón y 19 de rock.

1. ¿Qué estrategia se utilizó para resolver la situación?

2. ¿En qué consistió el método para resolver las ecuaciones? ¿Cómo se llama?

3. ¿Qué significan los puntos de cada recta? ¿Cómo interpretas el punto de intersección de ambas rectas?

Situación B

Un laboratorista requiere preparar 100 ml de solución azucarada al 50 % utilizando soluciones al 35 % y 60 %. ¿Cuántos ml de cada una deberán mezclarse para obtener la concentración deseada?

Resolución

- Organizamos los datos en una tabla:

	Solución al 35 %	Solución al 60 %	Se desea obtener
Volumen	x	y	100 ml
Concentración	0,35	0,60	0,50(100)

- Deducimos dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 100 \text{ ....(1)} \\ 0{,}35x + 0{,}60y = 0{,}50(100)\text{......(2)} \end{cases}$$

- Multiplicando la ecuación (1) por (–0,35), se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -0{,}35x - 0{,}35y = -35 \\ 0{,}35x + 0{,}60y = 50 \end{cases}$$

- Reduciendo se obtiene: $0{,}25y = 15 \Rightarrow y = 60$
- Luego: $x + 60 = 100 \Rightarrow x = 40$

Respuesta: Se necesita mezclar 40 ml de la solución al 35 %, y 60 ml, al 60 %.

1. ¿Qué estrategia ayudó a plantear las ecuaciones?

2. En el caso de la ecuación:

$0{,}35x + 0{,}60y = 0{,}50(100) = 0{,}50$

¿se pudo escribir de manera más sencilla? ¿Cómo?

Situación C

Daniela y sus amigas pagaron 72 soles por 4 sándwiches de pollo y 8 refrescos de chicha morada en el parque de Miraflores; pero la semana anterior consumieron 2 sándwiches de pollo y 2 refrescos de chicha morada, en el mismo lugar, y la cuenta fue de 26 soles. ¿Cuál es el costo de un sándwich y de un refresco?

Resolución

(Encuentra el error)

- Datos

  x: precio de un sándwich

  y: precio de un vaso de chicha morada

  La primera vez pagaron: $4x + 8y = 72$.............(1)

  La semana siguiente pagaron: $2x + 2y = 26$...(2)

- Se tendría el sistema de ecuaciones:

  $$\begin{cases} 4x + 8y = 72 \ldots (1) \\ 2x + 2y = 26 \ldots (2) \end{cases}$$

- Aplicamos el método de reducción. Multiplicando la ecuación (2) por (–2), se obtiene el siguiente sistema:

  $$\begin{cases} 4x + 8y = 72 \\ -4x - 4y = -26 \end{cases}$$

- Reduciendo: $4y = 46$, de donde $y = 11{,}5$
- Reemplazando en la ecuación (2):

  $2x + 2\,(11{,}5) = 26$, se obtiene el valor de $x = 1{,}5$

Respuesta:

Cada sándwich costó S/1,50 y el vaso de chicha, S/11,50.

1. Analiza las respuestas. ¿Estos costos los podemos encontrar por separado en lugares diferentes? ¿Y en un mismo lugar se encontrarán estos precios?

2. Utiliza otro método de resolución de ecuaciones para verificar la respuesta. Si no coincide, corrige.

Practicamos

1. El director de una institución educativa realizó un proyecto de presentación teatral con sus estudiantes de quinto grado, con la finalidad de reunir fondos y terminar de construir el comedor estudiantil, por lo cual recibió el apoyo de los padres de familia y el de la Municipalidad, que le brindó gratuitamente su anfiteatro.

El costo de las entradas fue de 30 soles para los adultos y 20 soles para los niños. Si el sábado pasado asistieron 248 personas y se recaudaron 5930 soles, ¿cuántos adultos y cuántos niños asistieron a esa función?

a) 151 adultos y 97 niños

b) 124 adultos y 124 niños

c) 97 adultos y 151 niños

d) 69 adultos y 179 niños

2. Escribe verdadero (V) o falso (F), según corresponda, en cada paréntesis de las siguientes proposiciones.

I. Cuando dos rectas se cruzan, es totalmente seguro que encontramos una solución al sistema de ecuaciones, al cual se denomina *sistema compatible determinado*. ( )

II. Cuando dos rectas son paralelas a un plano, se encuentran infinitas soluciones, al cual se denomina *indeterminado*. ( )

III. En un sistema de ecuación lineal, cuando hay más variables que ecuaciones, existe más de una solución. ( )

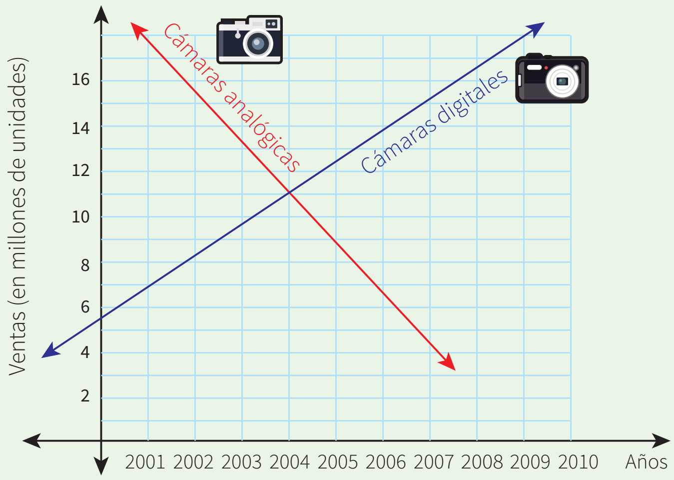
a) V V V

b) V F V

c) F F F

d) F V F

El siguiente gráfico muestra cómo han ido bajando las ventas de cámaras analógicas desde que aparecieron las cámaras digitales en el mundo.



Con la información dada, responde las preguntas 3 y 4.

3. Del periodo 2000 a 2010, ¿en qué años las ventas de cámaras digitales fueron menores que las de cámaras analógicas, y a partir de qué año las ventas de cámaras digitales superaron a las de cámaras analógicas?

a) Del 2000 al 2003, las ventas de cámaras digitales fueron menores que las de cámaras analógicas.

b) A partir del 2005, se vendieron más cámaras digitales, y entre el 2000 y 2008, las ventas de cámaras analógicas superaron a las de cámaras digitales.

c) Del 2000 al 2003, las ventas de cámaras digitales fueron menores que las de cámaras analógicas, y a partir del 2005, las ventas de cámaras digitales superaron a las de cámaras analógicas.

d) Del 2000 al 2002, las ventas de cámaras digitales fueron menores que las de cámaras analógicas, y a partir del 2003, las ventas de cámaras digitales fueron superiores.

4. Estima el año en el cual las ventas de los dos tipos de cámaras fueron iguales y la cantidad de cámaras que, aproximadamente, se vendieron en ese año.

5. Un vaso de vidrio contiene agua y aceite; 2/3 del volumen del contenido está ocupado por aceite, y 1/3, por agua. La densidad del agua es 1 g/cm^3, y la del aceite, 3 g/cm^3, y la masa líquida total en el vaso es 1000 g. Determina el volumen de cada líquido.

a) 2000/7 cm^3 de agua y 1000/7 cm^3 de aceite

b) 1000/7 cm^3 de agua y 6000/7 cm^3 de aceite

c) 1000/6 cm^3 de agua y 2000/6 cm^3 de aceite

d) 2000/6 cm^3 de agua y 1000/6 cm^3 de aceite

6. En el puerto del Callao, un barco recorre 76 kilómetros en 1 hora con la corriente a su favor; de regreso, con la corriente en contra, tarda 4 horas para recorrer la misma distancia. ¿Cuál es la velocidad de la corriente?

a) 47,5 km/h **b)** 28,5 km/h **c)** 57 km/h **d)** 19 km/h

7. El señor Sergio contrató dos camiones cuyas capacidades de carga son, respectivamente, de 3 y 4 toneladas, con los cuales se hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de fierro de construcción. Él necesita saber cuántos viajes realizó cada camión para adicionar los gastos por combustible.

Juan y Natalia, estudiantes de quinto grado de secundaria, preparan paletas de chocolate con el fin de venderlas y así juntar dinero para su viaje de promoción. La materia prima necesaria para hacer una paleta grande les cuesta 3 soles, y para una chica, 2 soles. Ellos invierten en su proyecto la suma de 50 soles.

Con la información dada, responde las preguntas 8 y 9.

8. ¿Qué dato le adicionarías a esta situación para que la cantidad de paletas grandes sea igual a la cantidad de paletas chicas, y cuántas paletas serán de cada tamaño?

a) Adicionar el dato: “Se hicieron un total de 20 paletas”; 10 paletas de cada tamaño.

b) Adicionar el dato: “Se hicieron un total de 24 paletas”; 12 paletas de cada tamaño.

c) Adicionar el dato: “Se hicieron un total de 22 paletas”; 11 paletas de cada tamaño.

d) Adicionar el dato: “Se hicieron un total de 18 paletas”; 9 paletas de cada tamaño.

9. Si las paletas chicas se vendieran más y así se obtuviera mayor ganancia, ¿qué dato faltaría para afirmar que se ha preparado mayor cantidad de paletas chicas que de paletas grandes?

a) Faltaría el dato: “Se hicieron un total de 23 paletas”; 4 grandes y 19 chicas.

b) Faltaría el dato: “Se hicieron un total de 24 paletas”; 2 grandes y 22 chicas.

c) Faltaría el dato: “Se hicieron un total de 22 paletas”; 6 grandes y 16 chicas.

d) Faltaría el dato: “Se hicieron un total de 21 paletas”; 8 grandes y 13 chicas.

10. Un empresario textil de Gamarra desea distribuir una gratificación entre sus empleados por su buen desempeño en la semana, y se percata de que si entregara a cada uno 800 soles, le sobrarían 200, y si les diera 900 soles, le faltarían 400. ¿Cuántos empleados hay en su fábrica?, ¿cuánto dinero tiene para repartir? ¿Cómo resolverías el problema sin usar ecuaciones?

Ficha 4

Las formas geométricas en nuestra vida diaria

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Establece relaciones entre las características y atributos medibles de objetos reales o imaginarios y representa estas relaciones con formas bidimensionales, tridimensionales o compuestas y con cuerpos de revolución.
	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Lee textos o gráficos que describen las propiedades de los cuerpos de revolución, compuestos y truncados, así como la clasificación de las formas geométricas por sus características y propiedades comunes o distintivas.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para determinar la longitud, el área y el volumen de cuerpos geométricos compuestos y de revolución.

Aprendemos

Los conos de seguridad se usan en la señalización vial, representan un elemento de seguridad para transeúntes o conductores. Sirven en la indicación de desvíos, pozos, obras en caminos, calles y carreteras, para lo cual deben tener como mínimo una altura de 47,5 cm. Estos conos pueden fabricarse de diversos materiales, como goma, plástico, PVC, que permitan soportar el impacto, evitando así que se dañen los vehículos o que estos dañen a otros. Los conos de mayor tamaño se emplean cuando el volumen de tránsito, la velocidad u otros factores lo requieren. Los conos de seguridad son de color anaranjado y en las noches deben ser reflectantes o equiparse con dispositivos luminosos para que tengan buena visibilidad.

La Municipalidad ha adquirido conos de seguridad de color anaranjado de 48 cm de altura, y los diámetros de la base mayor y menor son de 36 cm y 8 cm, respectivamente. Para el desvío del tránsito deben tener una banda reflectante de 10 cm de ancho, aproximadamente.

©Shutterstock

1. ¿Cuál es la superficie cubierta por la banda reflectante?
2. ¿Qué volumen posee el cono de seguridad?

Comprendemos el problema

1. ¿Qué forma tienen los llamados conos de seguridad?

2. ¿De qué datos dispones?

3. ¿Cuáles son tus incógnitas directas?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Has encontrado algún problema similar? Descríbelo.

2. ¿Qué debes saber para hallar tus incógnitas directas? ¿Será necesario calcular algo antes?

3. ¿Qué estrategia te ayudaría a resolver el problema? ¿Por qué?

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Aplica la estrategia elegida. Recuerda que cuando trabajas con figuras geométricas es importante que los datos tengan la notación pertinente para poder identificarlas.

2. Observa e identifica las incógnitas y las propiedades relacionadas con ellas que se van a aplicar para conocer sus valores. Busca respuesta a la primera pregunta de la situación inicial.

3. Analiza los datos de la aplicación de la estrategia elegida. Reconoce aquellos que van a permitir dar respuesta a la segunda pregunta de la situación inicial. También identifica si nos falta conocer las propiedades que permitirán hallar sus valores.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Sabes que el tronco de cono es un concepto de geometría del espacio? ¿Has usado solo propiedades de este campo o has recurrido a la geometría plana?

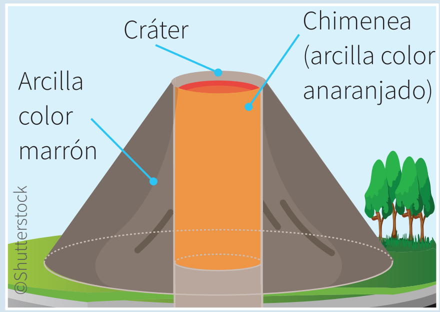
2. Describe y explica la estrategia que seleccionaste para resolver la situación. Resalta las ventajas que tiene.

Analizamos

Situación A

Los estudiantes de quinto grado realizaron un proyecto de investigación sobre el volcán de la región y representaron sus medidas en una maqueta a escala de 1:2000, tomando en cuenta la siguiente información: el diámetro del cráter es 840 m; el diámetro de la base del volcán, 1800 m, y el ángulo de inclinación del volcán, 37°.

Para el tronco de cono, utilizaron arcilla de color marrón, y para la chimenea, la cual tiene forma de cilindro, emplearon arcilla de color anaranjado, tal como se muestra en la figura. ¿En cuánto excede el volumen de arcilla de color marrón a la arcilla de color anaranjado utilizada?



Resolución

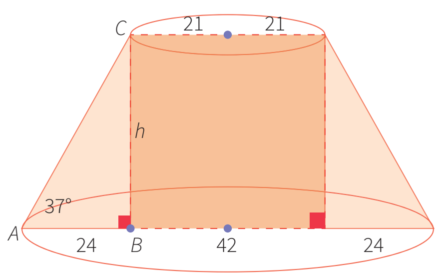
- Utilizando la escala 1:2000 determinamos las medidas para la maqueta.

  Diámetro del cráter: 840 m $= \dfrac{(840)\ (100)}{2000} = 42$ cm

  Diámetro de la base del volcán:

  1800 m $= \dfrac{(1800)\ (100)}{2000} = 90$ cm

- Hacemos un dibujo de la situación:



- Como el triángulo rectángulo ABC es notable, se tiene que $AB = 4k = 24$; $k = 6$.

  Entonces: $BC = 3k = 3(6) = 18$ cm $= h$

  También: $r = 21$ cm; $R = \dfrac{90}{2} = 45$ cm

- Cálculo del volumen de arcilla anaranjada:

  $V = \pi\, r^2 h = \pi(21)^2(18) = 7938\pi$ cm^3

- Cálculo del volumen de arcilla marrón:

  $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r[\,R^2 + r^2 + R \cdot r\,] - \pi\, r^2 h$

  $V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 18[\,45^2 + 21^2 + 45 \cdot 21] - 7938\pi$

  $V = 12\,528\pi$ cm^3

Respuesta:

El volumen de arcilla de color marrón excede al volumen de arcilla de color anaranjado en

$$12528\pi - 7938\pi = 4590\pi \text{ cm}^3$$

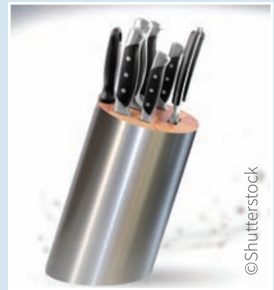
1. Si hubiésemos querido hacer un dibujo a escala en una hoja A4, ¿se mantendría la escala o propondrías otra?

2. Describe el procedimiento que se ha utilizado para resolver el problema.

3. ¿Qué aspectos semejantes encuentras en relación con el problema de los conos de seguridad?

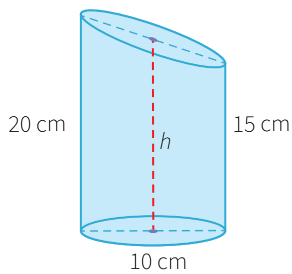
Situación B

Los estudiantes en el área de EPT elaboraron un portacuchillos con la forma de tronco de cilindro, utilizando un pedazo de madera forrado con una lámina de aluminio, como se muestra en la imagen. Calcula el volumen de madera que se utilizó para elaborar el portacuchillos y la cantidad de lámina de aluminio para forrarlo.



Resolución

- Hacemos un dibujo para visualizar mejor el problema.



- Contrastamos con la fórmula y aplicamos directamente.

$$V = \pi R^2 \left(\frac{G + g}{2}\right)$$

$$V = \pi \cdot 5^2 \left(\frac{20 + 15}{2}\right)$$

$$V = (3{,}14)\ (25)\ (17{,}5)$$

$$V = 437{,}50\ \text{cm}^3$$

- Para hallar el área lateral:

$$A_L = \pi R\ (G + g)$$

$$A_L = (3{,}14)\ (5)\ (20 + 15)$$

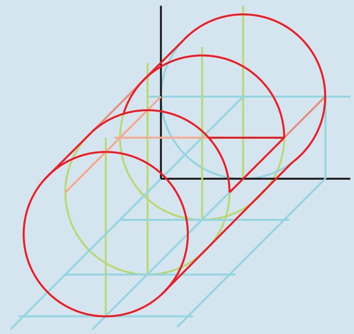
$$A_L = 549{,}5\ \text{cm}^2$$

1. ¿La expresión $\frac{G + g}{2}$ es igual a la h de la figura? ¿Por qué?

2. Si en lugar de la G te hubiesen dado el radio de la base oblicua, ¿se podría resolver el problema?

Situación C

Los niños desde muy pequeños son estimulados con actividades lúdicas, con rompecabezas y piezas de madera de encajes, para armado de casas, carros y otros objetos que permitan desarrollar la imaginación y la creatividad. En este sentido, un diseñador de estos materiales propuso la elaboración de una nueva pieza, como se muestra en la figura. Representa las vistas de frente (proyección vertical), de arriba (proyección horizontal) y lateral (proyección lateral) de esta nueva pieza.

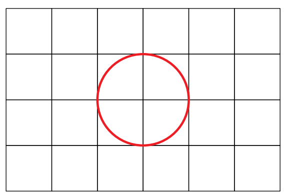


Resolución

(Encuentra el error)

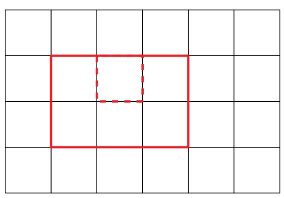
- Observamos de frente el objeto. Si lo viéramos todo en un plano, se vería solo un círculo.

Vista de frente

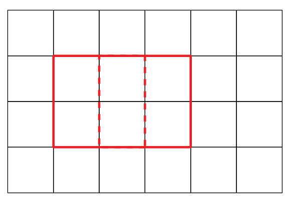


- Para la vista lateral, nos ubicamos a un costado (el derecho). Por último, mirando desde lo alto, obtenemos la vista de arriba.

Vista lateral



Vista de arriba



1. ¿Crees que si varias personas vieran solo las representaciones, harían la misma imagen mostrada en la situación C? ¿Por qué?

2. Resuelve la situación utilizando otra técnica, para verificar la solución o corregirla.

Practicamos

Después de un partido de fútbol, Andrés se tomó un vaso de chicha, que le calmó la sed y lo ayudó a hidratarse.

Al observar el vaso vacío, que tenía una forma cónica, le entró curiosidad por saber la cantidad de chicha que había consumido. Le pidió a su amigo Manuel una regla y midió las dimensiones del vaso: el diámetro del fondo era de 4 cm; el de la parte superior, de 6 cm, y el costado medía 10 cm.

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

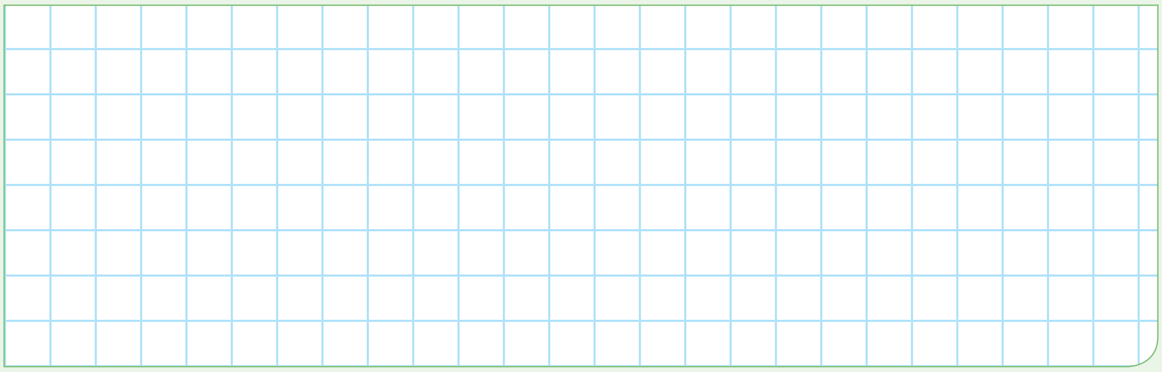
1. ¿Qué volumen de chicha había bebido Andrés?

a) $187{,}82\pi$ cm^3

b) $124{,}16$ cm^3

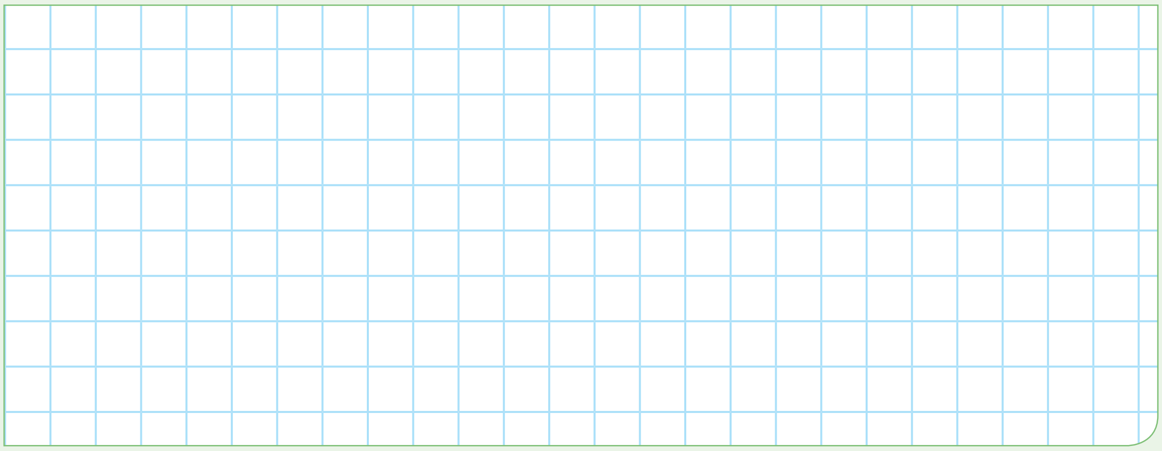
c) 63π cm^3

d) 50π cm^3



2. ¿Cuál es el área lateral del vaso?

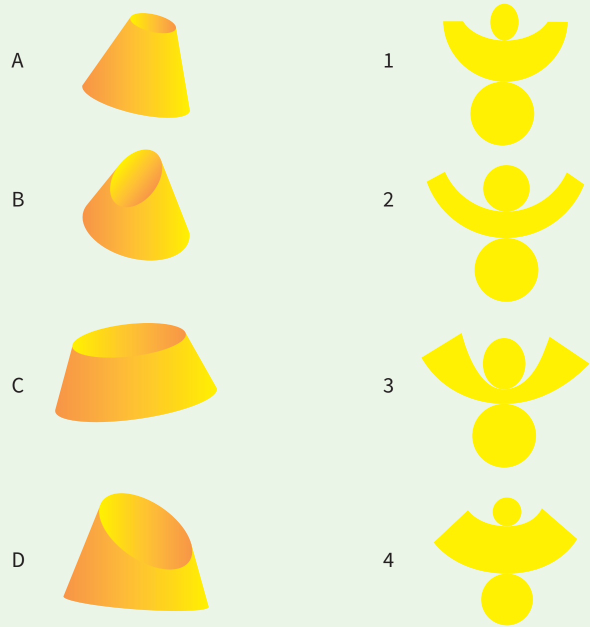
a) 50π cm^2 **b)** 68π cm^2 **c)** 80 cm^2 **d)** 90π cm^2



3. Una banda de músicos ha adquirido tres *ashikos*, instrumentos de percusión de forma de cono truncado, cuyas dimensiones son de 40 centímetros de alto por 26 centímetros de diámetro superior y 8 centímetros de diámetro en la boca inferior. ¿Cuántos centímetros cuadrados de tela con diseños incaicos serán necesarios para cubrir el contorno de los tres *ashikos*? (Considera π ≈ 3,14).

a) 6565,74 cm^2 **b)** 6405,60 cm^2 **c)** 2188,58 cm^2 **d)** 248,06 cm^2

4. Relaciona cada sólido con su respectivo desarrollo.



5. Se tienen 30 macetas en forma de tronco de cono. Los radios de las bases de estas macetas miden 9 cm y 27 cm, respectivamente, y su generatriz, 30 cm. Si se llenaran las ⅔ partes de la generatriz de la maceta con tierra preparada, ¿cuántas bolsas de 5 kg serán necesarias para habilitar todas las macetas?

a) 3 bolsas **b)** 11 bolsas **c)** 71 bolsas **d)** 72 bolsas

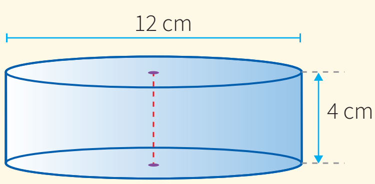
6. Los dueños de una fábrica de mermelada promocionan su producto en nuevos tamaños de recipientes con etiquetas novedosas. ¿Cuál de los dos tiene más capacidad?

a) Envase 1 ≡ 144π cm^3

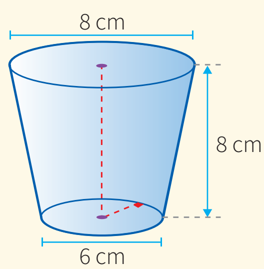
b) Envase 2 ≡ 296π cm^3

c) Envase 1 ≡ 48π cm^3

d) Envase 2 ≡ $98{,}67\pi$ cm^3

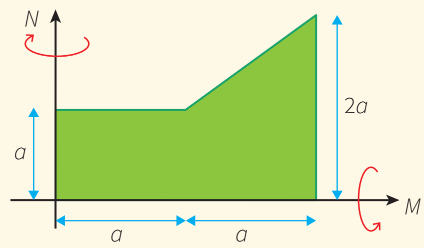


Envase 1

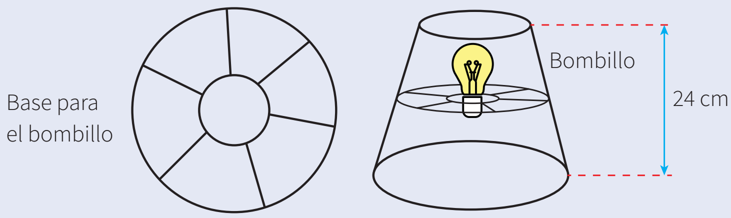


Envase 2

7. Un mecánico automotriz diseña piezas que permiten la generación y transmisión del movimiento en sistemas automotrices, como se encuentran en los vehículos de tracción mecánica. En tal sentido, diseña dos piezas automotrices de acero a partir de la rotación de la región del plano alrededor de los ejes *M* y *N*, como se muestra en la figura. Representa los sólidos de revolución al rotar en cada uno de sus ejes.



Los estudiantes de la I. E. Miguel Grau en el área de Educación para el Trabajo elaboran lámparas en forma de cono truncado con papel reciclado, colocando un armazón de alambre como base para el bombillo en la mitad de la altura del cono truncado.



Con la información dada, responde las preguntas 8 y 9.

8. ¿Cuántos centímetros de papel reciclado se requieren para la confección de la pantalla si se considera una pestaña rectangular de 2 cm en uno de sus extremos, y sus radios miden 8,5 cm y 15,5 cm?

9. ¿Cuántos centímetros de alambre se requieren para el armazón del bombillo si los radios están en relación de 1 a 6?

a) 28π cm **b)** 88π cm **c)** $2(14\pi - 30)$ cm **d)** $4(7\pi + 15)$ cm

10. En la heladería "Sabores Naturales", los vasos de helado tienen las siguientes medidas: 6 cm de profundidad, 8 cm de diámetro superior y 6 cm de diámetro inferior. Si se colocan dentro del vaso tres porciones de helado de forma esférica, cuyo diámetro es de 6 cm, y si el helado se derrite, ¿este rebasará la capacidad del vaso? ¿Por qué?

Ficha 5 Consideramos los porcentajes para tomar decisiones

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de cantidad	Traduce cantidades a expresiones numéricas.	Establece relaciones entre datos y acciones de comparar e igualar cantidades y las transforma a expresiones numéricas (modelos) que incluyen operaciones con aumentos y descuentos porcentuales.
	Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.	Selecciona, combina y adapta estrategias de cálculo, estimación, recursos y procedimientos diversos para realizar operaciones con aumentos y descuentos porcentuales.
	Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.	Plantea y compara afirmaciones sobre las propiedades de las operaciones con aumentos y descuentos porcentuales u otras relaciones numéricas que descubre, y las justifica con ejemplos y contraejemplos.

Aprendemos

Dos tiendas, "La Económica" y "Súper Oferta", han decidido lanzar una publicidad televisiva y con anuncios publicitarios de sus respectivas campañas.

Un cliente desea comprar una *tablet* cuyo precio de lista es S/299,00, y cuenta con las dos tarjetas: la "Feliz" y la de la "Suerte".

1. ¿En cuál de las tiendas obtendrá un menor precio por dicha *tablet*?
2. ¿Cuál es el precio que pagaría?
3. ¿A qué tanto por ciento equivalen los descuentos sucesivos en "La Económica"?
4. ¿Cuál es el descuento equivalente a los descuentos sucesivos en "Súper Oferta"?

Comprendemos el problema

1. ¿Cuáles son los datos que te da el problema?

2. ¿Cuál es la incógnita que falta resolver?

3. ¿Sabes qué significa la oferta del 40 % + 30 %? ¿Está bien expresado?

4. ¿Es similar a alguna situación que has observado en algún lugar?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Podrías enunciar el problema de otra forma?

2. ¿Qué estrategia te sirve para resolver el problema?

a. Ensayo y error **b.** Plantear por etapas

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Calculamos el descuento que se otorga en la tienda “La Económica” y el precio de venta.

2. Hallamos el descuento en la tienda “Súper Oferta” y el precio de venta.

3. Da tu respuesta a las dos primeras preguntas de la situación inicial.

4. Determina a qué tanto por ciento equivalen los descuentos sucesivos en “La Económica”.

5. De manera similar procede para resolver la pregunta 4 de la situación inicial.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. Describe la estrategia empleada en la resolución del problema.

2. Si el precio de la *tablet* hubiera sido otro, ¿qué habría ocurrido con el tanto por ciento equivalente a los descuentos sucesivos? Demuéstralo.

Analizamos

Situación A

En el siguiente cuadro se aprecian los símbolos de las figuras musicales y el tiempo de su duración expresado en segundos.

Además, los puntillos de prolongación (.), colocados al lado derecho de una figura, son signos musicales que se utilizan para aumentar la duración de una figura en el 50 % de su valor. Según la información proporcionada, completa el siguiente cuadro:

Nombre	Redonda	Blanca	Negra	Corchea	Semicorchea
Símbolo	𝅝	𝅗𝅥	♩	♪	𝅘𝅥𝅯
Duración (s)	100 % de 1 s	50 % de 1 s	25 % de 1 s	12,5 % de 1 s	6,25 % de 1 s

Blanca
𝅗𝅥.
50 % + 25 %

Resolución

Considerando que nos han proporcionado la duración en segundos de cada figura musical y se define que los puntillos de prolongación incrementan la duración de la figura musical respectiva en un 50 %, emplearemos esta información para completar el cuadro.

