UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

SUSANA KLAJN

APRENDIZAGEM DO ADOLESCENTE:
reconstituição do expoente 1 – na forma invisível

Porto Alegre
2011

Susana Klajn

APRENDIZAGEM do ADOLESCENTE: reconstituição do expoente 1 – na forma invisível

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação.

Orientadora:
Profa. Dra. Maria Luiza Rheingantz Becker

Co-orientador:
Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso

Linha de Pesquisa: Psicopedagogia, sistemas de ensino-aprendizagem e educação em saúde

Porto Alegre
2011

Catalogação na Fonte

KLAJN, Susana
Aprendizagem do adolescente: reconstituição do expoente 1 – na forma invisível / Susana Klajn. 2011
311 f.

Orientadora: Maria Luiza Rheingantz Becker.
Coorientador: Marcus Vinícius de Azevedo Basso.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2011, Porto Alegre, BR-RS, 2011.

1. Expoente um. 2. Multiplicação de monômios. 3. Aprendizagem de álgebra. 4. Estudante adolescente. 5. Epistemologia genética. I. BECKER, Maria Luiza Rheingantz, orient. II. BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. III. Título.

Susana Klajn

APRENDIZAGEM do ADOLESCENTE: reconstituição do expoente 1 – na forma invisível

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação.

____

Profa. Dra. Maria Luiza Rheingantz Becker – orientadora

____

Prof. Dr. Marcus Vinicius de Azevedo Basso - co-orientador

____

Profa. Dra. Beatriz Dorneles – UFRGS - banca

____

Prof. Dr. Sérgio Franco – UFRGS - banca

____

Profa. Dra. Ocsana Sônia Danyluk – UPF – banca

____

Profa. Dra. Neila Tonin Agranionih - UFPR - banca

____

AGRADECIMENTOS

Para além dos meus educandos, muitas foram as pessoas que partilharam e partilham da elaboração deste estudo, desde a primeira intenção, à tematização e argumentação, até a proposta de empiria e análise. Esses interlocutores, nas pessoas de familiares, amigos, colegas, professores, me ajudaram a superar dúvidas e indefinições. Os momentos que me dedicaram foram sempre alentadores. O meu agradecimento a todos e minha palavra especial

- à Professora doutora Maria Luiza Rheingantz Becker, que me acompanha passo a passo na epistemologia genética de Piaget, com generosidade e sabedoria me orienta oferecendo sugestões e críticas relevantes;

- ao Professor Doutor Marcus Vinicius de Azevedo Basso, que me auxilia na orientação dos pressupostos teóricos da educação matemática e algébrica;

- a Telmo Armiliatto, meu companheiro, que ao longo de todos os momentos do processo se fez presente;

- aos meus pais Anton e Julita Iolanda, pelos seus exemplos de vida sempre presentes na minha formação pessoal e acadêmica;

- as minhas irmãs Elisa e Luciane, que me incentivaram durante toda minha caminhada;

- as direções das escolas estaduais que me deram a oportunidade de realizar a coleta de dados;

- aos pais que confiaram em minha proposta de pesquisa autorizando seus filhos, meus alunos, a serem meus sujeitos desta pesquisa;

- a Maria Emilse e Elisa Maria, pelas leituras e sugestões;

- aos professores da banca Dr. Sérgio F., Dra. Beatriz D., Dra. Ocsana D. e Dra. Neila A. pelos pareceres dialógicos e propositivos;

- in memorium à Professora Maria Crusius – pesquisadora e introdutora dos estudos de Jean Piaget na Universidade de Passo Fundo – RS.

A matemática
tem sido freqüentemente
comparada
a uma árvore,
pois cresce
numa estrutura
acima da terra
que se espalha
e ramifica sempre mais,
ao passo que
ao mesmo tempo
suas raízes
cada vez mais
se aprofundam
e alargam,
em busca
de fundamentos sólidos.
(Século XIX)

RESUMO

Este estudo procura investigar a aprendizagem de adolescentes do ensino fundamental, especificamente, dos matriculados na 7ª série ou 8º ano. Minhas preocupações dirigem-se à verificação das relações de aprendizagem entre os sujeitos desta pesquisa com um conteúdo específico da álgebra na multiplicação de monômios: o expoente 1 – na forma invisível. O referencial básico fundamenta-se em revisão sobre educação matemática, pesquisas sobre aprendizado de álgebra e em Jean Piaget, nas obras que compõem o terceiro período dos seus estudos sobre o desenvolvimento do pensamento do adolescente ao adulto, como *Da lógica da criança à lógica do adolescente, A gênese do número na criança, O desenvolvimento das quantidades físicas na criança, A tomada de consciência, Abstração reflexionante*: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais e *Evolução intelectual da adolescência à vida adulta*. A coleta de dados, na perspectiva da pesquisa de caráter qualitativo, dá-se em dois momentos: (1) pesquisa participante: a) trabalho de observação dos alunos de três turmas de 7ª série ou 8º ano do ensino fundamental; b) aplicação da avaliação escrita com notação simbólica, em sala de aula; (2) entrevistas individuais semi-estruturadas com nove estudantes. Finaliza com a triangulação dos dados em três estudos de caso. A análise focalizou os êxitos e fracassos dos sujeitos nas atividades propostas a partir dos seguintes conceitos básicos: conservação, estrutura, operação concreta, operação formal, agrupamento e totalidade.Os resultados mostram que o pensamento algébrico do adolescente tem seu poder de significação ligado à construção dos esquemas práticos e conceituais aritméticos e geométricos anteriores em função do grau de novidade das atividades propostas nas situações-problema. Compreendi que os estudantes adolescentes da sétima série somente determinarão modos de chegar aos resultados envolvendo o expoente 1 na sua forma invisível, com a compreensão das suas ações, operações e coordenações. O caminho e os instrumentos utilizados nessa pesquisa tiveram um papel fundamental no favorecimento das relações de compreensão desses estudantes na combinação das vias aritmética, geometria e álgebra.

ABSTRACT

This study intends to analyze the learning process of adolescents in primary education, especially the ones enrolled in the 7^{th} grade or 8 year. We aim to investigate the learning relations between the subjects of this research with a specific algebra content of multiplication of monomials: the exponent 1 in its invisible form. Our basic referential is based on the revision of mathematics education, researches on algebra learning, and Jean Piaget's third period studies on the development of thinking from adolescence to adulthood, like of *Child's logical to teenagers, The child's number genesis, The development of physical quantities in the child, The consciousness taken, Abstract reflexions: relations logic-aritmetics and ordering of special relations, Intellectual Evolution from adolescence to adulthood* and *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. In the qualitative research perspective, the data collection happens in two moments: (1) participatory research: a) observation of students drawn from three 7^{th} grade classes or 8 year; b) application of written with symbolic notation, in the classroom; (2) individual in two semi-structured interviews with nine students. It ends with the data triangulation in three case studies. The analysis focuses on the subjects' successes and failures in the activities proposed with the following basic concepts: conservation, structure, concrete operation, formal operation, grouping and totality. The results show that the adolescents' algebraic thought has its power of signification related to the construction of the previous practical and conceptual arithmetical and geometrical schemes according to the level of novelty of the activities proposed in the problem-solving situations. We understood that the students of the 7^{th} grade will only determine ways to find results which include the exponent 1 in its invisible form when they comprehend their actions, operations and co-ordinations. The procedures and instruments used in this research had a fundamental role in helping these students' comprehension with the combination of arithmetic, geometry, and algebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Composição 72
Figura 2 – Associatividade 72
Figura 3 – Reversibilidade 72
Figura 4 – Elemento neutro 73
Figura 5 – Idempotência 73
Figura 6 - Mínimo comum majorante 73
Figura 7 – Transformação I 79
Figura 8 – Transformação N 79
Figura 9 – Transformação R 79
Figura 10 – Transformação C 79
Figura 11 – Esquema geral do monômio 134
Figura 12 – Esquema geral do monômio = Coeficiente numérico 134
Figura 13 – Esquema geral do monômio = Parte literal 135

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Resumo das concepções e relações 39
Quadro 2 – Relações entre o real observado e o aritmético 44
Quadro 3 – Esquema para um sentido numérico 46
Quadro 4 – Combinações: 16 operações binárias 77

LISTA DE TABELAS DO TEXTO[1]

Tabela 7 – Recorte das Tabelas 1 – T71, T72 e T73 – Geral com todas operações – agrupamento pelo êxito em GRUPO 1, GRUPO 2 e GRUPO 3 138

Tabela 8 - Recorte das Tabelas 2 – T71, T72 e T73 – Multiplicação de monômios – agrupamento pelo êxito em GRUPO 1, GRUPO 2 e GRUPO 3 145

Tabela 9 - Recorte das Tabelas 3 – T71, T72 e T73 – Multiplicação de monômios – **expoente visível** – agrupamento pelo êxito em GRUPO 1, GRUPO 2 e GRUPO 3 148

Tabela 10 – Desdobramento do recorte das Tabelas 3: levantamento do coeficiente numérico e da parte literal – GRUPO 1 149

Tabela 11 – Desdobramento do recorte das Tabelas 3: levantamento do coeficiente numérico e da parte literal – GRUPO 2 149

Tabela 12 – Desdobramento do recorte das Tabelas 3: levantamento do coeficiente numérico e da parte literal – GRUPO 3 150

Tabela 13 – Recorte das Tabelas 4 – T71, T72 e T73 – **Expoente visível** – combinações – agrupamento pelo êxito em GRUPO 1, GRUPO 2 e GRUPO 3 153

Tabela 14 - Desdobramento do recorte das Tabelas 4 – levantamento das combinações do coeficiente numérico e da parte literal – GRUPO 1 154

Tabela 15 – Desdobramento do recorte das Tabelas 4 – levantamento das combinações do coeficiente numérico e da parte literal – GRUPO 2 155

Tabela 16 – Desdobramento do recorte das Tabelas 4 – levantamento das combinações do coeficiente numérico e da parte literal – GRUPO 3 156

Tabela 17 – Recorte das Tabelas 5 – T71, T72 e T73 – Multiplicação de monômios – **expoente invisível** – agrupamento pelo êxito em GRUPO 1, GRUPO 2 e GRUPO 3 158

Tabela 18 – Desdobramento do recorte das Tabelas 5 – levantamento do coeficiente numérico e da parte literal – GRUPO 1 159

Tabela 19 – Desdobramento do recorte das Tabelas 5 – levantamento do coeficiente numérico e da parte literal – GRUPO 2 160

Tabela 20 – Desdobramento do recorte das Tabelas 5 – levantamento do coeficiente numérico e da parte literal – GRUPO 3 162

Tabela 21 – Recorte das Tabelas 6 – T71, T72 e T73 – **Expoente invisível** – combinações – agrupamento pelo êxito em GRUPO 1, GRUPO 2 e GRUPO 3 164

Tabela 22 – Desdobramento do recorte das Tabelas 6 – levantamento das combinações dos coeficientes numéricos e da parte literal – GRUPO 1 165

[1] As TABELAS de 01 a 06 encontram-se no APÊNDICE.

Tabela 23 – Desdobramento do recorte das Tabelas 6 – levantamento das combinações dos coeficientes numéricos e da parte literal – GRUPO 2 166

Tabela 24 – Desdobramento do recorte das Tabelas 6 – levantamento das combinações dos coeficientes numéricos e da parte literal – GRUPO 3 168

SIGLAS

AECNS = Avaliação Escrita Com Uso de Notação Simbólica 17

Sujeito 1 = Caso 1 = “Se” 17

Sujeito 2 = Caso 2 = “An" 17

Sujeito 3 = Caso 3 = “Us” 17

IESTA (ESCOLA 1) 96

ANCH (ESCOLA 2) 96

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 16

1 MINHA CAMINHADA - rupturas 18

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 23

2.1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 23

2.2 PESQUISADORES E PESQUISAS SOBRE A ÁLGEBRA 36

2.3 EPISTEMOLOGIA GENÉTICA 55

2.3.1 Períodos da obra de Jean Piaget 58

2.3.2 Estágios de desenvolvimento 69

2.4 CONCEITOS BÁSICOS 82

3 O CAMINHO METODOLÓGICO 90

3.1 JUSTIFICATIVA 90

3.2 OBJETIVOS 91

3.2.1 Objetivo Geral 91

3.2.2 Objetivos Específicos 91

3.3 O PROBLEMA DA PESQUISA 91

3.4 HIPÓTESES 92

3.5 DELINEAMENTO DA PESQUISA 92

3.6 ESTUDO PRELIMINAR 93

3.7 PROCEDIMENTOS 94

3.8 SUJEITOS E PASSOS DA PESQUISA 96

3.9 APRESENTAÇÃO DOS DADOS 98

4 A CONSTRUÇÃO DAS RELAÇÕES 103

4.1 OBSERVAÇÕES EM SALA DE AULA 103

4.1.1 Interpretação dos dados observados em sala de aula 128

4.1.1.1 GRUPO “O” 1 = ÊXITO PLENO 128

4.1.1.2 GRUPO “O” 2 = ÊXITO PARCIAL 129

4.1.1.3 GRUPO “O” 3 = POUCO ÊXITO 131

4.2 APLICAÇÃO DA AVALIAÇÃO ESCRITA COM USO DE NOTAÇÃO SIMBÓLICA (AECNS) 132
4.2.1 Interpretação dos dados da aplicação da (AECNS) 169
4.2.1.1 GRUPO “A” 1 = ÊXITO PLENO 169
4.2.1.2 GRUPO “A” 2 = ÊXITO PARCIAL 171
4.2.1.3 GRUPO “A” 3 = POUCO ÊXITO 172
4.3 ENTREVISTAS COM QUATRO JOGOS 174
4.3.1 Interpretação dos 4 Jogos no GRUPO “E” 1 – ÊXITO PLENO 176
4.3.1.1 Entrevista 1 = sujeito “Pe” 176
4.3.1.2 Entrevista 2 = sujeito “Se” 183
4.3.1.3 Entrevista 3 = sujeito “Ma” 188
4.3.2 Interpretação dos 4 Jogos no GRUPO “E” 2 – ÊXITO PARCIAL 197
4.3.2.1 Entrevista 4 = sujeito “An” 197
4.3.2.2 Entrevista 5 = sujeito “Dy” 207
4.3.2.3 Entrevista 6 = sujeito “VanD” 217
4.3.3 Interpretação dos 4 Jogos no GRUPO “E” 3 – POUCO ÊXITO 227
4.3.3.1 Entrevista 7 = sujeito “Vi” 227
4.3.3.2 Entrevista 8 = sujeito “Fa” 235
4.3.3.3 Entrevista 9 = sujeito “Us” 239
5 TRIANGULAÇÃO 250
5.1 CASO SUJEITO “Se” - GRUPO 1 (ÊXITO PLENO) 250
5.2 CASO SUJEITO “An" – GRUPO 2 (ÊXITO PARCIAL) 256
5.3 CASO SUJEITO “Us” – GRUPO 3 (POUCO ÊXITO) 265
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 274
7 EM SÍNTESE 279
REFERÊNCIAS 288
APÊNDICES 294

INTRODUÇÃO

Meu interesse pelo tema desta tese partiu da observação sobre o modo como o estudante-adolescente aprende (ou não aprende), como ocorrem os avanços do conhecimento dos aspectos menos complexos aos mais complexos e rigorosos no campo da matemática e das demais ciências.

É tentando pensar nas questões de "reconstituição do expoente 1 – na forma invisível" como objeto de construção deste estudo que buscarei alargar o campo de pesquisa diante dos desafios de mudanças paradigmáticas no ensino. Considero um panorama social em que a escola assumiu o papel de produtora dos conhecimentos e ressalto a relevância da pesquisa sobre um dos sujeitos fundamentais da escola: os estudantes em seu processo de aprendizagem. Pretendo aproximar o modelo da epistemologia genética à amplitude e à complexidade do modelo formalizado adotado pelo ensino atual. A epistemologia contribui para a compreensão da construção de conhecimentos através da interação sujeito e objeto. Penso que este encontro poderá gerar relações interdisciplinares significativas, capazes de contribuir para o debate sobre as dimensões verticais, horizontais e transversais dos processos de ensino-aprendizagem da educação básica. Esta tese está filiada a um projeto maior de pesquisa[2], coordenado pela orientadora deste projeto.

Como organização da tese no capítulo 1, **Minha caminhada – rupturas**, busco refazer minha história pessoal e profissional. Recordo questões da minha prática educativa, revejo experiências e a minha produção docente, principalmente no que se refere ao ensino e à aprendizagem de álgebra na matemática.

O capítulo 2, **Fundamentação teórica**, resgato três diálogos com a produção teórica e de pesquisa revisada para a tese - o da "Educação matemática", o dos "Pesquisadores e pesquisas sobre a álgebra", o da "Epistemologia genética" - e concluo com os "conceitos básicos" que apóiam as análises realizadas.

No capítulo 3, **Caminho metodológico**, apresento o problema a investigar e a metodologia de pesquisa que possibilita o tratamento do problema de acordo com

---

[2] *Projeto de Pesquisa Contribuições da Epistemologia Genética para Práticas Escolares*, n. 17872, coordenado pela Dra. Maria Luiza Rheingantz Becker.

o quadro teórico eleito para a investigação. Aqui, as experiências dos adolescentes no estudo preliminar estão presentes como um sinalizador para a organização dos procedimentos adotados nesta pesquisa.

No capítulo 4, organizo **a Construção das relações**, por três momentos: 1º - a observação do grupo (três turmas) das propostas de aprendizagem na sala de aula; 2º - aplicação da Avaliação escrita com uso de notação simbólica (AECNS), tendo como finalidade um levantamento da compreensão das noções sobre as operações algébricas, envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação de monômios; 3º - entrevistas – escolha de nove sujeitos com base nos critérios de maior ou menor êxito nas tarefas propostas anteriormente. As entrevistas são orientadas pelo método clínico de Jean Piaget, a fim de, numa perspectiva psicogenética, aprofundar a análise dos êxitos no processo de compreensão algébrica na multiplicação de monômios: o expoente 1 – na forma invisível. (Grupos 1, 2 e 3)

No capítulo 5, **Triangulação**, apresento três casos com os sujeitos nominados “Se”, “An” e “Us”, tendo como finalidade estabelecer relações entre os dados analisados nos três instrumentos de pesquisa apresentados anteriormente (observação, avaliação e entrevista). Essas relações dizem respeito a articulação entre o pensamento aritmético e geométrico e a lógica formal algébrica.

O capítulo 6, **Considerações finais**, é o momento de compreensão dos dados coletados entrecruzados com as fundamentações da educação matemática e da epistemologia genética.

O capítulo 7, **Em Síntese**, é composto pela compreensão dos êxitos e fracassos das ações, operações e coordenações dos estudantes da 7ª série ou 8º ano do ensino básico, envolvendo o expoente 1 na sua forma invisível.

As **referências** listadas abrangem as obras e textos que fundamentam o trabalho, nas suas diferentes etapas.

Nos **apêndices** estão incluídos os ofícios, autorização dos responsáveis, as avaliações escritas com uso de notação simbólica AECNS aplicados e aqueles utilizados no estudo preliminar e durante a pesquisa com estudantes adolescentes da 7ª série ou do 8º ano do ensino fundamental, e também os quatro jogos aplicados na entrevista dos “casos”.

1 MINHA CAMINHADA – rupturas

Para iniciar esta tese vou fazer uma breve retrospectiva considerando minha história de vida como estudante e professora, num conjunto de ações que entendo serem indispensáveis para localizar a escolha do meu objeto de pesquisa.

Quando volto meu pensamento ao passado, faço-o de uma perspectiva que se situa no presente. É assim que vejo hoje as experiências que vivi com a matemática.

Recordo alguns episódios do processo da minha alfabetização matemática no cotidiano. Lembro-me das atividades na oficina de conserto de máquinas agrícolas do meu avô paterno, que me encarregava das atividades de lavar e guardar nos respectivos compartimentos as arruelas, parafusos e porcas, assim como de lhe alcançar a chave certa (de boca, estrela, ...), dependendo da situação, sempre me lembrando da “bitola” da chave: 3/8, ¼. Com meu pai, tive a oportunidade de conhecer a matemática nas lidas da granja, desde o plantio até a colheita do trigo, do sorgo, da linhaça e da soja.

Entretanto, não me recordo de como fui alfabetizada matematicamente na escola. Apenas as lembranças dos três anos no 2° grau ou ensino médio me vêm à memória mais vivas. Na época, como não tínhamos livro de matemática, o conteúdo era todo transcrito pelo professor no grande quadro-verde. Confesso ter sentido algum prazer resolvendo os exercícios totalmente formais, mesmo sem a preocupação do professor com a formação de um saber prático, nem, muito menos, aplicável às situações do dia a dia.

Com as minhas experiências fora do contexto escolar, percebia com muita clareza que também na física, na química, na biologia e nas artes a sequência de procedimentos para o estudo de fatos que ocorrem na natureza era parecida. Dentro de uma estrutura formada pelos conhecimentos das minhas práticas, tentei compreender e interpretar, numa sequência coerente de raciocínio científico, os princípios matemáticos contidos nos conteúdos das disciplinas desenvolvidas na escola.

Na universidade aprendi que na matemática há uma ordenação lógica das suas diferentes áreas. Assim, fui sendo levada a respeitar aquilo que se chama de “rigor da matemática”: não usar termos que não tivessem sido definidos; não aceitar afirmações que não fossem demonstradas; nas demonstrações, não usar fatos que não tivessem sido previamente estabelecidos. Essa compreensão da matemática escolar rígida, formal e acadêmica que foi se formando aos poucos em meu pensamento, a maneira de vê-la e senti-la, a forma como passei a me comportar diante dela modificaram-se apenas no momento em que passei a ser “professora de matemática”, aos meus 19 anos, da rede pública municipal da cidade de Carazinho, RS.

Nesse momento vivi um conflito muito grande: deveria cumprir os conteúdos de um currículo preestabelecido pela Secretaria Municipal de Educação (SMED) de Carazinho - RS, que hoje, ao meu ver, eram máximos[3], ou trabalhar com aquelas crianças um mínimo de conteúdos que lhes fossem úteis à sobrevivência? A escola localizava-se entre duas vilas muito carentes, cujos moradores habitavam as chamadas “terra sem dono”, por serem áreas laterais aos trilhos do trem.

A fim de amenizar as atividades mecânicas da matemática descontextualizada dos livros e de tornar as aulas mais dinâmicas, proveitosas e agradáveis, passei a transformar os conteúdos estanques em problemas do contexto diário das crianças. Meu estímulo veio da motivação dos estudantes para a participação em jogos matemáticos (por eles construídos) e competições esportivas, além da preocupação de diminuir a repetência e a evasão então existente.

A ruptura maior iniciou-se com a minha mudança de cidade para Passo Fundo - RS e, sobretudo, com o desafio de trabalhar com alunos adolescentes e adultos no Curso Técnico em Contabilidade (curso noturno). Como se tratava de um curso profissionalizante, questionei-me sobre a formação e a atuação desses estudantes e obriguei-me retomar a minha imagem como profissional da educação. Além do debate interno, intenso e constante, passei a organizar com os colegas da equipe técnica encontros quinzenais para refletir sobre os problemas enfrentados no processo de ensino-aprendizagem no curso.

Em razão das reuniões da equipe técnica e pedagógica da escola, entrei em contato com diferentes experiências, procedimentos laboratoriais e computacionais que foram importantes para a correlação da matemática formal com a não formal.

[3] O maior currículo em relação ao conteúdo, o mais alto grau de exigências e determinações a serem praticadas visando a uma lei universal, sem levar em conta a(s) necessidade(s) da real população envolvida no processo.

Pela segunda vez, agora com o aval de um grupo de estudos, eu vislumbrava a possibilidade de a matemática e a física despertarem a curiosidade e o envolvimento dos estudantes, que descobriam, e muitas vezes redescobriam, as relações da matemática com o seu mundo, fosse do trabalho, fosse do estudo ou do lazer.

Comecei, assim, a compreender a importância que todo um universo de relações envolvendo estudante-trabalho-escola-professor tem a ver com o processo de ensino-aprendizagem, tanto na abordagem dos aspectos políticos, sociais e filosóficos que compõem cada ramo da matemática e da física quanto no questionamento das ocorrências negativas e positivas do desenvolvimento social e científico. Em tudo eu procurava levar os estudantes a perceberem a possibilidade de novos olhares, de diferentes posturas, ou seja, a necessidade de se sentirem parte integrante da sociedade.

Na busca de uma nova ótica do processo educacional, entendo ser necessário repensar os componentes do processo de ensino-aprendizagem no sentido de o conhecimento ser construído. Ao pensar em aprendizagem, é preciso, inicialmente, ter claro "quem aprende", "como se aprende", "por que se aprende" e "para que se aprende" para, posteriormente, observar alguns aspectos que norteiam o ensino. Aprender é uma questão de "significação", isto é, o estudante aprende aquilo que lhe é mais representativo, aquilo que se refere ao seu saber-fazer.

Com a transformação de minha concepção sobre a tarefa de ensinar, que requereu um esforço no sentido de repensar o que estava ensinando e a forma como o fazia, tendo por base muitas reflexões, passei a transpor obstáculos internos e externos. No redimensionamento do "como ensinar", foi necessário um conhecimento profundo dos ramos em que se divide a disciplina. Hoje compreendo que o compromisso com o aprendizado do educando e o estudo para a ampliação do conhecimento e da competência profissional foram fatores determinantes para concretizar meu processo de mudança, pois, gradativamente, fui deixando para trás a educadora que *explicava* os conteúdos, passando a assumir a postura de educadora questionadora, que contextualiza, que provoca os estudantes, que procura estimular diferentes caminhos para possíveis soluções.

Entretanto, minha atividade docente sofreria mais rupturas durante o curso de especialização em Educação Matemática, tendo como referência o professor Dario Fiorentini. No decorrer deste curso senti a necessidade de compreender os problemas relativos à aprendizagem da matemática e da física, de ir além e compreender melhor o processo ensino-aprendizagem dos educandos.

Na minha caminhada acadêmica pela Universidade de Passo Fundo, RS me inscrevi na Faculdade de Educação e fui aprovada na seleção do curso de mestrado em Educação na sua primeira turma, onde defendi a proposta intitulada “Encontros e desencontros entre estudantes e a física no ensino médio”.

Na minha passagem pela Universidade de Passo Fundo, me dediquei muito à investigação sobre a física, porém as questões sobre a fragmentação e dificuldades enfrentadas pelos educandos quanto ao conhecimento matemático não foram esquecidas. Na mesma época, tive a oportunidade de, na mesma instituição, atuar como professora substituta das disciplinas Matemática Básica 1 e 2 e Cálculo 1 e 2 nos cursos de Matemática, Administração, Ciências, Computação e Química. Nessa atividade constatei o quanto os novos acadêmicos entravam em conflito com a matemática, pois não recordavam nem mesmo procedimentos comuns das quatro operações elementares com números naturais, o que se agravava na retomada de tópicos específicos na álgebra e na geometria como revisão ao ensino básico.

Após muitas reflexões sobre a questão da aprendizagem, não pude mais aceitar a aprendizagem como “pura absorção” de conhecimentos transmitidos. Ao considerá-la como um processo de construção de conhecimentos, entendi ser possível extrair da evolução da álgebra elementos importantes que pudessem contribuir na produção e no crescimento do estudante. Passei a entender que *ensinar* deve ser um processo no qual se possibilitem condições favoráveis para que o estudante aprenda, organizando a sua estrutura cognitiva de tal forma que consiga apreender o novo conhecimento de forma significativa.

Para a continuação dos estudos, ingressei na Universidade Federal do Rio Grande do Sul – na Faculdade de Educação, no Programa de Pós-Graduação, como aluna PEC tendo em vista o doutorado, optando pela linha de pesquisa 06: “Psicopedagogia, sistemas de ensino-aprendizagem e educação em saúde”. Minhas preocupações com a aprendizagem do estudante adolescente tomaram corpo quando entrei em contato com os estudos da epistemologia genética de Jean Piaget. Dentre as questões que mais me chamaram a atenção estão a negação das condições de preponderância do meio ou de absolutização do sujeito e a proposta de um processo de construção do conhecimento proveniente da interação entre sujeito e objeto.

As proposições da teoria piagetiana sobre a construção do conhecimento, a teoria construtivista, a construção do sujeito sobre o objeto me inquietaram, porque, de acordo com as pesquisas da área realizadas na matemática nas últimas duas décadas e as críticas que os autores como CARUSO (2002), LINZ (2000), GIMENEZ (2000), FIORENTINI (2000), fizeram às justificativas dadas pelo senso comum. As dificuldades dos estudantes seriam, especialmente, de natureza cognitiva, ligadas à inteligência e/ou à capacidade de lidar com a matemática. Essa interpretação retira toda a responsabilidade dos professores e dos pesquisadores de tentarem melhorar a relação estudante-matemática, colocando no lugar um sentimento de impotência e submissão que em nada contribui para uma forma significativa de aprendizagem na matemática.

Diante desse panorama, compreendo a epistemologia genética como uma possibilidade de o conhecimento ser visto como processo de construção, distinguindo-se dos modelos em que se considera os professores meros *transmissores* de conhecimentos e os estudantes, meros *receptores* nas escolas de ensino básico. Vejo na epistemologia genética a oportunidade de observar os caminhos utilizados pelos educandos-adolescentes na significação de noções e conceitos aritméticos e algébricos.

Como educadora-pesquisadora, sei que a matemática está presente em todos os níveis da educação escolar e não escolar, ocupando um espaço singular na formação do educando. Logo, é necessário incluir-me nesse repensar, uma vez que a matemática escolar se caracteriza por um caráter excludente.

Durante o doutorado permaneceram as preocupações com as dificuldades no ensino-aprendizagem da matemática, sobretudo no campo da *educação algébrica*. O meu interesse pela álgebra vem da provocação de questionamentos e incertezas relativas ao processo de aprendizagem dos adolescentes do ensino básico. Quais os motivos que levam grande parcela destes a desenvolver um sentimento de repulsa pela álgebra? Pretendi, assim, compreender como ocorre a aprendizagem na álgebra e de que forma é assimilado um conteúdo específico da álgebra na matemática: a multiplicação de monômios.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esse capítulo faz uma retrospectiva histórica da educação matemática, discute suas implicações para ensino da matemática, se refere aos paradigmas da ciência e da matemática. Estabelece e contextualiza a discussão com o ensino e a educação algébrica focalizada nessa tese.

2.1 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

No Brasil, uma série de publicações e discussões, em contextos variados, procura estabelecer uma diferenciação entre "educação matemática" e "ensino de matemática"[4]. Contudo, quero destacar que, quando trato de "educação", estou me referindo a um fenômeno mais amplo do que falar em "ensino", abrangendo um campo de *educação* através da *aprendizagem* de sujeitos situados num contexto social.

Cada momento histórico determinou diferentes "funções" para a educação, acompanhando, assim, as diversas tendências de ensino, como mostra o panorama abaixo:

> 1. Antiguidade: matemática. O ensino surge convertendo-se num imenso sistema de extensas disciplinas. Poderoso instrumento para conhecer e agir sobre o mundo.
> 2. Décadas de 20/50: matemática tradicional. Ênfase apenas na memorização. Ensino sem nenhuma função social.
> 3. Décadas de 60/70: matemática moderna. Movimento educacional que valoriza a linguagem matemática e suas estruturas. Distanciou-se do entendimento dos alunos.
> 4. Décadas de 80/90: matemática e o ensino em discussão. Surgem as reformas redimencionando a Matemática, buscando vinculá-la com as aplicações práticas. (LONGEN, 2004, p.9).

A questão do ensino da matemática passou a ser discutida com maior intensidade em congressos nacionais e internacionais de matemática, desencadeando um processo de discussão com a instituição de diferentes fóruns de debate, como os Círculos de Professores de Matemática e as Associações de Professores e congressos estaduais. Todavia, o que realmente desencadeou, a

[4] Cf. BICUDO (1991) **Educação Matemática e ensino de Matemática;** D'AMBRÓSIO (1985) **Educação Matemática**: por que Educação Matemática? Não bastaria Educação e Matemática.

partir da década de 1960, o movimento da Matemática Moderna no Brasil, segundo Miorim (1998), foi o desenvolvimento de atividades do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (Geem), criado em São Paulo sob a liderança de Osvaldo Sangiorgi. Foram criados também o Grupo de Estudos de Ensino da Matemática de Porto Alegre (Geempa), o Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática do Rio de Janeiro (Gepem), o Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino da Matemática de Curitiba (Nedem) e o Grupo da Universidade Federal da Bahia.

Segundo D'Ambrósio, "o Movimento da Matemática Moderna tem enorme importância na identificação de novas lideranças na educação matemática e na aproximação dos pesquisadores com os educadores" (2001, p.57) e, consequentemente, na aproximação entre o ensino e a pesquisa e na implantação da matemática moderna nas escolas brasileiras, apoiada pelo Ministério da Educação e Cultura.

As discussões das décadas de 1960 a 1990 sinalizam uma crítica ao movimento da Matemática Moderna e ao ensino tradicional. A noção de ensino tradicional é utilizada para dar conta de uma aprendizagem que consiste em processos de memorização, enfatizando aspectos mecânicos de resolução de expressões e cálculos. O movimento da Matemática Moderna, segundo Bicudo, foi "o movimento do Ensino da Matemática dos anos 60, não o da Educação Matemática." (1991, p.33) Para o autor, tal movimento seria o "divisor de águas entre o Ensino da Matemática e a Educação Matemática" (1991, p.32).

Bicudo (1991, p.34) afirma que a diferença entre a Educação Matemática e o ensino de matemática "está no modo pelo qual se olha esta ciência". A visão daqueles que praticam apenas o ensino da matemática "é local e não vai à procura do que seria a essência da mesma" (p.34), ao passo que a Educação Matemática possibilitaria uma visão mais ampla da matemática, permitindo buscar o que está em seu âmago, o que a distingue de tudo o mais.

No que se refere à apresentação dos conteúdos de matemática, o movimento da matemática moderna enfatizava o aspecto conceitual da matemática em detrimento da manipulação de expressões de cálculo, tal como pode ser verificado na ênfase dada ao aspecto manipulativo e mecânico destas.

Em contraposição à ênfase dada pelo movimento da matemática moderna às formas de abordar e de organizar os conteúdos de matemática nos livros didáticos, emergem novas propostas, as quais podem ser exemplificadas por meio dos livros didáticos intitulados “Matemática Atual”. Conforme informação veiculada pela *Educação matemática em revista*, esta coleção

> está fundamentada nas mais recentes pesquisas nacionais e internacionais na área de Educação Matemática; aborda as relações entre a Matemática e as coisas de nossa realidade a partir de problemas significativos e provocadores. Tratada dessa maneira, a Matemática apresenta-se viva, prazerosa, recreativa. A história da Matemática é mesclada de problemas reais, cultura, aplicações e exploração de jogos e materiais, o que torna a obra agradável, ativa e bem-humorada. (1996, p.22)

Outro destaque a essa coleção de livros encontra-se na Matemática Atual *home page,* cuja primeira página faz referência ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD/99), trazendo a seguinte apreciação sobre a coleção: “A obra analisada constitui-se, dessa forma, num original e adequado bom instrumento para o ensino de Matemática na série a que se destina”. (1998, p.1) No que se refere “à seleção de conteúdos adaptados às exigências da sociedade atual” (1998, p.1), outros aspectos destacam “a atualidade da proposta metodológica e sua adequação às principais recomendações das propostas curriculares estaduais em vigor”. (1998, p.1) A característica atribuída à coleção diz respeito ao “estímulo dado à investigação, à argumentação crítica, à conquista de autonomia e ao preparo para o exercício da cidadania por parte do aluno”. (1998, p.1)

Soares (1994, p.47) destaca que, na busca de superar tanto a concepção tradicional quanto a da Matemática Moderna, nos últimos anos foi proposta uma retomada de conteúdos “numa visão mais articulada”. Assim, deve-se entender “que a definição dos conteúdos é fator fundamental para que os conhecimentos matemáticos, anteriormente fragmentados, sejam agora vistos como ‘um todo ricamente articulado’”.

Os conteúdos de geometria, tratados até então dedutivamente, e os conteúdos pragmáticos da álgebra elementar, que exigiam que os conceitos viessem associados à necessidade de serem aplicados em problemas, deram lugar aos conteúdos de álgebra moderna. Essa abordagem exigia o domínio de conceitos prévios e precisos, tais como a frase, sentença aberta, sentença numérica, dentre outros conhecimentos.

Apesar de ser considerada disciplina obrigatória na composição da parte geral do currículo, "a Matemática é reduzida a um conjunto de técnicas, regras e algoritmos, sem grande preocupação em fundamentá-los ou justificá-los." (FIORENTINI, 1995, p.17) Além do tecnicismo pedagógico, havia ainda nesse período um processo de "algebrização" no currículo escolar. Para Miguel, Fiorentini e Miorin,

> [...] a Álgebra viria a desempenhar um papel de destaque, não apenas em sua concepção tradicional, mas, sobretudo, em sua concepção moderna. Isto porque, os grandes avanços da Matemática, nos dois últimos séculos, deram-se graças ao processo de algebrização da Matemática Clássica, tornando-a mais rigorosa, precisa e abstrata e, portanto, assim pensava-se mais aplicável. (1992, p.46).

Já o movimento da Matemática Moderna preocupava-se com os conteúdos, enfatizando seu aspecto formal, lógico e axiomático, que caracterizava o formalismo como modo de pensar dominante nos meios acadêmicos: o modo de tratar os conteúdos no ensino secundário deveria se assemelhar ao modo como estes eram tratados no ensino de matemática na academia. Conforme Búrigo (1999), esse movimento – que perdurou do início da década de 1960 até metade da de 1980 – veio associado à ideia de modernização, enfatizada desde o decênio de 1920 pelos escolanovistas. O movimento ganhou um novo sentido com a aceleração da inovação tecnológica em nível mundial e, no pós-guerra, com a institucionalização de uma política no país, na década de 1950, expressa na criação do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível Superior (Capes). Para Carvalho (1991), o fracasso dessas tentativas, centradas nos currículos, de melhorar o processo ensino-aprendizagem da matemática de um ponto conteudista foi uma das falhas da Matemática Moderna.

Teixeira (1998) lembra que, a partir do momento em que os movimentos sociais começaram a acontecer, mais especificamente, com a "volta da democracia", também irromperam movimentos na área do ensino de matemática. Em 1985 articulou-se um grupo de professores brasileiros para participar da Conferência Interamericana de Educação Matemática, realizada na Cidade do México, onde foi proposta a realização do 1º Encontro Nacional de Educação Matemática (Enem). Tal proposta teve como desdobramento a realização de reuniões, encontros e palestras por todo o Brasil, acontecimentos que culminaram, em fevereiro de 1987, na realização do 1º Enem em São Paulo. Para Teixeira (1998), este encontro “foi um marco na história do desenvolvimento de novos grupos, de novas propostas” (1998, p.9), bem como da organização da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), cuja fundação se tratava de uma luta “política e ideológica”.

Os aspectos políticos e socioculturais da matemática passaram a ser enfatizados e fortalecidos com a emergência dos estudos em etnomatemática. Conforme Knijnik (1996), a etnomatemática se constitui numa “nova vertente de pensamento no campo da Educação Matemática”. A expressão “etnomatemática” foi utilizada pela primeira vez por Ubiratan D’Ambrósio: “A Matemática falada pela natureza, e que chamamos Etnomatemática”, constituindo “o passo inicial da Educação Matemática” (1985, p.1). Ao relatar sua trajetória em direção ao que chama de “programa etnomatemático”, o autor ressalta que “nasce de um inconformismo com a fragmentação do conhecimento” (p.5). Segundo D’Ambrósio, “não é possível explicar, conhecer, entender, manejar, lidar com a realidade fora do contexto holístico” (p.11), pois ter-se-iam não mais que “visões parciais e incompletas da realidade”. (p.11)

Para Teixeira (1998, p.10), a “chamada Educação Matemática está aberta a absorver, em função de seu desenvolvimento, outras áreas do conhecimento, tais como a Psicologia, a Sociologia, a Filosofia, [...]”. No contexto da Educação Matemática, propostas de mudanças no ensino da matemática enfatizando as contribuições de outros campos de saber podem ser exemplificadas pela fala de Lins na conferência de abertura do “Encontro Paranaense de Educação Matemática”:

> Foi neste esforço de mudar que passamos da idéia de *Ensino de Matemática* para a idéia de *Educação Matemática*; ao falar de *educação*, estamos falando de um fenômeno mais amplo do que quando falamos só de *ensino*. Passamos a considerar, além da Matemática e da Didática, também a Psicologia e a Sociologia, por exemplo, e isto porque passamos a nos interessar pelas peculiaridades individuais dos alunos, bem como pelos contextos culturais nos quais alunos, professores e escolas existem. (1995, p.2).

As propostas de reforma curricular, particularmente para o ensino médio, pautam-se nas constatações sobre mudanças no conhecimento e seus desdobramentos, no que se refere à produção e às relações sociais de modo geral. Partindo de princípios definidos na Lei de Diretrizes e Bases (LDB) – lei 9.394/96, o Ministério da Educação chegou a um novo perfil para o currículo, apoiado em competências básicas para a inserção dos jovens brasileiros na vida adulta. Assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNS) do ensino médio "buscam dar significado ao conhecimento escolar, mediante a contextualização, e evitar a compartimentalização, mediante a interdisciplinaridade." (BRASIL,1999, p.12)

Nessa nova etapa, em que o ensino médio é concebido para a universalidade da educação básica, os Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino médio recomendam que se

> precisa desenvolver o saber matemático, científico e tecnológico como condição de cidadania (...). O aprendizado não deve ser centrado na interação individual de alunos com materiais instrucionais, nem se resumir à exposição de alunos ao discurso professoral, mas se realizar pela participação ativa de cada um e do coletivo educacional numa prática de elaboração cultural. É na proposta de condução de cada disciplina e no tratamento interdisciplinar de diversos temas que esse caráter ativo e coletivo do aprendizado afirmar-se-á. (BRASIL, 1999, p.208-209).

A matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, tendo sua linguagem, ocupa uma posição singular. Possivelmente, nas atividades contemporâneas a matemática compareça

> de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, freqüências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos. O desenvolvimento dos instrumentos matemáticos de expressão e raciocínio, contudo, não deve ser preocupação exclusiva do professor de Matemática, mas das quatro disciplinas científico-tecnológicas (Biologia, Física, Química e Matemática), preferencialmente de forma coordenada, permitindo-se que o aluno construa efetivamente as abstrações matemáticas, evitando-se a memorização indiscriminada de algoritmos, de forma prejudicial ao aprendizado. A pertinente presença da Matemática no desenvolvimento de competências essenciais, envolvendo habilidades de caráter gráfico, geométrico, algébrico, estatístico, probabilístico, (..) (BRASIL, 1999, p.211).

Em seu papel formativo, a matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e aquisição de atitudes, pois seu sistema de códigos e regras torna-a ciência com uma linguagem de comunicação de ideias e permite-lhe modelar a realidade e interpretá-la. “Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática.” (BRASIL, 1999, p.251-252)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, com a preocupação centrada nos aspectos de valores, habilidades e atitudes dos educandos e professores em relação ao conhecimento, defendem que são, “a um só tempo, objetivos centrais da educação e também são elas que permitem ou impossibilitam a aprendizagem” dos educandos. (1999, p.254) Também fazem recomendações como: o “currículo a ser elaborado deve corresponder a uma boa seleção, deve contemplar aspectos dos conteúdos e práticas que precisam ser enfatizados.” (p.255) Como exemplo citam temas sobre a aprendizagem da matemática: “aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.” (p.255)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais pautam-se na recomendação da garantia de espaços diferenciados para o entendimento e aprofundamento dos conhecimentos numéricos e algébricos, vinculados à perspectiva sócio-histórica dos estudantes. Esses conteúdos deverão estar

> diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real. (BRASIL, 1999, p.263).

O documento insiste quanto à atualização curricular, ressaltando que “não deve significar complementação de emendas”. (p.263) Afirma ser necessária a superação de uma visão enciclopédica, para que ocorram uma real atualização do ensino e a substituição de uma “ordem tão artificial quanto arbitrária, em que pré-requisitos fechados proíbem o aprendizado de aspectos modernos (...) antes do aprendizado clássico”. (p.263) Recomenda ser preciso “mudar convicções equivocadas, culturalmente difundidas em toda a sociedade, de que os alunos são os pacientes, de que os agentes são os professores e de que a escola estabelece simplesmente o cenário do processo de ensino.” (p.263) Enfatiza o compromisso do estabelecimento de ensino com o aprendizado da matemática, visto que “toda a escola deve ter uma nova postura metodológica difícil de implementar, pois exige a alteração de hábitos de ensino há muito consolidados.” (p.264) É preciso que seja assumida uma reformulação significativa de postura pedagógica por parte dos estabelecimentos de ensino básico diante da complexidade da situação educacional brasileira.

Conforme Kuhn (1998), os paradigmas da ciência foram se alterando em movimentos cíclicos ao longo da história da humanidade, pela desestabilização dos “critérios estáveis” do paradigma vigente e pela construção de novos critérios no modelo emergente. Todavia, a matemática não sofreu o abalo das suas certezas instituídas desde os antigos gregos, só vindo a sofrer um processo de questionamento no início do século XX, com a “Matemática Moderna”. A concepção grega passou a se consolidar com o paradigma cartesiano-newtoniano, o chamado “paradigma tradicional de ciência”. No relato de Schubring:

> A partir dos inovadores trabalhos de Thomas Kuhn, em quase todas as outras ciências foram analisadas e reconhecidas “revoluções” no sistema conceitual e rupturas nos campos conceituais, a matemática parece continuar fechada a tais inovações epistemológicas: excessivamente soberba parece continuar sendo a imagem unívoca da “rainha das ciências” que se desenvolve cumulativamente, permanecendo sempre idêntica consigo mesma. (1998, p.13).

Como um dos campos da matemática, a álgebra vem, ao longo da história, sofrendo avanços e retrocessos, com períodos de esquecimento e outros de maior notoriedade. No decorrer da história da matemática, a álgebra trouxe à tona conflitos e problemas, o que contribui para que o ensino-aprendizagem dos conceitos algébricos, como de toda a matemática, seja considerado no meio educacional um “processo complicado” aos olhos de todos os que se encontram no meio formal ou não formal da educação escolar. Referindo-se a isso, Robayna et al. agrupam as dificuldades, em linhas gerais, nas seguintes categorias:

> Dificultades debidas a la naturaleza el tema algebraico dentro del contexto de lãs matemáticas; dificultades que surgen de los processos del desarrollo cognitivo de los alumnos y de la estrutura y organización de sus experiências; dificultades atribuibles a la naturaleza del currículo, a la

> organización de lãs lecciones y a los racionales hacia el álgebra (1996, p.91).

No século XX, entre as décadas de 1970 e 1990, as preocupações com as dificuldades observadas no ensino-aprendizagem da matemática levaram ao surgimento do que veio a se chamar "educação matemática"; em consequência, surgiu a "educação algébrica", tentando pensar caminhos para o complexo trabalho com essa área do conhecimento.

Assim, chegou-se ao século XXI com a educação algébrica provocando polêmicas e desafios, decorrentes dos conflitos gerados no âmbito da escola formal, pela falta de interesse e pelo despreparo tanto dos professores, para assumir e desenvolver a educação algébrica de forma séria e competente, como dos adolescentes, que apresentam resistência, por vezes consolidadas, a mudanças de conteúdos no campo da matemática.

Apesar do empenho dos órgãos responsáveis em realizar mudanças curriculares; apesar dos encontros educacionais promovidos pelas instituições de ensino superior com o objetivo de proporcionar o debate, a análise e a reflexão das práticas pedagógicas desenvolvidas nas unidades de ensino básico, do papel da matemática no currículo; apesar, também, das inúmeras pesquisas realizadas em educação matemática e algébrica, a disciplina, de modo geral, continua sendo desenvolvida de maneira acrítica, ahistórica, como uma coleção de verdades únicas.

O ensino da álgebra na matemática, de modo geral, continua centrado nos conteúdos abstratos; logo, o processo de ensino-aprendizagem baseia-se na transmissão do conhecimento. Nessa concepção, o estudante continua sendo o armazenador de informações, não tendo espaço para a reflexão e reelaboração dos conceitos algébricos, os quais não apresentam vinculação com a sua realidade. Em alguns núcleos, contudo, vem sendo discutida uma forma mais interessante e menos alienante do ensino da álgebra, na tentativa de cumprir um dos papéis do currículo escolar, que é o desenvolvimento do espírito crítico-criativo e de busca de conhecimento, fator responsável pela formação intelectual, social e moral do estudante no ensino básico.

Penso que o estudo da álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de análise e síntese, de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas em outras ciências. No entanto, conforme se registra nos Parâmetros Curriculares Nacionais, “a ênfase que os professores dão a esse ensino não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática como pelo desempenho dos alunos nas avaliações que têm ocorrido em muitas escolas”. (1999, p.115). Salienta-se ainda nesse documento que, conforme resultados do Sistema Nacional de Avaliação Básica/Saeb, os itens que se referem à álgebra raramente atingem o índice de 40% de acertos pelos alunos nas diferentes regiões do país.

Constato que as novas propostas curriculares tratam a álgebra como elemento importante do currículo, pois tanto os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999) como o Padrão Referencial de Currículo/PRC (RIO GRANDE DO SUL, 1998) destacam-no considerando que o pensamento algébrico constitui um marco importante no ensino fundamental, por permitir a abstração e a generalização. O documento PRC/RS ressalta ainda que “nesta etapa é ampliado o conceito de sistema de numeração e inicia-se o estudo das expressões algébricas, das equações e inequações aplicadas a situações geométricas e outras do ‘dia-a-dia’ tendo como objetivos o equacionamento de problemas.” (RIO GRANDE DO SUL, 1998, p.15).

O novo milênio encontrou a educação matemática em crise: o ensino da geometria fora abandonado; o ensino da álgebra estava em estado letárgico, segundo Miorin et al., trabalhado “de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões, tal como ocorria há várias décadas.” (1993, p.39).

As atividades algébricas tornaram-se ao longo das décadas problemas de resoluções mecanizadas de questões dissociadas da vida real dos educandos. Por isso, indagações do tipo “por que eu preciso aprender isso, professor?” tornaram-se comuns nas salas de aula. Nesse contexto, nas últimas décadas do século XX acentuaram-se as discussões em torno do ensino e da aprendizagem da matemática, emergindo questões relativas às concepções de educação ligadas às ideias de Jean Piaget (construtivismo) e Paulo Freire (socioculturalismo) e no enfoque de Lev Vygotsky (sociointeracionista).

A história da educação matemática e as políticas assumidas no Brasil não ficaram alheias as diferentes tendências e concepções de educação, o que fez aflorar a discussão sobre as concepções matemáticas que fundamentam o que hoje se chama “educação matemática” e “educação algébrica”.

Hoje o termo “educação matemática” é o que melhor traduz as reflexões desencadeadas nas últimas décadas no Brasil, pois percebe-se o “ensino da matemática” como uma de suas partes, ampliando as discussões para além dos conteúdos. Diante desse quadro, Carvalho (1991, p.18) define-a como “o estudo de todos os fatores que influenciam, direta e indiretamente, sobre todos os processos de ensino-aprendizagem em matemática e a atuação sobre esses fatores”.

Para Sousa et al. (1995, p.51) educação matemática define-se como “a área do conhecimento cujo objeto de estudo e pesquisa é interdisciplinar e diz respeito ao processo de produção e aquisição do saber matemático, tanto mediante a prática pedagógica em todos os graus de ensino quanto mediante a outras práticas sociais”.

No Brasil, especialistas em educação matemática atuam em universidades e em grupos de pesquisa ligados a grupos em nível internacional. Mesmo com todo esse empenho, os resultados de tais pesquisas pouco chegam às instituições do ensino básico, muito menos às salas de aula, o que também acontece com propostas pedagógicas de educadores matemáticos, as quais, mesmo sendo de qualidade, são pouco conhecidas e discutidas pelos professores que atuam na formação básica dos educandos.

Fiorentini (1995), realizando estudos e reflexões sobre a trajetória histórica do ensino da matemática no Brasil, utilizando como referência ideias pedagógicas de Saviani (1984) e Libâneo (1985), eventos educacionais promovidos na área em questão e propostas oficiais e análise de livros didáticos de várias épocas, identificou diferentes modos de ver e conceber a educação matemática, os quais classificou em categorias como: a concepção de matemática, a crença do modo como se dá o processo de obtenção/produção/descoberta do conhecimento matemático, a concepção de ensino e de aprendizagem. Esses estudos foram agrupados pelo autor em seis tendências sintetizadas na sequência.

A *tendência formalista clássica*, predominante até a década de 1950, caracteriza-se pela ideia de que os conhecimentos matemáticos são sistematizados de forma lógica a partir de axiomas, definições e postulados (modelo euclidiano). Nesta tendência, o ensino tem como fim o desenvolvimento do espírito, da disciplina mental e do pensamento lógico-dedutivo.

A *tendência empírico-ativista* procura valorizar o processo de aprendizagem envolvendo os educandos nas atividades organizadas e desenvolvidas de forma espontânea, respeitando seus ritmos e vontades. O ensino tem como fim o desenvolvimento da criatividade e das potencialidades, adaptando o sujeito à sociedade. O currículo deve ser organizado de maneira que atenda às características biológicas e psicológicas do educando, considerando-o o centro ativo do processo, favorecendo o seu aprendizado e proporcionando o seu desenvolvimento psicológico.

A *tendência formalista moderna* surgiu no Brasil no início da década de 1960, ligada ao Movimento da Matemática Moderna. Enfatiza a matemática pela matemática, como se fosse uma ciência neutra, sem relação com o político e o social; preocupa-se com o uso correto dos símbolos, com a precisão e com o rigor; fundamentada no processo de algebrização e da linguagem formal da matemática contemporânea, justifica-se pelas transformações algébricas através das propriedades estruturais. Com relação ao processo ensino-aprendizagem, pouco se diferencia da tendência clássica, pois o educando continua a reproduzir a linguagem e os raciocínios lógico-estruturais ditados pelo professor.

A *tendência tecnicista e suas variações*, de origem norte-americana, fez-se presente no Brasil entre as décadas de 1960 e 1970. Nela, o processo ensino-aprendizagem centra-se nos objetivos instrucionais, nos recursos e nas técnicas de ensino, considerando que a aprendizagem consiste em modificações comportamentais por estímulos. Ao professor cabe desenvolver habilidades e atitudes computacionais e manipulativas, capacitando o educando para a resolução de exercícios ou problemas-padrão que envolvem memorização de princípios e fórmulas, manipulação de algoritmos ou de expressões algébricas.

A *tendência socioetnocultural* apoia-se pedagogicamente nas ideias de Paulo Freire e, no que se refere à educação matemática, fundamenta-se na etnomatemática, cujo principal representante é Ubiratan D’Ambrósio. Esta tendência se preocupa com o contexto social e cultural no qual o educando está inserido. O método de ensino aqui priorizado é a problematização, que contempla a pesquisa e a discussão de problemas da realidade dos educandos, oportunizando-lhes uma aprendizagem mais significativa e efetiva da matemática. Assim, segundo Fiorentini, o conhecimento matemático “passa a ser visto como um saber prático, relativo, não-universal e dinâmico, produzido histórico-culturalmente nas diferentes práticas sociais, podendo aparecer sistematizado ou não”. (1995, p.26)

Fiorentini (1995) não se limita a sintetizar as tendências que marcaram a trajetória histórica do ensino da matemática no país. Ao perceber o processo pedagógico como dinâmico e dialético, entende que o professor deve conhecer a diversidade de concepções, paradigmas e ideologias que embasam o ensino da matemática e, com base nelas, construir novas perspectivas educacionais, que atendam às suas expectativas específicas. Embasado nesse raciocínio, Fiorentini aponta como emergentes as tendências histórico-crítica e sociointeracionista-semântica, as quais assim explica:

> a) Na abordagem histórico-crítica, (...) o aluno aprende significativamente matemática, quando consegue atribuir sentido e significado às idéias matemáticas – mesmo aquelas mais puras (isto é, abstraídas de uma realidade mais concreta) – e, sobre elas é capaz de pensar, estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar.
>
> b) Na abordagem sociointeracionista-semântica: aprender significa *significar*: estabelecer relações possíveis entre fatos/idéias e suas representações (signos). (1995, p.30-33).

Na abordagem histórico-crítica, portanto, o objeto do conhecimento matemático é considerado como um ser vivo e dinâmico, que vem sendo constituído a partir das exigências da sociedade emergente e das necessidades teóricas de ampliação dos próprios conceitos. Nesta concepção o processo ensino-aprendizagem da matemática vai além dos métodos formais. Por sua vez, na abordagem sociointeracionista-semântica a significação ocupa um lugar central, sendo o professor responsável pelo planejamento das atividades que contemplam a produção e a apropriação dos significados histórico-socialmente produzidos.

A *tendência construtivista* surgiu no Brasil a partir da década de 1970, fundamentada na epistemologia genética piagetiana, trazendo elementos da psicologia para contribuir teoricamente com a iniciação ao estudo da educação matemática. Concebe o processo ensino-aprendizagem da matemática como uma construção que resulta da interação dinâmica do homem com seu meio. Ao professor compete organizar e propor atividades problematizadoras que levem o educando a estabelecer as relações existentes entre objetos, ações ou ideias já constituídas, para que a apreensão dos conceitos ocorra de maneira ativa, uma vez que o aprendiz vê, manipula, significa, representa, compara, erra e constrói a partir do erro. Respeita o desenvolvimento das estruturas mentais da criança para a efetivação da aprendizagem, priorizando mais o processo que o produto do conhecimento.

Nesta investigação, não vou desenvolver o debate sobre conceitos de ensino e aprendizagem e nem sobre a definição da Educação Matemática. Este estudo se desenvolve no campo da Educação Matemática e tem como objetivo a busca de uma problematização no campo algébrico da matemática, tratando, sobretudo, da construção de conhecimento de uma noção exponencial.

2.2 PESQUISADORES E PESQUISAS SOBRE A ÁLGEBRA

A obra The *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (1995), organizada por Arthur F. Coxford e Alberto P. Shulte, traduzida por Hygino H. Domingues e impressa no Brasil como *As idéias da álgebra,* é composta por artigos que analisam dilemas e concepções sobre o processo de ensino-aprendizagem de álgebra. Estas pesquisas são divididas em seis partes, compostas por trinta e três artigos.

Após a leitura dos artigos, para a pesquisa selecionei aqueles cujos pesquisadores se preocuparam com categorias e concepções que penso serem importantes para a análise sobre a aprendizagem de álgebra pelos estudantes adolescentes da sétima série do ensino fundamental.

House (1995) defende a necessidade de ser reexaminado o currículo da matemática e o seu ensino, apontando que “no programa de álgebra, a necessidade maior dos alunos é uma compreensão sólida dos conceitos algébricos e a capacidade de usar o conhecimento em situações novas e às vezes inesperadas.” (1995, p.2).

O autor propõe novos sistemas de transmissão de conhecimentos, incorporando programas de computadores e manipuladores de símbolos. E em meio a essas propostas o papel da álgebra é realçado e reforçado. House afirma que atuam duas forças com potencial para alterar o modo como se ensina a álgebra da escola média: a) *a tecnologia da computação* – “[…] os conceitos e processos algébricos, como manipulação de variáveis e avaliação de tendências” (1995, p.4) O autor entende que “na álgebra, são de importância primordial: a compreensão de conceitos como o de variável e o de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a destreza na apresentação e interpretação de dados”. (HOUSE, 1995, p.5); b) *as forças sociais* podem ou não ajudar no ensino-aprendizagem, pois as novas demandas da sociedade por cidadãos com “facilidade para o raciocínio quantitativo e os processos matemáticos” (HOUSE,1995, p.6).

Ainda House (1995, p.7) aponta que, diante de uma crise na comunidade de ensino da matemática, a álgebra, uma matéria comum no ensino fundamental, “muitas vezes é um ponto crítico na decisão tomada pelo aluno de continuar ou não estudando matemática.” Logo, modificar o currículo de álgebra é uma proposta audaciosa, que não se realizará sem grandes esforços do corpo docente em promover as condições necessárias para uma aprendizagem significativa dos alunos.

Usiskin (1995) escreveu artigo cujo objetivo é a compreensão sobre *o que é a álgebra do ensino médio*. Questionando a aprendizagem de álgebra pela compreensão que o aluno tem do significado das “letras” (variáveis) e das operações com estas, o autor aponta que a concepção mais natural de variável é a de símbolos que representam indistintamente os elementos de um conjunto.

Observa Usiskin (1995, p.11) que os alunos tendem a acreditar que “todas as variáveis são letras que representam números […] e que uma variável é sempre uma letra.” Em resumo, as variáveis comportam muitas definições, conotações e símbolos; logo, tentar enquadrá-las numa única concepção “implica em supersimplificação”. (p.12) O autor assinala duas questões fundamentais do ensino de álgebra: a primeira envolve o ensino da álgebra na escola média: “até que ponto se deve exigir dos alunos a capacidade de manejar, por si próprios, diversas técnicas manipulatórias” (p.12); a segunda questiona no currículo de álgebra o papel das funções e o momento de introduzi-las.

Para Usiskin (1995, p.12), “essas duas questões relacionam-se com as próprias finalidades do ensino e da aprendizagem da álgebra, com os objetivos da formação em álgebra e com as concepções que tenhamos desse corpo de conhecimentos.” Ainda, acredita que “as finalidades da álgebra *são determinadas por, ou relacionam-se com* concepções *diferentes* da álgebra *que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos* usos das variáveis.” (p.13) O autor analisa em seu artigo quatro concepções de álgebra:

1ª) *a álgebra como aritmética generalizada*: a noção de variável como generalizadora de modelos. Dentro dessa concepção de álgebra, o aluno tem como instrução-chave *traduzir* e *generalizar*;

2ª) *a álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas*: as variáveis são incógnitas e as instruções-chave são *simplificar* e *resolver*;

3ª) *a álgebra como estudo de relações entre grandezas*: considera que a concepção de álgebra como o estudo das relações pode começar com fórmulas e, “neste caso, as variáveis variam.” (USISKIN, 1995, p.15) Nesta concepção, uma variável é um *argumento* ou um *parâmetro*; “trata-se de um modelo fundamentalmente algébrico. […] Na linguagem dos conjuntos ou quantificantes, x e y são conhecidos como *variáveis mudas*”. (p.17)

4ª) *a álgebra como estudo das estruturas*. Nesta concepção de álgebra como estudo de estruturas a variável é um símbolo arbitrário. “A variável tornou-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades.” (p.18) E no simbolismo uma variável sofre dois processos: de *manipulação cega* ou de *técnica automática*.

Estas concepções são reunidas no quadro a seguir:

Concepções de álgebra	*Uso das variáveis*
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Quadro 1 – Resumo das concepções e relações (USISKIN,1995, p.20)

Booth (1995, p.24), na tentativa de compreender *por que é difícil aprender álgebra*, argumenta que um dos caminhos é a identificação dos tipos de erros que os alunos cometem e a investigação das razões desses erros. Numa pesquisa com alunos de 13 a 16 anos que vinham estudando álgebra desde a 7ª série, verificou que, apesar da idade e da experiência em álgebra, eles cometiam “erros semelhantes em todas as séries.” Esses erros se apresentaram em aspectos como:

a) *o foco da atividade algébrica e a natureza das respostas*: em álgebra, o foco da atividade apontado é o dilema “nome-processo” como uma fonte de dificuldades para o aluno;

b) *notações e convenções em álgebra*: Booth (1995) trabalha esta possibilidade em duas vertentes:

b.1) *a interpretação dos símbolos pelos alunos*: em aritmética, símbolos como + e = são interpretados como ações a serem efetuadas; logo + é a operação, e = significa escrever a resposta. Verificou-se com alunos de 12 a 17 anos a ideia de que o símbolo “+” pode indicar tanto o resultado de uma adição como a ação, ou de que o sinal “=” pode indicar uma relação de equivalência, em vez de um símbolo para escrever a resposta. E “essas duas noções são necessárias para a compreensão algébrica.” (1995, p.27)

b.2) *a necessidade de uma notação precisa*: Booth assinala a necessidade, em álgebra, de uma precisão absoluta no registro de informações. Logo, se não forem devidamente “tratados, tais erros de concepção em aritmética poderão levar, posteriormente, a problemas em álgebra.” (p.30);

c) *letras e variáveis*, são dois enfoques:

c.1) *letras em álgebra*: "A confusão decorrente dessa mudança de uso pode resultar numa 'falta de referencial numérico', por parte do aluno, ao interpretar o significado das letras em álgebra." (BOOTH, 1995, p.30) A autora sustenta que o acerto aparente da leitura literal algébrica de forma completa (5 . y) pode encorajar o aluno a proceder de modo 5y. Sugere, então, que os alunos escolham as letras (variáveis) em determinadas situações para evitar erros de conversão (leitura verbal e escrita gráfica).

c.2) *a noção de "variável"*: é um dos aspectos mais importantes da álgebra a ideia de "variável". Nas crianças há "uma forte tendência a considerar que as letras representam valores específicos únicos, [...] e não números genéricos ou variáveis." (BOOTH, 1995, p.31) Na aritmética, os símbolos que representam quantidades sempre significam valores únicos; na álgebra, diferentes símbolos podem representar a mesma quantidade, isto é, letras diferentes não necessariamente representam valores numéricos diferentes.

d) *como os alunos entendem a aritmética*: segundo Booth, a álgebra não é isolada da aritmética. Para compreender a generalização das relações e procedimentos aritméticos é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam apreendidos dentro do contexto aritmético. "Nesse caso, as dificuldades que o aluno tem em álgebra não são tanto de álgebra propriamente dita, mas de problemas em aritmética que não foram corrigidos." (1995, p.32-33). Apresenta dois enfoques:

d.1) *as convenções aritméticas mal compreendidas*: o autor enumera vários aspectos, como o uso (ou não uso) dos parênteses. Também há a constatação de o aluno julgar que o valor de uma expressão permanece inalterado mesmo quando muda a ordem dos cálculos. O aluno se depara com a situação "de que o contexto a que está ligada a expressão escrita determina a ordem dos cálculos, independentemente de como a expressão seja escrita." (1995, p.33)

d.2) *métodos informais utilizados pelos alunos.* Tanto crianças como adolescentes em diferentes níveis de escolaridade utilizam métodos informais para resolver problemas. Assim, para Booth, "o uso de métodos informais em aritmética pode também ter implicações na habilidade do aluno para estabelecer (ou compreender) afirmações gerais em álgebra." (1995, p.35).

A pesquisadora perguntou-se se os erros cometidos pelos alunos de uma faixa etária eram, de fato, efeitos de um estágio de desenvolvimento intelectual, isto é, resolveu investigar se tais erros eram ou não *resistentes à instrução*. Booth (1995) encerra seu artigo afirmando ser de responsabilidade do professor um levantamento contínuo do que envolve o aprendizado dos tópicos aritméticos e algébricos de matemática, acompanhando os alunos pela análise dos erros cometidos e suas causas. Assim, poderá lhes proporcionar instrumentos para que a sua compreensão da matemática melhore.

Demana e Leitzel (1995), em seu artigo, abordam a necessidade de os alunos entenderem conceitos-chave de álgebra num contexto numérico. A abordagem apoia-se intensamente no uso das calculadoras e na resolução de problemas:

> A fim de reforçar nos alunos a compreensão dos conceitos aritméticos que são básicos para a álgebra, eles são levados primeiro a investigar como funcionam as calculadoras. Assim que se familiarizam [...], os alunos passam a resolver problemas numericamente, construindo tabelas e usando o procedimento supor-e-testar. A seguir, os alunos retornam às mesmas situações-problema, mas desta vez para investigar os problemas geometricamente, fazendo gráficos das relações contidas nos problemas. (1995, p.71).

No uso de cálculos para antecipar a álgebra, Demana e Leitzel estabelecem três prioridades: a) *Ordem das operações* – em que “a hierarquia algébrica exige que os alunos compreendam as propriedades aritméticas básicas.” (1995, p.71); b) *Números negativos* – “os alunos precisam estar familiarizados com os números negativos antes de começarem a estudar álgebra.” (p.72) A compreensão do sinal negativo em diferentes posições em relação aos parênteses para a potenciação na aritmética “é essencial para achar o valor de polinômios para valores negativos da variável.” (p.72); c) *outros aspectos* – as calculadoras tornam-se eficazes no ensino da pré-álgebra, porque “reforçam o fato de que uma fração é um quociente, de que o traço de fração é símbolo de agrupamento e de que não se pode dividir por 0.” (p.72-73)

Demana e Leitzel (1995, p.73) afirmam que as calculadoras permitem a generalização significativa de situações-problema com *a introdução de variáveis*, de “uso de variáveis como um instrumento para expressar uma generalização pareça bastante natural.” Os alunos fazem uso da calculadora no procedimento supor-e-estar, pelo qual o modelo deve ser descrito verbalmente e, com o tempo, num segundo momento, usar variáveis para escrever o modelo em questão. Os pesquisadores entendem que, “antes de iniciar os alunos nos métodos algébricos, é útil que eles visualizem graficamente as relações de um problema.” (1995, p.74)

Quanto *à compreensão das variáveis*, Demana e Leitzel (1995, p.74) acreditam que existe a necessidade da “introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas”. Essa compreensão de variáveis será instrumento útil nas generalizações; logo, se o aluno tiver dificuldades para conceitualizar uma variável, “essa dificuldade pode ser decisiva para um fracasso em álgebra.” (p.75)

Para Demana e Leitzel (1995), inicialmente, não é preciso que os alunos assimilem todas as convenções da notação algébrica, pois, mesmo com o tempo, as convenções são barreiras à compreensão de muitos deles. Embora eles “possam se sair bem em aritmética sem entender a propriedade distributiva, em álgebra é essencial que a entendam” (p.75), por ser uma propriedade utilizada na *simplificação de expressões algébricas*. Os autores entendem que, no momento em que os alunos escreverem equações e procurarem resolvê-las, tem-se um caminho para iniciar os alunos na pré-álgebra. Também afirmam que, “se o raciocínio dos alunos brota de uma experiência numérica sólida, trata-se de uma boa pré-álgebra.” (1995, p.77)

Post, Behr e Lesh (1995, p.89) afirmam ser o raciocínio com proporções “um dos componentes do raciocínio adquirido na adolescência.” *O que é o raciocínio com proporções?* “O raciocínio com proporções tem aspectos tanto matemáticos como psicológicos.” (p.90) Também envolve

> o pensamento qualitativo, [...] exige a capacidade de interpretar o significado, [...] guardar e informação e então comparar as interpretações de acordo com alguns critérios pré-determinados. Esse processo requer uma capacidade mental que Piaget situou no nível operacional formal do desenvolvimento cognitivo. Referiu-se a esse processo como operar com operações. Isto é, a interpretação de cada uma dessas razões é uma operação em si e por si, e a comparação é outro nível de operação. Esse processo requer um raciocínio comparativo em níveis múltiplos, bastante diferente de uma abordagem algorítmica [...]. (1995, p.91).

Logo, o raciocínio qualitativo é um meio importante de conferir a viabilidade das respostas e uma maneira de estabelecer parâmetros amplos para as condições do problema. Post et al*.* (1995, p.91) apresentam como outro aspecto do raciocínio com proporções “o domínio sólido de vários conceitos sobre números racionais, como por exemplo ordem e equivalência, a relação entre a unidade e suas partes.”

Mas *por que o raciocínio com proporções é importante no aprendizado de álgebra?* Para Post et al.:

> 1. a representação algébrica da proporcionalidade (y = mx) [...] é uma ponte adequada e talvez necessária entre experiências e modelos numéricos comuns e as relações mais abstratas, que se expressarão de forma algébrica;
> 2. as proporções [...] são úteis numa grande variedade de situações de resolução de problemas [...] por exemplo, velocidade, mistura, densidade, escala, conversão, consumo, preço e outras formas de comparações;
> 3. o raciocínio e o conhecimento algébricos muitas vezes envolvem modos diferentes de representação. Tabelas, gráficos, símbolos (equações), desenhos e diagramas são maneiras importantes pelas quais se podem representar idéias algébricas. (1995, p.91-92).

Assim, a capacidade de criar e compreender traduções desses modos de representação e de um para outro é um elemento essencial de competência matemática em todas áreas, não apenas em álgebra.

Post, Behr e Lesh (1995) concluem seu artigo afirmando que muitas vezes se define a álgebra como a aritmética generalizada e que os alunos devem perceber as conexões entre as equações abstratas da álgebra e o mundo real da aritmética. Com base nessas posições,

> a introdução à álgebra deve se basear na noção de que as variáveis podem ser manipuladas de uma maneira que corresponde exatamente a muitos aspectos do mundo real. Por isso a álgebra é importante e abstrata. As situações proporcionais fornecem uma porta ideal para o campo da representação algébrica, uma vez que seus antecedentes aritméticos são justificáveis através de abordagens do senso comum. (1995, p.102).

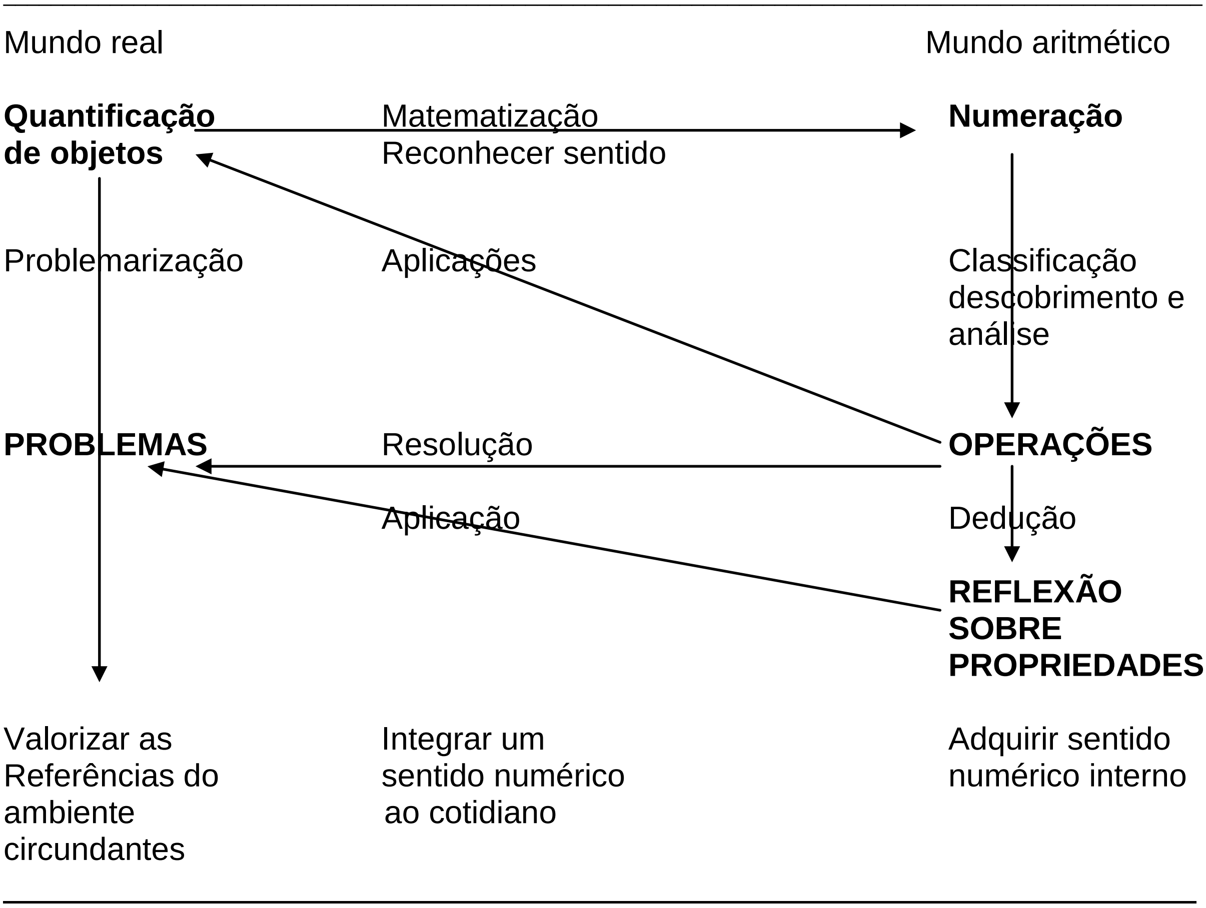
Rômulo Campos Lins e Joaquim Gimenez (2000) organizam a obra *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI* dividindo-a em quatro grandes capítulos, o segundo sobre a aritmética e o terceiro sobre a álgebra.

Lins e Gimenez (1997), na sua leitura de significados para a álgebra, sugerem que “é preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra.” (1997, p.10) Propõem-se examinar noções por eles consideradas enraizadas, como a de que “aprender aritmética deve vir antes do aprendizado da álgebra; [...] ou de que álgebra é aritmética generalizada; [...] ou de que não ocorre a compreensão da álgebra pela maioria dos alunos não terem alcançado o nível de desenvolvimento intelectual requerido”. (1997, p.9-10)

Os autores, no capítulo 2, concentram-se na aritmética fazendo uma reflexão sobre a aprendizagem da aritmética na escola obrigatória. Afirmam que o novo *status* é inspirado pelos seguintes princípios:

> i) a aritmética tem trazido diversas contribuições à história e à cultura, como: a quantificação e o desenvolvimento de agrupamento, [...]; ii) os instrumentos aritméticos têm atualmente um papel de diálogo que derruba barreiras: a linguagem universal da informática, [...] - um *status* comunicativo; iii) o reconhecimento de valores culturais próprios e, num momento de interculturalismo, a importância de reconhecer diversas culturas aritméticas. (LINS; GIMENEZ, 1997, p.39).

O conjunto de relações entre o real observado e o aritmético é expresso no esquema do seguinte quadro:



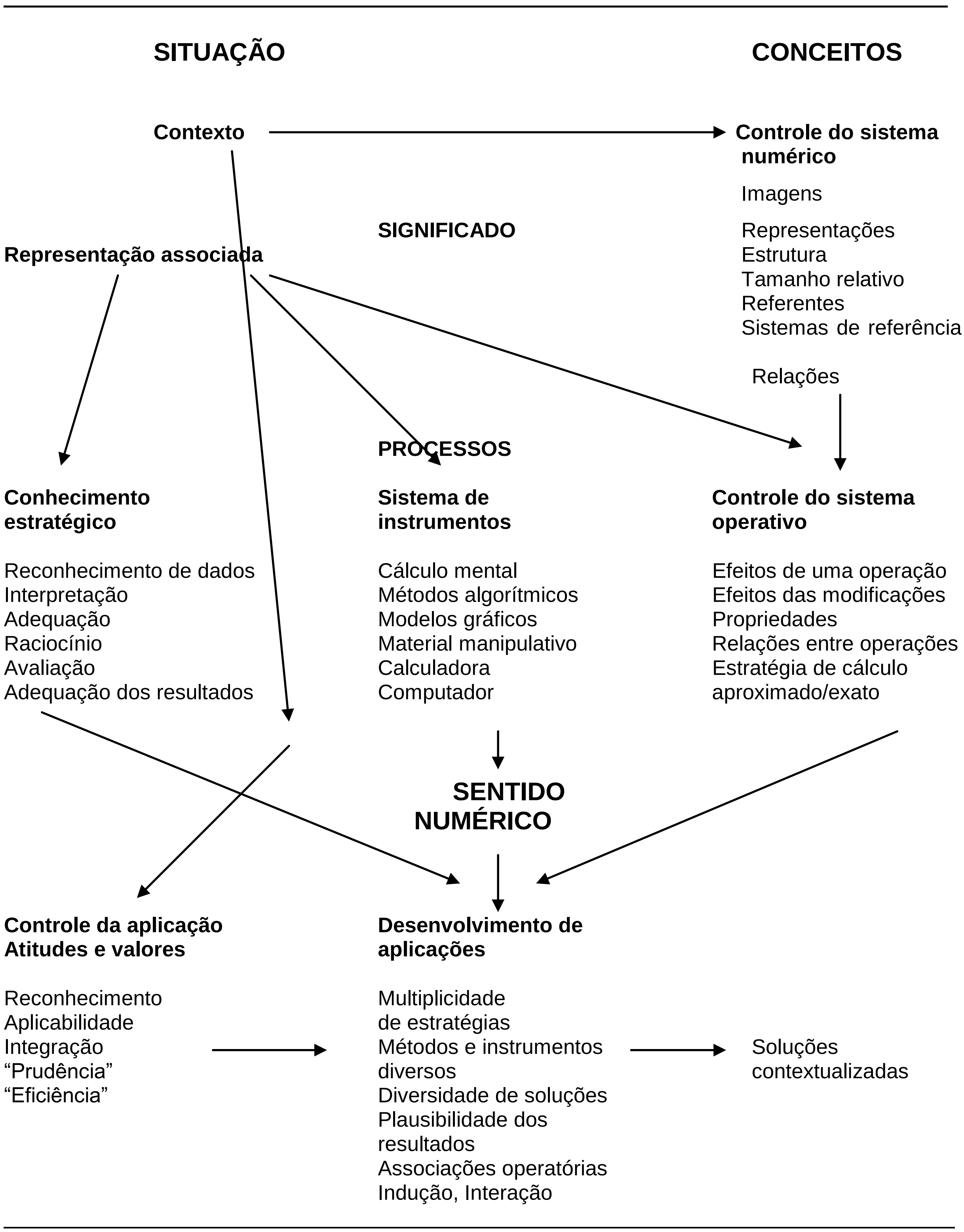
Quadro 2 – Relações entre o real observado e o aritmético (LINZ; GIMENEZ, 1997, p.40)

Entre as características analisadas por Lins e Gimenez destacam que, para que ocorra um *sentido numérico,* existe a implicação de diversas ações cognitivas: operatividade, processo de autorregulação do pensamento (incerteza nos dados), diversidade de soluções (produção de juízos) e complexidade (atribuição de significados).

Linz e Gimenez (1997), investigando o visual na sala de aula, constataram aspectos cognitivos interessantes sobre o conhecimento dos estudantes. No entanto, não existe um acordo sobre qual é o significado que se deve atribuir à visualização numérica. Para alguns autores, a imagem visual relaciona-se com uma imagem mental existente sem a presença direta do objeto, como para Piaget e Inhelder, ao passo que, para outros, "na visualização deve-se incluir a habilidade para interpretar a informação figurativa" (1997, p.66), como para N. Presmeg.

Lins e Gimenez (1997) elencam como estratégias de aprendizagem: "uso de números em contextos; importância da visualização numérica; uso de técnicas de agrupamentos e decomposições; compreensão do significado de operações; diversidade de representações, tratamento da ordem; comunicação coletiva de estratégias e controle e reflexão sobre eficiência e aplicabilidade." (1997, p.76)

No esquema seguinte observam-se as relações que constituem um sentido numérico numa dinâmica escolar. Esse esquema de relações, com os três elementos fundamentais - situação, conteúdos e aplicações -, constitui a base para um *sentido numérico*.



Quadro 3 – Esquema para um sentido numérico. (LINS; GIMENEZ, 1997, p.75)

Sobre a álgebra, no capítulo III, Lins e Gimenes (1997, p.92) afirmam que a “introdução de notação especial (no caso, letras) corresponde diretamente a determinadas mudanças conceituais” e que essas mudanças sinalizam um estágio de desenvolvimento da atividade algébrica. Nos estudos revisados, consideram um ponto de vista que diz “que a atividade algébrica resulta da ação do pensamento formal.” (p.99) Num horizonte piagetiano, considerando que o pensamento formal é algébrico, chamam a atenção “que todo o pensamento de alguém que atingiu o estágio operatório formal constituiria alguma atividade algébrica.” (p.99) No caso da álgebra, consistiria na capacidade do adolescente de refletir sobre operações ou sobre as propriedades operatórias que estruturaram seus resultados e, consequentemente, de agrupar operações de segundo grau.

Os autores afirmam que, enquanto a educação aritmética precisa ampliar o conjunto de atividades e habilidades, a educação algébrica precisa passar a considerar também a lógica das operações. “Em ambos os casos, o da aritmética e o da álgebra, a mudança de perspectiva mais importante refere-se a passarmos a pensar em termos de significados sendo produzidos no interior de atividades, e não, como até aqui, pensamos em termos de técnicas ou conteúdos.” (LINS; GIMENES, 1997, p.160-161).

Lins e Gimenes entendem ser hoje o grande objetivo da educação aritmética e algébrica

> encontrar um equilíbrio entre três frentes: i) o desenvolvimento da capacidade de pôr em jogo nossas habilidades de resolver problemas e de investigar e explorar situações; ii) o desenvolvimento de diferentes modos de produzir significado (pensar), o que poderíamos chamar de atividades de inserção e tematização; e, iii) o aprimoramento das habilidades técnicas, isto é, da capacidade de usar as ferramentas desenvolvidas com maior facilidade.” (1997, p.165).

Os autores propõem como base da educação aritmética e algébrica para o século XXI: “para ‘falar bem em números’, é preciso ‘falar em números’, e assim [...] ‘falar bem em números’, exige conceber legitimidade a relações quantitativas e a seu tratamento como tal.” (LINS; GIMENES, 1997, p.164).

Na seqüência apresento um panorama dos estudos realizados nos últimos sete anos em forma de teses de doutorado que abordam temáticas sobre a álgebra. Para tal, foi realizado um levantamento no banco de teses da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), cujo objetivo de tal é demonstrar a originalidade do trabalho aqui desenvolvido.

Para tal, foram elencados e combinados cinco grupos de palavras-chave: *educação matemática*, *educação algébrica*, *multiplicação de monômios*, *potenciação* e *expoente 1*. Essas palavras foram eleitas por serem as que após uma série de tentativas e outras combinações proporcionaram resultados mais adequados a expressar o enfoque das pesquisas que tratam de tema similar.

A ***educação matemática*** é abordada através de investigações sobre a construção conceitual do perímetro, da área e do volume através da análise de sua representação numérica. Há um breve detalhamento dos trabalhos.

A tese de Cristiane Fernandes de Souza (2006), com o título *Um estudo sobre a aprendizagem de alguns conceitos algébricos e geométricos*, pela UFRN, investiga sobre a escrita e a manipulação algébrica de expressões simbólicas para o perímetro e área de alguns polígonos convexos, abordando as propriedades operatórias e da igualdade do círculo e do hexágono regular.

A tese de Glauco Reinaldo Ferreira de Oliveira (2007), com o título *Investigação do papel das grandezas físicas na construção do conceito de volume*, pela UFPE, pesquisa inserida na área da didática das grandezas geométricas. Seu objetivo foi verificar como algumas grandezas físicas interferem na construção do conceito de volume. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud foi utilizada a análise dos dados coletados através da aplicação de um questionário. Mapeadas as concepções de alguns alunos identificando alguns teoremas-em-ação e constructos. Concluiu que os conceitos físicos mais relevantes foram densidade, massa e peso.

A tese de Neide da Fonseca Parracho Santana (2008), com o título *Práticas pedagógicas para o ensino de frações objetivando a introdução à Álgebra*, pela PUC-RJ, na área da formação de professores, teve como idéia central trabalhar o conceito de fração, identificando a fração como número e representando esse número na reta numérica, tendo como base as recomendações e experiências realizadas por Kathleen Hart e Hung-HsiWu.

A tese de Antonio Luiz de Oliveira Barreto (2009), com o título *A análise da compreensão do conceito de funções mediado por ambientes computacionais*, pela UFCE, propõe uma análise da compreensão do conceito de função mediada por ambientes computacionais. Enfocando que o conceito de função permite conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas do pensamento matemático.

A tese de Ivanilka Lima de Azevedo (2009), com o título *Reflexões sobre a construção e evolução de conceitos geométricos nas séries intermediárias do ensino fundamental*, pela UFRN, na área da educação matemática, teve por objetivo abordar a construção dos conceitos geométricos de volume do paralelepípedo retângulo, área e perímetro do retângulo com alunos do 6º ano.

A ***educação algébrica*** é abordada através de investigações sobre a transposição didática, álgebra elementar, aplicação: coeficientes algébricos em sistemas lineares, articulação entre álgebra e geometria, álgebra das matrizes quadradas de ordem 2, construção de signos nas séries iniciais, abordagem algébrica na química e na física, ensino e aprendizagem de álgebra. A compreensão da expressão *variável algébrica* abrange um enorme leque de teses pois é objeto de estudo nas diversas áreas seja educacional, seja social. Há um breve detalhamento de teses que considerei relevantes.

A tese de Anna Paula de Avelar Brito Menezes (2006), com o título *Contrato didático e transposição didática: inter-relações entre os fenômenos didáticos na iniciação à Álgebra na 6ª série do ensino fundamental*, pela UFPE, na área da educação, teve por objetivo estudar a tríade professor-aluno-saber. O saber enfocado nesse estudo foi a álgebra (elementar), desde sua introdução até a iniciação dos alunos no trabalho com equações. A relação ao saber do professor aparece também como um elemento central na relação didática, influenciando, de maneira direta, os fenômenos didáticos e a construção do conhecimento do aluno.

A tese de Jonas Cordazzo (2006), com o título *Simulação de reservatórios de petróleo utilizando o método EbFVM e Multigrid algébrico*, pela UFSC, na área da engenharia mecânica, propõe uma metodologia numérica para a simulação do escoamento multifásico em reservatórios de petróleo. O sistema linear foi resolvido a partir da consideração dos coeficientes do sistema linear baseado na correção aditiva, revelando que triângulos retângulos e obtusos podem ser usados sem restrição.

A tese de Antônio Pereira Brandão Júnior (2006), com o título *Polinômios centrais para álgebras graduadas*, pela UECampinas, na linha de pesquisa da Teoria de Álgebras, apresenta um estudo sobre polinômios centrais graduados e polinômios centrais com involução para algumas álgebras importantes sobre corpos infinitos. São descritos os polinômios centrais 2-graduados para a álgebra das matrizes quadradas de ordem 2 sobre um corpo.

A tese de Mônica Karrer (2006), com o título *Articulação entre álgebra e geometria - um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica*, pela PUC-SP, na área da educação matemática, apresenta um estudo questões relativas ao ensino e à aprendizagem de conceitos da Álgebra Linear no ensino superior, no curso de Engenharia da Computação. Esta pesquisa envolveu o design de atividades sobre o objeto matemático “transformação linear”, explorando a conversão de registros em um ambiente de geometria dinâmica.

A tese de Selma Rosana Santiago Manechine (2006), com o título *Construção de signos matemáticos: uma proposta metodológica para as séries iniciais do ensino fundamental*, pela UNESP-Bauru, na área do ensino de ciências e matemática, teve como objetivo elaborar uma proposta didático-metodológica para o ensino e aprendizagem de Matemática tendo o contexto experiencial como elemento integrador entre as disciplinas de Matemática e Ciências Naturais. Os conhecimentos matemáticos investigados foram: (a) medida de comprimento; (b) construção e interpretação de gráficos de colunas; (c) escala; (d) noção de espaço e estimativa.

A tese de Domingos Fabiano de Santana Souza (2007), com o título *Abordagem algébrico-diferencial da otimização dinâmica de processos*, pela UFRJ, na área da Engenharia Química, propõe uma nova metodologia que incorpora vantagens das funções de regularização e os códigos numéricos que integram sistemas de EADs (de índice 1 ou superior). A vantagem é a não reinicialização da integração numérica toda vez que uma restrição em plantas industriais é violada.

A tese de Jéferson de Souza (2007), com o título *Álgebras de Heisenberg generalizadas: formalismo e aplicação à molécula de Co,* pelo CBPF, na área da Física da matéria condensada, propõe um método para produzir o espectro anarmônico de moléculas diatômicas, em particular de monóxido de carbono, através de uma função não-linear, de quarta ordem em H.

A tese de Sueli Liberatti Javaroni (2007), com o título *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias*, pela UNESP - Rio Claro, na área da Educação, teve por objetivo analisar as possibilidades a partir da abordagem qualitativa de alguns modelos matemáticos auxiliada pelas tecnologias de informação e comunicação. As abordagens algébrica e geométrica com as mídias informáticas e o conhecimento como rede de significados, levou a autora a sugerir a necessidade de repensar o ensino das equações diferenciais ordinárias enfatizando o aspecto geométrico de modelos matemáticos além do aspecto algébrico.

A tese de Abraão Juvêncio de Araújo (2009), com o título *O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudos sobre o ensino de equações de 1º grau à luz da Teoria Antropológica do Didático*, pela UFPE, na área da Educação. A pesquisa se insere na problemática da modelização de conhecimentos algébricos. Os resultados indicam que, no ensino fundamental, a álgebra não é destacada como um domínio próprio do conhecimento matemático nos dois países. No caso do ensino de equações do 1º grau com uma incógnita, os resultados mostram que, tanto na França quanto no Brasil, ele é justificado como uma ferramenta para resolver problemas de contextos sociais e de outros domínios da matemática. O autor observa que os alunos investigados dos dois países não têm boas relações pessoais com esse objeto do saber da álgebra.

A tese de Olga Regina Fradico de Oliveira Bittencourt (2009), com o título *Algebraic modelling of spatiotemporal objects: understanding change in the Brazilian Amazon*, pelo INPE, na área da Ciência da Computação, propõe uma álgebra, a Álgebra Geoespacial, para descrever a evolução de objetos espaço-temporais. A autora aplicou a álgebra para analisar séries temporais de áreas que sofreram mudança de uso e cobertura do solo da Amazônia.

A tese de Maurício Egídio Cantão (2009), com o título *Abordagem algébrica para seleção de clones ótimos em projetos genomas e metagenomas*, pela USP, na área da Bioinformática, apresenta uma abordagem algébrica que define e gerencia de forma dinâmica as regras para a seleção de clones em bibliotecas genômicas e metagenômicas, que se baseiam em álgebra de processos.

A ***multiplicação de monômios*** é abordada através de investigações aplicadas nas engenharias agrícola, química, física, elétrica, na agronomia, nos sistemas de computação, na matemática, com pesquisas sobre geometrias bi e tridimensionais, nível de água e diâmetro de evaporímetros, álgebra de Gauss, equações lineares, geometria e topologia algébrica. Houve a necessidade da escolha e, optei por exemplificar com dois trabalhos por ano num breve detalhamento.

Na tese de Lizandro Sanchez Challapa (2006), com o título *Índice de equações diferenciais binárias*, pela USP-São Carlos, na área de geometria e topologia, encontramos o estudo das equações diferenciais binárias em uma vizinhança de um ponto singular isolado, usando a abordagem geométrica.

A tese de Sergio Mota Alves (2006), com o título *PI-equivalência e não equivalência de álgebras*, pela UECampinas, na área da álgebra, discute algumas propriedades de certas subálgebras da álgebra das matrizes de ordem “n” com entradas na álgebra de Grassmann, no que diz respeito a PI-equivalência. Apresenta um resultado que enfatiza a importância dos monômios na descrição do T-ideal graduado destas subálgebras.

A tese de Kalasas Vasconcelos Araújo (2007), com o título *A álgebra de Gauss de uma álgebra monomial*, pela UFPE, na área da álgebra comutativa. No estudo da álgebra de Gauss de uma álgebra tórica, parte da relação precisa entre um menor da matriz jacobiana associada a um conjunto finito de monômios e o mesmo menor da matriz dos expoentes destes monômios. O autor volta sua atenção para a álgebra de Gauss de uma álgebra gerada pelos monômios livres quadrados de grau dois.

A tese de Uberlandio Batista Severo (2007), com o título *Estudo de uma classe de equações de Schrödinger quase-lineares*, pela UECampinas, na área da análise não linear, estuda equações relacionadas à existência e comportamento de concentração de soluções do tipo ondas solitárias, as quais modelam fenômenos na Física de Plasmas. Na obtenção dos resultados usa a teoria de regularidade de equações elípticas de segunda ordem.

A tese de Damián Roberto Fernadez (2008), com o título *Convergência local dos métodos de programação quadrática seqüencial estabilizada e programação* *seqüencial quadraticamente restrita e suas extensões para problemas variacionais*, pelo IMPA, na área de métodos computacionais, apresenta o estudo dedicado à análise de convergência local de alguns métodos do tipo Newton. O primeiro método considerado é o de programação quadrática seqüencial estabilizada. O método foi criado para preservar a convergência superlinear/quadrática quando não há unicidade dos multiplicadores de Lagrange.

A tese de Paulo de Souza Rabelo (2008), com o título *Existência e multiplicidade de soluções se sistemas de equações de Schrödinger semilineares em Rn*, pela UFPE, na área de equações diferenciais não-lineares, estuda questões relacionadas à existência e multiplicidade de solução do tipo estacionária para uma classe de sistemas de Schrödinger tendo potenciais que mudam de sinal e não-lineares ilimitadas. Considerou diversos tipos de crescimento para o tempo não-linear: superquadrático, não-quadrático, exponencial e supercrítico.

Consultei o site www.sbem.org.br e, no período de 2001 a 2010, nele encontrei trabalhos referentes a formação do professor, trabalho docente e percursos teóricos e metodológicos na disciplina de álgebra, assim como pesquisas sobre geometria e álgebra nas séries iniciais e finais do ensino fundamental; análise quantitativa referente as notas e número de erros e acertos dos alunos na disciplina de álgebra em "testes" aplicados com polinômios.

Na revista Educação Matemática em Revista, ano 9, n.9, 2008, através palavra-chave *álgebra*, encontrei o artigo de Neda da Silva Gonçalves et all com o título *Números algébricos e transcendentes: uma abordagem não usual para os números reais na educação básica*. O artigo traz o relato de uma experiência realizada com alunos de ensino fundamental e médio com o propósito de tentar de modo mais objetivo o trabalho com números. Os autores analisam o tratamento abstrato nas séries finais do ensino fundamental e no ensino médio, da resolução de equações, levando-os a pensar que traria maior significado aos números irracionais, amenizando os problemas que são trazidos pela dicotomia racionais X irracionais.

Consultei os anais do VI ao VIII Enem – Encontro Nacional de Educação Matemática, pesquisando o período de 2000 a 2006, encontrei pesquisas de álgebra envolvendo: (1) estratégias e erros utilizados na resolução de problemas algébricos; (2) o jogo para auxiliar a formação do pensamento algébrico; (3) a relação entre a aritmética e a álgebra na matemática escolar; (4) a abordagem da álgebra nos livros didáticos; (5) estudo sobre a área do paralelogramo; (6) sequência didática em álgebra inicial; (7) decomposição multiplicativa dos quadrados; (8) fracasso escolar na 7ª série em função da linguagem simbólica dos monômios e polinômios; (9) educação algébrica; (10) fatoração de expressões algébricas; (11) dificuldades de compreensão de conceitos algébricos; (12) obstáculos didáticos no ensino de álgebra; (13) manipulação de expressões algébricas para o perímetro e a área de polígonos convexos.

Especificamente no IX Enem – 2007, nas modalidades de pôster, palestra, comunicação científica e relato de experiências estão presentes os trabalhos com os seguintes títulos: (1) Reflexão sobre as licenciaturas em Matemática após as diretrizes (CESAT/CEFETES); (2) Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra (PUC/RS); (3) O papel do erro na aprendizagem de Matemática (PUC/RS); (4) O ensino de geometria nas séries iniciais (USF); (5) A competência de alunos dos ensino fundamental e médio em resolver problemas de áreas e perímetro (PUC/SP); (6) Investigando fenômenos didáticos no ensino de álgebra (UFPE); (7) Educação algébrica (IM-UFRJ); (8) Análise do ensino da álgebra elementar (UNEB); (9) Atividades didático-pedagógicas para o ensino médio de álgebra (USP); (10) Crianças de séries iniciais pensando em álgebra: ambientes computacionais (UFCE); (11) A representação de figuras geométricas e suas relações com a formação conceitual (UNESP); (12) Aprendizagem de conceitos algébricos e geométricos (FACAL/PE); (13) Compreensão de problemas envolvendo grandezas (perímetro e área), álgebra e funções no ensino médio (SEDUC/PE); (14) Abordagem algébrica, geométrica e computacional da construção dos fractais (FAMASUL/PE); (15) Álgebra na escola básica: significado ou mecanização? (IM-UFRJ).

Consultei os Anais do X Encontro Gaúcho de Educação Matemática (2009/IJUÍ) encontrei entre as modalidades de apresentação de minicurso e comunicação científica o relato de pesquisas com os títulos: (1) Investigações algébricas para o ensino fundamental (UNIJUÍ); (2) Características do pensamento algébrico de estudantes do 1º ano do ensino médio; (3) Conhecimento algébrico: manifestações de dificuldades reveladas por alunos de uma turma de ensino médio do município de Rondinha/RS (UPF); (4) Investigando os processos de fatoração numérica e algébrica numa classe de EJA do ensino médio (UPF).

Acessando a biblioteca digital da UNICAMP, pesquisando o período de 2006 a 2010, encontrei pesquisas de álgebra envolvendo: espaço e tempo (teoria do elétron); potência 2; álgebra geométrica: o ganho quadrático na mecânica quântica; álgebra biquaterniônica = dimensão 16; distribuições exponenciais bivariadas = relação de potência inversa.

Os trabalhos a que tive acesso podem ser divididos entre os que abordam a temática do conhecimento algébrico basicamente em função do insucesso com a aprendizagem da Álgebra, a necessidade de trabalhar os conteúdos algébricos de forma motivadora no ensino básico e a álgebra como ferramenta nas diferentes áreas no ensino superior.

As pesquisas citadas fundamentam a temática proposta como uma necessidade atual, pois há um grande número de pesquisadores se ocupando da aprendizagem algébrica, e sua importância é demonstrada por todos.

Destaco que na verificação de tantas pesquisas, preciso relatar que encontrei pesquisas envolvidas com os expoentes 2, 3, 4 e 16. Não obtive sucesso de encontrar um trabalho que abordasse o expoente 1, aprofundando as particularidades exponenciais na multiplicação de monômios com o expoente 1 na forma invisível.

Acessando a biblioteca digital da UNICAMP, pesquisando o período de 2006 a 2010, encontrei pesquisas de álgebra envolvendo: espaço e tempo (teoria do elétron); potência 2; álgebra geométrica: o ganho quadrático na mecânica quântica; álgebra biquaterniônica = dimensão 16; distribuições exponenciais bivariadas = relação de potência inversa.

Os trabalhos a que tive acesso podem ser divididos entre os que abordam a temática do conhecimento algébrico basicamente em função do insucesso com a aprendizagem da Álgebra, a necessidade de trabalhar os conteúdos algébricos de forma motivadora no ensino básico e a álgebra como ferramenta nas diferentes áreas no ensino superior.

As pesquisas citadas fundamentam a temática proposta como uma necessidade atual, pois há um grande número de pesquisadores se ocupando da aprendizagem algébrica, e sua importância é demonstrada por todos.

Destaco que na verificação de tantas pesquisas, preciso relatar que encontrei pesquisas envolvidas com os expoentes 2, 3, 4 e 16. Não obtive sucesso de encontrar um trabalho que abordasse o expoente 1, aprofundando as particularidades exponenciais na multiplicação de monômios com o expoente 1 na forma invisível.

2.3 EPISTEMOLOGIA GENÉTICA

Em busca de fundamentação teórica, vários questionamentos me orientaram. Como acontece o conhecimento? Como o adolescente passa a ter noção das operações matemáticas de adição, subtração, divisão e multiplicação e das propriedades formais dessas operações?

Nas relações entre propriedades questiono como ocorre no cálculo aritmético e, principalmente, no algébrico a propriedade multiplicativa na operação da multiplicação algébrica. Como os estudantes adolescentes da 7ª série ou 8º ano do ensino fundamental constroem os diferentes elementos[5] e as propriedades que compõem uma multiplicação algébrica entre monômios?

Piaget (2001), fundamentando-se nos pressupostos das obras de François Viète, René Descartes e Evarist Galois, teóricos interessados no domínio do conhecimento algébrico, retoma o período do desenvolvimento do pensamento matemático e demarca, a partir do século XVII, o auge da álgebra e o início da tomada de consciência da contribuição do próprio sujeito para a matemática. No Ocidente, os avanços e novas organizações na área da matemática definiram-se e destacaram-se com maior intensidade a partir dos estudos algébricos de François Viète (1540-1603).

Para o autor, foi com os trabalhos de Viète que a matemática alcançou a transição do conceito de *arithmos* para o conceito de *símbolos*, sobre os quais se construiria a álgebra, considerada como disciplina independente. Embora os conceitos de *transformação* e de *invariante* ainda não estivessem *tematizados* na época de Viète, desempenharam um papel fundamental em seus trabalhos, na medida em que, graças a eles, tornou-se possível a passagem do conceito de

[5] Diferentes elementos do monômio: sinal, coeficiente numérico, parte literal e expoentes.

“símbolo”, utilizado até então para “representar de um todo geral um número concreto”, ao conceito de “símbolo geral”, como “forma representando um número qualquer”. (PIAGET, 1987, p.159).

Concomitante ao trabalho de Viète, diz Piaget, René Descartes (1596-1650) encontra possibilidades de estudar “entes geométricos”[6] por meio de representações algébricas, o que permitirá: 1) por meio de processos algébricos libertar a geometria de diagramas; 2) dar significado às operações da álgebra por meio de interpretações geométricas.

Entretanto, em termos de aplicações da álgebra, os matemáticos da época ainda não estavam conscientes das ligações possíveis entre as operações a partir da sua organização em estruturas. Pelas evidências históricas, segue Piaget, a organização do pensamento matemático em estruturas caracteriza o terceiro período[7] (período estrutural), a partir do século XIX, com Evarist Galois (1811-1832) e a Teoria dos Grupos. Foi com as ideias apresentadas por esse pensador, diz Piaget, que se passou a estabelecer generalizações em todas as áreas da matemática, com o surgimento do conceito de estruturas matemáticas.

Piaget inspirou-se nas ideias de Galois ao propor a estrutura *agrupamento* como modelo descritivo do pensamento operatório. Nas palavras de Piaget:

> Considero esses três estágios muito interessantes. Todos são criativos, mas no primeiro a ignorância do papel do próprio matemático na criação da matemática representou a sua esterilização. O segundo estágio revelou o papel do sujeito nas operações, e o terceiro colocou as operações em estruturas. Em cada momento, o progresso foi um progresso em reflexão, isto é, uma *abstração reflexionante* dos avanços feitos no estágio anterior (2000, p. 19).

Piaget formula questões sobre o problema da regularidade das normas lógicas e interessa-se pela evolução das formas de conhecimento, explicando que a interação pode ser definida como integração dos dados externos às estruturas internas dos sujeitos, implicando transformações dessas estruturas por acomodação às pressões e resistências do meio e dos objetos de conhecimento. Apresenta a ideia de que as realidades orgânicas, psicológicas e sociais são organizações que, de acordo com a sua complexidade, demonstram diferentes patamares de equilíbrio

---

[6] Pontos, retas, curvas, superfícies, planos.
[7] Primeiro período: dos gregos, segundo período: da álgebra.

entre a parte e o todo das ações do sujeito na evolução dos conhecimentos. Piaget (1976) afirma que o sujeito quando se encontra no nível formal, passa a interpretar sistemas em equilíbrio, alcança o todo, mas ao mesmo tempo procura distinguir e coordenar as partes das transformações em jogo conservando-as mutuamente.

O caráter próprio da Epistemologia Genética é buscar as "raízes das diversas variedades de conhecimento a partir de suas formas mais elementares e acompanhar seu desenvolvimento nos níveis ulteriores até, inclusive, o pensamento científico." (PIAGET, 1990, p.3) O autor, em sua obra, demonstra de forma prática como funciona um processo dialético de análise e síntese teórica na medida em que, periodicamente, retoma ideias e conceitos sempre com uma nova abordagem, como se estivesse alcançando um novo e mais complexo patamar teórico, utilizando elementos retirados de suas reflexões anteriores.

Para compreender melhor como ocorre a relação do sujeito com a experiência, Piaget definiu quatro estágios[8] de desenvolvimento, que podem variar cronologicamente, mas não em ordem sequencial, ou seja, sempre ocorrem na mesma ordem. A concepção de Piaget sobre *desenvolvimento* está relacionada com a embriogênese e envolve tanto os aspectos físicos como o sistema nervoso e as funções mentais.

A obra piagetiana, segundo Montangero e Maurice-Naville (1989) e Ferreiro (2001), pode ser dividida em quatro grandes períodos. Esses períodos são a seguir retomados e usados como referências para destacar as leituras e conceitos fundamentais para a pesquisa desenvolvida nesta tese.

2.3.1 Períodos da obra de Jean Piaget

A) O primeiro período da obra abrange a década de 1920 e o começo da de 1930. São cinco as obras[9] deste período, o qual foi subdividido em dois momentos: o primeiro, representado pelo estudo do pensamento por meio da linguagem, e o

[8] Em diferentes produções existe a designação como estágio ou como estádio. Neste trabalho uso *estágio* conforme definição [e tradução] de Montangero e Maurice-Naville: "O *estágio* é o marco de uma evolução na direção do equilíbrio das ações e operações mentais. [...] Os estágios são, degraus de equilíbrio. [...] os estágios dão conta, ao mesmo tempo, da continuidade do desenvolvimento operatório e das rupturas que ele comporta." (1989, p.174-175).

[9] **A linguagem e o pensamento na criança** (1923*);* **O julgamento e o raciocínio na criança** (1924); **A representação do mundo na criança** (1926); **A causalidade física na criança** (1927); **O juízo moral na criança** (1932).

segundo, pela utilização do método clínico. Os conceitos fundamentais caracterizados nesse período seriam o *egocentrismo*, "enquanto confusão do eu com o mundo exterior e o egocentrismo enquanto defeito de cooperação" (PIAGET, 1994, p.67), e a *cooperação*, como um método, pois a criança não pensa mais só em si mas se torna capaz de coordenar operações no campo real ou possível. "É assim que ela se torna capaz de discussão – e desta discussão interiorizada a conduz para a reflexão – de colaboração, de exposições ordenadas e compreensíveis para o interlocutor." (PIAGET, 1973b, p.180)

B) O segundo período da obra piagetiana, que abrange meados da década de 1930 até meados da de 1940, é composto por uma trilogia[10]. Este ciclo tem como característica mais impressionante o conceito de *adaptação*. Piaget (1987, p.11) afirma que "há *adaptação* quando o organismo é transformado em função do meio e quando esta variação tem por efeito um acréscimo nas trocas entre o meio e ele favoráveis à sua conservação."

A partir do momento em que a adaptação é compreendida como a passagem de um equilíbrio menos estável para um equilíbrio mais estável, englobando trocas entre o organismo e o meio, o autor desenvolve trabalhos para definir os dois mecanismos que constituem essa adaptação: a *assimilação*, como "o fato primeiro, que engloba em um todo a necessidade funcional, a repetição e esta coordenação entre o sujeito e o objeto que anuncia a implicação e o julgamento" (PIAGET, 1987, p.46), e a *acomodação*, como o "resultado das pressões exercidas pelo meio. [...] A acomodação é fonte de mudança, enquanto que a assimilação assegura a conservação do sistema." (PIAGET, 1987, p.12).

A adaptação é a busca e o estabelecimento de *patamares* de equilíbrios progressivos entre mecanismos assimiladores de que o sujeito dispõe e as acomodações correspondentes. Em todos os casos, "a adaptação só se considera realizada quando atinge um sistema estável, isto é, quando existe equilíbrio entre a acomodação e a assimilação." (PIAGET, 1987, p.18).

---

[10] **O nascimento da inteligência na criança** (1936); **A construção do real na criança** (1937); **A formação do símbolo na criança** (1945).

C) O terceiro período da obra piagetiana, que abrange do fim da década de 1930 ao fim do decênio de 1950, portanto um longo período, compõe-se por várias obras[11] que retratam o período de maturidade do autor. Neste período o autor procura um modelo da formalização de *estruturas mentais*. Segundo Piaget (1976, p.209), o conceito de "estruturas concretas de agrupamento é a combinatória intrínseca à construção do "conjunto das partes", e um conceito de *equilíbrio,* definindo que um sistema está em *equilíbrio* quando "as operações com o "conjunto das partes" comportam uma inversa e uma recíproca". (p.209)

Piaget (1990, p.35) analisa a organização das atividades cognitivas em termos de *operações mentais* como sendo "a ação interiorizada e tornada reversível por sua coordenação com outras ações interiorizadas em uma estrutura de conjunto que comporta certas leis de totalidade".

Piaget (1976) para analisar o pensamento das crianças trata de *agrupamentos* de operações como uma forma de coordenação de operações, expressas em uma linguagem formal, a partir da construção de um sistema de relações entre o meio social e as ações interindividuais do sujeito, visto que, para dar conta do pensamento formal do adolescente e do adulto utilizou a estrutura do "grupo das inversões e das reciprocidades (grupo *INRC*)" (PIAGET, 1976, p.241), com a característica essencial da noção da *reversibilidade* das operações. Em Piaget e Inhelder (1976), a *reversibilidade* é a possibilidade permanente de executar uma ação de retorno ao ponto de partida, mantendo consciência do conjunto das operações constituídas por uma *inversão* e uma *reciprocidade*.

No decurso do terceiro período, Piaget segue seus estudos sobre os *estágios* gerais do desenvolvimento intelectual, tratando de *decalagem vertical* como "a reconstrução de uma estrutura por meio de outras operações" (PIAGET *apud* MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1989, p.134), e da *decalagem horizontal*, as quais se produzem "em um mesmo nível de [...] desenvolvimento, porém, entre sistemas diferentes de ações ou de noções" (p.130) Também utiliza o termo

[11] **A gênese do número na criança** (1941); **O desenvolvimento das quantidades físicas na criança** (1941); **A gênese das noções cinemáticas**: O desenvolvimento da noção de tempo na criança (1946) e **As noções de movimento e de velocidade na criança** (1946); **O desenvolvimento do conhecimento do espaço**: A representação do espaço na criança (1948) e **A geometria espontânea na criança** (1948); **A gênese da idéia de acaso na criança** (1951); **Da lógica da criança à lógica do adolescente** (1955) e **A gênese das estruturas lógicas elementares na criança** (1959).

regulação, entendendo-o como “uma modificação da atividade em função de seus resultados” (p.222), para explicar a estrutura do pensamento.

Das obras piagetianas citadas destaco em meus estudos para esta pesquisa, em especial, *A construção do real na criança* (1975)*, O nascimento da Inteligência* (1987) e *A formação do símbolo na criança*: imitação, jogo e sonho, imagem e representação (1978).

Na obra *A construção do real na criança* (1975) Piaget estuda a função explicativa alcançada após a lógica em ação por implicação de esquemas. No primeiro capítulo traça as etapas de construção da noção de objetos substanciais, permanentes e de dimensões constantes. Observa na criança, a partir dos oito meses, o interesse pelo objeto, conduta que com o passar do tempo constitui-se na acomodação visual aos movimentos rápidos e na retomada da preensão interrompida.

Piaget assinala relações de assimilação, acomodação e, principalmente, descentração, no momento em que na criança conquista na ação a *permanência do objeto* ao final do período sensório-motor (aos dois anos). O conceito de descentração está ligado ao “processo de coordenação das ações e operações, que conduz aos sistemas reversíveis”. (MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1989, p.141) Quanto à noção de descentração, Piaget a ilustra como sendo “a capacidade de se desprender de um aspecto delimitado do real considerado até então para se levar em consideração outros aspectos e finalmente coordená-los.” (PIAGET *apud* MONTANGERO; MAURICE-NAVILLE, 1989, p.143)

No segundo capítulo, é sublinhada a análise estrutural do “grupo” de deslocamentos, particularmente a do espaço prático e as condutas de rotação. O terceiro capítulo trata da causalidade sensório-motora. Piaget afirma que a passagem de um espaço prático para um espaço representado é, “a condição *sine qua non* da representação e até da percepção direta dos grupos”. (1975, p.94) O autor argumenta que “uma coisa é agir em conformidade com o princípio dos “grupos” e outra coisa é percebe-los ou concebe-los” (1975, p.94) O quarto capítulo aborda a objetivação do tempo e das possibilidades da criança de seriar os eventos num espaço organizado. Pois eles implicam a elaboração de um sistema de relações de deslocamento que pressupõem o antes e o depois, para se constituírem.

Piaget, na obra *A construção do real na criança* (1975), mostra a unidade da construção do real e da construção da inteligência, afirmando que as duas estão relacionadas com os mecanismos de adaptação. Também salienta que a inteligência se inicia pela interação do sujeito com os objetos que estão no seu meio. Na segunda parte das conclusões aborda a questão da passagem da inteligência sensório-motora ao pensamento conceitual, mostrando que a construção dos conhecimentos sensório-motores é uma preparação necessária ao desenvolvimento do pensamento conceitual.

De acordo com Piaget, na obra *O nascimento da Inteligência* (1987), na fase final da inteligência sensório-motora os "indicadores" que permitem a previsão de um acontecimento amoldam-se cada vez mais às características das coisas e tendem, assim, a se constituir em imagens. Por outra parte, decorrente da separação progressiva entre os indícios e a percepção imediata, em proveito da combinação mental, essas imagens se libertam da percepção direta para se tornar "simbólicas".

A imitação característica dessa fase torna-se representativa. Assim, Piaget (1987) compreende a combinação mental dos esquemas como possibilidade de dedução que ultrapassa a experimentação efetiva. A invenção e a evocação representativa por imagens e símbolos formam uma série de condutas características que assinalam o acabamento da inteligência sensório-motora e a tornam, daqui em diante, suscetível de entrar nos quadros da linguagem para se transformar, com a ajuda do grupo social, em inteligência refletida.

Desse momento em diante, assiste-se nas obras de Piaget aos indicativos da construção da inteligência representativa, que, fundada na inteligência sensório-motora, permite ultrapassá-la no que diz respeito ao conhecimento, que se amplia do imediato, próximo e prático ao longínquo temporal e espacial até a inteligência refletida.

Na obra *A formação do símbolo na criança* (1978) Piaget busca reconstituir os primórdios do pensamento representativo, situando este estágio entre os outros dois extremos: o sensório-motor e o operatório. Procura elucidar as questões referentes às relações entre a intuição e as operações (mentais), já que, em parte, o pensamento intuitivo se prolongará em pensamento operatório.

As fases abordadas na obra referem-se aos indícios da representação infantil, ou seja, aquelas em que os processos individuais da vida mental predominam sobre os fatores coletivos. A própria aquisição da linguagem aparece subordinada ao exercício de uma função simbólica, a qual se afirma tanto no desenvolvimento da imitação e do jogo como no dos mecanismos verbais.

Duas teses serão defendidas pelo autor: a primeira é a da continuidade funcional entre o sensório-motor e o representativo; a segunda, a da interação das diversas formas de representação. Piaget (1978) discute o problema da própria função simbólica como mecanismo comum aos diferentes sistemas de representação e como mecanismo individual, cuja existência prévia é necessária para tornar possíveis as interações do pensamento entre indivíduos e, por consequência, a constituição ou aquisição de significações coletivas.

De acordo com Piaget, o exercício, o símbolo e a regra são os três grandes tipos de jogos infantis correspondentes às inteligências sensório-motora, representativa e refletida.

A idade entre dois e sete anos, chamado estágio “pré-operatório”, é o momento em que a criança se apropria mais efetivamente da linguagem, do início das representações gráficas, dos vários códigos e sinais da vida social e coletiva. E isso graças ao desenvolvimento dos mecanismos de assimilação e acomodação, juntamente com a possibilidade de equilíbrios parciais, que levam aos raciocínios próprios dessa fase.

O que me parece importante questionar nesta pesquisa é, tratando-se de adolescentes, como se manifesta o pensamento simbólico e conceitual em jovens quando em processo de apropriação dos conteúdos escolares.

Penso que todo adolescente que aprende um conteúdo novo, numa área de conhecimento também nova para ele, tenderá a manifestar comportamentos semelhantes, em alguns aspectos, aos processos transdutivos de pensamento pré-operatório. Como exemplo, arriscaria dizer que os adolescentes podem fazer combinações aleatórias, no caso da álgebra, de bases e expoentes, realizando pela linguagem matemática relações parte-parte, para além da finalidade de obter êxito.

Ainda dentro do terceiro período das obras de Piaget (fim da década de 1930 até do decênio de 1950), destaco a obra *A gênese do número na criança* (1971), na qual a atenção de Jean Piaget se dirige ao problema da construção do número em relação com as operações lógicas. A hipótese considerada pelo autor: se o número é classe e relação assimétrica ao mesmo tempo, não deriva de tal ou qual das operações lógicas particulares, mas somente de sua reunião, o que concilia a continuidade com a irredutibilidade e leva a conceber como recíprocas, não mais como unilaterais, as relações entre a lógica e a aritmética. “O número é, pois, solidário de uma estrutura operatória de conjunto, na falta da qual não existe ainda conservação das totalidades numéricas, independentemente de sua disposição figural”. (PIAGET; SZEMINSKA, 1971, p.15).

Piaget e Inhelder (1971), na obra *O desenvolvimento das quantidades físicas na criança* – conservação e atomismo, quanto à noção de “conservação”, abordam as previsões e as explicações das crianças com relação aos princípios fundamentais para a conservação de quantidades – entre parte e todo.

De acordo com Montangero e Maurice-Naville (1989), três tipos de argumentos são antecipados pelos sujeitos que “conservam as quantidades ao justificar seu julgamento: a identidade [...], a reversibilidade [...], e a compensação [...].” (1989, p.49) A obra *O desenvolvimento das quantidades físicas na criança* – conservação e atomismo evidencia os progressos da criança nas operações reversíveis (operações infralógicas[12]), revelando que “uma forma de raciocínio, como o agrupamento de operações, não é separável de seu conteúdo.” (1989, p.50)

Em Battro conservação do todo implica

> é [...] o próprio das operações concretas tanto sobre o terreno dos “agrupamentos” lógicos quanto sobre o da composição partitiva, é precisamente assegurar a livre mobilidade das partes no seio de um todo que se conserva necessariamente como reunião (real ou virtual) de seus elementos. (1978, p.62-63).

É, ao mesmo tempo, a condição e o resultado da conservação. Com este estudo Piaget chegou ao levantamento geral das relações das interações entre a atividade mental e a experiência.

Num período de transição, do fim da década de 1950 ao fim da de 1960, Piaget publica trabalhos concentrados nas estruturas operatórias e nos mecanismos

[12] As operações infralógicas “são formativas da noção do objeto como tal [...] Estas operações que já não incidem mais sobre os encaixamentos de classes, mas sobre os encaixamentos de partes de um mesmo objeto total [...]” (BATTRO, 1978, p.138).

do desenvolvimento da criança e do adolescente. Piaget e Inhelder (1977) apresentam como resultados das investigações, que de maneira decisiva “a imagem antecipadora só consegue formar-se com a ajuda das operações” (p.524) e para atingir uma totalidade é indispensável uma reconstituição representativa da compreensão operatória das transformações conhecidas pelo sujeito.

D) No quarto período da obra piagetiana, desenvolvido a partir dos anos 70, está presente a preocupação com uma *equilibração* gradual de atividades cognitivas, com um processo de *abstração reflexionante*, acompanhada de *abstrações empíricas*. Paralelamente a essas pesquisas, Piaget publicou, em 1974 estudos sobre a tomada de consciência e a relação entre fazer e compreender.

Piaget explicou o processo de construção das estruturas cognitivas por meio da equilibração “majorante” ao longo de vários anos. Só nesse quarto período de sua obra esse processo passou a ser caracterizado como o processo de “abstração reflexionante[13]”.

A abstração reflexionante é, para Piaget, um dos motores do desenvolvimento e um dos processos mais gerais da equilibração. A abstração reflexionante apoia-se sobre as coordenações das ações do sujeito, podendo permanecer inconsciente, ou dar lugar a tomadas de consciência e conceituações diversas. Quando Piaget utiliza a ideia de equilibração “majorante”, como a de abstração reflexionante, o que está presente é o conceito de reequilibração, isto é, a possibilidade de superar os desequilíbrios provocados por uma situação inesperada e nova, que geram as contradições no pensamento do sujeito.

A essência do processo cognitivo é, pois, caracterizada como uma reequilibração por reconstrução endógena (interna e orgânica), seguida de ultrapassamento, de superação. A abstração reflexiva caracteriza-se pelo processo de reorganização da estrutura com novas combinações, cujos elementos são retirados do sistema anterior, integrando a estes as “novidades” provocadas do desequilíbrio.

Esse mecanismo está presente em todos os níveis da vida. O adolescente, agindo no plano inconsciente da ação própria, faz “abstração reflexionante” quando

[13] Fernando Becker, tradutor do livro **Abstração Reflexionante relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. Utiliza o termo reflexionante em lugar de reflexiva, presente em outras traduções do termo original réfléchissante, usado por Piaget.

é capaz de coordenar esquemas já construídos, reorganizando-os frente a dados novos, com vistas a resolver um problema novo, um conflito inesperado com o qual se defronta em sua vivência.

De acordo com Piaget, a abstração reflexionante comporta sempre dois aspectos inseparáveis: de um lado, o “refletir”, isto é, a projeção sobre um plano superior daquilo que é retirado do plano inferior; de outro, uma “reflexão” enquanto ato mental de reconstrução e reorganização, sobre o plano superior, daquilo que é assim transferido do inferior. Essa reconstrução no plano superior é um estabelecimento de relações entre as formas novas e aquelas que já existiam.

Quando a abstração reflexionante ultrapassa o nível da ação para o da conceituação, as reestruturações das representações dão origem à tomada de consciência. A abstração reflexiva presente na tomada de consciência envolve o problema do enfrentamento de contradições e a superação dessas. O adolescente tende a negar os elementos que provocam contradições em seu raciocínio e, por isso, não está consciente dessas contradições. A contradição entre dois elementos geralmente é manifestada pela ausência de um conhecimento que possa englobar e relacionar esses elementos num todo coerente.

Ao se defrontar com idéias e julgamentos que se contradizem, o adolescente os elimina, negligenciando o aspecto que causa a perturbação e modificando aquilo que vê para estabelecer acordo com o que conhece (suas estruturas atuais). Para que ocorra a tomada de consciência o sujeito precisa se dar conta da contradição vivenciada; necessita estar suficientemente desadaptado para se lançar na busca de uma reequilibração.

A compreensão decorrente das abstrações reflexivas relacionadas à tomada de consciência surge da necessidade do sujeito de decidir, de escolher, após análise de várias possibilidades, aquelas que justificam e não justificam o seu raciocínio. É “o pensar sobre”, que caracteriza um conceito em contraste simultâneo com o que não o caracteriza.

Assim, a mais elementar “compreensão” ou a mais elementar “tomada de consciência” do que se passa, tanto no nível da ação como no da representação, implica a distinção entre o que é e o que não é, entre as relações necessárias e as contingentes.

Isso significa, pois, que é o processo de abstração reflexionante, presente na tomada de consciência, que permite ao sujeito ir além do fazer e do descrever e chegar à verdadeira compreensão do que faz.

Ao observar as condutas de um sujeito, demonstra Piaget (1975a), por meio da investigação com método clínico, verificar-se primeiro que as ações revelam êxitos práticos. Gradualmente, a essas ações começa a se impor uma conceituação, momento em que o saber fazer passa a constituir o compreender. De acordo com Piaget (1978a), o compreender consiste em um saber que ultrapassa o fazer, possibilitando ao ser humano extrapolar o mundo real e chegar aos possíveis lógicos, pela coordenação de suas ações.

Para Piaget (1987a) a construção do número nasce das ações e das coordenações do sujeito. A complexidade dessas ações constitui-se numa conceituação que somente se efetivará por tomadas de consciência tanto sobre as informações extraídas do objeto e suas transformações quanto das próprias coordenações do sujeito. Para o autor esse processo tem origem na periferia (com êxito ou fracasso) e dirige-se gradualmente para o centro (C) em duas direções: a do objeto e a do sujeito. Conhecendo o objeto, o sujeito conhece seu próprio pensamento. Assim, a conceituação, inicialmente, sucede as ações; depois, ocorre concomitantemente a elas e, posteriormente, precede-as. Essa possibilidade de a conceituação passar a predominar sobre a ação deriva da construção de um modelo de ações coordenadas generalizado.

Enfim, a tomada de consciência constitui-se numa conduta em interação com todas as outras, e a interiorização das ações, do ponto de vista epistemológico, encontra-se na origem das estruturas operatórias e lógico-matemáticas. A tomada de consciência constitui-se sempre como uma nova construção e pode ocorrer numa sucessão de patamares por superação, em que as novas criações derivam e ultrapassam as anteriores.

Para Piaget (1977) a estrutura cognitiva é a forma, mas não é construída independentemente do conteúdo a que se aplica. Assim, na abstração reflexionante o sujeito aplica a forma (estrutura) já construída, na busca de entendimento dos conteúdos; por sua vez, estes provocam seguidamente resistências, que impedem sua imediata compreensão (assimilação), exigindo um esforço para superação de suas formas atuais por ajustamentos (acomodação), por meio de um processo de reorganização interna e diferenciação das estruturas presentes em sua inteligência. É nessa atividade adaptativa do sujeito que, sucessivamente, novas e melhores formas de reflexão são construídas e o conteúdo é assimilado ao plano da razão.

Piaget, em seus estudos afirma que a abstração[14] reflexionante é "um dos motores do desenvolvimento cognitivo e [...] um dos aspectos dos processos mais gerais da equilibração". (1995, p.142). O sentido da abstração em Piaget é sempre de reconstituição da acomodação ou das ações anteriores realizadas, ou seja, é a capacidade cognitiva do sujeito de se construir pela coordenação de ações de primeiro e de segundo graus.

As "ações de primeiro grau são aquelas que levam ao êxito". (BECKER, 2003, p.29). São utilizadas na solução de problemas de forma mais automatizadas. As ações de segundo grau retiram suas coordenações das ações do primeiro grau por reflexionamento, com o objetivo de gerar compreensão. A combinação entre o resultado desse reflexionamento reorganizado por reflexão resulta em ações de primeiro grau modificadas. O reflexionamento e a reflexão são dois aspectos inseparáveis da abstração reflexionante. O sujeito retira o material por reflexionamento de duas fontes: a) dos observáveis e b) dos não-observáveis. A esse mecanismo Piaget chama de "abstração reflexionante". Segundo Becker (2003), o processo de conhecimento está restrito ao que o sujeito pode retirar dos observáveis e/ou dos não-observáveis. Logo, a partir da abstração reflexionante, o sujeito retira características da coordenação das ações não mais dos objetos.

Com relação ao processo de equilibração, para Piaget (1976), na obra *Ensaio de lógica operatória*, "equilibração é um processo que conduz de certos estados de equilíbrio aproximado a outros, qualitativamente diferentes, passando por múltiplos desequilíbrios e reequilibrações". (1976, p.11) O autor estuda a equilibração por meio de três condições: diferenciação progressiva dos esquemas por meio da *acomodação*; *assimilação* recíproca de esquemas em subsistemas e integração de subsistemas em *totalidades* segundo a lei de composição.

Nas palavras de Piaget,

> a totalidade que se conserva é [...] uma totalidade relacional. Isto significa que em toda organização existem processos parciais, mas essencialmente relativos uns aos outros, isto é, só se manifestando por suas composições

[14] Abstração significa retirar, extrair algo de algo.

> [...] O segundo caráter da função de organização é portanto a interação das partes diferenciadas. Sem partes ou processos parciais diferenciados não haveria organização, mas uma totalidade homogênea que se conservaria por inércia. (1973, p.174-175).

Assim, é entendido o processo de equilibração como resultante de duas tendências fundamentais de todo o sistema cognitivo: a de se alimentar (assimilação) e a de se modificar para se acomodar aos elementos assimilados (acomodação). Em resumo, a equilibração cumpre o papel de representar a síntese dos aspectos principais na construção do conhecimento: por um lado, as vinculações biológicas, pois se trata de um processo próprio ao ser vivo; por outro, a questão da coerência lógica que o sujeito alcança em virtude da superação das contradições.

Durante os quatro períodos mencionados, Piaget considera fundamental compreender o conceito de "operação" (mental) para que seja possível entender o conceito de desenvolvimento. Operar significa agir sobre o objeto a fim de transformá-lo, modificá-lo e, acima de tudo, compreender como se chegou a essa transformação. Uma "operação" é uma ação, ou ações interiorizadas e reversíveis, ou seja, ao operar o sujeito pode fazer, desfazer e fazer novamente. Esse tipo de ação, interiorizada e reversível, constitui as estruturas lógicas, as quais ocorrem sempre junto com outras operações, formando as estruturas operatórias do sujeito e constituindo a condição básica para que o indivíduo construa seu conhecimento.

2.3.2 Estágios de desenvolvimento

Na teoria piagetiana os estágios de desenvolvimento correspondem ao seu ponto de vista estrutural. Considerando o que já foi destacado sobre os estágios iniciais (sensório motor e pré-operatório) nos tópicos anteriores deste capítulo, abordo como o autor descreve os elementos da lógica operatória com a finalidade principal de explicar as estruturas cognitivas relativas aos estágios que mais interessam a esta pesquisa: as operações concretas e as operações formais.

a) Estágio das operações concretas

As coordenações sensório-motoras e as regulações representativas pré-operatórias preparam o surgimento das primeiras operações, as quais assinalam o início de uma lógica e de estruturas operatórias a que Piaget denomina “concretas”. As operações (mentais) são ações propriamente ditas que prolongam as ações materiais anteriores, porém interiorizadas mentalmente graças à função simbólica. Para Piaget (1979), as operações são essencialmente reversíveis, ou seja, são ações que podem se desenrolar nos dois sentidos (ida e volta), e a compreensão de uma implica, necessariamente, a compreensão da outra.

As operações (mentais) são, desde o princípio, solidárias de um sistema “não existe operação isolada, porque uma ação isolada é de sentido único e, portanto, não é uma operação” (PIAGET, 1979, p.9) e constituem-se na forma típica das estruturas de conjunto, características da inteligência.

Piaget considera que a generalidade completa somente será atingida com a reversibilidade das operações. A reversibilidade será a expressão do equilíbrio permanente, alcançado entre uma acomodação generalizada e uma assimilação não deformante, como a possibilidade de encontrar um estado anterior dos dados, não se opondo ao estado atual (assimilação), e um estado tão realizável quanto esse estado atual (acomodação). O autor afirma que somente com o pensamento operatório após os sete anos é que a assimilação se torna completamente reversível, pois a acomodação está generalizada e já não se traduz em imagens.

Na obra *A gênese do número na criança* na terceira fase (oito a doze anos), *correspondência operatória* (qualitativa e numérica), “há correspondência precisa e equivalência durável” (PIAGET, 1971, p.101). O autor esclarece o sentido de alguns termos utilizados:

> Chamamos de *qualitativa* uma correspondência fundada unicamente nas qualidades dos elementos correspondentes. [...] A correspondência *numérica* ou quantificante, ao contrário, será aquela que faz abstração das qualidades das partes e as considera como outras tantas unidades. [...] Chamaremos, por outro lado, de *intuitiva* toda correspondência fundada unicamente sobre as percepções [...] e que, conseqüentemente, não se conserva fora do campo perceptivo atual [...]. A correspondência *operatória*, ao contrário, é formada de relações de ordem intelectual e seu sinal distintivo é, desde logo, a sua conservação, [...] assim como a sua “reversibilidade”. Uma correspondência qualitativa, portanto, pode ser intuitiva [...] ou operatória [...], enquanto que a correspondência numérica é necessariamente operatória [...]. (1971, p.106-107).

Piaget constata que na segunda fase (*correspondência qualitativa de ordem intuitiva*), do estágio das operações concretas, nos exercícios da reprodução das figuras, a criança chega a uma correspondência termo a termo, porém não é numérica, e permanece a confirmação da hipótese de correspondência qualitativa e intuitiva (implicando um sistema de comparações, ou seja, de multiplicações lógicas). O que a distingue da fase anterior é uma correspondência intuitiva sem equivalência durável.

Durante a terceira fase (*correspondência operatória (qualitativa e numérica)*), do estágio das operações concretas, na correspondência termo a termo, as características das ações das crianças são “operações espontâneas de controle, por dissociações das totalidades e colocações em série. A correspondência torna-se assim operatória, seja qualitativa, seja numericamente.” (PIAGET, 1971, p.110).

Conforme a revisão feita, como características gerais da terceira fase destaco: a) ocorre a libertação da correspondência de suas limitações espaciais; b) a equivalência é concebida como subsistente e necessária; c) a correspondência numérica termo a termo torna-se quantificante e exprime igualdade numérica; d) ocorre a ligação dos deslocamentos às configurações sucessivas das coleções correspondentes; e) há coordenação correta das relações simultâneas; f) a generalização da multiplicação qualitativa adquire seu valor de necessidade; g) ocorre a igualização das diferenças.

A terceira fase (*correspondência operatória (qualitativa e numérica)*), do estágio das operações concretas, assinala a liberação da percepção em geral. O englobamento de cada percepção dada no sistema de todas as percepções possíveis significa o início das operações propriamente ditas e, mais uma vez, essas operações se devem à reversibilidade progressiva do pensamento, e possibilita a superação da transdução.

Em conclusão, o autor afirma que “existe, portanto, uma fase própria à correspondência operatória, com sentimento de equivalência (qualitativa e numérica) das coleções correspondentes e com conservação das quantidades.” (PIAGET, 1971, p.111) Suplantando a terceira fase, afirma existir na criança a quarta fase de significação numérica no seu desenvolvimento. Piaget compreende que tanto o raciocínio que versa sobre os elementos como o que versa sobre as relações num determinado momento ultrapassam a simples lógica qualitativa.

Assim, a generalização da multiplicação qualitativa é a evidência de uma reversibilidade operatória. A passagem da operação qualitativa à operação aritmética explica-se pela igualização das diferenças e, portanto, pela introdução, implícita ou explícita, da noção de unidade. Há, portanto, a construção do número.

No estágio operatório concreto formam-se algumas estruturas estáveis e coerentes, como as de classificação, ordenação, dos números naturais, conceito de medida de linhas e superfícies, entre outras. Operações concretas envolvem relações de seriação, classificação entre os objetos enumerados, colocação em correspondência, sempre pela relação de um elemento com um elemento vizinho, enfim, as operações (mentais) que ainda repousam na ação sobre os objetos, nas quais o adolescente recorre à manipulação efetiva ou mentalizada; porém, o adolescente apresenta a reversibilidade lógica própria das operações. Posteriormente, na fase de acabamento da estrutura, a reversibilidade apresentará duas formas: a *inversão*, que corresponde à lógica das classes e à aritmética (também conhecida como 'negação' N, cujo efeito é anular a operação inicialmente efetuada), e a *reciprocidade*, que aparece nas operações de relações (também conhecida como simetria, cujo efeito é anular diferenças lógicas). No entanto, essas formas de reversibilidade não são coordenadas entre si num sistema único, o que torna o pensamento concreto limitado.