Nota musical	Duración (s)
Redonda.	100 % + 50 % = 150 %
Negra.	25 % + 12,5 % = 37,5 %
Blanca.	50 % + 25 % = 75 %
Corchea.	12,5 % + 6,25 % = 18,75 %
Negra.	25 % + 12,5 % = 37,5 %

1. ¿Qué utilidad tuvo la primera tabla en la resolución del problema?

2. ¿Y la segunda tabla?

3. ¿Qué diferencia presenta la forma de aplicar los tantos por ciento con respecto a la situación inicial?

Situación B

Carla observa en un bazar una promoción de “2 × 1” en juegos de sábanas. Asimismo, advierte que, si se paga con la tarjeta de esta tienda, hay un descuento adicional del 20 %. Sabiendo que cada juego de sábanas cuesta 129 soles, ¿cuánto pagará Carla por 8 juegos?

©Shutterstock

Resolución

- Como no sabemos si Carla tiene la tarjeta de la tienda, empezaremos a calcular el precio sin descuento.

  Ya que va a comprar 8 juegos, entonces comprará $\frac{8}{2} = 4$ promociones.
- Si 2 juegos cuestan 129 soles, entonces Carla pagará 4 × 129 = S/516.
- Si pagase con la tarjeta de la tienda, le descontarían el 20 % de 516 = S/103,20.
- Con el descuento pagaría 516 – 103,20 = S/412,80.

Respuesta: Podría pagar S/516 o S/412,80.

1. ¿La información proporcionada te permite dar un solo valor como respuesta? ¿Por qué?

2. En el caso de que hubiera un error, ¿cuál sería su corrección? De ser correcta la respuesta, busca otra forma de resolver el problema.

Situación C

Diego y Sonia desean comprar un departamento a través del Programa "Mi Vivienda". El precio del departamento es S/182 003. Al momento de concretar la compra, depositan el 30 % como cuota inicial, por lo cual se les descuenta el bono del buen pagador equivalente a S/17 000. Diego cree que el saldo lo pueden cancelar a través de un crédito hipotecario en 10 años con una tasa de interés simple del 1,5 % mensual. ¿Qué porcentaje representa el precio final del departamento respecto al precio inicial?

Resolución

(Encuentra el error)

- Precio de costo del departamento: S/182 003
- Cálculo de la cuota inicial:

  30 % de 182 003 = 0,3 × 182 003 = S/54 600,90
- El precio por pagar sería:

  182 003 – 54 600,90 = S/127 402,10
- Para hallar los intereses debemos conocer el tiempo expresado en meses: 10 × 12 = 120 meses.
- La tasa de interés es: 1,5 % = 0,015
- Calculamos los intereses:

  127 402,10 × 120 × 0,015 = S/229 323,78
- Entonces, el valor del préstamo hipotecario, considerando el bono sería:

  127 342,10 + 229 323,78 – 17 000 = S/339 665,88
- Luego, el precio final del departamento sería:

  54 600,10 + 339 665,88 + 17 000 = S/411 265,98

  Por una regla de tres:

  S/182 003 ↔ 100 %

  S/411 265,98 ↔ x

  $$x = \frac{411\,265{,}98 \cdot 100\ \%}{182\,003} = 225{,}97\ \%$$

Respuesta: El precio final representa el 225,97 % del precio inicial.

1. Confronta el enunciado con la resolución. ¿El procedimiento coincide con la secuencia que propone el enunciado? ¿Por qué?

2. Si el procedimiento o la respuesta son correctos, busca otra forma de resolver el problema. Si son incorrectos, haz la corrección necesaria.

Practicamos

En una tienda se venden los siguientes equipos de celulares:

Para incentivar la compra de estos productos, el establecimiento realiza la siguiente promoción:

Equipo	1	2	3
Descuento	20 %	30 %	15 %

Con la información dada, responde las preguntas 1; 2; 3 y 4.

1. Para promocionar el EQUIPO 1, se lo ofrece al precio de lista del EQUIPO 3. ¿En qué porcentaje se debe descontar el EQUIPO 1?

a) 20 % **b)** 4 % **c)** 40 % **d)** 4,2 %

2. Por efectos de la inflación, el EQUIPO 1 incrementa su precio de lista hasta costar tanto como el precio actual del EQUIPO 2. ¿Cuánto se incrementó el precio del EQUIPO 1?

a) 10,1 % **b)** 11 % **c)** 10 % **d)** 1 %

3. Si esta semana todos los productos de la tienda sufrieron un incremento del 5 %, ¿qué expresión representa el precio que se debe pagar por el EQUIPO 2 en esta semana?

a) $480 + 480\left(\frac{5}{100}\right) - 480\left(\frac{105}{100}\right)\left(\frac{30}{100}\right)$

b) $480 + 480\left(\frac{5}{100}\right) - 480\left(\frac{95}{100}\right)\left(\frac{30}{100}\right)$

c) $480 + 480\left(\frac{0{,}5}{100}\right) - 480\left(\frac{100{,}5}{3}\right)\left(\frac{3}{100}\right)$

d) $480 + 480\left(\frac{3}{100}\right) - 480\left(\frac{97}{100}\right)\left(\frac{50}{100}\right)$

4. Si el precio del EQUIPO 1 sufre un incremento del 10 % y luego un descuento del 15 %, ¿a qué precio se estará vendiendo este producto?

La octava edición de Mistura convocó a casi 400 000 visitantes durante los 10 días de la feria. La cifra significó un 20 % más de comensales que el 2014, cuando se contabilizó un total de 321 000 *tickets* vendidos. En total serían 400 000 los asistentes si contamos los visitantes de la jornada inaugural. Asimismo, fueron más de 390 los puestos que atendieron en el evento gastronómico más grande e importante de América Latina.

Con la información dada, responde las preguntas 5; 6 y 7.

5. Haciendo el recuento oficial de *tickets* vendidos en la feria Mistura 2015, se obtiene que se vendieron 405 000. ¿Cuál fue el porcentaje de incremento de los *tickets* vendidos entre el 2014 y el 2015?

a) 20 % **b)** 26 % **c)** 21 % **d)** 8,4 %

6. Si en el 2016 se produjo un incremento del 1 % en los *tickets* vendidos (considera que en el 2015 se vendieron 405 000), ¿en cuánto varía la cantidad de *tickets* vendidos entre el 2014 y el 2016?

a) 30,48 % **b)** 29,71 % **c)** 25,34 % **d)** 27,43 %

7. Pierina afirma que, si en el 2014 se vendieron 321 000 *tickets* de entrada, y en el 2015, se vendieron 400 000, no sería cierto que se ha incrementado en un 20 %, sino en un 24,6 %. La aproximación hecha por el medio es inexacta, ya que estaría dejando de considerar 14 766 *tickets* vendidos. ¿Estás de acuerdo con la afirmación de Pierina? Justifica tu respuesta.

8. Un agricultor posee 180 hectáreas de tierras de cultivo. Decide plantar 20 % con papas; ¼ del terreno con maíz; 35,5 % con zanahorias, y el resto con tomates. ¿Cuántas hectáreas destina para cultivar tomates?

a) 63,9 hectáreas **b)** 144,9 hectáreas **c)** 35,1 hectáreas **d)** 40,5 hectáreas

9. Tres hermanos: José, Ana y Pedro, reciben de sus padres una herencia de 199 000 soles, la cual deben repartirse considerando sus edades: 10; 18 y 22 años. El mayor opina que, como él ya está trabajando gracias a la profesión que le costearon sus padres, es el hermano menor el que más necesitará de la herencia. Por ello, propone realizar un reparto inversamente proporcional a sus edades. Ana, quien se halla terminando su carrera, está de acuerdo. ¿Qué porcentaje del total le corresponde a cada uno? ¿Cuál es la diferencia porcentual entre el hermano mayor y el menor?

a) 49,8 %; 27,6 %; 22,6 % y 27,2 %

b) 52,8 %; 32,2 %; 15 % y 37,8 %

c) 45,6 %; 28,5 %; 25,9 % y 19,7 %

d) 49 %; 28 %; 23 % y 26 %

10. Rocío paga por un par de zapatos S/94,50 soles. Sabiendo que este precio es producto de dos descuentos sucesivos del 10 % y 30 %, ¿qué precio de etiqueta tenía el par de zapatos?

Ficha 6 El crecimiento inmobiliario y el préstamo

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de cantidad	Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones.	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico su comprensión sobre las tasas de interés y de términos financieros para interpretar el problema en su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.
	Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.	Selecciona, combina y adapta estrategias de cálculo, estimación, recursos y procedimientos diversos para realizar operaciones con tasas de interés y simplificar procesos usando las propiedades de los números y las operaciones.
	Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.	Plantea y compara afirmaciones sobre la conveniencia o no de determinadas tasas de interés u otras relaciones numéricas que descubre, y las justifica con ejemplos y contraejemplos.

Aprendemos

El Estado peruano, con su programa “Mi vivienda”, brinda la oportunidad de adquisición de departamentos, condominios y casas propias. Actualmente, en Lima hay un crecimiento inmobiliario, tanto en la construcción como en la venta y alquiler de viviendas. El mercado inmobiliario se mueve por dos variables: la estabilidad económica y las tasas de interés hipotecario. En el Perú, la tasa de interés promedio de un crédito hipotecario en soles es de 9 % anual, y en dólares, de 8,5 %. Por este motivo, cada vez más personas tienen acceso a este tipo de crédito, como es el caso de la familia Ramírez, cuyos miembros desean adquirir un departamento, pero solo disponen de $20 000 y les falta $40 000. Por ello, acuden a dos entidades crediticias con la intención de solicitar un crédito hipotecario y así comprar su departamento. En estas financieras les proponen las siguientes opciones:

Entidad financiera Credicasa:

- Pago en cuotas mensuales iguales durante cinco años.
- Tasa de interés simple de 8,5 % anual.

Entidad financiera Davivienda:

- Pago en cuotas mensuales iguales durante cinco años.
- Tasa de interés compuesto de 7,5 % anual.

1. ¿Cuál sería el análisis año a año en cada financiera?

2. ¿Cuál sería la mejor opción para la familia Ramírez? Justifica tu respuesta.

Comprendemos el problema

1. ¿De qué datos dispones?

2. ¿Qué debes averiguar?

3. A simple vista, ¿cuál de las dos opciones te parece mejor? ¿Por qué?

4. Parafrasea el enunciado del problema.

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia te sirve para resolver el problema? ¿Por qué?

   a) Diagrama de árbol **b)** Plantear una ecuación **c)** Una tabla

2. ¿En qué consiste la estrategia elegida? ¿Con qué objetivo la usarías?

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Desarrolla la estrategia elegida. Ayúdate con la calculadora. Considera dos cifras decimales.

2. Haz el análisis comparativo.

3. Responde la segunda pregunta de la situación inicial.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Las predicciones o estimaciones que propusiste en la pregunta 3 de *Comprendemos el problema* están acordes con los resultados obtenidos?

2. ¿Puedes verificar los montos de manera directa? Si respondes que no, fundamenta. Si respondes que sí, verifícalo.

Analizamos

Situación A

Ricardo es un profesional con dos hijos, quienes actualmente acaban de ingresar a la universidad. Por ello, se ve en la necesidad de solicitar un préstamo a un banco. Como garantía, tiene que firmar un documento en el cual se detalla la forma de pago y los intereses que se compromete a pagar durante un determinado tiempo.

- El banco le prestará al inicio de este año S/12 500.
- Los pagos se realizarán en cuotas mensuales iguales.
- Al finalizar cada año, se contabilizarán intereses correspondientes al 18 % de los S/12 500 prestados, por un periodo de 5 años.

¿Qué tiempo transcurrió si Ricardo pagó S/14 250?

Resolución

- Por el enunciado se desprende que es una operación de interés simple.
- Datos:

  C = S/12 500

  r = 18 % = 0,18

  t = 5 años

  Pago realizado = S/14 250
- Calculamos el monto a pagar en 5 años:

  $M = C\,(1 + rt) = 12\,500\,(1 + 0{,}18 \times 5)$

  $M = 23\,750$
- El pago mensual sería: $\dfrac{23\,750}{36} = 395{,}83$
- El tiempo transcurrido es: 14 260 : 395,83 = 36 meses

Respuesta:

Han transcurrido tres años.

1. ¿Qué palabras dan a entender que es una operación de interés simple?

2. Describe el procedimiento realizado en la resolución del problema.

3. ¿Se parece a la situación inicial? ¿Por qué?

Situación B

Un *Smart TV* también se usa para Internet y Pedro decidió comprarse uno de 42 pulgadas a crédito, con una cuota inicial de S/699, con un saldo restante financiado en 12 mensualidades de S/196,67 cada una. ¿Cuál es la tasa de interés compuesto que se aplica al préstamo solicitado? ¿Cuánto le costó realmente el *Smart TV* en cuotas?

Resolución

Datos:

- Precio al *cash*: S/2699
- Cuota inicial: S/699
- Tiempo: 12 meses
- Saldo a prestar: S/2000
- Cuota mensual: S/196,67
- Monto del préstamo: 12 × 196,67 = S/2360,04.
- Aplicamos la fórmula del monto:

$$M = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{t}$$

$$2360{,}04 = 2000\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{t}$$

$$r = 18\ \%$$

Respuesta:

La tasa de interés compuesto es 18 %. El costo total fue de 2360,04 + 699 = S/3059

1. ¿En qué se parece y en qué se diferencia del procedimiento utilizado en el problema anterior?

2. ¿Cómo verificaríamos si la respuesta es la correcta?

Situación C

Para la gratificación por Fiestas Patrias de sus trabajadores, la carpintería "Maestro" ha decidido depositar S/3600 durante 6 meses al 12 % de interés compuesto anual. ¿A cuánto asciende la gratificación de cada uno de sus 4 trabajadores?

Resolución

(Encuentra el error)

- Es una operación de interés compuesto, donde:

  C = S/3600

  $t = 6$ meses

  $r = 12\ \%$ anual $\equiv 1\ \%$ mensual $= 0{,}01$

  $M = ?$

  $n = 4$ trabajadores

- Cálculo del monto que se obtendrá:

  $M = C\,(1 + r)^t$

  $M = 3600\,(1 + 0{,}01)^6$

  $M = 3821{,}47$

- A cada trabajador le corresponde:

  $\frac{3821{,}47}{4} = 955{,}37$

Respuesta:

La gratificación de cada trabajador asciende a S/955,37.

1. ¿Qué tipo de capitalización se da en este problema? ¿Cómo te das cuenta?

2. ¿Qué capitalización se ha utilizado en la resolución planteada? ¿Es correcta?

3. Verifica que el procedimiento y la respuestas sean corrrectos. Si no lo son, realiza la corrección.

Practicamos

Miguel ha recibido una bonificación de S/8000 por sus 10 años de trabajo en una empresa. Decide ahorrar el dinero recibido en un banco durante un año. Tiene tres opciones: el Banco del Sur, a una tasa del 15 % convertible semestralmente; el Banco del Norte, a una tasa del 14 % convertible mensualmente, y el Banco del Centro, a una tasa de interés compuesto del 15,08 %. Sabe que para decidir lo puede hacer con la fórmula de interés compuesto o la de la tasa anual equivalente.

$$\text{TAE} = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{r}{k \cdot 100} \right)^{k \cdot t} - 1 \right]$$

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. El banco que proporciona el mayor monto es:

a) El Banco del Centro

b) El Banco del Sur

c) El Banco del Norte

d) No se puede determinar

2. El banco que ofrece la mejor TAE es:

a) El Banco del Sur

b) El Banco del Norte

c) El Banco del Centro

d) Cualquiera de los bancos

3. Una pareja de esposos solicita a un banco un crédito vehicular por un monto de S/43 000 para comprar una miniván de 15 asientos y realizar movilidad escolar. Esta entidad le cobra una tasa de interés del 18 % anual por un periodo de 3 años. ¿Cuánto pagará de interés al finalizar el préstamo?

a) S/7740

b) S/27 650,38

c) S/23 220,00

d) S/66 220,10

4. En tercero de secundaria, los padres de familia están realizando actividades para el viaje y la fiesta de promoción. Hasta hoy han logrado reunir S/12 000, los cuales han decidido depositar a un plazo fijo de 2 años. Para ello, tienen dos opciones:

La caja municipal, que ofrece el 10 % trimestral de interés simple.

Un banco, el cual asegura el 36 % de interés compuesto anual, con capitalización semestral.

¿Cuál será la mejor opción? Justifica tu respuesta teniendo en cuenta la variación porcentual.

5. La empresa “Multimax”, a fin de renovar sus maquinarias, requiere de S/60 000 para finales del segundo año. ¿Cuál es el capital inicial que se debe depositar hoy para obtener ese monto si se sabe que la tasa a pagar por el depósito es del 8 % anual capitalizable semestralmente?

a) S/51 288,23 **b)** S/51 440,32 **c)** S/55 473,37 **d)** S/57 692,31

6. Daniela se dedica a la producción y venta de joyas en oro y plata. En un tiempo determinado, invirtió S/150 000 y en 4 años ha reunido S/230 000. ¿Cuál es la tasa de interés compuesto anual que se le aplicó al dinero que invirtió?

a) 12 % **b)** 11,28 % **c)** 10,55 % **d)** 53,33 %

7. Gilda acude a un prestamista con el fin de solicitar S/5000 para los gastos escolares de sus tres hijos. El préstamo lo debe cancelar dentro de tres meses, con un interés simple mensual del 20 %. Si firma un contrato en el cual una de sus cláusulas establece que, en caso de mora, le cobrarán el 1 % de interés simple diario sobre la cantidad que debía devolver, por el tiempo que exceda al plazo fijado, y Gilda paga el total del préstamo 5 días después de los tres meses, ¿cuál será el monto de la mora y cuánto pagará?

8. El maestro Hugo plantea a su estudiante Fernando la siguiente situación: Si se coloca un capital al 3,5 % mensual por un tiempo, genera un monto de S/2000, pero si se lo coloca al 18,5 % mensual por el mismo tiempo, produce S/6000. ¿Cuál es el tiempo al que se debe colocar el capital y a cuánto asciende este?

a) 25 meses; S/1066,67

b) 2,5 meses; S/1839,08

c) 2 años; S/1869,16

d) 16 meses; S/1989,46

9. Ricardo recibe una bonificación en la empresa en que labora y la deposita en una entidad financiera, en donde, por equivocación, le consideran una tasa de interés trimestral en lugar de mensual. Por este motivo, en un año deja de percibir S/240. ¿Cuánto recibiría Ricardo al cabo de tres años si la tasa de interés fuera la correcta?

a) S/3000 **b)** S/360 **c)** S/1080 **d)** S/540

10. Gerson reflexiona sobre la importancia del ahorro y decide abrir una cuenta con S/3500. Para ello, se le presentan tres opciones: Caxabank (3,08 % de tasa anual, capitalizable mensualmente); Bankia (3,09 % de rendimiento anual) y Kbank (3,05 %, capitalizable diariamente). ¿Cuál es la mejor opción? Justifica tu respuesta.

Ficha 7 La ruta del café

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Lee mapas a diferente escala e integra la información que contienen para ubicar lugares, profundidades, alturas o determinar rutas óptimas.
	Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Describe la ubicación o los movimientos de un objeto real o imaginario, y los representa utilizando mapas y planos a escala.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para determinar la longitud y áreas irregulares expresadas en planos o mapas, empleando coordenadas cartesianas y unidades convencionales (centímetros, metros y kilómetros).

Aprendemos

En el Perú, el café es el principal producto de exportación agrícola junto con los espárragos y las uvas. Representa cerca de la mitad de las exportaciones agropecuarias y alrededor del 5 % del total de las exportaciones peruanas.

El Perú es el tercer productor sudamericano de café, detrás de Brasil (primero en el mundo con 45,3 millones de sacos en el 2015) y Colombia.

La selva central es la mayor productora de café en nuestro país. La región Junín marca la diferencia, en donde las ciudades de Chanchamayo y Satipo destacan con los mejores cultivos del área. También se consideran Oxapampa y Villa Rica, en Pasco. La ruta del café es un nuevo circuito y una gran oportunidad para divulgar, mostrar y conocer algunas de las plantaciones del café orgánico más reconocido de Latinoamérica. En la tabla se muestran las distancias recorridas.

La Merced - Villa Rica	56 km
Villa Rica - Oxapampa	65 km
La Merced - Chanchamayo	14 km
Chanchamayo - Satipo	137 km

1. Según el mapa, ¿en cuánto se diferencia el desplazamiento y la distancia real recorrida que hay en la ruta La Merced-Villa Rica-Oxapampa? ¿A qué se debe?
2. Si un poblador de Mesapata sabe que la distancia real a La Merced es 48 km y en un mapa mide 3 cm, ¿a qué escala estuvo diseñado ese mapa?

Comprendemos el problema

1. ¿Qué datos te proporciona el mapa?

2. La tabla de la situación inicial, ¿qué datos te presenta?

3. ¿Qué entiendes por desplazamiento?

4. ¿Qué te solicita el problema?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia usarías para resolver la primera pregunta de la situación inicial?

2. Para la segunda pregunta de la situación inicial, ¿qué estrategia utilizarías?

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Realiza los cálculos de los desplazamientos y de las distancias recorridas.

2. Responde la primera pregunta de la situación inicial.

3. Haz los cálculos para responder la segunda pregunta de la situación inicial.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. Describe la estrategia que utilizaste para resolver el problema.

2. ¿En qué otros casos podrías utilizar la misma estrategia?

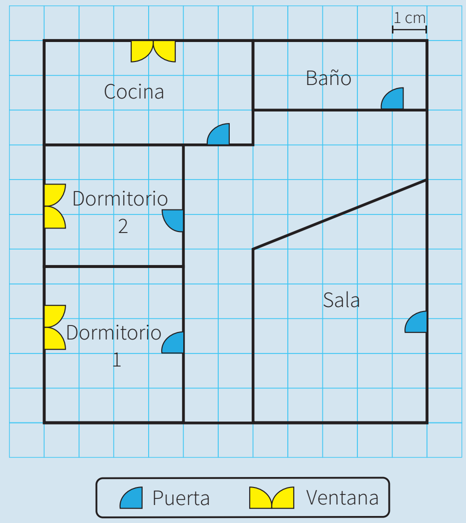
Analizamos

Situación A

Rocío necesita realizar algunos acabados en su casa. El vendedor le pide las dimensiones de esta para saber la cantidad de materiales que va a utilizar. Ella entrega el diseño de su casa, como se muestra en la figura, en la que se asigna a cada cuadradito la medida de 1,5 m.

a) ¿Cuántas cenefas decorativas de 2 × 0,20 metros serán necesarias comprar para colocarlas en la parte superior de los dormitorios?

b) ¿Cuántos cerámicos de 45 × 45 cm se usarán para enchapar el piso de la sala?



Resolución

a) Calculamos el perímetro de los dormitorios.

	Perímetro en el plano	Perímetro real
Dormitorio 1	4 + 4,5 + 4 + 4,5 = 17 cm	17 × 1,5 = 25,5 m
Dormitorio 2	4 + 3,5 + 4 + 3,5 = 15 cm	15 × 1,5 = 22,5 m

Para determinar la cantidad de cenefas:

$$\frac{(\text{Perímetro dormitorio 1} + \text{Perímetro dormitorio 2})}{2}$$

$$\frac{25{,}5 + 22{,}5}{2} = 24$$

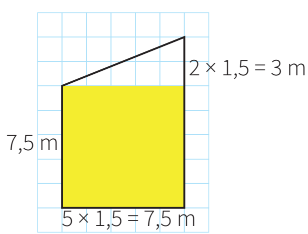
Respuesta: Se necesitarán 24 cenefas.

b) Calculamos la cantidad de cerámicos que se requiere para la superficie del cuadrado y del triángulo.

En el triángulo, determinamos la cantidad de cerámicos para el largo y ancho:

7,5 / 0,45 = 16,6667 ≈ 17 cerámicos

3 / 0,45 = 6,667 ≈ 7 cerámicos



Área del triángulo: (17 × 7) / 2 = 59,5 ≈ 60 cerámicos

En el cuadrado, determinamos la cantidad de cerámicos para cada lado: 7,5 / 0,45 = 16,67 ≈ 17

Área del cuadrado: 56,25 m^2

Se necesitan 289 cerámicos, aproximadamente.

Respuesta: Se necesitan 60 + 289 = 349 cerámicos.

1. ¿Qué se ha utilizado como escala?

2. ¿En qué se parece a la situación inicial?

3. ¿Por qué no bastaría con hallar el área del trapecio y dividirla por el área de un cerámico?

Situación B

La aerolínea Air Peruvian inaugura tres nuevos vuelos en línea recta entre las ciudades del Perú. Con la información del mapa, completa la tabla. Calcula la distancia real aproximada que recorre un avión (ida y vuelta) si en un día realizó 2 vuelos al Cusco, 1 a Tarapoto y 3 a Piura. (La escala usa un segmento de 200).

	Distancias reales aproximadas (km)
Lima - Tarapoto	
Lima - Cusco	
Lima - Piura	

Resolución

Completamos la tabla:

Los viajes son de ida y vuelta, por lo que las distancias que se consideran son: a Cusco, 4; a Tarapoto, 2; a Piura, 6.

En un día recorre 4(546,67) + 2(600) + 6(800) = 8186,68 km

	Distancias reales aproximadas (km)
Lima - Tarapoto	$\frac{4,5\ (200)}{1,5} = 600$ km
Lima - Cusco	$\frac{4,1\ (200)}{1,5} = 543,67$ km
Lima - Piura	$\frac{6\ (200)}{1,5} = 800$ km

1. Usando la escala gráfica, si se agranda la imagen, ¿variarán las distancias? ¿Por qué?

Situación C

La oficina técnica se encarga de analizar, revisar y aprobar la información técnica de los proyectos. Actualmente, está realizando el estudio de una obra de 72 metros de longitud, trabajada con un plano a escala 1:2000. Se saca una fotocopia en una máquina y la representación de la misma obra mide 4 milímetros menos que en el original. ¿Cuál es la nueva escala del plano en la fotocopia?

Resolución

(Encuentra el error)

Todas las medidas las expresamos en una misma unidad: 72 m ≡ 7200 cm y 4 mm ≡ 0,4 cm

- Calculamos la longitud de la obra:

En el plano	En la fotocopia
$\frac{7200}{2000} = 3{,}6$ cm	$3{,}6 - 0{,}4 = 3{,}2$ cm

- Calculamos la nueva escala:

$$\text{Escala} = \frac{\text{Distancia en el mapa}}{\text{Distancia en la realidad}} = \frac{3{,}2}{72} = \frac{32}{720}$$

Respuesta: La nueva escala es 1:22,5

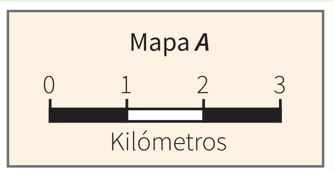
1. Verifica los valores con la nueva escala. Si son correctos, busca otra forma de resolver el problema. En caso contrario, haz las correcciones necesarias.

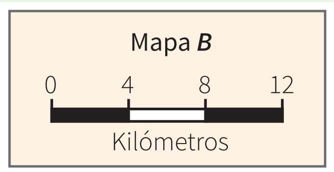
Practicamos

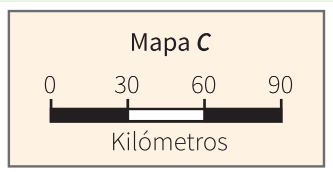
1. En un mapa, dos poblados aparecen separados 12,8 cm. ¿Cuál será la escala de ese mapa si la distancia real entre ambas poblaciones es de 80 km?

a) 4:25 **b)** 2:312 500 **c)** 1:625 000 **d)** 1:5000

2. Un arquitecto realiza el estudio de unos planos de un proyecto inmobiliario. En los planos se olvidaron indicar la escala utilizada, pero en su oficina técnica trabajan con tres escalas diferentes, como se muestra a continuación:







Ayuda al arquitecto a determinar cuántos kilómetros en la realidad representan 5 cm en el plano utilizando cada una de las escalas mostradas.

a) Mapa A: 6,82 km; mapa B: 27,27 km; mapa C: 204,55 km

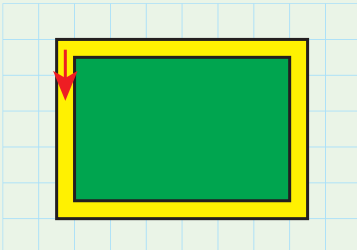
b) Mapa A: 15 km; mapa B: 60 km; mapa C: 450 km

c) Mapa A: 13,6 km; mapa B: 54,54 km; mapa C: 3681,81 km

d) Mapa A: 3,67 km; mapa B: 8,92 km; mapa C: 0,06 km

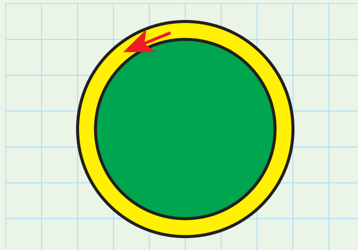
3. Marianela, Pamela y Rocío salen todos los días a correr por el perímetro del parque ubicado cerca de su casa. Pamela dice que ella corre más porque su parque es de forma rectangular. Rocío afirma lo mismo, pero debido a que su parque es circular. Marianela, la más sensata, pide que construyan un plano del parque donde van a correr. Cada una presenta los siguientes planos:

Parque Belaunde Terry



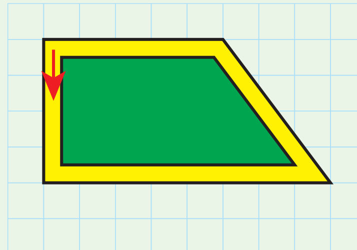
1:80
Pamela

Parque Ricardo Palma



1:90
Rocío

Parque Urubamba



1:80
Marianela

Según la información obtenida, ¿quién o quiénes de ellas recorren la mayor distancia?

a) Pamela **b)** Rocío **c)** Marianela **d)** Rocío y Pamela

4. Christian está muy entusiasmado por haber recibido su primera tarjeta inteligente del Metropolitano, la que le permitirá desplazarse desde su casa hasta su centro de estudios universitarios. Dicha tarjeta tiene forma rectangular (aunque con esquinas redondeadas) con medidas de 8,5 cm por 5,5 cm. Desea una copia ampliada en una hoja tamaño A4 (21 cm por 29,7 cm). ¿Logrará Christian su objetivo si emplea para la ampliación una escala de 7:2?

La Reserva Nacional de Pacaya Samiria y el Área de Conservación Regional Comunal Tamshiyacu Tahuayo destacan entre las áreas protegidas del Perú. Localizadas en la región Loreto, son consideradas unas de las mayores de Sudamérica, con una espectacular diversidad de flora y fauna. Actualmente tienen seis áreas de turismo: Nauta-Caño, Yanayacu-Pucate y Tibilo-Pastococha, que son las más visitadas por su cercanía a las ciudades de Iquitos (las dos primeras) y Yurimaguas (la tercera).

Con la información dada, responde las preguntas 5 y 6.

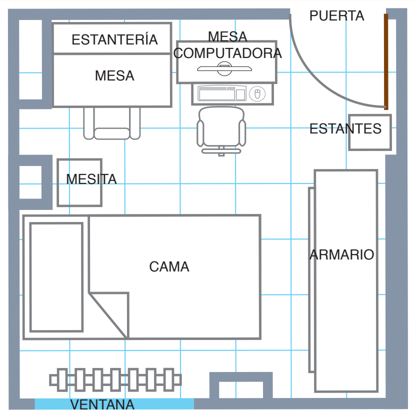
5. Según el mapa, ¿cuál es la extensión territorial aproximada de la Reserva Nacional de Pacaya Samiria si 1 cm equivale a 32 km?

a) 18 432 km^2 **b)** 20 480 km^2 **c)** 22 528 km^2 **d)** 18 000 km^2

6. ¿Cuál es la extensión territorial aproximada del Área de Conservación Regional Comunal Tamshiyacu Tahuayo?

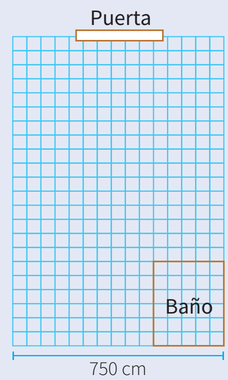
a) 3072 km^2 **b)** 1024 km^2 **c)** 2048 km^2 **d)** 6144 km^2

7. Juan ha diseñado un plano de su habitación con escala 1:60, incluyendo algunos muebles. A partir del plano mostrado, completa la tabla.



Muebles	Medida aprox. en el plano (cm)		Medida aprox. en la realidad (cm)	
	Largo	Ancho	Largo	Ancho
Cama				
Mesa de la computadora				
Armario				

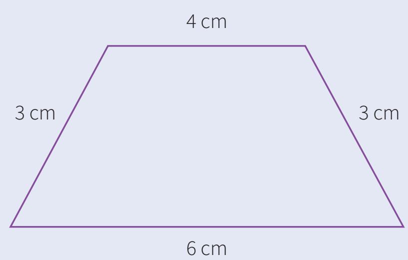
8. La señora Felícita necesita alquilar un local para abrir una panadería. Su amiga le comenta que tiene uno en la avenida principal de la ciudad y le muestra el plano del local. Felícita quiere saber el área del local para dividirlo en dos ambientes, en relación de 5 a 4. Los ambientes estarán destinados uno para la atención al público y otro para la elaboración de los panes; ¿cuál es el área real destinada para el público?



a) 67,60 m^2 **c)** 37,5 m^2

b) 337,5 m^2 **d)** 54 m^2

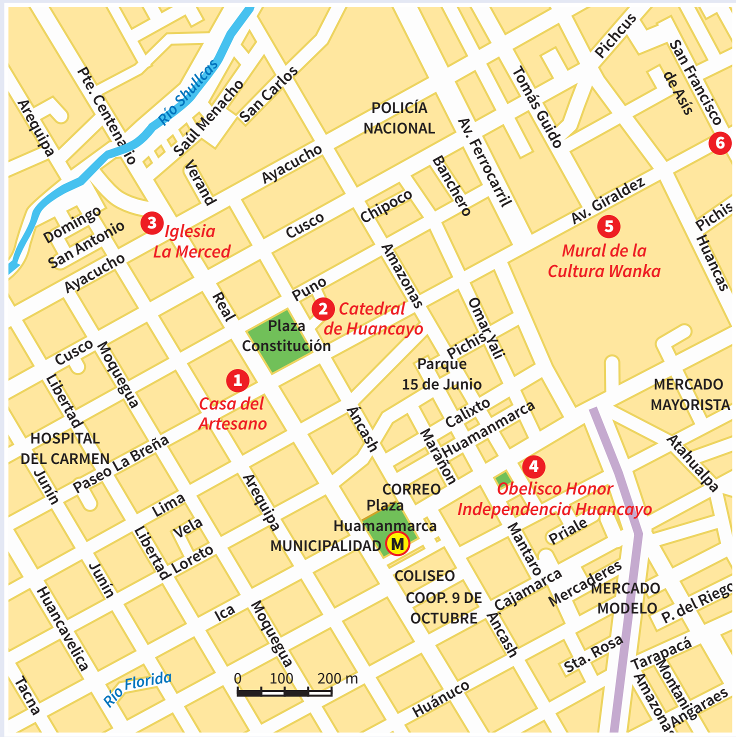
9. Un hombre compra una finca y quiere conocer la superficie de ella. Acude al catastro y pide el plano donde se encuentra la finca, y le facilitan una fotocopia con una reducción (lineal) al 80 %. La escala numérica que aparece en el plano es de 1/5000. Las medidas de la finca en la copia son como se muestra en el gráfico. ¿Cuál es el perímetro aproximado de la finca?



a) 100 m **b)** 20 km **c)** 8 km **d)** 1 km

10. Observa el plano de la ciudad de Huancayo. Es una localidad con muchos atractivos turísticos situada en el centro del país.

Considerando que la distancia entre dos lugares turísticos se medirá tomando como referencia los centros de los círculos correspondientes, ¿cuál será la mínima distancia que puede recorrer un turista si va de la iglesia La Merced al Obelisco Honor Independiente de Huancayo? Describe la trayectoria en el plano.



Ficha 8

La rampa y las razones trigonométricas

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Lee textos o gráficos que describen las propiedades de semejanza y congruencia entre formas geométricas, razones trigonométricas y ángulos de elevación o depresión.
	Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Describe la ubicación o los movimientos de un objeto real o imaginario, y los representa utilizando razones trigonométricas en mapas y planos a escala.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos y procedimientos más convenientes para determinar la longitud de cuerpos compuestos y distancias inaccesibles empleando razones trigonométricas.

Aprendemos

Una rampa nos permite vincular dos lugares que se encuentran a diferente altura. Ofrece un camino descendente o ascendente para trasladarse de un espacio a otro a través de su superficie.

Hoy en día, todos los centros públicos deben contar con acceso para el desplazamiento de las personas con discapacidad y de los adultos mayores. En este sentido, la construcción de rampas es obligatoria, siguiendo las especificaciones que indican que su ángulo de inclinación debe tener un rango de 10° a 15° respecto a la horizontal.

Actualmente, en el hospital Nueva Esperanza están construyendo una rampa lineal, cuya altura será de 1,5 m al final de ella.

1. ¿Cómo se representa matemáticamente la longitud de la superficie de la rampa en función del ángulo especificado?

2. Completa la tabla.

Ángulo	5°	10°	15°	30°	45°	60°
Longitud de la superficie de la rampa						

3. Con respecto a la información registrada en la tabla, ¿qué ocurre con la longitud de la superficie de la rampa cuando la medida del ángulo de inclinación va aumentando?

4. Representa gráficamente cómo va variando la longitud de la superficie de la rampa.

Comprendemos el problema

1. ¿Qué polígono es de importancia en la situación planteada? ¿Qué elementos de este polígono se relacionan?

2. ¿Cuáles son los datos?

3. ¿Cómo se relacionan los elementos de la rampa con el polígono ya citado en la pregunta 1 de *Comprendemos el problema*?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia te conviene elegir? ¿Por qué?

   a) Diagrama de flujo **b)** Plantear una ecuación **c)** Un dibujo

2. ¿Qué conocimiento trigonométrico te facilitará la resolución de la situación dada?

Z_MATe5V_PArt1_13-129.indd 96 28/09/17 17:27

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Comienza aplicando la estrategia elegida, utilizando los datos identificados.

2. Continúa dando respuesta a la pregunta 1 de la situación inicial.

3. Completa la tabla.

Ángulo	5°	10°	15°	30°	45°	60°
Longitud de la superficie de la rampa						

4. Analiza la tabla anterior y responde la pregunta 3 de la situación inicial.

5. Representa gráficamente la variación de la longitud de la rampa.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿La estrategia que has aplicado se puede utilizar en otras situaciones? Plantea una como ejemplo.

2. ¿Qué habría pasado si hubieras utilizado la segunda forma de representar la longitud de la rampa? ¿Habría habido alguna dificultad?

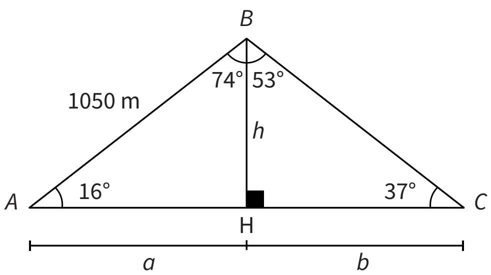
Analizamos

Situación A

Una empresa construyó un túnel que atraviesa un cerro y conecta dos distritos limeños, tal como se observa en el gráfico. Teniendo como información las medidas realizadas por los ingenieros, ayuda a determinar la longitud del túnel.

Resolución

- Se construye el gráfico que representa la situación problemática y se ubican los datos.
- Trazamos la altura *BH* para formar triángulos rectángulos. En el ◣ *AHB*, calcula *a*:



$\text{Cos } 16° = \frac{a}{1050}; \frac{24}{25} = \frac{a}{1050}; \ a = 1008 \text{ m}$

- En el ◣ *AHB*, calcula la altura (*h*): $\text{Sen } 16° = \frac{h}{1050}$

$\frac{7}{25} = \frac{h}{1050}$; $25h = 7350$; $h = 294$

- En el ◣ *BHC*, calcula "*b*": $\text{Tan } 37° = \frac{h}{b}$

$\frac{3}{4} = \frac{294}{b}$; $3b = 1176$; $b = 392$

Respuesta: La longitud del túnel es ($a + b$):

$1008 + 392 = 1400$ m.

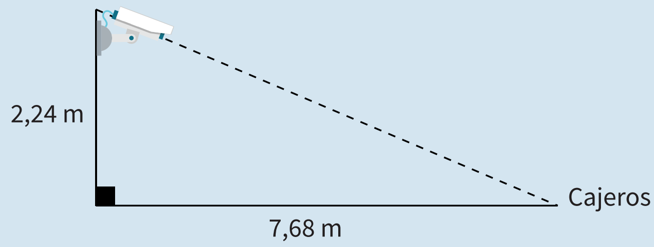
1. Describe la estrategia utilizada.

2. ¿Qué ventajas presenta hacer el dibujo?

3. ¿Qué condiciones habría que considerar para resolver el problema gráficamente?

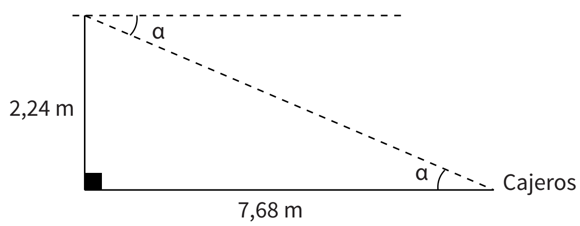
Situación B

Por la seguridad de su personal y los clientes, en una agencia bancaria se instalará una cámara de video en un soporte de pared de modo que brinde una buena vista de sus cajeros y usuarios. ¿Cuál es el ángulo de depresión que debe formar la lente con la horizontal?



Resolución

- Ubicamos los datos en el gráfico.



- Determinamos la razón trigonométrica que relaciona los lados del triángulo con el ángulo de depresión:

  $\text{Tan } \alpha = \dfrac{CO}{CA} \rightarrow \text{Tan } \alpha = \dfrac{2{,}24}{7{,}68} = \dfrac{7}{24}$

- Entonces, se deduce que la medida del ángulo es 16°, teniendo en cuenta el triángulo rectángulo aproximado de 16° y 74°.

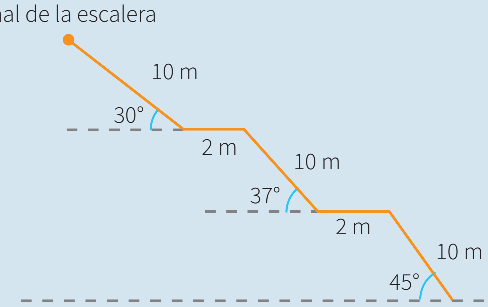
Respuesta: El ángulo de depresión que debe formar la lente con la horizontal es de 16°.

1. ¿Por qué se escriben dos ángulos alfa?

2. ¿Podrías resolver el problema de otro modo? ¿Cómo?

Situación C

Ante el crecimiento demográfico en la ciudad de Lima, los cerros están siendo utilizados por los pobladores como un lugar destinado para la construcción de sus casas, exponiéndose así a muchos peligros. Debido a ello, la Municipalidad ha construido escaleras en diferentes asentamientos humanos ubicados en los cerros, para que así las personas que viven en esos lugares puedan acceder a sus casas con menos dificultad. Una de aquellas tiene la forma y las dimensiones de la figura. ¿A qué altura se encuentra el final de la escalera?



Resolución

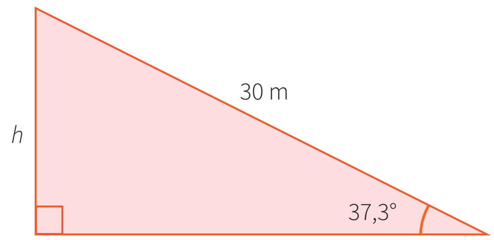
(Encuentra el error)

Como vemos que va subiendo de 10 m en 10 m inclinado, entonces habrá subido: 10 + 10 + 10 = 30 m.

Se considerará un ángulo promedio: $\frac{30° + 37° + 45°}{37{,}3°}$

Luego, podemos tener el triángulo: $\frac{h}{30} = \text{Tan } 37{,}3°$

$h = 30 \text{ Tan } 37{,}3° = 22{,}85$ m



Respuesta: El final de la escalera se encuentra a 22,85 m de altura.

1. Verifica con otro procedimiento o corrige según sea el caso.

Practicamos

Las escaleras mecánicas se usan para transportar con comodidad y rápidamente un gran número de personas entre los pisos de un edificio, especialmente en centros comerciales, aeropuertos, transporte público, etc.

Para la construcción de un nuevo centro comercial de dos niveles, de 6 m de altura cada uno, se están acondicionando dos escaleras mecánicas (subida y bajada). El ingeniero encargado de la obra sugiere que deben tener una pendiente $m = 1/\sqrt{3}$ como máximo.

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. ¿Cuál será la longitud de la escalera eléctrica?

a) $46\sqrt{3}$ m

b) 8 m

c) 10 m

d) 12 m

2. Si la altura de cada peldaño es de 300 mm, ¿cuántos peldaños tiene la escalera?

a) 25

b) 24

c) 20

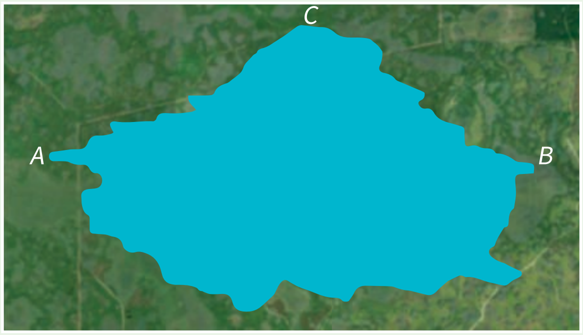
d) 18

Z_MATe5V_PArt1_13-129.indd 101 28/09/17 17:27

3. La Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio, más conocida como NASA (National Aeronautics and Space Administration), que es la agencia del gobierno estadounidense responsable del programa espacial civil, así como de la investigación aeronáutica y aeroespacial, está a punto de lanzar un cohete para poner en órbita un satélite. ¿Cuál será la inclinación para iniciar su despegue? Observa la figura.

a) 31° **b)** 37° **c)** 53° **d)** 58°

4. Para aproximar el ancho de un pantano, los topógrafos Raúl y David se ubican en el punto *B*. Desde allí, ambos caminan 130 metros al punto *C*. Raúl gira 53° y camina 200 metros al punto *A*. David continúa caminando en línea recta, ubicándose perpendicularmente a Raúl, quien se encuentra en el punto *C*. Utilizando esta estrategia, los topógrafos podrían determinar, aproximadamente, el ancho del pantano entre los puntos *A* y *B*. Realiza tu procedimiento.



De acuerdo con las estadísticas, los accidentes por atropello son los segundos más frecuentes, y entre las causas figura el cruce indebido por parte del peatón.

Una de las soluciones frecuentemente planteadas para mejorar la seguridad de los peatones es la colocación de puentes peatonales, especialmente en las vías de tránsito rápido. Por ello, se construyó un puente de 56 m de altura, para lo cual se han acondicionado. rampas cuyas inclinaciones son α y β ($\alpha < \beta$) si se sabe que Sen $\alpha = 0{,}28$ y Sen $\beta = 0{,}5$.

Con la información dada, responde las preguntas 5 y 6.

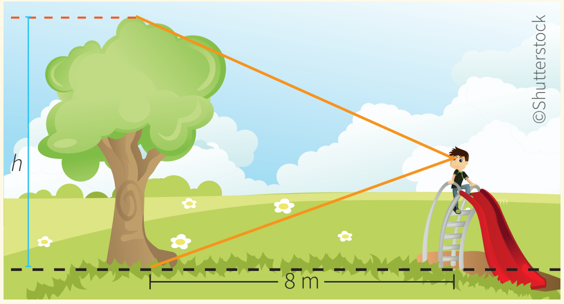
5. ¿Cuáles son los ángulos de inclinación de las rampas mostradas en la imagen?

a) 60° y 74° **b)** 16° y 30° **c)** 30° y 30° **d)** 74° y 30°

6. ¿Cuál es la longitud total de las rampas dadas?

a) 156 m **b)** 152 m **c)** 128 m **d)** 140,40 m

7. Jairo acude con su familia al centro de esparcimiento de Chosica. Él se sube a un tobogán y desde allí observa un árbol. Para ver la base de este, necesita bajar la vista 37° respecto a la horizontal, y para observar la punta de la copa del árbol, debe levantar su mirada 45° respecto a la horizontal. El tobogán está ubicado a 8 m del árbol. Con esta información, será posible calcular la altura del árbol. Realiza tu procedimiento.



8. Una empresa dedicada a la publicidad ha iniciado una campaña para la introducción de una marca de refresco. Para ello, emprende un viaje de promoción en una avioneta entre las playas más concurridas de Lima.

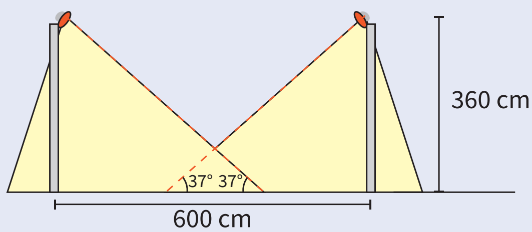
Dos salvavidas, Carla y Miguel, están ubicados en una misma línea recta y la misma dirección, separados por 153 m de distancia. En un determinado momento, ambos ven la avioneta, que sobrevuela a una altura constante, con ángulos de elevación de 82° y 53°, respectivamente. Diez segundos más tarde, Carla la observa con un ángulo de elevación de 106°.

¿A qué altura, aproximadamente, vuela la avioneta?

a) 36 m **b)** 144 m **c)** 252 m **d)** 288 m

9. Un poste es uno de los elementos que se utilizan para la construcción de tendidos eléctricos que se utilizan para iluminar calles, plazas, etc.

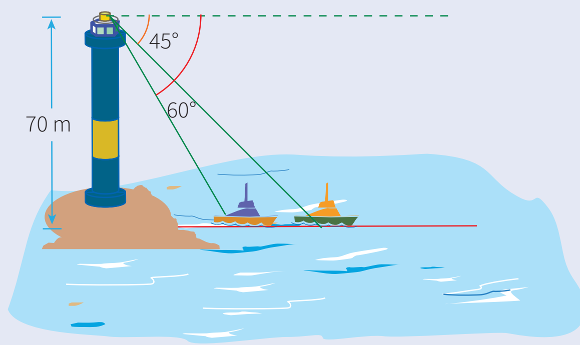
Se observa que dos postes de luz de 360 cm de altura, ubicados a una distancia de 600 cm, iluminan una calle, como lo muestra la figura. Determina la longitud del segmento que queda iluminado por los dos postes.



a) 1,2 m **b)** 2,4 m **c)** 3,6 m **d)** 4,8 m

10. Un faro es una torre de señalización luminosa situada cerca de la costa. Se ubica en los lugares donde transcurren las rutas de navegación de los barcos. Dispone en su parte superior de una lámpara potente, cuya luz se utiliza como guía.

Juan es el encargado del faro Salaverry, en Barranca, el cual tiene una altura de 70 m. Desde el balcón observa dos barcos situados al oeste del faro con ángulos de depresión de 60° y 45°. Según la información dada, Juan puede hallar la distancia que separa los barcos.



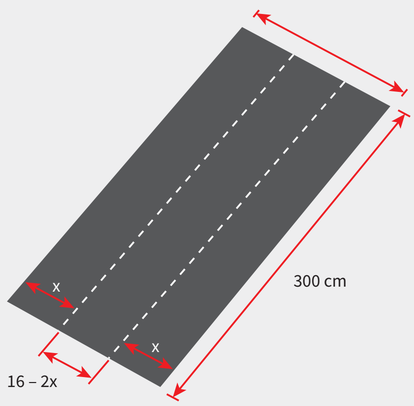
Ficha 9

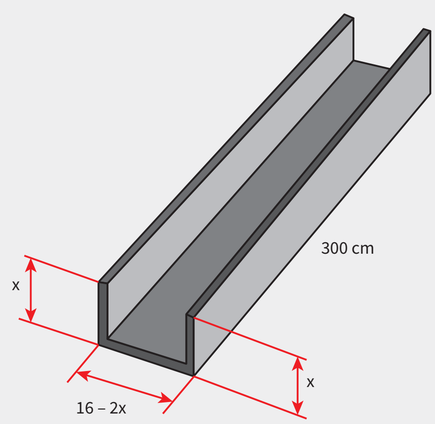
Maximizamos o minimizamos situaciones

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencia o de variación entre magnitudes, y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen funciones cuadráticas con coeficientes racionales.
	Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.	Expresa con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre las intersecciones con los ejes de una función cuadrática.
	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos, procedimientos y propiedades algebraicas para determinar términos desconocidos y solucionar funciones cuadráticas usando propiedades de las igualdades.

Aprendemos

El señor Férnandez quiere construir canaletas y colocarlas en el techo de su casa por las inminentes lluvias que el Senamhi (Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología del Perú) ha pronosticado por la corriente de El Niño. Para ello, cuenta con planchas de zincalum (material de acero plano con recubrimiento de zinc que lo hace resistente a la acción corrosiva del medioambiente) de 300 cm de largo por 16 cm de ancho. Para concretar su proyecto, basta con doblar hacia arriba algunos centímetros a cada lado, como se muestra en la figura.





1. ¿De cuántas medidas se puede doblar hacia arriba la plancha para obtener la canaleta del diseño que muestra la figura?
2. ¿Cuál es la función que modela dicha situación para averiguar la capacidad que va a tener la canaleta elaborada?
3. ¿Qué tipo de función es y cómo es su gráfica?
4. ¿Cuántos centímetros deben doblarse para que la canaleta tenga la mayor capacidad?

Comprendemos el problema

1. ¿Qué datos te da el problema? ¿Cuál es la variable y cómo está representada?

2. ¿Qué debes averiguar?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Es importante la forma geométrica que tomaría cuando se doblen los extremos de la canaleta? ¿Cómo es posible relacionar las dimensiones de la plancha con la variable?

2. ¿Cuál sería el plan de resolución? Indica en qué te apoyarías en cada paso.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Calcula los valores posibles de la variable que respondan la pregunta 1 de la situación inicial.

2. Considerando el tipo de figura geométrica de la canaleta, determina la función referida que la modela.

3. En la pregunta anterior, planteaste la expresión algebraica que representa a la función; ¿qué características tiene?, ¿por qué?

4. Para dar solución a la pregunta 4 de la situación inicial, ¿qué implica, con respecto a la función hallada, que la canaleta tenga la capacidad máxima?

5. Según tu anterior respuesta, haz el cálculo de la capacidad máxima de la canaleta.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Cuál sería el procedimiento para determinar el valor máximo de una función del tipo visto en esta sesión?

2. ¿Puedes hallar el máximo valor de esta función de otra forma? Hazlo y verifica con lo que ya habías obtenido.

Analizamos

Situación A

Un experto en anfibios realizó observaciones del salto de una rana y las registró en una tabla. De esta manera, luego de analizar los resultados, se dio cuenta de que se trataba de una modelación matemática referida a una función cuadrática. La siguiente tabla muestra la altura de la rana en cinco instantes distintos.

t (s)	0	0,5	1	1,5	2
h (m)	0	0,75	1	0,75	0

a) Escribe una función cuadrática para modelar la situación que planteó el experto en anfibios.

b) ¿Cómo determinas algebraicamente la mayor altura que alcanza la rana y en qué tiempo lo hace?

c) ¿Cuánto demora la rana en volver a tocar el suelo? ¿De qué modo algebraico lo podrías determinar?

Resolución

a) Como se trata de una función cuadrática, es de la forma $h = h(t) = at^2 + bt + c$, en donde h es la altura y t el tiempo. Con los datos de la tabla:

$0 = a(0)^2 + b(0) + c$, entonces $c = 0$

Similarmente: $1 = a(1)^2 + b(1) + c$, queda $1 = a + b$.

$0 = a(2)^2 + b(2) + c$, queda $0 = 4a + 2b = 2\,a + b$

Resolviendo: $b = 2$ y $a = -1$

La función es: $h\,(t) = -\,t^2 + 2t$

b) Como $a < 0$, entonces la parábola se abre hacia abajo y tiene un máximo valor en el vértice. Hallamos su vértice, donde $b = 2$ y $a = -1$:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1$$

Reemplazamos $h = 1$ en la función para hallar t.

$1 = -t^2 + 2t \longrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$. Resolviendo tenemos que $t = 1$

c) Para encontrar el tiempo que demora en volver a tocar el suelo, se considera que el punto de partida es cero.

$0 = -t^2 + 2t \longrightarrow 0 = t(-t + 2)$. Resolviendo:

$t = 0$; $t = 2$. Tomamos el valor 2 porque el cero corresponde al punto de inicio de la rana antes de saltar.

1. Describe el procedimiento para determinar la expresión algebraica de una función cuadrática.

2. ¿Qué estrategias se han utilizado en las tres situaciones planteadas?

Situación B

El contador de una empresa de comida rápida, especializada sobre todo en la venta de pizzas, ha planteado que los beneficios anuales para la empresa dependen del número de repartidores con los que cuenta, y que estos beneficios se determinan según un modelo matemático de la forma $B(x) = -27x^2 + 1890x + 9831$, donde $B(x)$ es el beneficio en soles anuales para x repartidores.

a) ¿Cuántos repartidores ha de tener la empresa para que sus beneficios anuales sean máximos?

b) ¿Cuál será el valor de dichos beneficios máximos?

Resolución

Observamos la función cuadrática y vemos que $a < 0$; entonces, la parábola se abre hacia abajo, y tendrá un valor máximo. Bastará con hallar las coordenadas del vértice.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1890}{2(-27)} = \frac{1890}{54} = 35$$

Luego, reemplazando $x = 35$ en la función:

$$y = B(35) = -27(35)^2 + 1890(35) + 9831$$

$$y = -33\,075 + 66\,150 + 9831 = 42\,906$$

Respuestas:

a) Ha de tener 35 repartidores.

b) El máximo beneficio será de S/42 906 anuales.

1. ¿Por qué es importante saber que a es mayor o menor que cero?

2. ¿Qué significan las coordenadas del vértice de la parábola?

Situación C

Para motivar a Pablo, que gusta del fútbol, su maestro le plantea el siguiente problema: Un jugador se encuentra a 8 m del arco. El arquero, que es capaz de saltar hasta los 2,5 m de altura, está a 4 m del arco. Para realizar el lanzamiento, el jugador puede escoger entre dos trayectorias:

I. $y = 0{,}4x - 0{,}05x^2$

II. $y = 1{,}6x - 0{,}2x^2$.

¿Cuál de los dos modelos presentados será el más adecuado para meter gol? ¿Por qué?

Resolución

(Encuentra el error)

Ambas funciones tienen como gráfica una parábola que se abre hacia abajo. Entonces, hallando las coordenadas de los vértices, determinaremos la altura máxima que alcanza cada modelo de trayectoria.

- Para $y = 0{,}4x - 0{,}05x^2$; $a = -0{,}05$ y $b = 0{,}4$ la fórmula que aplicaremos es:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0{,}4}{2(-0{,}05)} = 4$$

- Para $y = 1{,}6x - 0{,}2x^2$; $a = -0{,}2$ y $b = 1{,}6$ la fórmula que aplicaremos es:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1{,}6}{2(-0{,}2)} = \frac{1{,}6}{0{,}4} = 4$$

Respuesta: Da lo mismo aplicar cualquiera porque se obtiene el mismo resultado.

1. ¿Qué significan la abscisa y la ordenada del vértice?

2. Si tu procedimiento es correcto, busca otra forma de solución. Si no lo es, corrígelo.

Practicamos

1. Escribe verdadero (V) o falso (F) en el paréntesis, según corresponda, en las siguientes proposiciones.

I. La gráfica de una función cuadrática es una parábola que se abre hacia arriba si el coeficiente del término cuadrático es mayor que cero, y se abre hacia abajo si es menor que cero. ( )

II. La función cuadrática está bien determinada cuando se escribe en su forma simbólica: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ( )

III. En la función cuadrática de la forma $f(x) = -x^2$, siendo $x \neq 0$, su vértice se encuentra en el origen de las coordenadas y la parábola se abre hacia abajo. ( )

a) V V V **b)** F V F **c)** V F V **d)** F F F

Un delfín realiza saltos cuya trayectoria es una parábola que está dada por la función cuadrática $f(t) = -t^2 + 6t$, siendo $0 \leq t \leq 6$, donde t es el tiempo en segundos y $f(t)$ es la altura en metros que alcanza el delfín en determinado instante.

Con la información dada, responde las preguntas 2 y 3.

2. Calcula la altura máxima que alcanza el delfín y en qué instante.

a) La altura máxima fue 3 m a los 9 s.

b) La altura máxima fue 9 m a los 3 s.

c) La altura máxima fue 27 m a los 3 s.

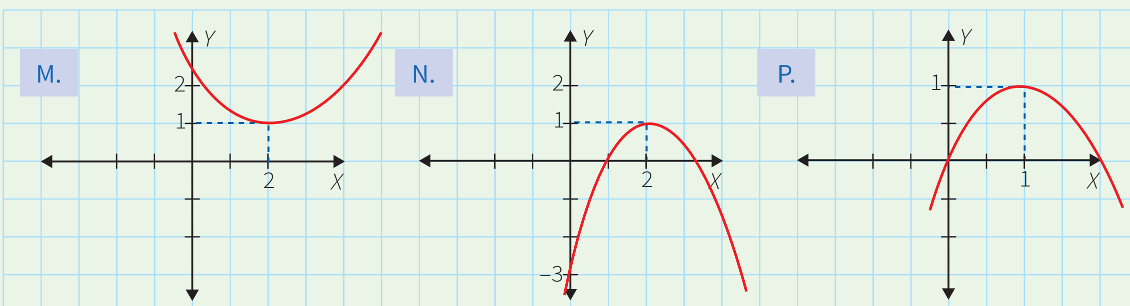
d) La altura máxima fue 12 m a los 3 s.

3. Averigua cuánto demora en caer el delfín desde que alcanza la altura máxima.

a) 6 s **b)** 9 s **c)** 3 s **d)** 12 s

4. Relaciona cada función representada simbólicamente con su respectiva gráfica, teniendo en cuenta el vértice de la parábola.

a) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ **b)** $f(x) = 2x - x^2$ **c)** $f(x) = x^2 - 4x + 2$



En un partido de fútbol del torneo descentralizado, un jugador patea un tiro libre de modo que la trayectoria de la pelota forma una parábola correspondiente a la función $y = -0{,}05x^2 + 0{,}7x$; donde y es la altura en metros de la pelota, y x, la distancia horizontal que hay desde el punto en el que fue lanzada la pelota.

Con la información dada, responde las preguntas 5 y 6.

5. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota y a cuántos metros del punto de lanzamiento?

a) La altura máxima es 2,45 m y a una distancia de 7 m del punto de lanzamiento.

b) La altura máxima es 7,35 m y a una distancia de 7 m del punto de lanzamiento.

c) La altura máxima es 4,2 m y a una distancia de 7 m del punto de lanzamiento.

d) La altura máxima es 5,6 m y a una distancia de 7 m del punto de lanzamiento.

6. Si la barrera que forman los jugadores del equipo contrario está a 9,15 m del punto en que se lanzará la pelota, y los jugadores, saltando, pueden alcanzar una altura de 2,3 m, ¿pasa el balón por encima de la barrera? ¿Por qué?

a) Sí pasa el balón por encima de la barrera a 8,3 m.

b) Sí pasa el balón por encima de la barrera a 0,08 m.

c) No pasa el balón por encima de la barrera, porque el salto de los jugadores supera en 0,08 metros la altura que alcanza la pelota.

d) No pasa el balón por encima de la barrera, porque el salto de los jugadores supera en 0,8 m la altura que alcanza la pelota.