Para Piaget (1971), a função dessas estruturas operatórias elementares é *organizar*, um após outro, os diversos domínios da experiência, mas sem que haja ainda diferenciação completa entre o conteúdo e a matéria, pois as mesmas operações se aplicam, inicialmente, à quantidade de matéria, um ou dois anos depois, ao peso e, ainda, um ou dois anos depois, ao volume.

Com relação ao estágio das operações concretas (7 a 11-12 anos), Piaget propôs uma estrutura algébrica a que denominou "agrupamento", a qual guarda com ela algumas relações, principalmente com a estrutura de grupo. Formalmente, um agrupamento pode ser descrito como a *quádrupla* [**E**, $\oplus$, $\ominus$, $\leq$], onde **E** é um conjunto finito de elementos; $\oplus$ e $\ominus$, duas leis de composição interna (operações binárias) e $\leq$, uma relação de ordem (relação transitiva, reflexiva e antissimétrica).

Num agrupamento, conforme Caruso (2002), podem ser descritas as propriedades fundamentais da seguinte maneira:

(1) Composição: $x, y \in \mathbf{E} \rightarrow x \oplus y \in \mathbf{E}$

Figura 1 – Composição (CARUSO, 2002, p.126)

Como o terceiro elemento, $x \oplus y$, também pertence ao conjunto **E**, diz-se que tal conjunto é fechado em relação à operação $\oplus$. É nesse sentido que Piaget alerta para o fato de que o *fechamento* é a principal característica de uma estrutura. Essa propriedade será construída pela criança, o que acontecerá da mesma forma com a aquisição das conservações.

(2) Associatividade: $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C = A \oplus B \oplus C$

Figura 2 – Associatividade (CARUSO, 2002, p.127)

A criança operatório-concreta tem condições de compreender que o resultado das composições, $\oplus$, e decomposições, $\ominus$, de classes não se altera pela sequência dos passos seguidos nessas operações.

(3) Reversibilidade: $A \oplus A' = B \rightarrow B \ominus A'$ ou $A' = B \ominus A$

Figura 3 – Reversibilidade (CARUSO, 2002, p.128)

Piaget afirma que num agrupamento existe $\ominus$, operação inversa da operação $\oplus$, de forma tal que o resultado de uma composição de dois (ou mais) elementos pode ser revertido, retornando-se aos elementos originais por meio de uma decomposição.

(4) Elemento neutro: $x \oplus 0 = x = 0 \oplus x$

Figura 4 – Elemento neutro (CARUSO, 2002, p.128)

Por exemplo, com a operação de adição é o caso do zero (0) no conjunto dos números naturais.

(5) Idempotência: $x \oplus x = x$

Figura 5 – Idempotência (CARUSO, 2002, p.129)

A operação $\oplus$ é idempotente, ou seja, qualquer que seja $x \in$ **E**, obtém-se a afirmação acima identificada. Por exemplo, ao agregar rosas brancas a um conjunto de rosas vermelhas, continua existindo um conjunto de rosas.

(6) Mínimo comum majorante: A operação $\oplus$ é tal que, se $x \leq y$, então $x \oplus y = y$ (Figura 6 – Mínimo comum majorante, (CARUSO, 2002, p.129)), isto é, para a operação $\oplus$ existe um mínimo comum majorante.

A estrutura de agrupamento, como propõe Piaget, possui propriedades de um grupo matemático (1; 2; 3 e 4), assim como propriedades de um reticulado (5 e 6). No entanto, o agrupamento não é um grupo porque lhe falta a possibilidade de efetuar a composição entre dois elementos quaisquer para produzir um terceiro, atuando diretamente sobre tais elementos.

Retomando, a estrutura de agrupamento é portadora de uma característica importante, que é a reversibilidade. O autor explica que todo *estado de equilíbrio* pode ser reconhecido por uma certa forma de *reversibilidade*, a qual é sinônimo de possibilidade permanente de retorno ao ponto de partida. Um sistema está em equilíbrio quando é portador de uma estrutura tal que suas operações admitem reversibilidade, seja por inversão ou negação, seja por reciprocidade.

Logo, de acordo com as operações de classificação e de seriação, os agrupamentos podem ser encontrados nas obras de Piaget em oito tipos principais: adição primária de classes, adição secundária de classes, multiplicação biunívoca de classes, multiplicação counívoca de classes, adição de relações assimétricas, adição de relações simétricas, multiplicação biunívoca de relações, multiplicação counívoca de relações.

Conforme Piaget (1976), destaco as principais características de cada um deles:

> (1) Agrupamento I: adição primária de classes: colocar em evidência a diferença entre a enumeração e a numeração;
>
> (2) Agrupamento II: adição secundária de classes (vicariância): este agrupamento possibilita a decomposição que o agrupamento anterior não permitia;
>
> (3) Agrupamento III: multiplicação counívoca de classes: se refere à possibilidade de compreender uma estrutura que estabelece correspondências do todo com suas partes do tipo *um* a *muitos*;
>
> (4) Agrupamento IV: multiplicação biunívoca de classes: se refere à possibilidade de classificar objetos segundo dois ou mais critérios simultâneos. [...] tratar os modelos de agrupamentos que se estruturam a partir de relações;
>
> (5) Agrupamento V: adição de relações assimétricas: a operação fundamental deste agrupamento é a operação de seriação. [...] é o envolvimento em duas relações, uma direta e outra inversa;
>
> (6) Agrupamento VI: adição de relações simétricas: este agrupamento descreve o encadeamento de relações simétricas, o que permitirá a estruturação da série, organizada sobre correspondências;
>
> (7) Agrupamento VII: multiplicação counívoca de relações: este agrupamento se refere a correspondências do tipo *um* e *muitos*. Dessa forma, trata de multiplicar relações assimétricas transitivas;

> (8) Agrupamento VIII: multiplicação biunívoca de relações: expressa a possibilidade de trabalhar, ao mesmo tempo, com duas séries, buscando a correspondência segundo uma ou duas relações. (1976, p.104-165)

À medida que o sujeito vai desenvolvendo as estruturas de agrupamento, como as apresentadas acima, vai se tornando apto a construir o conceito de número, assim como das operações que envolvem a estruturação do espaço e do tempo.

b) Estágio das operações formais

Por outro lado, para o estágio das operações formais (12 a 16 anos), Piaget considera que o modelo adequado é constituído por uma estrutura algébrica que possui, simultaneamente, as propriedades de um grupo e de um reticulado, o que significa que neste estágio o sujeito desenvolve as condições operatórias que o tornam capaz de utilizar a lógica proposicional.

No quarto estágio, *hipotético-dedutivo* ou das *operações formais*, o que vinha sendo operado até então no plano do real passa ao plano do *possível*, isto é, mentalmente existe a possibilidade de "n" combinações que partem do real e o superam[15].

O livro sobre o qual me fundamento neste estágio, de Inhelder e Piaget (1976), *Da lógica da criança à lógica do adolescente,* é inteiramente dedicado ao estudo de novos aspectos da gênese do pensamento formal. É obra rica em dados sobre a possibilidade de "caracterizar o pensamento do adolescente pela constituição de alguns métodos de indução experimental e, principalmente, de verificação sistemática". (Prefácio) Os autores perceberam uma convergência dos resultados das experiências a uma estruturação operatória completamente nova, fundada na formação simultânea sincronizada de esquemas operatórios e da lógica das proposições.

Os relatos experimentais na obra permitem afirmar que em torno de 11-12 anos de idade o adolescente alcança o estágio das operações formais, tendo como ponto de equilíbrio a idade de 14-15 anos. Neste quarto estágio o adolescente, além

---

[15] No artigo **Evolução intelectual da adolescência à vida adulta** (1972) Piaget discute o fato de que nem todos os adultos chegam ao estágio hipotético-dedutivo, lançando algumas hipóteses, como, por exemplo, a diversidade cultural e social, ou seja, a falta de estimulação do meio poderia ocasionar a impossibilidade de formação e acabamento das estruturas cognitivas.

de raciocinar e de deduzir com o auxílio de objetos manipuláveis (concretos), torna-se capaz de elaborar raciocínios dedutivos, pensando sobre hipóteses ou sobre proposições.

Como afirmam Piaget e Inhelder,

> [...] o que falta às estruturas concretas de agrupamento é a combinatória intrínseca à construção do *conjunto das partes*, ou, o que é a mesma coisa, é a utilização de operações proposicionais (implicação, etc.) ou isomórficas destas últimas, pois as operações interproposicionais repousam sobre a estrutura desse *conjunto de partes*. (1976, p.209).

Logo que ingressa no caminho da coordenação dos agrupamentos concretos num sistema único (na segunda potência), o pensamento torna-se formal porque se refere às *combinações possíveis*, não mais aos objetos em si mesmos. Por mais *tateantes* e incompletas que sejam as primeiras tentativas do pensamento no início do estágio operatório-formal, ele se orienta para uma nova forma de equilíbrio, caracterizado por uma estrutura de conjunto que deriva, ao mesmo tempo, do grupo e do reticulado.

Uma atitude característica deste estágio é que o pré-adolescente, ao se ver diante de uma associação de dois fatores, por exemplo, afasta um deles para estudar o outro, sem interferências perturbadoras e reciprocamente. Portanto, a necessidade de excluir um fator para fazer variar o outro nasce de uma inversão de sentido na construção das correspondências, tendendo a abstrair ou a dissociar, em vez de multiplicar ou associar.

Em resumo, as duas criações características do início operatório-formal decorrem do fato de que: a) o adolescente consegue *dissociar fatores*, seja por *neutralização*, seja por *exclusão*; b) é preciso afastar um fator, não somente para analisar sua ação, mas, ainda, para mostrar a de outros fatores presentes.

Com o ingresso no estágio operatório-formal, a relação do adolescente com o mundo muda completamente, visto que, a partir de então, consegue organizar pensamentos, elaborar raciocínios que ultrapassam o plano do real (realidade), alcançando o nível do *possível* (possibilidades), mas numa inversão de sentido notável, pois, ao invés de o possível ser apenas um prolongamento do real ou das ações executadas sobre a realidade, é o real que se subordina ao possível.

Para Piaget e Inhelder (1976), a grande novidade trazida pela passagem à inteligência operatória formal parece ser, efetivamente, a inversão de sentido entre o possível e o real, pois nesse estágio o sujeito raciocina segundo os possíveis e, assim, consegue desenvolver hipóteses.

No estágio das operações formais o adolescente está em condições de raciocinar sobre hipóteses, o que acontece pelo fato de as operações estarem desvinculadas de qualquer referência direta a objetos reais, incidindo, pelo contrário, nas relações entre as proposições. Nas inferências efetuadas pelo sujeito neste nível podemos identificar a existência de uma combinatória completa. Como vimos anteriormente, enquanto o adolescente do nível das operações concretas descobre os vários tipos de associações entre as classes, por meio da comparação dos conteúdos reais da sua experiência, o adolescente no nível das operações formais é capaz de pensar em todas as combinações possíveis antes de qualquer observação para, só em seguida, submetê-las à verificação.

O conjunto de todas as combinações possíveis que o adolescente pode elaborar em qualquer dada situação cognitiva pode ser representado pelas propriedades de uma estrutura de reticulado. Em outras palavras, a estrutura completa de reticulado constitui um modelo adequado da estrutura operatória que dá conta das efetivas performances cognitivas combinatórias do adolescente.

Para Piaget (1976), dadas duas proposições e as suas negações (p, q, $\bar{p}$, $\bar{q}$), o adolescente é capaz de identificar combinatoriamente as quatro associações possíveis em termos de uma operação $\bullet$, que é denominada *conjunção*: $p \bullet q$ (p e q); $p \bullet \bar{q}$ (p e não q); $\bar{p} \bullet q$ (não p e q); $\bar{p} \bullet \bar{q}$ (não p, não q).

Essas quatro associações podem ser combinadas entre si de 16 modos possíveis:

1.	0		negação absoluta
2.	a	$p \bullet q$	conjunção
3.	b	$p \bullet \bar{q}$	não-implicação
4.	c	$\bar{p} \bullet q$	não-implicação recíproca

5.	d	$\bar{p} \bullet q$	negação conjunta
6.	a + b	$p \bullet q \vee p \bullet \bar{q}$	afirmação de p
7.	a + c	$p \bullet q \vee \bar{p} \bullet q$	afirmação de q
8.	a + d	$p \bullet q \vee \bar{p} \bullet \bar{q}$	equivalência
9.	b + c	$p \bullet \bar{q} \vee \bar{p} \bullet q$	exclusão recíproca
10.	b + d	$p \bullet \bar{q} \vee \bar{p} \bullet \bar{q}$	negação de q
11.	c + d	$\bar{p} \bullet q \vee \bar{p} \bullet \bar{q}$	negação de p
12.	a + b + c	$p \bullet q \vee p \bullet \bar{q} \vee \bar{p} \bullet q$	disjunção
13.	a + b + d	$p \bullet q \vee p \bullet \bar{q} \vee \bar{p} \bullet \bar{q}$	implicação recíproca
14.	a + c + d	$p \bullet q \vee \bar{p} \bullet q \vee \bar{p} \bullet \bar{q}$	implicação
15.	b + c + d	$p \bullet \bar{q} \vee \bar{p} \bullet q \vee \bar{p} \bullet \bar{q}$	incompatibilidade
16.	a + b + c + d	$p \bullet q \vee p \bullet \bar{q} \vee \bar{p} \bullet q \vee \bar{p} \bullet \bar{q}$	afirmação completa

Quadro 4 - Combinações: 16 operações binárias (PIAGET; INHELDER, 1976, p.219-226)

O conjunto dessas 16 operações difere radicalmente de um agrupamento. Piaget verifica que as duas operações (e) e (ou) estão em condições "de compreender o que é que leva o sujeito, por volta de 11-12 anos, a construir efetivamente os conjuntos de partes." (PIAGET; INHELDER, 1976, p. 209)

É considerado, então, que, a partir das operações iniciais em relação à matéria (= massa), ao peso e ao volume, posteriormente aparecem novas operações pela generalização progressiva das precedentes, que se separam totalmente dos objetos e se constituem em nível de simples hipóteses (proposições), não mais necessitando das ações. Constitui-se, assim, uma *lógica formal*, ou seja, aplicável a qualquer conteúdo em razão da possibilidade do raciocínio hipotético-dedutivo. Duas novas estruturas de conjunto se constituem: a *rede* da lógica das proposições e o *grupo* INRC.

A *rede* é observada pelo aparecimento das operações combinatórias. Por essa razão, um adolescente, mesmo sem frequentar a escola, consegue encontrar métodos sistemáticos para agrupar objetos de acordo com todas as combinações "n" a "n". A *rede* é reconhecida pela aparição de uma combinatória por ocasião de combinações de objetos ou de fatores experimentais.

Assim como a reversibilidade foi fixada por Piaget como critério para a inteligência operatória, a estrutura do quaterno, conhecido como Grupo de Klein, é tomada como critério para a inteligência operatória formal. Um caso particularmente interessante de grupos de Klein é o grupo INRC.

O *grupo* INRC comporta a possibilidade de o adolescente realizar transformações em nível formal a partir de raciocínios experimentais. Por exemplo, quando se trata de raciocinar sobre um sistema de equilíbrio mecânico, tem-se a ação = I; sua negação = N; a reação = R e a sua negação = C. Podemos estabelecer o grupo comutativo NR = C; NC = R; CR = N e NRC = I.

O *grupo* INRC (inversões, reciprocidades, correlatividades e identidades), que marca a síntese num sistema único das duas formas de reversibilidades até então separadas – as inversões e as reciprocidades -, é observado numa série de esquemas operatórios que aparecem simultaneamente: as proporções, os duplos sistemas de referências, as probabilidades, as compensações multiplicativas.

Piaget (1976), quanto aos sujeitos do estágio operatório formal, viu no grupo INRC o indício de que as operações podem se organizar em sistemas em que duas espécies de *reversibilidade* atuam em conjunto, ou seja, são componíveis entre si, de maneira transitiva e reversível.

Cada um dos 16 operadores possíveis entre duas proposições *p* e *q* pode ser caracterizado por um conjunto E = (*a b c d*), de quatro elementos. Piaget, por convenção, considerou que as letras a', b', c' e d' representavam o valor oposto ao de *a, b, c* e *d*, respectivamente. Logo, o grupo INRC pode ser definido por meio de quatro transformações:

a) Transformação I $\Rightarrow$ **I (a b c d) = a b c d**

Figura 7 – Transformação I (PIAGET, 1976, p.147)

A transformação I faz corresponder a todo o elemento de E este mesmo elemento. Trata-se da *transformação idêntica*.

b) Transformação N $\Rightarrow$ ***N(a b c d) = a' b' c' d'***

Figura 8 – Transformação N (PIAGET, 1976, p.147)

A transformação N faz corresponder a todo o elemento de E seu oposto. Trata-se da *transformação inversa.*

c) Transformação R $\Rightarrow$ ***R(a b c d) = d c b a***

Figura 9 – Transformação R (PIAGET, 1976, p.148)

A transformação R faz corresponder a todo o elemento de E seu recíproco. Trata-se da *transformação recíproca.*

d) Transformação C $\Rightarrow$ $\boldsymbol{C(a\ b\ c\ d)\ =\ d'\ c'\ b'\ a'}$

Figura 10 – Transformação C (PIAGET, 1976, p.148)

A transformação C faz corresponder a todo o elemento e E seu correlativo. Trata-se da *transformação correlativa*.

Nesta pesquisa, entendo que no quarto estágio piagetiano, operatório formal, encontro as condições para a compreensão dos conceitos algébricos. Assim, é possível acompanhar a construção desses conhecimentos nos estudantes adolescentes do ensino fundamental da 7ª série ou 8º ano analisando seus êxitos, dificuldades e níveis de compreensão na resolução das atividades propostas em sala de aula de matemática e em entrevistas individuais.

Piaget e Inhelder (1976), ao estudarem a estrutura de conjunto das operações formais como forma de equilíbrio final das operações mentais, concluem que as diversas possibilidades operatórias na estrutura de conjunto do reticulado e do grupo e que caracterizam o pensamento formal dão lugar à construção de esquemas integrados e sincronizados durante o quarto estágio de desenvolvimento dos sujeitos. Logo,

> com o pensamento formal, finalmente, se constitui essa forma, cuja necessidade se liga à dupla exigência de uma coordenação de conjunto das operações de diferentes variedades e de uma liberação da forma com relação aos conteúdos. Esta forma geral de equilíbrio deve, então, ser concebida como final, [...] a evolução das operações obedece a: [...] 1) o equilíbrio operatório é tão mais móvel quanto mais estável; 2) as transformações virtuais ou possíveis desempenham esse tipo de papel causal das realidades mentais. (1976, p.247).

A leitura da obra de Piaget e Inhelder (1976) *Da lógica da criança à lógica do adolescente* suscita uma questão que é muito latente nos estudantes de 7ª série ou 8º ano (12 a 16 anos) no momento do primeiro contato com a álgebra e no desenvolvimento das propriedades na multiplicação de monômios: como ocorre o cálculo algébrico da propriedade multiplicativa na operação da multiplicação algébrica? Na investigação desse procedimento de formalização da multiplicação algébrica de monômios, pode-se questionar como os estudantes adolescentes da 7ª série ou do 8º ano do ensino fundamental constroem os diferentes elementos do monômio (sinal, coeficiente numérico, parte literal e expoentes) e como operam com as propriedades que compõem uma multiplicação algébrica entre monômios?

Segundo Piaget e Inhelder (1976, p.247), "se ações e operações agem e reagem entre si, segundo leis causais, enquanto a consciência as traduz sob forma de conexões de implicações" Assim, o adolescente precisa coordenar ações para efetivar sua tradução simbólica no campo da álgebra.

> É desse ponto de vista que a noção de equilíbrio se mostra indispensável para a explicação causal, pois somente ela permite compreender como, em determinado nível, a inteligência se volta simultaneamente para todas as direções abertas nesse campo, em função das transformações virtuais que a caracterizam, tanto quanto as construções já realizadas. (PIAGET; INHELDER, 1976, p.248)

Na minha proposta de compreender as relações que os adolescentes estabelecem ao operar com propriedades biunívocas e operações de multiplicação algébrica entre monômios, estabeleço vários questionamentos: Se a correspondência base – base (repetição) e expoente – expoente (adição) é reconhecida por um grande percentual de estudantes adolescentes somente quando registrada graficamente, como representam os elementos invisíveis dos monômios? Se o expoente não é conservado pelo adolescente, como ele chegará a formalizar as relações próprias das propriedades que compõem uma multiplicação algébrica?

É frequente entre os estudantes durante a multiplicação de monômios não ocorrer o reconhecimento dos expoentes invisíveis, a realização de sua adição. Como consequência, constata-se uma ausência de equivalência ou de conservação de conjuntos isolados que se correspondem termo a termo ($base^{expoente} \cdot base^{expoente}$) em adolescentes que já multiplicam algebricamente.

Há, entretanto, no mesmo grupo de estudantes adolescentes sujeitos que estabelecem a correspondência termo a termo ($base^{expoente} \cdot base^{expoente}$), com a demonstração de compreensão das relações entre expoentes visíveis e invisíveis na notação gráfica. Explica Piaget sobre o terceiro estágio (operações concretas):

> Vemos a correspondência se libertar de suas limitações espaciais ou perceptivas [...] a equivalência uma vez constatada, é concebida como subsistente necessariamente, apesar das transformações possíveis da

> configuração das coleções correspondentes. A correspondência termo a termo torna-se assim realmente quantificante e exprime daí por diante a igualdade numérica e não mais apenas a equivalência qualitativa. [...] os sujeitos atuais não buscam necessariamente [...] o contato perceptivo entre esses elementos. [...] Mas, acima de tudo, e paralelamente com esse deslocamento com respeito à percepção atual, essas crianças sabem ligar umas às outras as configurações sucessivas das coleções correspondentes, coordenando corretamente suas relações. [...] Pode-se então dizer que terceira fase assinala a conclusão da multiplicação qualitativa dessas duas relações. (1975, p.122-124).

Se Piaget assinala, no terceiro estágio, a generalização da operação de multiplicação de duas relações e a compreensão em razão da reversibilidade progressiva do pensamento, “os dois conjuntos permanecem equivalentes porque as transformações não são mais que mudanças de posição reversíveis, isto é, devidas a operações que se pode inverter.” (1975, p.125) A densidade do pensamento aqui presente está na capacidade e na possibilidade de reconstituir uma correspondência após havê-la desfeito; também está presente o valor “de necessidade e de generalidade” no decurso do terceiro estágio. (p.125) Então, penso que o estudante da sétima série, adolescente, com seus 12 – 14 anos, já pode ter ultrapassado a dependência da condição de visualização do registro gráfico do expoente para alcançar a generalidade da propriedade multiplicativa entre monômios de modo conceitual.

A multiplicação de monômios implica a presença de duas relações simultâneas: a generalização da operação de multiplicação dos monômios e a compreensão da relação direta correspondente aos expoentes em cada composição algébrica. A generalização da multiplicação qualitativa entre monômios permite colocar frente a frente os elementos de duas grandezas: a base algébrica e o expoente. Tanto a base algébrica como os expoentes exigem que os estudantes estabeleçam relações de conservação das propriedades das operações em função da diferente posição dos elementos (base ou expoentes).

A análise realizada busca interpretar as hipóteses de compreensão da propriedade multiplicativa entre monômios que os estudantes elaboram. Observando as estratégias de ação formuladas e os procedimentos adotados no momento da multiplicação de monômios, pretende-se verificar como as relações entre base e expoente visível ou invisível ocorrem.

Para finalizar destaco da teoria apresentada os conceitos que constituem, inicialmente, a organização teórico-metodológica desta pesquisa: operações concretas e formais, reversibilidade, conservação, estruturas, agrupamentos, grupo INRC e totalidade.

2.4 CONCEITOS BÁSICOS

Ao concluir a revisão teórica sobre educação matemática e epistemologia genética, bem como a revisão das pesquisas sobre álgebra para esta tese, estabeleci os seguintes conceitos iniciais e fundamentais para a investigação proposta: variável, número, equivalência, reversibilidade, conservação e estrutura.

A seguir retomo e destaco as definições desses conceitos que apóiam a organização teórica e metodológica da pesquisa e subsidiam as análises feitas, na perspectiva da matemática e na perspectiva da epistemologia genética, embora, em alguns momentos, o termo só tenha sido usado numa das perspectivas.

1. VARIÁVEL

MATEMÁTICA:

Segundo Chambadal (1978, p.573), "diz-se da quantidade que pode tomar sucessivamente diferentes valores no decurso de um mesmo cálculo."

Para Usiskin (1995, p.18), na concepção de álgebra como estudo de estruturas, a variável é um símbolo arbitrário. "A variável tornou-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades." E no simbolismo uma variável sofre dois processos ou de *manipulação cega* ou de *técnica automática*.

Para Booth (1995) *a noção* de "variável" é um dos aspectos mais importantes da álgebra. Na aritmética, os símbolos que representam quantidades sempre significam valores únicos; na álgebra, diferentes símbolos podem representar a mesma quantidade, isto é, letras diferentes não necessariamente representam valores numéricos diferentes.

2. NÚMERO

MATEMÁTICA:

Entidade abstrata que é matematicamente definida como conjunto de todos os conjuntos equivalentes a um conjunto dado. “A idéia de número natural não é um produto puro do pensamento, independente da experiência [...] os números foram-se formando lentamente pela prática diária de contagens. [...] – *o maior ou menor conhecimento dos números está ligado com as condições da vida econômica desses povos*.” (CARAÇA, 1989, p.4-5)

EPISTEMOLOGIA GENÉTICA:

O número é classe e relação assimétrica ao mesmo tempo, não deriva de tal ou qual das operações lógicas particulares, mas somente de sua reunião, o que concilia a continuidade com a irredutibilidade e leva a conceber como recíprocas, não mais como unilaterais, as relações entre a lógica e a aritmética. “O número é, pois, solidário de uma estrutura operatória de conjunto, na falta da qual não existe ainda conservação das totalidades numéricas, independentemente de sua disposição figural”. (PIAGET; SZEMINSKA, 1971, p.15).

Para os autores, “na realidade, as operações aditivas e multiplicativas já se acham implícitas no número como tal, pois um número é uma reunião aditiva de unidades e a correspondência termo a termo entre duas coleções envolve uma multiplicação [...] Do mesmo modo que a construção do número, das classes e das relações lógicas, assim também o manejo das operações numéricas é solidário ao das operações qualitativas.” (PIAGET; SZEMINSKA, 1971, p.223)

3 EQUIVALÊNCIA

MATEMÁTICA:

Post, Behr e Lesh (1995) apresentam como uma relação entre duas ou mais proposições que têm o mesmo valor de verdade. Sistema de duas ou mais proposições relacionadas pelo termo lógico “se e somente se”, que só é verdadeiro no caso de serem todas as proposições verdadeiras, ou de todas as proposições serem falsas.

EPISTEMOLOGIA GENÉTICA**:**

Piaget afirma que **“**podemos também voltar ao ponto de partida anulando uma diferença (no sentido lógico do termo), o que constitui uma *reciprocidade*: o produto de duas operações recíprocas é, então, não uma operação nula, mas uma equivalente.” (PIAGET; INHELDER, 1976, p.205)

4 REVERSIBILIDADE

MATEMÁTICA:

Possibilidade que uma operação tem de ser reversível e retornar a um estado ou condição anterior. A reversibilidade operatória é uma transformação do estado final de um processo, com a possibilidade de mudança na ordem mais comum na construção da sentença. Proposição em termos invertidos. (CARAÇA, 1989, p. 227)

EPISTEMOLOGIA GENÉTICA:

Piaget considera que a generalidade completa somente será atingida com a reversibilidade das operações. A reversibilidade será a expressão do equilíbrio permanente, alcançado entre uma acomodação generalizada e uma assimilação não deformante, como a possibilidade de encontrar um estado anterior dos dados, não se opondo ao estado atual (assimilação), e um estado tão realizável quanto esse estado atual (acomodação). “Do ponto de vista estrutural, a reversibilidade, que é a possibilidade de uma volta ao ponto de partida, se apresenta sob duas formas distintas e complementares. Podemos voltar ao ponto de partida anulando a operação efetuada, o que constitui uma *inversão* ou *negação*: o produto da operação direta e de seu inverso é, então, a operação nula ou idêntica. Mas podemos também voltar ao ponto de partida anulando uma diferença (no sentido lógico do termo), o que constitui uma *reciprocidade*: o produto de duas operações recíprocas é, então, não uma operação nula, mas uma equivalência.” (PIAGET; INHELDER, 1976, p.205)

5 CONSERVAÇÃO

MATEMÁTICA:

Conjunto de medidas de caráter operacional – intervenções técnicas e científicas, periódicas ou permanentes – que visam a preservar as características que em geral se fazem necessárias com relação às partes combinadas. “Princípio que estabelece que, se duas ou mais operações se combinam para formar uma só, ou se, inversamente, uma operação se divide em duas ou mais, a soma algébrica das operações finais é conservada igual ao valor total.” (CHAMBADAL, 1978, p.334)

EPISTEMOLOGIA GENÉTICA:

CONSERVAÇÃO DO TODO: “[...] o próprio das operações tanto sobre o terreno dos “agrupamentos” lógicos quanto sobre o da composição partitiva, é precisamente assegurar a livre mobilidade das partes no seio de um todo que se conserva necessariamente como reunião (real ou virtual) de seus elementos.” (BATTRO, 1987, p. 62-63)

6 ESTRUTURA

MATEMÁTICA:

Conjunto formado, natural ou artificialmente, pela reunião de partes ou elementos, em determinada ordem ou organização. A disposição dos elementos ou partes de um todo; a forma como esses elementos ou partes se relacionam entre si, e que determina a natureza, as características ou a função ou funcionamento do todo. (CHAMBADAL, 1978, p.137)

EPISTOMOLOGIA GENÉTICA:

ESTRUTURA: “Cada estrutura deve ser concebida como uma forma particular de equilíbrio, mais ou menos estável em seu campo restrito e que se torna instável nos limites deste.” P.I. 12 (Psicologia da Inteligência) (BATTRO, 1978, p.98)

ESTRUTURA e TOTALIDADE: “Diremos que há estrutura [...] quando os elementos são reunidos em uma totalidade que apresenta certas propriedades como totalidade e quando as propriedades dos elementos dependem, total ou parcialmente, destas características da totalidade.” E.E.G. II 34. (Lógica e equilíbrio) (BATTRO, 1978, p.99)

Numa segunda etapa, durante a aplicação dos instrumentos e análise dos dados coletados busquei outros conceitos de interesse para a pesquisa.

7 OPERAÇÃO CONCRETA

MATEMÁTICA:

OPERAÇÃO: conjunto de regras que permitem obter os resultados a partir de alguns dados. (CHAMBADAL, 1978, p.372)

OPERAÇÃO CONCRETA: realização de uma ação ou conjunto de ações combinando operações aritméticas: a adição, a subtração, a multiplicação ou a divisão com um resultado determinado, e muito preciso, que é real e pode ser pensado ou percebido sem necessidade de abstração. (CHAMBADAL, 1978, p.372)

EPISTEMOLOGIA GENÉTICA:

OPERAÇÃO: Piaget a define como ações interiorizadas ou interiorizáveis, reversíveis e coordenadas em estruturas totais. [...] a operação é ao mesmo tempo uma modificação possível do real e uma ação assimiladora cuja reversibilidade atesta o poder próprio. (BATTRO, 1978, p.173)

OPERAÇÕES CONCRETAS: são as operações do primeiro grau [manipulação concreta de objetos] sobre as quais incidem as operações formais. “De modo geral, as operações lógicas concretas consistem em agir diretamente sobre os objetos a fim de reuni-los em classes de diversas ordens ou de estabelecer entre elas as relações.” (PIAGET; INHELDER, 1976, p.206)

8 OPERAÇÃO FORMAL

MATEMÁTICA:

Realização de um cálculo combinando números ou expressões matemáticas, seguindo um conjunto de regras e propriedades do 2.ºgrupo (multiplicação, divisão e potenciação) que tem que cumprir para conseguir gestionar a solução de problemas. (CARAÇA, 1989, p.25)

EPISTEMOLOGIA GENÉTICA:

Para Piaget e Inhelder (1976), as operações formais são operações de segunda potência. Essa noção de operação de segunda potência exprime o caráter geral do pensamento formal, que é o de superar o quadro das transformações que se apoiam diretamente no real (operações de primeira potência), subordinando-as a um sistema de combinações hipotético-dedutivas, portanto simplesmente possíveis.

9 AGRUPAMENTO

MATEMÁTICA:

“Mecanismo operatório na associação das classes e das relações sobre as quais um sujeito se apóia em seu desenvolvimento.” (CHAMBERS, 1988, p.42)

EPISTEMOLOGIA GENÉTICA:

Em Piaget (1976) *agrupamento* é a nova estrutura que dá origem às operações concretas e apresenta uma sofisticação em relação às pré-operações do período anterior: permite construir estruturas de classe, chegando a elaborar séries indefinidas de objetos em função de critérios estabelecidos para a seriação. A estrutura de agrupamento, como propõe Piaget, possui propriedades de um grupo matemático (1: composição, 2: associatividade, 3: reversibilidade e 4: elemento neutro), assim como propriedades de um reticulado (5: idempotência e 6: mínimo comum majorante).

10 Grupo INRC

MATEMÁTICA:

O grupo chamado das quatro transformações (ou "Vierergroupe" ou ainda "Grupo Klein"). Klein deu uma importantíssima contribuição às teorias do Grupo e da Função. O Grupo de Klein é uma função de transformação, por meio de uma lógica quaternária. Klein mostrou como as propriedades essenciais de uma geometria poderiam ser representadas por grupos de transformações, em que dois elementos jogam entre si para formar um terceiro, onde:

0 = neutro (o elemento, em contato consigo mesmo, nada faz)
a x b = c
b x c = a
a x c = b
A relação entre os quatro elementos pode ser organizada nesta tabela:

0	a	b	c
a	0	c	b
b	c	0	a
c	b	a	0

http://A.L.I: Champs spécialisés/Présentation/Os grupos de Klein

EPISTEMOLOGIA GENÉTICA:

No estádio operatório-formal, o aperfeiçoamento do agrupamento desdobra-se em uma estrutura lógica de grupo com diferentes formas de reversibilidade e organização das operações. "As novas propriedades do chamado Grupo INRC, o grupo das quatro transformações próprio da lógica proposicional do adolescente, reúnem as operações de identidade (I), negação (N), reciprocidade (R) e correlação (C) em uma mesma estrutura cuja construção permite o pensamento chegar ao plano hipotético-dedutivo." (PIAGET, 1976, p.206)

11 TOTALIDADE

MATEMÁTICA:

Conjunto de “todas as partes (elementos numéricos/algébricos, operações, propriedades, leis) que envolvem um cálculo.” (CARAÇA, 1989, p.117)

EPISTEMOLOGIA GENÉTICA:

Em Piaget é a confluência ou conjunto de diversas relações na formação de um todo. A soma total. É a “coordenação dessas relações tornando possível a elaboração de uma *totalidade permanente* e, por isso mesmo, a subordinação das partes a um todo real.” (PIAGET; SZEMINSKA, 1971, p.259)

Exemplifico na passagem relativa ao número: “[...] quando o mesmo sistema se aplica aos conjuntos fazendo-se abstração dessas qualidades (operações lógicas e aritméticas), então se realiza a fusão da inclusão e da seriação dos elementos numa só totalidade operatória formada de classes e de relações assimétricas reunidas, e essa totalidade constitui, sem mais nada, a série dos números inteiros finitos, indissociáveis cardinais e ordinais.” (PIAGET; SZEMINSKA, 1971,p.13)

Nas palavras de Piaget,

> a totalidade que se conserva é [...] uma totalidade relacional. Isto significa que em toda organização existem processos parciais, mas essencialmente relativos uns aos outros, isto é, só se manifestando por suas composições [...] O segundo caráter da função de organização é portanto a interação das partes diferenciadas. Sem partes ou processos parciais diferenciados não haveria organização, mas uma totalidade homogênea que se conservaria por inércia. (1973, p.174-175).

A definição desses conceitos no âmbito da matemática e da epistemologia genética foi necessária para maior compreensão às estratégias de ação formuladas na pesquisa e aos procedimentos adotados pelos estudantes nos diferentes momentos de aprendizagem apresentados aos adolescentes nas aulas e nas entrevistas.

3 O CAMINHO METODOLÓGICO

Neste capítulo exponho a justificativa da pesquisa, seus objetivos, uma síntese do estudo preliminar que a precedeu, o problema, as hipóteses e o seu delineamento metodológico detalhando os passos da investigação.

3.1 JUSTIFICATIVA

Meu interesse centra-se em compreender como ocorrem os avanços do conhecimento dos aspectos menos complexos aos mais complexos e rigorosos no campo da matemática e, mais especificamente, no início da aprendizagem de álgebra, através da multiplicação de monômios.

Considero um panorama social em que a escola assumiu o papel de reprodutora dos conhecimentos, já bastante denunciado na literatura sobre educação, e ressalto, na atualidade, a relevância das pesquisas acadêmicas em álgebra sobre o processo de aprendizagem dos alunos nos diferentes componentes curriculares, seja no ensino fundamental, seja no ensino médio. Hoje eu tenho a compreensão do quanto a multiplicação de monômios é relevante nos conteúdos escolares nas áreas de matemática, de física, de biologia, de química ou de geografia. Minha experiência docente mostra que a propriedade da multiplicação é de difícil compreensão pelos alunos desde a sétima série ou oitavo ano até o ensino médio. Eles realizam operações como $x^2 . x^3 = x^{2+3} = x^5$ mas parecem não reconhecer a regra em $x^2 . x = ???$.

A escolha da epistemologia genética como teoria que fundamenta a pesquisa justifica-se por considerar o conhecimento como um processo de construção e o sujeito (estudante-adolescente) da pesquisa, como um ser de muitas possibilidades na interação com o meio. Também, porque esta vertente teórica sustenta uma concepção geral de inteligência e investiga os processos e mecanismos comuns na construção de conhecimento; portanto, favorece as relações entre os estudos sobre aprendizagem e construção de conhecimento em diferentes áreas trabalhadas na escola[16].

---

[16] Focalizadas pelo projeto de pesquisa "Contribuições da Epistemologia Genética para Práticas Escolares", n. 17872, ao qual se vincula esta tese.

Penso que esta investigação poderá gerar relações interdisciplinares significativas, capazes de contribuir para o debate sobre as dimensões verticais, horizontais e transversais dos processos de ensino-aprendizagem da educação básica.

3.2 OBJETIVOS

3.2.1 Objetivo geral: Investigar a aprendizagem de estudantes adolescentes com relação a sua construção do expoente 1 – na forma invisível e, assim, subsidiar o trabalho de educação matemática em álgebra.

3.2.2 Objetivos específicos

1) Compreender as organizações das ações e notações gráficas coerentes e estáveis e os mecanismos de funcionamento que asseguram a construção do conceito de expoente invisível.

2) Verificar como os adolescentes compreendem a propriedade multiplicativa dos monômios.

3.3 O PROBLEMA DA PESQUISA

A pesquisa da tese, como a do estudo preliminar, tem como foco a introdução à álgebra, na educação matemática e na iniciação à geometria, destacando a multiplicação de monômio. Por exemplo, a multiplicação $(7x^2) . (5x^3)$ = ???. Sete e cinco são coeficientes numéricos; (x^2) e (x^3) são a representação da parte literal de cada monômio. A regra diz: efetue a multiplicação entre os coeficientes numéricos e componha a parte literal adicionando os expoentes das bases semelhantes. Logo, $7. 5 = 35$ e $(x^2) . (x^3) = (x^{2+3}) = (x^5)$, o resultado será $35 x^5$. Mas se a multiplicação for entre os monômios $(7x^2)$ e $(5x)$, isto é, $(7x^2) . (5x)$ = ????.

Quando se trata de uma multiplicação de bases semelhantes com os fatores literais (x^2) e (x), isto é, $(x^2 . x)$, o expoente de "x", mesmo invisível é 1(um), logo o resultado da multiplicação $(7x^2) . (5x) = (35x^{2+1})$ é $35x^3$.

Como acontece a aprendizagem dos adolescentes quando não estruturaram a ordem sequencial das operações, nem conservaram as regras da multiplicação com monômios, com expoente 1 invisível, embora tendo certo êxito com os expoentes visíveis? Eles não construíram uma totalidade coerente e significativa?

Essa inquietação, associada à leitura da obra de Jean Piaget: *Da lógica da criança à lógica do adolescente* (1976), me levou a definir o seguinte problema para a pesquisa:

“Como o sujeito da aprendizagem relaciona a permanência numérica do expoente 1, quando invisível, na multiplicação algébrica entre monômios?”

3.4 HIPÓTESES

As relações estabelecidas entre o modo como se forma o conhecimento, segundo a epistemologia genética, e as propriedades da multiplicação de monômios me conduziram às seguintes hipóteses:

1) Se o “expoente visível” é, para o adolescente, uma representação conceitual, ocorre a sua conservação gráfica e mental e a sua generalização.
2) Se o “expoente invisível” é, para o adolescente, uma representação conceitual, ocorre a sua conservação gráfica e mental.
3) Se o adolescente assimilou a propriedade da multiplicação de monômios, considera o expoente 1 invisível.
4) Se a organização dos agrupamentos não é estável, o “expoente invisível” apaga-se.

3.5 DELINEAMENTO DA PESQUISA

A pesquisa caracteriza-se por um caráter qualitativo na modalidade da pesquisa participante e busca a compreensão das situações experenciadas pelos estudantes adolescentes envolvidos no problema a ser investigado. Bogdan e Bicklen descrevem as características das pesquisas qualitativas, dentre as quais destaco três, consideradas marcantes nesta tese. A primeira característica diz respeito à fonte dos dados:

> Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal [...]. Os investigadores qualitativos freqüentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência. (BOGDAN; BICKLEN, 1994, p.48)

Portanto, foi com esse propósito que os estudantes foram observados diretamente nos contextos de sala de aula, onde pude acompanhar com detalhes a interação do adolescente com o conteúdo matemático algébrico multiplicação de monômios. A segunda característica diz respeito à ênfase na descrição dos dados:

> A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo [...]. (BOGDAN; BICKLEN, 1994, p.48)

A terceira característica da pesquisa qualitativa em educação diz respeito aos investigadores qualitativos, os quais se interessam mais pelo processo “[...] do que simplesmente pela avaliação do sistema educacional”. (BOGDAN; BICKLEN, 1994, p.48)

Nesta abordagem, o pesquisador é considerado o instrumento principal na coleta e análise dos dados, primando pelo contato direto e flexível com os objetos e sujeitos da situação a ser investigada.

Características tais como um certo grau de interação do pesquisador com a situação estudada; entrevistas como instrumento de aprofundamento de determinadas questões; análise da contextualização; ênfase no processo, não no produto; preocupação com o significado; realização de trabalho de campo; uso de dados descritivos, conceitos e abstrações estão presentes nos estudos de cunho qualitativo.

3.6 ESTUDO PRELIMINAR

Esta tese foi precedida por um estudo preliminar, realizado concomitantemente ao desenvolvimento do projeto de tese, que constou da aplicação de instrumento estruturado escrito em duas turmas: uma de 7ª série ou 8° ano do ensino fundamental e uma do 3º ano do ensino médio.

Participaram do estudo 26 estudantes da 7ª série ou 8º ano do ensino fundamental e 25 do 3º ano do ensino médio. A tarefa constou do registro de valores finais de uma sequência de operações com valores algébricos envolvendo a adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação de monômios. Tabulei os dados e com maior interesse detive-me nos resultados da multiplicação de monômios, como exemplo:

$(6x^4)\ .\ (3x) = $ _______ e $(8a^2x)\ .\ (2ax^4) = $ _________

Os estudantes da 7ª série ou 8º ano apresentaram 52% de acertos e 48% de erros no registro dos resultados e os do 3º ano do ensino médio, 58% de acertos e 42% de erros. Dos dois grupos, uma média de 30% precisou registrar o expoente 1 invisível (x^1) para conseguir chegar ao resultado correto. Na maioria dos erros o registro do expoente 1 invisível não ocorreu.

Considerando que se passaram quatro anos entre *a suposta* aprendizagem da operação algébrica de multiplicação de monômios (na sétima série ou 8° ano) e o final do ciclo básico de estudos, é surpreendente a semelhança dos resultados dos dois grupos. Houve uma diferença de apenas 6% de acertos a mais na turma do ensino médio. Assim, volto a questionar: Por que o expoente 1 ainda não existe em conexão com a permanência numérica numa reconstituição de um todo invisível? O que acontece com a representação dos dados algébricos destes adolescentes? Como é possível que um estudante inserido no contexto escolar não signifique, não represente informações/operações que lhe serão necessárias em atividades escolares e não escolares?

3.7 PROCEDIMENTOS

Houve, inicialmente, um contato com as equipes diretivas das instituições para apresentação do projeto de pesquisa[17], com a finalidade de obtenção do consentimento para realização do estudo como educadora-pesquisadora das escolas e regente da disciplina de Matemática na 7ª série ou 8° ano e ensino médio.

---

[17] Apêndice 1 – Ofício à equipe diretiva.

No segundo momento mantive contato com os estudantes e seus pais para a formalização do aceite de participação na pesquisa e autorização por eles[18].

A pesquisa, de caráter qualitativo, está dividida em dois momentos: (1) a) trabalho de observação de todos alunos das três turmas de 7ª série ou 8° ano do ensino fundamental; b) aplicação da Avaliação Escrita Com uso de Notação Simbólica (AECNS)[19] para todos alunos; (2) a) entrevistas semiestruturadas com nove estudantes (três por série/ano); b) organização de três estudos de caso[20], com sujeitos escolhidos dentre os grupos conforme o êxito na multiplicação de monômios. Nesses estudos de caso é feita a triangulação com cruzamento de todos os dados levantados (observação em sala de aula; avaliação individual escrita estruturada; entrevistas semiestruturadas).

De posse dos consentimentos, como primeiro momento, iniciei a observação dos estudantes nas salas de aula como pesquisadora participante. Os registros da observação dos estudantes nas salas de aula são feitos em caderno de campo, diferenciados por turma.

Durante o primeiro trimestre de 2008, foi aplicada a Avaliação Escrita Com uso de Notação Simbólica (AECNS), conforme modelo no pós-texto nomeado como Apêndice 3.

Após as observações das aulas específicas sobre os processos de aprendizagem na multiplicação de monômios, foram realizadas as entrevistas com três estudantes por série ou ano, registrando-se suas falas em fita k7 (ou Mp3 Player). Posteriormente, houve a transcrição das entrevistas para uma análise pormenorizada. Os critérios de escolha dos adolescentes foram o êxito, o fracasso e os êxitos instáveis.

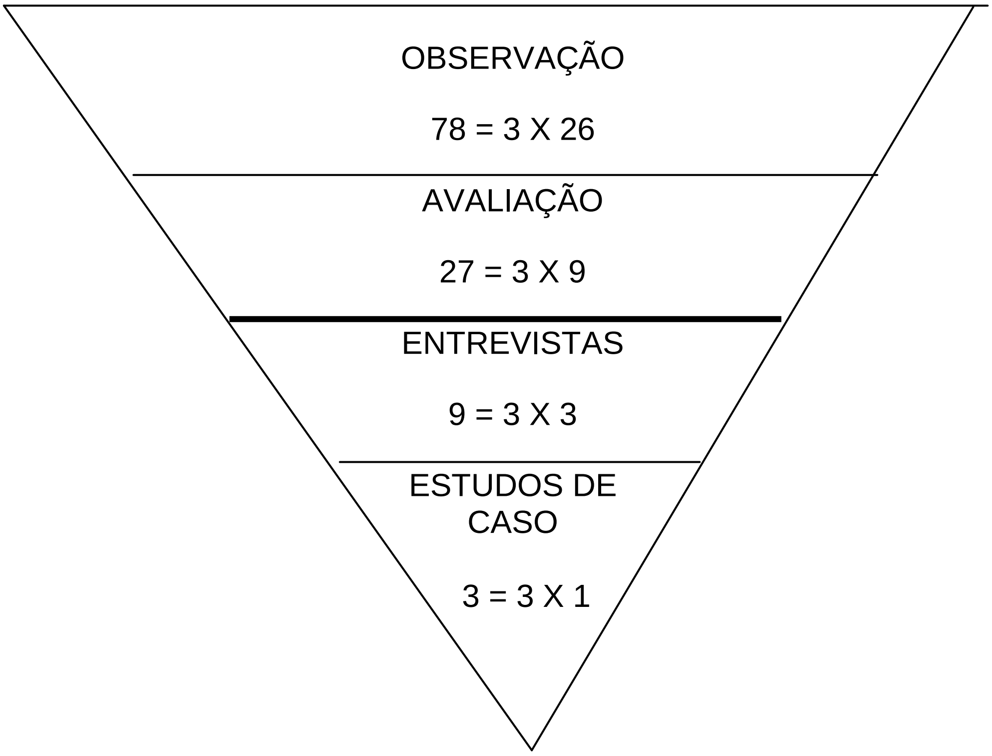
As entrevistas individuais, através dos jogos inspirados no método clínico, implicaram o uso de atividades escritas e estruturadas aos sujeitos, num total de quatro atividades aos nove alunos. A composição dos jogos, assim como seus objetivos, estão descritos no pós-texto nomeadas como Apêndice 4.

---

[18] Apêndice 2 – Ofício de autorização dos responsáveis.
[19] Apêndice 3 – Avaliação Escrita Com uso de Notação Simbólica (AECNS).
[20] "Um **estudo de caso** é uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos. [...] Em outras palavras, o estudo de caso como estratégia de pesquisa compreende um método que abrange tudo – com a lógica de planejamento incorporando abordagens específicas à coleta de dados e à análise de dados." (YIN, R. K., 2001, p.32-33)

3.8 SUJEITOS E PASSOS DA PESQUISA

A pesquisa foi desenvolvida em duas escolas distintas, nominadas como ESCOLA (1) IEST e ESCOLA (2) ANCH, da rede estadual de ensino da região do Planalto Médio – RS. As classes previamente escolhidas foram três turmas da 7ª série ou 8° ano do ensino fundamental, privilegiando num primeiro momento, na primeira etapa (observação) os 78 estudantes matriculados e freqüentadores e, destes 27 participaram da segunda etapa (avaliação). Para um segundo momento da pesquisa (entrevista) foram escolhidos 9 estudantes, e destes para o estudo final (casos) participaram 3 estudantes adolescentes. A organização dos estudantes nos diferentes momentos da pesquisa se encontra no diagrama a seguir:



No primeiro momento da pesquisa no procedimento de **observação** das três turmas, para preservação das identidades, são utilizadas as siglas: turma 1 = T71 e turma 3 = T73 da ESCOLA (1) IEST e turma 2 = T72 da ESCOLA (2) ANCH. Assim como, na condição de manter incógnita a identidade dos estudantes, estes são nomeados a partir de sílabas como: “Va”, “Ci”, “Us”, “Bi”, “Da”, “An", “Ma”, “Gui”, “Ru”, “Na”, “Se”, “Pa”, “Pe”, “Mn”, “To”, “We”, “Dy”, “Po”, “VanD”, “Ci”, “Ju”, “Ale”, “Fe”, “Vi”, “Ad”, “Je”, “Ro”, “Fa” e “Ne”.

Na seqüência do primeiro momento a partir dos resultados apresentados pelos 78 estudantes na Avaliação Escrita Com uso de Notação Simbólica (**AECNS**), foram escolhidos 27 estudantes, que a seguir destaco a nominação destes por turma:

T71 = “Pe”, “Mn”, “To”, “Bi”, “Da”, “An", “Ale”, “Fe”, “Vi”;

T72 = “Na”, “Se”, “Pa”, “We”, “Dy”, “Po”, “Ro”, “Fa” e “Ne”;

T73 = “Ma”, “Gui”, “Ru”, “VanD”, “Ci”, “Ju”, “Ad”, “Je”, “Us”.

No segundo momento da pesquisa, no procedimento das **entrevistas** semiestruturadas, os estudantes foram escolhidos pelos êxitos apresentados na compreensão dos 4 JOGOS, elaborados pela pesquisadora:

GRUPO 1: T71 = “Pe”, T72 = “Se” e T73 = “Ma”;

GRUPO 2: T71 = “An”, T72 = “Dy” e T73 = “Po”;

GRUPO 3: T71 = “Vi”, T72 = “Fa”, T73 = “Us”.

A partir dos dados observados e registrados a sequência do segundo momento se dá nos três **estudos de caso** a partir dos sujeitos da T71 = “An”, da T72 = “Se” e da T73 = “Us”.

O critério de escolha dos estudantes em cada etapa da pesquisa para a coleta de dados relacionou-se diretamente com a intensidade dos seus êxitos na compreensão do problema da pesquisa. Levando em consideração que estes estudantes da 7ª série ou 8° ano são iniciantes na álgebra no ciclo do ensino básico. Como o objetivo é compreender como se dá a “constituição do expoente 1 – sendo uma totalidade invisível” na rede de construção de conhecimentos dos estudantes-adolescentes, o critério **êxito** está relacionado com a capacidade de explorar as relações entre operações e propriedades aritméticas e geométricas como estruturas necessárias para a resolução de situações-problema no estudo da álgebra. Critério também relacionado com a capacidade de formular hipóteses a partir do cálculo de áreas e perímetros analisando figuras com formas quadrangulares e retangulares; da capacidade de generalizar os resultados obtidos na multiplicação de monômios; da compreensão final na operação de multiplicação entre monômios representando o expoente 1 na sua forma invisível.

3.9 APRESENTAÇÃO DOS DADOS

Os dados foram coletados em diferentes momentos: no MOMENTO 1, composto pela OBSERVAÇÃO e aplicação da AECNS, participaram todos os estudantes presentes. A OBSERVAÇÃO ocorreu durante a aplicação de vinte diferentes *situações de aprendizagem* criadas para as aulas relacionadas com o tema da pesquisa. Dessas *situações de aprendizagem* foram selecionadas seis em que os sujeitos de pesquisa forneceram maior riqueza de dados para a resolução do "problema apresentado". Após a aplicação da AECNS, organizei os dados em Tabelas para melhor compreensão dos detalhes fornecidos pelas respostas registradas no instrumento. A seguir identifico as situações de aprendizagem e a organização das tabelas:

No MOMENTO 1, na etapa composta pela **OBSERVAÇÃO**, selecionei seis situações de aprendizagem:

Situação de aprendizagem 1: cálculo da área de fichas de forma quadrangular com livre utilização de material. Sujeitos (Va, Ci e Us): o grupo com três componentes recebeu fichas de forma quadrangular (10 cm x 10 cm, 20 cm x 20 cm e 30 cm x 30 cm). Situação questionadora: como é possível determinar a área dessas fichas?

Situação de aprendizagem 2: cálculo do perímetro de fichas de forma quadrangular com livre utilização de material disponível no grupo e na sala de aula. Sujeitos: (Va, Ci e Us): o grupo permanece com as fichas de forma quadrangular (10 cm x 10 cm, 20 cm x 20 cm e 30 cm x 30 cm). Situação questionadora: como determinar o perímetro dessas fichas?

Situação de aprendizagem 3: subdividido em 3A e 3B: cálculo do perímetro de uma ficha de forma quadrangular de dimensão real: 18 cm x 18 cm, sem uso da régua. Situação 3A, sujeitos: (Bi, Da e An): o grupo recebe uma ficha de forma quadrangular. Situação questionadora: como determinar o perímetro dessa ficha? Situação 3B, sujeitos: (Ma, Gui e Ru): Minha presença foi solicitada por um grupo que formula um questionamento frente a surpresa e o estranhamento na possibilidade da consideração de duas soluções verdadeiras para um mesmo problema. Situação questionadora: como considerar duas soluções e verdadeiras para o perímetro de uma ficha de forma quadrangular?

Situação de aprendizagem 4: subdivida em 4A e 4B: cálculo do perímetro de uma ficha de forma retangular de dimensão real: 20 cm x 40 cm, sem uso da régua. Situação 4A, sujeitos: (Bi, Da e An), o grupo recebe uma ficha de forma retangular. Situação questionadora: como determinar o perímetro dessa ficha? Situação 4B, sujeitos: (Ma, Gui e Ru), situação questionadora: no confronto de idéias a possibilidade de um equilíbrio.

Situação de aprendizagem 5: subdividido em 5A e 5B. Na situação 5A – sujeitos: (Na, Se e Pa), o grupo recebe uma ficha de forma quadrangular (dimensão real: 20 cm x 20 cm). Situação questionadora: determinação de uma maneira geral para o perímetro da ficha de forma quadrangular. E em 5B – sujeitos: (Na, Se e Pa), o grupo recebe uma ficha de forma retangular (dimensão real: 20 cm x 40 cm). Situação questionadora: como determinar o perímetro de uma ficha de forma retangular?

Situação de aprendizagem 6: subdividida em 6A e 6B. Na situação 6A – sujeitos: (Ma, Gui e Ru), o grupo recebe uma ficha de forma quadrangular (dimensão real: 20 cm x 20 cm). Situação questionadora: determinação da área para qualquer ficha de forma quadrangular. E em 6B – sujeitos: (Ma, Gui e Ru), o grupo recebe uma ficha de forma retangular (dimensão real: 20 cm x 30 cm). Situação questionadora: como determinar a área para qualquer ficha de forma retangular?

Na seqüência do MOMENTO 1, apliquei uma **AVALIAÇÃO ESCRITA COM USO DE NOTAÇÃO SIMBÓLICA** (AECNS), um modelo da mesma se encontra no Apêndice 4 desse trabalho. Pela análise dos resultados no instrumento aplicado decidi nomear um indicador de crescimento na construção do conhecimento algébrico, aqui, especificamente, nas ações individuais. Por convenção os organizei em:

GRUPO 1 = ÊXITO PLENO em todas as atividades propostas;

GRUPO 2 = ÊXITO PARCIAL nas atividades propostas;

GRUPO 3 = POUCO ÊXITO nas atividades propostas.

As informações foram organizadas em *tabelas matrizes* por turma, para verificar o êxito dos adolescentes nas operações algébricas. As tabelas também reunem o maior número de dados concentrando especificamente o olhar da pesquisa nos detalhes da multiplicação entre monômios, assim coordenando as informações fornecidas pela AECNS. Os modelos das mesmas estão nos apêndices numerados de 5 a 21.

TABELA 1 = Geral com todas operações (Apêndices: 5 (T71), 11(T72) e 17(T73));

TABELA 2 = Multiplicação de monômios (Apêndices: 6 (T71), 12 (T72) e 18 (T73));

TABELA 3 = Multiplicação de monômios – expoente visível (Apêndices: 7 (T71), 13 (T72) e 19 (T73));

TABELA 4 = Expoente visível – combinações (Apêndices: 08 (T71), 14 (T72) e 20 (T73).

TABELA 5 = Multiplicação de monômios – expoente invisível (Apêndices: 9 (T71), 15 (T72) e 21 (T73)).

TABELA 6 = Expoente invisível – combinações (Apêndices: 10 (T71), 16 (T72) e 22 (T73)).

A partir dos dados contidos nessas seis tabelas por turma, desdobro-as em outras tabelas nomeadas pelos índices de 7 a 30 no transcorrer do capítulo 4 no item 4.2. O objetivo do desdobramento foi para compreender os registros dos estudantes através de um olhar clínico dos detalhes que envolvem uma multiplicação entre dois monômios. Busquei analisar os produtos tentando compreender os processos, as propriedades e a importância da ordem dos conceitos envolvidos durante o desenvolvimento do produto. Os resultados foram surpreendentes, pois sequer eu como pesquisadora tinha compreensão do quanto o estudante adolescente precisa conhecer, relacionar e operar com diferentes universos como o numérico na forma de coeficiente e de expoente combinado com regras de sinal e propriedades algébricas para obter êxito numa linguagem algébrica totalmente abstrata da matemática. Os dados organizados nas tabelas serviram para maior compreensão dos êxitos e fracassos dos estudantes quanto aos desdobramentos envolvendo regras de sinais, multiplicação entre fatores numéricos, aplicação de propriedades entre fatores algébricos e desdobramentos com expoentes visíveis 1, 2, 3 e 4, e expoente invisível 1.

O MOMENTO 2 é composto pelas **ENTREVISTAS** e os **ESTUDOS DE CASO**. **Entrevistas** semiestruturadas com as 9 estudantes, através da aplicação de quatro jogos cuja descrição e objetivos serão apresentados a seguir:

JOGO 1 (ARITMÉTICA + ÁLGEBRA): Jogo criado pela autora, formado por nove peças, cada uma contendo um dos seguintes monômios: $6x^3$, $6x^7$, $6x^2$, $3x^3$, $2x^5$, $2x^1$, $2x$, $2x^6$ e $2x^4$.

Ordem do jogo: combinar as peças para obter o produto $12x^8$.

Objetivos: observar e registrar as ações do estudante adolescente na multiplicação dos monômios fornecidos pelas peças. Estas apresentam o expoente 1 na forma de registro visível e na sua forma convencional, isto é, sem o registro gráfico (invisível).

JOGO 2 (ARITMÉTICA + ÁLGEBRA): Jogo criado pela autora, formado por oito peças, cada uma contendo um dos seguintes monômios: $48x$, $24x^5$, $12x^5$, $6x^2$, $4x$, $2x^1$, $8x^4$ e $1x^5$.

Ordem do jogo: combinar as peças para obter o produto $48x^6$.

Objetivos: observar e registrar as ações do estudante adolescente na multiplicação dos monômios fornecidos pelas peças. Estas apresentam o expoente 1 na forma de registro visível e na sua forma convencional, isto é, sem o registro gráfico (invisível).

JOGO 3 (ARITMÉTICA + GEOMETRIA + ÁLGEBRA): Jogo criado pela autora, formado por duas fichas: uma na forma quadrangular de dimensões 20 cm x 20 cm e uma na forma retangular de dimensões 20 cm x 40 cm.

Ordem do jogo:

a) determinar o perímetro e a área da ficha na forma quadrangular;

b) determinar o perímetro e a área da ficha na forma retangular.

Objetivos: observar e registrar as ações do estudante na combinação da geometria com a álgebra pela determinação do perímetro e da área de duas diferentes fichas.

JOGO 4 (ÁLGEBRA PURA): Jogo criado pela autora, o “dominó algébrico” é formado por 30 peças, cada uma é composta por duas partes: na metade esquerda, por uma operação algébrica – adição, subtração, multiplicação ou divisão – e, na metade direita, pelo resultado de uma das operações.

Ordem do jogo: montar o dominó algébrico, fechando o circuito, combinando as trinta peças e associando a operação com o seu respectivo resultado.

Objetivo:

a) verificar se houve aprendizagem das operações com monômios nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão;

b) observar a ação do estudante diante do expoente 1 na sua forma visível e invisível presente nas quatro operações em questão nas peças.

Como segunda etapa do MOMENTO 2, apresento três **ESTUDOS DE CASO**, realizando a triangulação dos dados gerados pela observação, pela Avaliação Escrita com Uso de Notação Simbólica e pelas entrevistas. Os estudos de caso estão organizados como: CASO “Se” – Grupo 1 (ÊXITO PLENO); CASO “An" - Grupo 2 (ÊXITO PARCIAL); CASO ”Us” - Grupo 1 (POUCO ÊXITO).

A análise fundamenta-se na Epistemologia Genética. As observações, as entrevistas e a avaliação estruturada (Apêndice 3) são procedimentos que visam descobrir como e se ocorre a “construção da totalidade invisível”. Como já foi explicado os resultados individuais de cada estudante constituíram uma tabela por turma. As tabelas de cada turma foram subdivididas em três grupos a partir dos êxitos alcançados pelos sujeitos no desenvolvimento e no resultado das atividades propostas. Nesse momento, procuro explicitar as relações entre os dados coletados e a teoria piagetiana, tendo como referência dos conceitos iniciais: variável, número, equivalência, reversibilidade, conservação e estrutura, esses definidos no subcapítulo 2.4, “Conceitos básicos” (p.82). Numa segunda etapa durante a aplicação dos instrumentos e análise dos dados coletados, busquei novos conceitos de interesse para a pesquisa: operação concreta, operação formal, agrupamento, grupo INRC e totalidade, revelando que parte das relações e conexões não são compreendidas pelos alunos e as conceituações alcançadas.

4 A CONSTRUÇÃO DAS RELAÇÕES

Passo a expor minha análise em dois momentos: MOMENTO 1: observações em sala de aula e aplicação da avaliação escrita com uso de notação simbólica; e MOMENTO 2: entrevistas e estudos de caso.

4.1 OBSERVAÇÕES EM SALA DE AULA

No período de um trimestre (março a maio), três turmas, com 26 sujeitos cada, num total de 78 estudantes, foram observadas durante o desenvolvimento de atividades propostas. As observações passaram a ser registradas sistematicamente após reunião com os responsáveis pelos estudantes e retorno dos termos de consentimento me autorizando a dispor dos dados observados para análise na minha pesquisa. O número de registros no caderno de notas é de 20 atividades pedagógicas, nomeadas nesta pesquisa como *situações de aprendizagem*, tanto propostas por mim como ações isoladas e coletivas dos estudantes durante as aulas. A edição e reconstrução dos diálogos foram levadas a efeito em momentos imediatamente posteriores às observações para a maior legitimidade possível da riqueza das ações proporcionadas pelos estudantes. Das vinte atividades pedagógicas fiz o recorte dos momentos privilegiados, primeiro por meio da leitura dos registros das observações e, num segundo momento, da seleção das situações mais significativas para o foco da pesquisa. Logo, o critério de escolha das situações de aprendizagem deu-se pelo êxito demonstrado pelos estudantes de organizar os dados com instrumentos de medida, elaborar raciocínios e levantar hipóteses. Do universo observado e registrado em sala de aula aqui serão apresentadas seis situações de aprendizagem, já descritas no item 3.9.

Para mudar a “situação de ensinar” tradicional da álgebra insisti em desenvolver o conteúdo trabalhando em grupos e, mesmo, individualmente com material concreto, coordenando a álgebra com a geometria. Os grupos foram organizados pelos alunos, por alguma afinidade e, sobretudo, o desenvolvimento das atividades não sofreu a ação de um sistema de recompensas e punições. A proposta bastante distinta das atividades de sala de aula, o interesse pela construção de noções geométricas (perímetro e área) fundamentais para a álgebra (adição e multiplicação de monômios). Os grupos de estudantes se mantiveram estáveis. À medida que os alunos eram solicitados a “resolver” determinados “problemas”, tive a possibilidade de verificar o progresso individual de alguns adolescentes. Como exemplo ilustro com as ações do sujeito nomeado como “Va”, que na situação 1 concluiu que o cálculo da área de uma ficha de forma quadrangular sempre se dá pelo resultado da multiplicação entre a largura e a altura. Até aqui nada de novo; porém, na situação 2, durante a determinação do perímetro num encadeamento de relações, o estudante “Va” reelaborou suas noções de área, verificando e corrigindo um “erro” de registro nas unidades de medida de área. Assim, corrigiu a unidade de área de “centímetros” para “centímetros quadrados”. A discussão no grupo e a defesa de uma possibilidade (um possível resultado correto) diante do desafio proposto foram as marcas da construção do estudante “Va”.

A diferente maneira de introduzir a álgebra levou a que muitos estudantes considerassem “novos elementos possíveis” no seu universo numérico. Como dado das observações apresento as possibilidades pensadas na situação de aprendizagem 5 dos sujeitos nomeados por “Na”, “Se” e “Pa” para representar o perímetro de uma ficha de forma retangular, passando de *+2x 2y*, por *+2xy* e concluindo ser *2x + 2y* a forma correta, pois a medida da variável “x” sugere ter diferentes dimensões da medida da variável “y” numa ficha de forma retangular. Em outros termos, o conhecimento matemático base desses estudantes, que é constituído quase que exclusivamente pelo conjunto dos números naturais e inteiros, começou a ser ampliado de sua forma aritmética para a forma algébrica. Nesse momento o objeto de pesquisa presente no grupo, e particularmente de forma individual, é o processo de aprendizagem da álgebra. Quais as relações coletivas e individuais presentes no processo de multiplicação de monômios? A aprendizagem da álgebra mostra-se essencial para os processos de formalização e demonstração em matemática; assim, a álgebra passa a ter a possibilidade de produzir um efeito considerável quando implicada como estrutura para a resolução de situações-problema.

Tal perspectiva é respaldada no texto dos Parâmetros Curriculares Nacionais, especificamente a álgebra:

> O estudo da álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. (BRASIL, 1998, p.115).

O estudo da álgebra está relacionado com as propriedades formais das operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação e logaritmação) do cálculo aritmético que no conteúdo matemático tem seu papel classificado no 1º grupo com as propriedades: unicidade, monotónica, modular, redução e anulamento. Também diz respeito "à maneira como os resultados variam quando os dados variam, as do 2º grupo mostram as várias formas pelas quais os dados podem ser combinados sem alterar os resultados." (CARAÇA, 1989, p.25) Logo, as propriedades formais do 2º grupo: comutativa, associativa, multiplicativa e distributiva são no cálculo aritmético e algébrico de uma aplicação constante "principalmente as de soma e produto que tem a chave do cálculo algébrico." (CARAÇA, 1989, p.25)

No decorrer de um cálculo algébrico as propriedades formais das sete operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação e logaritmação) constituem o conjunto das leis operatórias do cálculo. Assim, seja na matemática aritmética, seja na geométrica ou na algébrica, "nós possuímos um conjunto de *leis operatórias*, formado pelas propriedades formais das operações" (CARAÇA, 1989, p.27). Portanto, o que os estudantes devem conservar é a generalidade da aplicação desse conjunto em cada etapa de seu pensamento. Para que essas leis sejam aplicáveis nas diferentes etapas escolares e cognitivas, será necessário que as "novas definições" sejam, preferencialmente, aplicáveis em situações-problema significativas para o nosso estudante adolescente.

Piaget defende que as estruturas lógicas constituem "formas de equilíbrio para as quais tendem as coordenações intelectuais do sujeito." (BATTRO, 1978, p.98) A capacidade de abstração e a generalização são uma estrutura intelectual ativa, sempre que a organização dos elementos presentes nas propriedades envolvidas possa ser integrada nas estruturas preexistentes.

Como educadora, tenho presente que muitos conceitos enfatizados nesta etapa do ensino fundamental serão essenciais para a aprendizagem de outros elementos algébricos no ensino médio e também no ensino superior. Dessa forma, justificam-se as inúmeras pesquisas citadas no capítulo 2, subtítulo 2.3 (pesquisadores e pesquisas sobre a álgebra), que analisam as dificuldades em relação ao raciocínio algébrico, destacando as limitações quanto à interpretação dos símbolos, a não utilização correta das bases com fatores literais e a recusa da aceitação de respostas como sentença abertas.

A análise dos dados registrados sobre a sala de aula foi realizada de acordo com a seleção de momentos particulares de grupos e de sujeitos no grupo durante as atividades propostas na introdução de noções algébricas.

Para analisar apresento um caso de situação 1 de aprendizagem: situação proposta: cálculo da área de fichas de forma quadrangular com livre utilização de material.

Situação 1, sujeitos (Va, Ci e Us): o grupo com três componentes recebeu fichas de forma quadrangular (10 cm x 10 cm, 20 cm x 20 cm e 30 cm x 30 cm). Situação: como é possível determinar a área dessas fichas? Primeiro discutem entre si de como vão saber quanto mede cada ficha. Uma das alunas tem uma régua, medem todos os lados de cada ficha para conferir as medidas. "Va": *são iguais, tem uma ficha de 10, uma de 20 e esta de 30, são iguais, são quadradas. Mas, a gente soma 10 com 10 prá área ou faz vezes?* Procuram (re)lembrar como se determina a área das figuras dadas. Concluem que o resultado vem da multiplicação de um lado pelo outro lado. "Ci": *é dez vezes dez, que dá 100, 100 centímetros.* "Us": *sim, é dez vezes dez, vinte vezes vinte e trinta vezes trinta. Então, esta dá cem centímetros (100 cm), esta quatrocentos centímetros (400 cm) e aquela novecentos centímetros (900cm).* Precisam do auxílio do lápis e de um rascunho para registrar o cálculo. "Va" mostra-se intrigada no seu grupo: *Como pode ser a mesma conta, se os tamanhos são diferentes?* "Ci": *a gente já estudou uma vez isso, acho que foi lá na 5ª série, tinha um nome, não me lembro mais. Só me lembro que a professora fez a gente aumentá e diminui os desenhos e ela dizia que a forma era a mesma. Que nem aqui a forma é de um quadrado.* "Va": *então aqui sempre faz largura vezes a altura pra acha a área?* "Us": *sim, eu penso em um lado vezes o outro lado e dá certo.*

O propósito do trabalho em conjunto é a aprendizagem através da discussão de diversas situações-problema em pequenos grupos. Penso que, se a argumentação pode ajudar na aquisição do conhecimento, é preciso que se compreenda melhor essa organização dos conhecimentos, pois a cada introdução de um novo aspecto do conhecimento, graduais aquisições isoladas ou em grupo podem ser assimiladas e organizadas pelo intelecto do estudante-adolescente e podem resultar numa mudança de compreensão e explicações.

Há questões fundamentais na *situação 1 de aprendizagem*, como rememorar um conhecimento matemático que foi desenvolvido em sala de aula, segundo a fala dos estudantes, há dois anos. O fator positivo que abordo é o quanto os estudantes podem construir significações e obter êxito ao resolver os problemas propostos no âmbito escolar. No manuseio de materiais pedagógicos alternativos (fichas de papelão), parece ocorrer uma ação mental na qual classes de objetos concretos ou relações entre objetos são combinados ou relacionadas através uma ação mental pela qual durante o processo de aprendizagem o sujeito se desliga do conteúdo material, passando a raciocinar com base nos símbolos matemáticos ou esquemas verbais.

Por meio do recurso do material concreto, como lápis, borracha e folha de rascunho, e de ações práticas, do tocar as bordas com os dedos, do medir com a régua, da leitura da unidade de comprimento, não de área, o grupo "conferiu" através do registro notacional o resultado sugerido pelo sujeito "Ci". Questiono: "a conta armada" foi realizada para confirmar o resultado "pensado" ou acreditam que apenas o registro convencional garantiria a resposta correta? O "alívio", quando da conferência entre o número pensado e o número registrado, foi destaque na expressão da face do sujeito "Va".

Piaget (1976) afirma que o sujeito, para raciocinar por meio das operações formais, pode ligar proposições nas quais nem sempre ele acredita – as chamadas "hipóteses", mas que são admitidas para que consequências possíveis de atos possam ser verificadas, sem que os mesmos ocorram na realidade. Assim, num raciocínio em que as operações formais estão em construção, as premissas podem ser consideradas simplesmente como dados, ocorrendo discussão sobre a legitimidade dessas. No sujeito aqui em destaque – o adolescente - há um trânsito entre as operações concretas e as operações formais na condução a uma dedução que pode levar à verdade.

Com efeito, a forma do pensamento de um adolescente é muito diferente da forma do pensamento de um adulto e varia, mesmo, de um adolescente a outro. Como nos relatos apresentados, os estudantes constataram que não há um método único de resolver um problema. De acordo com a condição proporcionada, surgiu um caminho para "resolver" o problema. Aqui temos presente vários momentos de aprendizagem necessários, que podem ser considerados etapas de uma construção na passagem de um conhecimento aritmético-geométrico para um conhecimento algébrico. Destacando os "erros construtivos", retomo os momentos em que parecem se evidenciar na argumentação dos estudantes: "Va": *a gente soma 10 com 10 ou faz vezes?* [...], "Ci": *é dez vezes dez* [...], "Va": *então aqui sempre faz largura vezes a altura pra acha a área?* "Ju": *sim, eu penso em um lado vezes o* *outro lado e dá certo.* Assim, concluem que o resultado vem da multiplicação de um lado pelo outro lado da ficha de forma quadrangular.

Diante das experiências individuais são diversas as maneiras de compreender e assimilar os conteúdos. Assim, é possível observar nos adolescentes uma grande variedade de comportamentos a respeito de soluções para os "problemas" que são apresentados, os quais podem encontrar diferentes estados de significação e explicação das situações.

Percebeu-se a desconfiança do sujeito "Va", seu questionamento, seu interesse de investigar, não se satisfazendo apenas com uma explicação. Destaco seu ponto de vista na procura em suprir uma necessidade de coerência interna do pensamento. Piaget (1975) afirma que, caso a lógica do sujeito tenha uma organização simples e se contente com modelos abreviados de interpretação da realidade, descrições dos fatos são suficientes como uma explicação para o porquê das coisas. Contudo, se a lógica do pensamento é complexa, o sujeito satisfaz-se apenas com uma explicação que seja capaz de identificar relações mais profundas que existam no problema em questão.

Na argumentação do sujeito "Ci" há a retomada de um conhecimento anteriormente adquirido, mesmo que este adolescente não atinja uma explicação no sentido de uma conceituação. Verifico durante as aulas que ele é capaz de elaborar justificativas para suas ações. Por exemplo o sujeito "Ci": *a gente já estudou uma vez isso, [...] tinha um nome, não me lembro mais. [...] a professora fez a gente aumenta e diminui os desenhos. [...] Que nem aqui a forma é de um quadrado*.

O caminho do sujeito "Us", sua "regra" para "lembrar", a capacidade de significar os conteúdos que resultam desse pensamento mais estruturado demonstram tentativa de uma explicação dedutiva, de atribuição de um sentido às regularidades que percebe.

Na sequência das atividades propostas apresento um caso de situação 2 de aprendizagem: cálculo do perímetro de fichas de forma quadrangular com livre utilização de material disponível nos grupos e na sala de aula.

Situação 2, sujeitos: (Va, Ci e Us): os grupos permanecem com as fichas de forma quadrangular (10 cm x 10 cm, 20 cm x 20 cm e 30 cm x 30 cm). Situação: como vamos determinar o perímetro dessas fichas? “Va”: *se a área é vezes, então agora é que nem o caso “do caminho dos ciclistas” a gente soma todos os lados.* “Ci*”: neste de 10 vai dar um caminho de 40 centímetros, aqui de 80 e neste maior de 120*. “Va”: *mas é a mesma coisa?* “Us”: *claro que não, olha só antes deu 100, 400 e 900 centímetros*. “Va”: *sim eu sei, quero dizer aqui nos centímetros! Acho que não é tudo igual*. “Ci”: *como assim?* “Va”: *lembra que a prô sempre fala que adicionar é diferente de multiplicar?* “Us”: *você não tá confundindo as coisas?* “Va”: *espera to pensando*, [...] *se quando eu multiplico, tenho que lembrá que é tudo aqui dentro e precisa dos expoentes, então aqui nas áreas tá tudo errado. É centímetros quadrados (cm$^{2)}$ e não centímetros (cm), porque é o centímetro deste lado com o centímetro deste lado.* Voltam ao resultado das áreas, comparam com os resultados dos perímetros, discutem. “Va” após várias defesas verbais e um registro gráfico no papel continua no argumento da sua posição. As colegas do grupo confirmam os perímetros e decidem em conjunto modificar as unidades de medida das áreas da atividade anterior para 100 cm^2, 400 cm^2 e 900 cm^2.

O sujeito “Va”, na sua explicação, supera uma simples constatação e reelabora conceitos de unidades de medidas de comprimento e de área, num sentido de organização mental lógico-matemático. Na segunda situação-problema, ele distingue área de perímetro, enunciando as propriedades específicas da adição e da multiplicação de fatores. Nesse sentido, entendo que a partir de uma conceituação individual parece ter ocorrido uma compreensão do grupo de trabalho, possibilitando uma construção operatória e formal do problema da situação 1 = área (multiplicação de uma largura por um comprimento das fichas quadradas) e 2 = perímetro (adição das quatro medidas das bordas das fichas quadradas).

Os três componentes do grupo conceituaram área e perímetro? Como posso ter certeza sobre se o encadeamento de relações que o sujeito “Va” revelou no seu raciocínio promoveu nos sujeitos “Ci” e “Us” a mesma estruturação do conceito de área e perímetro? Num primeiro momento, “Ci” indaga “Va”, parecendo precisar de mais elementos para validar a nova compreensão. Também “Us” questiona o novo argumento de “Va” como uma ação desorganizadora da situação 1 e 2 de aprendizagem. Penso que de alguma forma as combinações e a sequência de relações demonstradas graficamente pelo sujeito “Va” tenham satisfeito ou superado em maior grau as dúvidas dos dois colegas do grupo, pois em conjunto decidiram modificar os resultados da situação 1 de aprendizagem referente à unidade de medida das áreas das fichas de forma quadrangular.

De acordo com Piaget:

> A descrição atinge um certo número de fatos gerais [...], mas sem ultrapassar o nível das constatações, logo dos observáveis, e a determinação de seu grau de generalidade. A explicação começa, ao contrário, a partir do momento em que se podem destacar as razões destes fatos gerais, o que equivale a destacá-los uns dos outros ou a outros não conhecidos, mas por um laço de necessidade dedutiva orientada na direção de uma construção teórica. (1975a, p.168).

É extremamente difícil fazer uma ideia de como se desenrola num estudante-adolescente numa aula de matemática com 28 a 32 alunos um pensamento lógico formal. Assim, ainda que para um pesquisador observador a constatação de uma sequência dos comportamentos não assegure que houve compreensão total das relações possíveis, para o sujeito que constrói uma significação e a apresenta como uma razão para suas condutas, como no caso do sujeito “Va”, trata-se de uma explicação.

Piaget (1975a) afirma que a lógica é um índice de coerência, porque é um conjunto de regras que orientam nosso pensamento e que o sujeitam à verificação. Para o sujeito “Va”, no caso do perímetro, a lógica das correspondências entre o valor numérico (adição) e a permanência da unidade de medida conduziu-o a reelaborar o seu raciocínio para o caso da área das fichas de forma quadrangular. Assim, revendo as regras que orientam os cálculos de perímetro e área, no caso da área, ele reconduz a discussão com seu grupo. E na orientação das regras matematicamente estabelecidas para o cálculo da área, estabelecendo a multiplicação entre os fatores numéricos e a multiplicação entre as unidades de medida, com a adição dos valores exponenciais 1 (invisíveis), chega ao expoente 2 (ao quadrado), que é o expoente correto para validar a unidade de área da situação 1 de aprendizagem.

Na sequência das atividades propostas apresento um caso de situação 3 de aprendizagem, subdividido em 3A e 3B: cálculo do perímetro de uma ficha de forma quadrangular de dimensão real: 18 cm x 18 cm, sem uso da régua.

Situação 3A, sujeitos: (Bi, Da e An): os grupos recebem uma ficha de forma quadrangular. Situação: como vamos determinar o perímetro dessa ficha? “Bi”: *como assim sem régua!?* Sim, sem o uso da régua. Apontem outras formas para determinar a área dessa ficha. “Bi”: *Bom primeiro tem que ver se todos os lados são iguais.* Como você faria? “Bi”: *Assim com a mão?* Abre um espaço entre o dedo polegar e o indicador e procura mantê-los fixos no ar enquanto com a outra mão aproxima a ficha num movimento de rotação. Mas desiste na medição do terceiro lado por que se distraiu com a contestação do colega. “Da”, indaga: *pode até consegui segurar firme os dedos, mas e esse pedaço que sobra? É uma medida mais um pouco! E esse pouco não tá sendo medido igual com os dedos.*

Olham sobre a mesa os recursos que possuem. “Bi”: *Já sei, vou usar o lápis que é maior que a medida dos meus dedos.* “Da”: *Assim, até acho que vai dá certo.* Por que agora sim e antes não daria certo? “An”: *por que agora deu pra ver que todos lados têm a mesma medida. Porque o lápis não muda de tamanho que nem o tamanho entre os dedos.* Aproximadamente quanto vocês atribuem de valor para este lado? “Bi”: *uns 15 centímetros*. “Da”: *é acho que sim, uns 15 centímetros*. Voltando a pergunta inicial, então qual é o perímetro dessa ficha? “An”: *posso somar os quatro lados, e também posso fazer 4 x 15 e o resultado é o mesmo, o perímetro vai dá 60 centímetros.*

Quando um sujeito se ocupa de um problema, seja “Bi” – usando a extensão do seu corpo ou a utilização do lápis -, as operações e a coordenação dos dados dispõem de uma estrutura lógico-matemática para abordar a situação. Além disso, é necessário que essas operações se organizem em função dos conteúdos e de suas especificidades, isto é, os sujeitos poderiam ter determinado o perímetro pela adição das partes (15 cm + 15 cm + 15 cm + 15 cm), (30 cm + 30 cm) ou (45 cm + 15 cm), mas optaram por determiná-lo pela multiplicação (4 x 15 cm). Utilizaram-se de recursos materiais para determinar o valor de um lado da ficha de forma quadrangular, mas no momento da multiplicação entre os valores numéricos não registraram o cálculo, somente o efetuaram “mentalmente”.

Situação 3B, sujeitos: (Ma, Gui e Ru): Minha presença foi solicitada por um grupo que formula um questionamento. “Ru”: *nós achamos que assim olhando, cada lado tem 18 centímetros.* “Gui”: *e se o lado tem no nosso caso 18cm o resultado para o perímetro vai ser de 72cm.* Por que a preocupação se souberam determinar o valor de um lado e encontraram o perímetro? “Ma”: *mas os valores não são os mesmos.* Que valores? “Ma”: *os do nosso grupo e o do outro. Nós achamos que é 18 e eles acham que é 15.* E pode? “Ru”: *pode uma ficha de mesmo tamanho ter medidas diferentes?* O que vocês acham sobre isso? Discutem no grupo e com o outro grupo. Cada um coloca seu ponto de vista. “Ma”: *como não temos certeza da medida e cada grupo “pensou” um valor, acho que todos estão certos.* Como é possível um mesmo “problema” com várias respostas possíveis? “Gui”: *é eu nunca tinha pensado nisso, [...] mas os dois estão certos, [...] acho que nunca tinha passado por isso.* Recolho as fichas dos grupos.

Os sujeitos das situações 3A e 3B estão envolvidos com o mesmo problema: o perímetro da ficha de forma quadrangular. É necessário que se organizem em função da especificidade da questão: como determinar uma medida que seja confiável?

Na situação 3A: os sujeitos do grupo: “Bi”, “Da” e “An" tiveram uma sequência de situações na organização do problema:

(1) hipótese 1: uso da mão. Pela ação do sujeito “Bi” surge a possibilidade de, na ausência do modelo, imitar com relativa precisão uma régua utilizando a própria mão para determinar se os lados da ficha são iguais, assim como o seu perímetro. De acordo com Piaget, chega-se a um valor relativo “por meio

de uma operação de correspondência”. (1971, p.104) Por esta característica do ponto de vista da teoria piagetiana, “Bi” estaria no estágio pré-operatório se continuasse representando o perímetro somente por meio de um único “significante” diferenciado, isto é, seus dedos.

(2) interferência na hipótese 1 com argumentação: mudança de conduta. O sujeito “Da”, com sua indagação - *pode até consegui segurá firme os dedos, mas e esse pedaço que sobra? É uma medida mais um pouco!* -, num esforço único, tenta mostrar a ausência de precisão na ação de “Bi”, pois não ocorre a regularidade nas medidas com o uso da mão. Eliminado o recurso da “mão” como instrumento de medida, todos do grupo dirigem o olhar à mesa à procura de outro instrumento de medida.

(3) hipótese 2: uso de material: o lápis. Argumentos dos sujeitos: “Bi”: *Já sei, vou usar o lápis* [...]. “Da”: *assim, até acho que vai dá certo*. “An": [...] *porque o lápis não muda de tamanho que nem o tamanho entre os dedos*. As ações dos adolescentes continuam baseadas num princípio de conservação por relações diretas dos sujeitos deste grupo com algum objeto material.

Os estudantes da situação 3A traduzem as ações de medição da ficha em operações sucessivas e objetivas. Somente supõem um valor numérico aproximado ao lápis após a minha interferência; então, sugerem um valor aproximado de 15 centímetros para o lápis. Assim, novamente com o grupo, questiono: *então qual é o perímetro dessa ficha?* O sujeito “An” responde de duas formas: *posso somar os quatro lados, e também posso fazer 4 x 15 e o resultado é o mesmo, o perímetro vai dá 60 centímetros.* “An” resolve a situação mentalmente, de duas formas, sugerindo o caminho da adição das partes (15 + 15 + 15 + 15) e a multiplicação entre fatores (4 x 15). As ações dos sujeitos deste grupo me permitiriam incluí-los no estágio operatório concreto. Todavia, o problema é o das relações entre o pensamento formal e o concreto, de se compreender como o sujeito passa das correspondências simples a uma explicação que exprime o esquema do equilíbrio formal. Penso que o adolescente “An” está na etapa de transição entre o operatório concreto e o formal, pois foi a componente deste grupo que com a mesma intensidade na forma verbal expressou as duas possibilidades de solução para a situação 2 de aprendizagem e as efetuou “mentalmente”. Por que etapa de transição? Em razão das características das ações do adolescente “An” com ou sobre objetos (com a mão, com o lápis, sobre a ficha) nesse momento existe a necessidade de uma correspondência operatória termo a termo numérica. Num pequeno espaço de tempo a ação de “An” é caracterizada por duas hipóteses expressas verbalmente, tal como acontece no estágio operatório formal. Enfim, na situação 3A a confiabilidade das medidas de comprimento e de perímetro deu-se por meiose de uma lógica proposicional, isto é, a partir de ações executadas previamente, não de antecipações a partir de um modelo.

Na situação 3B: os participantes deste grupo relacionaram diretamente uma atribuição do valor relativo formulado pela dimensão visual da ficha de forma quadrangular. De forma absoluta, estabeleceram uma única hipótese: supondo que cada lado tem 18 centímetros, logo o perímetro será de 72 centímetros.

Na situação 3B, o sujeito “Ru” expressou a hipótese do seu grupo - *nós achamos que assim olhando, cada lado tem 18 centímetros.* Desse modo, apresentou certo grau de novidade em relação à situação 3A, pois a organização do problema deu-se a partir de uma atribuição numérica suposta através de um apontamento visual, sem a utilização de meio material para sua validação. Penso que essa evidência seja a marca da organização de uma nova estrutura operatória, na qual o pensamento do plano real passou ao plano do *possível*, que se abre dando indícios de um pensamento pré-formal, caracterizado pela capacidade também de elaborar raciocínios dedutivos, pensando sobre hipóteses ou sobre proposições.

Entretanto, minha atenção também está voltada para os questionamentos dos sujeitos “Ma” e “Gui”, com o aparecimento de uma nova situação, jamais formulada à matemática conhecida por estes estudantes até então, isto é, a possibilidade da validação de dois resultados para um mesmo problema. No argumento do sujeito “Ma”: *mas os valores não são os mesmos.* [...] *os do nosso grupo e o do outro. Nós achamos que é 18 e eles acham que é 15.* Ocorre aqui a desestabilização de uma verdade aceita como finita: cada problema tem uma, e somente uma, solução verdadeira. De acordo com seus comportamentos, esses estudantes parecem ainda não ter vivenciado situações em que interviesse um pensamento lógico-matemático próprio dos conteúdos algébricos.

Segundo Piaget,

> todos os sujeitos atingem as operações e as estruturas formais, senão entre 11-12 a 14-15 anos, pelo menos entre 15-20 anos, porém, [...] A maneira pela qual essas estruturas formais são usadas, porém, não é necessariamente a mesma em todos os casos". (1972, p.16).

Será que o grau de novidade em que um conteúdo é apresentado para o sujeito adolescente influencia na compreensão da complexidade da sua problemática? De acordo com as leituras em Piaget (1973), para um sujeito significar uma situação é preciso que construa esquemas a respeito do problema em que passa a estar envolvido. Logo, no momento em que ao sujeito "Gui" foi apresentado um conteúdo desconhecido, ele teve de se organizar a propósito das novidades. Este adolescente, ao organizar suas condutas, encontra dificuldade na novidade do conteúdo e na ausência de esquemas específicos já construídos para lidar com a situação. "Gui": *é eu nunca tinha pensado nisso,* [...] *mas os dois estão certos* [...] *acho que nunca tinha passado por isso.*

Para Piaget e Inhelder (1976), a grande novidade identificada nos esquemas operatórios da lógica formal parece ser a inversão de sentido entre o possível e o real, pois nesse estágio os adolescentes raciocinam segundo os possíveis e, assim, conseguem desenvolver hipóteses. Foi possível identificar na forma de pensar dos estudantes, no modo como resolveram o problema, uma combinatória. Relações possíveis num raciocínio combinatório, mas não uma combinatória completa, pois os estudantes não esgotam todas as possibilidades.

Após toda essa descrição e uma possibilidade de enquadramento dos sujeitos nos estágios de desenvolvimento do pensamento operatório pré-formal, pretendo verificar, conforme o foco da pesquisa, se houve ou não vestígios de crescimento nas ações individuais a partir do trabalho desenvolvido em grupo.

Na sequência das atividades propostas apresento um caso de situação 4 de aprendizagem, subdivido em 4A e 4B: cálculo do perímetro de uma ficha de forma retangular de dimensão real: 20 cm x 40 cm, sem uso da régua.

Situação 4A, sujeitos: (Bi, Da e An): os grupos recebem uma ficha de forma retangular. Situação: como vamos determinar o perímetro dessa ficha? "Bi": *continuando sem régua!?* Sim, sem o uso da régua. Apontem outras formas para determinar o perímetro dessa ficha. "Bi": *dá pra ver que os lados são iguais de dois em dois.* Como você tem tanta certeza? "Bi": *os dois maiores são o de cima e este de baixo e, os dois menores são estes aqui de pé.* Ok, considerando quais medidas aproximadamente? "An": *a menor parece a mesma do quadrado, [...] não um pouco maior uns 16 cm e o lado maior uns 35 cm.* Vão permanecer com esses valores? Os três permanecem por algum tempo só olhando para a ficha. "Da": *sim, não precisa medir.* "Bi": *é já dá pra quase acertar as medidas sem régua.* Então, qual o valor do perímetro? "An": *somando 16 com 16 dá 32 e 35 com 35 dá 70 e juntando 70 com 32, o perímetro vai dar 102 centímetros.* "Da": *eu fui somando pelos lados e* *também deu 102.* Como somando pelos lados? “Da”: *começando por este canto somei 16 com 35, depois com 16 e de novo 35, até fechar a figura*. Confirmado o resultado? “An”: *sim achamos todos 102 centímetros de perímetro*.

Aparentemente, as condutas apresentaram uma característica diferente da apresentada por esses estudantes pré-adolescentes na situação 3A, isto é, os três componentes do grupo agiram somente guiados pelos campos visual e verbal, não mais com o uso de material concreto como os dedos e o lápis. Será que nas tentativas entre acertos e contradições na situação 3A as experiências realizadas foram representadas? E a partir das relações conhecidas, o pensamento formal permitiu pensar possíveis? O sujeito “Da” apresenta os valores possíveis para a ficha de forma retangular (16 cm e 35 cm), e os sujeitos “An” e “Bi”, num primeiro momento, observam a ficha e confirmam os valores sem qualquer utilização de material concreto, nem qualquer manifestação para nova correção ou outra possibilidade por comparação com o lápis, como na situação 3A.

O adolescente “Bi” parece conservar noções de igualdade e desigualdade de segmentos, segmentos paralelos semelhantes, assim como a localização dos segmentos em posições opostas: *dá pra ver que os lados são iguais de dois em dois.* [...] *os dois maiores são o de cima e este de baixo e, os dois menores são estes aqui de pé.* O emprego sistemático de combinações é uma característica manifesta do início de uma estrutura lógica? Piaget e Inhelder, em seus estudos, mostram-nos uma estreita ligação do desenvolvimento dos raciocínios experimentais com a constituição da lógica das proposições, visto que aparece “um certo número de operações e de noções novas, cuja compreensão ultrapassa as capacidades do nível concreto.” (1976, p.79)

Os sujeitos “Da” e “An" empregam diferentes combinações para a determinação possível do perímetro da ficha de forma retangular. O pensamento formal permite pensar possíveis a partir das relações conhecidas. Assim, inverte-se a situação e a hipótese pode preceder a experiência, como na situação 4A, na qual os estudantes apresentaram os valores possíveis para a ficha de forma retangular. Essa característica implica agir de forma mais elaborada e conseguir compreender mais rapidamente as relações entre os elementos em jogo na organização proposta como desafio? Qual a sua interferência no pensamento? As condutas do sujeito “An” na adição das partes menores (16 + 16 = 32) com as partes maiores (35 + 35 = 70) e, por fim, na adição das totalidades parciais (70 + 32 = 102) não apresentaram uma organização mais elaborada. Destaco a inversão da ordem da adição dos valores numéricos parciais para o cálculo do resultado final. Por sua vez, o sujeito "Da" adiciona os valores numéricos seguindo o critério que na Física é utilizado como o "caminho percorrido" sem "deslocamento" do corpo por retornar ao ponto de partida. Como não deve conhecer os termos que aqui empreguei, o que fez? Num raciocínio simples, fez o contorno da ficha de forma retangular, adicionando as partes na sequência (16 + 35 + 16 + 35); satisfeito com o seu resultado, foi conferi-lo com o dos seus colegas. Finalizando pelo grupo, o sujeito "An" confirma o resultado do perímetro da ficha de forma retangular em *102 centímetros.*

Situação 4B, sujeitos: (Ma, Gui e Ru): Passam a ficha de forma retangular de mão em mão. Confrontam idéias e entram em acordo. "Ma": *Também achamos que as medidas aumentaram.* Aumentaram? "Ma": *sim, aumentaram em relação à ficha quadrada, que pra nós era de 18 cm o lado. Agora com o retângulo, olhando bem, achamos que o lado menor é de 20 cm e o maior de 40 cm.* E considerando essas medidas possíveis, qual o valor do perímetro? "Ru": *multiplicando 20 por 2 e também 40 por 2, depois somando os resultados vamos ter 120 cm de perímetro.* "Gui": *é, de novo os resultados são bem diferentes. E estão certos, os dois resultados?* O que vocês acham? "Ru": *se podemos escolher os valores, então tudo com eles vai dar certo pra nós e pros outros grupos que escolheram outros valores*. "Gui*": mas é estranho, a gente nunca pode dar os valores*. Como assim? "Ma": *sim, a gente sempre ganhou o problema com os valores juntos*. E como estão se sentindo com isso? "Ma": *é diferente, mas é bom poder dar o seu valor*.

No argumento o sujeito "Ma": *também achamos que as medidas aumentaram* [...] *aumentaram em relação à ficha quadrada, que pra nós era de 18 cm o lado*. O estudante utiliza operações proposicionais de implicação pensando num conjunto de partes. Por mais incompletas que sejam as primeiras tentativas do pensamento no início do estágio operatório-formal, ele se orienta para uma nova forma de equilíbrio. E nessa situação 4B os raciocínios individuais dos sujeitos são compartilhados no grupo segundo *os possíveis observados* na situação-problema atual, mas com o resgate das representações em situações anteriores.

O grupo do relato da situação 4B mantém suas ações de resolução do problema proposto, isto é, utiliza-se da combinação entre multiplicação (o dobro do lado menor e do maior) e adição dos produtos das partes: (20 x 2) + (40 x 2) = 120. O que me impressiona nesses três adolescentes é a coesão das ideias e a precisão na dedução das medidas escolhidas 20 cm e 40 cm, que são os valores reais da ficha de forma retangular. Também está presente o uso das operações combinatórias, isto é, a multiplicação e a adição de fatores numéricos dispostos num pensamento em duas etapas. Essa organização parece tornar a compreensão dos estudantes da situação 4B mais rápida.

Para Piaget (1973) as estruturas organizam-se sempre em sistemas mais complexos e mais equilibrados, não admitindo a possibilidade de uma “regressão” a estádios anteriores. Entretanto, pode haver defasagens em relação a novidades. Uma atitude característica dos adolescentes diante de uma associação de dois ou mais fatores, por exemplo, é de estudar um e afastar os demais, sem maiores interferências nas suas hipóteses para a compreensão de uma situação-problema. Essa exclusão ocorre de forma semelhante entre os adolescentes, variando de um para outro de acordo com as relações estabelecidas na construção do seu conhecimento, inseridos numa diversidade cultural e social.

As diferentes soluções possíveis do problema para o sujeito “Gui” continuam sendo um ponto de difícil compreensão: *É, de novo os resultados são bem diferentes. E estão certos, os dois resultados?* O pensamento hipotético pode mudar a natureza das argumentações? “Gui”: *mas é estranho, a gente nunca pode dar os valores.* Sem, necessariamente, acreditar no seu ponto de vista, pode adotá-lo pela defesa da argumentação do seu colega “Ma”: *sim, a gente sempre ganhou o problema com os valores juntos*. [...] *é diferente, mas é bom poder dar o seu valor*. Penso que o sujeito “Ma”, por meio de uma argumentação construtiva, vai além do seu campo imediato de experiências.

Na sequência das atividades propostas apresento um caso de situação 5 de aprendizagem, subdividido em 5A: determinação do perímetro de uma ficha de forma quadrangular (dimensão real: 20 cm x 20 cm) e 5B: determinação do perímetro de uma ficha de forma retangular (dimensão real: 20 cm x 40 cm).

Situação 5A – sujeitos: (Na, Se e Pa): os grupos recebem uma ficha de forma quadrangular (20 cm x 20 cm). Solicitei no primeiro momento que encontrassem uma maneira geral para determinar o perímetro da ficha de forma quadrangular. “Na*”: como assim uma maneira geral, não entendi*. “Pa”: *maneira geral quer dizer uma fórmula?* O que vocês acham? “Se”: *as fórmulas têm sempre letras*. Como assim letras? “Pa”: *daí que as contas ficam difíceis*. “Na”: *é, ainda mais quando mistura números e letras*. E afinal o caso do perímetro desta ficha quadrada como vai ficar? “Pa”: *bem é um quadrado*, [...] *então tem que ter os quatro lados iguais*. “Na”: *se o lado fosse 20, o perímetro que é só somar, dava 80*. “Se”: *mas aqui é sem dar um valor, não é como a gente podia fazer nas aulas passadas*. “Na”: *se não dá pra dá valor, o que dá pra fazer?* “Se”: *tem as letras*. “Pa”: *e o que fazemos com elas?* “Se”: *se num quadrado todos os lados são iguais, posso dizer que todos os lados medem “x”.* Por quê? “Se”: *se o perímetro é a soma dos quatro lados, [...] é a soma dos quatro “x”, assim: x + x + x + x, que vai dar 4x*. “Na”: *e a resposta vai ficar assim?* “Se”: acho *que sim, era para encontrar uma maneira geral.*

Os estudantes adolescentes, individualmente, expõem a sua compreensão da ordem dada para a resolução da situação de aprendizagem 5A. O sujeito "Na*": como assim uma maneira geral, não entendi*. O sujeito "Pa": *maneira geral quer dizer uma fórmula?* [...] O sujeito "Se": *as fórmulas têm sempre letras*. O amplo uso da técnica de ensino de resolução de problemas no ensino básico, por meio de fórmulas, numa notação abstrata dentro e fora da matemática, é refletido nas falas das componentes deste grupo. O que é "uma maneira geral" de determinar, aqui, especificamente, o perímetro de uma ficha de formato quadrangular? Na dúvida do sujeito "Na", a expressão usada pelo sujeito "Pa" [...] *uma maneira geral* pode ser considerada uma forma de universalidade, aplicável à maior parte das situações, isto é, uma generalização. O que significa "uma fórmula" na compreensão do sujeito "Pa"? Seria um modo já estabelecido para explicar ou resolver uma determinada situação? O sujeito "Se" complementa o diálogo: *as fórmulas têm sempre letras*. Essa inferência é potencializada pelo dicionário de matemática, no qual se lê que "fórmula" é "qualquer fato, regra ou princípio expresso por símbolos algébricos". (1995, p.98)

De diferentes graus de compreensão dos três componentes do grupo parecem avaliar o papel que desempenha "uma fórmula" no contexto proposto na situação de aprendizagem 5A. Nos argumentos do sujeito "Pa": *daí que as contas ficam difíceis* e do sujeito "Na": *é, ainda mais quando mistura números e letras*. A expressão "difícil" é empregada pelos estudantes como se a resolução de uma "fórmula" fosse uma situação árdua e, principalmente, exigente nos procedimentos numéricos e algébricos, que envolvem a compreensão da fórmula para a sua posterior aplicação na solução de uma situação-problema. A mobilidade que cada estudante adolescente tem de transitar por noções e operações numéricas com noções e operações algébricas repercute diretamente na sua compreensão e resolução das situações de aprendizagem propostas por esta pesquisa. A resolução das situações algébricas pode se tornar um obstáculo no momento em que os sistemas simbólicos utilizados pelo estudante adolescente na 7ª série ou 8° ano, aqui, especificamente, na representação do perímetro da ficha de forma quadrangular, mostram o quanto é complexa essa situação e como se faz importante distinguir qual dimensão está sendo tratada na resolução do problema.

Dando sequência ao problema de uma maneira geral para determinar o perímetro da ficha de forma quadrangular o sujeito “Pa” diz: *bem é um quadrado*, [...] *então tem que ter os quatro lados iguais*. Na sequência do argumento diz o sujeito “Na”: *se o lado fosse 20, o perímetro que é só somar, dava 80*. Os dois estudantes prontamente seguem o raciocínio anteriormente desenvolvido na situação 3 de aprendizagem, uma vez que nessa ocasião puderam supor valores possíveis à ficha de forma quadrangular sem registro gráfico no papel, somente de forma verbal; os estudantes recordam os passos para a determinação do perímetro com supostos valores numéricos.

O raciocínio passa a ter uma mudança pela retomada do sujeito “Se”: *mas aqui é sem dar um valor, não é como a gente podia fazer nas aulas passadas*. Percebe-se a indefinição do sujeito “Na”: *se não dá pra dá valor, o que dá pra fazer?* O sujeito “Se” completando sua explicação: *tem as letras*. Indaga o sujeito “Pa”: *e o que fazemos com elas?* Retoma o sujeito “Se”: *se num quadrado todos os lados são iguais, posso dizer que todos os lados medem “x”.* Por quê? O sujeito “Se” completa sua argumentação: *se o perímetro é a soma dos quatro lados, [...] é a soma dos quatro “x”, assim: x + x + x + x, que vai dar 4x*. Questiona o sujeito “Na”: *e a resposta vai ficar assim?* Segue o sujeito “Se”: *acho que sim, era para encontrar uma maneira geral.* O sujeito “Se”, durante a sua explicação de generalização do perímetro da ficha de forma quadrangular, utilizou-se da ficha para justificar seu raciocínio, somente apontando com o dedo para as bordas da ficha. O sujeito “Se” faz o registro gráfico para o colega “Pa” e, principalmente, para o colega “Na” poder acompanhar o raciocínio do colega, da seguinte forma: Perímetro = P, lado = x, então, P = x + x + x + x = 4x.

Situação 5B – sujeitos: (Na, Se e Pa): os grupos recebem agora uma ficha de forma retangular (20 cm x 40 cm). Solicito que também encontrem uma maneira geral para determinar o perímetro desta ficha agora de forma retangular. Após muita discussão e defesas ferrenhas, “Pa” decide expor as conclusões do seu grupo: *bom, como no retângulo os lados são diferentes, vamos chamar um de lado “x” e outro de lado “y”.* Por quê? “Na”: *porque os lados são diferentes*. “Se”: *se são diferentes não podem todos valer “x”*. Por quê? “Se”: *porque tudo valendo “x” quer dizer igual, e não é igual*. Bem e quanto ao perímetro geral do retângulo? “Pa”: *como dois lados medem “x”, vou somar eles: x + x, que dá 2x e, os outros dois lados medem “y”, somo y + y, que dá 2y.* “Na”: *e agora dá pra soma 2x com 2y?* O que vocês acham? “Se”: *bem, antes dava porque era tudo xis*. E agora? “Na”: *agora tem letras misturadas*. *Será que a resposta é 2xy?* “Pa”: *não, acho que é 2x e 2y*. “Se”: *pode uma resposta na matemática ficar 2x e 2y?* Como foi mesmo que vocês encontraram o perímetro quando usaram a régua? “Pa”: *medimos tudo e somamos!* E agora? “Na”: *então é pra somar? Como vamos somar 2x com 2y?* A questão é de como vocês vão registrar graficamente esta forma geral. “Se”: *acho que tem que botar o mais.* Como é esse botar o mais? “Na”: *já sei é +2x 2y.* “Pa”: *não, é +2xy.* “Se”: *falta um 2.* Como falta um 2? “Se”: sim por que são dois lados “x” e dois lados “y”, *então fica 2x + 2y.*

Os componentes dos demais grupos acabaram se envolvendo na situação. Os três aguardam a minha reação. Concordo com a “descoberta”, solicito que efetuem novamente o caminho do seu pensamento, façam o registro e compartilhem com os colegas “a descoberta”. Registram como modo geral: Perímetro do quadrado = 4x, Perímetro do retângulo = 2x + 2y. O que significa representar o perímetro do quadrado e do retângulo dessa forma? “Se”: *que o “x” e o “y” têm valores diferentes! E podem ter outros valores, diferentes do que eu pensar!*

Post et al. (1995, p.90) afirmam que o raciocínio matemático, que envolve variações múltiplas e a capacidade de armazenar e processar mentalmente várias informações está ligado aos “métodos de pensamento qualitativos e quantitativos”. Logo, quando o sujeito “Pa” decide expor as conclusões do seu grupo – *bom, como no retângulo os lados são diferentes, vamos chamar um de lado “x” e outro de lado “y” –,* questiono por que “x” e “y”. O sujeito “Na” responde justificando o mesmo pensamento: *porque os lados são diferentes*. O sujeito “Se”, na sequência, reafirma o pensamento do grupo - *se são diferentes não podem todos valer “x”*. Questiono-o sobre o porquê. O sujeito “Se” argumenta: *porque tudo valendo “x” quer dizer igual, e não é igual*. Nesta situação-problema de valores ausentes, o raciocínio requer uma capacidade de operar em nível abstrato, exigindo um domínio de vários conceitos de geometria e álgebra.

Post et al. (1995), ao tratar de uma capacidade mental, fundamentam-se nos estudos de Piaget:

> [...] a interpretação de cada uma dessas razões é uma operação em si e por si, e a comparação é outro nível de operação. Esse processo requer um raciocínio comparativo em níveis múltiplos, bastante diferente de uma abordagem algorítmica, em que se usa uma regra para resolver problemas prognosticáveis, por caminhos predeterminados. (1995, p.91)

Piaget (1976, p.87) sustenta que, “com a aparição do nível formal as duas novidades são o método sistemático no emprego das combinações *n* a *n* e a compreensão do fato”. Combinações como parte e parte, isto é, lados menores entre si (x + x = 2x) e lados maiores entre si (y + y = 2y), e a utilização dessas combinações para que o perímetro de qualquer figura de forma retangular derive da adição de duas variáveis, como tal: 2x + 2y, foram o foco do grupo. O que interessa ao grupo “não é, portanto, um acerto por meio de uma combinação específica, mas, a compreensão do papel desempenhado por ela no conjunto das combinações possíveis.” (1976, p.88)

A situação 5 de aprendizagem apresenta certo grau de complexidade, o que representa mais uma dificuldade para a significação. Os adolescentes atuaram formulando proposições, associando o conteúdo algébrico com o conhecimento das operações aritméticas e geométricas. Montaram verbalmente as situações e sentiram necessidade de buscar a interpretação do novo problema, ocupando as estruturas mentais de processos anteriormente resolvidos. Registrando os modelos de forma correta, terão conseguido estabelecer uma nova significação? Terão conseguido, de forma individual, estabelecer conexões entre os objetivos propostos pela atividade e os resultados de suas ações?

Em seu estudo sobre o pensamento do adolescente, Piaget diz:

> A principal novidade desse período é a capacidade para raciocinar em termos de hipóteses expressas verbalmente e não mais meramente, em termos de objetos concretos e sua manipulação. Esse é um ponto crítico decisivo, porque pensar hipoteticamente e deduzir as conseqüências que as hipóteses necessariamente implicam (independente da verdade intrínseca ou falsidade das premissas) é um processo de pensamento formal. (1972, p.5).

Um adolescente pode proceder de várias maneiras até chegar a uma forma sistemática de combinações, principalmente se for instigado a continuar procurando um resultado satisfatório. Piaget (1975a) observou que, à medida que o adolescente desenvolve o pensamento formal, vai compreendendo, de antemão, que existem várias combinações possíveis. Deduz que apenas alguma delas levará ao sucesso e, para lembrar-se de tudo que faz, pode falar ou escrever, enquanto tenta esgotar todas as possibilidades.

Piaget (1976, p.88) verificou, com a aplicação dos seus experimentos, que a compreensão que o adolescente tem do conjunto de combinações possíveis que existem para a solução de uma situação problema o “leva ao progresso no raciocínio. O uso que os sujeitos fazem das operações combinatórias mostra que, para eles, não se trata de operações matemáticas determinadas [...], mas de uma estrutura lógica geral, [...].” Ao mesmo tempo, com a combinação de fatores (coeficientes numéricos e partes literais) e operações (multiplicação e adição), os adolescentes da situação 5B de aprendizagem criam uma combinatória algébrica por meio da aritmética e da geometria e, assim, ainda verificam as ligações de implicação e exclusão.

A compreensão dos estudantes caracterizou-se por um raciocínio formal, fundamentado pelas combinações de fatores e dos enunciados, mas, sobretudo, em sua aplicação das propriedades de 2^o ordem envolvendo a multiplicação e a adição de forma associativa.

Na sequência das atividades propostas apresento um caso de situação 6 de aprendizagem, subdividido em 6A: determinação da área para qualquer ficha de forma quadrangular (dimensão real: 20 cm x 20 cm) e 6B: determinação da área para qualquer ficha de forma retangular (dimensão real: 20 cm x 30 cm).

Situação 6A – sujeitos: (Ma, Gui e Ru): os grupos recebem uma ficha de forma quadrangular (20 cm x 20 cm). Solicitei que determinassem uma maneira geral para calcular a área de qualquer ficha de forma quadrangular. “Ru”: *uma maneira geral?!* “Gui””: *para qualquer área quadrada?* “Ma”: *seria uma fórmula?* O que vocês acham? “Ru”: *nós vamos inventar uma fórmula?* “Gui”: *gostei disso!* Como seria? “Gui”: *o que temos é um quadrado*. “Ru”: *parece que tem uns 20 centímetros de lado.* “Ma”: *este aqui é de 20 centímetros, pode ter de outras medidas com os outros grupos.* “Ru”: *se fosse para calcular a área direto era só multiplicar 20 por 20 e estava pronto o valor*. “Ma”: *e dá para fazer isso porque os lados são iguais*. “Gui”: *se são iguais e é para ser uma fórmula para qualquer quadrado então só pode ser uma letra*. Por quê? “Gui”: *porque daí cada um substitui a letra pelo valor do seu quadrado*. “Ma”: *uma letra igual de todos os lados!* Após discussão no grupo, “Ma” decide expor as conclusões: *se num quadrado todos os lados são iguais, posso dizer que todos os lados medem “x”.* Nessa possibilidade, qual seria a área? “Ma”: *fácil, seria a multiplicação de dois lados “x”, assim: x . x, que vai dar 2x*. Vocês podem registrar graficamente este caminho? “Ru”: seria assim: área = A, lado = x, daí A = x . x que é A = 2x. [...] Permanece uma desconfiança no ar.

Dar crédito aos estudantes é conferir-lhes poderes para terem oportunidade de manifestar como verdadeira sua construção. Postura verbalizada pelos sujeitos “Ru”: *nós vamos inventar uma fórmula?* “Gui”: *gostei disso!* Arriscar-se em conjunto para encontrar um caminho que, de forma geral, determine a área para qualquer ficha de forma quadrangular é o indício da aplicação de “operações de combinação, com instruções que sugerem a operação” (PIAGET, 1976, p.88) algébrica.

No argumento dos estudantes, “Gui”: *o que temos é um quadrado*. “Ru”: *parece que tem uns 20 centímetros de lado.* “Ma”: *este aqui é de 20cm, pode ter de outras medidas com os outros grupos. “Ru”: se fosse para calcular a área direto, era só multiplicar 20 por 20 e estava pronto o valor.* O primeiro esquema operatório a ser colocado em evidência é a compreensão de área já estabelecida a partir do conhecimento (real ou suposto) do valor numérico “do lado” da ficha de forma quadrangular. Pelas expressões desses adolescentes em situações numéricas, a tarefa de determinar a área de uma figura é mais rápida. Também está evidente a preocupação de estabelecer parâmetros que contemplem uma variedade de áreas semelhantes (de forma quadrangular).

Outro aspecto manifesto no raciocínio dos adolescentes da situação 6A é a relação de substituição dos supostos valores numéricos diretamente por variáveis literais, indicando uma generalização das medidas laterais da ficha. A linguagem abstrata está presente no argumento dos estudantes: “Ma”: *e dá para fazer isso porque os lados são iguais*. “Gui”: *se são iguais e é para ser uma fórmula para qualquer quadrado, então só pode ser uma letra*. Questiono-lhes o porquê, “Gui”: *porque daí cada um substitui a letra pelo valor do seu quadrado*. “Ma”: *uma letra igual de todos os lados!* Usiskin (1995, p.11) observa que os alunos tendem a acreditar que “todas as variáveis são letras que representam números […] e que uma variável é sempre uma letra.” O caminho dedutivo aqui estruturado em conjunto a partir do conhecimento numérico, envolvendo a geometria, tem implicação direta na construção algébrica “da fórmula” para a área de qualquer ficha de forma quadrangular.

Observando a discussão deste grupo, o estudante “Ma” decide expor as conclusões: *se num quadrado todos os lados são iguais, posso dizer que todos os lados medem “x”.* Posso considerar essa ação como sendo um indicativo de raciocínio formal? Conclusão estabelecida após sistemática nas manifestações verbais de supor um valor (20) para o lado de uma ficha de forma quadrangular, de manifestar verbalmente que o produto da área é resultante de (20 x 20) e supor a substituição do valor numérico (20) pela variável “x”.

O que me interessa observar não é um acerto por meio de uma combinação específica, mas a compreensão do papel desempenhado por ela no conjunto das combinações possíveis. Nesse intuito, retomo a questão: *qual seria a área?* O sujeito “Ma” argumenta: *fácil, seria a multiplicação de dois lados “x”, assim: x . x, que vai dar 2x*. Retomo o questionamento: *vocês podem registrar graficamente este caminho?* O estudante “Ru” afirma: *seria assim: área = A, lado = x, daí A = x . x que é A = 2x.* Permanece uma desconfiança no ar, visto que o grupo chega a uma generalização para a área de qualquer ficha de forma quadrangular, mas algo os deixa insatisfeitos.

Para Piaget (1976), “uma vez encontrada a boa combinação, [...] o sujeito não se considera satisfeito, mas procura, [...] para ver se não há outras soluções para o problema.” (p.88). As reações dos sujeitos “Ma”, “Ghi” e “Ru” na situação de aprendizagem 6A, ao meu ver, agregaram elementos novos aos seus conhecimentos aritméticos e geométricos. As organizações existentes foram se reestruturando diante do desafio de compreensão de esquemas numéricos que deveriam ser generalizados em nível de operações formais. Com suas explicações verbais, eles formalizaram seus pensamentos na linguagem algébrica, numa possibilidade realizável de acordo com o que lhes fora solicitado: “um modo geral” para o cálculo da área de qualquer ficha de forma quadrangular.

Observei que em momento algum se referiram às unidades de medida tanto de comprimento como de área. Essas foram indicadas quando os grupos realizaram as atividades anteriores nas situações 1, 2, 3 e 4 de aprendizagem. A dedicação desses adolescentes revelou-se exclusivamente na transformação numérica em algébrica e no produto dos fatores literais considerados. A desconfiança dos estudantes “Ma”, “Ghi” e “Ru” é procedente porque a equação geral por eles determinada não é verdadeira.

Situação 6B – sujeitos: (Ma, Gui e Ru): os grupos recebem uma ficha de forma retangular (20 cm x 30 cm). Solicitei que determinassem uma maneira geral para calcular a área de qualquer ficha de forma retangular. “Ru”: *retângulo tem lados diferentes*. “Gui”: *como no retângulo os lados são diferentes, podemos chamar um de lado “x” e outro de lado “y”?* É o que o grupo quer? “Gui”: *como dois dos lados vão medir “x”, os outros dois lados vão medir “y”, multiplico eles assim: x . y, que depois dá 2.x.y.* “Ma”: *agora dá 2.x.y.* O que vocês acham? “Ru”: *bem antes era tudo número*. E agora? “Ru”: *agora tem as letras*. *Será que a resposta é 2.x.y?* [...] *Não.* Não? Como assim? ”Ru”: *não porque vai ficar igual ao resultado de antes.* Que resultado de antes? “Ru”: *ora o do perímetro.* E não pode? “Ma”: *perímetro é perímetro e área é área.* Como fica então? “Ma”: *acho que é de vezes, sim é 2.x.y*. “Ru”: *pode uma fórmula na* matemática ficar 2.x.y? “Ma”: *já não sei mais nada*. Pensem um pouco. Como foi mesmo que vocês encontraram a área quando usaram a régua? “Ma”: *na ficha quadrada?* Pode ser. “Ma”: *medimos um lado e multiplicamos por ele mesmo.* Por quê? “Ma”: *porque num quadrado se faz lado vezes lado, tipo era 10 x 10 = 100.* E agora? “Ma”: *então é para multiplicar o “x” com o “y”, mas foi o que fizemos antes!* Então onde está a dificuldade? Se munem de lápis e papel passando a registrar os cálculos na procura da solução. “Ma”: *se antes 10 x 10=100, e agora tem “x” no lugar do número e “y”, como fica então?* “Ru”: *é o retângulo têm dois lados “x” e dois lados “y”*. “Gui”: *é x.y ou é 2.x.y?* “Ma*”: não sei, mas é melhor deixar como está.* Como fica a fórmula para área de qualquer ficha de forma retangular? “Ma”: *a gente pensou em A = 2.x.y, A = área, x = lado menor e y = lado maior.* E assim neste dia também permanecem na dúvida.

Os estudantes desse relato da situação de aprendizagem 6B a todo instante levantaram hipóteses baseadas em aprendizagens anteriores envolvendo valores numéricos. Os valores numéricos eram rapidamente associados por duas variáveis algébricas “x” e “y”, pois, segundo eles, a situação exigia esse pensamento, porque uma ficha de forma retangular é composta por dois lados diferentes. Eles empreenderam um grande esforço para formalizar as ações verbais num registro gráfico que contemplasse a solicitação de determinar uma forma geral para o cálculo da área de qualquer figura retangular. Questionam a existência de duas possibilidades, como os sujeitos “Gui”: *é x.y ou é 2.x.y?,* [...] e “Ma”: *a gente pensou em x = lado menor e y = lado maior*. Como é possível saber as condições das relações estabelecidas, seja em grupo, seja de forma cognitiva individual, em cada um desses adolescentes numa 7ª série ou 8º ano?

O que pude perceber no acompanhamento das tentativas de resolução desta situação de aprendizagem 6B – é que o grupo tinha uma organização sistemática nos pensamentos e que esteve presente a necessidade de evocar estruturas preexistentes. Nas explicações verbais estão presentes deduções sobre um modelo numérico de cálculo de área de uma ficha de forma retangular, o qual permitiu registrar as relações em jogo mesmo que as leis envolvidas não tenham alcançado uma maneira formal correta para o cálculo geral de qualquer retângulo.

O grupo observado utilizou dois objetos simbólicos para designar um valor numérico desconhecido, registrado graficamente pelos fatores literais “x” e “y”, as mesmas que foram utilizadas para determinar um valor desconhecido no cálculo do perímetro das fichas de formas quadrangular e retangular. Os “fatores” das partes literais surgem nas expressões do perímetro da ficha de forma quadrangular, P = 4x (VERDADEIRO), e no perímetro da ficha de forma retangular, P = 2.x.y (NÃO VERDADEIRO), já não mais como valores desconhecidos, mas, sim, como variáveis. Todavia, no momento da representação gráfica das expressões das áreas das duas fichas as variáveis “x” e “y” continuam sendo valores desconhecidos, pois o conceito de área na situação algébrica é composto por propriedades que devem ser dominadas pelos estudantes. Até houve a retomada de procedimentos do cálculo de área por parte dos estudantes, mas esses foram limitados pelo não domínio dos saberes das propriedades algébricas da multiplicação de monômios.

Destaca Piaget:

> Esse tipo de comportamento experimental, dirigido por hipóteses que são baseadas em modelos causais mais ou menos refinados, implica a elaboração de duas novas estruturas que encontramos constantemente no pensamento formal. A primeira dessas estruturas é um sistema combinatório, [...] a pesquisa psicológica mostra que entre os 12 e os 15 anos o pré-adolescente e o adolescente começam a realizar operações envolvendo análise combinatória, sistemas de permutação, etc (independente de todo o treinamento escolar). (1972, p.7).

Mas de que forma as situações problema são compreendidas pelos estudantes-adolescentes na sala de aula? Quando se concebe um conceito composto de diversas propriedades, que, por sua vez, demandam experiência prévia de construção cognitiva, fica evidente que não pode ser explicado unicamente pela sua definição, a ser devidamente memorizada e aplicada a situações modelo.

Na expectativa de que no percurso do desenvolvimento das atividades haveria um domínio de conhecimentos, tomando como referência o saber matemático aritmético e geométrico no cálculo de área e perímetro de fichas com formas quadrangulares e retangulares, observei como os conceitos veiculados pelo conhecimento formal aritmético tornam-se (ou não) parte de um todo maior. Embora considerando que alguns conceitos nesta etapa, como perímetro e área, sejam necessários para a aprendizagem de elementos algébricos, verifiquei que as dificuldades quanto à interpretação simbólica não são superadas neste momento, tornando-se obstáculos para a compreensão algébrica.

Nunes (1997) comenta que cada conceito colocado em rede conceitual mais ampla passa a ser uma ferramenta para a compreensão de conceitos mais complexos. Nesta concepção, observando as situações propostas em sala de aula, para o adolescente iniciar-se no conhecimento algébrico utilizando um algoritmo foi preciso que levasse em consideração o cálculo de área e de perímetro. É possível que os procedimentos utilizados para a resolução das questões propostas tenham seguido uma das formas distintas: ou de forma automatizada, reprodutiva, ou de forma a considerar a compreensão de conceitos. Tenho de considerar que a segunda forma pode ser considerada um alicerce para a aprendizagem de novos conceitos ou de conceitos mais complexos.

Se pensarmos o conhecimento a partir da Epistemologia Genética, o estudante-adolescente deve ser entendido nas relações que estabelece como sujeito de conhecimento com o objeto de conhecimento, o que pode implicar agrupamentos ou grupos de operações. O desenvolvimento do ser humano ocorre à medida que passa por diversos níveis de construção. Os estágios dessa evolução encontram-se descritos nesta pesquisa no item intitulado 2.3.2, “Estágios de Desenvolvimento” (p.69) e destacam as características de desenvolvimento do recém-nascido ao adulto. Contudo, para o sujeito atingir na adolescência o que Piaget chama de “estádio das operações formais” não basta a idade cronológica (12-

13 anos). O desenvolvimento é produto de quatro fatores: maturação, experiência física e lógico-matemática, transmissão social e equilibração. Também é importante lembrar que o fato de operar formalmente sobre algum domínio de conhecimento não assegura que operará formalmente sobre outros domínios de conhecimento.

Piaget e Inhelder (1971a) acreditavam que as condutas poderiam ser interpretadas segundo dois aspectos: os procedimentos e as estruturas. Em posteriores estudos Piaget (1972) concluiu que existem outros fatores em jogo: os conteúdos e a significação que o sujeito adolescente elabora. Essa influência aconteceria tanto em relação ao caráter de novidade que os conteúdos representam para o adolescente quanto à complexidade da problemática proposta.

Piaget (1975) defende que a estrutura lógico-matemática que sustenta as condutas está presente desde as primeiras ações, mas sob diferentes configurações de uma organização prática.

Piaget e Inhelder (1976) defendem que o adolescente, na sua lógica, é capaz de realizar uma ação e de, no plano do pensamento, retornar à situação inicial. Essa nova estrutura é chamada de agrupamento, o qual dá origem às operações concretas. Porém, as dificuldades estruturais quanto à elaboração de hipóteses que transportam a situação real para um plano de pensamento dedutivo somente serão superadas com o surgimento das operações formais.

Para os autores, no estádio operatório-formal o aperfeiçoamento do agrupamento desdobra-se em uma estrutura lógica com diferentes formas de reversibilidade e organização das operações. As novas propriedades do Grupo INRC permitem que o pensamento alcance o plano hipotético-dedutivo; de forma teórica, permitem ao estudante-adolescente operar na formalidade e elaborar hipóteses que não estejam restritas às suas dimensões concretas, mas que atinjam suas formas mais gerais de tematização e formalização.

Apresento agora uma primeira interpretação dos dados da observação, de forma parcial, enfocando os indicadores de avanço na construção de conhecimento algébrico.

4.1.1 Interpretação dos dados observados em sala de aula

Parto do pressuposto de que os estudantes, tendo no currículo o conteúdo sobre área e perímetro como um dos itens estudados na 5ª e 6ª séries ou 6º e 7º ano, resolveriam as situações apresentadas de forma algébrica na 7ª série ou 8º ano. Assim, penso que o domínio das noções algébricas de perímetro e área das figuras geométricas, especificamente, das quadrangulares e retangulares, está interligado com um sistema complexo de relações. Logo, quando o estudante constrói novas noções, relacionando conteúdos previamente aprendidos, passa a estruturar totalidades operatórias de ordem mais elaborada.

Para concluir retomo alguns passos seguidos pelos estudantes adolescentes nas seis situações que lhes apresentei durante as aulas, reunindo-os em três grupos[21] ("O" = observação) conforme o êxito[22] nas situações de aprendizagem propostas:

4.1.1.1 GRUPO "O" 1 = ÊXITO PLENO

Os estudantes observados "Na", "Se" e "Pa", estão aqui relacionados por apresentarem o maior índice de êxitos nas situações de aprendizagem, argumentam verbalmente possibilidades **somente na linguagem algébrica** praticamente **sem registro gráfico**; avaliam o papel das fórmulas na situação de aprendizagem proposta; de forma organizada relacionam forma geral com fórmula, fórmula com variável literal, parte literal associada à parte numérica.

Nas situações-problema com relações algébricas, verbalmente partem da constatação da propriedade da igualdade dos lados nas fichas quadrangulares; associam aos lados diretamente uma única variável literal; efetuam o cálculo do perímetro pela operação de adição entre monômios semelhantes; relacionam as propriedades numéricas com as propriedades algébricas, mas, a partir de então, a unidade de medida de comprimento centímetro (cm) é desconsiderada.

---

[21] GRUPO – expressão estabelecida como ordem dos sujeitos quanto a seus êxitos.

[22] O critério **êxito**, na coleta de dados através do instrumento de observação, está relacionado com a capacidade de explorar as relações entre operações e propriedades aritméticas e geométricas como estruturas necessárias para a resolução de situações-problema no estudo da álgebra. Critério também relacionado com a capacidade de formular hipóteses a partir do cálculo de áreas e perímetros analisando figuras com formas quadrangulares e retangulares; da capacidade de generalizar os resultados obtidos na multiplicação de monômios; da compreensão final na operação de multiplicação entre monômios representando o expoente 1 na sua forma invisível.

Este grupo de estudantes argumenta sobre a diferença dos lados numa ficha de forma retangular e, de forma direta, a ela associa duas variáveis literais diferentes; efetua a adição entre os termos semelhantes, com a aplicação correta das propriedades formais das operações fundamentais do 2º grupo: associativas, multiplicativas e distributivas.

Entre os componentes “Na”, “Se” e “Pa” ocorrem muitas discussões, comparações e defesas de possibilidades no papel desempenhado pelas variáveis literais iguais (x+x ou x.x) e variáveis literais diferentes (x + y ou x.y), de acordo com a situação de aprendizagem proposta, isto é, a determinação do perímetro ou da área. Percebem-se muitos questionamentos e diferentes justificativas. Os estudantes **conseguem operar com valores ausentes**; registram os **modelos algébricos de forma correta**; relacionam as propriedades numéricas com as propriedades algébricas, mas, a partir de então, a unidade de medida de área (cm^2) é desconsiderada, tanto na expressão verbal como no registro gráfico. A atenção volta-se completamente para a composição de uma “fórmula geral” para a área de qualquer ficha de forma quadrangular e retangular.

Os estudantes adolescentes que compõem esse grupo “O” 1 = ÊXITO PLENO apresentam organização na forma de seus pensamentos, transferindo as noções de área e perímetro dos conhecimentos aritméticos para a construção algébrica. Os sujeitos parecem ter chegado a conceituação. O êxito sistemático pode ser considerado uma evidência da conceituação.

4.1.1.2 GRUPO “O” 2 = ÊXITO PARCIAL

Os estudantes “Ma”, “Gui” e “Ru” com êxitos parciais apresentaram a necessidade de **constante argumentação verbal** das possibilidades de resolução das situações de aprendizagem através da nomenclatura aritmética **com registro gráfico**; de várias maneiras procuram relacionar forma geral com fórmula, fórmula com variáveis numéricas e literais. Têm necessidade de estabelecer associação das situações propostas com uma situação real vivenciada anteriormente seja no ambiente escolar seja no ambiente particular.

Nas situações-problema com relações numéricas, partem da **manipulação física** para o registro gráfico das fichas de formas quadrangulares e retangulares. Os sujeitos “Ma”, “Gui” e “Ru” questionam, negam, retomam os registros e por decisão em grupo afirmam uma escolha. Registram as unidades de medida (cm) de largura e de comprimento durante o cálculo e no resultado do perímetro das fichas.

No momento da organização dos valores algébricos os estudantes “Ma”, “Gui” e “Ru” demonstram satisfação pela possibilidade de criação própria num universo “novo” que lhes é apresentado, de se tornarem peça participante da aprendizagem. **Conseguem operar com valores ausentes**; com muitas dúvidas efetuam o cálculo do perímetro das fichas de forma quadrangulares e retangulares pela operação de adição entre monômios semelhantes; procuram relacionar as propriedades numéricas com as propriedades algébricas, **mas nem sempre obtém sucesso**, a partir de então, a unidade de medida de comprimento centímetro (cm) é totalmente desconsiderada seja na expressão verbal seja no registro gráfico.

Quanto a determinação da área de forma geral para as fichas de forma quadrangulares e retangulares os estudantes “Ma”, “Gui” e “Ru” são unidos quando decidem associar os lados iguais à variável literal “x” e lados diferentes a duas variáveis literais “x” e “y”. Algumas vezes acertam; em outras, de forma errônea retomam a existência de uma possibilidade por eles proposta: *será x.y ou 2xy a forma geral de representar a área de um retângulo?*

Ocorre, por momentos, uma parada nas expressões orais, quando parece haver uma procura no pensamento de noções preexistentes como no caso do perímetro: *soma de 4 lados* ou *soma de largura e altura*; no caso da área: *lado vezes lado* ou *largura vezes altura*. Estão presentes **muitas dúvidas e incertezas** sobre as propriedades formais corretas das operações fundamentais do 2º grupo: associativas, multiplicativas e distributivas, a serem aplicadas no caso do cálculo com valores ausentes seja do perímetro ou seja da área das fichas propostas; e assim registram os **modelos algébricos de forma incorreta**.

Os estudantes adolescentes que compõem esse grupo “O” 2 = ÊXITO PARCIAL apresentam indícios de várias organizações na forma de seus pensamentos, com tentativas de transferência as noções de área e perímetro dos conhecimentos aritméticos para a construção algébrica. A trajetória desses estudantes demonstra a possibilidade de um pensamento abstrato, porque sintetiza caminhos da ação à conceituação.

4.1.1.3 GRUPO “O” 3 = POUCO ÊXITO

Nos estudantes “Bi”, “Da” e “An", observei poucos êxitos, levam mais tempo para manifestar algum caminho a seguir para a resolução das situações propostas com e sem possibilidade de utilização de material concreto. O conhecimento prévio é retomado após muita resistência individual. Os caminhos para resolução das situações-problema necessitam da comprovação concreta tanto visível como pelo registro gráfico, utilizando-se de meios material e físico. Primeiro, ocorre o registro gráfico; depois, procuram uma significação para a ação. Essa tentativa de significação é individual, geralmente não existe um consenso do grupo, isto é, há a escolha de uma possibilidade, mas não há certeza compreendida da escolha “correta”.

Os estudantes para a determinação do perímetro de fichas de forma quadrangular e retangular apresentam a necessidade de **constante registro gráfico**, partem da simultaneidade da **manipulação física,** das poucas possibilidades sugeridas de resolução das situações de aprendizagem através da nomenclatura aritmética. Mesmo estabelecendo associação das situações propostas com uma situação real vivenciada anteriormente seja no ambiente escolar seja no ambiente particular, registram sua **possibilidade numérica com muitas incertezas** das suas ações. Observo que a unidade de medida de comprimento centímetro (cm) é totalmente desconsiderada seja na expressão verbal seja no registro gráfico.

Os sujeitos “Bi”, “Da” e “An” no momento da organização dos valores algébricos se desorganizam, parecem desorientados, não conseguem se concentrar na situação de aprendizagem proposta do cálculo do perímetro das fichas de forma geral para qualquer forma quadrangular e retangular. Os estudantes desse grupo de observação **não conseguem operar com valores ausentes**; com muitas dúvidas **não efetivam um registro para a forma geral**. Ocorre atitude semelhante quanto a determinação da área de forma geral para as fichas de forma quadrangulares e retangulares, não conseguem admitir a existência de uma possibilidade algébrica para a solução do problema proposto.

Os estudantes adolescentes que compõem esse grupo “O” 3 = POUCO ÊXITO apresentam indícios de várias organizações na forma de seus pensamentos, com tentativas de resoluções de área e perímetro através dos seus conhecimentos aritméticos. A trajetória observada de resolução das situações de aprendizagem desses três estudantes sintetiza uma possibilidade de caminho para a ação.

Em síntese, nota-se que quando os sujeitos precisam pensar em um cálculo para quantificar valores algébricos há uma questão singular na relação parte/todo. Um valor algébrico, isto é, um monômio configura-se como a representação de uma parte de algo, logo, não basta ter conhecimento dos fatores numéricos e literais utilizados já que é preciso considerar a relação com a totalidade. Como o que se manipula no cálculo e na quantificação é a representação da parte, a dimensão do todo ao qual o monômio se refere, restringe-se ao plano do pensamento.