Z_MATe5V_PArt1_13-129.indd 115 28/09/17 17:28

7. Una empresa de televisión por cable HD de un año de funcionamiento, actualmente, cuenta con 8000 clientes, a quienes les cobra 50 soles mensuales. Un funcionario de la compañía manifestó su interés por incrementar el número de usuarios, para lo cual en una reunión de directorio planteó que, si se redujera en 5 soles el cobro mensual, tendrían 1000 clientes nuevos.

Determina un modelo matemático para los ingresos mensuales de la empresa si dicho modelo es una función cuadrática sin término independiente.

8. Para economizar malla metálica, el señor García desea construir un corral rectangular utilizando uno de sus muros. Si emplea 18 metros de malla metálica para cercar el corral y desea tener el área máxima, determina un modelo matemático para calcular el área del corral. ¿Cuántos m^2 tiene el corral si se obtiene el área máxima?

a) 121,5 m^2 **b)** 40,5 m^2 **c)** 63 m^2 **d)** 99 m^2

9. Al proyectarse una imagen sobre una pantalla, su tamaño dependerá de la distancia del proyector con respecto a ella. Así, cuando el proyector está a 0,5 metros de la pantalla, la imagen proyectada de forma cuadrada tiene un área de 0,0625 m^2; cuando se encuentra a un metro, el área es de 0,25 m^2; y cuando se halla a 1,5 metros, el área es de 0,5625 m^2, y así sucesivamente. Determina un modelo matemático respecto al área de la imagen proyectada (y) en función de la distancia entre el proyector y la imagen (x), siendo este modelo una función cuadrática.

a) $y = 0,25x^2$ **b)** $y = 0,75x^2$ **c)** $y = 25x^2$ **d)** $y = 75x^2$

10. Un granjero tiene listones de madera que suman 80 metros, con los que desea levantar un cerco rectangular para sus vacas frente a su granero. Desea que el cerco que construirá tenga el área máxima. ¿Cuál es el modelo matemático para esta situación y cuáles son las dimensiones del cerco para que tenga el área máxima?

Ficha 10

Feria escolar para recaudar fondos

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre	Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.	Determina las condiciones y restricciones de una situación aleatoria, analiza la ocurrencia de sucesos simples y compuestos, y la representa con el valor de su probabilidad expresada como racional de 0 a 1.
	Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.	Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre el valor de la probabilidad de sucesos simples y compuestos de una situación aleatoria.
	Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.	Adapta y combina procedimientos para determinar la probabilidad de eventos simples o compuestos de una situación aleatoria.

Aprendemos

En una feria escolar se presentaron diversos entretenimientos, como tómbola, espectáculos musicales, juegos mecánicos, tiro al blanco, etc. La promoción propuso un juego que consistía en lanzar cinco monedas simultáneamente. El costo de este era de S/5 y se entregaba como premio un kit escolar si se lograba que en todas las monedas saliera cara o todas cayeran en sello; con cualquier otro resultado se perdía.

1. Haciendo uso de un diagrama de árbol, plantea una forma de reconocer los posibles resultados que te permitirían ganar el juego.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador gane? ¿Y de que pierda?
3. Para poder cumplir con los premios para los ganadores, se invirtieron S/35 por cada uno. Si juegan 800 personas, ¿cuánto se espera recaudar en dicha actividad?

Comprendemos el problema

1. Replantea el problema con tus propias palabras.

2. Identifica los datos y los valores que necesitarías calcular para que te ayuden a resolver el problema.

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿En qué consiste el diagrama de árbol? Ejemplifica.

2. ¿Cómo estimarías la ganancia obtenida?

3. ¿Qué pasos seguirías para resolver el problema?

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Elabora un diagrama de árbol para las cinco monedas.

2. Responde la pregunta 2 de la situación inicial.

3. Calcula la ganancia obtenida o la recaudación neta.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Cómo podrías hallar el número de casos posibles sin utilizar un diagrama de árbol? Verifica para la situación dada.

2. Propón un problema en el que puedas aplicar una estrategia semejante.

Analizamos

Situación A

En un experimento de genética, el investigador apareó dos moscas de la fruta (*Drosophila*) y observó los rasgos de cien descendientes. Los resultados se muestran en la tabla de la derecha.

Uno de estos descendientes se selecciona al azar y se observan dos rasgos genéticos.

	Tamaño de alas	
Color de ojos	**Normal**	**Miniatura**
Normal	140	6
Bermellón	3	151

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la mosca tenga color normal de ojos y tamaño normal de alas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la mosca de ojos bermellón tenga alas de tamaño normal?

c) Si comparamos las dos situaciones anteriores, ¿cuál es más probable que ocurra?

Resolución

a) Casos favorables: 140

Casos posibles: 140 + 6 + 3 + 151 = 300

$$P(A) = \frac{140}{300} = 0{,}47$$

b) Casos favorables: 3

Casos posibles: 3 + 151 = 154

$$P(A) = \frac{3}{154} = 0{,}01$$

c) $0 \leq 0{,}01 < 0{,}47 \leq 1$

Mientras más próximo esté a 1, es más probable que ocurra en la comparación de eventos.

1. Si te preguntaran cuál es el suceso más difícil que puede ocurrir, ¿qué responderías sin hacer ningún cálculo? ¿Por qué?

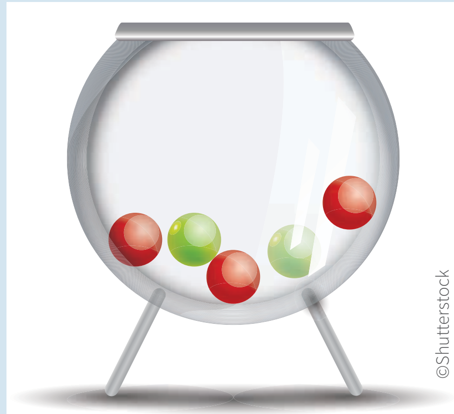
2. ¿Qué conclusión sacarías si la probabilidad hubiera sido 1? ¿Y si fuera 0?

Situación B

Un recipiente contiene tres pelotas rojas y dos verdes. Al azar se extraen dos de ellas, una tras otra.

a) ¿Qué probabilidad hay de que las dos sean verdes?

b) ¿Qué probabilidad existe de que la primera sea verde y la segunda roja?



Resolución

- Para que la primera sea verde:

  Casos posibles: 5 bolas.

  Casos favorables: 2 bolas verdes.

  Probabilidad de que la primera sea verde: $\frac{2}{5}$
- Para que la segunda sea verde:

  Casos posibles: 4 bolas.

  Casos favorables: 1 bola verde.

  Probabilidad de que la segunda sea verde: $\frac{1}{4}$

Respuesta a:

Probabilidad de que la primera y la segunda sean verdes:

$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

- De manera similar se procede en el caso de que la primera sea verde y la segunda roja:

  Probabilidad de que la primera sea verde: $\frac{2}{5}$

  Probabilidad de que la segunda sea roja: $\frac{3}{4}$

Respuesta b:

Probabilidad de que la primera sea verde y la segunda, roja: $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

1. De las dos situaciones solicitadas, ¿cuál crees que es la más probable que ocurra? ¿Por qué?

2. ¿En qué otras situaciones se puede aplicar la misma estrategia? Da ejemplos.

Situación C

En un centro poblado, el 40 % de la población tiene cabellos claros; el 25 %, ojos claros, y el 15 %, cabellos y ojos claros. Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene cabellos claros, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos claros?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos claros ni ojos claros?

Usa la tabla mostrada.

	Ojos claros	Ojos no claros	Total
Cabellos claros	15		40
Cabellos no claros			
	25		100

Resolución

(Encuentra el error)

a) Probabilidad de tener cabellos claros: 40 % = 0,40

Probabilidad de tener ojos claros: 25 % = 0,25.

Entonces, la probabilidad de que, si tiene cabellos claros, también tenga ojos claros, es 0,40 × 0,25 = 0,10, es decir, el 10 %.

b) Primero completamos la tabla.

	Ojos claros	Ojos no claros	Total
Cabellos claros	15	40 – 15 = 25	40
Cabellos no claros	25 – 15 = 75	75 – 25 = 50	100 – 40 = 60
	25	100 – 25 = 75	100

Casos favorables a que no tenga cabellos claros ni ojos claros: 50

Y los casos posibles son: 100

Luego, la probabilidad de que no tenga cabellos claros ni ojos claros es: $\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5$

1. ¿Qué diferencia encuentras entre los dos eventos planteados en a y b?

2. Verifica la corrección de los procedimientos de las dos situaciones. Utiliza la ley de Laplace.

Si hubiera error, realiza las correcciones.

Practicamos

1. El proyecto de una compañía procesadora de té es efectuar un experimento para comparar su marca con las de tres empresas de la competencia. Con este fin, contrata a un catador para probar y clasificar cada una de las cuatro marcas de té, sin sus nombres verdaderos, sino solo rotuladas por símbolos de identificación A, B, C y D.

   Si el catador no tiene la capacidad de identificar ninguna de las marcas, ¿cuál es la probabilidad de que clasifique el té tipo A como el más deseable?

   a) 0,25 **b)** 0,33 **c)** 0,50 **d)** 0,75

2. Para promover la visita al museo Señor de Sipán, sus directivos han lanzado una campaña: por la compra de una entrada, se recibe una cajita sellada que contiene un *souvenir* que es la réplica de una de las joyas encontradas en las tumbas reales. Los modelos son los mostrados en la imagen.

   Si el museo distribuyó de manera uniforme estos recuerdos en las cajas, ¿cuál es la probabilidad clásica de que al entrar al museo me toque una caja en la cual no haya un venado?

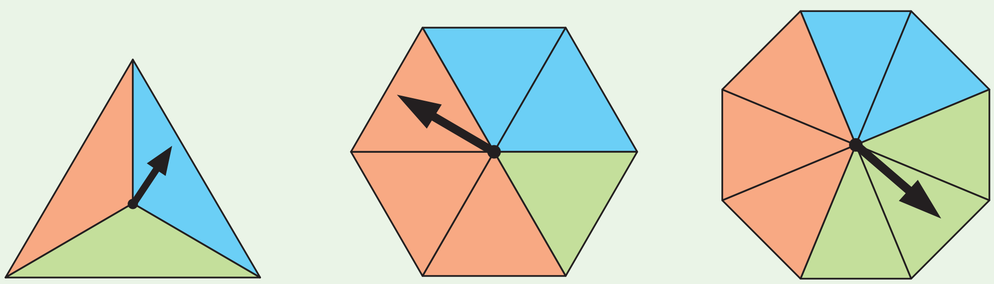
   a) 0,25 **c)** 0,75

   b) 0,53 **d)** 1,00

3. Un salón de belleza atiende en dos turnos. Se sabe que cierto día en la mañana llegó a realizar 12 cortes de cabello, 5 ondulaciones y 9 laciados; mientras que por la tarde realizó 4 cortes de cabello, 10 ondulaciones y 3 laciados. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona llegue a atenderse en la tarde?

a) 0,39 **b)** 0,40 **c)** 1,52 **d)** 0,65

4. ¿En cuál de las siguientes ruletas es más probable obtener el color azul?



5. En la ciudad de Huancayo se venden tres periódicos: *Correo*, *La Voz* y *Amanecer*.

Se sabe que el 40 % de la población lee *Amanecer*; el 22 %, *Correo*, y el 19 %, *La Voz*. Además, se sabe que el 8 % lee *Amanecer* y *Correo*; el 6 %, *Amanecer* y *La Voz*, y el 4 %, *La Voz* y *Correo*.

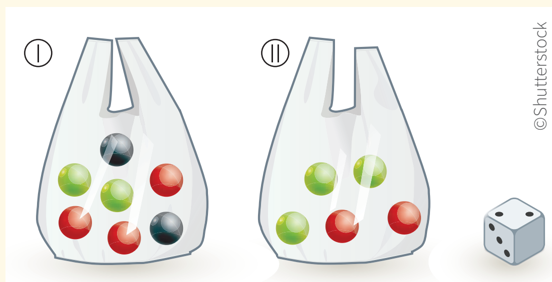
Si elegimos un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que lea únicamente *Amanecer* y *La Voz*?

a) 0,12 **b)** 0,06 **c)** 0,11 **d)** 0,28

6. Pedro y Luis cuentan con dos bolsas con bolas y un dado. El juego está ligado a las siguientes condiciones:

- Se lanza el dado, y si resulta 1 o 2, se extrae una bola de la bolsa I.
- Se lanza el dado, y si resulta 3; 4; 5 o 6, se extrae una bola de la bolsa II.

Determina cuál es la probabilidad de que al tirar el dado resulte 2 y se extraiga una bola verde.



a) 0,011 **b)** 0,285 **c)** 0,166 **d)** 0,047

7. Fernanda asiste a la Casa de la Cultura de su municipio, en donde le presentan el afiche que se observa en la imagen.

Ella ha decidido realizar en sus vacaciones actividades relacionadas con el movimiento artístico corporal. ¿Cuál es la probabilidad de que su elección sea la danza árabe?

8. La I. E. N.° 2055 del distrito de Comas tiene dispuestos varios libros en una estantería de su biblioteca. De estos, 45 son de Comunicación y 30, de Matemática. Hoy ingresó el estudiante Hugo y extrajo un libro al azar y se lo llevó. A continuación, entró Luis y sacó otro libro al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el libro extraído por Luis haya sido de Comunicación?

a) 0,12 **b)** 0,24 **c)** 0,66 **d)** 0,60

9. En el asentamiento humano José Carlos Mariátegui se llegó a ver que el 5 % de la población padece de una enfermedad. Para poder detectarla, se realizó una prueba diagnóstica. En esta, se observó que, en pacientes que sufren ese mal, en un 90 % da positivo. En cambio, un 94 % de los individuos que no la padecen dan negativo. Si tomamos un poblador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el poblador dé positivo y sufra la enfermedad?

a) 0,045 **b)** 0,090 **c)** 0,144 **d)** 0,090

10. Un aula de quinto grado necesita elegir un comité de deportes, el cual consta de un presidente y un secretario. Si se sabe que en el grupo hay 4 hombres y 5 mujeres, halla la probabilidad de seleccionar un hombre y una mujer.

Ficha 11

Cigarras en Quillabamba

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencia o de variación entre magnitudes, y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen sucesiones crecientes o decrecientes.
	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos o procedimientos para hallar términos desconocidos de una sucesión creciente o decreciente.
	Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	Plantea afirmaciones sobre características de una sucesión creciente y decreciente u otras relaciones de cambio que descubren y justifican la validez de una afirmación opuesta a otra, o de un caso especial mediante ejemplos y contraejemplos.

Aprendemos

En la naturaleza es frecuente observar que el promedio de vida de los animales de cualquier especie sufre algunos desajustes o variaciones, pero finalmente tiende a estabilizarse.

©Shutterstock

Se ha encontrado que muchas colonias de insectos, luego de tener un incremento, disminuyen significativamente hasta mínimos que no son considerados perjudiciales para los cultivos.

Hallamos que el crecimiento poblacional de algunos insectos, es decir, la proporción de individuos hembras que se incrementan, puede ser determinado por una expresión algebraica, como la siguiente:

$$P = k\,n\,(1 - n)$$

Donde:

P: población de insectos hembras para el día siguiente a n

n: número de insectos hembras por miles en el día n

k: coeficiente de reproductividad de la colonia de insectos, cuyos valores son según la colonia de insectos de que se trate

Acerca de una colonia de cigarras en Quillabamba, Cusco, se sabe que su coeficiente de reproductividad es 0,75 y que el número actual de insectos hembras por miles es 0,4.

- Se desea conocer si, dadas esas condiciones, la población de insectos hembras de dicha colonia aumentará o disminuirá.

Comprendemos el problema

1. ¿De qué datos disponemos?

2. ¿Qué debemos hallar?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia o estrategias plantearías para resolver el problema? ¿En qué consisten?

a) Diagrama de flujo **b)** Plantear una ecuación **c)** Diagrama cartesiano

Z_MATe5V_PArt2_130-248.indd 132 28/09/17 17:32

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Aplicamos la fórmula, adecuando sus resultados al plan diseñado.

2. Para visualizar la tendencia, podemos representar de otro modo los valores hallados.

3. Si dispones de una hoja de cálculo Excel, puedes buscar otro gráfico que relacione los valores (n) con los resultados (P) y el orden del tiempo.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Qué criterio utilizarías para reconocer si una sucesión es convergente?

¿? Analizamos

Situación A

Una colonia de saltahojas en Piura tiene coeficiente de reproductividad 2,5 y el número actual de insectos hembras por miles es 0,35.

Un investigador agrícola desea conocer si, dadas esas condiciones, el crecimiento de dicha colonia aumentará o disminuirá en los próximos días.

Resolución

- Sabemos que,

  k: coeficiente de reproductividad, $k = 2{,}5$

  n: número de insectos hembras por miles, $n = 0{,}35$

- Para saber el crecimiento o disminución de la población de insectos hembras, utilizamos la fórmula: $P = k\,n\,(1 - n)$, en donde *P* es la población de insectos hembras en el día posterior al día en que se tiene *n*.

- Luego: $P_1 = 2{,}5(0{,}35)\,(1 - 0{,}35) = 0{,}568\,75$

  $P_2 = 2{,}5(0{,}568\,75)\,(1 - 0{,}568\,75) = 0{,}613\,18$

  $P_3 = 2{,}5\,(0{,}613\,18)\,(1 - 0{,}613\,18) = 0{,}592\,97$

Mostramos los cálculos en una tabla:

Términos	Valores (n)	Población $Tn = 2{,}5n(1 - n)$
P_1	0,350 00	0,568 75
P_2	0,568 75	0,613 18
P_3	0,613 18	0,721 95
P_4	0,592 97	0,642 37
P_5	0,603 39	0,735 14
P_6	0,598 28	0,623 07
P_7	0,600 85	0,751 53
P_8	0,599 57	0,597 54
P_9	0,600 21	0,769 55
P_{10}	0,599 89	0,567 49
P_{11}	0,600 05	0,785 43
P_{12}	0,599 97	0,539 30
P_{13}	0,600 01	0,795 06
...	...	...

Respuesta: Observamos que la tendencia es converger en 0,6.

1. Cuando el valor de *n* aumenta, ¿qué ocurre con el valor de *P*?

2. ¿Qué valor tendrá *n* cuando el resultado sea 0,6?

3. En el caso del problema de la situación inicial (cigarras), ¿cómo fue la sucesión: creciente o decreciente? Y en este caso, ¿cómo es?

Situación B

Para la presentación del informe respecto al saltahojas, ¿cómo sería la gráfica que debe presentar el investigador?

Resolución

Lo presentamos en un diagrama cartesiano.

1. ¿Qué se mide en el eje Y?

2. ¿Qué verificamos con esta gráfica?

Situación C

Al investigador le preguntaron por el significado del valor límite 0,6. ¿Cuál fue la respuesta que ayudó a los agricultores a tomar una decisión?

Resolución

(Encuentra el error)

El investigador les recordó que el valor 0,6 es el que alcanzaría como límite después de haberse reproducido el saltahojas.

Respuesta:

Esto significa que la colonia de saltahojas empezará a extinguirse cuando llegue a 0,6.

1. Confronta la resolución con el diagrama.

Justifica la respuesta dada. En el caso de que no fuera correcta, corrígela.

Practicamos

Las bacterias son microorganismos unicelulares importantes tanto para la naturaleza como para el ser humano, pero también pueden producir problemas de salud.

En un cultivo de bacterias se empezó con 500. Se sabe que se reproducen de modo que se triplican cada 6 horas (h).

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. Los valores de cada 6 h de la población de bacterias de esta muestra forman una sucesión:

a) Convergente **c)** Oscilante

b) Divergente **d)** Alternante

2. ¿Cuántas bacterias habrá al término del día?

a) 2000 **c)** 40 500

b) 12 000 **d)** 72 000

Un investigador médico estaba haciendo un estudio sobre la eficacia de un medicamento para combatir determinada bacteria. Encontró que cuando se aplicaba la medicina, la población de bacterias se reducía según la fórmula $M = B/(n + 1)$, en donde n era el tiempo expresado en horas y B, la cantidad de bacterias en ese periodo.

Con la información dada, responde las preguntas 3 y 4.

3. Los valores que se obtienen cada hora, ¿qué clase de sucesión forman?

a) Oscilante

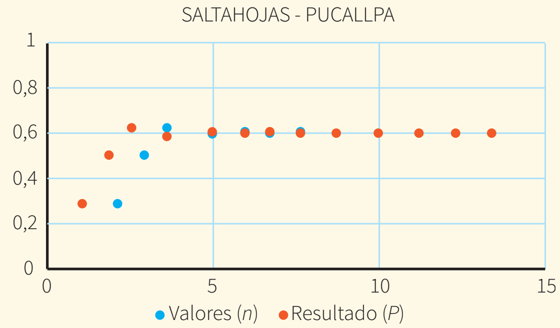
b) Convergente creciente

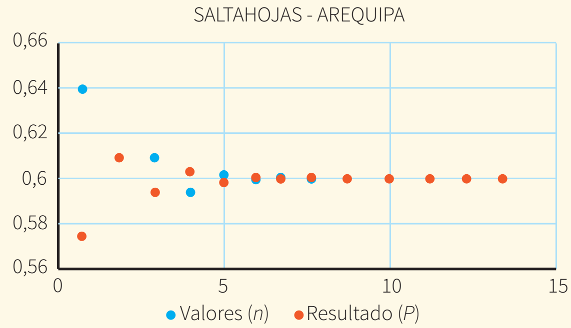
c) Convergente decreciente

d) Divergente decreciente

4. Se sabe que cuando hay 500 bacterias, las defensas del organismo se encargan de ellas. Una persona llegó a tener 60 000 bacterias, y en ese momento se le aplicó el medicamento. Para cuántos días tuvo el tratamiento.

En los diagramas se aprecian los resultados obtenidos en Pucallpa y Arequipa respecto al saltahojas.





Con la información dada, responde las preguntas 5; 6 y 7.

5. Con respecto al saltahojas de Pucallpa, ¿cuál de las afirmaciones es cierta con respecto a n y P?

a) En el tercer día la diferencia es, aproximadamente, de más de 2.

b) En el cuarto día la diferencia es nula.

c) Entre el primer y segundo día el resultado aumenta, aproximadamente, 0,5.

d) En el primer día la diferencia es, aproximadamente, de 0,6.

6. Con respecto al saltahojas de Arequipa, ¿cuál es la cantidad aproximada de insectos hembras en el octavo día?

a) 6000 **b)** 0,600 **c)** 600 **d)** 60

7. A partir de las gráficas, indica el tipo de sucesión que se muestra desde el día 2 al día 5, sabiendo que ambos son convergentes.

Uno de los insectos más perjudiciales para la ganadería es el chinche. El daño que ocasiona a los pastos, se produce por la succión de la savia, tanto cuando se halla en etapa de ninfa como de adulto, lo que ocasiona debilitamiento de las plantas, disminución en el rendimiento, pérdida en la calidad del follaje y disminución en el contenido de nitrógeno y azufre en las hojas atacadas. Además, los adultos también inyectan saliva tóxica a las plantas, provocando así la muerte de la hoja.

En un pastizal de Ica se ha detectado la presencia de una colonia de chinches. Se sabe que el coeficiente de reproductividad de estos insectos es 3,2. Asimismo, se ha determinado que la colonia está conformada por 0,100 hembras. Por ello, los ganaderos de la zona se encuentran sumamente preocupados.

También conocen la fórmula para hallar la población de insectos hembras: $P = k\,n\,(1 - n)$. Aplica esta fórmula y completa la tabla.

Con la información dada, responde las preguntas 8; 9 y 10.

Términos	Valores (n)	Resultado
P_1	0,100 00	0,288 00
P_2	0,288 00	0,656 18
P_3	0,656 18	0,721 95
P_4	0,721 95	0,642 37
P_5	0,642 37	0,735 14
P_6	0,735 14	0,623 07
P_7	0,623 07	0,751 53
P_8	0,751 53	0,597 54
P_9	0,597 54	0,769 55
P_{10}	0,769 55	0,567 49
P_{11}	0,567 49	0,785 43
P_{12}	0,785 43	0,539 30
P_{13}	0,539 30	0,795 06
P_{14}	0,795 06	0,521 41
P_{15}	0,521 41	0,798 53
P_{16}	0,798 53	0,514 81
P_{17}	0,514 81	0,799 30
P_{18}	0,799 30	0,513 35
P_{19}	0,513 35	0,799 43
P_{20}	0,799 43	0,513 09
...	...	...

8. Analiza los datos hallados y encuentra los puntos de convergencia o límites de la sucesión en los resultados.

a) 0,200 y 0,490

b) 0,288 y 0,656

c) 0,513 y 0,800

d) 0,513 y 0,799

9. ¿Qué pasará en los próximos días con la población de chinches detectada en Ica?

a) Aumentará indefinidamente.

b) Disminuirá indefinidamente.

c) Oscilará hasta llegar a dos límites.

d) Aumentará hasta llegar a un límite.

Z_MATe5V_PArt2_130-248.indd 141 28/09/17 17:32

10. Los ganaderos van a coordinar acciones para tomar una decisión respecto al problema. En la información que reciben, les muestran un cuadro donde se ve la tendencia en la reproducción de los chinches. Haz un diagrama cartesiano en el que se aprecie la relación entre los valores *n* y *P* en función del tiempo.

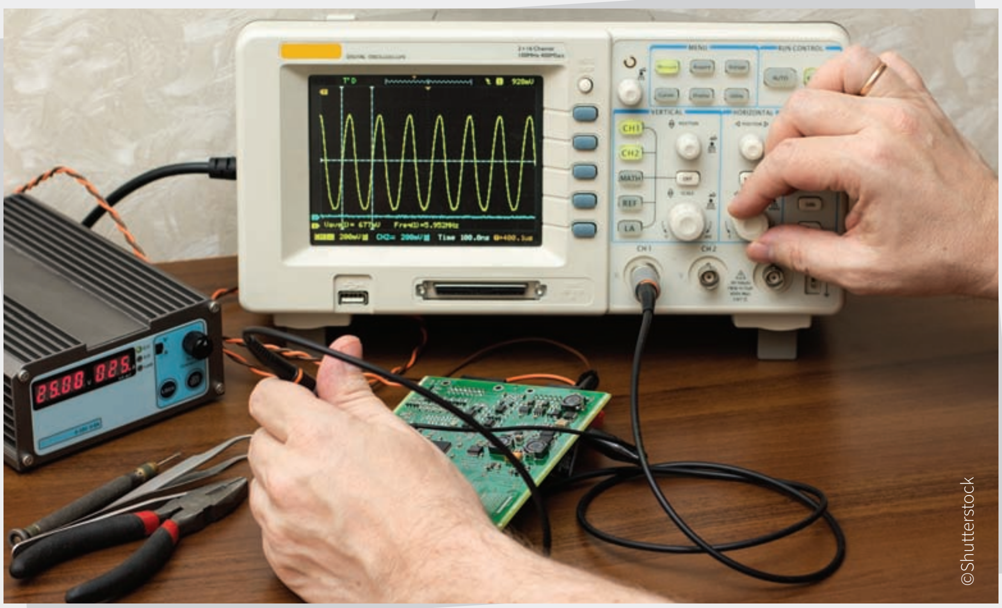
Ficha 12

El osciloscopio

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencia o de variación entre magnitudes, y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen funciones.
	Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.	Expresa, con diversas representaciones gráficas y simbólicas y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre la dilatación, la contracción, los desplazamientos horizontales y verticales, y las intersecciones con los ejes de una función al variar sus coeficientes.

Aprendemos

El **osciloscopio** es un instrumento que permite visualizar fenómenos transitorios, así como formas de ondas en circuitos eléctricos y electrónicos. Este instrumento se utiliza en diferentes campos del saber humano: medicina, radiocomunicaciones, electrónica, física, industria, etc. Puede medir un gran número de fenómenos, provisto de un elemento que convierte una magnitud física en una señal eléctrica. Será capaz de darnos el valor de una presión, ritmo cardiaco, potencia de sonido, distorsiones eléctricas, afinación, etc.



©Shutterstock

1. ¿Qué imagen se presenta en la pantalla del osciloscopio? ¿Qué de particular tiene la imagen? ¿Qué función es?
2. Si cada cuadrícula del osciloscopio corresponde a una unidad, aproximadamente, respecto de la recta horizontal remarcada, ¿cuál es el intervalo que lo acota y cuál es su periodo?

Comprendemos el problema

1. ¿Qué datos nos da el problema?

2. ¿Qué nos pide hallar?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

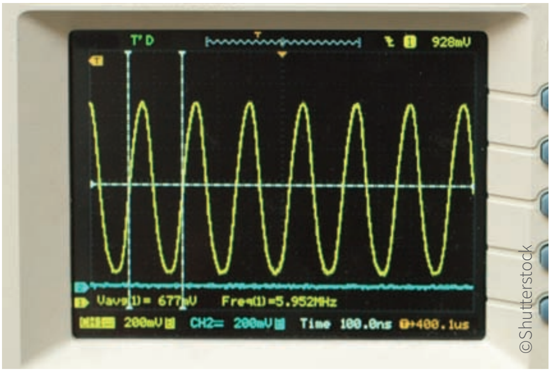
1. ¿Qué estrategia te ayudaría a resolver el problema?

a) Diagrama cartesiano **b)** Plantear una ecuación **c)** Buscar patrones

2. Para este problema, ¿cómo sería el plan?

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Para mejorar la visualización hemos ampliado la imagen. Obsérvala bien antes de aplicar tu plan.



©Shutterstock

2. La imagen principal, ¿es una recta o una curva?

3. Describe cómo se desarrolla la línea de la imagen con respecto al eje Y. ¿Varía o se mantiene constante? ¿Cómo?

4. Responde la primera pregunta de la situación inicial.

5. Calcula el menor y mayor valor de la función. Considera el sistema de coordenadas.

6. ¿Qué valores se repiten, los de las abscisas (X) o los de las ordenadas (Y)? ¿Cómo lo hacen?

7. Da respuesta a la pregunta 2 de la situación inicial.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Puedes verificar de otro modo que la función es periódica o no periódica?

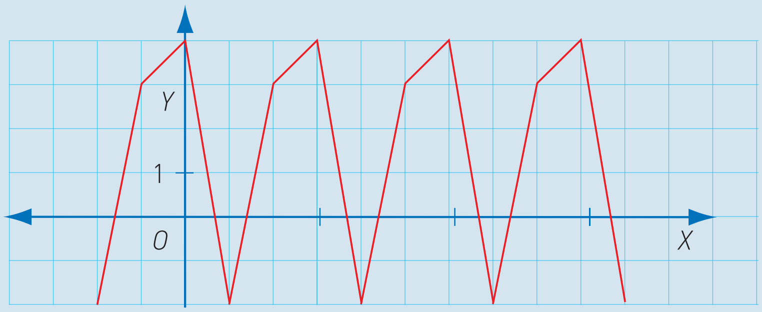
2. Describe cómo has hallado el intervalo acotado de la función.

Z_MATe5V_PArt2_130-248.indd 145 28/09/17 17:33

Analizamos

Situación A

Calcula el intervalo de acotación y el periodo de la siguiente función, siendo cada cuadrícula el tamaño de 1 u.



Resolución

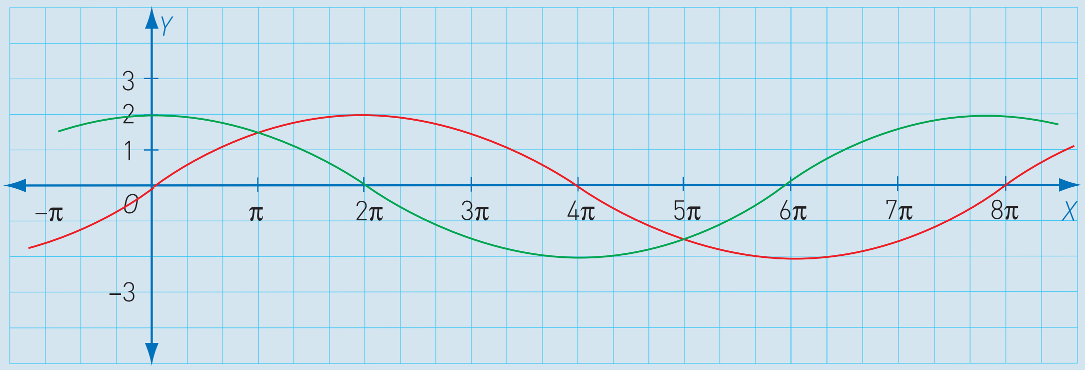
- Observamos el gráfico mostrado.
- Encontramos que es una función periódica, ya que cada cierto tramo se vuelve a repetir la figura.
- El tamaño de ese tramo es el periodo.
- Como el lado de cada cuadrícula es 1 u, entonces en este caso el periodo es 3.
- Determinamos la ordenada del punto más alto que corresponde a + 3.
- También hallamos el valor del punto más bajo, que es igual a –2.
- Por lo tanto, el intervalo de acotación de la función mostrada es [–2; 3].

1. ¿Tiene alguna similitud con la situación inicial?

2. ¿Cómo describirías la función dada?

Situación B

Describe a qué función corresponden las gráficas representadas. Considera que las funciones tienen la forma $f(x) = a$ (R.T.) (bx), acotadas por el intervalo $[-a; a]$, en donde su amplitud es a y su periodo es $2\pi/b$.



Resolución

- Observando el gráfico, encontramos que las dos gráficas tienen la misma amplitud ($a = 2$).
- También poseen el mismo periodo $\frac{\pi}{2}$.
- Por dato, tenemos que el periodo es $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2}$.
- La gráfica de color verde es la función: $f(x) = 2 \cos \frac{x}{b} = 2 \cos \frac{x}{4}$
- Donde: $\frac{x}{b} = \frac{x}{4}$
- En consecuencia, $b = 4$.
- Y la gráfica de color anaranjado es la función $g(x) = 2 \text{ sen } \frac{x}{4}$

1. ¿Cómo identificas la amplitud de la función a partir de las gráficas?

2. Verifica que las ecuaciones de las gráficas sean ciertas.

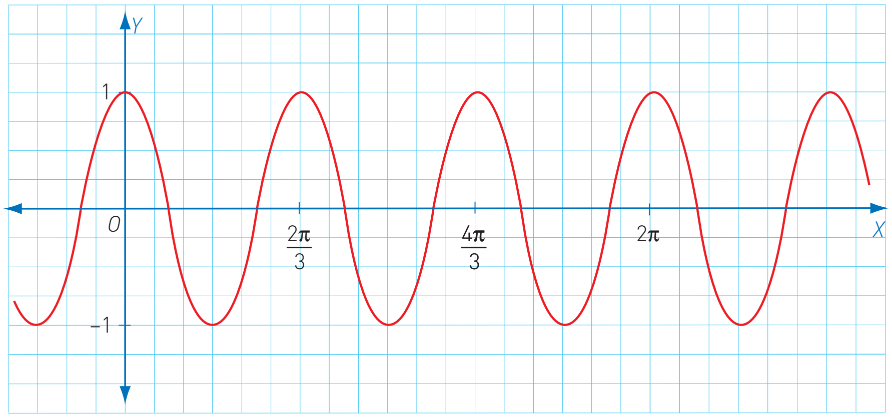
Situación C

Grafica la siguiente función: $f(x) = 3\cos 4x$

Resolución

(Encuentra el error)

- Sabemos que los valores de la función coseno están acotados en el intervalo [–1; 1]; es decir, que su máximo valor es 1, y el mínimo, –1. Entonces, su amplitud es $\frac{1-(-1)}{2} = 1$. También sabemos que el periodo es $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3}$.
- En otras palabras, la gráfica se repite cada $\frac{2\pi}{3}$.
- Con lo averiguado, podemos hacer la gráfica de la función $f(x) = 3\cos 4x$



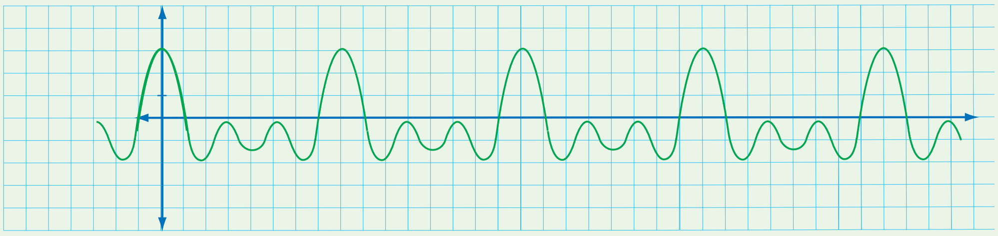
1. Elabora una tabla para verificar la solución.

x	0	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$
$f(x) = 3\cos 4x$				

2. Si has verificado que la solución es correcta, busca otra forma de resolver el problema. En caso contrario, haz las correcciones necesarias.

Practicamos

1. Si cada cuadrícula corresponde a 1 u, ¿aproximadamente cuál es el periodo de la siguiente función?



a) 3 u   **b)** 4 u   **c)** 11 u   **d)** 8 u

2. En un electrocardiograma se tuvo la siguiente imagen:

¿Qué función corresponde a esta gráfica?

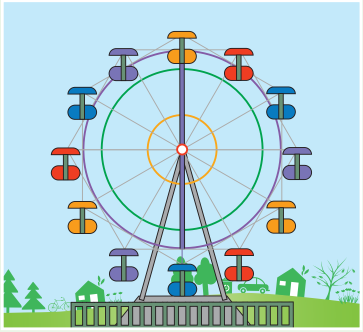
a) Función seno

b) Función coseno

c) Función periódica

d) No se podría determinar

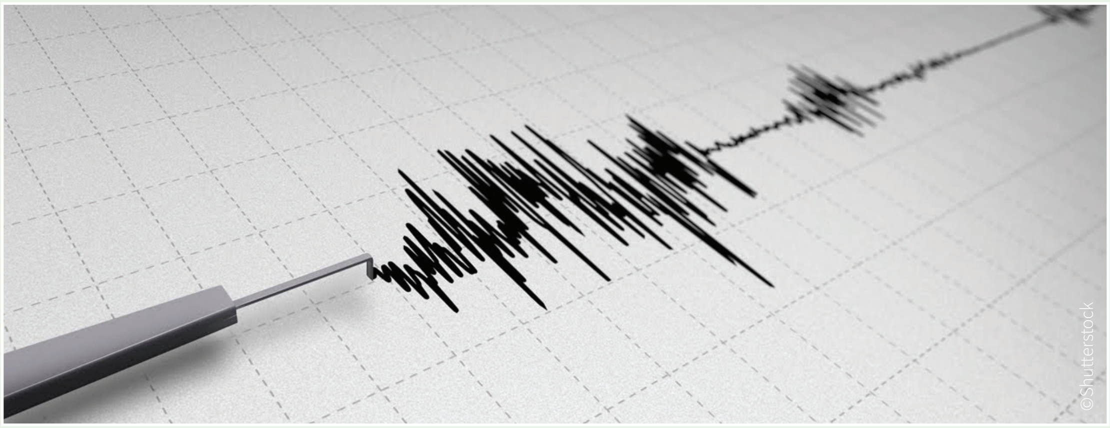
3. Se sabe que los asientos de la rueda de la feria se encuentran a 4 m del centro. Determina a qué distancia del eje vertical de color morado se halla el asiento de color rojo situado en la parte inferior.



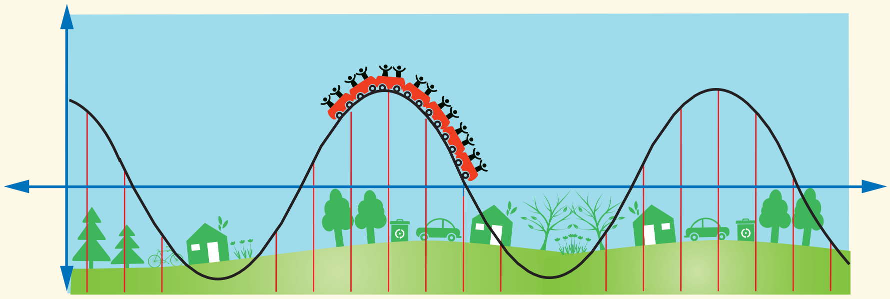
a) 1 m **b)** 1,73 m **c)** 2 m **d)** 2,73 m

4. En la imagen mostrada, un sismógrafo grafica los movimientos de la tierra durante un terremoto.

¿A qué función pertenece?



La siguiente montaña rusa fue diseñada por un matemático. La diseñó con su función trigonométrica preferida, con una altura, respecto del eje horizontal, de 30 m.



Con la información dada, responde las preguntas 5 y 6.

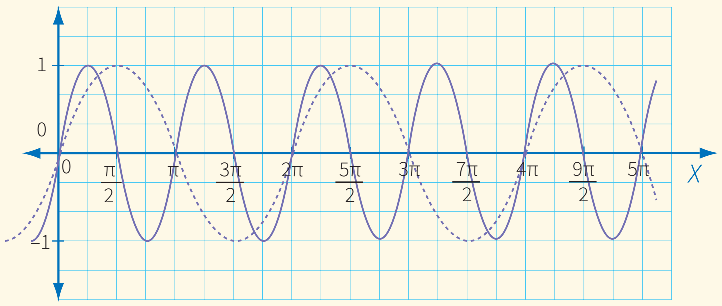
5. ¿Cuál es la función que mejor representa a la montaña rusa?

a) $f(x) = 30\text{sen}20x$ **b)** $f(x) = 15\cos 20x$ **c)** $f(x) = 30\cos\left(\frac{x}{20}\right)$ **d)** $f(x) = 15\text{sen}\left(\frac{x}{20}\right)$

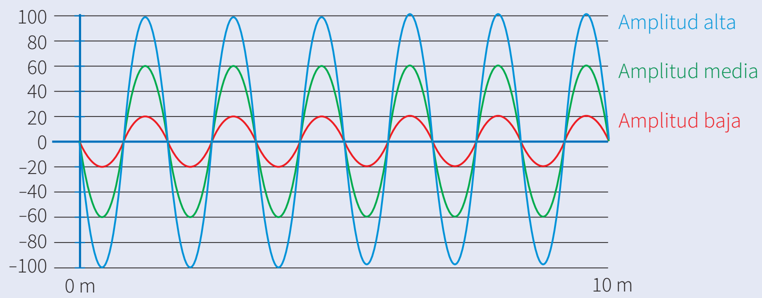
6. ¿Cuál es la longitud de la columna vertical más larga que sostiene a la montaña rusa?

a) 15 m **b)** 30 m **c)** 45 m **d)** 60 m

7. En un osciloscopio la potencia de sonido de un minicomponente describía la función $f(x) = \text{sen}x$, la cual se observa en las líneas discontinuas. Luego de que un técnico movió ciertos cables, las ondas cambiaron. ¿Qué función describe?



La siguiente gráfica representa las longitudes de ondas sonoras:



Con la información dada, responde las preguntas 8 y 9.

8. Se puede afirmar que:

a) Tienen la misma acotación.

b) Tienen la misma amplitud.

c) Tienen el mismo periodo.

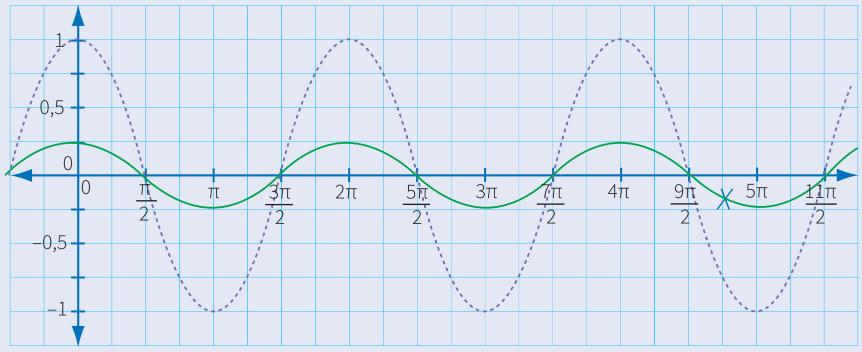
d) No tienen nada en común.

9. ¿Cuál es el periodo de la amplitud media?

a) 0,6 m **b)** 0,7 m **c)** 0,8 m **d)** 0,9 m

Z_MATe5V_PArt2_130-248.indd 153 28/09/17 17:33

10. El ritmo cardiaco de un paciente cambió de manera repentina de una función $f(x) = \cos x$ descrita en líneas discontinuas a otra. ¿Qué función representa el nuevo ritmo cardiaco?



Ficha 13 Depreciación lineal

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Describe la ubicación o los movimientos de un objeto real o imaginario en el plano y lo representa como la ecuación de la recta.
	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Expresa, con dibujos y lenguaje geométrico, su comprensión sobre la ecuación de una recta, estableciendo relaciones entre representaciones.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Combina y adapta las estrategias heurísticas, los recursos y los procedimientos para determinar la longitud y pendiente de la ecuación de una recta, y a partir de ello determina si dos rectas son perpendiculares o paralelas.

Aprendemos

Cuando una compañía compra parte de un equipo o maquinaria, reporta el valor de ese equipo como uno de los activos en su hoja de balance. En años subsecuentes, este valor debe disminuir debido al lento desgaste del equipo, o bien, a que se vuelve obsoleto. Esta reducción gradual del valor de un activo se denomina *depreciación*.

Un método común de calcular el monto de la depreciación es reducir el valor cada año en una cantidad constante, de forma tal que el valor se reduzca a un valor de desecho al final del tiempo de vida útil estimado del equipo. Esto se denomina *depreciación lineal*.

Tenemos:

D: depreciación anual

Vi: valor inicial

Vd: valor de desecho

T: tiempo de vida útil

$$D = \frac{Vi - Vd}{T}$$

Si una empresa compra maquinaria por S/480 000. Se espera que el tiempo de vida útil de la maquinaria sea de 12 años con un valor de desecho de cero.

1. Organiza en una tabla la relación de depreciación anual para un tiempo de vida útil de 2; 4; 6; 8; 10 y 12 años.
2. Determine el monto de depreciación anual y una fórmula para el valor depreciado después de x años.
3. Elabora con los datos de la tabla una representación gráfica en el plano cartesiano.
4. ¿Cuál es la pendiente de la recta en la gráfica? ¿Qué mide dicho valor?
5. Calcula en la gráfica la distancia entre los puntos (12 ; 0) y (0 ; 480 000).

Z_MATe5V_PArt2_130-248.indd 155 28/09/17 17:33

Comprendemos el problema

1. Identifica los datos del problema.

2. ¿Cuáles son las variables que intervienen en este problema?

3. ¿Qué te piden trabajar?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia te sirve para organizar los datos de la pregunta 1 de la situación inicial?

a) Establecer submetas **b)** Diagrama conjuntista **c)** Diagrama tabular

2. ¿Qué estrategia te permite evidenciar el valor depreciado después de x años?

a) Plantear una ecuación **b)** Diagrama conjuntista **c)** Diagrama tabular

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Elabora la tabla solicitada.

Tiempo de vida útil (años)	0	2	4	6	8	10
Valor (soles)						

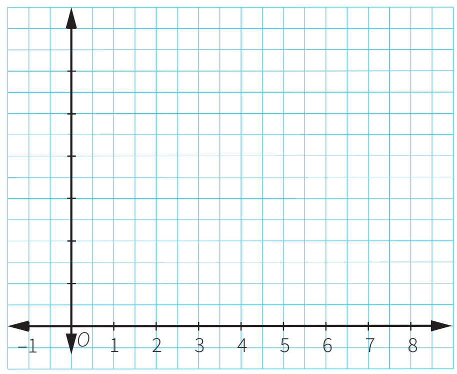
2. Expresa mediante una fórmula el valor depreciado después de x años y determina el valor depreciado después en 12 años.

3. Determina el valor depreciado después de 7 años.

4. En el plano cartesiano, elabora la gráfica pedida.

5. Plantea algunas características que observes en la gráfica.

6. Haz una gráfica para hallar la pendiente de la función lineal.



7. Calcula la distancia entre los puntos (12 ; 0) y (0 ; 480 000).

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Podrías haber hallado la pendiente de otra forma? ¿Por qué?

2. ¿Cuántos puntos habrían bastado para hacer la gráfica? ¿Por qué?

Z_MATe5V_PArt2_130-248.indd 157 28/09/17 17:33

Analizamos

Situación A

Demanda

Un comerciante puede vender al día 20 rasuradoras eléctricas al precio de $25 cada una, pero puede vender 30 si fija un precio de $20 a cada rasuradora eléctrica.

Determine la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal, y su respectiva gráfica.

Resolución

- Considerando la cantidad x demandada como la abscisa (o coordenada x) y el precio p por unidad como la ordenada (o coordenada y), los dos puntos sobre la curva de demanda tienen coordenadas:

$$x = 20,\ p = 25 \text{ y } x = 30,\ p = 20$$

- De modo que los puntos son (20 ; 25) y (30 ; 20).
- La ecuación de demanda es lineal, está dada por la ecuación de una línea recta que pasa por los puntos (20 ; 25) y (30 ; 20).
- La pendiente de la línea que une estos puntos es:

$$m = \frac{20 - 25}{30 - 20} = -\frac{5}{10} = -0{,}5$$

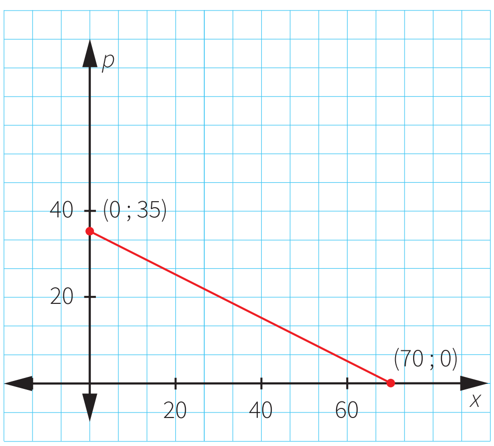
- Por la fórmula punto-pendiente, la ecuación de la línea que pasa por (20 ; 25) con pendiente $m = 0{,}5$ es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- Dado que $y = p$, la ecuación de demanda requerida es:

$$p - 25 = -0{,}5 \cdot (x - 20)$$
$$p = -0{,}5x + 35$$

- Elaboramos la gráfica de la ecuación de demanda:



1. Describe la estrategia utilizada para resolver el problema.

2. ¿Qué características tiene la gráfica obtenida?

3. ¿En qué punto o puntos intercepta la gráfica a los ejes?

Situación B

Decisión de tránsito

El gobierno de una ciudad tiene un presupuesto de $200 millones de capital para gasto sobre transporte, e intenta utilizarlo para construir metros subterráneos o carreteras. Cuesta $2,5 millones por milla construir carreteras y $4 millones por milla para metros subterráneos. Encuentre la relación entre el número de millas de carretera y de subterráneo que puede construirse para utilizar por completo el presupuesto disponible. Interprete la pendiente de la relación lineal que se obtiene.

Resolución

- Supón que se construyen:
  x millas de carretera, y millas de subterráneo.
  El costo de construir x millas de carretera (a $2,5 millones por milla) es $2{,}5x$ millones de dólares, mientras que el costo de construir y millas de subterráneo (a $4 millones por milla) es $4y$ millones de dólares.
  Como el costo total tiene que ser igual al presupuesto asignado para el propósito, tenemos:
  $$2{,}5x + 4y = 200$$
- Esta ecuación proporciona la relación requerida entre los números de millas que pueden construirse dentro del presupuesto. Al resolver la ecuación dada para y, tenemos:
  $$y = -\frac{5}{8}x + 50$$
- La pendiente de esta recta es $-\frac{5}{8}$, la cual expresa el hecho de que la construcción de cada milla adicional de carretera será a un costo de $\frac{5}{8}$ de milla de construcción de subterráneo. Al resolver la ecuación original para x en términos de y, obtenemos:
  $$x = -\frac{5}{8}y + 80$$
- Así, cada milla adicional de construcción de subterráneo sistituye $\frac{5}{8}$ millas de construcción de carretera.

1. Describe la estrategia utilizada para resolver el problema.

2. Realiza el gráfico de la recta $y = -\frac{5}{8}x + 50$ en el plano cartesiano.

3. ¿Qué características tiene la gráfica obtenida?

4. ¿En qué punto o puntos intercepta la gráfica a los ejes?

Z_MATe5V_PArt2_130-248.indd 159 28/09/17 17:33

Situación C

(Modelo de costos)

El costo de fabricar 10 máquinas de escribir al día es de $350, mientras que producir 20 máquinas del mismo tipo al día cuesta $600. Suponiendo un modelo de costo lineal, determina la relación entre el costo total y_c de producir x máquinas de escribir al día y dibuja su gráfica.

Resolución

(Encuentra el error)

- Se nos han dado los puntos (10 ; 350) y (20 ; 600) que están sobre la gráfica de un modelo de costo lineal. La pendiente de la línea que une estos dos puntos es:

$$m = \frac{600 - 350}{20 - 10} = \frac{250}{10} = 25$$

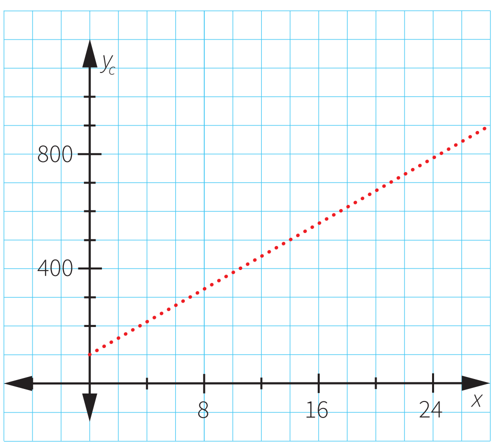
- Usando la fórmula punto-pendiente, advertimos que la ecuación requerida de la línea recta (del modelo de costo lineal) con pendiente $m = 25$ y que pasa por el punto (10 ; 350) es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y_c - 350 = 25(x - 10)$$
$$y_c = 25x - 100$$

- Los valores correspondientes de y se dan en la tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6	...
y_c	−100	−75	−50	−25	0	25	50	...

- La gráfica de la ecuación es:



1. Si has verificado que la solución es correcta, busca otra forma de resolver el problema. En caso contrario, haz las correcciones necesarias.

2. Explica por qué la gráfica de la ecuación no es una línea recta continua.

Practicamos

1. Se tienen dos rampas de acceso a una tienda. Las subidas corresponden a dos rectas:

$f(x) = 0{,}2 \cdot n \cdot x$

$g(x) = 0{,}15 \cdot n \cdot x$

¿Cuál tiene más pendiente?

a) $f(x)$

b) $g(x)$

c) Su gráfica tiene la misma pendiente.

d) No se sabe.

2. ¿En qué punto se cortan las gráficas de las rectas $f(x) = 1{,}3x$ y $g(x) = 0{,}8x$?

a) (0; 2)

b) (2; 0)

c) (0; 0)

d) (0; –2)

3. En un plano, un ingeniero observa que hay una recta $f(x) = 5 - 2x$. Luego encuentra otras rectas y quiere saber cuál de las siguientes expresiones es una recta paralela a la recta dada.

a) $g(x) = 2x - 5$ **b)** $g(x) = \frac{-1}{2}x + 0{,}5$ **c)** $g(x) = -2x - 0{,}08$ **d)** $g(x) = \frac{1}{2}x + 0{,}08$

4. En una clase el maestro Manuel explicaba cuándo las rectas podían ser paralelas, perpendiculares o secantes, sin necesidad de hacer las gráficas. Pero Andrés estaba distraído y, cuando el maestro preguntó cómo eran las rectas L_1: $f(x) = \frac{4}{5}x$ y L_2: $f(x) = \frac{-5}{4}x$, el estudiante decidió hacer las gráficas pertinentes. ¿Qué clase de rectas resultaron?

5. Al reparar que Andrés, por estar distraído, había elaborado las gráficas para resolver un problema, el maestro Manuel le propuso escoger el par de rectas que son paralelas entre sí:

$f(x) = 1{,}5x - 8$; $g(x) = -1{,}5x + 8$; $h(x) = 1{,}5x + 8$

a) $f(x)$ y $g(x)$

b) $f(x)$ y $h(x)$

c) $h(x)$ y $g(x)$

d) No hay paralelas.

6. Se tiene la ecuación de la recta L_1: $f(x) = 2x + 3$.

¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la recta que es perpendicular a L_1?

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $f(x) = -2x + 3$

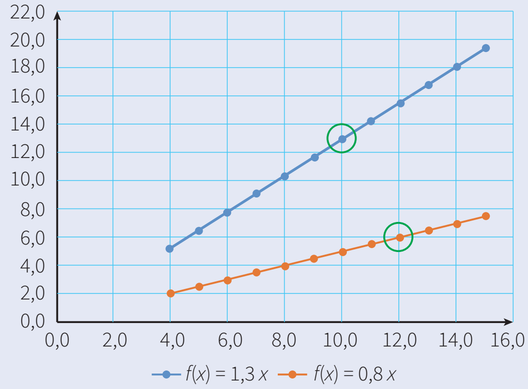
c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

7. Al trazar la gráfica de una recta, Luis vio que pasaba por los puntos (5; 18) y (–3; 2). Para hallar la pendiente, pidió ayuda a su papá y la calcularon.

En un paseo, tuvo que subir por un cerro. Su papá, que es ingeniero, le dijo: "Este cerro tiene la misma pendiente que calculamos". Y luego le preguntó: "¿Cómo interpretarías el valor de la pendiente en esta subida?".

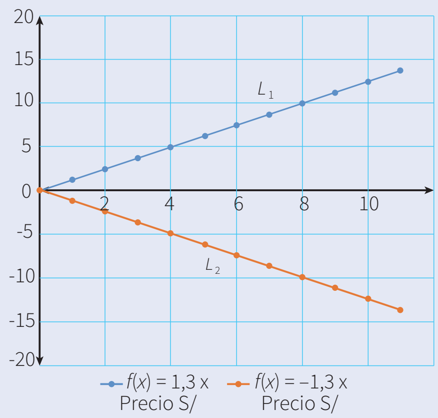
8. En el problema relacionado con la anemia, se obtuvo la siguiente gráfica:



Calcula la distancia entre los dos puntos encerrados en una circunferencia.

a) 4,24 u **b)** 5,00 u **c)** 7,28 u **d)** 9,00 u

9. Luego de escribir la expresión algebraica de las rectas L_1: $f(x) = 1{,}3x$, se probó escribir la misma ecuación con la pendiente opuesta, es decir, L_2: $f(x) = -1{,}3x$. Al graficar ambas rectas, resultó la gráfica que se muestra a continuación. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta según las rectas L_1 y L_2 mostradas?



a) Las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares.

b) Las rectas L_1 y L_2 son paralelas.

c) Los ángulos que forman L_1 y L_2 con la horizontal tienen el mismo valor absoluto.

d) Las rectas L_1 y L_2 son opuestas.

10. Ana pertenece a una familia muy numerosa. En el desayuno cada uno come dos panes. La mamá de Ana acostumbra que nunca falte pan, por lo cual siempre compra cinco panes más. Cada pan tiene un costo de S/0,20. Determina la expresión algebraica que represente el gasto diario y cómo se lo puede graficar.

Ficha 14

Las cónicas y algunas construcciones

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Describe la ubicación o los movimientos de un objeto real o imaginario y los representa utilizando la ecuación de la parábola y la circunferencia.
	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Expresa, con dibujos y lenguaje geométrico, su comprensión sobre la gráfica de la ecuación de una parábola y de la circunferencia para interpretar un problema según su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.

Aprendemos

Los puentes son algunas de las construcciones que han favorecido el transporte del ser humano sobre lugares muy complicados. En la imagen mostrada, se encuentra el puente de Puerto Maldonado, en el cual los pilares que lo sostienen están sobre el río. Se observa que los dos cables que van entre los pilares tienen una forma particular.

http://static.panoramio.com/photos/large/57344176.jpg

- Si la altura de los pilares es de 30 m y la distancia entre ellos es de 80 m, ¿a qué altura se encontrará el cable a 20 m del pilar? (Considera como referencia el nivel del agua).

Comprendemos el problema

1. ¿Qué figura forman los cables que están entre los pilares?

2. ¿En qué otros casos se aprecia la forma de los cables?

3. ¿Qué elementos matemáticos conoces de la figura?

4. ¿Qué datos te dan? ¿Cuál es la incógnita?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿A partir de qué estrategia iniciarías la solución del problema?

2. ¿Qué conocimiento es importante para resolver el problema?

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Empieza a aplicar la estrategia elegida.

2. Recuerda el conocimiento que consideras importante para relacionar los datos con la incógnita y aplícalo.

3. Resuelve para tener los elementos de la parábola y su ecuación.

4. Da respuesta a la pregunta del problema.

Reflexionamos sobre el desarrollo

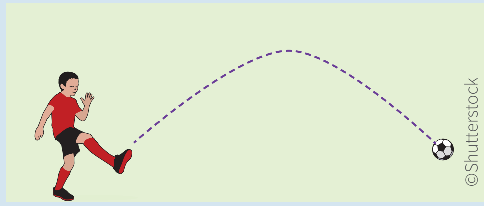
1. ¿Puedes aplicar la estrategia en otras situaciones? ¿Por qué?

2. ¿Qué datos te podrían dar para deducir directamente la ecuación de la parábola?

Analizamos

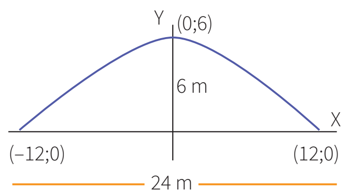
Situación A

Halla la altura de un punto parabólico de 6 m de altura y 24 m de base, situado a una distancia de 8 m del centro.



Resolución

- Describiendo la parábola en el plano cartesiano, obtenemos una que se abre hacia abajo.



- La ecuación de la parábola es:

  $(x - h)^2 = -4p(y - k)$

- Reemplazando tenemos: $(x - 0)^2 = -4p(y - 6)$
- Como el punto (12; 0) pertenece a la parábola, cumple la ecuación anterior: $(x - 0)^2 = -4p(y - 6)$
- De aquí obtenemos el valor de "p", $p = 6$; por lo que la ecuación de la parábola es: $x^2 = -24(y - 6)$
- A una distancia de 8 m del centro, se nos pide calcular la altura:

  $(8)^2 = -24(y - 6)$; $64 = -24(y - 6)$

  $y = \dfrac{10}{3}$

A 8 m del centro, se encontrará a 3,33 m de altura.

1. Sin hacer un dibujo y conociendo la ecuación de la parábola, ¿cómo reconocerías que se abre hacia abajo?

2. Supón que se va a lanzar un tiro libre y la barrera se coloca a 9,15 m de la pelota. ¿Hasta qué altura deben saltar en la barrera para impedir que la pelota pase? ¿Es posible que ocurra? ¿Por qué?

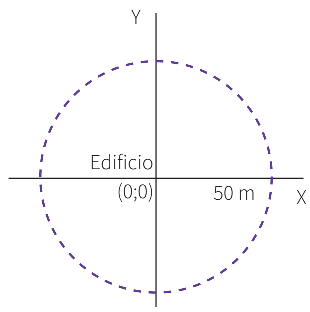
Situación B

¿Cuál es la ecuación del lugar geométrico descrito por la trayectoria de un helicóptero que se mantiene sobrevolando un edificio a una distancia horizontal de 50 m de este, realizando un simulacro de vigilancia?

Resolución

Observando desde un punto arriba del edificio, el helicóptero no varía su distancia respecto a aquel. Esta distancia viene a ser el radio, que mide 50 m, con el edificio como centro. La ecuación de la trayectoria del helicóptero con centro en el edificio corresponde a la de una circunferencia:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



Reemplazamos: $h = 0$; $k = 0$; $r = 50$

Entonces: $x^2 + y^2 = 2500$

1. ¿En qué punto del edificio se supone que está el centro de la circunferencia que describe el helicóptero?