Para a compreensão da relação parte/todo é preciso que se realize uma operação lógico-matemática que Piaget e Szeminska (1971) chamam de conservação. Tal operação mental determina um grau de abstração e reversibilidade que exige um pensamento mais organizado, de maneira que não é possível alcançar a compreensão real de um perímetro ou de uma área somente através da memorização do procedimento do cálculo ou da simples ação física sobre de fichas de formas quadrangulares ou retangulares.

Assim, para a próxima etapa o instrumento elaborado teve como finalidade levantar dados sobre as noções que esses estudantes possuem na aplicação exclusiva das propriedades nas operações algébricas envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação de monômios.

4.2 APLICAÇÃO DA AVALIAÇÃO ESCRITA COM USO DE NOTAÇÃO SIMBÓLICA (AECNS)

O segundo momento do plano de coleta de dados desta pesquisa foi realizado pela aplicação de instrumento elaborado para todo o grupo de alunos, tendo como finalidade um levantamento da compreensão das noções sobre as operações algébricas envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação de monômios.

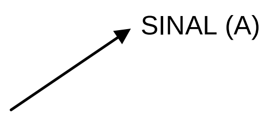
O instrumento foi aplicado durante uma das aulas de matemática no mês de maio de 2008 para todos os estudantes presentes: T71 = 26 estudantes, T72 = 25 estudantes e T73 = 26 estudantes, totalizando 77 alunos. O instrumento estruturado[23] é totalmente de notação convencional, de aplicação direta e exclusiva das propriedades e regras que compõem as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação entre monômios.

Meu interesse para esta pesquisa está centrado na quarta questão do instrumento, na qual os estudantes deveriam multiplicar os monômios aplicando as propriedades específicas estudadas em aulas durante e após as observações. A minha análise dos dados registrados no AECNS foi baseada nos conceitos fundamentais: operações concretas, operações formais, variável, número, equivalência, reversibilidade, agrupamento, conservação e estrutura.

As respostas dão indicativos sobre se os estudantes adolescentes resolvem as respectivas questões algébricas envolvendo monômios. Para melhor compreensão, os resultados de cada turma (T71, T72 e T73) foram quantificados em acertos e erros. A multiplicação de monômios foi separada em expoentes visíveis (1, 2, 3, 4) e expoente invisível (1). Esses expoentes foram subdivididos em situações ainda mais específicas, resultando, assim, em seis tabelas para uma melhor organização dos dados e, por consequência, para a compreensão dos avanços e recuos dos estudantes.

Para a informação, esclareço que tabulei os dados dos 77 estudantes que estavam presentes no dia da aplicação da av*aliação escrita com uso de notação simbólica convencional*, dados que constam nos apêndices deste trabalho. No primeiro momento, faço um levantamento dos resultados apresentados pelas turmas em tabelas. Num segundo momento, analiso três sujeitos de cada turma, escolhidos por apresentarem o maior número de evidências de compreensão, de aplicação, de relações e de possíveis representações sobre o estudo que me propus verificar, que é o da multiplicação de monômios, principalmente envolvendo o expoente 1 (um), que nomeei de “expoente invisível”.

Elaborei um esquema geral do monômio = coeficiente numérico + parte literal para a identificação geral de seus elementos, apresentado nas figuras 11, 12 e 13:



[23] Avaliação Escrita com Uso de Notação Simbólica – AECNS – organizado, pela autora, com questões algébricas de notação exclusivamente simbólica para verificar como os elementos das partes de monômios formam um todo na aplicação das propriedades – Apêndice 3.

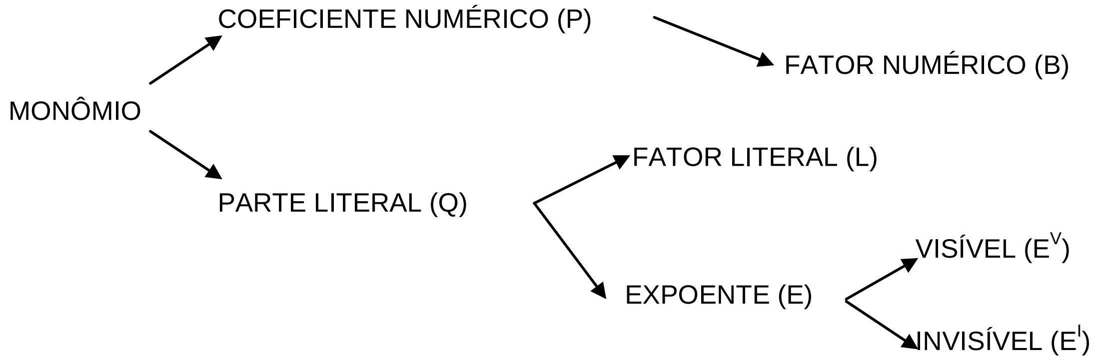


Figura 11 – Esquema geral do monômio (elaboração da autora)

O esquema do coeficiente numérico pode ser:

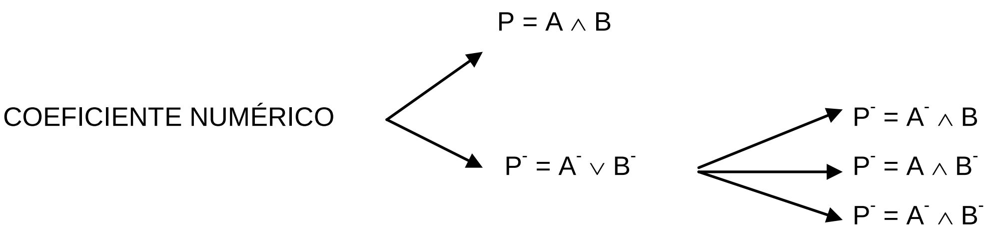


Figura 12 – Esquema geral do monômio = Coeficiente numérico (elaboração da autora)

Sendo **P** = coeficiente numérico, o resultado da **operação numérica** formado por: A = sinal (+ , -), $\wedge$ = e B = fatores numéricos.

Se **P = A $\wedge$ B** $\Rightarrow$ produto correto da **operação numérica**.

Se **P⁻** $\Rightarrow$ o produto da **não operação**, com as variações dadas por:

$P^- = A^- \vee B^-$ (não opera com os sinais ou não opera com os fatores numéricos).

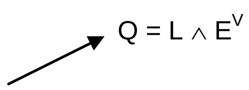
Sendo que **P^-** pode ser:

$P^- = A^- \wedge B$ (não opera com os sinais e opera com os fatores numéricos),

$P^- = A \wedge B^-$ (opera com os sinais e não opera com os fatores numéricos) ou

$P^- = A^- \wedge B^-$ (não opera com os sinais e não opera com os fatores numéricos).

O esquema da parte literal pode ser:



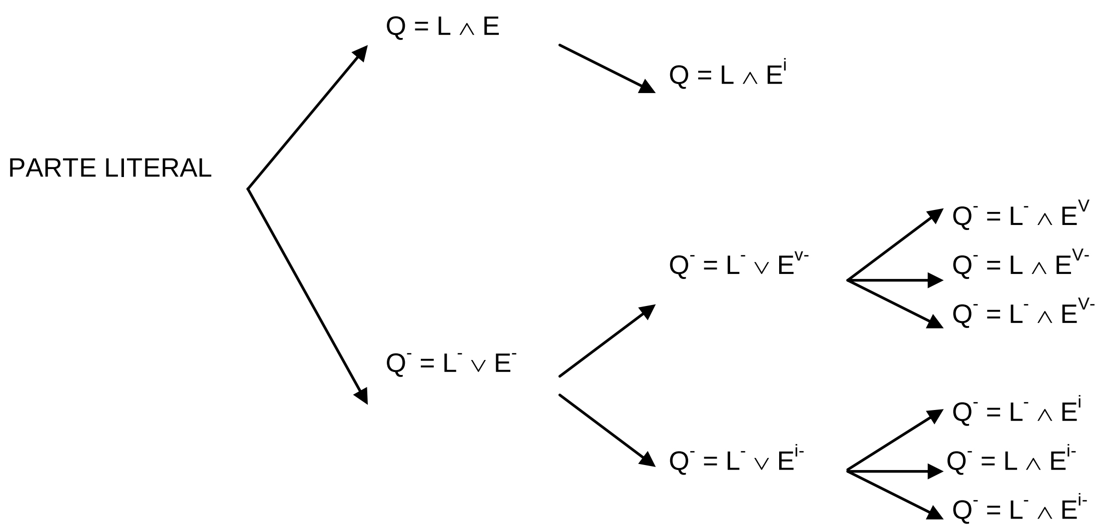


Figura 13 – Esquema geral do monômio = Parte literal (elaboração da autora)

Sendo **Q** = parte literal, o resultado da **operação algébrica** formada por: L = fatores literais, $\wedge$ = e, E = expoente(s), sendo E^{v} (expoente visível = expoentes 1, 2, 3 e 4) e E^{i} (expoente invisível = expoente 1).

Se $\mathbf{Q = L \wedge E} \Rightarrow$ produto correto da **operação algébrica**.

Sendo $\mathbf{Q = L \wedge E^{v}}$ (opera com os fatores literais e opera com os expoentes visíveis) ou $\mathbf{Q = L \wedge E^{i}}$ (opera com os fatores literais e opera com o expoente invisível = 1).

Se $\mathbf{Q^{-}} \Rightarrow$ o resultado da **não operação**, com as variações dadas por:

$\mathbf{Q^{-} = L^{-} \vee E^{-}}$ (não opera com os fatores literais ou não opera com os expoentes).

Sendo E^{v} (**expoente visível = 1**, **2**, **3**, **4**), logo:

$\mathbf{Q^{-} = L^{-} \wedge E^{V}}$ (não opera com os fatores literais e opera com os expoentes visíveis);

$\mathbf{Q^{-} = L \wedge E^{V-}}$ (opera com os fatores literais e não opera com os expoentes visíveis);

$\mathbf{Q^{-} = L^{-} \wedge E^{V-}}$ (não opera com os fatores literais e não opera com os expoentes visíveis).

Sendo E^{i} (**expoente invisível = 1**), logo:

$\mathbf{Q^{-} = L^{-} \wedge E^{i}}$ (não opera com os fatores literais e opera com os expoentes invisíveis);

$\mathbf{Q^- = L \wedge E^{i-}}$ (opera com os fatores literais e não opera com os expoentes invisíveis);

$\mathbf{Q^- = L^- \wedge E^{i-}}$ (não opera com os fatores literais e não opera com os expoentes invisíveis).

Com base no referencial estabelecido nas páginas anteriores sobre os elementos numéricos e algébricos para os símbolos literais, passo para a análise das respostas registradas pelos estudantes na *Avaliação Escrita Com Uso de Notação Simbólica* aplicada. Essas informações foram organizadas em seis tabelas por turma (encontram-se nos Apêndices), sendo identificadas por:

TABELA 1 = geral com todas operações;

TABELA 2 = multiplicação de monômios;

TABELA 3 = multiplicação de monômios – expoente visível;

TABELA 4 = expoente visível – combinações;

TABELA 5 = multiplicação de monômios – expoente invisível;

TABELA 6 = expoente invisível – combinações.

A TABELA 1[24] apresenta os êxitos dos estudantes das três turmas, separados em "acertos" e "erros" dos estudantes diante das ordens de reconhecimento do coeficiente numérico e da parte literal que compõe um monômio, assim como da identificação de monômios semelhantes. Na sequência do instrumento consta a verificação se os estudantes efetuam a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão e a potenciação de monômios.

Analisando os acertos dos estudantes que souberam efetuar a multiplicação entre monômios, na T71 foram 16 de 26 estudantes, equivalendo a 61,5% da turma; na T72, foram 11 acertos em 25 estudantes, equivalendo a 44% da turma, e, na T73, 11 de 26 estudantes, equivalendo a 42% da turma. Efetuando uma média aritmética entre as três turmas, verifico que apenas 49,2% dos estudantes conseguiram efetuar as multiplicações entre os monômios de forma correta. Essa forma correta exige o conhecimento de várias habilidades, como a multiplicação entre os fatores numéricos, a aplicação da regra da multiplicação dos sinais, as propriedades da

[24] TABELA 1 – Geral com todas as operações. – Apêndices: 5 (T71), 11(T72) e 17(T73).

multiplicação entre fatores literais semelhantes e diferentes (refiro-me à parte literal) e as propriedades específicas que envolvem os expoentes.

As seis tabelas completas iniciais organizadas por turma que estão nos *Apêndices* sofreram recortes. Nesse segundo momento passo a analisar, através dos recortes, os resultados escritos por nove estudantes de cada turma, organizados em grupos de três adolescentes, a partir dos êxitos nas atividades propostas. Como ocorreu a escolha desses sujeitos? Pela análise dos resultados no instrumento aplicado. Organizei um indicador de vestígios de crescimento na construção do conhecimento algébrico, aqui, especificamente, nas ações individuais, por convenção usei:

GRUPO 1 = ÊXITO PLENO em todas as atividades propostas;

GRUPO 2 = ÊXITO PARCIAL nas atividades propostas;

GRUPO 3 = POUCO ÊXITO nas atividades propostas.

Os símbolos são: caracteres, para destacar o produto da multiplicação entre monômios; ▓, para indicar os resultados dos sujeitos do grupo 1; ●, para indicar os resultados dos sujeitos do grupo 2; ▲, para indicar os resultados dos sujeitos do grupo 3.

Tabela 7 - Recorte das Tabelas 1 – T71, T72 e T73 – Geral com todas operações - agrupamento pelo êxito em GRUPO 1, GRUPO 2 e GRUPO 3

Nº/NOME **RECORTE TABELA 1**	Reconhece coeficiente numérico		Diferencia a parte literal		Identifica seme lhança de monômios		Efetua Adições		Efetua Subtra ções		Efetua Multipli Cações		Efetua Divisões		Efetua Poten ciações	
DATA: 09/05	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO
GRUPO 1																

T71																
1 – Pe	X		X		X		X		X		▓		X		X	
2 – Mn	X		X		X		X			X	▓		X		X	
3 – To	X		X			X	X		X		▓		X		X	
T72																
1 – Na	X		X		X		X			X		▓		X		X
2 – Se	X		X		X		X		X		▓		X		X	
3 – Pa	X		X		X		X			X	▓		X			X
T73																
1 – Ma	X		X		X		X		X		▓		X		X	
2 – Gui	X		X		X		X			X	▓		X		X	
3 – Ru	X		X		X		X		X			▓	X		X	
GRUPO 2																
T71																
1 – An	X		X			X	X			X		•		X	X	
2 – Da	X		X		X		X			X		•		X		X
3 – Bi	X		X		X		X			X		•	X			X
T72																
1 – We		X	X			X		X		X		•		X		X
2 – Dy	X		X		X		X			X		•	X		X	
3 – Po	X		X			X	X		X		•			X		X
T73																
1 – VanD	X		X		X		X			X	•			X		X
2 – Ci	X		X		X		X			X		•		X		X
3 – Ju	X		X			X	X			X		•		X		X
GRUPO 3																
T71																
1 – Ale	X		X			X		X		X		▲		X		X
2 – Fe		X	X			X	X			X		▲		X		X
3 – Vi	X		X			X	X			X		▲		X		X
T72																
1 – Ro	X		X		X		X			X		▲		X		X
2 - Fa		X	X			X	X			X		▲		X		X
3 - Ne		X		X		X		X		X		▲		X		X
T73																
1 – Us		X		X		X		X		X		▲		X		X
2 – Ad	X		X		X			X		X		▲		X		X
3 - Je	X		X		X		X			X		▲		X		X

OBS.: As Tabelas 1 completas encontram-se nos Apêndices 5, 11 e 17.

Dos nove estudantes formadores do GRUPO 1, sete consideraram de forma correta a reunião das partes que compõem o “todo” de um produto entre dois monômios. Do ponto de vista matemático, verifica-se maior número de acertos nos aspectos uso correto da regra dos sinais da multiplicação (conteúdo estudado na série anterior), efetuação correta da multiplicação entre os fatores numéricos (conteúdo estudado nas séries do currículo por atividades), aplicação correta das propriedades convencionais do produto entre a parte literal e da adição dos expoentes presentes nas operações de multiplicação no cálculo algébrico (conteúdos estudados na série em que estão).

Do ponto de vista da psicologia piagetiana, segundo Battro (1978), “[...] o critério psicológico da constituição de um ‘agrupamento’ é a descoberta da conservação das totalidades, independentemente do arranjo das partes.” Apresentei aos estudantes uma série de situações algébricas em que eles deveriam, individualmente, restabelecer e aplicar as regras e as propriedades dos trabalhos anteriormente demonstrados nas *situações de aprendizagem* propostas para a coleta de dados através do instrumento de observação. Posso afirmar que nos estudantes do GRUPO 1 encontrei avanços em direção à "conservação do todo" sobre uma composição de partes. Na medida que o próprio das operações "[...] é precisamente assegurar a livre mobilidade das partes no seio de um todo que se conserva necessariamente como reunião (real ou virtual) de seus elementos." (BATTRO, p.63)

Segundo Piaget, a generalização por composição operatória ou construtiva, "ao ultrapassar o real por intermédio da reversibilidade, atinge o possível e devido a isto atribui às relações reais, isto é, às leis dadas, um caráter de necessidade." (Battro, 1978) Como afirma o autor, a partir da generalização operatória o sujeito utiliza elementos já considerados por um primeiro sistema para construir, por meio de novas composições, um segundo sistema, que passa a ter maior número de relações. Logo, excede ao primeiro e o compreende.

No caso da multiplicação de monômios, a lei geral da multiplicação entre monômios é uma explicação na medida em que aparece como necessária e constante entre duplas variáveis numéricas e literais para a resolução das *situações de aprendizagem* propostas tanto para o grupo de estudantes adolescentes no cálculo das áreas das fichas de forma quadrangulares como nas situações individuais propostas pela *Avaliação Escrita Com Uso de Notação Simbólica* (AECNS). A relação entre duplas variáveis se faz constante e necessária pois nas diversas variações propostas nos dois instrumentos de coleta de dados estão envolvidas conservações em diferentes dimensões. Conservações registradas partindo de condutas observadas nos diferentes modelos de significação considerando organizações entre aritmética, geometria e álgebra na mobilidade das *situações de aprendizagem* frente às dificuldades impostas pela novidade e complexidade do problema da multiplicação entre monômios, na capacidade de adaptar tal conservação na estrutura particular em que o sujeito foi capaz de resolver situações estritamente algébricas.

É possível considerar que os sete dos nove estudantes no GRUPO 1 (AECNS) generalizaram, no sentido piagetiano, os conhecimentos relativos à multiplicação de monômios? Eles demonstraram através do registro gráfico o domínio das regras relativas à multiplicação de monômios. Nos sujeitos para a compreensão da relação parte/todo é preciso que se realize uma operação lógico-matemática chamada de conservação. Tal operação exige um pensamento organizado através da manipulação biunívoca do cálculo considerando relações entre dimensões aritméticas (sinais e números) e algébricas (fatores literais e expoentes). Essa dimensão somente é alcançada quando o sujeito constrói a relação entre a parte e o todo, logo dos sete sujeitos participantes do (AECNS) constato que "Se" e "Pa" continuaram alcançando êxito nos seus resultados, mas o sujeito "Na" não demonstrou o mesmo êxito. Assim, não posso afirmar que todos os estudantes do GRUPO 1, compreenderam os conceitos envolvidos.

Os estudantes do GRUPO 2 me surpreenderam com os resultados negativos apresentados no instrumento formal (AECNS), visto que somente dois dos nove resolveram as questões de forma adequada. Não souberam estabelecer as regras de procedimento que já haviam experenciado nas aulas anteriores de forma prática e concreta com as fichas de formas quadrangulares e retangulares. Pelos registros do GRUPO 2 constato uma inconstância na conservação dos invariantes (regra de sinais e multiplicação entre fatores numéricos), assim como, não constituem uma reflexão individual retroativa das ações anteriores, dificultando a compreensão dos esquemas algébricos.

Piaget contribuiu para a compreensão da matemática ao afirmar que "[...] as matemáticas não aparecem de um dia para o outro, mas sem cessar se constroem por ações do sujeito" (1977a). A citação enfatiza que o estudante, ao coordenar ações, atinge um nível superior de pensamento no qual pode raciocinar sobre hipóteses tanto quanto sobre objetos, o que o autor chamou de "nível das operações formais". Se é sob múltiplas coordenações que os estudantes passam do nível das ações para o da construção dos conceitos, é notável o baixo desempenho dos estudantes do GRUPO 2 nas atividades específicas da multiplicação de monômios. Por que não consideraram as práticas desenvolvidas nas *situações de aprendizagem* baseados na pesquisa anteriormente.

A partir da AECNS o produto assume o papel de índice cálculo, em lugar da percepção. Até então, o sujeito acreditava na relação entre os lados de fichas de formas quadrangulares e retangulares como uma justificativa. Agora, passa a uma relação que não é direta, que deve haver também uma inferência, casos de conservação em que as inferências para o cálculo das áreas são algoritmos que o ajudam a resolver casos específicos na multiplicação de monômios, ainda que o sujeito não generalize e compreenda todos os possíveis. O fato dos sujeitos do GRUPO 2 não verificarem nos monômios suas inferências anteriores abre a possibilidade da procura por novas explicações.

No GRUPO 3 não houve sequer um registro de acerto. Os sujeitos não conseguiram estabelecer uma relação entre as propriedades numéricas e as algébricas. Mesmo que estas propriedades das operações multiplicação e potenciação não são de uso exclusivo da notação e da convenção algébrica. Se em álgebra o foco é relacionar e manipular concomitantemente duas propriedades, os estudantes deste grupo que já tinham expressado corretamente várias abordagens nas *situações de aprendizagem* desenvolvidas na sala de aula em momentos anteriores não obtiveram o mesmo êxito neste instrumento.

Para Piaget,

> [...] o pensamento formal é obrigado a dispor, em cada situação específica, de uma grande amplitude de operações virtuais que ultrapassam o domínio das operações momentaneamente utilizadas de fato, [...] há equilíbrio na medida em que essas transformações virtuais "se compensam" exatamente, ou, na linguagem das operações, na medida em que tais operações possíveis constituem um sistema reversível do ponto de vista lógico. (1976, p.193)

Os estudantes, na presença favorável de situações-problema apresentadas na *Avaliação Escrita Com Uso de Notação Simbólica* - (AECNS), teriam uma condição de identificar as relações entre os elementos já empregados em momentos anteriores e os elementos dados nas situações de multiplicação de monômios. Contudo, desde o início da AECNS não conseguiram englobar as relações práticas-reais no conjunto dos possíveis. Essa atitude pode ser considerada uma condição de não equilíbrio do pensamento desses adolescentes do GRUPO 3.

As dificuldades desdobram-se às resistências do conteúdo envolvido, dando margem a um conjunto de constatações aparentes de que no momento em que o sujeito não conserva propriedades que podiam ser destacadas através de elementos observáveis como no caso da área de fichas quadrangulares e retangulares. Assim, os sujeitos do GRUPO 3 não têm como interpretar as partes do monômio para uma inferência correta, porque não possuem coordenações suficientes para elaborar uma significação mais complexa, aqui especificamente na linguagem algébrica.

A TABELA 2[25], mantém nos grupos os mesmos estudantes da TABELA 1, registra uma análise somente dos “acertos” e “erros” da quarta questão da avaliação escrita (AECNS), isto é, da operação de multiplicação entre os monômios. Os monômios foram divididos pelos seus expoentes na forma visível (1, 2, 3, 4) e na forma invisível (1). O expoente 1 (um) foi também registrado para verificarmos como os estudantes operariam com ele na forma visível e na forma didática (como é apresentado nos livros) invisível. E nessa partição dos monômios o coeficiente numérico passa a ser subdividido em sinal + fator(es) numérico(s), e a parte literal, em fatores literais + expoente(s).

Na *Avaliação Escrita Com Uso de Notação Simbólica* aplicada nas turmas, a quarta questão, que é a multiplicação entre monômios, assim se encontra estruturada:

Efetuar as multiplicações:

A) $(6x^2) . (5x^3) =$

B) $(-8a^4b) . (2a^3b^1) =$

C) $(7x\,y^3) . (4x^2y\,m^2) =$

Classifiquei para **expoente visível** os fatores literais que estão negritados:

A) $(6\mathbf{x^2}) . (5\mathbf{x^3}) = +\,30\mathbf{x^5}$

B) $(-8\mathbf{a^4}b) . (2\mathbf{a^3}b^1) = -\,16\,\mathbf{a^7}b^2$

C) $(7x\,y^3) . (4x^2y\,\mathbf{m^2}) = +\,28x^3y^4\mathbf{m^2}$

E classifiquei para **expoente invisível** os fatores literais abaixo negritados:

A) $(6x^2) . (5x^3) = +\,30x^5$

B) $(-8a^4\mathbf{b}) . (2a^3b^1) = -\,16\,a^7\mathbf{b^2}$

C) $(7\mathbf{x}\,y^3) . (4x^2\mathbf{y}\,m^2) = +\,28\mathbf{x^3y^4}m^2$

Fazendo uma análise dos produtos registrados nas TABELAS 2 quanto ao percentual de acertos apresentados pelas três turmas, levando em consideração os dados referentes ao coeficiente numérico, temos: T71: sinal = 54% e fatores numéricos = 88%, T72: sinal = 64% e fatores numéricos = 80%, T73: sinal = 54% e

[25] TABELA 2 – Multiplicação de monômios. – Apêndices: 6 (T71), 12 (T72) e 18 (T73).

fatores numéricos = 88,5%. A análise dos registros dos adolescentes revela que estão desconsiderando o aspecto multiplicativo das questões propostas quanto à regra dos sinais, com uma média de apenas 57% de acertos. Retomando os instrumentos aplicados, verifico o maior número de “erros” na multiplicação entre (-8) e (2), onde o sinal negativo é desconsiderado, ao passo que na multiplicação dos fatores numéricos (6).(5), (8).(2) e (7).(4) os estudantes apresentaram uma média de 87% de resultados corretos.

Continuando a análise das TABELAS 2, os estudantes, ao terem seus produtos classificados separadamente na parte literal em fatores literais e **expoentes visíveis** (1, 2, 3 e 4), apresentaram os seguintes índices de êxitos: T71: fatores literais = 85% e expoentes = 65%, T72: fatores literais = 84% e expoentes = 80%, T73: fatores literais = 92% e expoentes = 88,5%. A aplicação da regra da multiplicação entre partes literais semelhantes e diferentes ficou na média de 87% e, na aplicação da propriedade com expoentes visíveis, em 78% de êxitos. Já os produtos registrados pelos estudantes para a parte literal e **expoente um (1) na forma invisível** apresentaram os índices: T71: fatores literais = 100% e expoentes = 38,5%, T72: fatores literais = 84% e expoentes = 52%, T73: fatores literais = 92% e expoentes = 50% de êxitos. A aplicação da regra da multiplicação entre partes literais semelhantes e diferentes ficou na média de 92% e, na aplicação da propriedade com o expoente 1 – na forma invisível, a média baixou para 47% de êxitos. Aqui tenho a constatação de que ainda não haviam apreendido o significado de uma quantidade oculta (ou de uma variável oculta). As respostas indicam que os estudantes ainda não estão conseguindo resolver situações-problema em que estejam introduzidas duas grandes partes incógnitas (coeficiente numérico e parte literal) com um contexto de natureza puramente multiplicativa algébrica, envolvendo o expoente 1 na sua forma invisível.

Para dar continuidade, considerarei agora a análise dos dados sobre um recorte das TABELAS 2 das três turmas envolvidas nesta pesquisa, de modo que nove estudantes passam a ser reunidos pela semelhança de características em GRUPO 1, GRUPO 2 e GRUPO 3, mantém nos grupos os mesmos estudantes da TABELA 1. Esta tabela apresenta informações mais detalhadas dos resultados das multiplicações em expoente visível e expoente invisível, divididos em coeficiente numérico e este subdividido em sinal + fatores numéricos, e a parte literal subdividida em fatores literais + expoente(s). Esse esquema passo a ver como um destaque necessário à compreensão dos possíveis sistemas combinatórios utilizados pelos adolescentes para o encontro de indicadores da construção de conhecimentos algébricos nos estudantes da 7ª série ou 8º ano.

Para a compreensão do leitor, as próximas tabelas, que apresentam dados somente da multiplicação entre monômios.

Tabela 8 - Recorte das Tabelas 2 – T 71, T72 e T73 – Multiplicação de monômios - agrupamento pelo êxito em GRUPO 1, GRUPO 2 e GRUPO 3

N^O/NOME	**EXPOENTE VISÍVEL**								**EXPOENTE INVISÍVEL**							
RECORTE TABELA 2	Coeficiente Numérico				Parte Literal				Coeficiente Numérico				Parte Literal			
DATA: 09/05	Sinal		Fator Numérico		Fator literal		Expoente		Sinal		Fator númerico		Fator literal		Expoente	
	C	E	C	E	C	E	C	E	C	E	C	E	C	E	C	E
GRUPO 1																
T71																
1 - Pe	**X**		**X**		**X**		**X**		**X**		**X**		**X**		**X**	
2 - Mn	**X**		**X**		**X**		**X**		**X**		**X**		**X**			**X**
3 – To	**X**		**X**		**X**		**X**		**X**		**X**		**X**			**X**
T72																

1 – Na	X		X			X		X	X		X		X			X
2 - Se	X		X		X		X		X		X		X		X	
3 - Pa	X		X		X		X		X		X		X		X	
T73																
1 - Ma	X		X		X		X		X		X		X		X	
2 - Gui	X		X		X		X		X		X		X		X	
3 - Ru	X		X		X		X		X		X		X			X
GRUPO 2																
T71																
1 – An	X		X		X			X	X		X		X			X
2 - Da		X	X		X			X		X	X		X			X
3 - Bi		X	X		X		X			X	X		X		X	
T72																
1 - We	X		X		X			X	X		X		X			X
2 - Dy	X		X		X		X		X		X		X			X
3 - Po	X		X		X		X		X		X		X		X	
T73																
1 - VanD	X		X		X		X		X		X		X			X
2 - Ci		X	X			X	X			X	X		X			X
3 - Ju		X	X		X		X			X	X		X			X
GRUPO 3																
T71																
1 – Ale		X		X	X			X		X		X	X			X
2 - Fe		X	X		X		X			X	X		X			X
3 – Vi		X	X		X			X		X	X		X			X
T72																
1 - Ro		X	X		X		X			X	X		X			X
2 - Fa	X		X		X		X		X		X			X		X
3 - Ne		X		X	X		X			X		X	X			X
T73																
1 – Us		X		X	X		X			X		X	X			X
2 – Ad		X	X		X		X			X	X			X		X
3 - Je	X		X		X		X		X		X		X			X

OBS.: As Tabelas 2 completas encontram-se nos Apêndices 6, 12 e 18.

Dentre os nove estudantes do GRUPO 1, voltando o olhar para os **expoentes visíveis**, apenas o sujeito “Na” deixou de registrar na questão C $(7x\ y^3)\ .\ (4x^2y\ \mathbf{m^2})$ o fator literal “$\mathbf{m^2}$”; os demais estudantes deste grupo registraram corretamente os produtos das três situações da questão número 4 da avaliação aplicada – AECNS. Quanto ao expoente 1 – na forma invisível, os estudantes “Mn”, “To”, “Na” e “Ru” deixaram de efetuar corretamente a multiplicação da parte literal, expresso no registro incorreto dos expoentes (maior detalhamento nos próximos recortes das tabelas 5 e 6).

Já no GRUPO 2, os sujeitos “Da”, “Bi”, “Ci” e “Ju” desconsideraram o sinal negativo na questão B $(-8\mathbf{a^4}b\ )\ .\ (2\mathbf{a^3}b^1) = 16\ \mathbf{a^7}b^2$. O não registro do sinal negativo conduz ao erro desta multiplicação tanto para o expoente visível como para o expoente invisível (1). Em contrapartida, todos os estudantes deste grupo efetuaram a multiplicação correta entre os fatores numéricos apresentados: (6).(5), (8).(2) e (7).(4).

Na continuação com o GRUPO 2, analisando somente o **expoente visível,** o estudante “Ci”, na questão A $(6\mathbf{x^2})\ .\ (5\mathbf{x^3}) = 30^5$, não registrou o fator literal “x” da parte literal; por sua vez, os estudantes “An", “Da” e “We”, na questão A (6$\mathbf{x^2}$) . (5$\mathbf{x^3}$), registraram o produto da multiplicação de forma incorreta, escrevendo o valor 6 ao invés do 5 como expoente para a parte literal = 30x^6. Quanto ao expoente 1 – na forma invisível, sete dos nove estudantes não registraram corretamente os produtos; em compensação, excluindo o sujeito “Ci”, os demais oito sujeitos registraram todos os fatores literais (a, x, y) que compõem as partes literais corretamente. Maiores detalhamentos nas apresentações dos recortes das tabelas 5 e 6.

Em relação ao GRUPO 3, sete dos nove estudantes deste grupo não registraram o sinal negativo na questão B (-8$\mathbf{a^4}$b) . (2$\mathbf{a^3}$$b^1$), assim influenciando tanto na categorização dos expoentes visíveis como nos invisíveis. Os estudantes “Ale”, “Ne” e “Us” registraram de forma incorreta a multiplicação entre os fatores numéricos (6).(5) ou (7).(4), outro aspecto que se reflete na incorreção dos expoentes visíveis como para o expoente 1 – na forma invisível. Entre os nove estudantes deste GRUPO 3, somente os sujeitos “Ale” e “Vi”, da T71, cometeram “erros” com os expoentes visíveis 1, 2, 3 e 4. Quanto aos expoentes invisíveis, nenhum dos nove estudantes deste grupo os registrou de forma correta. Maiores interpretações na apresentação dos recortes das tabelas 5 e 6.

A TABELA 3[26] registra uma interpretação somente dos **expoentes visíveis** (1, 2, 3 e 4), levando em consideração as subdivisões do coeficiente numérico e da parte literal da multiplicação entre os monômios. Seguindo a convenção previamente estabelecida:

P = opera com o coeficiente numérico (C.N.) ⇒ (sinal **e** fator numérico);

$\mathbf{P^-}$ = não opera com o coeficiente numérico (C.N.) ⇒ (sinal **ou** fator numérico);

Q = opera com a parte literal (P.L.) ⇒ (fatores literais **e** expoentes);

$\mathbf{Q^-}$ = não opera com a parte literal (P.L.) ⇒ (fatores literais **ou** expoentes).

Relembrando que na classificação para **expoente visível** os fatores literais considerados nos monômios são os que estão negritados:

A) $(6\mathbf{x^2}) . (5\mathbf{x^3}) = + 30\mathbf{x^5}$

B) $(-8\mathbf{a^4}b) . (2\mathbf{a^3}b^1) = - 16\, \mathbf{a^7}b^2$

C) $(7x\, y^3) . (4x^2y\, \mathbf{m^2}) = + 28x^3y^4\mathbf{m^2}$

---

[26] TABELA 3 – Multiplicação de monômios – expoente visível. – Apêndices: 7 (T71), 13 (T72) e 19 (T73).

Transformando em percentuais os registros das TABELAS 3, os estudantes da T71: operam com coeficientes numéricos = 46% e com a parte literal (expoentes visíveis) = 65%, os adolescentes da T72: operam com coeficientes numéricos = 60% e com a parte literal (expoentes visíveis) = 76% e os sujeitos da T73: operam com coeficiente numérico = 50% e com a parte literal (expoentes visíveis) = 85%. A média entre as três turmas está para os que operam com coeficientes numéricos em 52% e os que operam com a parte literal com expoentes visíveis em 75%.

Os dados mostram que os estudantes operam melhor com a parte literal do que com o coeficiente numérico quando os expoentes da parte literal são visíveis. Poder-se-ia interpretar que os sujeitos estavam considerando convenções notacionais, pois os fatores literais “x” e “y” são as primeiras letras e as mais utilizadas no contexto algébrico envolvendo multiplicação e adição. As respostas corretas sugerem que o conceito de multiplicação entre variáveis semelhantes parece criar nos estudantes um esquema mental que os leva a perceber a natureza aditiva do problema envolvendo a adição dos expoentes visíveis.

Agora trago o recorte da TABELA 3 das três turmas envolvidas na pesquisa, mantém nos grupos os mesmos estudantes da TABELA 1. Esta tabela apresenta informações dos nove estudantes de cada turma, especificamente sobre os registros focando os **expoentes visíveis**.

Tabela 9 - Recorte das Tabelas 3 – T 71, T72 e T73 – Multiplicação de monômios – **expoente visível** - agrupamento pelo êxito em GRUPO 1, GRUPO 2 e GRUPO 3

N^{O}/NOME **RECORTE TABELA 3**	**EXPONTE VISÍVEL**								**INTERPRETAÇÃO**			
	Coeficiente Numérico				Parte Literal							
DATA: 09/05	Sinal		Fator numérico		Fator literal		Expoentes		**P** opera com C. N.	**P$^-$** não opera com C.N.	**Q** opera com P. L.	**Q$^-$** não opera com P. L.
	C	E	C	E	C	E	C	E				
GRUPO 1												
T71												
1 - Pe	X		X		X		X		X		X	
2 - Mn	X		X		X		X		X		X	
3 – To	X		X		X		X		X		X	
T72												

1 – Na	X		X			X		X	X			X
2 - Se	X		X		X		X		X		X	
3 - Pa	X		X		X		X		X		X	
T73												
1 - Ma	X		X		X		X		X		X	
2 - Gui	X		X		X		X		X		X	
3 - Ru	X		X		X		X		X		X	
GRUPO 2												
T71												
1 – An	X		X		X			X	X			X
2 - Da		X	X		X			X				X
3 - Bi		X	X		X		X			X	X	
T72										X		
1 - We	X		X		X			X	X			
2 - Dy	X		X		X		X		X			X
3 - Po	X		X		X		X		X			X
T73												
1 - VanD	X		X		X		X		X			X
2 - Ci		X	X			X	X				X	
3 - Ju		X	X		X		X				X	X
GRUPO 3												
T71												
1 – Ale		X		X	X			X			X	
2 - Fe		X	X		X		X				X	X
3 – Vi		X	X		X			X			X	
T72												
1 - Ro		X	X		X		X				X	X
2 - Fa	X		X		X		X		X			X
3 - Ne		X		X	X		X				X	X
T73												
1 – Us		X		X	X		X				X	X
2 – Ad		X	X		X		X				X	X
3 - Je	X		X		X		X		X			X

OBS.: As Tabelas 3 completas encontram-se nos Apêndices 7, 13 e 19.

A Tabela 9 sofre desdobramentos na Tabela 10 com os dados do GRUPO 1, na Tabela 11 com os dados do GRUPO 2 e na Tabela 12 com os dados do GRUPO 3.

Tabela 10 – Desdobramento do recorte das Tabelas 3: levantamento do coeficiente numérico e da parte literal – GRUPO 1

GRUPO 1	**C.N. (A)**	**C.N. (B)**	**C.N. (C)**	**P.L. (A)**	**P.L. (B)**	**P.L. (C)**
T71						
1 - Pe	+ 30	- 16	+ 28	$\mathbf{x^5}$	$\mathbf{a^7}$	$\mathbf{m^2}$
2 - Mn	+ 30	- 16	+ 28	$\mathbf{x^5}$	$\mathbf{a^7}$	$\mathbf{m^2}$
3 – To	+ 30	- 16	+ 28	$\mathbf{x^5}$	$\mathbf{a^7}$	$\mathbf{m^2}$
T72						
1 – Na	+ 30	- 16	+ 28	$\mathbf{x^6}$	$\mathbf{a^7}$	
2 - Se	+ 30	- 16	+ 28	$\mathbf{x^5}$	$\mathbf{a^7}$	$\mathbf{m^2}$
3 - Pa	+ 30	- 16	+ 28	$\mathbf{x^5}$	$\mathbf{a^7}$	$\mathbf{m^2}$
T73						
1 - Ma	+ 30	- 16	+ 28	$\mathbf{x^5}$	$\mathbf{a^7}$	$\mathbf{m^2}$
2 - Gui	+ 30	- 16	+ 28	$\mathbf{x^5}$	$\mathbf{a^7}$	$\mathbf{m^2}$
3 - Ru	+ 30	- 16	+ 28	$\mathbf{x^5}$	$\mathbf{a^7}$	$\mathbf{m^2}$

Os nove estudantes adolescentes que compõem o GRUPO1 das três turmas souberam operar de forma correta os coeficientes numéricos (C.N.), tanto a regra dos sinais como a multiplicação dos fatores numéricos.

No registro da parte literal (P.L.), o sujeito “Na”, da T72, foi o único componente do GRUPO 1 que cometeu um “erro” no expoente visível das questões A – ele multiplicou os expoentes ao invés de adicioná-los e, em C, não registrou o fator literal “m^2”, como podemos conferir no quadro acima.

Tabela 11 – Desdobramento do recorte das Tabelas 3: levantamento do coeficiente numérico e da parte literal – GRUPO 2

GRUPO 2	**C.N. (A)**	**C.N. (B)**	**C.N. (C)**	**P.L. (A)**	**P.L. (B)**	**P.L. (C)**
T71						
1 – An	30	-16	28	x^6	a^7	m^2
2 – Da	30	16	28	x^6	a^7	m^2
3 – Bi	30	16	28	x^5	a^7	m^2
T72						
1 – We	30	-16	28	x^6	a^7	m^2
2 – Dy	30	-16	28	x^5	a^7	m^2
3 – Po	30	-16	28	x^5	a^7	m^2
T73						
1 – VanD	30	-16	28	x^5	a^7	m^2
2 – Ci	30	16	28	^{5}	a^7	m^2
3 – Ju	30	16	28	x^5	a^7	m^2

Analisando o registro gráfico da AECNS dos estudantes do GRUPO 2, verifico que os sujeitos “An", “We”, “Dy”, “Po” e “VanD” operaram de forma correta com sinais e fatores numéricos, registrando corretamente o Coeficiente Numérico (C.N.) das três questões que envolveram a multiplicação de monômios. Os sujeitos “Da”, “Bi”, “Ci” e “Ju” não registraram o sinal negativo, que pela regra da multiplicação, obrigatoriamente, deve ser registrado no produto (-16), como podemos ver no quadro acima. Os nove sujeitos que compõem o GRUPO 2 efetuaram corretamente a multiplicação entre os fatores numéricos, registrando em A = 30, B = 16 e C = 28.

Seguindo com o GRUPO 2, analisando a Parte Literal (P.L.) dos expoentes visíveis, os sujeitos “Bi”, “Dy”, “Po”, “VanD” e “Ju” acertaram as questões A, B e C –, pois aplicaram de forma correta as propriedades da multiplicação entre monômios com partes literais semelhantes e diferentes, assim como a propriedade específica dos expoentes visíveis na multiplicação entre fatores algébricos. Os sujeitos “An", “Da” e “We” erraram a questão A, visto que multiplicaram os expoentes ao invés de adicioná-los, conforme a propriedade da multiplicação com fatores literais semelhantes. Por sua vez, o estudante “Ci” não registrou o fator literal “x”; por fim, registrou o expoente correto 5 como potência do coeficiente numérico 30.

Tabela 12 – Desdobramento do recorte das Tabelas 3: levantamento do coeficiente numérico e da parte literal – GRUPO 3

GRUPO 3	C.N. (A)	C.N. (B)	C.N. (C)	P.L. (A)	P.L. (B)	P.L. (C)
T71						
1 – Ale	30	16	26	x^6	a^{12}	m^2
2 - Fe	30	16	28	x^5	a^7	m^2
3 – Vi	30	16	28	x^6	a^7	m^2
T72						
1 - Ro	30	16	28	x^5	a^7	m^2
2 - Fa	30	-16	28	x^5	a^7	m^2
3 - Ne	35	16	26	x^5	a^7	m^2
T73						
1 – Us	35	16	28	x^5	a^7	m^2
2 – Ad	30	16	28	x^5	a^7	m^2
3 - Je	30	-16	28	x^5	a^7	m^2

Passando para o GRUPO 3, dos nove estudantes adolescentes, somente dois - sujeitos “Fa” e “Je” – registraram de forma correta o sinal e o fator numérico que compõem os coeficientes numéricos das opções dadas na AECNS aplicada. Sete sujeitos – “Ale”, “Vi”, “Ro”, “Fe”, “Ne”, “Us” e “Ad” – não registraram o sinal negativo como produto da multiplicação entre (-8) e (+2) na questão B. Os sujeitos “Ale” e “Ne” também registraram de forma incorreta o produto 26 para a multiplicação entre os fatores numéricos (7) e (4), sendo 28 o resultado correto; os sujeitos “Us” e “Ne” registraram de forma incorreta 35 como o produto entre os fatores numéricos (6) e (5), sendo 30 o resultado correto.

Quanto à Parte Literal (P.L.) no GRUPO 3, analisando os expoentes visíveis, verifica-se que sete dos nove sujeitos – “Fe”, “Ro”, “Fa”, “Ne”, “Us”, “Ad” e “Je” – acertaram as questões A, B e C –, pois aplicaram de forma correta as propriedades da multiplicação entre monômios com partes literais semelhantes e diferentes, assim como a propriedade específica dos expoentes na multiplicação entre as partes literais. Contudo, os sujeitos “Vi” e “Ale” erraram a questão A, pois multiplicaram os expoentes ao invés de adicioná-los conforme a propriedade da multiplicação com partes literais semelhantes. E o sujeito “Ale” cometeu o mesmo “erro” na questão B, multiplicando os expoentes 4 e 3 ao invés de adicioná-los.

A TABELA 4[27] registra uma interpretação somente dos **expoentes visíveis**, transformando as convenções utilizadas na TABELA 3 em combinações lógicas na forma algébrica, como reescrevo a seguir.

Se **P** = coeficiente numérico (certo) é o resultado d**a operação numérica** formada por: A = sinal (+ , -) e B = fatores numéricos, logo $\mathbf{P = A \wedge B}$. (opera com os sinais e efetua a multiplicação entre os fatores numéricos).

Se $\mathbf{P^-}$ = coeficiente numérico (errado) é o resultado da **não operação**, com as variações dadas por: A = sinal (+ , -), símbolo: $\vee$ = ou, B = fatores numéricos.

Logo, $\mathbf{P^- = A^- \vee B^-}$ (o estudante não opera com os sinais ou não opera com os fatores numéricos). Sendo que $\mathbf{P^-}$ pode ser:

$\mathbf{P^- = A^- \wedge B}$ (não opera com os sinais e opera com os fatores numéricos) ou

$\mathbf{P^- = A \wedge B^-}$ (opera com os sinais e não opera com os fatores numéricos) ou

$\mathbf{P^- = A^- \wedge B^-}$ (não opera com os sinais e não opera com os fatores numéricos).

Na sequência, se **Q** = **parte literal** é o resultado da **operação algébrica** formada por: L = fatores literais, símbolo: $\wedge$ = e, E = expoente(s), sendo E^v (expoente visível); logo, $\mathbf{Q = L \wedge E}$ é uma operação algébrica correta.

Sendo $\mathbf{Q = L \wedge E^v}$ (opera com os fatores literais e opera com os expoentes visíveis).

Se $\mathbf{Q^-}$ = parte literal é o resultado da **não operação**, com as variações dadas por: L = fatores literais, símbolo: $\vee$ = ou, E = expoente(s).

Logo, $\mathbf{Q^- = L^- \vee E^-}$ é o produto de uma operação algébrica incorreta. Sendo E^v (expoente visível), assim:

$\mathbf{Q^- = L^- \wedge E^V}$ (não opera com os fatores literais e opera com os expoentes visíveis),

$\mathbf{Q^- = L \wedge E^{V-}}$ (opera com os fatores literais e não opera com os expoentes visíveis) ou

$\mathbf{Q^- = L^- \wedge E^{V-}}$ (não opera com os fatores literais e não opera com os expoentes visíveis).

Fazendo uma análise dos acertos quanto à multiplicação entre monômios, tenho agora o recorte das Tabelas 4 das três turmas que fizeram parte desta pesquisa. Por meio desses registros tento compreender como e se esses sujeitos,

[27] TABELA 4 – Expoente visível - combinações – Apêndices: 08 (T71), 14 (T72) e 20 (T73).

estudantes adolescentes, demonstram avanços na compreensão da linguagem simbólica convencional da matemática, sabendo aplicar as regras da multiplicação entre monômios semelhantes e diferentes, concomitantemente com as propriedades exponenciais.

Tabela 13 - Recorte das Tabelas 4 – T71, T72 e T73 – Expoente visível – combinações - agrupamento pelo êxito em GRUPO 1, GRUPO 2 e GRUPO 3

N^O/NOME **RECORTE TABELA 4**	**EXPOENTE VISÍVEL**							
DATA: 09/05	Coeficiente Numérico (P)	Coeficiente numérico (P^-) A = sinal B = fator numérico			Parte Literal (Q)	Parte literal (Q^-) L = fator literal E^v = expoente visível		
	$P = A \wedge B$	$P^- = A^- \wedge B$	$P^- = A \wedge B^-$	$P^- = A^- \wedge B^-$	$Q = L \wedge E^V$	$Q^- = L^- \wedge E^V$	$Q^- = L \wedge E^{V-}$	$Q^- = L^- \wedge E^{V-}$
GRUPO 1								
T71								

1 - Pe	X				X			
2 - Mn	X				X			
3 – To	X				X			
T72								
1 – Na	X						X	
2 - Se	X				X			
3 - Pa	X				X			
T73								
1 - Ma	X				X			
2 - Gui	X				X			
3 - Ru	X				X			
GRUPO 2								
T71								
1 – An	X						X	
2 - Da		X					X	
3 - Bi		X			X			
T72								
1 - We	X						X	
2 - Dy	X				X			
3 - Po	X				X			
T73								
1 - VanD	X				X			
2 - Ci		X				X		
3 - Ju		X			X			
GRUPO 3								
T71								
1 – Ale				X			X	
2 - Fe		X			X			
3 – Vi		X					X	
T72								
1 - Ro		X			X			
2 - Fa					X			
3 - Ne				X	X			
T73								
1 – Us				X	X			
2 – Ad		X			X			
3 - Je	X				X			

OBS.: As Tabelas 4 completas encontram-se nos Apêndices 8, 14 e 20.

A Tabela 13 sofre desdobramentos na Tabela 14 com os dados do GRUPO 1, na Tabela 15 com os dados do GRUPO 2 e na Tabela 16 com os dados do GRUPO 3.

Tabela 14 – Desdobramento do recorte das Tabelas 4 – levantamento das combinações dos coeficientes numéricos e da parte literal – GRUPO 1

GRUPO 1	Coeficientes Numéricos (A), (B) e (C) CORRETOS	Coeficientes Numéricos INCORRETOS	Parte Literal CORRETA	Parte Literal INCORRETA
T71				
1 – Pe	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^{V}$	
2 – Mn	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^{V}$	
3 – To	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^{V}$	
T72				
1 – Na	$P = A \wedge B$			$Q^{-} = L \wedge E^{V-}$
2 – Se	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^{V}$	
3 – Pa	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^{V}$	
T73				

1 – Ma	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^V$	
2 – Gui	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^V$	
3 – Ru	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^V$	

Os nove estudantes do GRUPO 1 apresentaram de forma correta o registro do produto dos fatores visíveis apresentados na questão sobre a multiplicação entre monômios do instrumento estruturado. Na hipótese: se **P** = **coeficiente numérico** (certo) é o resultado d**a operação numérica** formada por: **A** = sinal (+,-) e **B** = fatores numéricos, logo $\mathbf{P = A \wedge B}$ (opera com os sinais e fatores numéricos diferentes). Os estudantes que aplicaram de forma correta a regra dos sinais e efetuaram com êxito a multiplicação entre os fatores numéricos obtiveram um coeficiente numérico (**P**) correto.

Na hipótese: se **Q** = **parte literal** é o resultado da **operação algébrica formal** composta por: L = fatores literais e E^v = expoente visível, logo $\mathbf{Q = L \wedge E^v}$ é uma operação algébrica correta. Na sequência da análise do GRUPO 1, oito dos estudantes adolescentes operaram de forma correta na multiplicação da parte literal dos monômios. Assim, 88% dos sujeitos escolhidos das três turmas (T71, T72 e T73) para fazerem parte do GRUPO 1, categorizados como aqueles que têm "êxito pleno", validaram a hipótese $\mathbf{Q = L \wedge E^v}$, demonstrando por meio da AECNS que operaram com êxito as partes literais e os expoentes visíveis.

No registro da parte literal (P.L.), o sujeito "Na", da T72, foi o único componente do GRUPO 1 que cometeu um "erro" no expoente visível das questões $A = 30x^6$, por multiplicar os expoentes ao invés de adicioná-los e, em $C = 28x^2y^4$, não registrar o fator literal "m^2".

Tabela 15 – Desdobramento do recorte das Tabelas 4 – levantamento das combinações dos coeficientes numéricos e da parte literal – GRUPO 2

GRUPO 2	Coeficientes Numéricos (A), (B) e (C) CORRETOS	Coeficientes Numéricos INCORRETOS	Parte Literal CORRETA	Parte Literal INCORRETA
T71				
1 – An	$P = A \wedge B$			$Q^- = L \wedge \mathbf{E}^{V-}$
2 – Da		$P^- = \mathbf{A}^- \wedge B$		$Q^- = L \wedge \mathbf{E}^{V-}$
3 – Bi		$P^- = \mathbf{A}^- \wedge B$	$Q = L \wedge E^V$	
T72				
1 – We	$P = A \wedge B$			$Q^- = L \wedge \mathbf{E}^{V-}$
2 – Dy	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^V$	
3 – Po	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^V$	

T73				
1 – VanD	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^V$	
2 – Ci		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge B$		$Q^- = \mathbf{L^-} \wedge E^V$
3 – Ju		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge B$	$Q = L \wedge E^V$	

Passando para o GRUPO 2 e analisando o registro dos estudantes, verifico que os sujeitos "An", "We", "Dy", "Po" e "VanD" operaram de forma correta com sinais e fatores numéricos, acertando o coeficiente numérico das três questões; logo, $\mathbf{P = A \wedge B}$. Os sujeitos "Da", "Bi", "Ci" e "Ju" não registraram o sinal negativo, que, pela regra da multiplicação, obrigatoriamente, deve ser registrado no produto de (-8) . (2) = -16. Os nove sujeitos que compõem o GRUPO 2 registraram corretamente os produtos em A = 30, B = 16 e C = 28; logo, parecem saber aplicar a "tabuada".

Na hipótese: se **Q** = **parte literal** é o resultado da **operação algébrica convencional** composta por: L = fatores literais e E^V = expoente visível; logo, $\mathbf{Q = L \wedge E^V}$ é uma operação algébrica correta. Seguindo com o GRUPO 2, analisando a Parte Literal (Q) dos expoentes visíveis, os sujeitos "Bi", "Dy", "Po", "VanD" e "Ju" acertaram as questões A, B e C, pois aplicaram de forma correta as propriedades da multiplicação entre monômios com fatores literais semelhantes e diferentes, assim como a propriedade específica dos expoentes na multiplicação entre partes literais. Dos sujeitos escolhidos das três turmas (T71, T72 e T73) para fazerem parte do GRUPO 2, categorizados como aqueles que têm "êxito parcial", 55% deles validaram a hipótese $\mathbf{Q = L \wedge E^V}$, demonstrando por meio do instrumento estruturado que operaram com as partes literais e com os expoentes visíveis.

Os sujeitos "An", "Da" e "We" invalidaram a questão A do teste escrito com uso de notação simbólica (AECNS) não por operar com os fatores literais, mas por não operar corretamente com os expoentes visíveis (multiplicaram 3 e 2 ao invés de adicionar 3 e 2): $\mathbf{Q^- = L \wedge E^{V-}}$. A estudante "Ci" invalidou também a questão A – do AECNS por: $\mathbf{Q^- = L^- \wedge E^V}$, visto que não registrou o fator literal "x"; assim, registrou o expoente correto 5 como potência do coeficiente numérico 30.

Tabela 16 – Desdobramento do recorte das Tabelas 4 – levantamento das combinações dos coeficientes numéricos e da parte literal – GRUPO 3

GRUPO 3	Coeficientes Numéricos (A), (B) e (C) CORRETOS	Coeficientes Numéricos INCORRETOS	Parte Literal CORRETA	Parte Literal INCORRETA
T71				
1 – Ale		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge \mathbf{B^-}$		$Q^- = L \wedge \mathbf{E^{V-}}$

2 – Fe		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge B$	$Q = L \wedge E^V$	
3 – Vi		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge B$		$Q^- = L \wedge \mathbf{E^{V-}}$
T72				
1 – Ro		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge B$	$Q = L \wedge E^V$	
2 – Fa	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^V$	
3 – Ne		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge \mathbf{B^-}$	$Q = L \wedge E^V$	
T73				
1 – Us		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge \mathbf{B^-}$	$Q = L \wedge E^V$	
2 – Ad		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge B$	$Q = L \wedge E^V$	
3 – Je	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^V$	

Passando para o GRUPO 3, dos nove estudantes adolescentes somente dois – sujeitos “Fa” e “Je” – registraram de forma correta o sinal e o produto numérico que compõem o coeficiente numérico das opções dadas no instrumento formal aplicado; logo, **$P = A \wedge B$**.

Sete sujeitos – “Ale”, “Fe”, “Vi”, “Ro”, “Ne”, “Us” e “Ad” – não registraram o sinal negativo na multiplicação entre (-8) e (+2) na questão B, sendo categorizados como **$P^- = A^- \wedge B$**, isto é, não operaram com os sinais e operaram com os fatores numéricos. Os sujeitos “Ale” e “Ne”, além do sinal incorreto na questão B, registraram de forma incorreta o produto 26 para a multiplicação dos fatores numéricos (7) e (4), quando seria 28 o resultado correto. Os estudantes “Us” e “Ne” não registraram o sinal negativo na questão B, assim como registraram de forma incorreta 35 como o produto entre os fatores numéricos 6 e 5, sendo 30 o resultado correto. Com todos esses “enganos” os estudantes “Ale”, “Ne” e “Us” passam a ser categorizados como **$P^- = A^- \wedge B^-$**, isto é, não operaram com os sinais nem operaram com os fatores numéricos.

Na hipótese: se **Q** = **parte literal** é o resultado da **operação algébrica convencional** composta por L = fatores literais e E^V = expoente visível. No GRUPO 3, analisando os expoentes visíveis, sete dos nove sujeitos – “Fe”, “Ro”, “Fa”, “Ne”, “Us”, “Ad” e “Je” – acertaram as questões A, B e C – aplicando de forma correta as propriedades da multiplicação entre monômios com partes literais semelhantes e diferentes, assim como a propriedade específica dos expoentes na multiplicação entre partes literais; logo, **$Q = L \wedge E^V$**.

Entretanto, os sujeitos “Ale” e “Vi” erraram a questão A – ao multiplicarem os expoentes ao invés de adicioná-los conforme a propriedade da multiplicação com partes literais semelhantes. “Ale” cometeu o mesmo “erro” na questão B –, multiplicando os expoentes 4 e 3 ao invés de adicioná-los. Os sujeitos “Ale” e “Vi” invalidaram as questões citadas na AECNS por operarem com os fatores literais e não operarem corretamente com os expoentes visíveis. Assim, passam a ser categorizadas no quadro da TABELA 4 como: $\mathbf{Q^- = L \wedge E^{V-}}$.

A TABELA 5[28] registra uma interpretação somente do **expoente um** (1) **na forma invisível**, levando em consideração as subdivisões do coeficiente numérico e da parte literal na multiplicação entre os monômios. Segue-se a seguinte convenção:

P = opera com o coeficiente numérico (C.N.) $\Rightarrow$ (sinal **e** fator numérico);

P⁻ = não opera com o coeficiente numérico (C.N.) $\Rightarrow$ (sinal **ou** fator numérico);

Q = opera com a parte literal (P.L.) $\Rightarrow$ (fatores literais **e** expoentes);

Q⁻ = não opera com a parte literal (P.L.) $\Rightarrow$ (fatores literais **ou** expoente).

Para melhor compreensão do leitor, devo explicar que no registro da parte literal (P.L.) à questão A – não havia elementos para serem analisados no critério do expoente 1 na forma invisível; na questão B – os elementos para a análise estão na multiplicação entre (b) e (b^1) = b^2; na questão C – duplos elementos serão analisados: (x) . (x^2) = x^3 e (y^3). (y) = y^4. Assim, passo a relembrar como classifiquei para análise do **expoente invisível** os elementos que abaixo estão negritados:

A) $(6x^2) . (5x^3) = + 30x^5$

B) $(-8a^4\mathbf{b}) . (2a^3b^1) = \mathbf{-}\ 16\ a^7\mathbf{b^2}$

C) $(7\mathbf{x}\ y^3) . (4x^2\mathbf{y}\ m^2) = + 28\mathbf{x^3y^4}m^2$

Transformando em percentuais os registros das TABELAS 5, os estudantes da T71: P = operam com C.N. = 46% e Q = operam com a P.L. (expoentes invisíveis) = 38%, T72: P = operam com C.N. = 56% e Q = operam com a P.L. (expoentes invisíveis) = 52%, T73: P = operam com C.N. = 50% e Q = operam com a P.L. (expoentes invisíveis) = 50%. A média entre as três turmas está para os que operam com coeficientes numéricos em 51% e os que operam com a parte literal com expoentes invisíveis em 47%.

Agora analiso o recorte das TABELAS 5 das três turmas envolvidas na pesquisa, que apresentam informações dos nove estudantes de cada turma, especificamente sobre os registros que focam os expoentes invisíveis.

Tabela 17 - Recorte das Tabelas 5 – T71, T72 e T73 – Multiplicação de monômios – expoente invisível - agrupamento pelo êxito em GRUPO 1, GRUPO 2 e GRUPO 3

[28] TABELA 5 – Multiplicação de monômios – expoente invisível. – Apêndices: 9 (T71), 15 (T72) e 21 (T73).

N^O/NOME RECORTE TABELA 5	EXPONTE INVISÍVEL								INTERPRETAÇÃO			
	Coeficiente Numérico				Parte Literal							
DATA: 09/05	Sinal		Fator numérico		Fator literal		Expoentes		**P** opera com C. N.	**P**$^-$ não opera com C.N.	**Q** opera com P.L.	**Q**$^-$ não opera com P. L.
	C	E	C	E	C	E	C	E				
GRUPO 1												
T71												
1 – Pe	X		X		X		X		X		X	
2 – Mn	X		X		X			X	X			X
3 – To	X		X		X			X	X			X
T72												
1 – Na	X		X		X			X	X			X
2 – Se	X		X		X		X		X		X	
3 – Pa	X		X		X		X		X		X	
T73												
1 – Ma	X		X		X		X		X		X	
2 – Gui	X		X		X		X		X		X	
3 – Ru	X		X		X			X	X			X
GRUPO 2												
T71												
1 – Na	X		X		X			X	X			X
2 – Da		X	X		X			X		X		X
3 – Bi		X	X		X		X			X	X	
T72												
1 – We	X		X		X			X	X			X
2 – Dy	X		X		X			X	X			X
3 – Pó	X		X		X		X		X		X	
T73												
1 – VanD	X		X		X			X	X			X
2 – Ci		X	X		X			X		X		X
3 – Ju		X	X		X			X		X		X
GRUPO 3												
T71												
1 – Ale		X		X	X			X		X		X
2 – Fé		X	X		X			X		X		X
3 – Vi		X	X		X			X		X		X
T72												
1 – Ro		X	X		X			X		X		X
2 – Fa	X		X			X		X	X			X
3 – Ne		X		X	X			X		X		X
T73												
1 – Us		X		X	X			X		X		X
2 – Ad		X	X			X		X		X		X
3 – Je	X		X		X			X	X			X

OBS.: As Tabelas 5 completas encontram-se nos Apêndices 9, 15 e 21.

A Tabela 17 sofre desdobramentos na Tabela 18 com os dados do GRUPO 1, na Tabela 19 com os dados do GRUPO 2 e na Tabela 20 com os dados do GRUPO 3.

Tabela 18 – Desdobramento do recorte das Tabelas 5: levantamento do coeficiente numérico e da parte literal – GRUPO 1

GRUPO 1	C.N. (A)	C.N. (B)	C.N. (C)	P.L. (A)	P.L. (B)	P.L. (C)
T71						

1 – Pe	+ 30	- 16	+ 28		**b^2**	**x^3y^4**
2 – Mn	+ 30	- 16	+ 28		b	$x^2\ y^3$
3 – To	+ 30	- 16	+ 28		b^1	$x^2\ y^3$
T72						
1 – Na	+ 30	- 16	+ 28		b	x^2y^4
2 – Se	+ 30	- 16	+ 28		**b^2**	**x^3y^4**
3 – Pa	+ 30	- 16	+ 28		**b^2**	**x^3y^4**
T73						
1 – Ma	+ 30	- 16	+ 28		**b^2**	**x^3y^4**
2 – Gui	+ 30	- 16	+ 28		**b^2**	**x^3y^4**
3 – Ru	+ 30	- 16	+ 28		b	$x^2\ y^3$

Os nove estudantes adolescentes que compõem o GRUPO1 das três turmas souberam operar de forma correta os coeficientes numéricos (C.N.), tanto a regra dos sinais como a multiplicação dos fatores numéricos. Assim, os sujeitos da T71, “Pe”, “Mn” e “To”; da T72, “Na”, “Se” e “Pa” e, da T73, “Ma”, “Gui” e “Ru” registraram nas questões A = + 30, B = -16 e em C = + 28, como podemos conferir no resumo acima.

No GRUPO 1, os sujeitos que operaram de forma correta a Parte Literal foram: “Pe”, da T71, “Se” e “Pa”, da T72, e “Ma” e “Gui”, da T73, ao passo que “Mn” e “To”, da T71, “Na”, da T72, e “Ru”, da T73, cometeram algum “erro/esquecimento” com os expoentes invisíveis das questões B e/ou C, como podemos conferir na Tabela 18.

A dificuldade refere-se à insuficiência na aplicação das propriedades específicas da multiplicação algébrica. Os sujeitos desse grupo conhecem e empregam a operação da multiplicação entre os fatores literais dos monômios. Contudo, quando os fatores literais desempenham um papel de conjunto, quando os dois fatores literais intervêm ao mesmo tempo, o estudante adolescente não manifesta na solução um produto multiplicativo algébrico completo. Esse fato se apresenta como um problema: Por que o adolescente recua diante da invisibilidade do expoente 1?

Piaget e Inhelder (1976), ao estudarem o desenvolvimento psicológico do pensamento, verificam dois pontos complementares para que ocorra o pensamento formal: condições de equilíbrio e construção das estruturas. Para os estudiosos, do primeiro ponto de vista, o pensamento passa por estados de equilíbrio em que estão presentes a extensão do campo de equilíbrio e os instrumentos de coordenação de que a inteligência de um estudante adolescente dispõe; no segundo ponto de vista, estão presentes as relações entre as estruturas, principalmente o modo como se coordenam e seu modo de construção.

Diante desse segundo ponto de vista, seria possível responder que o estudante tem o produto sob seus olhos, pois já verificou as leis da multiplicação entre monômios em situações anteriores. Todavia, não é capaz de percebê-la porque seus mecanismos operatórios não são ainda suficientemente generalizados para se estender às multiplicações que comportam possibilidades com o expoente 1 na sua forma invisível?

Tabela 19 – Desdobramento do recorte das Tabelas 5: levantamento do coeficiente numérico e parte literal – GRUPO 2

GRUPO 2	**C.N. (A)**	**C.N. (B)**	**C.N. (C)**	**P.L. (A)**	**P.L. (B)**	**P.L. (C)**
T71						
1 – An	30	-16	28		b	$x^2 y^3$
2 – Da	30	16	28		b^2	$x^2 y$
3 – Bi	30	16	28		b^2	$x^3 y^4$
T72						
1 – We	30	-16	28		b^1	$x^2 y^3$
2 – Dy	30	-16	28		b^1	$x^2 y^3$
3 – Po	30	-16	28		b^2	$x^3 y^4$
T73						
1 – VanD	30	-16	28		b	$x^2 y^3$
2 – Ci	30	16	28		b^2	$x y$
3 – Ju	30	16	28		b^2	$x y$

Analisando o registro gráfico da AECNS dos estudantes do GRUPO 2, posso verificar que “An", “We”, “Dy”, “Po” e “VanD” operaram de forma correta com sinais e fatores numéricos, acertando o coeficiente numérico (C.N.) das três questões que envolveram a multiplicação de monômios. Os nove sujeitos que compõem o GRUPO 2 efetuaram corretamente as multiplicações entre os fatores numéricos em A = 30, B = 16 e C = 28. Entretanto, os sujeitos “Da”, “Bi”, “Ci” e “Ju” não registram o sinal negativo, que pela regra da multiplicação, obrigatoriamente, deve ser registrado no produto -16.

No GRUPO 2, analisando a Parte Literal (P.L.) do expoente 1 – na sua forma invisível, os sujeitos “Da”, “Bi”, da T71, “Po”, da T72, e “Ci” e “Ju”, da T73, acertaram a questão B –, pois aplicaram de forma correta as propriedades da multiplicação entre monômios com termos semelhantes, assim como a propriedade específica dos expoentes na multiplicação entre fatores literais.

Os sujeitos “An", da T71, e “VanD”, da T73, erraram a questão B – ao não aplicarem a propriedade dos expoentes; ao invés de adicioná-los, conforme a propriedade da multiplicação, somente registraram a variável literal “b”. Os estudantes “We” e “Dy”, da T72 , erraram a questão B – ao não aplicarem a propriedade dos expoentes ($b \, . \, b^1$) e, ao invés de adicioná-los, registrarem a variável literal “b^1”.

Quanto à questão $C = (xy^3).(x^2y)$, somente os sujeitos “Bi”, da T71, e “Po”, da T72, responderam corretamente o produto: x^3y^4. Os demais sete estudantes registraram de forma incorreta o produto dos monômios da questão C. Assim, registraram os sujeitos: “An", “We”, “Dy” e “VanD” = “x^2y^3”, “Da” = “x^2y”, “Ci” e “Ju” = xy.

A maioria dos sujeitos desse grupo não chegou a associar os fatores literais numa relação binária no plano das combinações possíveis. A dificuldade referente à multiplicação entre termos algébricos semelhantes, como $b.b^1$, $x.x^2$ e $y^3.y$, está registrada na tabela acima. Isso ocorreria porque esses adolescentes não coordenam as operações de duas variáveis independentes numa relação binária. Logo, não verificam os resultados, pois não compreendem as propriedades da multiplicação entre monômios, refletindo na relação com o expoente 1 na sua forma invisível.

Portanto, os sujeitos que registraram de forma incorreta os produtos da multiplicação entre monômios não consideraram as variáveis literais atuantes (b, x, y) com o expoente 1 na sua forma invisível. Eles registram as variáveis que apresentam os expoentes registrados graficamente, seja 1, 2 ou 3. Permito-me considerar que esses sujeitos não dispõem de um esquematismo suficiente para estabelecer as leis que regem a relação multiplicativa entre monômios. A isso posso acrescentar a incapacidade do princípio da generalização e de uma certa indeferenciação ao expoente 1 na sua forma invisível.

Tabela 20 – Desdobramento do recorte das Tabelas 5: levantamento do coeficiente numérico e parte literal – GRUPO 3

GRUPO 3	C.N. (A)	C.N. (B)	C.N. (C)	P.L. (A)	P.L. (B)	P.L. (C)
T71						
1 – Ale	30	16	26		b	$x^2 y^3$
2 – Fé	30	16	28		b^1	$x^2 y^2$
3 – Vi	30	16	28		b^1	$x^2 y^3$
T72						
1 – Ro	30	16	28		b^1	$x^3 y^3$
2 – Fa	30	-16	28		b^1	__ y^3
3 – Ne	35	16	26		b^1	$x^2 y$
T73						
1 – Us	35	16	28		b	$x^2 y^3$
2 – Ad	30	16	28		---	$x y^3$
3 – Je	30	-16	28		b^1	$x^2 y^3$

- (X) = incorretas

Passando para o GRUPO 3, dos nove estudantes adolescentes somente dois – “Fa” e “Je” – registraram de forma correta o sinal e o valor numérico que compõem o coeficiente numérico das opções dadas na AECNS aplicada. Sete sujeitos – “Ale”, “Vi”, “Ro”, “Fe”, “Ne”, “Us” e “Ad” – não registraram o sinal negativo da multiplicação entre (-8) e (+2) na questão B, e “Ale” e “Ne” também registraram de forma incorreta o produto 26 para a multiplicação entre (7) e (4), sendo 28 o resultado correto. Já os sujeitos “Us” e “Ne” registraram de forma incorreta 35 para a multiplicação entre (6) e (5), sendo 30 o resultado correto.

Quanto à Parte Literal (P.L.) no GRUPO 3, analisando os expoentes um (1) na forma invisível, observo que nenhum dos nove sujeitos acertou as questões B e C –, pois aplicaram de forma incorreta as propriedades da multiplicação entre monômios com fatores literais semelhantes, assim como a propriedade específica dos expoentes na multiplicação entre termos algébricos. Na questão B o resultado deveria ser “b^2”, mas os estudantes “Ale” e “Us” registraram “b”; “Ad” não registrou o termo algébrico “b” e os demais seis estudantes participantes do grupo registraram “b^1”, o registro do expoente um (1) na sua forma invisível foi totalmente desconsiderado.

Os produtos “errados” ficaram assim registrados na questão C –: os sujeitos “Ale”, “Vi”, “Us” e “Je” = x^2y^3, “Fe” = x^2y^2, “Fa” = y^3, “Ne” = x^2y, “Ro” = x^3y^3 e “Ad” = $x\ y^3$. Os “erros/enganos” listados constam na tabela 20. Os nove sujeitos do GRUPO 3 não consideraram nenhuma das três variáveis literais envolvidas na situação em questão, que é a do expoente 1 na sua forma invisível. No registro da AECNS evidencia-se a ausência das propriedades que constituem a multiplicação de fatores algébricos. A dificuldade refere-se às insuficiências da multiplicação algébrica, seja no emprego de uma variável isolada, seja quando duas variáveis intervêm ao mesmo tempo na multiplicação dos monômios. Os sujeitos “Fa” e “Ad” chegam a excluir uma variável literal do resultado final; portanto, não apresentam indícios de uma operação multiplicativa. O que ocorre é um errôneo registro do maior expoente das variáveis literais dos monômios apresentados anteriormente como fatores para a operação da multiplicação.

A TABELA 6[29] registra uma interpretação somente dos expoentes 1 – na forma invisível, transformando as convenções utilizadas na TABELA 5 em combinações lógicas algébricas, como reescrevo a seguir.

Se **P** = coeficiente numérico é o resultado d**a operação numérica** formada por: A = sinal (+ , -) e B = fatores numéricos, logo **P = A $\wedge$ B** (opera com os sinais e efetua a multiplicação entre os fatores numéricos).

Se **P^-** = coeficiente numérico é o resultado da **não operação**, com as variações dadas por: A = sinal (+ , -) ou B = fatores numéricos, logo **$P^- = A^- \vee B^-$** (não opera com os sinais ou não opera com os fatores numéricos).

Sendo que **P^-** pode ser:

$P^- = A^- \wedge B$ (não opera com os sinais e opera com os fatores numéricos) ou

$P^- = A \wedge B^-$ (opera com os sinais e não opera com os fatores numéricos) ou

$P^- = A^- \wedge B^-$ (não opera com os sinais e não opera com os fatores numéricos).

Se **Q** = parte literal é o resultado da **operação algébrica,** especificamente aqui considerando **o expoente um (1) na sua forma invisível** formada por: L = fatores literais e E^i (expoente invisível), logo se **$Q = L \wedge E^i$** (opera com os fatores literais e opera com os expoentes invisíveis).

Se **Q^-** = parte literal é o resultado da **não operação**, com as variações dadas por: L = fatores literais ou E^i = expoente 1 (invisível), logo, **$Q^- = L^- \vee E^{-i}$**, se:

$Q^- = L^- \wedge E^i$ (não opera com os fatores literais e opera com os expoentes invisíveis);

$Q^- = L \wedge E^{i-}$ (opera com os fatores literais e não opera com os expoentes invisíveis);

$Q^- = L^- \wedge E^{i-}$ (não opera com os fatores literais e não opera com os expoentes invisíveis).

Tabela 21 - Recorte das Tabelas 6 – T71, T72 e T73 – Expoente invisível – combinações - agrupamento pelo êxito em GRUPO 1, GRUPO 2 e GRUPO 3

N^O/NOME **RECORTE TABELA 6**	**EXPOENTE INVISÍVEL**							
DATA: 09/05	Coeficiente Numérico (P)	Coeficiente numérico (P^-) A = sinal B = Fator numérico			Parte Literal (Q)	Parte literal (Q^-) L = Fator literal E^i= expoente invisível		
	$P = A \wedge B$	$P^- = A^- \wedge B$	$P^- = A \wedge B^-$	$P^- = A^- \wedge B^-$	$Q = L \wedge E^i$	$Q^- = L^- \wedge E^i$	$Q^- = L \wedge E^{i-}$	$Q^- = L^- \wedge E^{i-}$

[29] TABELA 6 – Expoente invisível - combinações. – Apêndices: 10 (T71), 16 (T72) e 22 (T73).

GRUPO 1								
T71								
1 – Pe	**X**				**X**			
2 – Mn	**X**						**X**	
3 – To	**X**						**X**	
T72								
1 – Na	**X**						**X**	
2 – Se	**X**				**X**			
3 – Pa	**X**				**X**			
T73								
1 – Ma	**X**				**X**			
2 – Gui	**X**				**X**			
3 – Ru	**X**						**X**	
GRUPO 2								
T71								
1 – An	X						X	
2 – Da		X					X	
3 – Bi		X			X			
T72								
1 – We	X						X	
2 – Dy	X						X	
3 – Po	X				X			
T73								
1 – VanD	X						X	
2 – Ci		X					X	
3 – Ju		X					X	
GRUPO 3								
T71								
1 – Ale				X			X	
2 – Fe		X					X	
3 – Vi		X					X	
T72								
1 – Ro		X					X	
2 – Fa	X							X
3 – Ne				X			X	
T73								
1 – Us				X			X	
2 – Ad		X						X
3 – Je	X						X	

OBS.: As Tabelas 6 completas encontram-se nos Apêndices 10, 16 e 22.

A Tabela 21 sofre desdobramentos na Tabela 22 com os dados do GRUPO 1, na Tabela 23 com os dados do GRUPO 2 e na Tabela 24 com os dados do GRUPO 3.

Tabela 22 – Desdobramento do recorte das Tabelas 6 – levantamento das combinações do coeficiente numérico e da parte literal – GRUPO 1

GRUPO 1	Coeficientes Numéricos (A), (B) e (C) CORRETOS	Coeficientes Numéricos INCORRETOS	Parte Literal CORRETA	Parte Literal INCORRETA
T71				
1 - Pe	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^{i}$	
2 - Mn	$P = A \wedge B$			$Q^{-} = L \wedge E^{i-}$
3 – To	$P = A \wedge B$			$Q^{-} = L \wedge E^{i-}$

T72				
1 – Na	$P = A \wedge B$			$Q^{-} = L \wedge E^{i-}$
2 - Se	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^{i}$	
3 - Pa	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^{i}$	
T73				
1 - Ma	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^{i}$	
2 - Gui	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^{i}$	
3 - Ru	$P = A \wedge B$			$Q^{-} = L \wedge E^{i-}$

Os nove estudantes do GRUPO 1 registraram de forma correta o produto da multiplicação entre os fatores numéricos apresentados na questão 4 da AECNS. Assim, tornaram verdadeira a hipótese: se **P** = **coeficiente numérico** (certo) é o resultado d**a operação numérica** formada por: A = sinal (+,-) e B = fatores numéricos, logo **$P = A \wedge B$**. (opera com os sinais e fatores numéricos diferentes).

Na hipótese: se **Q** = **parte literal** é o resultado da **operação algébrica convencional** composta por: L = fatores literais e E^{i} = expoente 1 – na forma invisível, logo, **$Q = L \wedge E^{i}$** é uma operação algébrica correta. Na sequência da análise do GRUPO 1, cinco dos estudantes adolescentes categorizados como aqueles que têm "êxito pleno", validaram a hipótese: **$Q = L \wedge E^{i}$**, demonstrando por meio da AECNS que operaram com os fatores literais e com os expoentes invisíveis.

No registro da parte literal (P.L.), os sujeitos "Mn" e "To", da T71, "Na", da T72, e "Ru" da T73 foram os adolescentes do GRUPO 1 que cometeram um "erro/esquecimento" quanto ao expoente invisível das questões B e/ou C, como podemos conferir na Tabela 18. Assim, invalidando essas questões, passam a ser categorizados como **$Q^{-} = L \wedge E^{i-}$**, pois **Q^{-}** é o resultado da **não operação**.

Tabela 23 – Desdobramento do recorte das Tabelas 6 – levantamento das combinações do coeficiente numérico e da parte literal – GRUPO 2

GRUPO 2	**Coeficientes Numéricos (A), (B) e (C) CORRETOS**	**Coeficientes Numéricos INCORRETOS**	**Parte Literal CORRETA**	**Parte Literal INCORRETA**
T71				
1 - An	$P = A \wedge B$			$Q^{-} = L \wedge \mathbf{E}^{i-}$
2 - Da		$P^{-} = \mathbf{A}^{-} \wedge B$		$Q^{-} = L \wedge \mathbf{E}^{i-}$
3 - Bi		$P^{-} = \mathbf{A}^{-} \wedge B$	$Q = L \wedge E^{i}$	
T72				
1 - We	$P = A \wedge B$			$Q^{-} = L \wedge \mathbf{E}^{i-}$

2 - Dy	$P = A \wedge B$			$Q^- = L \wedge \mathbf{E^{i-}}$
3 - Po	$P = A \wedge B$		$Q = L \wedge E^i$	
T73				
1 - VanD	$P = A \wedge B$			$Q^- = L \wedge \mathbf{E^{i-}}$
2 - Ci		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge B$		$Q^- = L \wedge \mathbf{E^{i-}}$
3 - Ju		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge B$		$Q^- = L \wedge \mathbf{E^{i-}}$

No GRUPO 2, analisando o registro dos estudantes, verifico que os sujeitos “An", “We”, “Dy”, “Po” e “VanD” operaram de forma correta com sinais e fatores numéricos, acertando o coeficiente numérico das três questões, logo **P = A** $\wedge$ **B**. Dos sujeitos deste grupo 55,5% souberam operar com diferentes sinais e fatores numéricos. Os estudantes “Da”, “Bi”, “Ci” e “Ju” não registraram o sinal negativo, que pela regra da multiplicação é obrigatório. Assim, na hipótese: se **P** = **coeficiente numérico** é o resultado da **operação numérica convencional** composta por: A = sinal e B = fatores numéricos e faltar o registro do sinal negativo, logo $\mathbf{P^- = A^- \wedge B}$ é uma **operação numérica incorreta**. No entanto, os nove sujeitos que compõem o GRUPO 2 registraram corretamente os produtos em A = 30, B = 16 e C = 28.

Seguindo com o GRUPO 2, analisando a Parte Literal (Q) do expoente 1 – na forma invisível, os sujeitos “Bi” e “Po” acertaram as questões A, B e C, isto é, somente dois dos nove estudantes adolescentes escolhidos para a pesquisa apresentaram o registro correto da relação binária que envolve o expoente 1 – na forma invisível das variáveis “b”, “x” e “y” dos monômios da questão B: $\mathbf{b}.b^1= b^2$ e da questão C: $\mathbf{x}.x^2 = x^3$ e $y^3.\mathbf{y} = y^4$. Assim, somente 22% dos estudantes do GRUPO 2 valida a hipótese: se **Q** = **parte literal** é o resultado da **operação algébrica convencional** composta por: L = fatores literais e E^i = expoente invisível, logo $\mathbf{Q = L \wedge E^i}$ é uma **operação algébrica correta**.

Do GRUPO 2 os sujeitos “An" e “VanD” invalidaram a questão B – da AECNS por não operar com o expoente 1 – na forma invisível. Eles só registraram o fator literal “b”, ao invés de “b^2”, não adicionaram o expoente 1 na formal invisível com o expoente 1 registrado como experimento na AECNS. Logo, seus registros são categorizados como **operação algébrica incorreta**, $\mathbf{Q^- = L \wedge E^{i-}}$. Será por que era a variável do primeiro monômio? Esses sujeitos ainda não são capazes de coordenar as variáveis semelhantes porque não conseguem considerar $b = b^1$? Para que haja uma generalidade completa será necessário que ocorra no pensamento formal.

Os estudantes “We” e “Dy”, na questão B –, registraram como parte da solução o fator literal “b^1”, que é somente o expoente registrado graficamente no segundo monômio, ao invés de “b^2”, “esquecendo-se” do expoente 1 invisível da variável “b” do primeiro monômio. Assim, também invalidaram a questão B, sendo categorizados como $\mathbf{Q^- = L \wedge E^{i-}}$, **operação algébrica incorreta**.

Seguindo no GRUPO 2, os sujeitos “Na”, “We”, “Dy” e “VanD” registraram na questão C –, como parte da solução os fatores literais x^2y^3, que são os expoentes registrados graficamente nos monômios antes do produto. Assim, desconsideraram o expoente 1 – na forma invisível das variáveis “x” e “y”. Com este registro invalidaram a questão C, sendo categorizados também como $\mathbf{Q^- = L \wedge E^{i-}}$, **operação algébrica incorreta**.

O estudante “Da” na questão B – registrou de forma correta a base literal “b^2”, mas registrou a questão C – de forma incorreta: x^2y, considerando apenas a parte literal do segundo monômio. Com esse registro invalidou a questão C, sendo categorizado como $\mathbf{Q^- = L \wedge E^{i-}}$, **operação algébrica incorreta**. Como é possível essa inconstância? Neste sujeito existe uma tentativa de organização do pensamento, pois ora executa corretamente a operação com os dados preparados, ora não.

Os sujeitos “Ci” e “Ju” na questão B – registraram de forma correta a base literal “b^2”, mas na questão C – registraram de forma incorreta a parte literal “xy”, considerando aqui apenas as variáveis sem o registro dos expoentes. Logo, não aplicaram a lei da multiplicação entre variáveis literais semelhantes: “adicionar os expoentes”. Com esse registro são categorizados como $\mathbf{Q^- = L \wedge E^{i-}}$, **operação algébrica incorreta**. Esses sujeitos adotam atitudes (regras) diferentes com relação às mesmas operações. Serão esses indícios de uma convergência entre leis e propriedades que pode anunciar o início do pensamento formal?

Na hipótese: se **Q** = **parte literal** é o resultado da **operação algébrica convencional** composta por: L = fatores literais e E^i = expoente invisível. Esse expoente 1 que não está registrado passa a ser “esquecido” durante o processo da multiplicação entre as variáveis que compõem a Parte Literal dos monômios. Logo, $\mathbf{Q = L \wedge E^i}$ passa a ser $\mathbf{Q = L \wedge E^{i-}}$, isto é, **uma operação algébrica incorreta**. Razão da ausência de um sistema único que ligue as coordenações dos “conjuntos de partes”.

Tabela 24 – Desdobramento do recorte das Tabelas 6 – levantamento das combinações do coeficiente numérico e da parte literal – GRUPO 3

GRUPO 3	Coeficientes Numéricos (A), (B) e (C) CORRETOS	Coeficientes Numéricos INCORRETOS	Parte Literal CORRETA	Parte Literal INCORRETA
T71				
1 – Ale		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge \mathbf{B^-}$		$Q^- = L \wedge \mathbf{E^{i-}}$
2 - Fe		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge B$		$Q^- = L \wedge \mathbf{E^{i-}}$
3 – Vi		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge B$		$Q^- = L \wedge \mathbf{E^{i-}}$
T72				
1 - Ro		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge B$		$Q^- = L \wedge \mathbf{E^{i-}}$
2 - Fa	$P = A \wedge B$			$Q^- = L^- \wedge \mathbf{E^{i-}}$
3 – Ne		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge \mathbf{B^-}$		$Q^- = L \wedge \mathbf{E^{i-}}$
T73				
1 – Us		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge \mathbf{B^-}$		$Q^- = L \wedge \mathbf{E^{i-}}$
2 - Ad		$P^- = \mathbf{A^-} \wedge B$		$Q^- = L^- \wedge \mathbf{E^{i-}}$
3 - Je	$P = A \wedge B$			$Q^- = L \wedge \mathbf{E^{i-}}$

Passando para o GRUPO 3, dos nove estudantes, sete acertaram a multiplicação dos fatores numéricos na opção A (6.5 = 30), dois na opção B (-8.2 = -16) e sete na opção C (7.4 = 28). Desse universo de acertos somente dois adolescentes – “Fa” e “Je” – registraram de forma correta o sinal e o valor numérico que compõem o Coeficiente Numérico da opção B na AECNS aplicada, assim como o produto da opção A e C. Para a hipótese de um coeficiente numérico correto, logo **P = A** $\wedge$ **B**, apenas 22% dos sujeitos deste grupo souberam operar com diferentes sinais e fatores numéricos nas questões A, B e C da AECNS.

Já os estudantes “Ne” e “Us” registraram de forma incorreta o produto entre os fatores numéricos na questão A (6.5 = 35). Em razão deste “erro”, são categorizados como $\mathbf{P^- = A \wedge B^-}$**,** isto é, operaram com os sinais, mas não operaram com os fatores numéricos.

Sete sujeitos do GRUPO 3 - “Ale”, “Fe”, “Vi”, “Ro”, “Ne”, “Us” e “Ad” - não registraram o sinal negativo no produto entre (-8) e (+2) na questão B; logo, são categorizados como $\mathbf{P^- = A^- \wedge B}$, isto é, não operaram com os sinais e operaram com os fatores numéricos. Os sujeitos “Ale” e “Ne”, além do sinal incorreto na questão B, também registraram de forma incorreta o produto 26 para a multiplicação entre os fatores numéricos (7) e (4), sendo 28 o resultado correto. Com todos esses “erros/enganos”, os estudantes “Ale”, “Ne” e “Us” passam a ser categorizados como $\mathbf{P^- = A^- \wedge B^-}$, isto é, não operaram com os sinais nem operaram com os fatores.

Na hipótese: se **Q** = **parte literal** é o resultado da **operação algébrica convencional** composta por: L = fatores literais e E^i = expoente invisível. No

GRUPO 3, analisando os expoentes invisíveis, os nove sujeitos erraram as questões B e C, o que significa 100% de incorreção – aplicaram de forma incorreta e parcial as propriedades da multiplicação entre monômios com bases semelhantes e diferentes, assim como a propriedade específica dos expoentes na multiplicação entre termos algébricos. Logo, um universo composto de 78% dos sujeitos do GRUPO 3 registrou a operação algébrica convencional incorreta na categoria: $\mathbf{Q^{-} = L \wedge E^{i-}}$, isto é, operou com os fatores literais, mas não operou com o expoente 1 – na forma invisível. E 22% dos sujeitos enquadram-se na categoria $\mathbf{Q^{-} = L^{-} \wedge E^{i-}}$, em que não operam com os fatores literais nem com o expoente 1 – na forma invisível na AECNS. Assim, em síntese, os nove sujeitos escolhidos das três turmas (T71, T72 e T73) para fazer parte do GRUPO 3, categorizados como aqueles que "sabem +---", invalidaram a hipótese $\mathbf{Q = L \wedge E^{i}}$, demonstrando por meio da AECNS que não operaram com os fatores literais nem com os expoentes invisíveis.

Ao tomar a teoria da epistemologia genética como referência para explicar ou melhor compreender as respostas dos estudantes adolescentes diante de uma proposta de aplicação de propriedades pela avaliação escrita com uso de notação simbólica (AECNS), retomo em síntese alguns dados fornecidos pelos adolescentes na multiplicação entre monômios reunindo-os em três grupos ("A" = avaliação) conforme **o êxito** nas situações propostas.

4.2.1 Interpretação dos dados da aplicação da AECNS

4.2.1.1 GRUPO "A" 1 = ÊXITO PLENO

Foram analisados os produtos registrados dos sujeitos da T71: "Pe", "Mn", "To", da T72: "Na", "Se", "Pa" e da T73: "Ma", "Gui", "Ru". Observe-se que na turma 72 e 73 se encontram os mesmos sujeitos do grupo de observação das *situações de aprendizagem*.

Na mudança para a situação de resolução exclusivamente de notação algébrica, exigindo dos estudantes conhecimento de relações binárias, foi possível perceber que nas operações com o coeficiente numérico, validam a hipótese $\mathbf{P = A \wedge B}$, os estudantes que operaram com sinais e com fatores numéricos diferentes, num percentual de 100%.

Quanto às operações com expoentes visíveis (1, 2 e 3), na hipótese: $\mathbf{Q = L \wedge E^{v}}$, aproximadamente 90% dos estudantes desse grupo registraram de forma correta as multiplicações entre monômios com expoentes visíveis. O estudante “Na” não alcançou êxito nessa operação porque deixou de registrar no produto o fator literal único “m^2” do segundo monômio. Assim, é categorizado como $\mathbf{Q^{-} = L \wedge E^{v-}}$.

Na análise das operações com o expoente 1 – na forma invisível, na hipótese: $\mathbf{Q = L \wedge E^{i}}$, aproximadamente 60%, cinco de nove estudantes desse GRUPO 1 registraram corretamente os produtos entre a parte literal dos monômios com os expoentes 1 invisíveis. Os quatro estudantes que registraram de forma incorreta os expoentes na opção B e C da AECNS desconsideraram o expoente 1 - na sua forma invisível para o produto final das variáveis literais “b”, “x” e “y”. Pode-se observar no registro escrito que seis em oito expoentes permaneceram nos resultados finais com o maior expoente (visível graficamente) dos dois monômios em questão. Assim, validando a categoria, $\mathbf{Q^{-} = L \wedge E^{i-}}$, operam com os fatores literais e não operam com os expoentes invisíveis.

Os adolescentes do GRUPO 1 demonstram organização na forma de seus pensamentos, coordenando as propriedades específicas da regra dos sinais e da multiplicação entre fatores numéricos como *partes* de um *todo* classificado como Coeficiente Numérico. Assim, também coordenando a multiplicação entre fatores literais e aplicando as propriedades específicas dos expoentes na multiplicação de monômios como *partes* de um *todo* classificado como Parte Literal. Aparentemente, os sujeitos do GRUPO 1 possuem esquemas de organização e regulação das relações biunívocas aplicadas com os expoentes visíveis, mantendo seus procedimentos de raciocínio para os expoentes 1 – na forma invisível numa construção algébrica totalmente abstrata. Alguns desses sujeitos parecem apresentar as características de compreensão da relação parte/todo, da formalização de um modelo algébrico.

4.2.1.2 GRUPO “A” 2 = ÊXITO PARCIAL

Foram analisados os produtos registrados dos sujeitos da T71: “Na”, “Da”, “Bi”; T72: “We”, “Dy”, “Po”; T73: “VanD”, “Ci”, “Ju”. Observe-se que na turma 71 se encontram os mesmos sujeitos do grupo de observação.

Nos produtos registrados pelos sujeitos desse GRUPO 2, foi possível perceber que nas operações com o coeficiente numérico, validam a hipótese **$P = A \wedge B$,** os estudantes que operam com sinais e com fatores numéricos, num percentual de acertos de 60%. Os sujeitos que não apresentaram êxito em relação ao coeficiente numérico foi em função da regra dos sinais, porque no produto (-16) desconsideraram do sinal negativo. Logo, 40% dos sujeitos passam a ser categorizados como **$P^{-} = A^{-} \wedge B$**, não operam com os sinais e operam com os fatores numéricos.

Quanto às operações com expoentes visíveis (1, 2 e 3), na hipótese: **$Q = L \wedge E^{v}$**, aproximadamente 60% dos estudantes do GRUPO 2, souberam operar com os fatores literais e aplicar corretamente a regra dos expoentes. Registraram de forma correta as multiplicações entre monômios com expoentes visíveis, validando a hipótese. Em contrapartida, entre os nove estudantes, quatro não obtiveram êxito. Três desses sujeitos na categoria: **$Q^{-} = L \wedge E^{v-}$**, operam com fatores literais e não operam com os expoentes pois multiplicam os expoentes entre si, quando, pela regra dos expoentes, deveriam adicioná-los. E um sujeito na categoria **$Q^{-} = L^{-} \wedge E^{v}$**, em razão de não ter registrado a variável literal “x”, logo não opera com os fatores literais e opera com os expoentes visíveis. Num índice alarmante de 40% dos sujeitos não parecem mostrar, nesse instrumento de coleta de dados, compreensão da relação parte/todo, no enfoque dos **expoentes visíveis** dos monômios.

Na análise das operações com o expoente 1 – na forma invisível, na hipótese: **$Q = L \wedge E^{i}$**, operar com os fatores literais e aplicar corretamente a regra dos expoentes, especificamente com o expoente 1 – na forma invisível, somente 20% dos estudantes do GRUPO 2 registraram corretamente os produtos. Na análise dos produtos pode-se observar no registro escrito que sete dos nove estudantes adolescentes não conseguiram operar com valores exponenciais ausentes.

Os estudantes desse GRUPO 2 na categoria, **$Q^{-} = L \wedge E^{i-}$**, operam com os fatores literais e não operam com os expoentes invisíveis. De dezoito multiplicações entre os monômios, onze produtos foram registrados de forma incorreta. Como resposta, a maioria dos estudantes desse GRUPO 2 optou pela escolha do maior expoente registrado graficamente num dos monômios, resultado de uma certa lembrança não muito organizada a respeito do cálculo. Lembram que tem um resultado, mas não sabem como atingi-lo. Logo, apresentam nos resultados uma lógica considerando um modelo de significação sustentado por um pensamento intuitivo que ainda não coordena e conserva as propriedades específicas com os expoentes (visíveis e invisíveis) na multiplicação entre monômios.

4.2.1.3 GRUPO “A” 3 = POUCO ÊXITO

Foram analisados os produtos registrados dos sujeitos da T71: “Ale”, “Fe”, “Vi”; T72: “Ro”, “Fa”, “Ne”; T73: “Us”, “Ad”, “Je”. Observe-se que na turma 73 apenas “Us” está no grupo da observação; “Ad” e “Je” não foram observados.

Nos produtos registrados pelos sujeitos desse GRUPO 3, de forma lenta e única, foi possível perceber que nas operações com o coeficiente numérico, dois em nove estudantes validam a hipótese **P = A** $\wedge$ **B**, operaram com sinais e com fatores numéricos, num percentual de acertos de 20%. Os sujeitos que não apresentaram êxito em relação ao coeficiente numérico foi em função da regra dos sinais, porque no produto (-16) desconsideraram o sinal negativo e/ou porque não registraram corretamente os demais produtos entre os fatores numéricos. Atitudes que conduziram a formas incorretas de resultados nas opções A, B e C, com um percentual de erros em 80%. Logo, quatro desses três estudantes sintetiza uma possibilidade de caminho para a ação.

Em síntese, nota-se que quando os sujeitos precisam pensar em um cálculo para quantificar valores algébricos há uma questão singular na relação parte/todo. Um valor algébrico, isto é, um monômio configura-se como a representação de uma parte de algo, logo, não basta ter conhecimento dos fatores numéricos e literais utilizados já que é preciso considerar a relação com a totalidade. Como o que se manipula no cálculo e na quantificação é a representação da parte, a dimensão do todo ao qual o monômio se refere, restringe-se ao plano do pensamento.

Para a compreensão da relação parte/todo é preciso que se realize uma operação lógico-matemática que Piaget e Szeminska (1971) chamam de conservação. Tal operação mental determina um grau de abstração e reversibilidade que exige um pensamento mais organizado, de maneira que não é possível alcançar a compreensão real de um perímetro ou de uma área somente através da memorização do procedimento do cálculo ou da simples ação física sobre de fichas de formas quadrangulares ou retangulares.

Assim, para a próxima etapa o instrumento elaborado teve como finalidade levantar dados sobre as noções que esses estudantes possuem na aplicação exclusiva das propriedades nas operações algébricas envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação de monômios.

dos sujeitos passam a ser categorizados como $\mathbf{P^{-} = A^{-} \wedge B}$, não operam com os sinais e operam com os fatores numéricos, e três sujeitos passam a ser categorizados como $\mathbf{P^{-} = A^{-} \wedge B^{-}}$, não operam com os sinais nem com os fatores numéricos.

Quanto às operações com expoentes visíveis (1, 2 e 3), na hipótese: $\mathbf{Q = L \wedge E^{v}}$, aproximadamente 80% dos estudantes do GRUPO 3 souberam operar com os fatores literais e aplicar corretamente a propriedade com expoentes visíveis. Entre os nove estudantes, dois aplicaram de forma incorreta a propriedade específica dos expoentes entre fatores literais semelhantes, pois multiplicaram os expoentes ao invés de adicioná-los. Assim, validam a categoria: $\mathbf{Q^{-} = L \wedge E^{v-}}$, operam com os fatores literais, mas não operam com os expoentes visíveis.

Na análise das operações com o expoente 1 – na forma invisível, na hipótese: $\mathbf{Q = L \wedge E^{i}}$, nenhum dos nove estudantes do GRUPO 3 registrou corretamente as multiplicações entre a parte literal dos monômios com os expoentes 1 invisíveis. Em dezoito multiplicações entre os monômios, todos foram registrados de forma incorreta. Assim, sete sujeitos validam a categoria $\mathbf{Q^{-} = L \wedge E^{i-}}$, operam com fatores literais, mas não operam com o expoente 1 – na forma invisível e dois sujeitos validam a categoria $\mathbf{Q^{-} = L^{-} \wedge E^{i-}}$, não operam com fatores literais nem com o expoente 1 – na forma invisível.

Os estudantes do GRUPO 3 apresentam muitas dificuldades para operar no universo aritmético e algébrico, parecem ainda não compreender as propriedades de segunda ordem na aplicação das operações algébricas. Acredito que os esquemas mobilizados ainda não estão muito adaptados às exigências da situação de formalização e generalização das propriedades integrantes da multiplicação entre monômios. Sendo assim os sujeitos desse grupo sem muita condição de mobilidade em seu raciocínio não apresentam uma lógica matemática considerando um modelo de significação. Percebe-se que os sujeitos do GRUPO 3, ainda não demonstram a compreensão da relação entre as *partes* seja do coeficiente numérico, seja entre a parte literal para compor o *todo* correto.

A AECNS revela as dificuldades dos estudantes frente a avaliação com notação exclusivamente algébrica em que a forma de pensamento exige uma constante interação de organização das operações lógico-matemáticas própria de modelos construídos com particularidades. Investigar os desdobramentos de casos particulares de uma lógica de significações é o objetivo do próximo instrumento de coleta de dados dessa pesquisa.

4.3 ENTREVISTAS COM QUATRO JOGOS

O segundo momento do plano de coleta de dados desta pesquisa foi realizado por meio de entrevistas semiestruturadas com nove estudantes (três por turma). Os sujeitos foram escolhidos dentre os grupos participantes das atividades do primeiro momento da coleta de dados conforme o êxito na multiplicação de monômios.

As entrevistas foram agendadas com os estudantes para o turno inverso e em dias conforme sua disponibilidade. Foram entrevistados individualmente nas escolas de origem, na sala de aula vaga do turno. Os estudantes não tinham tempo estipulado para desenvolver os quatro “jogos” e, em média, permaneceram 1h 30min para concluí-los.

Passo a descrever as características de cada jogo:

JOGO 1 (ARITMÉTICA + ÁLGEBRA): Jogo criado pela autora, formado por nove peças, cada uma contendo um dos seguintes monômios: $6x^3$, $6x^7$, $6x^2$, $3x^3$, $2x^5$, $2x^1$, $2x$, $2x^6$ e $2x^4$.

Ordem do jogo: combinar as peças para obter o produto $12x^8$.

Objetivos: observar e registrar as ações do estudante adolescente na multiplicação dos monômios fornecidos pelas peças. Estas apresentam o expoente 1 na forma de registro visível e na sua forma convencional, isto é, sem o registro gráfico (invisível).

JOGO 2 (ARITMÉTICA + ÁLGEBRA): Jogo criado pela autora, formado por oito peças, cada uma contendo um dos seguintes monômios: 48x, $24x^5$, $12x^5$, $6x^2$, 4x, $2x^1$, $8x^4$ e $1x^5$.

Ordem do jogo: combinar as peças para obter o produto $48x^6$.

Objetivos: observar e registrar as ações do estudante adolescente na multiplicação dos monômios fornecidos pelas peças. Estas apresentam o expoente 1 na forma de registro visível e na sua forma convencional, isto é, sem o registro gráfico (invisível).

JOGO 3 (ARITMÉTICA + GEOMETRIA + ÁLGEBRA): Jogo criado pela autora, formado por duas fichas: uma na forma quadrangular de dimensões 20 cm x 20 cm e uma na forma retangular de dimensões 20 cm x 40 cm.

Ordem do jogo:

c) determinar o perímetro e a área da ficha na forma quadrangular;

d) determinar o perímetro e a área da ficha na forma retangular.

Objetivos: observar e registrar as ações do estudante na combinação da geometria com a álgebra pela determinação do perímetro e da área de duas diferentes fichas.

JOGO 4 (ÁLGEBRA PURA): Jogo criado pela autora, o "dominó algébrico" é formado por 30 peças, cada uma é composta por duas partes: na metade esquerda, por uma operação algébrica – adição, subtração, multiplicação ou divisão – e, na metade direita, pelo resultado de uma das operações.

Ordem do jogo: montar o dominó algébrico, fechando o circuito, combinando as trinta peças e associando a operação com o seu respectivo resultado.

Objetivo:

c) verificar se houve aprendizagem das operações com monômios nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão;

d) observar a ação do estudante diante do expoente 1 na sua forma visível e invisível presente nas quatro operações em questão nas peças.

4.3.1 Interpretação dos 4 Jogos no Grupo "E" 1 – ÊXITO PLENO

Retomando que “êxito pleno” significa ter êxito em todas as atividades propostas tanto nas observações quanto na aplicação da AECNS. Assim, para esse momento foram entrevistados os três estudantes “Pe” – T71 – Escola (1) IEST, “Se” – T72 – Escola (2) ANCH e “Ma” – T73 – Escola (1) IEST.

4.3.1.1 Entrevista 1 = sujeito “Pe”

JOGO 1 = São nove peças ($6x^3$, $6x^7$, $6x^2$, $3x^3$, $2x^5$, $2x^1$, $2x^6$, $2x^4$ e $2x$) contendo monômios que, combinados no seu jogo, deverão fornecer o produto $12x^8$ (doze xis na oitava potência).

O estudante “Pe” sabe operar com os expoentes, mas não faz a leitura correta da nomenclatura dos expoentes: *Dois xis elevado ao expoente cinco vezes seis xis elevado ao expoente três*; precisa da leitura oral dos termos dos monômios para concluir o produto final: *Duas vezes seis. A gente deve somar os expoentes e fazer vezes os* [...] *os números grandes*. “Pe” opera aritmética e algebricamente, aplicando corretamente as regras específicas do coeficiente numérico e as propriedades da multiplicação referentes à parte literal dos monômios.

“Pe” lê o expoente 1, seja na forma visível em ($2x^1$): *Dois xis elevado ao expoente um*, seja na forma invisível em ($2x$): *quando tiver que nem (2x) sem nada é dois xis na um*, durante a aplicação da regra da adição dos expoentes. Contudo, a leitura não interfere na compreensão da propriedade exponencial que se faz necessária na multiplicação entre monômios: $(2x^7) . (6x^1) = (12x^8)$.

O estudante, ao ser questionado sobre novas possibilidades de combinações relatadas por uma colega, argumenta com a impossibilidade de “novas combinações”: *Só posso trocar (2x) por ($2x^1$). É a mesma coisa, porque com ou sem o expoente, um (1) escrito é sempre um* [...] *ela só pode ter mudado a mesma coisa para ficar certa a resposta. Não tem outro jeito de montar*. O estudante é capaz de identificar a igualdade existente entre os monômios ($2x^1$) e ($2x$).

“Pe” organiza suas combinações mantendo como referência principal os coeficientes numéricos e a partir deles reorganiza os expoentes; consegue perceber “possibilidades” para o expoente 1 – da forma visível para a forma invisível: *Dois xis elevado ao expoente sete vezes seis xis elevado ao expoente um = $(2x^7) . (6x^1)$. É, eu podia ter deixado sem o um (1)* [...] *porque a pessoa tem que olhar e saber que tem 1*. Quando questionado sobre novas possibilidades de agrupamento com as peças do jogo e as suas criações, não aplica a comutatividade das peças: *não tem outro jeito de montar* [...], *sem possibilidades.*

Durante o JOGO 1, observei que “Pe” não demonstra **a comutatividade** dos monômios; tem **conservação** das *partes* e do *todo* que deve compor o produto solicitado; identifica e opera com o expoente 1 – na forma visível e invisível; mostra-se capaz de executar várias regulações ao longo da atividade proposta em função das contra-argumentações que coloco e do raciocínio que as mesmas desencadeiam.

JOGO 2 = são 08 peças – representadas pelos monômios: $1x^5$, $12x^5$, $6x^2$, $24x^5$, 4x, $2x^1$, $8x^4$ e 48x, que fornecem o produto $48x^6$ (quarenta e oito xis na sexta potência).

Por algum tempo, “Pe” tentou combinar as peças somente através do pensamento, porém necessitou operar com o auxílio do registro gráfico em razão do produto 48: *Posso usar um rascunho?* [...] *pronto, demorei mas fiz todas*. No universo dos adolescentes, o número quarenta e oito não é um número próximo de suas necessidades diárias.

O estudante, após concluir suas combinações com as peças, lê o expoente um (1) sem estar representado graficamente nos monômios (48x) e (4x). Nas suas composições dos monômios, argumenta comparando as possíveis possibilidades de combinações explorando os expoentes “zero” em $(24x^6)$. $(2x^0)$ e “1” – na forma invisível com a multiplicação entre os monômios $(48x^5)$ e (1x). Argumenta com precisão ao ser questionado sobre o porquê do uso dos expoentes “zero” e “1” na forma invisível: *Claro que pode ser zero, só que ele precisa aparecer escrito* [...] *porque se não aparecer escrito, vai valer um (1) de expoente no xis.* Criou para o produto $(48x^6)$ as multiplicações: $(24x^6)$. $(2x^0)$ e $(48x^5)$. (1x).

Durante o JOGO 2, no momento das suas criações, observei que “Pe” demonstra ter **organização** nos seus esquemas em função do raciocínio que exerce durante a criação de seus monômios; apresenta as características de **compreensão da relação parte/todo**, que provém da utilização dos expoentes zero e um – na forma invisível; já é **capaz de comentar** o cálculo que está realizando.

JOGO 3 = **02 peças** – A) uma ficha de forma quadrangular de 20 cm x 20 cm e B) uma ficha de forma retangular de 20 cm x 40 cm. A atividade solicitada é a determinação da área e do perímetro das duas fichas.

A) FICHA DE FORMA QUADRANGULAR

Observo que “Pe” demonstra **noção de semelhança** de figuras, pois tem a preocupação de registrar uma figura com os lados mais iguais possíveis após definir o valor de 20 cm para cada lado de sua figura de forma quadrangular. Organiza seu pensamento nesse momento exclusivamente pela compreensão simbólica aritmética: *Todos os lados iguais* [...] *tem vinte centímetros (20 cm).*

O sujeito “Pe”, ao ser questionado sobre a determinação de um valor para o perímetro da ficha de forma quadrangular, coordena seu pensamento através de uma ação prática física ao passar o dedo indicador a partir de um “canto” da ficha de forma quadrangular, seguindo toda a borda em sequência, indicando verbalmente seus valores parciais *vinte, quarenta, sessenta, oitenta*. Ao encontrar o ponto de partida, afirma que o valor final *é 80 centímetros.* Registra verbal e graficamente as unidades de medida parciais e total: *20 cm + 20 cm + 20 cm + 20 cm = 80 cm.* O estudante tem presente um esquema de raciocínio que através de suas ações de correspondência operatória na linguagem verbal e no manuseio do objeto tem êxito na determinação do perímetro da ficha de forma quadrangular.

O sujeito “Pe” apresenta dúvidas ao ser solicitado a indicar um valor para a área da ficha de forma quadrangular. Necessita de um exemplo prático/real (plantio de árvores) para compreender a localização da área na ficha de forma quadrangular. Arrisca uma possibilidade: *É o espaço de dentro. Se é o de dentro é 20 por 20. Que dá 400 mudas*. No momento do registro gráfico da área, percebe o “engano” de designação entre a nomenclatura da área e do perímetro. No primeiro registro escreve: *Perímetro = 20 x 20 = 400 cm*^{2} e *Perímetro = 20 + 20 + 20 + 20 = 80 cm.* Percebe seu “erro” e anula a primeira nomenclatura, substituindo-a por *Área = 20 x 20 = 400 cm*^{2}*.* Verifico que essa modificação ocorre subsequentemente às suas correspondências através de um pensamento dedutivo.

O estudante “Pe” registra corretamente na forma verbal e gráfica os valores numéricos e suas respectivas unidades de medida, no perímetro em centímetros (cm) e na área em centímetros quadrados (cm^2). Contudo, quando questionado sobre a existência de alguma possibilidade de solução generalizada para a determinação do perímetro e da área de qualquer ficha de forma quadrangular, não consegue pensar numa possibilidade de resolução para a área e o perímetro sem valores numéricos: *Como fazer?* [...] *letras, expoentes. Não sei o que fazer.*

B) FICHA DE FORMA RETANGULAR

O sujeito "Pe", inicialmente, parece conferir as medidas entre a ficha de forma quadrangular e a ficha de forma retangular, sobrepondo-as. Ele teve a preocupação de registrar a "base" da ficha de forma retangular com o valor de 20 cm e a "altura" igual a 40 cm: *A base, que é quase 20 cm* [...] *a altura de 40 centímetros porque é maior* [...] *é o dobro*. Na organização do seu pensamento sobre o perímetro, efetua a adição parcial do agrupamento de duas bases e de duas alturas: *Perímetro = (20 + 20) = 40 e (40 + 40) = 80* e, posteriormente, a soma das parcelas: *80 + 40 = 120*. No caso da área, registra: *20 x 40 = 800 cm²*.

Observo que o sujeito "Pe" demonstra ter noção de espaço, pois seus valores sugeridos se igualam às medidas reais das fichas (quadrangular e retangular); demonstra saber o processo do cálculo do perímetro e da área; registra a unidade de medida na base e na altura (cm = centímetro), assim como registra a unidade de medida da área corretamente (cm^2), mas esquece o registro da unidade de medida (cm) no valor final do perímetro.

Ao ser questionado sobre novas possibilidades de valores para a base e a altura do retângulo, o sujeito "Pe" me surpreende - *Sim, é possível [...] se a gente não medir, sim -,* o estudante argumenta: *Na sétima começaram as letras. E as letras também servem como número. Ah, dá para colocar uma letra para cada número*. Na sequência da instigação através da exemplificação de outros valores de medida para a base e altura indicados por colegas, questiono-o sobre a possibilidade da existência de duas respostas verdadeiras para uma mesma questão. "Pe" argumenta: *Sim. É porque cada um escolheu um tipo. Isto é, um número, uma medida. [...] Antes da sétima não era possível. Só podia resolver se era dado um número. Agora dá para trocar os números pelas letras*. Questiono-o sobre a sua compreensão na relação de igualdade entre fatores literais e numéricos através do registro gráfico. O estudante, ao mesmo tempo em que registra uma figura quadrangular, argumenta – *Posso, assim vou fazer um desenho mais quadrado possível sem usar a régua. E como ele é quadrado tem todos os lados iguais. Como eu não sei sua medida e posso dar uma medida para o lado, vou escolher o "B".* Na sequência registra para o perímetro: $P = B + B + B + B = 4B$ e para a área: $A = B \times B = B^2$.

Questiono o sujeito “Pe” sobre uma figura de forma retangular qualquer e ele, após desenhar um retângulo, observa o caminho seguido em relação a um quadrado qualquer e argumenta: *Vou colocar letras diferentes porque o retângulo não tem as mesmas medidas. Pode ser o “c”, né, não precisa ser o “b”.* Na primeira vez registra: *a a c c*. Olha, pensa e risca esse resultado. Refaz seu registro: *a + c + a + c*. “Pe”, não parece satisfeito: *Se são duas bases iguais então tenho “2c” e são duas alturas iguais, tenho “2a”*, registrou: *2a 2c*. Continua insatisfeito e, refazendo seu raciocínio, conclui que: *Falta alguma coisa* [...] *já sei é aqui entre os dois, tem um sinal de mais* [...] *porque são letras diferentes, fica assim: 2a + 2c*. Questiono-o – como será então a área? –, o estudante registra na folha: *A = a x c = a.c*, concluindo seu pensamento quanto à igualdade entre fatores literais e numéricos: *E agora substituo meu “a” e meu “c” por diferentes números.*

O estudante “Pe” consegue **generalizar corretamente** o perímetro e a área para uma ficha de forma quadrangular e uma ficha de forma retangular qualquer; opera de forma aditiva corretamente com valores algébricos no caso dos perímetros da sua figura gráfica do quadrado e do retângulo, assim como apresenta um raciocínio correto na forma multiplicativa com os valores algébricos para o cálculo das áreas das referidas figuras; demonstra saber operar e aplicar corretamente as propriedades com os fatores literais (bases algébricas) e das variáveis no cálculo das áreas e dos perímetros; demonstra compreender os diferentes tipos de relações para uma determinação generalizada tanto da área como do perímetro para uma ficha de forma quadrangular e uma ficha de forma retangular qualquer. Porém, não registra oralmente nem graficamente o pensamento em segmentos como a + a e c + c (agrupamento de fatores literais semelhantes dos lados paralelos opostos); não fala nas unidades de medida na sua generalização, seja para o cálculo da área, seja para o cálculo do perímetro durante o procedimento de compreensão, nem registra as unidades de medida para a área, nem para o perímetro.

Posso supor que o sujeito “Pe” demonstra estar **reorganizando seus esquemas** em função do raciocínio que exerce no próprio momento da determinação geral da área e do perímetro da ficha de forma retangular. Ele chega a uma forma geral para a ficha de forma quadrangular e, elabora uma explicação mais complexa a respeito da área e do perímetro da ficha de forma retangular. O estudante **conserva** o todo inicial, mas evolui, em **comparação** ao modelo anterior, ao **significar** diferentes variáveis literais envolvendo duplas operações e **agrupamentos** como uma parte de um todo.

JOGO 4: 30 peças - dominó algébrico.

O sujeito “Pe” interrompe o jogo em cinco momentos durante a sua montagem do dominó algébrico, os quais descrevo:

1ª parada: (9x) + (x), pergunta: *Fica ou soma?* Pensa e escolhe a peça com o resultado (10x).

A dúvida é verbalizada na terceira peça do dominó. O questionamento está relacionado com o coeficiente numérico 1 – na sua forma invisível. No monômio (x) existe uma questão de convenção, pois o coeficiente numérico 1 não é registrado. Logo, o sujeito “Pe” deve se lembrar da igualdade (x) = (1x) para efetuar corretamente a adição. Portanto, o resultado de (9x) + (x) deve seguir o pensamento: (9 + 1 = 10) e a parte literal “x” permanece como uma constante na adição entre monômios semelhantes.

2ª parada: (9x) : (x), coloca a peça com (9x). Desconfia do resultado e indaga: *Onde não tem, sei que é um. Então eu diminuo, daí dá zero. Mas não tem peça com ($9x^0$). Espera, eu fazia alguma coisa com (x^0). Como eu escrevia (x^0)? Ah, eu cortava o (x^0). Então aqui ele não vai mais, é só (9).* Coloca a peça com o resultado (9).

A dúvida surge na sexta peça. O questionamento está diretamente relacionado com uma dúvida redobrada em relação ao número 1 – na sua forma invisível como coeficiente numérico e também como expoente invisível no monômio (x). O estudante precisa, primeiro, efetuar a divisão entre os coeficientes numéricos para seguir com o dominó, logo (9 : 1 = 9), e, em seguida, aplicar a propriedade que rege os expoentes numa divisão algébrica que é a da subtração dos expoentes, logo ($x^{1-1} = x^0$). Essa sequência foi retomada pelo pensamento do sujeito “Pe”, e assim a peça escolhida foi substituída pelo resultado correto.

3ª parada: ($8x^4$) – ($7x^4$), afirma: *Se 8 – 7 é igual a 1, então aqui é ($1x^4$). Mas não tem ($1x^4$). Só tem (x^4), pode? Está certo aqui na frente vale um* (coloca o dedo sobre o local de registro do coeficiente numérico). Escolhe a peça com (x^4).

A dúvida do sujeito “Pe” está relacionada ao coeficiente numérico 1 – na sua forma invisível no resultado final da subtração, não mais durante o processo de subtração entre os coeficientes numéricos e expoentes de monômios com bases semelhantes. Para o estudante decidir pelo resultado (x^4), precisa ter a compreensão da igualdade entre os monômios ($1x^4$) e (x^4), isto é, ($1x^4 = x^4$).

4ª parada: (x^2) – (x^2), afirma: *Piorou! Um menos um dá zero. Zero bala. Só tem essa peça igual a zero, mas e o (x^2)? Multiplicando zero por (x^2), só dá zero? Claro, desaparece o (x^2) e só fica o zero.* Coloca a peça com 0 (zero).

O questionamento está relacionado não com a dúvida em relação ao número 1 – na sua forma invisível como coeficiente numérico, porque soube subtrair os coeficientes (1 – 1), mas com o momento de efetuar a multiplicação do resultado "zero" do coeficiente numérico com a parte literal do monômio (0 vezes x^2). Apresenta dúvidas no momento de formalizar o registro correto das partes *zero* e *xis ao quadrado* após sua multiplicação. Após sua argumentação verbal, escolhe a peça com o resultado zero.

5ª parada: (x) . (x), indaga: *E agora?* Quem são os coeficientes numéricos? *Ah, tá, dá 1 e 1 igual a 1, e dois de "xis", que é de 1 + 1*. Coloca a peça com (x^2).

Novamente, primeiro na divisão e agora na multiplicação dos monômios, surge o questionamento em relação ao número 1 – na sua forma invisível como coeficiente numérico. Recorda que no monômio (x) o coeficiente é 1, então o resultado da multiplicação entre os coeficientes numéricos 1 também convencionalmente não é registrado. Está presente também a multiplicação entre seus monômios idênticos no valor numérico 1 e na forma invisível. Esta operação compreende que ($x . x = x^1 . x^1$) e, na adequação ao sistema notacional, o estudante precisa efetuar a adição desses "expoentes invisíveis": $x . x = x^{1+1}$; logo, a peça com o resultado correto é o monômio (x^2).

O estudante "Pe" hesita em cinco situações, acima descritas, que envolveram basicamente coeficientes e expoentes numéricos 1 – na forma invisível, ora na parte, ora no todo dependendo da operação solicitada. Apresenta organização nos seus esquemas que atuam na resolução de cada situação; foi capaz de tratar de cada problemática, alcançando êxito nas suas ações.

4.3.1.2 Entrevista 2 = sujeito "Se"

JOGO 1 = São nove peças ($6x^3$, $6x^7$, $6x^2$, $3x^3$, $2x^5$, $2x^1$, $2x^6$, $2x^4$ e $2x$) contendo monômios que, combinados no seu jogo, deverão fornecer o produto $12x^8$ (doze xis na oitava potência).

O estudante "Se" opera e faz a leitura correta da nomenclatura dos expoentes: *ao quadrado, ao cubo, na quarta potência, na quinta potência, na sexta potência e sétima potência*; também lê com perfeição na linguagem convencional algébrica os monômios e o símbolo operatório entre eles. Opera com rapidez e facilidade tanto aritmética como algebricamente, aplicando as propriedades que envolvem a multiplicação entre monômios. Demonstra ter compreensão das noções aritméticas e das operações algébricas necessárias para a compreensão algébrica.

O estudante apresenta na argumentação conservação do símbolo, tendo como preocupação principal os expoentes; observa e opera na forma da parte (expoente) para o todo (produto final). Considera o expoente 1 como um expoente unidimensional, isto é, apenas na sua forma invisível durante as operações. Durante a execução do JOGO 1 observo que o sujeito "Se" tem maior facilidade de operação quando o expoente 1 se encontra na forma invisível.

Quando o sujeito "Se" é questionado sobre possibilidades de mudanças na combinação das peças, retoma as propriedades do elemento neutro da multiplicação = 1 (um) na condição de coeficiente numérico e do expoente zero, na aplicação do elemento neutro da adição. Por meio da composição de novas peças para o JOGO 1, demonstra que compreende e sabe aplicar as duas propriedades (multiplicação e potenciação) explanadas verbalmente.

O estudante "Se", quando solicitado a criar suas peças mantendo o produto $12x^8$, manifesta certa preocupação com os coeficientes numéricos a partir da multiplicação entre três monômios. Também não faz a leitura (oral) do expoente 1 – tanto quando se apresenta na forma visível pelo registro gráfico como na forma invisível nos referidos monômios durante a multiplicação. O estudante afirma preferir operar com monômios sem o registro gráfico do expoente 1. Durante seus procedimentos com as peças do JOGO 1, reconhece e confirma a igualdade entre os monômios ($2x$) e ($2x^1$).

Durante o JOGO 1 observo que “Se” compreende a **comutatividade** dos monômios; tem **conservação** da parte e do todo e mostra-se capaz de operar com o expoente 1 – na forma invisível.

JOGO 2 = são 08 peças – representadas pelos monômios: $1x^5$, $12x^5$, $6x^2$, $24x^5$, 4x, $2x^1$, $8x^4$ e 48x, que fornecem o produto $48x^6$ (quarenta e oito xis na sexta potência).

O sujeito “Se” opera mentalmente sem o registro numérico gráfico e formula o resultado por meio do pensamento **hipotético-dedutivo**. Tem precisão absoluta no registro de suas afirmações, como nas combinações: *Seis xis ao cubo vezes oito xis ao cubo dão doze xis na sexta potência e um xis ao quadrado vezes dois xis ao cubo vezes vinte e quatro xis também dá o mesmo resultado.*

Sabe o que pretende e aplica a propriedade corretamente na decomposição dos expoentes, sempre com o foco no produto final, assim como reflete com rigor e atenção na decomposição numérica de 6 em 2 e 3, como de 8 em 2 e 4. Consegue montar suas combinações sugerindo verbalmente quatro monômios, nesses reorganizando os fatores numéricos e literais com uma atenção especial aos expoentes.

Quando o sujeito “Se” é questionado sobre novas possibilidades de combinações com as oito peças do JOGO 2 indicadas por uma colega, argumenta: *Ela não pensou. Eu usei o um (1) que não muda o resultado de duas vezes vinte e quatro que é o quarenta e oito*. Sabe operar com o elemento neutro (1) como coeficiente numérico de um monômio, assim conservando o produto final da multiplicação.

Percebe-se que o sujeito “Se” não hesita na combinação e criação de suas peças, organiza um sistema em que é capaz de com facilidade identificar o todo, argumentando suas reconstruções efetuadas mentalmente.

JOGO 3 = **02 peças** – uma ficha de forma quadrangular de 20 cm x 20 cm e uma ficha de forma retangular de 20 cm x 40 cm. A atividade solicitada é a determinação da área e do perímetro das duas fichas.

A) FICHA DE FORMA QUADRAGULAR

Observo que o sujeito “Se” tem **noção de semelhança** de figuras, pois o desenho de seu “quadrado” é equivalente a ficha de forma quadrangular a ele apresentada no JOGO 3. Teve a preocupação de registrar uma figura com os lados mais semelhantes possíveis.

Quando o sujeito “Se” é questionado sobre uma possível determinação de um valor numérico para o perímetro da ficha de forma quadrangular, organiza seu pensamento exclusivamente pela compreensão algébrica simbólica: *Assim, se eu colocar um “xis” para cada um dos lados, porque são todos iguais*. Ao ser inquirido, justifica sua possibilidade de solução do problema apresentado: *Porque daí todos podem ter a sua resposta. E a resposta vai estar certa, porque cada um pode dar um valor diferente para seu xis*.

Observo que o sujeito “Se” **generaliza** a determinação do perímetro da ficha de forma quadrangular. De forma verbal, faz a sequência dos seus procedimentos registrados no papel: *Sem determinar valor para o “xis” será de “4x”, porque eu vou somar os quatro “xis” assim: $1x + 1x + 1x + 1x = 4x$*. Também generaliza a determinação da área da ficha de forma quadrangular: *a área é feita pela multiplicação da base com um lado. Então, será $(1x) . (1x) = (1x^2)$*.

Quando desenhou sua figura quadrada no papel e verbalmente operou com os valores “Xis”, o sujeito “Se” não mencionou o valor 1 para o coeficiente numérico. Conclui o estudante “Se”: *Perímetro é igual a 4x.* Registra graficamente o número 1 como coeficiente numérico, ao mesmo tempo em que convenciona *perímetro* por P e *área* por A. Assim, para o estudante “Se”: $P = 1x + 1x + 1x + 1x$ *e* $A = 1x . 1x = 1x^2$. Este registro gráfico ocorre em momentos subsequentes da resolução; primeiro, do perímetro e, depois, da área, somente através do seu pensamento. Logo, verifico que o sujeito “Se” opera com e sem o registro numérico 1 do coeficiente numérico nos seus monômios indicados como valores para as medidas dos lados do “seu quadrado”, assim como demonstra saber operar com o expoente 1 – na sua forma invisível, tanto no cálculo do perímetro como na área. “Se” registra diretamente no papel: $A = 1x . 1x = 1x^2$.

O sujeito “Se” responde de imediato, argumentando diretamente por meio de variáveis algébricas o perímetro e a área da ficha de forma quadrangular; demonstra nas suas ações correspondência operatória na linguagem e pensamento formal. Parece apresentar **esquemas de representação** e **de pensamento**, pois na solução dos problemas apresentados utiliza basicamente a função simbólica dos símbolos algébricos. Seja na sua capacidade verbal de evocar por meio de um signo, seja no registro escrito das significações ausentes para a construção de uma forma generalizada da área e do perímetro para uma figura quadrangular qualquer.

Diante de todo esse indício de pensamento formal, o sujeito “Se” não argumentou verbalmente nem registra de forma escrita as unidades de medida que estão diretamente envolvidas no produto final, tanto do perímetro (cm = centímetros) como da área (cm^2 = centímetros quadrados) da ficha de forma quadrangular.

B) FICHA DE FORMA RETANGULAR

Observo que o sujeito “Se” desenha sua figura retangular da forma mais equivalente possível a ficha de forma retangular a ele apresentado no JOGO 3. Ele teve a preocupação de registrar uma figura com os lados paralelos o mais semelhantes possíveis: *É um retângulo onde o comprimento é maior que a base.* Demonstra ter noção de espaço e proporcionalidade, pois relaciona o valor sugerido com o seu dobro: *base = x* e *comprimento = 2x*.

Quando o sujeito “Se” é questionado sobre uma possível determinação de um valor numérico para o perímetro da ficha de forma retangular, argumenta diretamente com a linguagem verbal, associando os fatores numéricos com fatores algébricos equivalentes: *Se eu disser que tem uns 20 cm por 40 cm, posso dizer que a base é “x” e o comprimento é “2x”*. Sabe e compreende o significado da variável única compondo dois diferentes monômios na sua figura retangular. A partir desse pensamento verbal que passa a ser registrado no papel, o sujeito “Se” organiza seu pensamento exclusivamente pela compreensão algébrica simbólica: $P = (2x + x + 2)$. Registra, reflete e refaz seu pensamento para outro registro considerado por ele correto na sua compreensão algébrica do perímetro da sua figura retangular: $2. (x) + 1. (x)$. Substitui o coeficiente numérico 1 por 2; para, parece pensar. Novamente anula seu registro e, pela terceira vez, registra: $P = 4x + 2x = 6x$.

O sujeito “Se” parece ter um *modelo,* mas não consegue antecipar todas as propriedades envolvidas na determinação convencional algébrica (ou formal) do perímetro da ficha de forma retangular. O estudante vai refletindo à medida que registra graficamente suas possibilidades de solução para o problema de aprendizagem a ele apresentado no JOGO 3 com a ficha de forma retangular.

Observo que o estudante “Se” também **generaliza** a determinação da área da sua figura retangular: *Multiplicando uma base com um comprimento, tenho:* $2x \cdot x = 2x^2$. Logo, registra diretamente no papel: $A = 2x \cdot 1x = 2x^2$. Também opera com o expoente 1 na sua forma invisível, tanto no cálculo do perímetro como na área da ficha de forma retangular.

Quando questiono o sujeito “Se” sobre novas possibilidades de medidas para a base e o comprimento da ficha de forma retangular sugeridas por uma colega - *e no caso da tua colega que sugeriu nesse mesmo retângulo a base “x” e o comprimento “x + 8”?–,* o estudante argumenta: *são as medidas dela. Pode e está certo. Só que daí ela vai ter que fazer no caso do perímetro a soma dos “x” e a soma dos números*. Representa graficamente no papel o seu argumento: $P = 4x + 16$. [...] *E no caso da área ela terá que multiplicar a base “x” com o comprimento “x + 8”.* Ainda na sequência do seu pensamento, registra graficamente no papel a sua afirmação verbal: $A = x \cdot (x + 8) = 1x^2 + 8x$. É possível perceber com tais argumentos sua organização através do pensamento formal tanto na resolução própria quanto na possibilidade criada pela colega.

O sujeito “Se” demonstra compreender os diferentes tipos de relações para uma determinação geral tanto da área como do perímetro para uma figura retangular qualquer. Apresenta **regulações ativas**, num movimento de relações entre conhecimentos já estruturados e novas possibilidades a serem construídas. Observo essas regulações nas ações de sustituição das variáveis de “x” e “2x” por “x” e “x + 8”, com êxito na relação parte/todo, da formalização da largura e do comprimento para uma ficha de forma retangular e nos procedimentos do cálculo com a aplicação da propriedade distributiva para uma determinação geral para a área da figura retangular.

Entretanto, o sujeito “Se” não argumentou verbalmente nem registrou de forma escrita as unidades de medida que estão diretamente envolvidas no produto final, tanto do perímetro (cm = centímetros) como na área (cm^2 = centímetros quadrados) da ficha de forma retangular.

JOGO 4: 30 peças – dominó algébrico.

O estudante “Se” faz todos os cálculos “de cabeça”. Somente interrompe sua montagem do dominó algébrico em dois momentos, os quais abaixo descrevo:

1ª parada: (9x) : (x) , pergunta: *É (1) ou (9)?* Pensa e escolhe a peça com o (9).

Os dois questionamentos estão diretamente relacionados com o expoente 1 – na sua forma invisível, nos três monômios em questão: (9x), (x) e (11x). Igualmente, com o coeficiente numérico 1 – também na sua forma invisível, que é o registro convencional algébrico do monômio (x).

Na primeira dúvida, manifestada verbalmente na divisão do monômio (9x) pelo monômio (x): *é (1) ou (9)*. Esta dúvida surge na terceira peça do dominó. O estudante faz uma parada e, na sequência, resolve sem dificuldade a operação da divisão entre monômios, que se subdivide em duas propriedades: 1) divisão dos coeficientes numéricos, logo (9 : 1 = 9); 2) subtração dos expoentes da parte literal semelhante, logo ($x^{1-1} = x^0$). Portanto, deve concluir que x^0 é igual a 1; logo, o resultado de (9x) : (x) deve seguir o seguinte pensamento: (9 : 1 = 9) e ($x : x = x^{1-1} = x^0 = 1$). Assim, o resultado é a divisão entre os resultados parciais (9) e (1) = (9 : 1 = 9). E a peça certa escolhida pelo sujeito "Se" para a continuação do dominó é a com o resultado (9).

2ª parada: (11x) – (x), para e pergunta: *Será que é ($10x^1$)?*

Na segunda dúvida manifestada verbalmente na subtração do monômio (11x) pelo monômio (x): *será que é ($10x^1$)*, na operação da subtração entre monômios semelhantes uma parte da propriedade a ser aplicada, orienta que os coeficientes numéricos devem ser subtraídos, logo (11 - 1 = 10). Assim como na operação da subtração entre monômios semelhantes, outra parte da propriedade a ser aplicada orienta que os expoentes da parte literal devem ser mantidos, logo (x = x). E (x) é igual a x^1; logo, o resultado de (11x) - (x) deve seguir o seguinte pensamento: (11 - 1 = 10) e a parte literal "x" deve ser mantida. O resultado da subtração entre os dois monômios é (10x), que corresponde à igualdade com a peça ($10x^1$); logo, (10x) = ($10x^1$). E a peça certa escolhida pelo sujeito "Se" para a continuação do dominó, após uma manifestação de dúvida em razão da visualização do expoente, foi a com o resultado correto ($10x^1$).

4.3.1.3 Entrevista 3 = "Ma"

JOGO 1 = São nove peças ($6x^3$, $6x^7$, $6x^2$, $3x^3$, $2x^5$, $2x^1$, $2x^6$, $2x^4$ e 2x) contendo monômios que, combinados no seu jogo, deverão fornecer o produto $12x^8$ (doze xis na oitava potência).

O estudante “Ma”, primeiramente, questiona o número de peças para as combinações - *pode ter mais do que duas cartelas para fazer esse doze?* – e, na seqüência, combina-as com rapidez, organizando duplas, priorizando os monômios com o coeficiente numérico seis. Faz a leitura dos expoentes pela nomenclatura convencional de forma correta: ($6x^2$) [...] *ao quadrado*, ($6x^3$) [...] *ao cubo,* ($6x^7$) [...] *na sétima potência,* ($2x^5$) [...] *na quinta potência,* ($2x^6$) [...] *na sexta potência,* ($2x^4$) [...] *na quarta potência.* O sujeito “Ma” em momento algum questiona sobre as propriedades que envolvem a multiplicação entre os monômios. Opera numérica e algebricamente demonstrando ter noção das regras aritméticas e das propriedades necessárias para a compreensão de multiplicações com elementos algébricos.

Tendo como preocupação principal os coeficientes numéricos; o estudante, na argumentação faz a conservação do símbolo, observa e opera na forma da parte (coeficiente numérico) para o todo (coeficiente numérico + parte literal). Durante a execução do JOGO 1, observo que o sujeito “Ma” tem facilidade de operar com o expoente 1, seja na sua forma visível, seja na invisível. Contudo, no momento da leitura das suas combinações, não se refere ao sinal da multiplicação, isto é, não lê a operação (*multiplicado* ou *vezes*) entre os monômios nem faz menção ao expoente 1 no monômio ($2x^1$) - *dois xis* -, na sua forma visível e na sua forma invisível ($2x$) – *dois xis*.