2. Si el edificio tuviera 12 m de frente para cada calle y el centro de la nueva trayectoria circunferencial estuviese en un punto de la esquina, ¿cuál sería la ecuación?

Situación C

El Instituto Geofísico del Perú detectó un sismo con origen en la ciudad de Tumbes a 8 km al este y 5 km al sur del centro de la ciudad, con un radio de 6 km. ¿Cuál es la ecuación general de la circunferencia del área afectada?

Resolución

(Encuentra el error)

- Sabemos que la ecuación de la circunferencia es de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.
- Puesto que tenemos como datos que:

  $r = 6$ km; $h = 8$ km y $k = 5$ km, entonces reemplazamos y se tiene:

  $(x - 8)^2 + (y - 5)^2 = 6^2$
- Efectuamos las operaciones:

  $x^2 - 16x + 64 + y^2 - 10y + 25 = 36$
- Simplificamos e igualamos a cero:

  $x^2 + y^2 - 16x - 10y + 53 = 0$

Esta es la ecuación general buscada.

1. Revisa el procedimiento y las operaciones realizadas. Si todo está correcto, busca otra forma de resolver el problema (solo indica la estrategia). Si hubiese error, resuélvelo correctamente.

Practicamos

1. Una antena parabólica tiene un diámetro de 12 m y su profundidad es de 2 m, como se muestra en la imagen.

¿A qué distancia del fondo del plato se ubica el colector de señales de la antena?

a) 2,5 m

b) 4,5 m

c) 6,5 m

d) 8,5 m

2. Un túnel con arco parabólico tiene una altura máxima en su centro de 8 m, y su anchura al nivel del suelo también es 8 m. ¿Cuál es la coordenada del foco de la parábola tomando como origen de coordenadas el centro de la pista?

a) (0;1/2)

b) (0;7/2)

c) (0,13/2)

d) (0;15/2)

3. De la pregunta 2, ¿a qué distancia del centro la altura es 4 m?

a) 1,41 m **b)** 2 m **c)** 2,82 m **d)** 4 m

4. Un horno solar tiene la forma de un paraboloide circular cuyo diámetro es de 120 cm y la profundidad de su plato es de 50 cm. ¿A qué distancia del fondo del plato parabólico se encuentra el centro del soporte para calentar la comida?

Z_MATe5V_PArt2_130-248.indd 174 28/09/17 17:33

5. Se tiene un modelo a escala de un puente que estará sobre un río. El puente tiene un cable de sostén en forma parabólica. La longitud entre los pilares es de 60 cm, la longitud del punto más alto de los pilares hacia el asfalto es de 20 cm y la distancia que hay entre la carretera y el punto más bajo del cable es de 5 cm. La ecuación que representa la parábola tomando como vértice el centro de la carretera entre los dos pilares es:

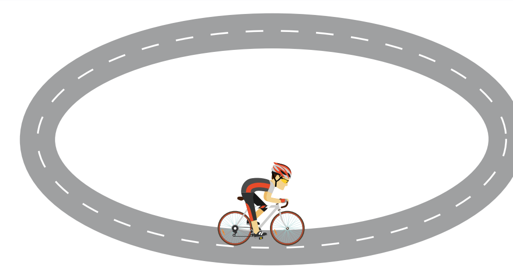
a) $x^2 = 15y$ **b)** $x^2 = 60y$ **c)** $y^2 = 15x$ **d)** $y^2 = 60x$

6. El túnel de una carretera tiene la forma de un arco parabólico de 6 m de ancho y 6 m de altura. Para poder pasar por el túnel, la altura máxima que puede tener un vehículo de transporte de 3 m de ancho debe ser menor que la siguiente medida:

a) 2,5 m
b) 3 m
c) 3,5 m
d) 4,5 m

7. Halla la ecuación general de la circunferencia que se ha generado al tirar a un lago una piedra que ha producido ondas de un alcance de 4 m. Toma en cuenta el centro donde cayó la piedra.

8. Un ciclista se encuentra en una pista circular, en cuyo punto de partida coloca un banderín cada vez que da una vuelta. Si la distancia más lejana al punto de partida se encuentra a 64 m, ¿cuál es la ecuación de la circunferencia?


©Shutterstock

a) $x^2 - 64x + y^2 = 0$ **b)** $x^2 + y^2 - 364y = 0$ **c)** $x^2 - 32x + y^2 = 0$ **d)** $x^2 - 32x + y^2 - 1024 = 0$

9. Se informó que se produjo un sismo de 4,2 grados en la escala de Richter, con epicentro en el mar a 20 km al oeste del puerto del Callao y 16 km al sur, y que se sintió a 10 km a la redonda. Halla la ecuación de la circunferencia respecto al mencionado puerto.

a) $(x - 20)^2 + (y - 16)^2 = 100$ **c)** $(x + 20)^2 + (y + 16)^2 = 100$

b) $(x - 16)^2 + (y - 20)^2 = 10$ **d)** $(x + 16)^2 + (y + 20)^2 = 10$

10. De la pregunta 9: Un barco se encontraba a 5 km al oeste y 3 km al sur del puerto del Callao. ¿Se sintió el sismo en el barco? Explica.

Z_MATe5V_PArt2_130-248.indd 176 28/09/17 17:33

Ficha 15 Polos para los estudiantes

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre	Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.	Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre el valor de terciles y quintiles de una distribución de datos, así como la pertinencia de las medidas de tendencia central en relación con la desviación estándar, según el contexto de la población en estudio.
	Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.	Adapta y combina procedimientos para determinar medidas de tendencia central, desviación estándar de datos continuos y medidas de localización.
	Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.	Plantea y contrasta afirmaciones o conclusiones sobre las características o tendencias de una población a partir de sus observaciones o análisis de datos y las justifica con ejemplos y contraejemplos, usando sus conocimientos y la información obtenida en su investigación.

Aprendemos

El Club de Matemática del colegio San Alfonso está integrado por 20 estudiantes, cuyas estaturas son las que figuran en la tabla. Se enviará a confeccionar polos para ellos en las tallas *small* (S), *medium* (M) y *large* (L) según el cuartil de sus estaturas, es decir:

©Shutterstock

Tallas de polos		
Small (S)	Medium (M)	Large (L)
1.er cuartil	2.° y 3.er cuartil	Más de 3.er cuartil

Nombres	José	Marco	David	Robert	María	Rosy	Luis	Carla	Regina	Meche
Sexo	H	H	H	H	M	M	H	M	M	M
Estatura	1,68	1,54	1,7	1,72	1,65	1,66	1,72	1,63	1,73	1,66

Nombres	Pedro	Juan	Celia	Matías	Jesús	Ramiro	Noé	Ricky	Rocío	Felicia
Sexo	H	H	M	H	H	H	H	H	M	M
Estatura	1,69	1,67	1.68	1,71	1,73	1,67	1,68	1,72	1,65	1,66

1. ¿Qué cantidad de polos se enviarán a confeccionar de cada talla (S, M, L)?
2. ¿Cuántos estudiantes tienen estaturas hasta el tercer decil?
3. Calcula el valor mínimo y máximo y la mediana de estatura de los estudiantes del Club de Matemática.

Comprendemos el problema

1. ¿Cuáles son los datos?

2. ¿Con qué se relacionan las tallas de los polos?

3. ¿Qué te piden realizar?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia te sirve para resolver el problema? ¿Por qué?

a) Establecer submetas **b)** Diagrama de flujo **c)** Diagrama tabular

2. ¿Qué condiciones conviene tener en la estrategia elegida? ¿Qué debes aplicar?

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Organiza los datos de acuerdo con tu plan.

Nombres										
Sexo										
Estatura										

Nombres									
Sexo									
Estatura									

2. Calcula los cuartiles y el decil 3 apoyándote con una hoja de cálculo de Excel.

Nombres	Sexo	Estatura	Cuartil	N.° de polos
Marco	H	1,54		
Carla	M	1,63		
María	M	1,65		
Rocío	M	1,65		
Rosy	M	1,66		
Meche	M	1,66		
Felicia	M	1,66		
Juan	H	1,67		
Ramiro	H	1,67		
José	H	1,68		
Celia	M	1,68		
Pedro	H	1,69		
Noé	H	1,69		
David	H	1,7		
Matías	H	1,71		
Robert	H	1,72		
Luis	H	1,72		
Ricky	H	1,72		
Regina	M	1,73		
Jesús	H	1,73		

3. Relaciona las tallas con los cuartiles y da respuesta a la pregunta 1 de la situación inicial.

4. ¿Qué significa el tercer decil?

Z_MATe5V_PArt2_130-248.indd 179 29/09/17 17:41

5. Determina el número de estudiantes cuyas estaturas son menores o iguales al tercer decil.

6. Determina el rango y la mediana.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Cómo deben estar los datos cuando queremos calcular las medidas de localización?

2. ¿Por qué coincide la mediana con un cuartil?

Analizamos

Situación A

El Club de Danzas del colegio está formado por 15 estudiantes, quienes han decidido comprarse polos. Para saber sus tallas, midieron sus estaturas y obtuvieron los datos mostrados en la tabla. Plantearon como criterio para las tallas lo siguiente:

Talla *small*: menos que el decil 5. Talla *medium*: del cuartil 2 y menos que el cuartil 3. Talla *large*: todos los que tengan del cuartil 3 a más. Calcula el número de polos por cada talla.

Nombres	Amalia	Margot	Luisa	Janet	Jonás	Óscar	Andrés	Esther	Pío	Estela	Julio	Raúl	Olinda	María	Manuel
Sexo	M	M	M	M	H	H	H	M	M	M	H	H	M	M	H
Estatura	1,57	1,58	1,64	1,65	1,7	1,71	1,68	1,68	1,69	1,7	1,71	1,66	1,67	1,68	1,73

Resolución

Organizamos los datos en orden creciente y determinamos la ubicación de los cuartiles, así como el número de polos correspondiente.

Alumnos	Sexo	Talla	Cuartil	N.° de polos
Amalia	M	1,57		
Margot	M	1,58		
Luisa	M	1,64		6 polos
Janet	M	1,65		
Raúl	H	1,66		
Olinda	M	1,67		
Andrés	H	1,68		
Esther	M	1,68	Cuartil 2 = mediana	4 polos
María	M	1,68		
Pio	M	1,69		
Jonás	H	1,7	Cuartil 3	
Estela	M	1,7		
Oscar	H	1,71		5 polos
Julio	H	1,71		
Manuel	H	1,73		

1. ¿Cómo calcularías la mediana por simple inspección?

2. ¿En qué lugar se ubica el cuartil 3? ¿Por qué toma el valor 1,7?

3. ¿Qué observas respecto de la talla *medium* y el número de polos?

Situación B

En una prueba de Matemática aplicada a 18 estudiantes se obtuvieron los siguientes resultados: 12; 18; 15; 09; 11; 16; 14; 13; 12; 14; 10; 10; 13; 15; 17; 16; 14; 12. ¿Entre qué notas se encuentra el 25 % de estudiantes que poseen las mejores notas? Considera los valores hasta los décimos.

Resolución

- Ordenamos y organizamos los datos.

Estudiante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nota	9	10	10	11	12	12	12	13	13	14	14	14	15	15	16	16	17	18

- Reconocemos que hablar del 25 % superior implica el cuartil 3.
- Ubicamos el cuartil 3: $(3 \times 18)/4 = 13{,}5$
- Es decir, el cuartil 3 es el valor que ocupa el 13.° lugar, más el 0,5 de la diferencia con el siguiente.
- Por lo tanto: $C_3 = 15 + 0{,}5(15 - 15) = 15$

Respuesta:

El 25 % superior se encuentra comprendido en el intervalo [13; 18].

1. ¿Por qué se dice que "hablar del 25 % superior implica el cuartil 3"?

2. ¿Cómo hallarías el 25 % de estudiantes con menores notas?

Situación C

Para completar la ficha de condiciones físicas de una muestra de 30 estudiantes, se tomaron las medidas de sus masas corporales. La persona encargada de registrar estos datos extravió sus anotaciones, pero uno de los estudiantes recordó que los valores extremos fueron de 52 kg y 78 kg. Piden determinar el valor del rango y la mediana.

Resolución

(Encuentra el error)

- Sabemos que rango = valor máximo – valor mínimo.
- Entonces:

  Rango: $R = 78 - 52 = 26$ kg
- También sabemos que la mediana está en el punto medio de los datos de la distribución.
- En consecuencia:

  Mediana: $Me = \dfrac{78 + 52}{2} = 65$ kg

Respuesta:

El rango es 26 kg y la mediana, 65 kg.

1. Si se hubieran acordado de dos valores más, por ejemplo, 60 kg y 74 kg, ¿cómo calcularías la mediana? ¿Saldría lo mismo? ¿Qué conclusión sacas?

Practicamos

Una encuesta anónima para determinar la problemática de los vendedores ambulantes en un distrito dio como resultado los datos de la tabla que se muestra a continuación. En la tabla se aprecian las edades y el sexo (F: Femenino y M: Masculino) de dichos vendedores.

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Sexo	F	F	F	M	F	F	F	M	M	M	F	F	F	M	M	F	F	M	F	M
Edad	22	22	24	26	26	28	29	30	30	30	30	31	31	32	33	33	33	35	35	35

Posición	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Sexo	M	F	F	F	F	F	M	M	F	F	M	M	F	M	M	M	M	M	F	M
Edad	35	36	36	36	37	37	38	38	38	39	40	40	41	41	45	48	49	50	50	55

Con la información dada, responde las preguntas 1; 2; 3 y 4.

Resumen de medidas	
Medidas importantes	Valor
Mínimo	22,00
Decil 1	26,00
Decil 2	30,00
Cuartil 1	30,00
Decil 3	31,00
Decil 4	33,00
Decil 5, cuartil 2 y mediana	35,00
Decil 6	36,40
Decil 7	38,00
Cuartil 3	39,25
Decil 8	40,20
Decil 9	48,10
Máximo	55,00

1. El alcalde del distrito ha propuesto reubicar en un mercado a la mitad de dichos vendedores ambulantes, sobre todo a los mayores según su edad. De acuerdo con esta disposición, ¿cuál de las siguientes medidas de posición permitirá determinar la mitad de trabajadores que deben ser reubicados?

a) Cuartil 3

b) Quintil 2

c) Decil 6

d) Mediana

2. Considerando las edades mostradas en la tabla de resumen, ¿cómo se explica que el decil 2 y el cuartil 1 tengan el mismo valor?

a) Son medidas equivalentes.

b) Hay un error en el cálculo.

c) Las edades de ese valor se repiten varias veces.

d) Ambas medidas se calculan de la misma manera.

3. Considerando que ya se tienen hallados los cuartiles para las edades de los vendedores de la tabla de resumen, ¿cuál de las siguientes decisiones se puede tomar sobre dichos vendedores considerando esta medida de localización?

a) Dar un plazo de 60 días para dejar la calle al 80 % de vendedores más jóvenes.

b) Hacer un préstamo al 25 % de vendedores más jóvenes para que construyan un local.

c) Capacitar a los 2/3 de vendedores con mayor edad.

d) Asignar un local para ventas al 60 % de los vendedores de mayor edad.

4. Otra propuesta ha sido reubicar solo a las vendedoras mujeres de los quintiles 4 y 5. De ser así, ¿cuántas vendedoras serían reubicadas?

5. En un club privado conformado por 500 socios se desea conocer quiénes están dentro del 20 % de socios con mayor edad. ¿Cuál de las siguientes es la medida de posición que permitirá hallar dicho porcentaje de socios con mayor edad?

a) Mediana

b) Cuartil

c) Quintil

d) a y b

6. ¿Cuántos percentiles se pueden hallar para un conjunto de un millón de datos?

a) 9

b) 99

c) 1000

d) 99 000

7. En la hoja de cálculo de Excel, hay una versión en la que no se pueden calcular directamente los deciles ni los quintiles. ¿Cómo harías para hallar el decil 7 y el quintil 4?

Se ha realizado una prueba para determinar el nivel de autoestima en los estudiantes de quinto de secundaria. En la tabla 5 se presentan los resultados de autoestima hallados por cada estudiante en dicha prueba. Se sabe que la escala de puntajes va de cero (0) a cien (100) puntos.

Código	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Sexo	M	H	M	H	M	M	M	M	M	M	M	H	H	H	M	H	H	M	H	H
Autoestima	61	66	63	54	88	39	71	43	78	70	50	52	67	66	59	47	80	73	26	58

Código	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Sexo	H	H	M	H	H	H	H	M	H	M	M	H	H	H	H	M	M	M	M	H
Autoestima	78	39	42	82	54	56	68	80	54	51	52	73	69	81	58	56	55	74	59	56

Resumen de medidas	
Medidas importantes	**Valor**
Mínimo	22,00
Decil 1	26,00
Decil 2	30,00
Cuartil 1	30,00
Decil 3	31,00
Decil 4	33,00
Decil 5, cuartil 2 y mediana	35,00
Decil 6	36,40
Decil 7	38,00
Cuartil 3	39,25
Decil 8	40,20
Decil 9	48,10
Máximo	55,00

Con la información dada, responde las preguntas 8; 9 y 10.

8. A partir de los resultados de autoestima mostrados en las tablas, el director del colegio ha determinado que aquellos estudiantes cuyos puntajes pertenecen al quintil I y II recibirán un Programa de Recuperación de Autoestima. Se desea saber cuántos estudiantes recibirán este programa.

a) 8 **b)** 16 **c)** 20 **d)** 32

9. Los estudiantes que obtuvieron resultados de autoestima en el quintil III y IV participarán en un "Ciclo de charlas sobre autoestima y habilidades sociales", que será dividido según el sexo. Se desea conocer cuántas mujeres y hombres, respectivamente, participarán en este ciclo de charlas.

a) 5 hombres y 11 mujeres

b) 7 hombres y 9 mujeres

c) 6 hombres y 10 mujeres

d) 9 hombres y 7 mujeres

10. Se ha escuchado decir al subdirector del colegio que "deberían considerarse los cuartiles en lugar de los quintiles para tomar las decisiones", ya que solo son 40 estudiantes en quinto de secundaria (ver tablas). Si fuera así, con solo una medida de posición se podría saber qué estudiantes se ubican dentro del 25 % con autoestima más baja.

¿Con cuál de los cuartiles se podría saber qué estudiantes se ubican dentro del 25 % con autoestima más baja? ¿Entre qué valores se encuentran sus resultados?

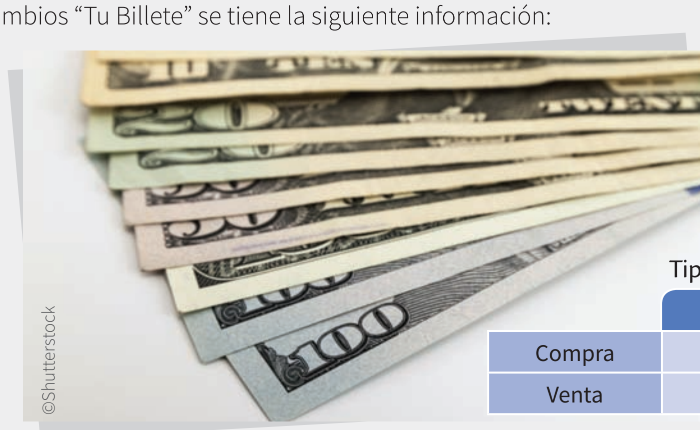
Ficha 16 El dinero

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de cantidad	Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones.	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico su comprensión sobre las operaciones con números racionales e irracionales usando redondeos o aproximaciones y usa este entendimiento para interpretar las condiciones de un problema en su contexto.
	Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.	Selecciona, combina y adapta estrategias de cálculo, estimación, recursos y procedimientos diversos para realizar operaciones con racionales y raíces inexactas aproximadas e intervalos, y para simplificar procesos usando las propiedades de los números y las operaciones.
	Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.	Plantea y compara afirmaciones sobre las propiedades de las operaciones con raíces inexactas aproximadas u otras relaciones numéricas que descubre, y las justifica con ejemplos, contraejemplos y propiedades de los números y las operaciones.

Aprendemos

El dólar estadounidense, cuyo símbolo es “$”, es una de las monedas más estables del sistema financiero mundial; de ahí que se lo utilice como unidad de cambio en muchos países. En el Perú, el dólar se cambia según la ley de oferta y demanda. Esto hace que su precio varíe diariamente, y aun dentro del día, puede tener fluctuaciones en su valor con respecto al sol.

En la casa de cambios “Tu Billete” se tiene la siguiente información:



Tipo de cambio

	Dólares	Euros
Compra	S/3,22	S/3,35
Venta	S/3,38	S/4,12

Ricardo desea comprar dólares para pagar una deuda de $500.

1. ¿Cuánto dinero requiere tener Ricardo en soles como mínimo para poder comprar los dólares que necesita y pagar su deuda?
2. Como Ricardo solamente tiene 1500 soles, ¿cuántos dólares podrá comprar con dicho dinero? ¿Cuántos dólares debería aún?
3. Con la finalidad de poder terminar de pagar su deuda en dólares, Ricardo decide cambiar sus 40 euros a soles y luego cambiar estos a dólares en la casa de cambio "Tu Billete". ¿Le alcanzarán estos 40 euros para pagar su deuda?

Comprendemos el problema

1. ¿Qué datos te dan?

2. ¿Qué te piden hallar?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia te sirve para resolver el problema? ¿Por qué?

a) Establecer submetas **b)** Hacer una ecuación **c)** Realizar un diagrama tabular

2. ¿Qué conocimiento aplicarías conjuntamente con la estrategia elegida?

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Aplica tu plan para responder la primera pregunta de la situación inicial.

2. ¿Qué tipo de cambio usará Ricardo para comprar dólares?

3. Calcula la cantidad de dólares que inicialmente compra Ricardo.

4. ¿Qué calcularías a continuación? Hazlo.

5. ¿Qué te falta averiguar?

6. Responde la pregunta 3 de la situación inicial. Da un orden a tus cálculos.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Por qué en el punto 1 de *Ejecutamos la estrategia o plan* se utilizó ese tipo de cambio?

2. ¿Podrías establecer un tipo de cambio entre dólares y euros? ¿Cuál sería?

Z_MATe5V_PArt2_130-248.indd 191 28/09/17 17:34

Analizamos

Situación A

El reloj que se muestra está programado para dar la temperatura ambiental cada dos horas. Luis ha estado anotando las temperaturas desde la mañana, según la siguiente tabla:

Hora	4	6	8	10
Temperatura (°C)	15,4°	18,5°	26,6°	32°

©Shutterstock

¿Cuál es el promedio de temperatura entre las 8 y las 10 a. m.?

¿Entre qué horas se produjo el mayor aumento de temperatura?

Se sabe que la temperatura al mediodía es el doble de la temperatura a las 6 a. m. ¿Cuál es la temperatura al mediodía?

Resolución

- Como disponemos solo de dos datos en ese intervalo, entonces el promedio de esta temperatura es:
  (26,6 + 32)/2 = 29,3 °C
- Elaboramos una tabla para apreciar los aumentos de temperatura.

Hora	4	6	8	10
Temperatura (°C)	15,4°	18,5°	26,6°	32°
Incremento	...	3,1	8,1	5,4

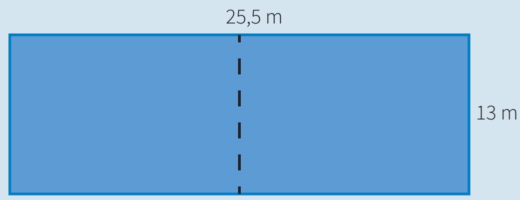
- Y ahora, por simple inspección, observamos que el mayor aumento se produjo entre las 6 y 8 a. m.
- Calculamos la temperatura al mediodía; sería: 2 × 18,5 = 37 °C

1. ¿Habrá otros valores de temperatura entre las 8 y 10 a. m.? ¿Qué pasaría con el promedio? Propón dos medidas más en el intervalo y observa qué pasa con el promedio.

2. Por lo general, ¿qué esperamos que ocurra con la temperatura entre las 6 a. m. y el mediodía? Para este problema, propón algunas temperaturas que no serían probables de presentarse en el intervalo de 6 a. m. a 10 a. m.

Situación B

El señor Ramírez dejó en herencia un terreno de forma rectangular cuyas medidas se muestran en la figura. Su voluntad fue que sea dividido entre sus dos hijos de manera que cada uno tuviese la mitad. ¿Cuál es el área de terreno que le corresponde a cada hijo si se divide como se muestra en la figura?



Resolución

- Datos

  Medidas del terreno:

  Largo: $l = 25{,}5$ m

  Ancho: $h = 13$ m

  Área: $A = 331{,}5\ m^2$

- Al partir como se indica, las áreas resultantes serían:

  Largo: $l_1 = 12{,}75$ m

  Ancho: $h_1 = 13$ m

  Área: $A_1 = l_1 \times h_1 = 165{,}75\ m^2$

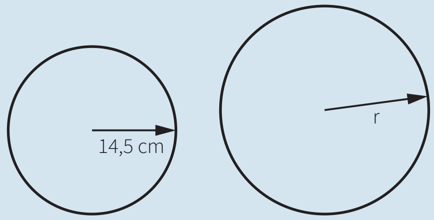
1. ¿De qué otra forma sencilla se puede dividir el terreno? ¿Cuáles serían sus dimensiones?

2. Propón otras formas sin afectar la herencia.

Situación C

A continuación, se muestra el lente menor de un telescopio astronómico, cuyo radio es de 14,5 cm. Se sabe que el lente mayor de dicho telescopio tiene el doble de superficie que el lente menor.

¿Cuál es el radio del lente mayor del telescopio astronómico?



Lente menor Lente mayor

Resolución

(Encuentra el error)

- Dato; radio del lente menor: 14,5 cm
- También sabemos que el área del lente mayor es el doble del área del lente menor.
- Entonces, el radio del lente mayor será el doble del radio menor, es decir:

  Radio del lente mayor: $2 \times 14,5 = 29$ cm

1. Con el radio hallado, calcula el área del lente mayor. ¿Es lo esperado? ¿Tienes alguna sugerencia? Realízala.

Practicamos

1. La receta para un pastel requiere 2/5 de taza de chocolate. Margarita hará 5 pasteles. ¿Cuánto de chocolate necesita?

a) 7/5 de taza **b)** 2 tazas **c)** 2,5 tazas **d)** 10,5 tazas

2. Elena va de compras con S/180. Gasta 2/3 de esa cantidad en ropa. ¿Cuánto de dinero le queda?

a) S/40 **b)** S/60 **c)** S/90 **d)** S/120

3. El tiempo de funcionamiento de un foco de la marca "Luz Vital" es de 1600 horas, con un intervalo de confianza de ± 4,25 horas. ¿Cuál de los siguientes intervalos representa de manera correcta el intervalo de confianza para el tiempo de funcionamiento del foco "Luz Vital" según los datos?

a) [1542,5; 1642,5] horas

b) [1595,75; 1604,25] horas

c) [–1595,75; –1604,25] horas

d) [1425; – 1625] horas

4. Raúl está aprendiendo las propiedades de las operaciones con números racionales. En una de las tareas que le dejaron le pedían lo siguiente:

"Expresa con tus propias palabras la propiedad de densidad en los números racionales y escribe un ejemplo que ilustre dicha propiedad".

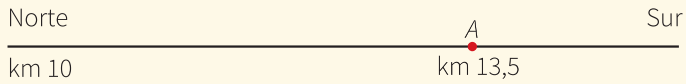
5. Marcos gana S/18,5 por hora, y se le descuenta S/6,20 por tardanza. Si un día trabajó 5 horas, pero llegó tarde, ¿cuánto ganó ese día?

a) S/86,3 **b)** S/92,3 **c)** S/92,5 **d)** S/94,0

6. La medida estándar ($\overline{X}$) para el diámetro de los neumáticos nuevos de un automóvil es 13 pulgadas. Por ello, antes de salir al mercado pasan por un control de medidas cuya tolerancia es de 0,2 % por encima y debajo de la medida estándar. ¿Cuál es el intervalo de tolerancia para las medidas del diámetro de los neumáticos nuevos?

a) [11 ; 15] **b)** [12,98 ; 13,02] **c)** [12,74 ; 13,26] **d)** [11,02 ; 13,02]

7. En la siguiente gráfica se muestra una autopista que va de norte a sur, en la cual hay un puente peatonal A. Se construyó otro puente B, tal que el puente A está a 600 m al norte del puente B. ¿A la altura de qué km se encuentra el puente peatonal “B”?



8. Se sabe que los metales y otros materiales se dilatan con el calor.

Una varilla de hierro de 43 cm de longitud ha sido calentada desde 45 °C hasta 90 °C. ¿Cuál es su longitud final?

Se sabe que la expresión que permite calcular la longitud final debido a la dilatación es:

$L_f = L_i(1 + \alpha \, \Delta t)$

Donde:

L_f: Longitud final

L_i: Longitud inicial

α: Coeficiente de dilatación ($\alpha = 1{,}2 \times 10^{-5}$ °C^{-1})

Δt: Temperatura final – Temperatura inicial

a) 43,200 22 **b)** 43,023 22 **c)** 44,200 22 **d)** 44,023 22

9. Con los datos del problema anterior, ¿cuál es la longitud final de la varilla de hierro si la temperatura disminuye desde 40 °C hasta 0 °C?

a) 41,649 36 **b)** 42,480 36 **c)** 42,979 36 **d)** 42,999 36

10. En una competencia de velocidad, el atleta que va delante ha recorrido 560 m desde el inicio; el último se encuentra 2/5 más atrás, y el penúltimo está 40 metros por delante del último. Elabora una gráfica en la que señales la distancia del penúltimo atleta en relación con el último y el primero.

Ficha 17

Colonia de bacterias

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades y condiciones de equivalencia o variación entre magnitudes, y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen a ecuaciones cuadráticas ($ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ y $a \in \mathbb{Q}$).
	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos o procedimientos para hallar términos desconocidos de ecuaciones cuadráticas.
	Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	Justifica la naturaleza de las soluciones de una ecuación cuadrática reconociendo el discriminante.

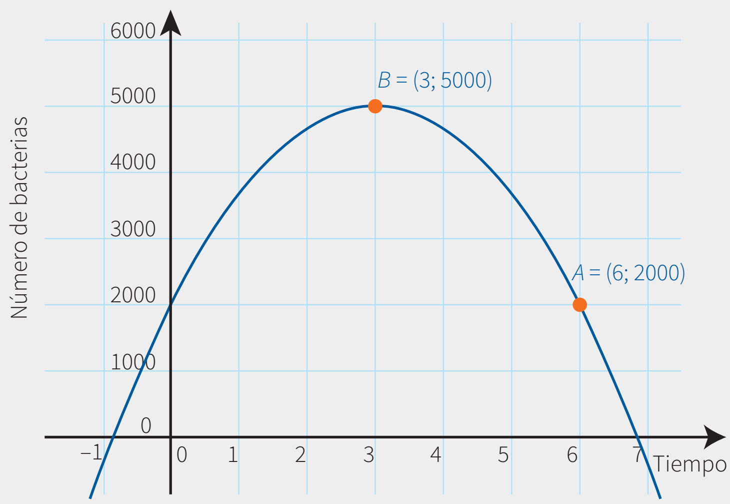
Aprendemos

Las bacterias son microorganismos unicelulares microscópicos capaces de producir fermentaciones y enfermedades. Las hay aquellas que son beneficiosas, como las que facilitan la digestión, pero también las que provocan la tuberculosis, el cólera, entre algunas de las enfermedades.

Las bacterias se reproducen con mucha rapidez si el medio es apropiado, pero cuando es inadecuado, la población decrece rápidamente.

La gráfica representa la forma como varía una colonia de bacterias en un ambiente con escasez de recursos.

En el eje vertical se aprecia la cantidad de bacterias, mientras que en el eje horizontal está el tiempo transcurrido en horas.



1. ¿Cuál es la función cuadrática asociada a la gráfica?
2. ¿Después de cuántas horas la colonia deja de ser prolífica?
3. ¿Cuántas horas deben pasar para que la colonia esté destruida?