Após o sujeito “Ma” ser questionado sobre novas possibilidades de combinações apresentadas pela sua colega, olha para suas peças arrumadas e, sem nada falar, troca a peça ($2x^1$) por ($2x$), reorganizando suas combinações de: ($6x^7$) . ($2x^1$) para ($6x^7$) . ($2x$) e de ($2x^4$) . ($2x$) . ($3x^3$) para ($2x^4$) . ($2x^1$) . ($3x^3$). Justifica a sua substituição de peças - *não sei o que a “VanD” teria trocado, não dá para mexer em nada mais. Só pude trocar ($2x^1$) por ($2x$). Não dá mais para modificar.* O estudante afirma saber reconhecer a existência do valor 1 na posição de expoente quando não está registrado graficamente - *é automático xis com 1 ou sem 1, eu sei que vale 1.* [...] *Todas as peças em que não aparecer escrito algum expoente é por que vale 1 (um).* Questiono-o sobre a sua certeza - *sempre 1 (um)?* O sujeito “Ma”, com firmeza na resposta, demonstra compreender e saber as regras que envolvem os expoentes - *assim, só o (x) ele não precisa aparecer. Se for outro expoente tem que estar escrito para poder resolver*. O sujeito “Ma” demonstra saber operar com o expoente 1 –, seja na forma registrada graficamente, seja na forma invisível; percebe a possibilidade de mudança de posição dos monômios, mudança parte-parte ($6x^7 . 2x$, por $2x . 6x^7$), sem modificação do todo ($12x^8$), como resultado do produto.

Retomo a argumentação da colega e o sujeito “Ma” novamente responde - *sem opções. Será que “VanD” tinha as peças trocadas? Assim como eu comecei com os monômios de coeficiente 6, ela podia ter começado com os de dois, mas se os expoentes são os mesmos, então não muda nada. Já olhei todas as minhas combinações, cuidei primeiro os expoentes e depois os coeficientes, acho que ela não tinha mais o que fazer de diferente das minhas combinações.* O estudante argumenta comparativamente, sustentando suas combinações em relação às da colega e, descarta novas possibilidades dentro de um universo de peças apresentado como limitado.

Durante o JOGO 1, observo que o sujeito “Ma” mostra-se capaz de executar várias regulações através da **comutatividade** dos monômios; tem **conservação** das partes e do todo; **opera com o expoente 1** nas formas visível e invisível e apresenta compreensão da relação parte/todo na aplicação das propriedades.

JOGO 2: são 08 peças – representadas pelos monômios: $1x^5$, $12x^5$, $6x^2$, $24x^5$, $4x$, $2x^1$, $8x^4$ e $48x$, que fornecem o produto $48x^6$ (quarenta e oito xis na sexta potência).

O sujeito “Ma” opera mentalmente, mas utiliza o registro gráfico para confirmação do seu pensamento quanto à multiplicação dos fatores numéricos: *24 x 2, 12 x 4*. Argumenta percebendo as combinações de pares pré-determinados entre os expoentes dos monômios; tem base aritmética: sabe a tabuada e tem precisão na combinação de suas peças. Contudo, continua não lendo a operação (*multiplicado* ou *vezes*) entre os monômios nem faz referência ao expoente 1 no monômio ($2x^1$) - *dois xis* -, na sua forma visível e na sua forma invisível ($4x$) – *quatro xis*.

Quando o sujeito “Ma” é questionado sobre outras possíveis combinações com as oito peças do JOGO 2 indicadas por uma colega, argumenta - *só se ela mudar de posição os coeficientes: 48 e 1 por 1 e 48, 8 e 6 por 6 e 8, 2 e 24 por 24 e 2, 4 e 12 por 12 e 4. Tudo junto, os monômios todos da segunda coluna para a primeira. Não sei se pode ser considerada outra combinação se as peças eram as* *mesmas.* O estudante sabe aplicar a comutatividade entre os coeficientes numéricos dos monômios pela sua argumentação.

O sujeito "Ma", ao ser solicitado a criar suas peças, experimenta várias possibilidades, argumentando sobre facilidades e dificuldades por ele apresentadas quanto ao número de peças e valores numéricos a considerar - *é mais difícil com três peças. Se eu sei a tabuada com os números maiores, eu acho mais fácil de multiplicar. Para compor em três monômios, eu tenho que ficar dividindo e multiplicando muito mais vezes*. Consegue "dividir" o todo *quarenta e oito* no produto de partes equivalentes: (2 . 4 . 6), (6 . 8); argumenta com firmeza e clareza o desenvolvimento de suas operações com novas possibilidades de combinações entre monômios.

O estudante sabe aplicar as regras e as propriedades particulares (as partes) que envolvem uma operação (o todo) entre monômios. Apresenta coerência durante suas organizações comparativas na escolha entre valores numéricos "maiores" ou "menores" para operar nos coeficientes numéricos dos monômios, assim como na decomposição do valor total do expoente seis, argumentando - *assim como essas peças aqui (12) . (4), eu tenho que dividir o (4) em (2) vezes (2) para ter (12 . 2 . 2) = 48, e ainda pensar nos expoentes, daí ficaria: ($12x^2$) . ($2x^2$) . ($2x^2$) para chegar ao resultado ($48x^6$). Ou tenho que dividir o 12 em 6 e 2 para ter (6 . 2 . 4) = 48, daí ficaria ($6x^2$) . ($2x^2$) . ($4x^2$) para chegar ao resultado ($48x^6$). Eu prefiro os maiores 8, 12, 24 e 48.* Por meio do seu pensamento e posteriormente pelos seus registros, o sujeito "Ma" demonstra sua preferência em operar com valores numéricos "maiores".

Durante o JOGO 2, observo que o sujeito "Ma" compreende a **comutatividade** dos monômios; necessita do registro gráfico do cálculo para confirmação da operação mental; tem **conservação** das partes e do todo; **opera com o expoente 1** nas formas visível e invisível, tem antecipação dos resultados, revela precisão na combinação das partes por meio do seu pensamento **hipotético-dedutivo**.

JOGO 3: 02 peças – uma ficha de forma quadrangular de 20 cm x 20 cm e uma ficha de forma retangular de 20 cm x 40 cm. A atividade solicitada é a determinação da área e do perímetro das duas fichas.

A) FICHA DE FORMA QUADRANGULAR

O sujeito "Ma", ao ser questionado sobre um possível fator numérico para o valor de cada lado da ficha de forma quadrangular, afirma - *acho que assim olhando, uns 15 centímetros cada lado*. Na seqüência, é solicitado a determinar o valor do perímetro da ficha de forma quadrangular com o seu valor numérico considerado. Responde: *Sessenta. O perímetro é sessenta. Não me lembro certo como faz a conta, assim como fazer o registro no papel, mas sei que é sessenta*. O estudante determina o resultado do perímetro da ficha de forma quadrangular somente através de uma organização do seu pensamento; registra verbalmente sua dificuldade quanto ao registro do desenvolvimento do cálculo na linguagem convencional da matemática.

Observo que o sujeito "Ma" não consegue ter um registro gráfico muito fiel da figura de forma quadrangular, pois o desenho do seu "quadrado" é uma figura retangular. Para que ocorra a compreensão de seu desenho, argumenta: *vou escrever 15 cm em todos os lados.* Na seqüência, registra logo abaixo do seu desenho convencionando de forma generalizada a legenda "P" para perímetro com igualdade de sessenta: *P = 60.* Neste registro ocorre a indicação da unidade de medida centímetros nas unidades parciais como 15 cm nos quatro lados da figura de forma quadrangular. Contudo, essa unidade de medida não é registrada no resultado final do perímetro.

Ao ser solicitado para determinar a área da ficha de forma quadrangular, primeiro efetua o cálculo na classe: *15 x 15 = 450*, em seguida registra no papel: *A = 450*. Convenciona de forma generalizada a medida de área por "A". Questiono-o solicitando que verbalize seu raciocínio para chegar ao resultado 450. O sujeito "Ma" verbaliza seu pensamento: *eu multipliquei 15 por 15, achei 225 e depois somei mais 225 pelos outros dois lados*. O estudante acerta o valor numérico quando multiplica 15 x 15 (largura x comprimento), mas comete um erro de pensamento ao dobrar seu valor. Entretanto, no momento da explicação verbal da multiplicação dos valores numéricos da largura e do comprimento não existe referência à unidade de medida "centímetros", assim como no registro gráfico do produto também não é indicada a unidade de área (cm^2).

O sujeito "Ma", quando questionado sobre diferentes possibilidades de medidas para a largura e o comprimento da ficha de forma quadrangular propostas por outros dois colegas, – [...] *sugeriu o lado ser de 20cm* [...] *“Vin” me afirmou ser de 8cm* -, o estudante argumenta: *acho que não! Acho que colocando a régua daria no máximo uns 17 ou até 18, por aí* [...] *para “Vin” oito não pode* [...] *Na ideia dele até pode. Se colocar a régua não é possível.* Ao ser instigado em relação às afirmações de seus colegas, argumenta, tenta aproximar os resultados dos seus colegas com o seu resultado sugerido como correto: *acho que no caso do “Vin” só se aumentar os centímetros. Ou se medir por dentro o quadrado. [...] . Acho que essas diferenças só acontecem se medir por fora e por dentro*. É questionado sobre as expressões - *medir “por fora” e “por dentro”* – e, ao ser solicitado a expor seu pensamento, “Ma” argumenta: *como nós medimos as salas por fora e por dentro, daí deu a diferença da medida da parede. E isso mudou na hora de calcular o perímetro e a área das salas medidas*. O estudante justifica seu pensamento a partir da retomada de uma situação-problema prática vivenciada na sala de aula. Legitima seu argumento com o início da aceitação de outros resultados e de mais de um resultado verdadeiro e possíveis: *acho que pode um mesmo quadrado ter diferentes respostas. E respostas certas*.

Questiono o sujeito “Ma” sobre a existência de uma possibilidade para determinar o perímetro de qualquer figura de forma quadrangular quadrada. O adolescente “Ma” “salta” do seu pensamento aritmético para o pensamento formal na procura de uma possibilidade geral; faz um caminho, primeiro de forma verbal: *se eu fizesse um quadrado em que todos os lados fossem xis*, passando para a linguagem algébrica convencional. Na sequência, desenha uma outra figura de forma quadrangular e nela registra o pensamento verbalizado: *o perímetro vai ser a soma dos xis que são (x + x + x + x) => P = 4x, isto é, um “xis” para cada lado*. Registra de forma correta a generalização do perímetro da ficha de forma quadrangular *P = 4x*. Opera com os monômios (x) sem o registro gráfico do coeficiente numérico 1.

Na sequência, solicito uma forma generalizada para a área de uma ficha de forma quadrangular qualquer. O sujeito “Ma” escreve na lousa (1x). (1x) = ($1x^2$) e ($1x^2$) . ($1x^2$) = ($1x^4$). Nos monômios utilizados para a multiplicação ocorre o registro do coeficiente numérico nos monômios = (1x) assim como no resultado final = ($1x^4$). Na folha apenas escreve: $A = 1x^4$. Não chega à generalização final correta da área da ficha de forma quadrangular em função da aplicação de uma dupla operação com os expoentes dos monômios: A = $1x^4$. O estudante soube determinar uma forma generalizada correta para o perímetro de qualquer figura de forma quadrangular, mas será que compreende as regras e propriedades envolvidas nos processos? Isso porque, no momento da determinação generalizada da área, segue verbalmente o raciocínio*: a área vai ser (1x) . (1x) = ($1x^2$) e ($1x^2$) . ($1x^2$) = ($1x^4$), então escrevo A = $1x^4$*. O sujeito "Ma" faz uma tentativa de generalização da área para uma figura de forma quadrangular qualquer, entretanto não chega à generalização final correta em função da aplicação de uma dupla operação com os expoentes dos monômios: A = $1x^4$.

B) FICHA DE FORMA RETANGULAR

O sujeito "Ma" procura desenhar uma figura retangular de forma mais equivalente possível a ficha de forma retangular, inclusive para diferenciar do seu desenho da figura quadrangular irregular. Indica a medida de 25 cm (largura) nos lados horizontais e a medida de 12 cm (altura) nos lados verticais. Abaixo do registro gráfico da figura retangular convenciona "P" para perímetro, igualando-o ao resultado considerado para o perímetro: *P = 74*.

O estudante indica as unidades de medida em centímetros nos lados (largura e altura), mas não faz referência à unidade de medida no seu resultado final para o perímetro da ficha de forma retangular; apenas escreve o valor numérico setenta e quatro. Quando o sujeito "Ma" é questionado sobre o processo seguido pelo pensamento para determinar o resultado final, revela o caminho efetuando os cálculos na forma oral. Calcula, primeiro, as adições separadas das larguras e das alturas: *dá 74 de perímetro, porque (25 + 25) é 50 e (12 + 12) é 24.* Na seqüência, adiciona os resultados parciais: *logo, (50 + 24) é 74*.

O estudante "Ma" registra na classe os cálculos: *25 x 25 = 625 e 12 x 12 = 144* para a determinação da área e depois, verbalmente, justifica seus cálculos: *deu 625 e 144. Depois somei 625 com 144 e achei 769 de área*. De alguma forma existe uma lembrança de que "algo" deve ser multiplicado para determinar a área, mas não sabe como fazer o cálculo corretamente. O estudante indica de forma equivocada o valor para a área da ficha de forma retangular quando duplamente multiplica 25 por 25 (largura x largura) e 12 por 12 (altura x altura); a forma correta seria multiplicar 25 por 12. O sujeito "Ma" escreve a unidade de medida "centímetro" para os fatores numéricos 12 e 25, entretanto não a usa em nenhum outro momento, seja na forma verbal, seja durante as multiplicações parciais, nem no produto final como unidade de área em centímetros quadrados (cm^2).

Quando o sujeito “Ma” é questionado sobre a possibilidade da existência de uma forma geral de determinar o perímetro e a área de uma ficha de forma retangular qualquer, o estudante, em novo desenho, argumenta posteriormente ao seu registro gráfico: *como a largura é diferente da altura, vou representar a largura por “x” e a altura por “A”.* Observo que ele, primeiro, opera efetuando as adições parciais das larguras ($x + x = 2x$) e das alturas ($A + A = 2A$). *Nesse caso como as medidas são diferentes e eu não sei o valor de cada medida, a resposta para o perímetro vai ficar assim: $P = 2x + 2A$.* Consegue generalizar as larguras e comprimentos por diferentes variáveis literais; apresenta uma totalidade definida: o perímetro da ficha de forma retangular; tem uma coordenação combinatória entre os termos algébricos “x” e “A”. Generaliza um modo de cálculo para qualquer figura de forma retangular, como: $P = 2x + 2A$.

Para a forma generalizada da área, o sujeito “Ma” registra: $A = 1x^2 . 1A^2$. Demonstra permanecer com dúvidas após a sua composição para a forma algébrica generalizada da ficha de forma retangular: $A = 1x^2 . 1A^2$. Faz uma tentativa mas não chega à generalização final correta da ficha de forma retangular em função de uma dupla multiplicação entre as variáveis semelhantes ($x . x = x^2$) e ($A . A = A^2$). Numa segunda tentativa registra: $x^2 + A^2$, ainda não alcança êxito. O que chama a atenção é o uso da letra “A” designando “área” e também variável para a “altura”; observo o registro do fator numérico 1 como coeficiente numérico nas duas variáveis somente no resultado final para a forma generalizada da área. Não se refere em nenhum momento, seja na forma verbal, seja durante as multiplicações parciais, nem no produto final como unidade de área em centímetros quadrados (cm^2).

JOGO 4: 30 peças - dominó algébrico

Passo a descrever o único momento em que o sujeito “Ma” para, quase ao final da montagem do dominó algébrico, na vigésima peça:

1ª parada: ($20x^6$) : ($10x^5$), lê em voz alta a operação: *vinte xis na sexta potência dividido por dez xis na quinta potência*; usa o lápis para dividir 20 por 10. Confere: ($2x$).

O questionamento está diretamente relacionado ao expoente 1 – na sua forma invisível. O sujeito “Ma” vinha de uma sequência em que para (11x) – (x) o resultado correto era ($10x^1$) e, neste caso, o expoente 1 não é registrado pela forma convencional geométrico e algébrico. Mas na minha organização das peças a escolha foi por registrar o expoente 1, justamente para verificar se o estudante conserva a igualdade entre (10x) e ($10x^1$). Logo, na continuação do JOGO 4, agora apresentando uma divisão de monômios, era necessária a aplicação de duas propriedades; 1) a divisão entre os coeficientes numéricos (20 : 10 = 2) e 2) a subtração dos expoentes (6 – 5 = 1). E este foi o ponto da dúvida: onde está o número 1 do expoente? A parada ocorreu em razão da não visualização do expoente 1.

Para as **considerações parciais** do GRUPO 1, retomo alguns passos seguidos pelos estudantes adolescentes “Pe”, “Se” e “Ma” nas três entrevistas.

Durante o JOGO 1, observo que os três estudantes escolhidos para as entrevistas, da T71 “Pe”, da T72 “Se” e da T73 “Ma”, compreendem a **comutatividade** dos monômios (A . B = B . A); têm **conservação** das partes (sinal + fator numérico, fator literal + expoente) e do todo (monômio = coeficiente numérico + parte literal); reconhecem a igualdade entre os monômios (2x) e ($2x^1$).

Os estudantes do GRUPO 1, durante o JOGO 2, em geral, operam mentalmente, não utilizando o registro gráfico para confirmação do seu pensamento quanto ao produto numérico e à aplicação das propriedades algébricas. Argumentam percebendo as combinações de pares pré-determinados entre os expoentes dos monômios; demonstram precisão na combinação de suas peças. Observo que os estudantes “Pe”, “Se” e “Ma” apresentam segurança em suas respostas e conseguem êxito nas operações com o expoente 1 nas formas visível e invisível; têm antecipação dos resultados e revelam precisão na **combinação** das partes por meio do seu pensamento **hipotético-dedutivo**.

Os estudantes desse grupo, no JOGO 3, **conseguem se aproximar da generalização** correta para o perímetro e a área para uma ficha de forma quadrangular e uma ficha de forma retangular qualquer; nota-se que os sujeitos apresentam uma estrutura lógico-matemática que é operatória. Esse comportamento deve-se a coordenações próprias dos diversos elementos em suas possibilidades de respostas. Eles apresentam um bom grau de organização em seu modelo de significação do conceito de área e perímetro. Articulam regulações ativas ao longo do pensamento numa busca espetacular de compreensão das situações propostas tanto da área como do perímetro, para uma ficha de forma quadrangular retangular qualquer.

"Pe", "Se" e "Ma" souberam montar o "dominó algébrico". Tal JOGO 4 tem como objetivo a combinação das peças por meio da resolução das quatro operações algébricas de adição, subtração, multiplicação e divisão. Nessas resoluções, as dificuldades apresentadas foram em relação ao coeficiente numérico e ao expoente 1 – na sua forma invisível. Mas, com poucas interrupções e recordando as propriedades específicas, **operaram com o coeficiente e expoente 1 nas formas visível e invisível** presentes nas quatro operações em questão, nas peças.

4.3.2 Interpretação dos 4 Jogos no GRUPO "E" 2 – ÊXITO PARCIAL

Foram entrevistados os estudantes "An" – T71 – Escola (1) IEST, "Dy" – T72 – Escola (2) ANCH e "VanD" – T73 – Escola (1) IEST.

4.3.2.1 Entrevista 4 = sujeito "An"

JOGO 1 = São nove peças $6x^3$, $6x^7$, $6x^2$, $3x^3$, $2x^5$, $2x^1$, $2x^6$, $2x^4$ e $2x$ contendo monômios, que, combinados no seu jogo, deverão fornecer o produto $12x^8$ (doze xis na oitava potência).

O sujeito "An" aplica corretamente a regra da multiplicação entre monômios, pois tem noção da localização do coeficiente numérico e do expoente; obtém êxito com os expoentes visíveis e invisíveis e lê com perfeição o símbolo operatório entre as peças. Contudo, faz a leitura incorreta da nomenclatura dos expoentes: "(x^1) = *xis na um*, (x^2) = *xis na dois*, (x^3) = *xis na três*, (x^4) = *xis na quatro*, (x^7) = *xis na sete*". Entretanto esta situação não desorganiza seu pensamento quanto a aplicação correta das propriedades envolvidas na multiplicação entre os monômios das peças.

O estudante efetua a adição dos expoentes iniciando pelos expoentes "visíveis", isto é, aqueles que estão graficamente registrados nas peças ($3x^3$) e ($2x^4$) e somente no final adiciona o expoente um (1), que está na forma invisível no monômio ($2x$). Ele utiliza o recurso primitivo de mostrar com o dedo as peças durante as combinações e na leitura final das peças, assim como apresenta necessidade de recorrer a conhecimentos experenciados anteriormente na sala de aula. Apresenta na argumentação conservação do símbolo, tendo preocupação com os coeficientes numéricos e com os expoentes; observa e opera na forma das partes para o todo (produto final).

Quando o sujeito “An” é questionado sobre possibilidades de mudanças na combinação das peças, retoma as características e confirma a igualdade entre os monômios (2x) e ($2x^1$), assim como estabelece a coordenação verbal na explicação dada entre o expoente 1 na forma visível com a forma invisível entre o monômios anteriormente referidos. Não tenta a comutatividade, seja entre os coeficientes numéricos, seja entre os expoentes na sua primeira combinação das peças. Por meio da composição no JOGO 1, demonstra ter êxito na aplicação das duas propriedades (multiplicação e potenciação) explanadas verbalmente.

O sujeito “An”, quando solicitado para criar suas peças mantendo o produto $12x^8$, tem a preocupação de combinar monômios com coeficientes numéricos e expoentes diferentes das peças ocupadas no JOGO 1. Registra o coeficiente numérico 1 no monômio ($1x^3$) e deixa o expoente 1 – na forma invisível no monômio (4x). No momento da leitura das peças criadas, lê o número 1 como coeficiente numérico, mas não faz referência a ele quando da leitura do expoente 1 – na forma invisível.

Quando questionado sobre a determinação de diferentes combinações por uma colega, o sujeito “An” argumenta: *Olha só, se eu trocar de posição $2x^5 . 6x^3$ para $6x^3 . 2x^5$, ou $12x^5 . 1x^3$ para $1x^3 . 12x^5$, ou $3x^7 . 4x$ para $4x . 3x^7$, o resultado é o mesmo*. [...] *Troco também a ordem dos expoentes: de 7 por 1 ($x^{7+1} = x^{1+7}$). Ou então de 5 por 3 ($x^{5+3} = x^{3+5}$).* Observo que mostra-se capaz de executar várias regulações ao longo da sua argumentação em função dos questionamentos que se colocam e do raciocínio que desencadeia através da comutatividade entre os monômios, conservando o produto $12x^8$. Quando instigado sobre novas possibilidades, sabe justificar suas combinações.

Durante o JOGO 1, observo que o sujeito “An” compreende a **comutatividade** dos monômios; realiza a combinatória do agrupamento multiplicativo corretamente; tem êxito na **conservação** da parte e do todo; tem necessidade do registro do valor numérico 1 como coeficiente numérico. As operações são realizadas com necessidade do registro verbal de suas ações.

JOGO 2 = são 08 peças – representadas pelos monômios: $1x^5$, $12x^5$, $6x^2$, $24x^5$, 4x, $2x^1$, $8x^4$ e 48x, que fornecem o produto $48x^6$ (quarenta e oito xis na sexta potência).

O sujeito "An" opera com o registro numérico gráfico, formula o resultado através de longo pensamento. Questiono-o e o estudante justifica a demora: *mas não tem 48 na tabuada do 9, do 5 nem do 7.* Aparece em destaque "o papel da multiplicação (tabuada)", o resultado 48 está fora do alcance da contagem "rápida" com os dedos, ou da "decoreba" da multiplicação até dez.

O estudante necessita de um tempo maior na tentativa de articular coeficientes numéricos "diferentes" das peças ocupadas do JOGO 2: *na do 6 tem 8 e na do 8 tem 6. Todas que eu pensei tem aqui*. Na procura de novas combinações, primeiro articula somente pelo pensamento *os possíveis*, como nas suas combinações: *($3x^5$) . ($16x^1$) e ($6x^2$) . ($4x^3$) . (2x).* Utiliza em suas combinações o expoente 1 – na forma visível no monômio (*$16x^1$*) e o expoente 1 – na forma invisível no monômio (*2x).*

Apresenta características de compreensão do que pretende e aplica a propriedade corretamente na decomposição dos expoentes nas formas visível e invisível, sempre com o foco no resultado final da multiplicação. Consegue montar suas combinações sugerindo três monômios, reorganizando nesses as partes que compõem o monômio, com uma atenção especial aos coeficientes numéricos. Assim, posso observar rigor e atenção na decomposição numérica de 24 em 6 e 4: *sim, porque seis vezes quatro é vinte e quatro que vezes dois é quarenta e oito*.

Quando o sujeito "An" é questionado sobre novas possibilidades de combinações com as suas três peças do JOGO 2 indicadas por uma colega, ele argumenta: *não muda nada. Eu só vou fazer duas vezes quatro que é oito e vezes o seis e chego no quarenta e oito também.* Volto a questioná-lo: *por que você escreveu o expoente um (1) no monômio ($16x^1$) e não escreveu o expoente um (1) em (2x)?* O estudante "An" justifica sua opção pelo expoente 1 seja na forma visível, seja na forma invisível, por observar que alguns dos seus colegas apresentam dificuldades de solução na operação da multiplicação entre monômios: *os expoentes servem para confundir* [...] *aqueles mais burrinhos* [...] *o expoente 1 se não aparece escrito, é esquecido na hora da conta.*

Durante o JOGO 2, observo que o sujeito “An” continua apresentando as características de compreensão da **comutatividade**, articula relações entre parte/todo dos monômios e as coordena na manipulação dos expoentes nas formas visível e invisível.

JOGO 3: 02 peças – uma ficha de forma quadrangular de 20 cm x 20 cm e uma ficha de forma retangular de 20 cm x 40 cm. A atividade solicitada é a determinação da área e do perímetro das duas fichas.

A) FICHA DE FORMA QUADRANGULAR

Observo que o sujeito “An” tem **noção de semelhança** de figuras, pois o desenho do seu quadrado é equivalente a ficha de forma quadrangular a ele apresentado no JOGO 3. Teve a preocupação de registrar uma figura com os lados mais semelhantes possíveis.

Quando o sujeito “An” é questionado sobre uma possível determinação de um valor numérico para o perímetro da ficha de forma quadrangular, organiza seu pensamento exclusivamente pela compreensão numérica simbólica: *é um quadrado [...] porque tem altura e comprimento igual [...] tem uns quinze centímetros.* Ao ser inquirido, justifica sua possibilidade numérica de indicação com a medida dos comprimentos, reconsidera o seu primeiro valor, agora alcançando o valor real da medida: *não, tem uns vinte centímetros.*

O estudante “An” desenha sua figura quadrangular no papel e nos quatro lados indica o valor da sua unidade de medida considerada: *20 cm*. Apresenta dúvidas na localização do perímetro ao ser solicitado seu valor: *perímetro é por dentro ou por fora?* Após o manuseio da ficha de forma quadrangular (passa o dedo indicador somente numa borda do quadrado) e na sua argumentação decide: *o perímetro é “por fora”, então tem 20 cm.* Observo que o sujeito “An” convenciona perímetro por “P”, assim como registra na forma escrita e verbal sua compreensão: *P = 20 cm.* Logo, não correlaciona os valores indicados para os quatro comprimentos com o cálculo do perímetro da ficha de forma quadrangular.

Diante da informação de outras possibilidades de medidas para o comprimento na ficha de forma quadrangular, no momento em que a pesquisadora procura explorar o pensamento do entrevistado, oferecendo contra-sugestões e situações de conflito. As respostas do sujeito “An" se conservam, ele não considera, não reflete sobre novas possibilidades. A informação não produz nenhuma dúvida na sua decisão.

O sujeito “An”, ao ser solicitado a determinar a área da ficha de forma quadrangular, convenciona-a por: *A*. Primeiro questiona a operação a ser utilizada: *é multiplicar?* Por algum tempo para, parece pensar, responde: *é quarenta*. Permanece em dúvida e, após muita resistência, decide-se por “montar a conta” no papel. Registra por escrito e verbalmente: *é quatrocentos centímetros quadrados.* O sujeito “An” obtém êxito ao efetuar a multiplicação entre a largura e o comprimento para calcular a área, na escrita e na leitura correta da unidade de medida para a área em centímetros quadrados (cm^2) e no registro simbólico geométrico convencionando área por “A”.

Ao ser informado sobre a existência de outras possibilidades de valores numéricos para a área da mesma ficha de forma quadrangular, o sujeito “An” permanece com a dúvida: *acho que pode* [...] *não sei.* Também, quando questionado sobre a validade de duas ou mais soluções, demonstra não compreender as possibilidades que as variáveis numéricas e algébricas trazem para o cálculo da área da figura quadrangular: *não sei, não imagino como pode ter três respostas certas para o mesmo quadrado*.

No momento em que como pesquisadora proponho aquilo que considero ser uma das situações de maior conflito que é o caso de uma forma de cálculo geral da área para a ficha de forma quadrangular. O sujeito oscila, não aplica seu modelo organizado anteriormente com elementos numéricos; tem problemas em estabelecer uma relação mental com termos incógnitos, ou melhor dizendo, de reorganizar seus esquemas em função da coordenação com variáreis literais.

O sujeito “An” utiliza basicamente símbolos numéricos, seja na sua explicação verbal, seja no registro escrito do seu pensamento, na construção de uma forma generalizada para a determinação da área e do perímetro para uma ficha de forma quadrangular qualquer.

B) FICHA DE FORMA RETANGULAR

Observo que o sujeito “An” desenha sua figura retangular da forma mais equivalente possível a ficha de forma retangular com a preocupação primeira de conferir com a palma da mão as suas medidas antes de anunciá-las verbalmente: *é* *um retângulo, ele é mais largo e menos comprido* [...] *uns 35 cm de largura e uns 15 cm de comprimento.* Registra e lê os valores numéricos para a largura e o comprimento ao redor da figura retangular com suas unidades de medida em centímetros. Observo que tem noção de espaço e proporcionalidade ao registrar uma figura com os lados paralelos o mais semelhantes possíveis.

Quando o sujeito “An” é solicitado a determinar um valor numérico para o perímetro da ficha de forma quadrangular, argumenta diretamente na linguagem verbal associando os valores numéricos: *para calcular o perímetro tenho que somar 35 com 35 e 15 com 15 [...] será 70 de largura e 30 de comprimento [...] então vou somar 70 com 30 que dão 100.* Obtém êxito ao efetuar o registro das adições parciais das larguras, 70 cm, e dos comprimentos, 30 cm, utilizando os valores numéricos associados com a sua unidade de medida.

Observo um avanço no pensamento do sujeito “An" em relação às organizações para o perímetro da ficha de forma retangular, pois essa sequência de adições parciais não ocorreu no cálculo da ficha de forma quadrangular. Entretanto, não mais utiliza símbolos para convencionar largura, comprimento e perímetro; escreve as palavras por extenso no papel: *largura 70 cm, comprimento 30 cm, Perímetro.* Registra de forma correta o valor numérico do perímetro, mas registra incorretamente a unidade de medida final: *100* cm^2*.*

Na determinação da área da ficha de forma retangular, o sujeito “An” localiza o espaço e manifesta verbalmente: *sim, eu sei que é o de dentro. Vou multiplicar um 15 por um 35. [...] Achei 525*. Registra o cálculo e o produto 525 e depois o modifica para 52.5 (cinquenta e dois ponto cinco), mas lê quinhentos e vinte e cinco. Não utiliza um símbolo para convencionar a área; escreve a palavra por extenso; não utiliza as unidades de medida de comprimento e de área, nem verbal, nem registradas no papel.

O sujeito “An", ao ser questionado sobre “outras possibilidades verdadeiras”, aceita, confirmando “novas possibilidades verdadeiras” de medida para a mesma figura de forma retangular: *pode, não usamos régua!* Supõe novas possibilidades, comparando-as com as sugeridas pelos colegas, somente na forma verbal: *também pode ser 50 cm e 100 cm. Enquanto não usarmos régua, todos estão certos*. Na sequência do seu pensamento, solicito que esclareça essa existência de mais de um acerto para uma única área. O estudante argumenta: *me lembro de alguma coisa ter* *com o “xis”. [...] se eu colocar um xis aqui deste lado do retângulo, todas as respostas estão certas, porque cada um pode pensar um “xis” diferente.* O adolescente consegue generalizar num primeiro momento, associando valor numérico (35 cm) para largura e valor generalizado (x) para o comprimento; esse processo é registrado nas formas verbal e escrita.

Num segundo momento, o sujeito “An” desenha uma nova figura de forma retangular. Observo-o refletindo sobre a primeira figura retangular e, então, questiono-o novamente sobre como pensar uma forma de determinar o perímetro e a área para qualquer figura de forma retangular. O adolescente reage: *só vai estar certa se eu colocar “xis” em tudo!* Agora, no registro gráfico ele considera o mesmo “fator literal” para os quatro lados da figura retangular, questiona seu registro e decide modificar os valores considerados para a largura de “x” para “2x”, argumentando sua validade por ser “o dobro” do comprimento. Posso observar que o sujeito mostra-se capaz de utilizar suas regulações da operação anterior para a determinação do perímetro com os valores numéricos para os valores algébricos. Adiciona os valores algébricos de forma verbal correta, chegando ao resultado igual a 6x, registrando corretamente: *Perímetro = 6x.* Não usa uma convenção para a palavra *perímetro,* assim como não registra a unidade de medida centímetro (cm) na variável “x” como comprimento, largura e resultado geométrico do perímetro.

O sujeito “An”, também de forma correta, registra convencionalmente o cálculo da área da sua figura de forma retangular no modo generalizado como se fosse para qualquer figura retangular: *Área = 2x . x*. Transmite a impressão de saber aplicar a regra da multiplicação entre a largura e o comprimento das medidas convencionadas, mas não parece compreender o significado da variável “x”, ora considerada largura, ora considerada comprimento.

O estudante “An" não convenciona um fator literal para designar a “área”, nem registra a unidade de medida de área = cm^2 no resultado algébrico da área de uma figura de forma retangular qualquer. Desconsidera os expoentes 1 – na forma invisível no cálculo da área, fato evidente no seu registro gráfico, pois não efetua a adição dos expoentes das bases “xis” ($x \,.\, x = x^{1+1} = x^2$) que compõem a parte literal dos monômios, quando o resultado verdadeiro para a área deveria ser = $2x^2$. O sujeito “An” parece não ter um *modelo,* mas consegue antecipar algumas das propriedades envolvidas na determinação convencional algébrica (ou formal) do perímetro e da área da ficha de forma retangular.

Para a determinação da área corretamente se faz presente o uso das operações combinatórias, isto é, a multiplicação e a adição de fatores dispostos num pensamento em duas etapas. Uma atitude característica dos adolescentes diante de uma associação de dois ou mais fatores, por exemplo, é estudar um e afastar os demais, sem maiores interferências nas suas hipóteses para compreensão de uma situação problema.

JOGO 4: 30 peças – representadas por monômios utilizando as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) - dominó algébrico elaborado pela pesquisadora.

O sujeito “An” para em cinco momentos durante a sua montagem do dominó algébrico, os quais passo a descrever:

Os dois primeiros questionamentos estão diretamente relacionados com o expoente 1 – na sua forma visível e invisível, nos quatro monômios em questão: ($7x^1$), ($2x^1$), ($3x$) e (x), assim como com seus resultados: ($9x$) e ($2x$).

1ª parada: ($7x^1$) + ($2x^1$), para e indaga: *Mas não tem ($9x^1$). Só tem 9x, pode ser?* Responde ($9x$).

A primeira dúvida é manifestada verbalmente na adição do monômio ($7x^1$) com o monômio ($2x^1$): *mas não tem ($9x^1$). N*a operação da adição entre monômios semelhantes, uma parte da propriedade a ser aplicada orienta que os coeficientes numéricos devem ser adicionados; logo, (7 + 2). Assim também, na operação da adição entre monômios semelhantes outra parte da propriedade a ser aplicada orienta que os expoentes da parte literal devem ser mantidos, logo ($x^1 = x^1$). E (x^1) é igual a (x); logo, o resultado de ($7x^1$) + ($2x^1$) deve seguir o seguinte pensamento: (7 + 2 = 9), e a parte literal “x^1” deve ser mantida. O resultado da adição entre os dois monômios é ($9x^1$), que corresponde à igualdade com a peça ($9x$). Então, ($9x^1$) = ($9x$). A peça certa escolhida pelo sujeito “An” para a continuação do dominó, após sua manifestação de dúvida em razão da não visualização do expoente, supondo que seu pensamento tenha percorrido o caminho acima traçado, foi a com o resultado correto ($9x$).

2ª parada: $(3x) – (x)$, responde $(3x^4)$. Para, conversa consigo. Inconformado, parece procurar outra solução: *não pode (3 – 1) é 2 e fica o mesmo xis*. Troca por $(2x)$.

Manifesta verbalmente sua segunda dúvida na subtração do monômio $(3x)$ com o monômio (x): *responde* $(3x^4)$. Na operação da subtração entre monômios semelhantes, uma parte da propriedade a ser aplicada orienta que os coeficientes numéricos devem ser subtraídos; logo, $(3 – 1)$. Nesta subtração existe uma questão particular no monômio (x), pois, convencionalmente, não é registrado seu coeficiente numérico 1. Logo, a leitura deve ser da igualdade $(x) = (1x)$. A outra parte da propriedade da subtração orienta que os expoentes da parte literal devem ser mantidos; logo, $(x = x)$. Portanto, o resultado de $(3x) - (x)$ deve seguir o seguinte pensamento: $(3 - 1 = 2)$ e a parte literal "x" deve ser mantida. O resultado da subtração entre os dois monômios é $(2x)$. E a peça $(3x^4)$ escolhida pelo sujeito "An" como primeiro resultado da subtração pareceu-me ser um grande descuido, pois já havia efetuado anteriormente quatro outras subtrações que exigiam maiores cuidados na escolha da peça certa para a continuação do dominó. Após uma manifestação de dúvida em função da visualização do expoente, verbalmente aplica as propriedades da subtração: *não pode 3 - 1 é 2 e fica o mesmo xis*. Vai à procura da peça com o resultado correto e troca $(3x^4)$ por $(2x)$.

3ª parada: $(8x^4) + (x^4)$, responde $(9x^8)$. Para, parece pensar: *não eu só posso somar se tiver multiplicando e aqui não multipliquei nada*. Troca por $(9x^4)$.

A terceira dúvida é manifestada verbalmente na adição do monômio $(8x^4)$ com o monômio (x^4): *não eu só posso somar se tiver multiplicando e aqui não multipliquei nada.* Na operação da adição entre monômios semelhantes, uma parte da propriedade a ser aplicada orienta que os coeficientes numéricos devem ser adicionados; logo, $(8 + 1)$. Nesta adição existe uma questão particular no monômio (x), pois, convencionalmente, não é registrado seu coeficiente numérico 1. Logo, a leitura do sujeito "An" deve ser da igualdade $(x) = (1x)$. Assim, também na outra parte propriedade a ser aplicada orienta que os expoentes da parte literal devem ser mantidos; logo, $(x^4 = x^4)$. Portanto, o resultado de $(8x^4) + (x^4)$ deve seguir o seguinte pensamento: $(8 + 1 = 9)$ e a parte literal "x^4" deve ser mantida. O resultado da adição entre os dois monômios é $(9x^4)$. Deduzo que a peça $(9x^8)$ escolhida pelo sujeito "An" como primeiro resultado da adição parece ser um reflexo resultante de uma sequência de multiplicações efetuadas anteriormente. Após uma manifestação verbal comparando as propriedades específicas dos expoentes envolvendo a multiplicação e a adição de monômios, o sujeito “An" faz a troca da peça ($9x^8$) pela peça do dominó com o resultado ($9x^4$).

4ª parada: (x) . (x), responde (1). *Pera aí, sim (1.1) é (1), mas não precisa aparecer escrito. E aqui eu tenho que somar os expoentes (1 + 1) de cada xis que é dois.* Troca por (x^2).

O sujeito “An" manifesta verbalmente sua quarta dúvida na multiplicação do monômio (x) pelo monômio (x): *é (1)*. Esta dúvida em “An” surge na vigésima sexta peça do dominó. Nesta multiplicação existem duas questões muito particulares envolvendo o número 1: 1ª) questão particular do coeficiente numérico 1 no monômio (x), pois, convencionalmente, não é registrado seu coeficiente numérico 1. Logo, a leitura do sujeito “An” deve ser da igualdade entre (x) e (1x), isto é (x = 1x); 2ª) questão particular do expoente 1 – na forma invisível no monômio (x), pois o número 1, quando ocupa a posição de expoente num monômio convencionalmente, também não é registrado graficamente. Logo, a leitura deve ser (x) = (x^1).

Sabendo-se que a operação da multiplicação entre dois monômios se subdivide em duas propriedades: 1) multiplicação dos coeficientes numéricos, logo (1 . 1); 2) adição dos expoentes da parte literal semelhante, logo ($x^{1+1} = x^2$), a leitura que o sujeito “An” deve ter feito na sua primeira solução foi apenas do produto (1 .1), esquecendo-se da parte literal dos monômios (x). No momento em que o sujeito “An” reorganiza seu pensamento - *e aqui eu tenho que somar os expoentes (1 + 1) de cada xis que é dois -,* substitui a peça com (1) pela peça com o monômio (x^2).

5ª parada: (9x) . (x), lendo a multiplicação responde: (9x). *Mas, só tem essa peça. Hii, tá certo (9.1) é (9) e (1 + 1) é dois no expoente*. Completa com ($9x^2$).

A quinta dúvida é manifestada verbalmente na multiplicação do monômio (9x) pelo monômio (x): *é (9x)*. Esta dúvida do sujeito “An” surge na vigésima nona peça do dominó. O estudante faz uma parada e, na sequência, resolve a operação da multiplicação entre monômios da peça em questão: *tá certo (9.1) é (9) e (1 + 1) é dois no expoente.* Formalizando seu pensamento, o sujeito “An" deve ter seguido as duas etapas da multiplicação entre os monômios: (9 . 1 = 9) e ($x . x = x^{1+1} = x^2$). Mesmo com uma só peça para terminar o JOGO 4, questiona e compara os resultados das duas peças: (9) e ($9x^2$). Com maior certeza da solução, completa a sequência do dominó algébrico com a última peça: ($9x^2$).

Observo regulações por comparações ativas, pois o sujeito “An" é capaz de buscar elementos que começam a constituir sistemas dinâmicos, executando várias ações por retroação.

4.3.2.2 Entrevista 5 = sujeito “Dy”

JOGO 1 = São nove peças ($6x^3$, $6x^7$, $6x^2$, $3x^3$, $2x^5$, $2x^1$, $2x^6$, $2x^4$ e 2x) contendo monômios que, combinados no seu jogo, deverão fornecer o produto $12x^8$ (doze xis na oitava potência).

O sujeito “Dy” necessita de muito tempo para “organizar” seu pensamento em relação às regras da multiplicação entre monômios e as propriedades que envolvem o expoente: *não lembro bem da regra* [...] *quando multiplica, diminui os expoentes* [...] *não, prô, espera eram 2D, quando divide se diminui*. *Então é assim: quando multiplica se soma os expoentes.* O estudante precisa reorganizar seus esquemas em função das duplas ações que envolvem as partes e o todo na operação da multiplicação com monômios (coeficientes numéricos = multiplicação e parte literal (expoentes) = adição.

O estudante procede o cálculo a partir dos expoentes dos monômios, usando o meio físico dos seus dedos como recurso para a adição dos mesmos. Justifica sua ação - *eu estava calculando os expoentes. Os expoentes, eu tinha que calcular primeiro os expoentes, porque os números eu sabia.* Não demonstra ter uma regularidade para as combinações entre os monômios, e as peças são organizadas exclusivamente pelos expoentes.

Não lê o sinal da operação da multiplicação entre os monômios ($6x^2$) . ($2x^6$), lê: *dois xis na segunda e dois xis na sexta*. Apresenta “confusão” na leitura da linguagem algébrica; na maioria dos exemplos não lê de forma correta o nome próprio dos expoentes ($6x^7$), lê *seis xis na sétima*; ($2x^4$), lê *dois xis na quarta*; ($6x^3$), lê *seis xis na terceira potência*; ($6x^2$), lê *dois xis na segunda*; ($2x^6$), lê *dois xis na sexta*. Lê o expoente 1 quando aparece registrado graficamente para ($2x^1$), lê *dois xis na um* e na sua leitura ignora o expoente 1 quando está na forma invisível como para (x), lê *xis.*

O sujeito “Dy”, ao ser questionado sobre a possibilidade de mudanças na combinação das peças, argumenta afirmando a impossibilidade de novas combinações*: olhando assim acho que não dá para trocar nenhum de lugar por causa dos expoentes*. Não tenta a comutatividade entre os coeficientes numéricos nem com os expoentes dos monômios; não argumenta comparativamente sustentando suas combinações em relação com as da colega e não parece saber argumentar sobre novas possibilidades dentro de um universo apresentado como limitado de peças.

Ao ser informado sobre a determinação de diferentes combinações por um colega, o sujeito “Dy” argumenta somente através dos coeficientes numéricos: *fica a mesma coisa. Não importa 2 x 6 = 12 e 6 x 2, também.* O estudante, na sequência das atividades, ao ser solicitado a criar suas peças conservando o resultado ($12x^8$), combinou as peças ($12x^7$) e (x^1); em seguida, modificou para ($12x^7$) e (x). Questionei-o sobre o motivo da substituição do seu monômio (x^1), onde ocorreu o registrou do expoente 1, pelo monômio (x) sem o expoente 1, e “Dy” justifica: *porque me lembrei que tanto escrito como sem vale um (1).* Observo que reconhece a igualdade exponencial (x^1) = (x) entre os monômios ($2x^1$) e (2x).

Durante o JOGO 1, observo que o sujeito “Dy” somente é capaz de formular corretamente a combinação das peças a partir de regulações executadas ao longo das seções, necessitando organizações mentais específicas a respeito das partes do monômio como o expoente 1 – na forma visível e invisível.

JOGO 2: são 08 peças – representadas pelos monômios: $1x^5$, $12x^5$, $6x^2$, $24x^5$, 4x, $2x^1$, $8x^4$ e 48x, que fornecem o produto $48x^6$ (quarenta e oito xis na sexta potência).

O sujeito “Dy” opera exclusivamente por meio do registro numérico gráfico; somente após transcorridos sete minutos combina as peças na multiplicação correta para obter $48x^6$. Continua necessitando de um longo espaço de tempo para organizar seus esquemas de pensamento e visualizar as duplas ações que envolvem as partes e o todo das peças do jogo. O estudante orienta-se a partir dos valores numéricos do coeficiente numérico dos monômios, usando o registro gráfico como recurso na multiplicação dos mesmos. Primeiro, registra no papel as possibilidades numéricas: *48 x 1, 24 x 2, 12 x 4 e 8 x 6*; num segundo momento, articula-as com os expoentes já registrados na parte literal do monômio.

O estudante continua não lendo o sinal de operação da multiplicação entre os monômios, assim como ocorreu no JOGO 1, na leitura da linguagem algébrica; na maioria dos exemplos não lê de forma correta o nome próprio dos expoentes. Permanece lendo o expoente 1 quando aparece registrado graficamente para ($2x^1$), lê *dois xis na um* e na sua leitura, ignora o expoente 1 quando está na forma invisível, como para (4x), lê *quatro xis.*

Na sequência das atividades, ao ser solicitado a criar suas peças conservando o resultado ($48x^6$), o estudante "Dy" combina as duplas *($48x^3$) . ($1x^3$)* e *($12x^4$) e ($4x^2$).* Questiono-o sobre sua compreensão da palavra "criar" e ele argumenta: *Não criei. Copiei os números já prontos. Ah, é mais fácil, só mudei os expoentes!* O estudante mantém os coeficientes numéricos das peças do JOGO 2 e apenas atribui novos valores para seus expoentes.

Quando o sujeito "Dy" é questionado sobre novas possibilidades, isto é, diferentes combinações por uma colega, argumenta: *se eu só troquei os expoentes sem mexer nos números, acho que tem*. Solicito a partir da sua argumentação que realmente crie seus novos monômios para o produto ($48x^6$). E o estudante aceita o desafio; na primeira tentativa: *errei, coloquei todo expoente 6 em um só*. Registra num único monômio o expoente seis; logo, não considera no outro monômio a parte literal registrada como (x^0) para chegar ao resultado ($48x^6$). Na segunda tentativa, argumenta: *mas acho que não dá! Por que 3 x 12 já é 36 e se fizer vezes dois, passou de 48 e se for vezes 1 é 36, é pouco*. Questiono-o sobre a sua primeira "criação" e ele justifica seu acerto: *é bem mais fácil já enxergar as peças escritas. Daí é só combinar, que dá certo. Mas quando tem que inventar as peças e montar, já não é tão fácil como eu achei que era*.

Insisto para que o sujeito "Dy" tente novamente e ele passa a decompor os valores numéricos: *tá certo, vou tentar mais uma vez, agora com ($12x^4$) vezes ($4x^2$). Vou desmanchar o 12 em 3 e 4, vai ficar: ($3x^2$) . ($4x^2$) . ($4x^2$). O expoente já está certo é 6 e vai dar certo nos números porque (3 . 4 . 4) é 48. Achei, este deu certo!* Questiono-o sobre as dificuldades que enfrentou para combinar as peças do JOGO 2 e para "criar" suas peças, e ele argumenta: [...] *mas não é difícil, só tem que pensar mais. Fica difícil se não tem tempo para gente pensar mais. Porque nem sempre a gente tem esse tempo para pensar em aula, passa muito rápido*. O estudante adolescente consegue estabelecer um paralelo com a mesma situação de aprendizagem vivenciada em dois momentos diferentes: um, na entrevista individual e, outro, no grupo em sala de aula, argumentando a relação direta das dificuldades enfrentadas com o conteúdo em função do tempo.

Durante o JOGO 2, observo que o sujeito “Dy” é capaz de formular corretamente a combinação das peças a partir de regulações numéricas; não aplica a comutatividade. Mantém a conduta anterior necessitando de um espaço maior de tempo para as organizações mentais específicas a respeito das suas criações principalmente em função dos novos coeficientes numéricos dos monômios.

JOGO 3: 02 peças – uma ficha de forma quadrangular de 20 cm x 20 cm e uma ficha de forma retangular de 20 cm x 40 cm. A atividade solicitada é a determinação da área e do perímetro das duas fichas.

A) FICHA DE FORMA QUADRANGULAR

Quando o sujeito “Dy” é questionado sobre uma possível determinação de um valor numérico para o lado da ficha de forma quadrangular, supõe: *uns 20 centímetros. É só medir um lado que todos os outros são iguais*.

Observo que o sujeito “Dy” desenha sua figura quadrangular num formato retangular, contudo afirma saber que *no seu quadrado* o valor dos quatro lados deve ser igual. Ao ser solicitado a determinar o valor do perímetro da ficha de forma quadrangular, primeiro tem necessidade de localizar o perímetro no objeto para, posteriormente, indicar seu valor numérico. O estudante, ao registrar seu pensamento concomitantemente nas formas verbal e escrita, argumenta: *a área é aqui*, passa a mão de forma circular dentro da ficha de forma quadrangular. *E o perímetro é aqui ao redor*, passando o dedo indicador na borda da ficha. Registra por extenso a palavra “perímetro”, não convenciona um símbolo para a expressão. Parece saber que o perímetro está relacionado com a borda da ficha de forma quadrangular: *Perímetro é igual a quatro lados,* entretanto desconsidera todas as quatro bordas, e registra como resultado final: *Perímetro = 20 cm.* Não demonstra nenhuma dúvida, não questiona e não percebe a incoerência do seu resultado numérico com a afirmação anterior, quando perímetro está relacionado com os *quatro lados.* O sujeito “Dy” manifesta de forma correta a unidade de medida centímetros (*cm*) junto ao seu valor numérico indicado para o perímetro da ficha de forma quadrangular. Será que o fato de não ter efetuado o registro de 20 cm para cada lado da figura, valor esse sugerido verbalmente, pode ter sido uma das causas de seu “erro”? O estudante não percebe qualquer perturbação entre a sua ação física e o valor numérico verbalizado e registrado, pois a conclusão unidimensional baseada na condição de um único lado se coloca como um obstáculo na organização de um modelo que permita o êxito do problema.

O sujeito “Dy”, ao ser solicitado a determinar a área da ficha de forma quadrangular, convenciona-a por: *ÁREA* e, na seqüência, registra: *ÁREA = 80 cm de área.* O estudante, ao ser questionado sobre a origem do valor numérico, argumenta: *fiz quatro vezes o vinte (20 x 4).* Justifica o resultado: *quantos quadrados de 1 cm caberão dentro dessa área de 80cm? 80 quadradinhos*. Ele confunde área com noção de perímetro. Logo, novamente não obtém êxito. Perímetro e área dependem dos lados dos quadriláteros, ainda que não de maneira equivalente. O perímetro depende exclusivamente da adição dos lados, mas a área está sujeita à multiplicação dos lados da figura quadrangular. Ambos são determinados pelos lados, mas não possuem uma relação direta de conservação. Essa característica torna difícil dissociar uma dependência comum da medida dos lados de uma interdependência entre contorno e superfície.

Diante da situação que pode gerar conflito na informação de que seus colegas sugeriram outras possibilidades de medidas para o comprimento na ficha de forma quadrangular, o sujeito “Dy” argumenta sem muita certeza: *dez (10 cm), não pode é muito pouco* [...] *não tem trinta (30 cm), não sei, não é muito mas não tem trinta.* Ao mesmo tempo em que apresenta resistência aos valores considerados como possibilidades para os lados, parece reorganizar seu pensamento: *Sei lá. Não sei*. [...] *Eu não usei régua e achei que era 20, eles* [...] *mas é muito diferente*. Aparentemente a situação de conflito progride para justificativas que demandam novas coordenações por parte do sujeito, o que implica regulações. Assim, o estudante, ao ser questionado sobre o significado da expressão *diferente*, segue seu pensamento: *posso dar um chute?* [...] *posso por uma letra no lugar do 20?* E diante dessa sua nova argumentação, desenha outra figura quadrangular e, nos seus vértices, destaca um ponto convencionando-o pela letra “A”. Na seqüência, o sujeito “Dy” convenciona o *perímetro* por “P” e argumenta: *Como são quatro lados e têm* *quatro “As” vai ficar P = 4a.* Indagado quanto à determinação da área com a nova designação dos lados, ele justifica: *mas eu não tenho nada no desenho para tirar. A área vai ser a mesma*. Registra: A : Mesma = 4a.

O sujeito “Dy” apresenta um indício de linguagem formal quando convenciona perímetro por “P”, área por “A” e os lados por “a”; argumenta procurando coordenar algo além dos valores “possíveis” indicados pelos colegas. Para o caso da área, ele tenta realizar uma espécie de conservação. Não se trata da ausência de conservação dos lados ou das operações lógico-matemáticas, mas de organizar este problema em função de seus modelos de significação construídos.

Observo que “Dy” não obtém êxito na representação generalizada da área da ficha de forma quadrangular, entretanto para o perímetro seu registro está correto matematicamente. A partir dos registros algébricos tanto para o perímetro como para a área, as respectivas unidades de medida (cm e cm^2) não são mais consideradas como parte do resultado final para o perímetro e para a área.

B) FICHA DE FORMA RETANGULAR

Observo que o sujeito “Dy” desenha sua figura retangular pela altura e não disposto pelo comprimento com o cuidado de legendar a sua nomenclatura dos lados horizontais como *base de comprimento* e, das linhas verticais, como *lado lateral,* que verbalmente enuncia: *é um retângulo, tem dois lados de chão até o fim. Não é chão que se diz é base. A base de cima e a de baixo são iguais. E também têm os dois lados que são iguais. A base do comprimento de baixo é diferente do lado lateral*.

O estudante, ao ser solicitado a determinar as medidas dos lados da ficha de forma retangular, diretamente as indica: *base lateral 39 cm e a base de comprimento uns 18 centímetros*. “Dy” registra os valores numéricos sugeridos no papel para a lateral 39 cm como o dobro do valor considerado para o comprimento 18 cm; efetua o registro da multiplicação das laterais: *2 x 39 cm = 78* e do comprimento: *2 x 18 cm = 36*; em separado, registra a adição dos valores parciais: *36 + 78 = 114*. Registra de forma gráfica e verbal a unidade de medida como medida parcial, entretanto não mais se refere a unidade de medida (cm) no resultado parcial nem no resultado final do perímetro da ficha de forma retangular.

O sujeito “Dy” faz várias tentativas para determinação da área da ficha de forma retangular e utiliza vários métodos, procurando lembrar o caminho para calcular a sua área; utiliza-se do registro gráfico em todos os seus passos; necessita de algo real, material, como recurso para calcular o valor da área. Por fim, decide-se por fazer a correspondência de “tiras” como barras verticais, por ele designado como base lateral: *tem um dedo de distância para dentro, então eu tenho que ir contando* [...] *Contando assim para dentro* [...] Convenciona a largura do seu dedo como medida de comprimento: *cada base lateral tem 39 cm e se eu dividisse o retângulo todo em tiras.* [...] *Assim em tiras de 1 com 39 cm!* Conta com a distância de um dedo de uma borda a outra da ficha de forma retangular pela lateral de comprimento (18 cm). Surpreende-se com a precisão da sua medição: *sim, é possível* [...] *antes eu disse que eram 18 cm, então vou ficar com o 18 e multiplicar pelos 39.* Registra a seqüência do seu pensamento, multiplicando *39 x 18 = 1602*. Responde na folha que a área da ficha de forma retangular corresponde a *1.602 quadrados de 1 cm*. Comete um erro da adição dos valores parciais da multiplicação, pois o resultado correto é de 702 cm^2. Não registra gráfica nem verbalmente a unidade de medida da área durante a multiplicação.

O sujeito “Dy”, ao ser questionado sobre a consideração pelos seus colegas de diferentes valores numéricos para os lados da ficha de forma retangular, não argumenta, procurando coordenar os valores “possíveis” informados. Na sequência, indago sobre o fato de não haver valores para a determinação da área e do perímetro de uma figura de forma retangular: *se eu não tenho os valores? Vai dar uma diferença porque os lados não são iguais* [...] *Dois são maiores que os outros dois*. Na sequência do seu pensamento, solicito esclarecimentos e o estudante argumenta: *eu vou resolver! Vou colocar um “A” para os lados maiores e outra letra nos cantos menores*. [...] *Vou substituir por “B” o lado menor*.

O estudante desenha um novo retângulo e, nos pontos finais dos segmentos horizontais (maiores), registra a letra “A” e, nos mesmos pontos finais, mas em posição vertical dos segmentos, registra a letra “B”; observa por algum tempo os seus registros gráficos, parecendo não compreender o significado da dupla de variáveis que compõem a figura retangular por ele registrada. Ao ser questionado sobre como será a determinação do perímetro, o sujeito “Dy” afirma: *como tem quatro “As” e quatro “Bs” será: P = 4A,4B.* [...] *sim, tenho que somar todos os lados*.

Existe um aparente esquema mas ainda não organizado suficientemente para interpretar e determinar o perímetro. Pode-se perceber que até ocorre corretamente na forma verbal; entretanto, no momento da sua transformação para o registro gráfico da linguagem generalizada, “falta” o símbolo da operação. Da maneira como o sujeito “Dy” registrou é apenas uma sequência de um par de monômios separados corretamente por uma vírgula. Num segundo momento, questiono o cálculo generalizado para a área da ficha de forma retangular e o sujeito “Dy” responde: *não sei como fazer! Não sei somar área com letra.* Insisto, aguardo, mas o estudante continua afirmando que não sabe como resolver a área da ficha de forma retangular com fatores literais.

Observo que o sujeito “Dy” obtém êxito parcial na tentativa de uma representação generalizada do perímetro; utiliza a unidade de medida nas organizações parciais e a desconsidera na soma final. Na etapa da área, o produto dos valores numéricos não apresenta êxito, não considera a unidade de medida (cm^2) seja na forma parcial, seja na total. Assim como, demonstra grande perturbação devido à situação da generalização da área. Frente ao grau de complexidade, observo que o estudante não obtém êxito porque o pensamento precisa organizar um modelo de significações que ainda não possui uma regularidade de ações e operações lógico-matemáticas para chegar ao resultado solicitado.

JOGO 4: 30 peças – representadas por monômios utilizando as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) - dominó algébrico elaborado pela pesquisadora.

O sujeito “Dy” interrompe a sua montagem do dominó algébrico em nove momentos, que a seguir passo a descrever:

1ª parada: ($2x^3$) . ($4x$), responde ($8x^2$). *Quero $8x^2$, não tá faltando uma peça?* Pense na regra da multiplicação dos monômios. *Ah é, soma.* Continua com ($8x^4$).

Dúvida manifestada na segunda peça do JOGO 4, sobre a multiplicação dos monômios. Em “Dy” está presente o questionamento em relação ao número 1 – na sua forma invisível como expoente no monômio ($4x$) . O aluno precisa saber que no monômio ($4x$) o expoente é 1, isto é, deve compreender a igualdade entre ($4x$) e ($4x^1$) e, então, efetuar o que orienta a propriedade da parte literal na multiplicação entre monômios com a mesma variável, que é a adição dos expoentes. Logo, a parte literal deve ser pensada assim: $(x^3) . (x) = x^{3+1} = x^4$. Mas, o sujeito “Dy” não obteve êxito em razão de ter diminuído os expoentes.

2ª parada: $(8x^2) – (3x^2)$, para. Pergunta: *quando diminui não faz nada?* Pense. Escolhe $(5x^2)$.

A segunda dúvida manifestada pelo sujeito “Dy” está na subtração entre os monômios semelhantes; a dificuldade ocorre em relação à propriedade que orienta os expoentes da parte literal, isto é, o estudante sempre deve conservá-los no resultado final.

3ª parada: $(4x^3) + (2x^3)$, para. Pergunta: *e nessa, conserva ou multiplica?* Você sabe a regra da multiplicação e da divisão, logo como fica a adição e a subtração? *Também conserva*. Escolhe $(6x^3)$.

Na terceira dúvida, agora sobre a adição entre os monômios em questão, a dificuldade ocorre também em relação à propriedade que orienta os expoentes da parte literal, isto é, o estudante deve conservá-los no resultado final.

4ª parada: $(3x) + (x)$, responde $(3x^2)$. Você tem certeza desse resultado? Oculto o resultado escolhido, faço-o ler os monômios com a operação. Lê: *três xis mais xis*, [...], *três xis na um mais xis*. Ele não consegue ler: *três xis mais um xis*. Pergunto: quando não aparece registrado o valor numérico quanto vale? *Um*. Então leia novamente. Leu: *três xis mais um xis.* São? Escolhe $(4x)$.

Na quarta e nona parada, temos a mesma dúvida manifesta verbalmente na adição dos monômios $(3x + x)$ e $(9x + x)$ quando o sujeito “Dy” responde, respectivamente, $(3x^2)$ e $(9x^2)$. Na operação da adição entre monômios semelhantes, a propriedade do coeficiente numérico orienta que devem ser adicionados, logo $(3 + 1 = 4)$ e $(9 + 1 = 10)$. Entretanto, essa propriedade não é aplicada corretamente, pois o estudante conserva o valor numérico três na 4ª parada e o valor numérico nove na 9ª parada. Nessas adições temos presente a questão particular no monômio (x), pois, convencionalmente, não é registrado seu coeficiente numérico 1. Assim, para obter êxito nas operações com adição, o sujeito “Dy” precisa compreender a igualdade $(x) = (1x)$. Para que o aluno tenha sucesso, também é necessário que aplique a segunda propriedade da adição entre monômios, que é a de manter a sua parte literal, aqui sendo o fator literal “x”.

5ª parada: $(3x^5) : (x^1)$, para. Como? *Não sei fazer*. Olhe na suas peças anteriores de divisão. *Ah, diminui*. Escolhe $(3x^4)$.

Na dúvida da divisão entre os monômios, o sujeito “Dy” não se refere à questão particular no monômio (x^1), pois convencionalmente não é registrado seu coeficiente numérico 1. A dificuldade está relacionada com os expoentes, pois na divisão entre monômios a propriedade orienta a subtração dos expoentes da parte literal semelhante, logo $(x^5) : (x^1) = x^{5-1} = x^4$.

6ª parada: $(8x^4) – (7x^4)$, para. Indaga: *Prô, não tem um xis na quarta*. Olhe e pense bem. *Certo, o 1 como número não precisa estar escrito*. Escolhe: (x^4).

Nesta sexta parada, o sujeito “Dy” apresenta êxito em relação à conservação de toda parte literal, isto é, fator literal e expoente: *xis na quarta.* Entretanto, precisa compreender a igualdade $(x^4) = (1x^4)$, pois o número 1, parte do coeficiente numérico, convencionalmente não é registrado graficamente.

7ª parada: $(x^2) – (x^2)$, para. Argumenta: *Tá, e agora diminui os expoentes?* É uma subtração. Escolhe: (0) = zero.

Esta questão de subtração entre monômios idênticos envolve várias regras e propriedades. O sujeito “Dy” precisa saber da igualdade entre (x^2) e $(1x^2)$ para, então, na operação da subtração entre monômios semelhantes, aplicar a propriedade do coeficiente numérico que orienta diminuí-los, logo (1 - 1 = 0). Quanto à dúvida referente aos expoentes (pela propriedade específica da parte literal na subtração de monômios semelhantes), orienta que devem ser mantidos. Logo, na sequência do pensamento, o sujeito “Dy” deve ter presente o seguinte resultado parcial: $(0x^2)$. Mas este resultado não existe em nenhuma peça do dominó. Assim, o estudante ainda precisa saber que o valor numérico zero multiplicado por qualquer outra variável terá como resultado final ele mesmo, isto é, $0x^2 = 0$ (zero).

8ª parada: (x) : (x), para. Argumenta: *E aqui, não dá!* Todas as operações têm seu resultado, pense. Depois de algum tempo decide por (1).

Nessa divisão dos monômios, está presente o questionamento em relação ao número 1 – na sua forma invisível como coeficiente numérico e como expoente. Esta operação exige a compreensão de que (x : x = 1x : 1x). A parte do coeficiente numérico presente no quociente desses monômios idênticos é de valor numérico 1 e na forma invisível. A primeira propriedade da divisão de monômios orienta a divisão entre os coeficientes numéricos, logo 1 : 1 = 1. A segunda propriedade orienta a subtração dos expoentes da parte literal semelhante, logo $x : x = x^{1-1} = x^0$. Portanto, o estudante deve concluir que $x^0 = 1$. Assim, o resultado final 1 origina-se da divisão dos resultados parciais (1 : 1).

9ª parada: (9x) + (x), para. Chamo sua atenção. Oculto com a mão o resultado escolhido ($9x^2$) e o faço repetir oralmente a regra da adição de monômios. Ele substitui por (10x).

4.3.2.3 Entrevista 6 = sujeito “VanD”

JOGO 1 = São nove peças $6x^3$, $6x^7$, $6x^2$, $3x^3$, $2x^5$, $2x^1$, $2x^6$, $2x^4$ e 2x contendo monômios, que, combinados no seu jogo, deverão fornecer o produto $12x^8$ (doze xis na oitava potência).

O sujeito “VanD” recorda as propriedades que orientam a multiplicação entre monômios, aplicando-as corretamente, com a preocupação central nos expoentes: *tenho que cuidar o sinal que é de vezes e os expoentes*. Ao ser questionado sobre o porquê da sua preocupação, justifica: *porque as letras são todas iguais. Se fosse ($2x^4y$) e ($3x^3y$), aí eu teria que somar os expoentes dos “x” em separado dos expoentes dos “y”.* Sabe exemplificar a regra parte-parte com monômios de duas variáveis; lê de forma adequada o símbolo operatório entre as peças e faz a leitura correta da nomenclatura dos expoentes, como, por exemplo: *($6x^2$) . ($2x^6$) = seis xis ao quadrado vezes dois xis na sexta potência*.

O estudante obtém êxito com os expoentes visíveis e invisíveis, sabe justificar o expoente 1 na sua forma invisível ao montar suas combinações na multiplicação: ($2x^4$) . ($3x^3$) . (2x), *dois xis na quarta potência vezes três xis ao cubo vezes dois xis.* [...] *Aqui em (2x) tem o 1 (um).* Ao ser questionado, justifica sua escolha das peças: *se eu faço 2 vezes 3 é igual a 6, de 6 para 12 preciso de 2. Mas de expoente faço 4 mais 3 é igual a 7, de 7 para 8 preciso de mais 1*. Organiza as peças em combinações, mantendo como primeira peça o coeficiente numérico seis (6).

O sujeito “VanD”, ao ser questionado sobre a possibilidade apontada pela colega de diferentes combinações com as peças do JOGO 1, confirma-a na forma verbal e na troca das peças: *sim, dá para trocar o (2x) por ($2x^1$).* Reconhece a igualdade entre esses dois monômios: *porque aqui em (2x) pode como não precisa* *escrever o número 1 (um)*; consegue perceber “possibilidades” para o expoente 1 da forma visível para a forma invisível.