Comprendemos el problema

1. ¿Qué datos te da el problema?

2. ¿Cuáles son las incógnitas del problema?

3. ¿Qué valores destacan en la gráfica?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Cuál de las curvas corresponde a la gráfica?
   a) Hipérbola
   b) Parábola
   c) Elipse
   d) Circunferencia
2. Las propiedades de la curva elegida, ¿cómo te ayudan a resolver el problema?

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Relaciona la ecuación de la curva que has elegido con los datos del problema. Responde la pregunta 1 de la situación inicial.

2. Observa bien la curva. ¿Es creciente o decreciente?

3. Determina la hora en que la colonia deja de seguir creciendo.

4. Después de la hora encontrada en el paso anterior, ¿qué ocurrirá con la población de bacterias? ¿Qué implica con los valores de Y (la ordenada)?

5. ¿Qué punto de la gráfica está asociado con la eliminación de todas las bacterias? ¿Qué tiempo demora en desaparecer la población de bacterias?

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿En esta función hay valores máximos y mínimos? ¿En la misma gráfica?

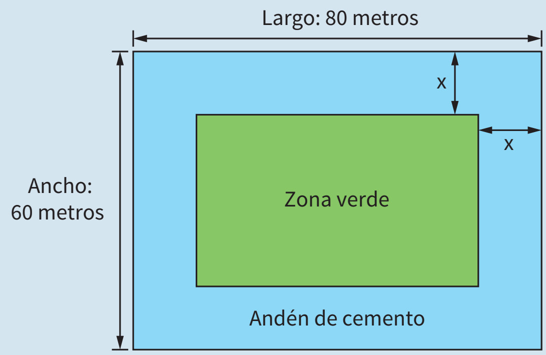
2. ¿Qué conocimientos han sido importantes para resolver este problema? ¿Podrán aplicarse en otras situaciones?

Analizamos

Situación A

En un conjunto cerrado se quiere construir una zona verde para la recreación de los habitantes. El administrador dispone de una zona rectangular de 80 m de largo por 60 m de ancho. Sin embargo, se construirá un andén de cemento que rodee la zona verde para caminar o correr con las condiciones que se observan en la figura.

Según la información, determina el área de la zona verde en función del ancho (x) del andén y el valor de dicho ancho si el área de la zona verde es la mitad del área disponible.



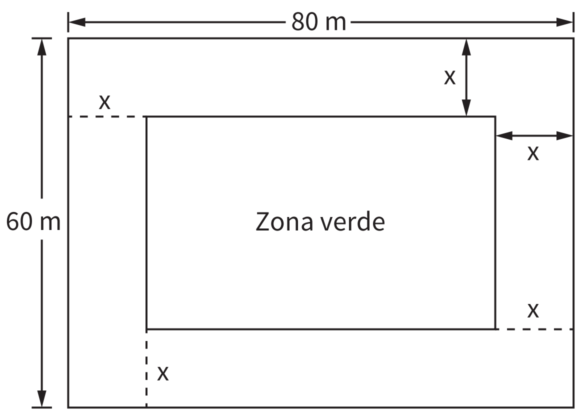
Resolución

$A_{ZV}(x)$: área de la zona verde en función de x

$A_{ZV}(x) = (80 - 2x)(60 - 2x)$

$A_{ZV}(x) = 4800 - 120x - 160x + 4x^2$

$A_{ZV}(x) = 4x^2 - 280x + 4800$



Área zona verde $= \frac{1}{2}$ área total

$4x^2 - 280x + 4800 = \frac{1}{2}(4800)$

$4x^2 - 280x + 4800 = 2400$

$4x^2 - 280x + 2400 = 0$

$x^2 - 70x + 600 = 0$

x —— $-60 \rightarrow x - 60 = 0;\ x = 60$ m

x —— $-10 \rightarrow x - 10 = 0;\ x = 10$ m

Respuesta:

El ancho del andén es de 10 m.

1. ¿Entre qué valores enteros fluctúa el ancho del andén?

2. ¿Entre qué valores enteros fluctúa el ancho del andén, cumpliendo todas las condiciones del problema?

Situación B

Carlos calculó que la velocidad de escape de los gases en el motor de un cohete satisface la ecuación $x^2 - 6x + 45 = 0$. Si la ecuación tiene soluciones reales, la cámara de combustión no sufre daños; pero si las soluciones son complejas, la cámara corre el riesgo de dañarse. ¿Puede funcionar el cohete con esta velocidad de escape de los gases?

Resolución

- Sea la velocidad de escape $x^2 - 6x + 45 = 0$
- Si analizamos el discriminante de esta ecuación, para $a = 1$; para $b = -6$; para $c = 45$

$$b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(45) = -144$$

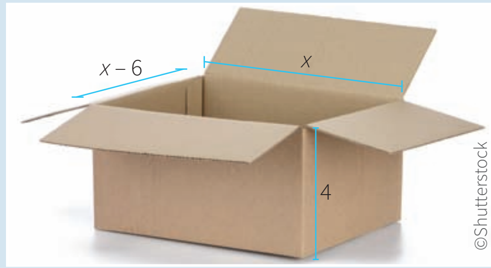
- Al aplicar la fórmula de resolver ecuaciones de segundo grado tendríamos que sacar la raíz cuadrada de –114, que nos conduciría a valores del conjunto de números complejos.
- Aplicando el criterio dado, podemos afirmar que la cámara corre el riesgo de dañarse.

1. Con respecto al valor de discriminante, ¿qué criterios equivalentes podemos plantear?

Situación C

Una compañía de alimentos necesita una caja para conservar sus productos. Las características de ella se muestran en la figura, con un volumen igual a 32 dm^3.

Determina el valor de x.



Resolución

(Encuentra el error)

- Sabemos que el volumen de un paralelepípedo es el producto de sus dimensiones; entonces, la expresión del volumen de esta caja es:

$$f(x) = 4(x)(x - 6)$$

- Como conocemos el volumen, podemos igualar la expresión: $4(x)(x - 6) = 32$
- Efectuando e igualando a cero:

$$4x^2 - 24x - 32 = 0$$

- Simplificando: $x^2 - 6x - 8 = 0$
- Factorizando: $(x - 4)(x - 2) = 0$
- De donde: $x = 4$ y $x = 2$

1. Comprueba si los dos valores hallados cumplen con el volumen dado.

2. Si todo está conforme, emplea otra estrategia para resolver el problema. Si hubiera algún error, es tiempo de corregirlo.

Practicamos

En el estudio del lanzamiento de proyectiles o movimiento parabólico, las funciones cuadráticas tienen un papel fundamental, ya que permiten describir la velocidad, la altura o el alcance, entre otros elementos, todo en razón del tiempo.

Un movimiento que se asemeja al tiro parabólico es el del lanzamiento de una pelota de básquet.

En cierto lanzamiento, se analizó que la altura *H*, en metros, que alcanzaba la pelota en función del tiempo *t*, medido en segundos, estaba dada por la función:

$$H(t) = -5t^2 + 4t$$

Con la información dada, responde las preguntas 1; 2 y 3.

1. El tiempo total *t* que el balón permaneció en el aire hasta pasar por la canasta, se puede calcular resolviendo la ecuación:

a) $-5t^2 + 4t = 5$, porque el balón alcanza una altura de 5 cm.

b) $-5t^2 + 4t = 20$, porque el balón toca la canasta a 20 m de distancia del lanzamiento.

c) $-5t^2 + 4t = 0$, porque es el tiempo en el cual el balón toca la canasta.

d) $-5t^2 + 4t = 4/5$, porque el balón alcanza su altura máxima.

2. Al resolver la ecuación seleccionada en la pregunta 1, se obtiene que el tiempo total que permaneció el balón en el aire es:

a) 2 segundos

b) $\frac{4}{5}$ segundos

c) 10 segundos

d) $\frac{5}{4}$ segundos

3. La altura máxima ($H_{máx}$) que alcanza el balón desde el suelo hasta el punto más alto del movimiento es:

a) $\frac{2}{5}$ m **b)** $\frac{4}{5}$ m **c)** $\frac{5}{2}$ m **d)** $\frac{8}{5}$ m

4. El movimiento de cierta pelota puede expresarse mediante la función $f(x) = -5x^2 + 20x + 10$, donde x representa el tiempo en segundos y $f(x)$, la altura en metros.

¿Qué altura alcanza la pelota al cabo de dos segundos?

5. Jairo encuentra el voltaje de un circuito eléctrico que puede representarse mediante la siguiente ecuación:

$$x^2 - 2x + 10 = 0$$

Sabe que, si la ecuación tiene soluciones reales, el voltaje del circuito es directo; pero si las soluciones son números complejos, es alterno.

¿Qué clase de voltaje tiene el circuito diseñado por Jairo?

a) No tiene voltaje **b)** Voltaje complejo **c)** Voltaje directo **d)** Voltaje alterno

6. Un proyectil, que lanzamos verticalmente con una velocidad inicial de 200 m/s, se mueve cumpliendo con la ecuación $h = f(t) = 200t - 5t^2$, en donde h es la altura a la que se encuentra en cada instante (t).

¿Cuál es su tiempo de vuelo?

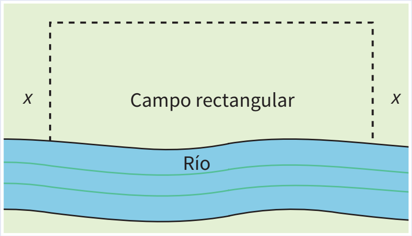
a) 30 m **b)** 40 m **c)** 20 m **d)** 50 m

7. El profesor de Matemática pide a sus estudiantes que resuelvan la ecuación $3x^2 + 7x - 6 = 0$. Uno de ellos obtuvo como solución $x_1 = -3$ y $x_2 = \frac{2}{3}$; en cambio, otro de los estudiantes dijo $x_1 = 3$ y $x_2 = -\frac{2}{3}$. ¿Quién tiene la razón?

8. José y Pedro son dueños de una empresa de alquiler de autos. La utilidad en soles que tienen por alquilar un auto durante un tiempo t (en horas) está dada por $U(t) = -t^2 + 8t$. A partir de la información, podemos decir que la empresa genera utilidades cuando:

a) $t > 8$ **b)** $t > 0$ **c)** $t < 8$ **d)** $t < -8$

9. Un granjero cercará un campo rectangular, como se muestra en la figura, pero no será necesario cercar a lo largo del río. Si se sabe que el perímetro que se cercará es de 3400 m, expresa el área del campo en función del ancho x de este.



a) $A(x) = 3400x - 2x^2$ **b)** $A(x) = 2x^2 + 3400$ **c)** $A(x) = 3400x^2$ **d)** $A(x) = x^2 + 3400$

10. Determina el valor que debe tener K en la siguiente ecuación:

$(K + 2)\,x^2 + (5K + 2)x + 3K + 1 = 0$, para que la suma de sus raíces sea 6.

Z_MATe5V_PArt2_130-248.indd 212 28/09/17 17:34

Ficha 18

La prueba de Comunicación

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre	Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.	Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático la pertinencia de las medidas de tendencia central en relación con la desviación estándar, según el contexto de la población en estudio.
	Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.	Adapta y combina procedimientos para determinar medidas de tendencia central, desviación estándar de datos continuos y medidas de localización.
	Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.	Plantea y contrasta afirmaciones o conclusiones sobre las características o tendencias de una población a partir de sus observaciones o análisis de datos. Las justifica con ejemplos y contraejemplos, usando sus conocimientos y la información obtenida en su investigación.

Aprendemos

En muchos ámbitos del quehacer laboral y de la investigación es frecuente escuchar frases como “La desviación típica del peso de los estudiantes es muy grande” o “La media de las estaturas presenta poca desviación”. Estas son medidas de dispersión estadística, entre otras, que se utilizan para tomar decisiones y constituyen importantes fuentes para el análisis de datos y variables. A continuación, veamos un caso.

Los puntajes de una prueba de Comunicación de un grupo de estudiantes de quinto grado de secundaria se muestran en la siguiente tabla:

N.°	Sexo	Notas
1	M	14
2	H	16
3	M	14
4	H	12
5	M	17
6	M	10
7	M	16
8	M	12
9	M	17
10	M	17

1. El profesor cree que el rango de los puntajes obtenidos en la prueba es muy grande. ¿Cuál es este rango?
2. El profesor del curso ha señalado que, si la desviación media de dicha prueba es mayor de 2, les dará otra oportunidad y rendirán otro examen. ¿Tomarán otra prueba de Comunicación a los estudiantes de quinto? (Se sabe que la media de los datos es 14,5).
3. Al ver la media de la prueba (14,5), el profesor del curso ha señalado que “una varianza de hasta 4,5 indicaría buenos resultados”. ¿Cuál es la varianza de los puntajes del examen de Comunicación?
4. Con la finalidad de estar seguro de la distribución de los puntajes, el profesor decide que será la desviación estándar la que defina si se toma o no otra prueba; por ello, ha señalado que “si el doble de la desviación estándar es mayor que 4,5 se tomará otro examen”.

Comprendemos el problema

1. ¿Qué datos te dan?

2. ¿Qué otra información de importancia te proporcionan en este problema?

3. ¿Qué te piden hallar?

4. ¿Qué finalidad tienen algunas de las medidas de tendencia central que vas a calcular?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué plan propones para resolver el problema?

2. ¿Qué conocimiento necesitas aplicar en la solución?

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Organiza tus datos en la tabla. Completa la frecuencia absoluta y la frecuencia acumulada.

X_i	n_i	N_i	$[\lvert X_i - X\rvert] \times n_i$	$[X_i - X]^2 \times n_i$
10	1	1		
12				
14				
16				
17				

2. Determina el rango. En tu opinión, ¿crees que es grande?

3. Calcula la desviación media. Para esto, completa la columna correspondiente:

X_i	n_i	N_i	$[\lvert X_i - X\rvert] \times n_i$	$[X_i - X]^2 \times n_i$
10	1	1		
12				
14				
16				
17				

4. Da respuesta a la pregunta 2 de la situación inicial.

5. Calcula la varianza. Completa la tabla.

X_i	n_i	N_i	$[\lvert X_i - X\rvert] \times n_i$	$[X_i - X]^2 \times n_i$
10	1	1	4,50	20,25
12				
14				
16				
17				

6. Interpreta el valor de la varianza.

7. Calcula la desviación estándar y responde lo solicitado.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Hay suficientes argumentos como para aplicar otra prueba?

2. Propón otras situaciones en las que sea conveniente ver el grado de variabilidad de los datos.

Analizamos

Situación A

La compañía farmacéutica "Mediplús" llevó a cabo un estudio clínico con 20 personas para probar la efectividad del medicamento "Radinul". Este se ha diseñado para ser un potente y seguro tratamiento que reduzca los elevados niveles de colesterol. El estudio se realizó en 12 semanas, en las cuales los participantes ingirieron una pastilla diaria de Radinul. La base de datos obtenida se muestra en la tabla de la derecha, en la cual se aprecian los niveles de colesterol "Antes" y "Después" del tratamiento. Se sabe que las medias del nivel de colesterol "Antes" y "Después" del tratamiento son 264,4 y 167,1, respectivamente.

a) ¿Cuál es el rango del nivel de colesterol antes del tratamiento con Radinul?

b) Con la finalidad de determinar el intervalo que agrupe los datos alrededor de la media "antes del tratamiento", los responsables del estudio han decidido utilizar la desviación media (DM). ¿Cuál es el intervalo que agrupa los datos alrededor de la media utilizando la DM?

Código	Género	Nivel de colesterol	
		Antes	Después
1	2	230	173
2	2	2667	173
3	1	312	168
4	1	314	168
5	1	306	169
6	1	292	169
7	1	249	162
8	1	230	162
9	1	232	165
10	1	269	165
11	2	230	168
12	2	267	169
13	2	312	168
14	2	314	169
15	2	306	176
16	2	292	176
17	2	249	168
18	2	230	168
19	1	118	153
20	1	269	153

Resolución

- Cálculo del rango

  Se sabe que, el rango es igual a la diferencia del valor máximo menos el valor mínimo.

  Valor Máximo: 314; Valor Mínimo: 118

  Rango: 314 – 118 = 196

- Cálculo de la desviación media

  Elaboramos una tabla de frecuencia.

  Se calcula $|x_i - x| \times n_i$

  Por dato: $\overline{x}_{\text{ANTES}} = 264{,}4$

  Se suman los valores $[|X_i - \overline{X}|] \times n_i$; en este caso $\Sigma\, [|X_i - X|] \times n_i = 694{,}40$.

  Se divide el valor hallado por el total de datos; en este caso $n = 20$.

X_i	n_i	N_i	$[\lvert X_i - X\rvert] \times n_i$
118	1	1	146,40
230	4	5	137,60
232	1	6	32,40
249	2	8	30,80
267	2	10	5,20
269	2	12	9,20
292	2	14	55,20
306	2	16	83,20
312	2	18	95,20
314	2	20	99,20

$$DM = \frac{\Sigma|x_i - x|}{n} = \frac{690}{20} = 34{,}72$$

- El intervalo pedido es: [Media – DM ; Media + DM]

  Es decir: [229,68 ; 299,12]

1. ¿Cuál es el nivel de colesterol que tienen más personas? ¿Se encuentra dentro del intervalo hallado?

2. ¿Qué crees que les ocurrirá después de medicarse? Argumenta tu respuesta.

3. Plantea dos ventajas que te ofrece la estadística.

Situación B

La compañía "Mediplús" le había solicitado al equipo de investigadores que le informase sobre la tendencia en los niveles de colesterol antes y la variación del nivel. ¿Cuál fue la respuesta?

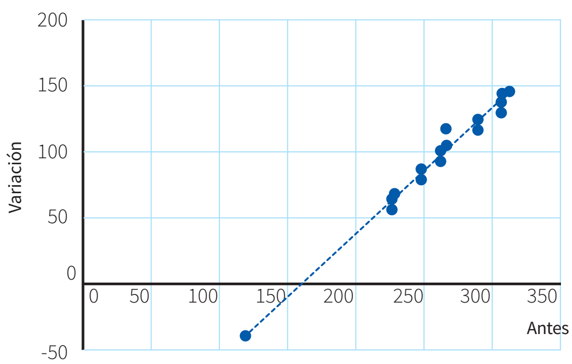
Resolución

- Hallamos la variación del nivel de colesterol.

Antes	118	230	230	230	230	232	249	249	267	267	269	269	292	292	306	306	312	312	314	314
Variación	–35	57	68	62	62	67	87	81	94	98	104	116	123	116	137	130	144	144	146	145

- Hacemos el diagrama de dispersión.

Para ver la tendencia trazamos una recta que se ajuste a los datos:



Respuesta: El incremento de la disminución de colesterol es creciente. Cuanto más colesterol se tenía antes, este disminuye más.

1. ¿Cómo se ha hallado la variación?

2. ¿Cómo es la dispersión de los datos?

3. ¿Qué se puede obtener con la recta de tendencia?

Situación C

Según un informe de la Asociación Americana del Corazón, los niveles de colesterol son como se observa en la tabla de la derecha.

Se sabe que $\overline{X}_{antes} = 264,4$; por tanto, conocemos que en promedio las personas que participan en el estudio tienen un nivel elevado de colesterol, por lo que los responsables esperan que la varianza sea menor de 1800. ¿Cuál es la varianza del nivel de colesterol antes del tratamiento en las personas que participan en este estudio?

Nivel	Situación
Menos de 200 mg/dl	Deseable (menor riesgo)
200 a 239 mg/dl	Límite elevado (mayor riesgo)
240 mg/dl y superior	Elevado (más del doble de riesgo que el nivel deseable)

Resolución

(Encuentra el error)

- Se calcula $[X_i - \overline{X}]^2 \times n_i$

  Se suman los valores $[X_i - \overline{X}]^2 \times n_i$; en este caso:

  $\Sigma\, [X_i - X]^2 \times n_i = 42\,182,80$

  Se divide el valor hallado entre el total de datos; en este caso:

  $n = 20$.

  $$S^2 = \frac{\Sigma [X_i - X]^2 \times n_i}{n} = \frac{42\,182,80}{20} = 2109,14$$

Respuesta: Finalmente, la varianza del nivel de colesterol antes del tratamiento es 2109,14.

X_i	n_i	N_i	$[X_i - X]^2 \times n_i$
118	1	1	21 432,96
230	4	5	4733,44
232	1	6	1049,76
249	2	8	474,32
267	2	10	13,52
269	2	12	42,32
292	2	14	1523,32
306	2	16	3461,12
312	2	18	4531,52
314	2	20	4920,32

1. ¿Cómo interpretas la varianza?

2. ¿Qué otra medida podríamos hallar a partir de la varianza y cómo se calcularía?

Practicamos

Una encuesta anónima para determinar los niveles de agresividad e inteligencia emocional se llevó a cabo en un grupo de estudiantes de quinto de secundaria de un colegio. En la tabla de la derecha, se muestran los puntajes obtenidos en cada variable. Asimismo, se conoce el sexo (M: Mujer y H: Hombre) de dichos estudiantes. También, se sabe que las medias de las variables son:

$$\bar{x}_{\text{agresividad}} = 0{,}65; \bar{x}_{\text{int. emoc}} = 41{,}95$$

Se recomienda utilizar una hoja de cálculo (Excel) para facilitar las operaciones.

Con la información dada, responde las preguntas 1; 2; 3 y 4.

N.º	Nombres	Sexo	Agresividad	Inteligencia emocional
1	José	H	0,68	38
2	Marco	H	0,54	53
3	David	H	0,70	35
4	Robert	H	0,30	66
5	María	M	0,54	54
6	Rosy	M	0,66	50
7	Luis	H	0,83	28
8	Carla	M	0,63	47
9	Regina	M	0,73	31
10	Meche	M	0,66	45
11	Pedro	H	0,43	50
12	Juan	H	0,67	44
13	Celia	M	0,74	26
14	Matías	H	0,71	33
15	Jesús	H	0,73	27
16	Ramiro	H	0,67	42
17	Noé	H	0,69	39
18	Ricky	H	0,72	36
19	Rocío	M	0,65	48
20	Felicia	M	0,64	47

1. ¿Cuál es el rango del nivel de agresividad de los estudiantes de quinto de secundaria?

a) 0,04 **b)** 0,40 **c)** 0,50 **d)** 0,53

2. Con la finalidad de establecer la amplitud de puntajes en inteligencia emocional, se desea calcular el rango de los valores de la tabla para el grupo de estudiantes. ¿Cuál es el rango de los puntajes mostrados en la tabla?

a) 30 **b)** 40 **c)** 42 **d)** 45

3. Con la finalidad de establecer diferencias por sexo para la variable "agresividad", los responsables de la encuesta desean saber si el rango presenta diferencias cuando se agrupa por sexo a los estudiantes. Determina si el rango de los puntajes de agresividad mostrados en la tabla es mayor en los hombres o en las mujeres.

a) El rango es mayor en los hombres.

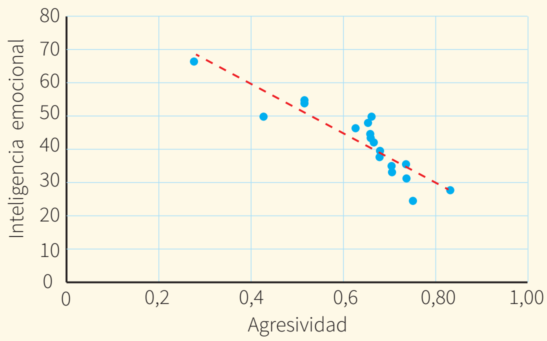
b) El rango es mayor en las mujeres.

c) Es igual en ambos.

d) No se puede determinar.

4. Con la finalidad de establecer diferencias por sexo para la variable "inteligencia emocional", los responsables de la encuesta desean saber si el rango presenta diferencias cuando se agrupa por sexo a los estudiantes. Determina si el rango de los puntajes de inteligencia emocional es mayor en los hombres o en las mujeres.

Considerando los valores de agresividad e inteligencia emocional, se ha elaborado una gráfica de dispersión de puntos de dichos valores en el plano cartesiano.



Con la información dada, responde las preguntas 5 y 6.

5. ¿Qué características tiene la recta de tendencia?

a) Es creciente y relaciona la agresividad con los hombres.

b) Es decreciente y relaciona la inteligencia emocional de la mujeres con la agresividad de los hombres.

c) Es decreciente y relaciona la agresividad de los estudiantes con su inteligencia emocional.

d) Es creciente la agresividad de los hombres en relación con la inteligencia emocional de las mujeres.

6. ¿Qué se puede concluir de la gráfica anterior, en relación con la agresividad y la inteligencia emocional de los estudiantes?

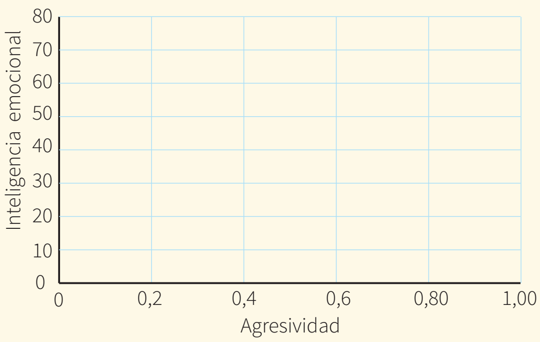
a) Existe relación inversa entre la agresividad y la inteligencia emocional.

b) Existe relación directa entre la agresividad y la inteligencia emocional.

c) No existe relación entre la agresividad y la inteligencia emocional.

d) No se puede llegar a ninguna conclusión.

7. Considerando los valores, mostrados en la tabla, de agresividad e inteligencia emocional de los varones, elabora una gráfica de dispersión de puntos de dichos valores y la línea de tendencia en el siguiente plano cartesiano:



N.º	Nombres	Sexo	Agresividad	Inteligencia emocional
1	José	H	0,68	38
2	Marco	H	0,54	53
3	David	H	0,70	35
4	Robert	H	0,30	66
5	María	M	0,54	54
6	Rosy	M	0,66	50
7	Luis	H	0,83	28
8	Carla	M	0,63	47
9	Regina	M	0,73	31
10	Meche	M	0,66	45
11	Pedro	H	0,43	50
12	Juan	H	0,67	44
13	Celia	M	0,74	26
14	Matías	H	0,71	33
15	Jesús	H	0,73	27
16	Ramiro	H	0,67	42
17	Noé	H	0,69	39
18	Ricky	H	0,72	36
19	Rocío	M	0,65	48
20	Felicia	M	0,64	47

8. Los responsables de la encuesta han señalado que, si la desviación media de los niveles de agresividad es menor o igual a 0,05 (DM ≤ 0,05), puede considerarse que la agresividad en dicho grupo de estudiantes requiere ser atendida por un psicólogo, mientras que si es superior, bastaría con que su tutor conversara con ellos.

Completa la tabla, calcula la desviación media y responde: ¿Cuál de las dos decisiones deberá tomarse con los estudiantes encuestados de quinto de secundaria?

a) Deberán ser atendidos por un psicólogo.

b) El tutor deberá conversar con los estudiantes.

c) No se puede determinar la DM de agresividad.

d) Debería intervenir el director.

X_i	n_i	N_i	$[X_i - X]^2 \times n_i$
0,3	1	1	0,119 37
0,43	1	2	0,046 44
0,54	2	4	0,022 26
0,63	2	6	
0,65	1	7	0,000 02
0,66	3	10	
0,67	1	11	0,000 60
0,68	2	13	0,002 38
0,71	2	15	0,008 32
0,73	3	18	0,021 42
0,74	1	19	0,008 93
0,83		20	

9. Con la finalidad de determinar la dispersión de los niveles de agresividad, los responsables de la encuesta deciden tomar en cuenta la varianza. ¿Cuál es el valor de la varianza del nivel de agresividad en los estudiantes de quinto de secundaria? (Considera como dato la respuesta de la pregunta 8).

a) 0,01 **b)** 0,10 **c)** 0,26 **d)** 2,60

10. Con la finalidad de precisar la dispersión de datos entre las variables “agresividad” e “inteligencia emocional”, se ha dispuesto hallar las desviaciones estándar de ambas y determinar cuál de las dos tiene mayor desviación.

En la tabla adjunta se muestra una ayuda para que halles la desviación estándar de la variable "inteligencia emocional".

X_i	n_i	N_i	$[X_i - X]^2 \times n_i$
27	3	3	670,507 50
31	1	4	119,902 50
33	1	5	80,102 50
36	2	7	70,805 00
38	2	9	31,205 00
45	3	12	27,907 50
48	3	15	109,807 50
50	3	18	194,407 50
53	1	19	122,102 50
66	1	20	578,402 50

Ficha 19

¿Quién saca?

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre	Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.	Determina las condiciones y restricciones de una situación aleatoria, analiza la ocurrencia de sucesos simples y compuestos, y la representa con el valor de su probabilidad expresada como racional de 0 a 1.
	Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.	Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre el valor de la probabilidad de sucesos simples y compuestos de una situación aleatoria, y cómo se distinguen los sucesos simples de los compuestos.
	Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.	Adapta y combina procedimientos para determinar la probabilidad de eventos simples o compuestos de una situación aleatoria. Adecúa los procedimientos utilizados a otros contextos de estudio.
	Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.	Plantea y contrasta afirmaciones o conclusiones sobre las características o tendencias de una población o de eventos aleatorios a partir de sus observaciones. Reconoce errores en sus conclusiones o las de otros estudios y propone mejoras.

Aprendemos

David y Micaela juegan continuamente al tenis, pero cada quien siempre quiere ser el que inicie el juego. Finalmente, lo dejan en manos del azar. Para ver quién empieza, deciden que lo hará aquel que al tirar un dado saque el número más alto.

©Shutterstock

1. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento que están por hacer David y Micaela si el dado tiene seis caras?
2. Representa mediante un diagrama de árbol dicho espacio muestral.
3. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento que están por realizar David y Micaela si el dado tiene cuatro caras?
4. Representa mediante un diagrama de árbol dicho espacio muestral.
5. Si en lugar de utilizar un dado, David y Micaela utilizaran una moneda para decidir quién inicia el juego, ¿cuál sería el espacio muestral de dicho experimento?
6. Representa mediante un diagrama de árbol el espacio muestral de la pregunta anterior.

Z_MATe5V_PArt2_130-248.indd 225 28/09/17 17:34

Comprendemos el problema

1. Identifica los eventos que presenta el problema.

2. ¿Cuáles son los datos del problema?

3. ¿Qué te piden determinar?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué forma tiene un dado de cuatro caras?

2. Propón un plan para dar respuesta a las preguntas de la situación inicial.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Representa con un número cada cara del dado y expresa el espacio muestral.

2. Representa este espacio muestral con un diagrama de árbol.

3. Construye un dado de cuatro caras. Determina el espacio muestral del dado.

4. Representa el espacio muestral del dado de cuatro caras con un diagrama de árbol.

5. ¿Cómo representarías cada posibilidad y cómo escribirías el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de la moneda por parte de Daniel y Micaela?

6. Utiliza un diagrama de árbol para representar el espacio muestral al lanzar una moneda.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Cuáles son las formas de representar el espacio muestral de un evento?

2. Si hubieran lanzado el dado simultáneamente, ¿cuál sería el espacio muestral?


¿?

Analizamos

Situación A

A fin de determinar un experimento aleatorio, se lanza un dado y, acto seguido, se lanzan dos monedas, una después de la otra. Para ello, se dan las siguientes condiciones:

- Si en el dado sale número impar, se lanza una moneda.
- Si sale número par, se lanzan dos monedas.

¿Cuál es el espacio muestral?

©Shutterstock

Resolución

Para construir el espacio muestral, utilizamos como ayuda la siguiente tabla de posibilidades:

Lados del dado	1		2		3		4		5		6	
Primera moneda	C	S	C	S	C	S	C	S	C	S	C	S
Segunda moneda	No se lanza		C	S	No se lanza		C	S	No se lanza		C	S

Respuesta:

Luego, el espacio muestral, solicitado es:

E= {(1,C); (1,S); (2,C,C); (2,S,S); (3,C); (3,S); (4,C,C); (4,S,S); (5,C); (5,S); (6,C,C); (6,S,S)}

1. ¿De cuántos eventos simples se compone el evento analizado? ¿Cuáles son?

2. ¿Cuántos casos son posibles?

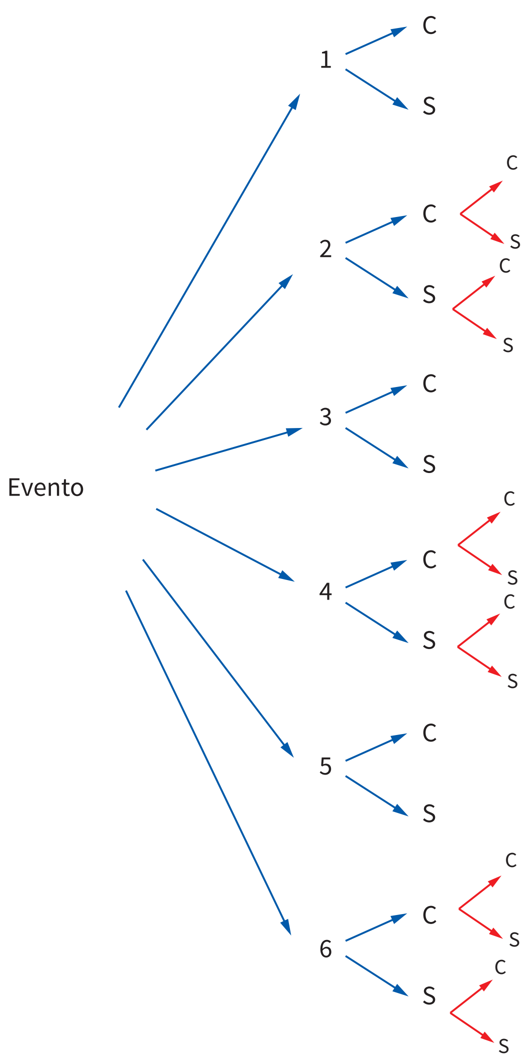
3. ¿En qué casos sale cara en ambas monedas? ¿Cuántos son?

Situación B

El diagrama de árbol también es utilizado para facilitar la toma de decisiones, porque trabaja con eventos dependientes; es decir, para que ocurra un evento, se necesita que previamente haya ocurrido otro. Por ser importante, te pedimos que elabores el diagrama de árbol del espacio muestral de la situación A.

Resolución

Elaboramos el diagrama de árbol considerando que partimos del evento del lanzamiento del dado. Luego sigue el de la primera moneda y, si se da la condición favorable, también el de la segunda.



1. Si sale un número par, ¿cuántos casos son posibles de presentarse? ¿Cuáles son?

2. ¿Cuáles son los casos en que en la primera moneda sale cara, habiendo salido número impar en el dado?

Situación C

Con los datos de las dos situaciones anteriores, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número impar y, además, ninguna cara?

Resolución

(Encuentra el error)

Remarquemos que el resultado buscado solo se dará si se cumplen a la vez las dos partes de la condición; es decir, cuando salga en el dado un número impar y no salga cara en la moneda.

En la tabla vamos a sombrear los casos que cumplen las dos condiciones.

<table>
<tr><th>Lados del dado</th><th colspan="2">1</th><th colspan="2">2</th><th colspan="2">3</th><th colspan="2">4</th><th colspan="2">5</th><th colspan="2">6</th></tr>
<tr><th>Primera moneda</th><td>C</td><td>S</td><td>C</td><td>S</td><td>C</td><td>S</td><td>C</td><td>S</td><td>C</td><td>S</td><td>C</td><td>S</td></tr>
<tr><th>Segunda moneda</th><td colspan="2">No se lanza</td><td>C</td><td>S</td><td colspan="2">No se lanza</td><td>C</td><td>S</td><td colspan="2">No se lanza</td><td>C</td><td>S</td></tr>
</table>

Para que se cumpla la primera parte, "que salga un número impar", la probabilidad es $\frac{1}{6}$ en cada caso, puesto que son seis los lados del dado.

Para que se cumpla la segunda parte, "que no salga ninguna cara", la probabilidad es $\frac{1}{2}$.

Luego, la probabilidad en cada caso es $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1 + 3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Respuesta: $\frac{2}{3}$

1. Verifica mediante la regla de Laplace. Si no coincide, identifica el error y corrige.

Z_MATe5V_PArt2_130-248.indd 230 28/09/17 17:34

Practicamos

En un grupo de amigos, el 80 % están casados. Entre los casados, el 75 % tienen trabajo. Finalmente, un 5 % no están casados y se encuentran desempleados.

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. Uno de ellos postula a un trabajo. ¿Qué probabilidad hay de que sea de los que están desempleados?

a) 0,15

b) 0,20

c) 0,25

d) 0,40

2. Si uno tiene trabajo, ¿qué probabilidad hay de que esté casado?

a) 0,50

b) 0,75

c) 0,80

d) 0,95

Un grupo de 120 turistas participa en un viaje por varias ciudades de Europa; 48 de ellos hablan inglés; 36, francés, y 12, los dos idiomas.

Con la información dada, responde las preguntas 3 y 4.

3. Si se escoge un turista al azar del grupo en mención, ¿cuál es la probabilidad de que hable francés, sabiendo que habla inglés?

a) 0,15 **b)** 0,25 **c)** 0,45 **d)** 0,55

4. ¿Y cuál es la probabilidad de que ese turista hable alguno de los dos idiomas?

5. En una caja de 100 artículos hay 10 con defectos. Se toman al azar tres artículos, uno tras otro. Halla la probabilidad de que los tres no sean defectuosos. (P: Probabilidad).

a) 0,73 **b)** 0,53 **c)** 0,40 **d)** 0,28

6. Sean A y B dos sucesos aleatorios con $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Determina $P\left(\frac{A}{B}\right)$.

a) $\frac{4}{3}$ **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{5}{3}$

7. Se tienen 20 botellas de gaseosa para la venta, y se sabe que existen 10 botellas que traen la palabra “PREMIO” en su tapa.

¿Cuál es la probabilidad de que la tercera botella que se venda sea la primera que tenga la palabra “PREMIO” en su tapa?

8. En un grupo de 120 personas se hace una encuesta en la que se les pregunta si les gusta leer y ver televisión. Los resultados son los siguientes:

- A 32 personas les gusta leer y ver televisión.
- A 92 personas les gusta leer.
- A 47 personas les gusta ver televisión.

Si elegimos al azar a una de esas personas, ¿cuál es la probabilidad de que le guste leer, sabiendo que le gusta ver televisión?

a) 2,13 **b)** 2,46 **c)** 0,55 **d)** 0,68

9. En una ciudad, el 40 % de la población tienen cabellos castaños; el 25 %, ojos castaños, y el 15 %, cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar. Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también ojos castaños?

a) 0,225 **b)** 0,375 **c)** 0,450 **d)** 2,650

10. Una urna *A* contiene 7 bolas numeradas del 1 al 7. En otra urna *B*, hay 5 bolas numeradas del 1 al 5. Lanzamos una moneda equilibrada, de forma que, si sale cara, extraemos una bola de la urna *A* y, si sale sello, la extraemos de la urna *B*.

Sabiendo que salió una bola con número par, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de la urna *A*?

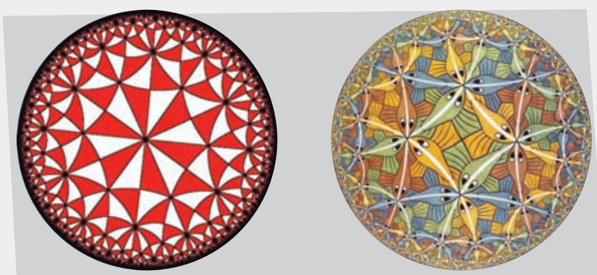
Ficha 20

Teselaciones en un plano

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Describe la ubicación o los movimientos de un objeto real o imaginario y los representa utilizando gráficos y planos cartesianos. Asimismo, describe las posibles secuencias de transformaciones sucesivas que dieron origen a una forma bidimensional.
	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Expresa, con dibujos, material concreto y lenguaje geométrico, su comprensión sobre las transformaciones geométricas y la clasificación de las formas geométricas, según sus características y propiedades, para interpretar un problema de acuerdo con su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para determinar las transformaciones geométricas y la composición de transformaciones empleando coordenadas cartesianas.
	Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas.	Plantea y contrasta afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que descubre entre los objetos y entre estos y las formas geométricas, así como entre las formas geométricas mismas, sobre la base de experiencias directas o simulaciones.

Aprendemos

El Círculo Límite III es un grabado en madera realizado por el artista holandés Maurits Cornelis Escher, en el cual se aprecian peces en cadenas y de distintos tamaños. Esta obra es parte de una serie de cuatro xilografías que representan las ideas de la geometría hiperbólica. Escher se inspiró en la llamada *teselación hiperbólica*, conformada por triángulos de Coexter.



©https://www.pinterest.com/pin/457467274619433151/

1. Con respecto a la teselación de Coexter, en la parte central, ¿qué transformación geométrica exsite entre los triángulos rojos más grandes?
2. Con respecto a la teselación de Coexter, sobre cada línea recta, ¿qué transformación geométrica hay entre un triángulo rojo y un triángulo blanco contiguo?
3. Con respecto al tallado de Escher, desde el centro, ¿qué transformación geométrica se observa entre los peces amarillos más grandes?
4. Con respecto al grabado en madera de Escher, observando a los peces de un solo color, ¿crees que existirá alguna transformación geométrica que los defina?, ¿cuál o cuáles serán?

Comprendemos el problema

1. Identifica la figura que predomina en el grabado de Escher.

2. ¿Qué figura predomina en la teselación de Coexter?

3. ¿Qué te piden hallar?

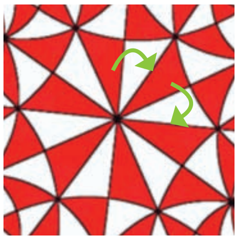
4. ¿Qué conceptos conoces alrededor de lo que te piden?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

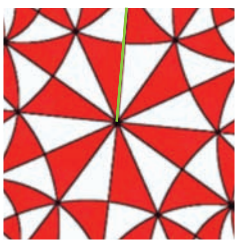
1. ¿Cómo resolverías las preguntas de la situación inicial? ¿Cuál es tu plan?

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Determina la transformación que experimentan los triángulos grandes de Coexter.



2. Elige dos triángulos grandes: rojo y blanco, que sean contiguos. Halla la transformación geométrica que experimenta el triángulo.



3. En el tallado de Escher, determina, con respecto al centro, la transformación que hay entre los dos peces amarillos.

4. Ahora observa todos los peces de un solo color en el tallado de Escher. ¿Qué transformaciones se evidencian?

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. En la rotación, ¿qué cambió?, ¿qué se mantuvo?

2. ¿Has observado alguna traslación en las imágenes? ¿Por qué?

Analizamos

Situación A

En el siguiente teselado,
¿qué transformaciones geométricas se pueden observar?

©https://www.pinterest.com/pin/124130533454293057/

Resolución

¿Observas traslación? ¿En dónde?

Sí. El ave de la zona inferior se traslada a la parte central alta.

Lo mismo ocurre con la mosca, la mariposa y el murciélago.

¿Se puede mostrar simetría?

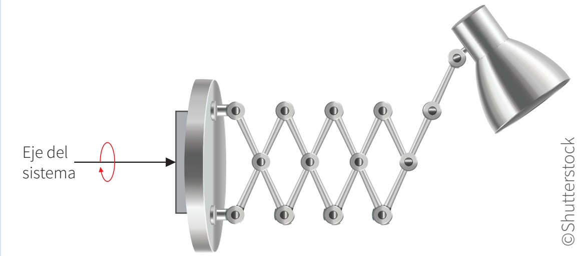
Sí. Trazamos un eje para cada animal y será el eje de simetría axial. También hay simetría central.

1. ¿Qué tienen en común la traslación y la rotación? ¿En qué se diferencian?

2. ¿A qué transformación geométrica es equivalente la simetría central?

Situación B

¿A qué tipo de movimiento corresponde el brazo articulado de la lámpara?



Resolución

Este tipo de lámpara se utiliza para acercar o alejar la luz a una zona determinada.

Está sujeta a un eje que puede hacer girar el sistema.

La pregunta está referida al movimiento del brazo, el cual va para adelante y hacia atrás a lo largo de una línea.

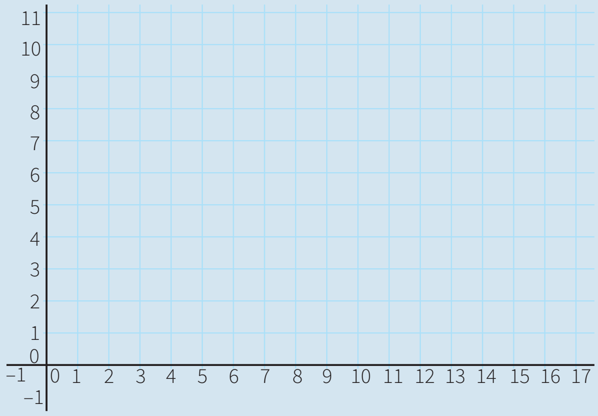
Respuesta:

El movimiento es alternativo.

1. Si se realiza movimiento al eje del sistema, ¿qué transformación geométrica se evidencia?

Situación C

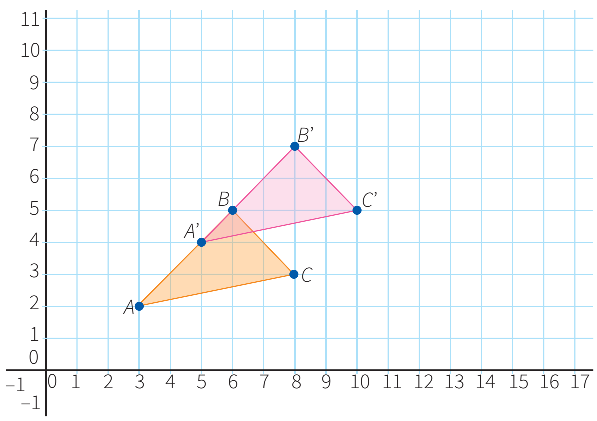
Grafica la homotecia de un triángulo de centro en el origen de coordenadas y de vértices en los puntos *A* (3;2), *B* (6;5) y *C* (8;3), cuya razón es igual a 2.



Resolución

(Encuentra el error)

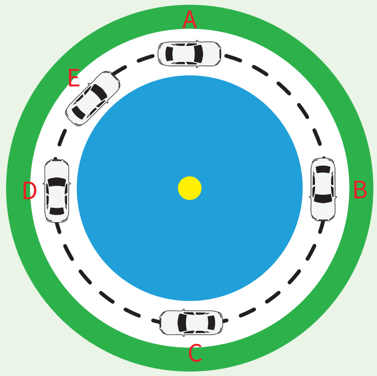
Primero ubicamos los puntos *A*, *B* y *C* para formar el triángulo *ABC*. Luego, como la razón es 2, desde *A* avanzamos dos puntos horizontalmente, y subimos dos para determinar el punto *A'*. Lo mismo hacemos con *B* y *C*, y obtenemos los puntos *B'* y *C'*, formando el triángulo *A'B'C'*, tal como se muestra en la gráfica.



1. Verifica si el procedimiento para realizar una homotecia es correcto. Revisa la teoría al respecto. De ser correcto, ¿de qué otro modo se podría hacer una homotecia? Si fuera incorrecto, identifica el error y obtén el nuevo resultado.

Practicamos

En la siguiente figura, se muestra una pista circular y la imagen de un automóvil en diferentes puntos de la pista.



Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. Cuando el auto se encuentra entre los puntos *B* y *D*, es incorrecto decir que hay:

a) Una rotación respecto al centro

b) Una simetría central

c) Una homotecia k = –1

d) Una simetría axial

2. En los puntos *A* y *E* de la figura anterior, con respecto al centro, existe:

a) Una rotación

b) Una traslación

c) Una simetría axial

d) Una simetría central

3. La profesora pone en la pizarra un triángulo en diversas posiciones, y los estudiantes indican qué transformación geométrica está ocurriendo.

Para dar su respuesta, consideran este orden: lo que ocurre en el paso 1, en el paso 2 y en el paso 3.

a) Traslación, simetría axial, rotación

b) Simetría central, rotación, homotecia

c) Rotación, traslación, simetría axial

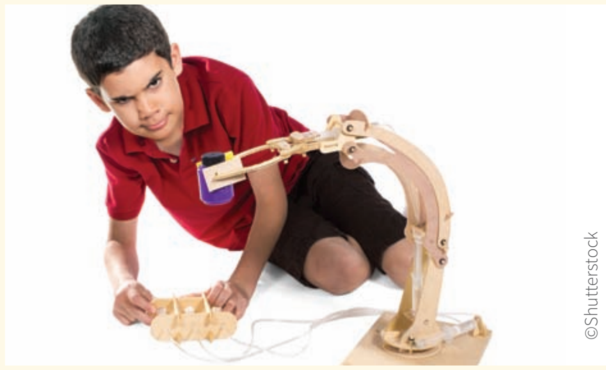
d) Rotación, simetria axial, simetría central

4. Dadas dos figuras geométricas semejantes, ¿cómo hallarías el centro de la homotecia?

5. En una feria de ciencias los estudiantes de un colegio fabricaron un brazo hidráulico, el cual estaba hecho con maderas, pernos y jeringas con agua.

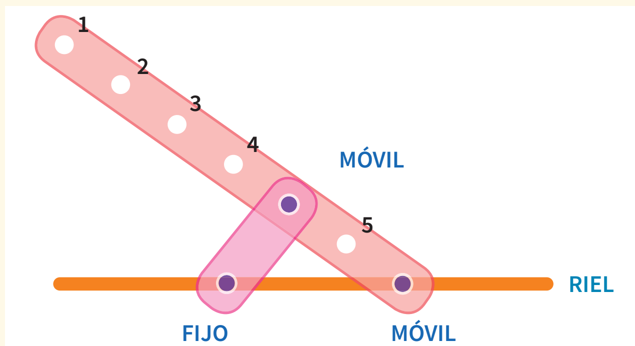
Al ser un mecanismo articulado, ¿qué clase de movimiento o movimientos realiza?

a) Rotación
b) Traslación
c) Rotación y traslación
d) Simetría



6. Un mecanismo similar que tienen los telares es el que se presenta en la figura. Si se coloca un lápiz en el orificio número 1, ¿qué figura describirá?

a) Una semicircunferencia
b) Una parábola
c) Una curva que se aleja y se acerca
d) Una recta



7. Del mecanismo anterior, realiza el gráfico que se obtendría si se colocara un lápiz en el orificio número 5.

8. Del gráfico siguiente se tienen las siguientes afirmaciones:

M: Entre las figuras I y III hay simetría central.

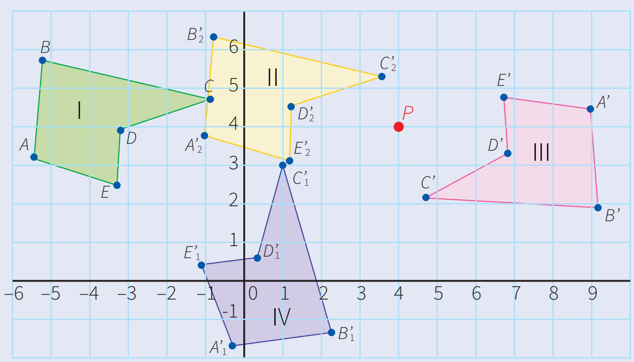
N: Entre las figuras I y II hay traslación.

O: Entre las figuras II y III hay simetría central con centro en P.

P: Entre las figuras I y IV hay simetría axial.

Son falsas:

a) Solo N **b)** N y P **c)** M y O **d)** O y P



9. Se tiene una alfombra rectangular y se aplica homotecia con centro en una de las esquinas y la razón de la homotecia $k = \frac{1}{6}$. Se puede decir que:

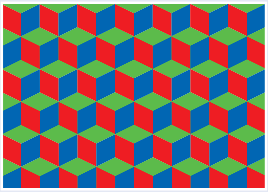
a) El área disminuye a $\frac{1}{3}$ del original.

b) El área disminuye a $\frac{1}{18}$ del original.

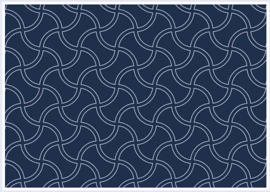
c) El área disminuye a $\frac{1}{36}$ del original.

d) El área disminuye a $\frac{1}{72}$ del original.

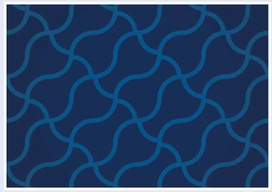
10. ¿En cuál de los siguientes teselados existe una simetría central entre sus figuras de colores diferentes?



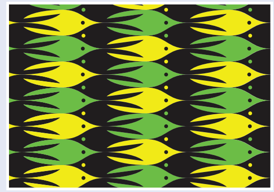
I



II



III



IV

CARTA DEMOCRÁTICA INTERAMERICANA

I

La democracia y el sistema interamericano

Artículo 1

Los pueblos de América tienen derecho a la democracia y sus gobiernos la obligación de promoverla y defenderla.

La democracia es esencial para el desarrollo social, político y económico de los pueblos de las Américas.

Artículo 2

El ejercicio efectivo de la democracia representativa es la base delestado de derecho y los regímenes constitucionales de los Estados Miembros de la Organización de los Estados Americanos. La democracia representativa se refuerza y profundiza con la participación permanente, ética y responsable de la ciudadanía en un marco de legalidad conforme al respectivo orden constitucional.

Artículo 3

Son elementos esenciales de la democracia representativa, entre otros, el respeto a los derechos humanos y las libertades fundamentales; el acceso al poder y su ejercicio con sujeción al estado de derecho; la celebración de elecciones periódicas, libres, justas y basadas en el sufragio universal y secreto como expresión de la soberanía del pueblo; el régimen plural de partidos y organizaciones políticas; y la separación e independencia de los poderes públicos.

Artículo 4

Son componentes fundamentales del ejercicio de la democracia la transparencia de las actividades gubernamentales, la probidad, la responsabilidad de los gobiernos en la gestión pública, el respeto por los derechos sociales y la libertad de expresión y de prensa.

La subordinación constitucional de todas las instituciones del Estado a la autoridad civil legalmente constituida y el respeto al estado de derecho de todas las entidades y sectores de la sociedad son igualmente fundamentales para la democracia.

Artículo 5

El fortalecimiento de los partidos y de otras organizaciones políticas es prioritario para la democracia. Se deberá prestar atención especial a la problemática derivada de los altos costos de las campañas electorales y al establecimiento de un régimen equilibrado y transparente de financiación de sus actividades.

Artículo 6

La participación de la ciudadanía en las decisiones relativas a su propio desarrollo es un derecho y una responsabilidad. Es también una condición necesaria para el pleno y efectivo ejercicio de la democracia. Promover y fomentar diversas formas de participación fortalece la democracia.

II

La democracia y los derechos humanos

Artículo 7

La democracia es indispensable para el ejercicio efectivo de las libertades fundamentales y los derechos humanos, en su carácter universal, indivisible e interdependiente, consagrados en las respectivas constituciones de los Estados y en los instrumentos interamericanos e internacionales de derechos humanos.

Artículo 8

Cualquier persona o grupo de personas que consideren que sus derechos humanos han sido violados pueden interponer denuncias o peticiones ante el sistema interamericano de promoción y protección de los derechos humanos conforme a los procedimientos establecidos en el mismo.

Los Estados Miembros reafirman su intención de fortalecer el sistema interamericano de protección de los derechos humanos para la consolidación de la democracia en el Hemisferio.

Artículo 9

La eliminación de toda forma de discriminación, especialmente la discriminación de género, étnica y racial, y de las diversas formas de intolerancia, así como la promoción y protección de los derechos humanos de los pueblos indígenas y los migrantes y el respeto a la diversidad étnica, cultural y religiosa en las Américas, contribuyen al fortalecimiento de la democracia y la participación ciudadana.

Artículo 10

La promoción y el fortalecimiento de la democracia requieren el ejercicio pleno y eficaz de los derechos de los trabajadores y la aplicación de normas laborales básicas, tal como están consagradas en la Declaración de la Organización Internacional del Trabajo (OIT) relativa a los Principios y Derechos Fundamentales en el Trabajo y su Seguimiento, adoptada en 1998, así como en otras convenciones básicas afines de la OIT. La democracia se fortalece con el mejoramiento de las condiciones laborales y la calidad de vida de los trabajadores del Hemisferio.

III

Democracia, desarrollo integral y combate a la pobreza

Artículo 11

La democracia y el desarrollo económico y social son interdependientes y se refuerzan mutuamente.

Artículo 12

La pobreza, el analfabetismo y los bajos niveles de desarrollo humano son factores que inciden negativamente en la consolidación de la democracia. Los Estados Miembros de la OEA se comprometen a adoptar y ejecutar todas las acciones necesarias para la creación de empleo productivo, la reducción de la pobreza y la erradicación de la pobreza extrema, teniendo en cuenta las diferentes realidades y condiciones económicas de los países del Hemisferio. Este compromiso común frente a los problemas del desarrollo y la pobreza también destaca la importancia de mantener los equilibrios macroeconómicos y el imperativo de fortalecer la cohesión social y la democracia.

Artículo 13

La promoción y observancia de los derechos económicos, sociales y culturales son consustanciales al desarrollo integral, al crecimiento económico con equidad y a la consolidación de la democracia en los Estados del Hemisferio.

Artículo 14

Los Estados Miembros acuerdan examinar periódicamente las acciones adoptadas y ejecutadas por la Organización encaminadas a fomentar el diálogo, la cooperación para el desarrollo integral y el combate a la pobreza en el Hemisferio, y tomar las medidas oportunas para promover estos objetivos.

Artículo 15

El ejercicio de la democracia facilita la preservación y el manejo adecuado del medio ambiente. Es esencial que los Estados del Hemisferio implementen políticas y estrategias de protección del medio ambiente, respetando los diversos tratados y convenciones, para lograr un desarrollo sostenible en beneficio de las futuras generaciones.

Artículo 16

La educación es clave para fortalecer las instituciones democráticas, promover el desarrollo del potencial humano y el alivio de la pobreza y fomentar un mayor entendimiento entre los pueblos. Para lograr estas metas, es esencial que una educación de calidad esté al alcance de todos, incluyendo a las niñas y las mujeres, los habitantes de las zonas rurales y las personas que pertenecen a las minorías.

IV

Fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática

Artículo 17

Cuando el gobierno de un Estado Miembro considere que está en riesgo su proceso político institucional democrático o su legítimo ejercicio del poder, podrá recurrir al Secretario General o al Consejo Permanente a fin de solicitar asistencia para el fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática.

Artículo 18

Cuando en un Estado Miembro se produzcan situaciones que pudieran afectar el desarrollo del proceso político institucional democrático o el legítimo ejercicio del poder, el Secretario General o el Consejo Permanente podrá, con el consentimiento previo del gobierno afectado, disponer visitas y otras gestiones con la finalidad de hacer un análisis de la situación. El Secretario General elevará un informe al Consejo Permanente, y éste realizará una apreciación colectiva de la situación y, en caso necesario, podrá adoptar decisiones dirigidas a la preservación de la institucionalidad democrática y su fortalecimiento.

Artículo 19

Basado en los principios de la Carta de la OEA y con sujeción a sus normas, y en concordancia con la cláusula democrática contenida en la Declaración de la ciudad de Quebec, la ruptura del orden democrático o una alteración del orden constitucional que afecte gravemente el orden democrático en un Estado Miembro constituye, mientras persista, un obstáculo insuperable para la participación de su gobierno en las sesiones de la Asamblea General, de la Reunión de Consulta, de los Consejos de la Organización y de las conferencias especializadas, de las comisiones, grupos de trabajo y demás órganos de la Organización.

Artículo 20

En caso de que en un Estado Miembro se produzca una alteración del orden constitucional que afecte gravemente su orden democrático, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá solicitar la convocatoria inmediata del Consejo Permanente para realizar una apreciación colectiva de la situación y adoptar las decisiones que estime conveniente.

El Consejo Permanente, según la situación, podrá disponer la realización de las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

Si las gestiones diplomáticas resultaren infructuosas o si la urgencia del caso lo aconsejare, el Consejo Permanente convocará de inmediato un período extraordinario de sesiones de la Asamblea General para que ésta adopte las decisiones que estime apropiadas, incluyendo gestiones diplomáticas, conforme a la Carta de la Organización, el derecho internacional y las disposiciones de la presente Carta Democrática.

Durante el proceso se realizarán las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

Artículo 21

Cuando la Asamblea General, convocada a un período extraordinario de sesiones, constate que se ha producido la ruptura del orden democrático en un Estado Miembro y que las gestiones diplomáticas han sido infructuosas, conforme a la Carta de la OEA tomará la decisión de suspender a dicho Estado Miembro del ejercicio de su derecho de participación en la OEA con el voto afirmativo de los dos tercios de los Estados Miembros. La suspensión entrará en vigor de inmediato.

El Estado Miembro que hubiera sido objeto de suspensión deberá continuar observando el cumplimiento de sus obligaciones como miembro de la Organización, en particular en materia de derechos humanos.

Adoptada la decisión de suspender a un gobierno, la Organización mantendrá sus gestiones diplomáticas para el restablecimiento de la democracia en el Estado Miembro afectado.

Artículo 22

Una vez superada la situación que motivó la suspensión, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá proponer a la Asamblea General el levantamiento de la suspensión. Esta decisión se adoptará por el voto de los dos tercios de los Estados Miembros, de acuerdo con la Carta de la OEA.

V

La democracia y las misiones de observación electoral

Artículo 23

Los Estados Miembros son los responsables de organizar, llevar a cabo y garantizar procesos electorales libres y justos.

Los Estados Miembros, en ejercicio de su soberanía, podrán solicitar a la OEA asesoramiento o asistencia para el fortalecimiento y desarrollo de sus instituciones y procesos electorales, incluido el envío de misiones preliminares para ese propósito.

Artículo 24

Las misiones de observación electoral se llevarán a cabo por solicitud del Estado Miembro interesado. Con tal finalidad, el gobierno de dicho Estado y el Secretario General celebrarán un convenio que determine el alcance y la cobertura de la misión de observación electoral de que se trate. El Estado Miembro deberá garantizar las condiciones de seguridad, libre acceso a la información y amplia cooperación con la misión de observación electoral.

Las misiones de observación electoral se realizarán de conformidad con los principios y normas de la OEA. La Organización deberá asegurar la eficacia e independencia de estas misiones, para lo cual se las dotará de los recursos necesarios. Las mismas se realizarán de forma objetiva, imparcial y transparente, y con la capacidad técnica apropiada.

Las misiones de observación electoral presentarán oportunamente al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, los informes sobre sus actividades.

Artículo 25

Las misiones de observación electoral deberán informar al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, si no existiesen las condiciones necesarias para la realización de elecciones libres y justas.

La OEA podrá enviar, con el acuerdo del Estado interesado, misiones especiales a fin de contribuir a crear o mejorar dichas condiciones.

VI

Promoción de la cultura democrática

Artículo 26

La OEA continuará desarrollando programas y actividades dirigidos a promover los principios y prácticas democráticas y fortalecer la cultura democrática en el Hemisferio, considerando que la democracia es un sistema de vida fundado en la libertad y el mejoramiento económico, social y cultural de los pueblos. La OEA mantendrá consultas y cooperación continua con los Estados Miembros, tomando en cuenta los aportes de organizaciones de la sociedad civil que trabajen en esos ámbitos.

Artículo 27

Los programas y actividades se dirigirán a promover la gobernabilidad, la buena gestión, los valores democráticos y el fortalecimiento de la institucionalidad política y de las organizaciones de la sociedad civil. Se prestará atención especial al desarrollo de programas y actividades para la educación de la niñez y la juventud como forma de asegurar la permanencia de los valores democráticos, incluidas la libertad y la justicia social.

Artículo 28

Los Estados promoverán la plena e igualitaria participación de la mujer en las estructuras políticas de sus respectivos países como elemento fundamental para la promoción y ejercicio de la cultura democrática.