O estudante não precisa ler o expoente 1 que está na forma invisível durante a aplicação da propriedade dos expoentes. Ao criar suas peças, tem a preocupação de combinar monômios mantendo os expoentes, apenas codificando os coeficientes numéricos.

O sujeito “VanD” parece possuir esquemas organizados suficientemente ao comutar as peças e com mesmo êxito aplicar a propriedade dos expoentes. O expoente 1 seja na forma visível, seja na invisível não é um obstáculo na coordenação do seu pensamento.

JOGO 2: são 08 peças – representadas pelos monômios: $1x^5$, $12x^5$, $6x^2$, $24x^5$, 4x, $2x^1$, $8x^4$ e 48x, que fornecem o produto $48x^6$ (quarenta e oito xis na sexta potência).

O sujeito “VanD” leva mais tempo para combinar as peças em função do resultado da multiplicação entre os valores numéricos ser quarenta e oito (48); para confirmar seu pensamento precisa da representação gráfica dos coeficientes numéricos para o produto 48, pois no universo dos adolescentes não é um número próximo de suas necessidades: *Vou armar a conta: 12 x 2 = 24. Não dá 48*. Quando o estudante é solicitado a relatar o motivo de suas preocupações, argumenta: *os números para dar 48. Não consigo fazer 12 vezes 4 de cabeça*. Necessita do auxílio do lápis e do papel na busca do resultado correto através da visualização do cálculo após várias tentativas com diferentes valores numéricos para, em uma etapa posterior, tentar resolver sem escrever, só pensando em valores numéricos menores: *com o papel é mais rápido* [...] *ali no papel tu vê 2 vezes 2, 2 vezes 4*.

O estudante apresenta um pensamento aditivo de parcelas num universo limitado entre 2 e 12 para o agrupamento multiplicativo: *quando é escrito 24 x 2, eu penso 24 + 24. Só de cabeça eu não consigo fazer muito certo* [...] *Penso assim: 2 vezes 4 é 8 e daí sobra 10 vezes 4 que é 40, aí eu sei de cabeça que 40 mais 8 é 48.*

O sujeito “VanD” chega às quatro combinações corretas na forma limitada das peças do JOGO 2 sempre com o auxílio do registro dos cálculos “armados” no papel; faz a leitura correta da nomenclatura dos expoentes: *$(6x^2)$. $(8x^4)$ = seis xis* *ao quadrado vezes oito xis na quarta potência*. O expoente 1, se está registrado, é lido: ($2x^1$) = *dois xis na primeira potência* e, se não aparece o registro, não é lido: ($48x$) = *quarenta e oito xis.*

O estudante "VanD", ao ser questionado sobre diferentes possibilidades de combinações indicadas por um colega com as peças do JOGO 2, argumenta: *Mas, daí não tem peças e não fecha os expoentes* [...] *o quarenta e oito só combina com o um, o doze só combina com o quatro, o dois com o vinte e quatro e o seis com o oito para conseguir o 48. O que ela poderia ter combinado diferente do que eu?* A sua principal preocupação está na verificação das multiplicações entre os valores numéricos; não faz referência aos expoentes da parte literal, não aplica a comutatividade, seja entre os coeficientes numéricos, seja entre os expoentes.

Quando ao sujeito "VanD", é solicitado à criação de suas peças mantendo o resultado ($48x^6$); ele argumenta sua dificuldade em operar: *porque de 12 pula para 48* [...] *o 12 é mais fácil porque eu vejo em casa com a avó 12 mais 12 ovos ou com o pai 12 mais 12 alfaces*. Precisa do registro gráfico e, após várias tentativas sem êxito, solicita mais cartelas em branco, agrupando três e quatro peças nas seguintes combinações: *($6x^2$) . ($4x^2$) . ($2x^2$) e ($2x^2$) . ($3x^2$) . ($2x$) . ($4x$).*

O estudante, ao ser questionado sobre os monômios ($2x$) e ($4x$) na sua segunda combinação *($2x^2$) . ($3x^2$) . ($2x$) . ($4x$),* como uma possível multiplicação verdadeira para o resultado ($48x^6$), justifica o seu registro: *porque eu só tenho 2 para separar em expoente do ($2x$) e do ($4x$)* [...] *assim em ($2x$) e ($4x$) o expoente é 1 (um). Daí, quando eu somo todos juntos: 2 + 2 + 1 + 1 tenho o seis do ($48x^6$).* Na sequência, é sugerida a troca do monômio ($2x$) pelo monômio ($2x^1$) e o estudante justifica o "não uso" do registro do expoente 1, reconhecendo a igualdade entre os dois monômios. Da mesma maneira, demonstra compreender o valor do expoente 1 na forma registrada ou invisível em ($2x$) e ($4x$), afirmando: *não ia mudar nada, porque todo "x" que não tem expoente escrito vale 1 como expoente*. Observo que em momento algum ele registra o expoente 1, isto é, aplica a propriedade referente aos expoentes na multiplicação dos monômios sempre com o expoente 1 na sua forma invisível.

Mantém as condutas anteriores. A lógica interna de um modelo garante determinada segurança nas respostas. Pode-se perceber sua capacidade de organização e regulação quanto à aplicação das propriedades e desafios sugeridos pelo uso do expoente 1 na forma visível e invisível.

JOGO 3: são 02 peças – uma ficha de forma quadrangular de 20 cm x 20 cm e uma ficha de forma retangular de 20 cm x 40 cm. A atividade solicitada é a determinação da área e do perímetro das duas fichas.

A) FICHA DE FORMA QUADRANGULAR

Observo que o sujeito “VanD” procura a semelhança entre a ficha de forma quadrangular e o seu desenho pois acresce um determinado valor no “comprimento” da sua figura quadrangular após definir: *é um quadrado* [...] *não é um retângulo e nem um triângulo* [...] *tem os centímetros todos iguais*. Utiliza uma linguagem particular para a igualdade dos lados da figura de forma quadrangular; não se vale de nenhuma das nomenclaturas convencionadas da geometria, como “largura”, “comprimento”, “altura” ou mesmo “lados”.

O sujeito “VanD”, ao ser questionado sobre um possível valor numérico para a medida dos lados da ficha de forma quadrangular, primeiro indica: *uns seis centímetros;* na sequência modifica o valor: *não é pouco uns dezesseis centímetros.* Inquirido sobre a sua certeza na sugestão do segundo valor, não modifica sua posição.

Quando ao estudante é solicitado a determinação do perímetro da figura de forma quadrangular a partir dos 16 cm, apresenta dúvidas na localização do perímetro: *ao redor? Não lembro.* Por meio de um exemplo de situação real do seu dia a dia de trabalho no campo, pergunto: *se você tem dois pastos e uma vaca e não quer que a vaca coma todo o pasto, o que você faz?* O sujeito “VanD” responde: *eu cerco um pedaço*. Tenho necessidade de questioná-lo várias vezes sobre a sua localização e diferenciação entre perímetro e área; então, finalmente ele afirma: *a área é o pasto e a cerca é o perímetro*. Somente depois da associação com uma situação do seu cotidiano consegue estabelecer relações entre as atividades vividas e as apresentadas na cartela. E na sequência expressa verbalmente seus cálculos: *sendo aqui por fora, tendo 16 centímetros. Vai ser quatro vezes dezesseis que dá sessenta e quatro* (4 x 16 = 64). Na folha só registra *P: 64*.

O sujeito “VanD” registra a unidade de medida da largura centímetros (cm) nos valores seis e dezesseis, mas não a utiliza no cálculo nem no resultado do perímetro; apenas registra convencionalmente para o perímetro um “P”, seguido de dois pontos, e não o sinal de igualdade (=) e depois o número sessenta e quatro (64).

O adolescente, ao ser solicitado a determinar a área da ficha de forma quadrangular, argumenta: *não me lembro como se calcula.* Questiono-o, lembrando-o da relação no exemplo com a cerca e o pasto. Argumenta oralmente: *se o pasto é a área para a vaca pastar. Tem 16 filas por 16 filas de uma até na outra divisa então são 16 vezes 16. A área aqui é de 256 filas*. Na folha de papel apenas registra: *A: 256,* sem unidade de medida para a área. Na sua linguagem “filas” ora é largura, ora é comprimento, e o resultado final é a multiplicação entre as “filas”. Por associação de um exemplo prático, “recorda” o caminho para determinar a área; registra a unidade de medida da largura: centímetros (cm), mas não utiliza as unidades de medida nas partes (cm . cm) nem no resultado da área (cm^2).

Ao ser informado da ação dos colegas de terem sugerido valores diferentes do seu, argumenta: *só se a minha resposta for errada*. Também quando questionado sobre a validade de duas soluções, responde incisivamente: *não! Um quadrado não pode ter três respostas certas. Pelo menos na minha cabeça, não* [...] *Não, se é a mesma figura como pode uma ser 20 e outra 5? [...] Acho que tem mais que 5 cm de lado.* Ao ser instigado em relação às afirmações de seus colegas, argumenta sem êxito, não tenta aproximar os resultados dos seus colegas com o seu resultado, sugerido como correto.

O sujeito “VanD”, ao ser questionado sobre a formulação de um modelo generalizado para o cálculo, seja da área, seja do perímetro da ficha de forma quadrangular, demonstra não compreender a existência dessa possibilidade, argumentando: *não imagino como.* Não progride do seu pensamento aritmético para o pensamento abstrato na procura de uma possibilidade geral.

O estudante age baseado na resistência de extrair das coordenações de ações anteriores os elementos que permitem construir formas gerais. O grau de novidade e da complexidade da tarefa de admitir outros possíveis resultados existentes, tornou-se um empecilho na construção de um modelo geral para a área e o perímetro de uma figura quadrangular.

B) FICHA DE FORMA RETANGULAR

O sujeito “VanD” desenha uma figura de forma retangular bem semelhante a ficha sobre a sua mesa, afirma: *é um retângulo, porque aqui é diferente daqui*. Mantém uma linguagem sua, sem a convenção utilizada como padrão na geometria. Ao ser solicitado a determinar um valor numérico para os lados da ficha de forma retangular, sugere: *dezesseis centímetros (16 cm) aqui e quarenta centímetros (40 cm) aqui.* Há um progresso em relação a ficha de forma quadrangular: agora, os valores sugeridos se aproximam da medida real, e registra a unidade de medida: centímetros (cm) nos seus valores de largura e comprimento.

Ao ser solicitado a determinar o valor numérico para o perímetro da ficha de forma retangular, após um certo tempo, responde: *será de 112.* A partir do momento em que solicito uma explicação do seu pensamento para chegar ao resultado final de cento e doze para o perímetro, o sujeito “VanD” explica: *tive que dar a volta, aqui tem 40 e 40, e aqui 16 e 16. Somei primeiro de cabeça (40 + 40), depois somei (16 + 16) e daí somei o (80 + 32) que deu o 112*. Na folha, registra apenas de forma generalizada: *P: 112*.

O sujeito “VanD” realiza o cálculo do perímetro por agrupamentos aditivos; não utiliza nas adições nem no resultado do perímetro a unidade de medida dada em centímetros, tampouco expressa na forma verbal ou gráfica. Observo que, no caso do perímetro da ficha de forma retangular, não há necessidade de um exemplo da vida real.

Para determinação da área da ficha de forma retangular, o sujeito “VanD” necessita olhar para a folha do registro da figura de forma quadrangular e, assim, tenta associar seu procedimento anterior com o atual. Responde sem registrar qualquer cálculo: *cento e sessenta* (160). Ao ser questionado sobre a forma resolução, argumenta: *é só multiplicar 40 por 40.* Tem um momento de parada, decide registrar sua afirmação na classe e, a partir da visualização do produto 40 x 40, modifica seu resultado: *Não. Não é cento e sessenta (160). É mil e seiscentos (1600)*. Sabe que precisa multiplicar valores para determinar a área da ficha de forma retangular, mas necessita do registro no papel para obter êxito no seu produto de 40 x 40. Não utiliza uma linguagem simbólica convencional para designar a palavra área e escreve-a por extenso: *ÁREA*; não usa o sinal de igualdade para o resultado da área e, sim, utiliza o sinal dos dois pontos: ÁREA: *1600*. Não faz uso das unidades de medida nas partes (cm . cm) nem no resultado da área (cm^2).

O sujeito “VanD”, ao ser questionado sobre “outras possibilidades verdadeiras” indicadas pelos seus colegas, não aceita: *não, porque em 10 por 40 cm*, *dez é uma medida muito pequena*. Não tenta nenhum outro argumento. E quando solicitado a organizar uma forma geral para o cálculo da área de qualquer ficha de forma retangular, o estudante argumenta: *não faço ideia.* Sequer tenta uma alternativa. Não demonstra compreender as relações presentes para a generalização do perímetro e da área de uma ficha de forma retangular.

O estudante parece que ainda não tem esquemas apropriados para atuar na resolução do conteúdo pois continua manifestando várias dificuldades para aceitar as antecipações dos colegas assim como não apresenta uma forma geral para a área.

JOGO 4: 30 peças – representadas por monômios utilizando as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) - dominó algébrico elaborado pela pesquisadora.

O sujeito “VanD” para em oito momentos durante a sua montagem do dominó algébrico, que a seguir passo a descrever:

1ª parada: (3x) + (x), para. Pergunta: *está certo?* Lembra das regras? *Sim, dá (4x).*

A dúvida é verbalizada na segunda peça do dominó. O questionamento está relacionado ao coeficiente numérico 1 – na sua forma invisível. No monômio (x) existe uma questão de convenção, pois o coeficiente numérico 1 não é registrado. Logo, para o sujeito “VanD” efetuar corretamente a adição deve lembrar a igualdade (x) = (1x). Portanto, o resultado de (3x) + (x) deve seguir o pensamento: (3 + 1 = 4) e a parte literal “x” permanece como uma constante na adição entre monômios semelhantes.

2ª parada: (9x) + (x), para. Pergunta: *quando é mais, soma os expoentes?* Será? *Então, se não soma, deixa eles.* Escolhe ($10x^1$).

A segunda dúvida manifestada verbalmente também diz respeito à adição do monômio (9x) com o monômio (x): *então, se não soma, deixa eles*. Na operação da adição entre monômios semelhantes, uma parte da propriedade a ser aplicada orienta que os coeficientes numéricos devem ser adicionados, logo (9 + 1 = 10). Assim como na operação da adição entre monômios semelhantes outra parte propriedade a ser aplicada orienta que os expoentes da parte literal devem ser mantidos, logo (x = x). Contudo, (x) é igual a (x^1); logo, o resultado de (9x) + (x) deve seguir o seguinte pensamento: (9 + 1 = 10) e a parte literal “x” deve ser mantida. O resultado da adição entre os dois monômios é (10x), que corresponde à igualdade com a peça ($10x^1$); logo, (10x) = ($10x^1$). E a peça certa escolhida para a continuação do dominó, após uma manifestação de dúvida em razão da visualização do expoente, é a com o resultado correto ($10x^1$) .

3ª parada: ($20x^6$) : ($10x^5$), para. Pergunto: o que você está pensando? *Prô, posso pensar de vezes no lugar de dividir?* Como assim? *Posso pensar 2 x 10?* Pode. Escolhe (2x).

A dificuldade manifestada pelo estudante “VanD” está relacionada à divisão entre os coeficientes numéricos vinte e dez. Assim, determina o resultado pela operação inversa, isto é, através da multiplicação.

4ª parada: ($8x^4$) – ($7x^4$), para. Afirma: *assim oito menos sete é 1*. Ok! *O (x^4) em menos tem que ficar*. Ok! *Mas e esse 1 também pode ficar sem aparecer?* Quem? *O número 1 que não é o expoente*. O que você acha? Decide que sim e escolhe a peça com (x^4).

A dúvida do sujeito “VanD” está relacionada ao coeficiente numérico 1 – na sua forma invisível no resultado final da subtração, não mais durante o processo de subtração entre os coeficientes numéricos e expoentes de monômios semelhantes. Para o estudante decidir pelo resultado (x^4), ele precisa ter a compreensão da igualdade entre os monômios ($1x^4$) e (x^4), isto é, ($1x^4 = x^4$).

5ª parada: (x^2) – (x^2), para. Separa duas peças que supõe que possam ter a resposta certa: (x^2) e (0). Olha-as e escolhe aquela com o resultado igual a (0). Questiono, por quê? *Porque (1 – 1) é zero e não tem como responder ($0x^2$).* Será? *Prô, anula tudo quando faz vezes zero.* Ok! Escolhe (0).

O questionamento está relacionado com a dúvida quanto ao número 1 – na sua forma invisível como coeficiente numérico, porque surgem dúvidas ao subtrair os coeficientes (1 – 1), assim como no momento de efetuar a multiplicação do resultado “um” ou “zero” do coeficiente numérico com a parte literal do monômio, precisa se decidir entre uma vez x^2 ($1.x^2$) e zero vezes x^2 ($0 \; . \; x^2$). Apresenta incertezas na forma pela qual seria feito o registro correto das partes “zero” e “xis ao quadrado” realizada a multiplicação. Após sua argumentação verbal, escolhe a peça com o resultado zero.

6ª parada: (x) : (x), para. Comenta: *aqui vou escolher a peça com o (1) um porque o expoente dá zero*. Por que zero? *Porque diminuindo (1 – 1) dos expoentes, dá zero e “xis” na zero é 1*. Escolhe (1).

A dúvida do sujeito “VanD” não é em relação ao coeficiente numérico um, convencionalmente não registrado no monômio (x); a defesa na escolha da peça surge em relação ao resultado: *(x^0),* referente à segunda propriedade de subtração dos expoentes da parte literal semelhante, logo ($x^{1-1} = x^0$) e na sequência, após algum tempo, conclui que (x^0) é igual a 1.

7ª parada: ($3x^5$) : (x^1), para. Coloca a peça com ($3x^4$). Tira a peça e a segura na mão. Pensa e a recoloca na sequência. Segue com ($3x^4$).

A dúvida está em relação ao expoente 1, pois convencionalmente não é registrado. Assim, o sujeito “VanD”, mesmo tendo feito a escolha certa da peça ($3x^4$), permanece na dúvida.

8ª parada: (9x) : (x), para. Repete as regras: *soma e subtração mantém o expoente, multiplicação soma e divisão diminui eles.* Ok! *Mas não tem $9x^o$!* Encontre todas as respostas possíveis. Recolhe as peças: ($9x^4$), (9x) e (9). Escolhe: (9x), me olha com dúvida e “de cabeça” refaz o cálculo. Comenta: *mas prô (x^o) é 1.* Certo. *Não tem 1 e 9.* Será? Para, pensa e comenta: *Então é vezes?* Fica como? *Só pode ser 9.* Escolhe (9).

Na oitava dúvida manifesta verbalmente as regras da multiplicação e da divisão entre monômios semelhantes. A dúvida do sujeito “VanD” surge em relação ao resultado: *(x^0),* referente à segunda propriedade subtração dos expoentes da parte literal semelhante, logo ($x^{1-1} = x^0$) e na sequência, após algum tempo, conclui que (x^0) é igual a 1. O estudante já havia respondido nove (9) para o coeficiente numérico; retorna ao valor e permanece na dúvida entre um e nove; ao invés de continuar operando com a divisão, inverte seu pensamento pelo caminho da multiplicação demonstrando não ter certeza de suas ações. Só obtém êxito no seu resultado pelo fato de dividir ou multiplicar nove pelo elemento neutro “um” ter como resultado o mesmo valor numérico 9, isto é, (9 : 1 = 9 . 1 = 9).

Para as **considerações parciais** do GRUPO 2, retomo alguns passos seguidos pelos estudantes adolescentes “An”, “Dy” e “VanD” nas três entrevistas.

Durante o JOGO 1, observo que os três estudantes escolhidos para as entrevistas, da T71 “An”, da T72 “Dy” e da T73 “VanD”, efetivam a **comutatividade** dos monômios (A . B = B . A) após o registro verbal dos expoentes; as combinações ocorrem durante esse jogo a partir de esquemas e organizações das peças exclusivamente pelos expoentes, em primeiro lugar pelos expoentes visíveis e segundo pelo expoente 1 – na forma invisível. Percebe-se nesses sujeitos a necessidade de recorrer a conhecimentos experenciados anteriormente na sala de aula para obter o êxito.

Os estudantes do GRUPO 2, durante o JOGO 2, em geral, necessitam de um tempo maior para articular a combinação das peças em função do produto (48), utilizando o registro gráfico para confirmação do seu pensamento; argumentam através da coordenação dos elementos do monômio sobre as “possíveis novas” combinações sugeridas; mantém o êxito na conservação da propriedade dos expoentes 1 nas formas visível e invisível dos monômios; nas suas criações articulam os monômios na relação parte/todo.

No JOGO 3, verifico que “An", “Dy” e “VanD” utilizam basicamente símbolos numéricos, seja na sua explicação verbal própria, não considerando por vezes convenções pré-existentes na geometria, seja no registro escrito das coordenações do seu pensamento para a área e o perímetro das fichas de forma quadrangular e retangular. Os sujeitos desse grupo, nesse jogo tem dificuldades em reorganizar seus esquemas de pensamento em função da coordenação das variáveis envolvidas para a construção de uma forma geral para a área e o perímetro para uma figura de forma quadrangular e retangular qualquer. Ocorrem **organizações parciais de generalização** ainda sem êxito total; os estudantes não convencionam um fator literal para designar a “área”, nem registram as unidades de medida de comprimento = cm e de área = cm^2 no resultado algébrico uma figura qualquer. Assim, desconsideram os expoentes 1 – na forma invisível no cálculo da área. Parecem não conseguir conservar um *modelo* inicial, e evoluir operando numa estrutura lógico-matemática através de variáveis algébricas.

No JOGO 4, as ações com êxito dos sujeitos para montar o “dominó algébrico” se concentram nos valores numéricos diferentes de 1. As dúvidas manifestas estão diretamente relacionadas ao expoente 1 - na forma visível e invisível seja na adição/subtração, seja na multiplicação ou divisão entre os monômios. Com um intervalo de cinco a nove interrupções os sujeitos desse grupo apresentaram dificuldade em coordenar de forma múltipla a operação entre os coeficientes numéricos, a propriedade específica correspondente para os expoentes e as suas representações gráficas principalmente quanto ao coeficiente e expoente numérico 1. Apresentam êxito no jogo proposto após a retomada contínua das convenções e propriedades específicas envolvidas em cada situação.

4.3.3 Interpretação dos 4 Jogos no GRUPO "E" 3 – POUCO ÊXITO

Significa ter poucos êxitos nas atividades propostas tanto nas observações quanto na aplicação da AECNS. Foram entrevistados os estudantes "Vi"– T71 - Escola (1) IEST, "Fa" – T72 – Escola (2) ANCH e "Us" – T73 – Escola (1) IEST.

4.3.3.1 Entrevista 7 = sujeito "Vi"

JOGO 1 = São nove peças ($6x^3$, $6x^7$, $6x^2$, $3x^3$, $2x^5$, $2x^1$, $2x^6$, $2x^4$ e $2x$) contendo monômios que, combinados no seu jogo, deverão fornecer o produto $12x^8$ (doze xis na oitava potência).

O sujeito "Vi" precisa de tempo para organizar as peças e seu pensamento em relação às regras da multiplicação de monômios – *vezes soma né!*– antes de aplicar as propriedades específicas que orientam a operação. De forma correta multiplica os coeficientes numéricos e adiciona os expoentes; parece saber operar com os expoentes visíveis, entretanto demonstra dúvida quanto ao valor 1 (um) quando não está expresso graficamente: ($2x$) = *dois xis* [...] *não lembro.* Lê o símbolo operatório *vezes* entre os monômios, mas lê de forma incorreta o expoente 1 quando está graficamente registrado: ($2x^1$) = *duas sobre um*. Na combinação das peças tem a necessidade de se orientar com as cartelas com o sinal de multiplicação e a cartela com o sinal de igualdade.

O estudante não utiliza a linguagem convencional da álgebra, no caso da nomenclatura dos expoentes: *duas sobre um* ($2x^1$), *seis xis sobre sete* ($6x^7$), *dois xis sobre seis* ($2x^6$), *seis xis sobre dois* ($6x^2$), *três xis sobre três* ($3x^3$); não apresenta equivalência da linguagem matemática algébrica com a localização do expoente, isto é, não parece distinguir as expressões "sobre" de "elevado a".

O sujeito "Vi", ao ser questionado sobre a possibilidade de mudanças na combinação das peças, categoricamente argumenta: *não.* Ao ser informado sobre a determinação de diferentes combinações por um colega, o sujeito “Vi” argumenta: *eu não vi como pode ter combinado diferente. Não dá para mudar nada*. O estudante, na sequência das atividades, ao ser solicitado a revelar suas preocupações no momento de suas combinações, argumenta: *primeiro a tabuada* [...] *porque todos resultados tinham que dar doze (12)* [...] *e eu tinha também que cuidar os expoentes por que o resultado deles tinha que dar oito (8)*.

Indago-o sobre uma “parada” durante a combinação das peças, o sujeito “Vi” justifica: *só parei um pouco mais aqui neste sem expoente escrito, mas lembrei que vale um*. Ao ser solicitado a criar novos monômios para o produto $12x^8$, registra na primeira tentativa: *(2x) . (2x)*. Observa e argumenta: *Bah, não vai dar certo*. Refaz e escreve no verso das cartelas: $(2x^3)$ *e* $(2x^3)$, pede mais duas cartelas e termina em: $(2x) \ . \ (2x^3) \ . \ (2x^3) \ . \ (2x)$. Questiono-o sobre a certeza de sua combinação de peças e ele afirma: *sim, é tudo vezes*. Sua preocupação está relacionada somente com a aplicação da propriedade que orienta os expoentes, não faz referência alguma ao coeficiente numérico, isto é, não verifica a multiplicação entre os coeficientes numéricos 2. Na sequência informo-o sobre a possibilidade de outras combinações organizadas por um colega. O sujeito “Vi” argumenta: *acho que não tem como ter outras.*

Durante o JOGO 1, observo que o sujeito “Vi” combina as peças com um olhar unidimensional nos expoentes. Essa atitude está evidenciada no momento da sua criação, pois não demonstra estabelecer uma relação parte/todo desconsiderando a operação entre os coeficientes numéricos. Quando apresento a sugestão de novas combinações, ele não considera a possibilidade, logo também não percebe a comutatividade das peças do jogo.

JOGO 2 = São oito peças – representadas pelos monômios: $1x^5$, $12x^5$, $6x^2$, $24x^5$, $4x$, $2x^1$, $8x^4$ e $48x$, que fornecem o produto $48x^6$ (quarenta e oito xis na sexta potência).

O sujeito “Vi” tenta organizar as peças sobre a mesa e após um longo tempo para então combinar: (*48x*) e ($12x^5$). Solicito ao estudante que revele suas preocupações no momento de suas combinações e ele argumenta: *estou cuidando para combinar os números* [...] *estou somando os expoentes. Todos dão 6*. Peço a ele que efetue a leitura de suas peças combinadas, ele lê: *Quarenta e oito vezes doze dá quarenta e oito. Não!* Na sua exclamação após a leitura da sua combinação de peças passa a reorganizar seu pensamento em relação às duas regras que orientam uma multiplicação de monômios. Entretanto, continua utilizando como recurso físico seus dedos para obter resultados numéricos corretos.

Lê o símbolo operatório: *vezes* entre os monômios, mas lê de forma incorreta o expoente 1 quando está graficamente registrado: ($2x^1$) = *duas sobre um*, passa a ler, mesmo que de forma errônea "sobre" o expoente 1 que está na forma invisível nos monômios (48x) = *quarenta e oito xis sobre um* e (4x) *quatro xis sobre um*. Tem noção da semelhança dos monômios $48x = 48x^1$ e $4x = 4x^1$. Não apresenta equivalência da linguagem matemática algébrica com a localização do expoente, isto é, não parece distinguir as expressões "sobre" de "elevado a".

Ao ser questionado sobre a possibilidade de mudanças na combinação das suas peças, ele argumenta: *eu acho que não tenho nada para mudar*. Indago-o sobre a afirmação de que sua colega teria diferentes combinações das peças do JOGO 2 e o sujeito "Vi" argumenta: *não sei o que ela podia mudar.*

A partir do momento em que é solicitado a criar novas peças para o produto $48x^6$, concentra-se organizando seu pensamento em partes: primeiro, os coeficientes numéricos e, depois, a parte literal com os expoentes: *acho que é assim: quatro vezes dois é oito e três vezes dois é seis. E oito vezes seis é quarenta e oito* [...] *agora vou colocar o "x" em todos*: $(4x) . (2x) . (3x) . (2x)$. Na sequência da sua composição das peças registrou o expoente 2 para todas as variáveis da parte literal: $(4x^2 . 2x^2) . (3x^2 . 2x^2)$. Entretanto, após uma adição verbal dos quatro expoentes 2: *errei aqui no segundo monômio $2x^2$. Tenho que tirar o 2 para dá 6*. Exclui o expoente 2 do último monômio e assim o monômio ($2x^2$) passa a ser (2x): $(4x^2) . (2x^2) . (3x^2) . (2x)$. O sujeito "Vi" justifica sua modificação: *agora sim: dois mais dois mais dois é seis.* Somente leva em conta os expoentes 2 visíveis, esquecendo por completo no monômio (2x) o expoente 1 invisível.

O sujeito "Vi" não consegue operar com o coeficiente numérico e a parte literal ao mesmo tempo nos monômios para suas possíveis montagens; não considera em (2x) o expoente 1 – na sua forma invisível, errando a sua combinação por considerar 0 (zero) o expoente do monômio (2x), desconsiderando a semelhança (2x) = ($2x^1$). O sujeito "Vi" é capaz de formular corretamente o cálculo do produto da multiplicação de monômios, mas o faz considerando somente os elementos visíveis. Pode-se perceber um esquema restrito relativo ao expoente visível. O estudante opera, mas não considera o expoente 1 – na sua forma invisível como parte do todo.

JOGO 3 = São duas peças – uma ficha de forma quadrangular de 20 cm x 20 cm e uma ficha de forma retangular de 20 cm x 40 cm. A atividade solicitada é a determinação da área e do perímetro das duas fichas.

A) FICHA DE FORMA QUADRANGULAR

Quando o sujeito “Vi” é questionado sobre uma possível determinação de um valor numérico para o lado da ficha de forma quadrangular, supõe: *uns 20 cm*. Parece ter noção de espaço, pois acerta na primeira sugestão a medida real do lado da ficha de forma quadrangular. Na possibilidade de diferentes valores dados à medida de comprimento da ficha de forma quadrangular, o sujeito “Vi” argumenta: *não sei! Acho que não pode*. Argumenta não admitir os valores “possíveis” indicados pelos colegas.

Observo que o sujeito “Vi”, após desenhar sua figura quadrangular, nele indica o valor suposto de *20 cm* nos quatro lados. Ao ser solicitado a determinar o valor do perímetro e da área da sua figura de forma quadrangular, primeiramente afirma não saber determinar o perímetro e a área para a figura apresentada. O estudante necessita de um exemplo prático sobre perímetro rural e perímetro urbano para, a partir da localização da área e do perímetro nessa situação, determiná-las na ficha de forma quadrangular: *aqui dentro o perímetro urbano (ficha sobre a classe) e aqui fora, a classe, o campo*. Associa o limite entre a área urbana e rural com o plantio de árvores: *se vamos plantar árvores no limite dos perímetros de 1 em 1 metro.* [...] *Então se isso tem 20, 20, 20, 20 é 80. Precisamos de 80 árvores*. Relaciona a linha divisória entre o perímetro urbano e o rural com a borda da ficha de forma quadrangular; efetua o cálculo do perímetro de forma correta, através da adição de parcelas: *20 + 20 + 20 + 20 = 80*. Entretanto, não faz referência à unidade de medida centímetros (cm), seja na forma verbal, seja durante o cálculo dos valores parciais ou como unidade final no resultado do perímetro; não convenciona um símbolo literal para o “perímetro”, escreve a palavra por extenso: *Perímetro = 20 + 20 + 20 + 20 = 80.*

O estudante “Vi”, ao ser solicitado a determinar a área da ficha de forma quadrangular, convenciona-a por *Área* e, na seqüência, registra: 160. O estudante, ao ser questionado sobre a origem do valor numérico, argumenta: *seria a área urbana? Aqui de dentro? Ah*, [...] *não sei! Umas 300 ou 400* [...] *Umas 160* [...] *Assim 20 aqui (largura) e 20 aqui (comprimento) dá 40. E são 4 lados, daí 40 x 4 dá 160*. Efetua a multiplicação dos valores numéricos, mas, mesmo com o exemplo prático/real, não consegue lembrar como se determina a área de uma ficha de forma quadrangular; não sabe e não compreende quais valores e como deve utilizá-los para determinar o valor da área corretamente; não faz referência à unidade de medida (centímetros) na forma verbal tanto durante o cálculo, como também não registra a unidade de área (cm^2) no resultado final; não convenciona um símbolo literal para a "área", escrevendo a palavra por extenso.

B) FICHA DE FORMA RETANGULAR

Observo que o sujeito "Vi" desenha sua figura de forma retangular tentando a semelhança na proporcionalidade das linhas. Indica como medidas*: tem 10 centímetros de lado e uns 40 centímetros de comprimento*. Considera verbalmente uma medida como "lado" e outra como "comprimento", referências que não apareceram na ficha de forma quadrangular; faz referência à unidade de medida centímetros (cm) na forma verbal enquanto indica as medidas laterais para a ficha de forma retangular. Mesmo sobrepondo as duas fichas, não consegue afirmar que as medidas de largura são iguais e de 20 cm na ficha de forma quadrangular e na ficha de forma retangular; não registra o desenvolvimento do cálculo em nenhum lugar (classe ou folha). Olha para os dedos da mão no momento em que "pensa"; no primeiro momento apenas registra verbalmente o resultado e em momento posterior, explica o seu raciocínio para alcançar o resultado. Não registra a unidade de medida centímetros nos valores parciais nem no resultado final; não convenciona um símbolo literal para o "perímetro", escrevendo a palavra por extenso: *Perímetro 100*; não efetua o registro de suas adições parciais no papel nem usa o símbolo de igualdade (=) para indicar o resultado final do perímetro.

O sujeito "Vi", para a determinação da área, apresenta muitas dúvidas na localização da mesma na ficha de forma retangular. Determina um valor qualquer sem registro gráfico do desenvolvimento do cálculo; faz uma relação de espaços entre a ficha de forma quadrangular e a ficha de forma retangular utilizando os dedos da mão para realizar seu cálculo da área. O sujeito "Vi" coloca a palma da mão direita, primeiro, sobre a ficha de forma quadrangular e, depois, sobre a ficha de forma retangular. Então, conclui: *se aqui é 160. Aqui é 250. Não pode ser outra coisa*. Registra: *Área 250.* Não faz nenhuma referência verbal durante seu cálculo mental; não escreve nem fala a unidade de medida durante sua suposição numérica, só escrevendo no resultado final sem a unidade de área = cm^2; não convenciona um símbolo literal para a "área", escreve a palavra por extenso; não efetua o registro gráfico de suas adições parciais no papel; não usa o símbolo de igualdade (=) para indicar o resultado final da área.

O estudante, ao ser questionado sobre a consideração pela sua colega de diferentes valores numéricos para os valores para os lados da ficha de forma retangular, argumenta: *não sei. Acho que 8 pode mas 24 acho que não? É mais que 24.* Na sequência, indago sobre o fato de não haver valores para a determinação do perímetro e da área de uma figura de forma retangular: *não é possível!* [...] *Sem a régua até acho que sim.* [...] *Mas, não sei se pode*. [...] *Não sei. Nunca pensei nisso*.

O sujeito "Vi" apresenta um início de argumentação procurando coordenar os valores "possíveis" e "impossíveis" indicados pelos colegas. Entretanto, não convenciona fatores literais, seja para a largura, seja para o comprimento da ficha de forma quadrangular e da ficha de forma retangular; não compreende o significado da dupla de variáveis que devem compor o cálculo do perímetro e da área, seja da ficha de forma quadrangular, seja da ficha de forma retangular, assim como não demonstra compreender os diferentes tipos de relações para uma determinação geral do perímetro e a área para uma ficha de forma quadrangular e outra retangular qualquer.

JOGO 4: São trinta peças – representadas por monômios utilizando as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) - dominó algébrico elaborado pela pesquisadora.

O sujeito "Vi" interrompe o jogo em nove momentos durante a sua montagem do dominó algébrico, que a seguir passo a descrever:

1ª parada: (x) : (x), responde (2x). Pense, na divisão. *Divide!* E? *Então diminui o expoente*. Então? *Fica na zero*. E, quanto vale na zero? *É um*. Troca por (1).

A dúvida do estudante "Vi" é em relação ao coeficiente numérico um (1) convencionalmente não registrado no monômio (x), pois, ao invés de dividi-los (1 : 1 = 1), os adiciona (1 + 1 = 2). A dúvida também está na escolha da peça, pois surge em relação ao resultado: *(x^0),* referente à segunda propriedade de subtração dos expoentes da parte literal semelhante, logo ($x^{1-1} = x^0$), e na sequência, após algum tempo, conclui que (x^0) é igual a 1.

2ª parada: (9x) : (x), responde (9x). Pense de novo! *É divisão*. O que se faz? *Divide e diminui.* Então? *Tem que ser só nove!* Troca por (9).

Novamente há dúvida sobre a regra da divisão entre monômios semelhantes. O sujeito “Vi” questiona o resultado: *(x^0),* que se reporta à segunda propriedade de subtração dos expoentes da parte literal semelhante, logo ($x^{1-1} = x^0$), e na sequência conclui que (x^0) é igual a 1.

3ª parada: ($6x^4$) : (2x), responde ($3x^2$). Como assim? *Sim, é ($3x^2$)*. Tem certeza? *Mas aqui não tem nada.* Como nada? *Ah, tem xis na um, é três*. Troca por ($3x^3$).

A dúvida do sujeito “Vi” está relacionada com o expoente 1 na forma invisível no monômio (2x). Penso que, assim como divide o valor numérico 6 por 2, também divide o expoente 4 por 2. Na seqüência, ao ser inquirido, recorda a igualdade entre os monômios ($x = x^1$) e opera de forma correta com os expoentes ($x^{4-1} = x^3$).

4ª parada: ($2x^3$) . (4x), responde: *não tem a peça ($8x^3$).* Tem todas as peças que precisa no jogo. *Só tem (8x).* Qual a operação? *Multiplicação*. O que você precisa fazer? *Multiplicar, (2 . 4) é (8)*. E o que mais? *Somar*. Com o quê, só tem 3? Leia os monômios: *Dois xis sobre três e quatro xis.* Quem são os expoentes? *Ah, vale 1 no xis, então é quatro*. Qual é a peça? Troca por ($8x^4$).

O sujeito “Vi” apresenta dificuldade em relação ao expoente 1 na forma invisível no monômio (4x). Tem necessidade de repetir as propriedades do coeficiente numérico e dos expoentes da parte literal, as quais orientam a multiplicação entre dois monômios semelhantes. Mesmo assim, na sua segunda procura da peça certa não consegue obter êxito e continua em dúvida. Somente após ser solicitado a efetuar a leitura de todos os termos presentes na operação, e ainda com muitas dúvidas, efetua a troca das peças.

5ª parada: (9x) + (x), responde (9x). Solicito que leia o conjunto. *Nove xis mais um xis*. É? *É dez xis*. Troca por (10x).

Na quinta dúvida manifestada pelo sujeito “Vi” na adição do monômio (9x) com o monômio (x), uma parte da propriedade a ser aplicada orienta que os coeficientes numéricos devem ser adicionados, logo (9 + 1 = 10), e a outra parte propriedade orienta que os expoentes da parte literal devem ser mantidos, logo (x = x). A questão presente na dúvida do sujeito “Vi” está relacionada ao coeficiente numérico 1 na sua forma invisível no monômio (x). O estudante não considera a igualdade entre (x) e (1x); para obter êxito na operação foi necessária a leitura dos termos do monômio.

6ª parada: ($20x^6$) : ($10x^5$), para. Questiono-o: o que houve? *Não tem a peça com (*$2x^1$*)*. E qual é a peça que tem? *Só tem com (2x).* E pode ser essa peça? [...] *Pode ser, né!* Por que pode? *Por que o sobre 1 não precisa aparecer escrito, mas vale 1 também.* Continua com (2x).

Na divisão entre os dois monômios o sujeito “Vi” manifesta seu caminho de argumentação e aplica corretamente as duas propriedades que orientam a divisão; também recorda a igualdade entre os monômios ($2x^1$) e (2x), pois o expoente 1 convencionalmente não é registrado.

7ª parada: ($6x^9$) : ($2x^2$), para. Precisa ler em voz alta: *seis dividido por dois*. Dá? *Três.* E conta nos dedos a subtração: 9 – 2 = 7. Continua com a peça ($3x^7$).

Novamente surge a dúvida na divisão entre os monômios. O sujeito “Vi” necessita da leitura da operação completa para obter êxito no resultado. Na sequência a preocupação diz respeito aos expoentes, e a propriedade dos coeficientes numéricos orienta que em uma divisão os expoentes devem ser subtraídos.

8ª parada: (5x) . (3x), para. Precisa ler em voz alta: *cinco vezes três.* É? Conta nos dedos. *Quinze. E nestes xis tem um e um*. Então? *Dá dois.* Continua com a peça ($15x^2$).

O sujeito “Vi” chega ao resultado correto com o auxílio da leitura da operação de multiplicação entre os monômios expressos nas peças. A dúvida está relacionada ao coeficiente numérico 1 – na sua forma invisível. Nos monômios (5x) e (3x) existe uma questão de convenção, pois o coeficiente numérico 1 não é registrado. Logo, para o sujeito “Vi” efetuar corretamente a multiplicação deve se lembrar da igualdade (5x) = ($5x^1$) e (3x) = ($3x^1$). Portanto, a multiplicação entre esses monômios deve seguir as propriedades que orientam os coeficientes numéricos (5 . 3 = 15) e a parte literal ($x^{1 + 1} = x^2$).

9ª parada: $(8x^4) + (x^4)$, para. O que houve? *Sei que oito mais um é nove*. E? *O quatro fica ou soma?* O que você fez nas outras adições de monômios? Procura uma adição anterior. *Fica quatro*. Continua com $(9x^4)$.

A nona dúvida manifestada verbalmente está relacionada à adição dos monômios, especificamente sobre os coeficientes numéricos: *o quatro fica ou soma?* Na propriedade que orienta os expoentes da parte literal está registrado que os mesmos devem ser mantidos. Logo, a peça escolhida pelo estudante "Vi" para a continuação do dominó, após uma manifestação de dúvida em razão do expoente, é a com o resultado correto $(9x^4)$.

4.3.3.2 Entrevista 8 = sujeito "Fa"

JOGO 1 = São nove peças ($6x^3$, $6x^7$, $6x^2$, $3x^3$, $2x^5$, $2x^1$, $2x^6$, $2x^4$ e $2x$) contendo monômios que, combinados no seu jogo, deverão fornecer o produto $12x^8$ (doze xis na oitava potência).

O sujeito "Fa", para aplicar corretamente a regra da multiplicação entre monômios, necessita de muito tempo, pois parece não ter noção da localização do coeficiente numérico e do expoente; obtém êxito com os expoentes visíveis, entretanto permanece em uma dúvida constante quanto ao valor 1 (um) – na sua forma invisível. Não lê o símbolo operatório entre as peças nem utiliza de forma correta a linguagem convencional da álgebra, no caso da nomenclatura dos expoentes: *xis na sete* (x^7), *xis na seis* (x^6), *xis no quadrado* (x^2) e *xis na três* (x^3), apresenta dúvida e não lê o expoente 1 – na sua forma visível e invisível: *dois xis* *$(2x^1)$.*

O estudante mantém a regularidade nas suas combinações, iniciando-as pelo monômio com o coeficiente numérico seis. Mantém a sua ação presa no produto dos coeficientes numéricos: *escolhi as peças pelo resultado doze (12).* Quando o sujeito "Fa" é questionado sobre possibilidades de mudanças na combinação das peças, apenas observa as peças já combinadas sobre a mesa. Não faz nenhuma tentativa de encontrar outra possibilidade. Questiono-o sobre a posição das peças e ele argumenta: *como, assim?* [...] *não vejo como* [...] *não dá pra fazer nada*.

O sujeito “Fa”, ao ser informado sobre a determinação de diferentes combinações por uma colega, argumenta somente através dos coeficientes numéricos: *não imagino como!* O estudante, na sequência das atividades, ao ser solicitado a criar suas peças conservando o resultado ($12x^8$), “cria” seus monômios combinando-os assim: ($4x^4$) . ($3x^4$) e ($6x^6$) . ($2x^2$). Observo que se mostra satisfeito e seguro ao utilizar valores numéricos num universo limitado entre dois e seis.

JOGO 2: São oito peças – representadas pelos monômios: $1x^5$, $12x^5$, $6x^2$, $24x^5$, 4x, $2x^1$, $8x^4$ e 48x, que fornecem o produto $48x^6$ (quarenta e oito xis na sexta potência).

O sujeito “Fa” opera, exclusivamente, por meio do registro numérico gráfico; somente após transcorridos quinze minutos combina as peças para o produto correto de $48x^6$. O estudante orienta-se a partir dos valores numéricos do coeficiente numérico dos monômios, usando o registro gráfico como recurso na multiplicação dos mesmos. Primeiro, registra no papel as possibilidades numéricas: *8 x 6, 48 x 1, 24 x 2 e 12 x 4*; num segundo momento, articula-as com os expoentes já registrados na parte literal do monômio. Questiono-o sobre sua composição e ele argumenta: *cuidei dos números e depois dos expoentes.*

O estudante lê o sinal de operação da multiplicação entre os monômios; entretanto, na leitura da linguagem algébrica, na maioria dos exemplos não lê de forma correta o nome próprio dos expoentes. Permanece não lendo o expoente 1 quando aparece registrado graficamente para ($2x^1$), lê *dois xis* e na sua leitura também ignora o expoente 1 quando está na forma invisível, como para (48x) lê *quarenta e oito xis.*

Na sequência das atividades, ao ser solicitado a criar suas peças conservando o resultado ($48x^6$), o sujeito “Fa” combina as duplas *($12x^3$) . ($4x^3$)* e *($24x^3$). ($2x^3$).* Questiono-o sobre sua compreensão da palavra “criar” e ele argumenta: *Sim, eu mudei os expoentes, os números já estavam prontos!* O estudante mantém os coeficientes numéricos das peças do JOGO 2 e apenas atribui valores iguais para seus expoentes.

Quando o sujeito “Fa” é questionado sobre novas possibilidades, isto é, diferentes combinações por uma colega, argumenta: *não dá*. Insisto para que “Fa” pense novamente e ele repete: *não imagino como!* O estudante adolescente não consegue estabelecer um paralelo com a mesma situação de aprendizagem vivenciada em dois momentos diferentes: um na entrevista individual e, outro, no grupo em sala de aula.

JOGO 3 = São duas peças – uma ficha de forma quadrangular de 20 cm x 20 cm e uma ficha de forma retangular de 20 cm x 40 cm. A atividade solicitada é a determinação da área e do perímetro das duas fichas.

A) FICHA DE FORMA QUADRANGULAR

Quando o sujeito “Fa” é questionado sobre uma possível determinação de um valor numérico para uma ficha de forma quadrangular, supõe: *uns 6 centímetros.* [...] *vou trocar por 10 centímetros.*

Observo que o sujeito “Fa” desenha sua figura quadrangular num formato retangular, contudo afirma saber que numa ficha de forma quadrangular o valor dos quatro lados deve ser igual. Ao ser solicitado a determinar o valor do perímetro da ficha de forma quadrangular, indica o primeiro valor e, em seguida, modifica-o. Entretanto, os dois valores sugeridos estão muito distantes do valor real da largura da ficha de forma quadrangular: 20 centímetros.

Ao ser solicitado a determinar o valor do perímetro da ficha de forma quadrangular, argumenta: *com dez de cada lado, vai ter quarenta de perímetro.* Registra a unidade de medida para cada lado na sua figura quadrangular, mas a desconsidera durante o cálculo e no resultado final: *Perímetro = 40.*

O sujeito “Fa”, ao ser solicitado a determinar a área da figura de forma quadrangular, convenciona-a por: *ÁREA* e, na seqüência, registra: *ÁREA = 100.* O estudante, ao ser questionado sobre a origem do valor numérico, argumenta: *fiz dez vezes dez que é cem (10 x 10 = 100).* Não registra seu pensamento, seja verbal, seja graficamente no papel.

Diante da informação de que seus colegas sugeriram outras possibilidades de medidas para o comprimento na ficha de forma quadrangular, “Fa” argumenta: *não pode* [...] *não sei.* Não aceita os valores sugeridos e sequer admite novas possibilidades verdadeiras para o perímetro e a área para a ficha de forma quadrangular: *não. Um quadrado não pode ter três respostas certas*. Não demonstra associar as regras e propriedades geométricas para determinar algebricamente o perímetro e a área da ficha de forma quadrangular. Não compreende o significado da variável única compondo uma figura quadrangular; não demonstra compreender os diferentes tipos de relações para uma determinação generalizada do perímetro e a área para uma ficha de forma quadrangular qualquer. A partir dos registros numéricos tanto para o perímetro como para a área, as respectivas unidades de medida (cm e cm^2) não são consideradas como parte do resultado final.

B) FICHA DE FORMA RETANGULAR

Observo que o sujeito "Fa" desenha sua ficha de forma retangular tentando ocupar todo o espaço da folha, considerando o comprimento com 50 cm e a largura com 6 cm. Na seqüência, o estudante, ao ser solicitado a determinar o perímetro, diretamente o indica: *112.* Ao ser solicitado a registrar a sequência de seu pensamento, registra: *fiz 50 + 50 e 6 + 6, daí somei 100 com 12 e deu 112.* Somente escreve a unidade de medida no momento da sugestão dos valores para a largura e o comprimento; a partir de então, a unidade de medida não é mais utilizada durante o cálculo, nem no resultado final.

O sujeito "Fa", para determinação da área da ficha de forma retangular, utiliza-se do registro gráfico em uma única tentativa, registrando: *250*. Ao ser questionado sobre a sequência de seu pensamento, registra: *fiz 50 x 50 e deu 250.* Efetua de forma incorreta o valor da área, pois não multiplica a largura pelo comprimento; também não utiliza as unidades de medida centímetros (cm) durante o cálculo, nem (cm^2) no resultado final.

O estudante "Fa", ao ser questionado sobre a consideração pelos seus colegas de diferentes valores numéricos para os lados da ficha de forma retangular, não argumenta procurando coordenar os valores "possíveis" informados pelos colegas com os seus valores considerados na ficha de forma retangular: *Não, porque 20 cm ou 40 cm é uma medida muito pequena.* Na sequência, indago sobre o fato de não haver valores para a determinação da área e do perímetro de uma figura de forma retangular: *Se não tenho os valores, como vai dar pra calcular?* Insisto, aguardo, mas o estudante continua afirmando que não sabe como resolver a área de uma ficha de forma retangular com fatores literais.

JOGO 4: São trinta peças – representadas por monômios utilizando as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) - dominó algébrico elaborado pela pesquisadora.

O sujeito “Fa” chega a distribuir as 30 peças sobre a mesa, primeiramente de forma aleatória e, numa segunda vez, organizando-as em colunas de acordo com a operação. Permanece apenas olhando para o grande conjunto de peças, iniciando pela peça com a divisão (9x) : (x). Coloca a peça em separado das demais e, após certo tempo, comunica-me: *Não sei como achar o resultado, não sei o que fazer.* [...] *Vou parar, não quero fazer esse jogo*. Percebo que o estudante está muito agitado, nervoso e confuso; assim acato a sua decisão.

4.3.3.3 Entrevista 9 = sujeito “Us”

JOGO 1 = São nove peças ($6x^3$, $6x^7$, $6x^2$, $3x^3$, $2x^5$, $2x^1$, $2x^6$, $2x^4$ e 2x) contendo monômios que, combinados no seu jogo, deverão fornecer o produto $12x^8$ (doze xis na oitava potência).

O sujeito “Us” parece saber aplicar corretamente a regra da multiplicação entre monômios, pois tem noção da localização do coeficiente numérico e do expoente; obtém êxito com os expoentes visíveis, mas apresenta dúvidas quanto ao valor 1 (um) – na sua forma invisível. Lê com perfeição o símbolo operatório entre as peças e utiliza de forma correta a linguagem convencional da álgebra, no caso da nomenclatura dos expoentes: *sétima potência* (x^7), *sexta potência* (x^6), *ao quadrado* (x^2) e *ao cubo* (x^3), mas apresenta dúvida quando lê o expoente 1 – na sua forma invisível: *dois xis na um* [...] *ou na primeira potência?* Não verbaliza o expoente 1 – por se apresentar na forma invisível no monômio (2x).

Quando o sujeito “Us” é questionado sobre possibilidades de mudanças na combinação das peças, recolhe as peças. Na tentativa de encontrar outra possibilidade, reinicia as combinações. Pela segunda vez o estudante mantém a regularidade nas suas combinações, iniciando-as pelo monômio com o coeficiente numérico seis. Sua maior preocupação continua sendo a combinação dos monômios através dos seus expoentes: *cuidei dos coeficientes. Este numerozinho aqui* (mostra o expoente 7 em $6x^7$).

O sujeito “Us” localiza os expoentes, porém usa uma nomenclatura algébrica incorreta para esses, “coeficiente”: *Os coeficientes.* Não procura com um olhar e uma leitura silenciosa verificar as “novas possibilidades” entre as peças nas suas primeiras combinações; não tenta a comutatividade, seja entre os coeficientes numéricos, seja entre os expoentes na sua primeira combinação das peças.

O estudante não consegue perceber a mudança de posição dos monômios pelos expoentes nas combinações de duplas: *eu mudei o que deu [...] mas acho que ficou tudo igual*. Não constata a troca que efetua entre os monômios de ($2x^1$) por ($2x$) na multiplicação com ($6x^7$); desconsidera no monômio ($2x$) a mudança do expoente 1 da sua forma visível para a sua forma invisível. Não faz referência à igualdade dos monômios ($2x^1$) e ($2x$). Não percebe a mudança dos coeficientes numéricos (2. 2. 3) por (2. 3. 2) nos seus monômios combinados de ($2x^4 \;.\; 2x \;.\; 3x^3$) para ($2x^1 \;.\; 3x^3 \;.\; 2x^4$): *eu não vi como pode ter combinado diferente. Não dá para mudar nada*. Não consegue aplicar comutatividade entre as peças de ($6x^2 \;.\; 2x^6$) para ($2x^6 \;.\; 6x^2$).

O estudante “Us” não tenta outras possibilidades após sua segunda combinação das peças, assim como não se desacomoda com a afirmação da colega de conseguir novas combinações com as mesmas peças do JOGO 1.

O sujeito “Us”, quando solicitado a criar suas peças mantendo o produto $12x^8$, tem a preocupação de combinar seus monômios somente através dos expoentes, e estes diferentes das peças ocupadas no JOGO 1. Para organizar seu pensamento precisa de um “tempo” para “lembrar” as duplas ações que envolvem as partes e o todo na operação da multiplicação com monômios (coeficientes numéricos = multiplicação e parte literal (expoentes) = adição). Não consegue organizar seu pensamento pelas duplas ações que exige a multiplicação algébrica, somente se preocupando com o resultado dos expoentes.

Durante o JOGO 1, observo que o sujeito “Us” não compreende a **comutatividade** dos monômios; realiza a combinatória do agrupamento multiplicativo incorretamente, não obtém êxito na **conservação** da parte e do todo e apresenta um início de esquema que permanece preso a idéia de expoente visível.

JOGO 2: 08 peças: São oito peças – representadas pelos monômios: $1x^5$, $12x^5$, $6x^2$, $24x^5$, $4x$, $2x^1$, $8x^4$ e $48x$, que fornecem o produto $48x^6$ (quarenta e oito xis na sexta potência).

O sujeito “Us” opera com o registro numérico gráfico; formula o resultado depois de longo tempo para “organizar” seu pensamento em relação às propriedades que envolvem a multiplicação de monômios. Ele justifica a demora: *demorei, mais agora consegui usar todas peças.* Combina as peças na preocupação dos coeficientes numéricos, parecendo saber fazer, mas permanece a dúvida quanto à sua compreensão dos processos que envolvem essas multiplicações entre os monômios.

De forma correta, o estudante utiliza a linguagem convencional da álgebra, no caso da nomenclatura dos expoentes: *quinta potência* (x^5), *quarta potência* (x^4) e ao *quadrado* (x^2). Entretanto, apresenta dúvida ao ler o expoente 1 quando está graficamente registrado: *Como se diz?* E, não se refere verbalmente ao expoente 1 – quando na forma invisível.

O sujeito “Us”, ao ser questionado sobre sua compreensão em relação ao expoente 1, seja na forma visível, seja na forma invisível, durante a multiplicação entre os monômios (48x) e ($1x^5$), afirma: *Porque aqui (coloca o dedo indicador na posição do expoente 1 invisível em (48x)) é um, escrito ou não, é (1)* [...] *não tenho problema.* Afirma não ter dúvidas para efetuar a multiplicação entre monômios quando um dos monômios na sua parte literal não é o número 1 – na sua forma visível (com registro gráfico).

Quando ao sujeito “Us” é solicitada a criação de outras peças mantendo o resultado ($48x^6$), permanece longo tempo sem nada registrar. Na procura de novas combinações, primeiro articula somente pelo pensamento *os possíveis*, mas permanece sem êxito. Somente consegue criar as suas peças comparando-as com as peças combinadas do JOGO 2 sobre a mesa. Solicita mais peças em branco, combina uma dupla e um trio de monômios. O sujeito “Us” registra e lê o expoente 1 no monômio ($2x^1$) do trio ($12x^2 \ . \ 2x^3 \ . \ 2x^1$).

O sujeito “Us”, ao ser questionado sobre novas possibilidades de combinações com duas peças do JOGO 2 indicadas por um colega, argumenta: *Acho que não dá para mudar nada.* Em seguida me surpreende: *Espera, prô, acho que vi uma coisa aqui*. Troca o monômio ($2x^1$) por (4x). Ficam, assim, as combinações: de ($24x^5$) . ($2x^1$) para ($24x^5$) . (4x) e de ($12x^5$) . (4x) para ($12x^5$) . ($2x^1$). O estudante faz referência à igualdade dos monômios (2x) e ($2x^1$), mas preocupa-se apenas com uma das propriedades da multiplicação de monômios, que se refere à adição dos expoentes (5 + 1), esquecendo-se de verificar a multiplicação dos coeficientes para manter a validade numérica de 48. Ao ser questionado quanto a sua troca, o sujeito “Us” afirma: *Porque “x” é igual a “x^1”, daí não muda as somas. Continuam sendo 5 + 1.* [...] *Sim, continua sendo 6.* O sujeito “Us” não se preocupa em verificar a continuidade da validade da multiplicação entre os coeficientes numéricos ao trocar os monômios ($2x^1$) e ($4x$) entre si, pois o produto entre 24 e 4 é 96 e o produto entre 12 e 2 é 24. Logo, nenhuma dessas duas combinações serve para o resultado 48.

O sujeito “Us”, no JOGO 2, não manifesta compreensão de duplas ações que envolvem as partes e o todo na operação da multiplicação com monômios (coeficientes numéricos = multiplicação e parte literal quanto aos expoentes = adição).

Durante o JOGO 2 observo que o sujeito “Us” não sabe aplicar corretamente as propriedades da multiplicação entre os monômios; realiza a combinatória do agrupamento multiplicativo incorretamente, não obtém êxito na **conservação** da parte e do todo, sua preocupação está unicamente em satisfazer a regra dos expoentes.

JOGO 3 = **02 peças** – uma ficha de forma quadrangular de 20 cm x 20 cm e uma ficha de forma retangular de 20 cm x 40 cm. A atividade solicitada é a determinação da área e do perímetro das duas fichas.

A) FICHA DE FORMA QUADRANGULAR

Observo que o sujeito “Us” não tem **noção de semelhança** de figuras, pois o desenho da sua figura quadrangular não é equivalente a ficha de forma quadrangular a ele apresentada no JOGO 3. Não tem a preocupação de registrar uma figura com os lados mais semelhantes possíveis mesmo anteriormente afirmando: *é um quadrado, porque tem a forma de um quadrado* [...] *porque tem os lados iguais*.

Quando o sujeito “Us” é questionado sobre uma possível determinação de um valor numérico para o perímetro da ficha de forma quadrangular, não organiza seu pensamento exclusivamente pela compreensão de uma igualdade numérica: *oito e seis.* Ao ser inquirido, continua justificando seus valores; não indica outra possibilidade numérica para a medida dos comprimentos.

O sujeito “Us” apresenta dúvidas na localização do perímetro ao ser solicitado seu valor. Pela recordação de uma atividade prática de medição em sala de aula, questiono-o e ele afirma: *Somaria as paredes.* Logo após o desenho da sua figura quadrangular, registra diretamente no papel: 28. E na sequência justifica verbalmente (6 + 6 = 12 e 8 + 8 = 16 = 12 + 16 = 28) seu processo para determinação do perímetro da ficha de forma quadrangular: *seria 28 [...] peguei os resultados dos lados do quadrado e somei doze com dezesseis (12 + 16) que deu vinte e oito (28) o resultado.* Observo que o sujeito “Us” não convenciona um símbolo para o perímetro da figura quadrangular, escreve a palavra por extenso: *Perímetro*, assim como registra na forma escrita e verbal sua compreensão: *Perímetro = 28.* Para determinar o “todo” 28, o estudante agrupa os seus resultados parciais (12 + 16).

O adolescente não indica a unidade de medida “centímetro” para as suas medidas de comprimento nem no resultado final; não nomeia os lados como largura e comprimento; não convenciona simbolicamente o termo “perímetro”. Constato que o sujeito “Us” não apresenta noção de espaço, pois os valores dados, 6 e 8, estão muito distantes da medida real de 20 cm.

O sujeito “Us”, ao ser solicitado a determinar a área da ficha de forma quadrangular, comenta: a *área é o chão do quadrado. Também vou somar*. Por algum tempo parece pensar, registra no papel: *Área = 6 + 6 = 12 e 8 + 8 = 16 = 28*. Permanece uma dúvida e, após muita resistência, decide-se por “modificar a conta” no papel. Registra por escrito e verbalmente sua modificação: *acho que preciso somar lados diferentes para não ficar igual ao perímetro*. Registra seu novo pensamento: área = 6 + 8 = 14 e 6 + 8 = 14. = 28. Ao ser questionado sobre a certeza de seu resultado, responde afirmativamente: *sim.*

O sujeito “Us” associa a palavra “área” com um exemplo prático trabalhado em momentos anteriores, mas na sequência de seu pensamento verbal e escrito percebo a sua não compreensão da regra para determinar a área da ficha de forma quadrangular. Por um breve momento chega a afirmar que área é diferente de perímetro, mas não multiplica os valores 6 e 8; apenas os agrupa de maneira diferente, mas continua adicionando-os para determinar o valor da área. Também não indica as unidades de medida, seja para os comprimentos, seja para a unidade de área final.

O sujeito “Us” não obtém êxito para calcular a área ao efetuar novamente a adição entre diferentes valores numéricos para a largura e o comprimento de uma ficha de forma quadrangular; não indica a unidade de medida para a área em centímetros quadrados (cm^2) nem convenciona algebricamente a área.

Logo, verifico que o sujeito “Us” aparentemente não possui esquemas organizados suficientemente para interpretar o problema, diante dos desafios sugeridos não é capaz de demonstrar condutas reguladas por modelos anteriores. Não apresenta ações de correspondência operatória na linguagem e pensamento aritmético e geométrico. Utiliza basicamente símbolos numéricos, seja na sua explicação verbal, seja no registro escrito do seu pensamento, para a construção de uma forma generalizada, seja para a determinação da área e do perímetro para uma ficha de forma quadrangular qualquer.

B) FICHA DE FORMA RETANGULAR

Observo que o sujeito “Us” desenha uma figura de forma quadrangular. Num segundo momento, elimina parte do comprimento e da largura do seu desenho. Assim, com seu desenho numa forma mais equivalente possível a ficha de forma retangular, expressa: *é um retângulo, ele é um pouco maior que o quadrado. Uns 8 de lado e uns 24 de cima.* Registra e lê os valores numéricos para a largura e o comprimento da ficha de forma retangular sem suas unidades de medida. Sua noção de espaço e proporcionalidade ao registrar uma figura retangular com os lados paralelos os mais semelhantes possíveis é prejudicada no momento das suas indicações numéricas.

Quando o sujeito “Us” é solicitado a determinar um valor numérico para o perímetro da ficha de forma retangular, num primeiro momento responde: *o perímetro dele é 64*. Somente após minha intervenção efetua o registro do seu pensamento: *24 + 24 = 48 e 8 + 8 = 16 = 64*. Para encontrar o todo (64), agrupa duplamente as partes (24 + 24) e (8 + 8) e os resultados parciais (48 + 16). Não registra as unidades de medida para as larguras, os comprimentos e o perímetro; continua com dificuldades quanto à noção de espaço, pois os valores dados – 8 e 24 – estão muito distantes das medidas reais de 20 cm x 40 cm; não convenciona simbolicamente o termo “perímetro”.

O sujeito “Us” manifesta-se verbalmente para determinação da área da ficha de forma retangular: *a área do retângulo é vinte e quatro mais oito e vinte e quatro mais oito.* Registra no papel o cálculo expresso na forma verbal: *Área = (24 + 8) e (24 + 8) = 64,* acrescido do seu resultado final. O adolescente, para determinar a área da ficha de forma retangular, segue o mesmo raciocínio usado para determinar o perímetro. Logo, não demonstra ter noção de como operar para determinar a área da ficha de forma retangular. Não registra unidades de medida para os comprimentos nem para o resultado da área: não convenciona simbolicamente o termo “área”.

O sujeito “Us", ao ser questionado sobre “outras possibilidades verdadeiras”, aceita, confirmando: *Tem possibilidade*. Não supõe novas possibilidades suas comparando-as com as sugeridas pelo colega; somente na forma verbal justifica seu aceite: *Pode por causa do comprimento* [...] *os lados são diferentes então pode dar valores diferentes* [...] *Somando ficam diferentes* [...] *por causa do comprimento diferente acho que os dois estariam certos.* Na sequência do seu pensamento, solicito que esclareça esta existência de mais de um acerto para uma única área. O estudante argumenta: *Não imagino como seria isso!* [...] *não sei*. Argumenta procurando coordenar os valores “possíveis” indicados pelo colega, mas permanece preso ao argumento do “comprimento”. Com seu argumento único preso na expressão “diferentes comprimentos”, é possível perceber sua pouca organização do pensamento formal, tanto na sua resolução quanto na possibilidade criada pelo seu colega. Não demonstra compreender os diferentes tipos de relações para uma determinação generalizada do perímetro e a área para uma ficha de forma retangular qualquer. Não faz uma tentativa para supor um modo geral para o cálculo da área de qualquer figura de forma retangular; não consegue avançar do pensamento aritmético para um pensamento numa lógica simbólica.

O sujeito “Us” não parece ter um *modelo*, nem consegue antecipar algumas das propriedades envolvidas na determinação convencional algébrica (ou formal) do perímetro e da área da ficha de forma retangular.

JOGO 4: 30 peças – representadas por monômios utilizando as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) - dominó algébrico elaborado pela pesquisadora.

O sujeito “Us” interrompe o jogo em quatro momentos durante a sua montagem do dominó algébrico, que a seguir passo a descrever, e, no quinto momento, para e encerra o jogo ao colocar a 22ª peça, afirmando: *não tem outra peça* $6x^3$. Assim, termina o JOGO 4 sobrando oito peças: $6x^9 : 2x^2$! $3x^4$, $2x^1 . 3x^4$!

$12x^2$, $3x^1 . 4x$! $3x^7$, $7x^1 + 2x^1$! $6x^6$, $11x – x$! $9x$, $20x^6 : 10x^5$! $10x^1$, $3x . x$! $2x$ e $3x^5 : x^1$! $3x^2$.

1ª parada: (5x) – (3x), responde ($2x^2$). *O xis mantém?* Pense. *E o expoente?* O que diz a regra? Mesmo assim escolhe a peça errada. Você tem certeza desse resultado, olhe bem as peças anteriores (9x – x = 8x). Oculto com a mão o resultado ($2x^2$) e faço o sujeito "Us" ler em voz alta *cinco xis menos três xis*. Então o resultado é? Troca por (2x).

A primeira dúvida surge na sétima peça manifestada verbalmente na subtração do monômio (5x) pelo monômio (3x) o sujeito "Us" responde: *($2x^2$).* Na operação da subtração entre monômios semelhantes uma parte da propriedade a ser aplicada orienta que os coeficientes numéricos devem ser subtraídos, logo (5 – 3). Uma condição da propriedade da subtração orienta que os expoentes da parte literal devem ser mantidos, logo (x = x). Penso que para determinar o resultado de (5x) - (3x), o sujeito "Us" deve ter seguido o seguinte pensamento: (5 - 3 = 2) e a parte literal "x" deveria ter sido mantida. O resultado da subtração entre os dois monômios é (2x). E a peça ($2x^2$) escolhida pelo estudante "Us" como primeiro resultado da subtração me parece ser um grande descuido, pois ele já tinha efetuado uma subtração na peça anterior. Na permanência da dúvida mesmo com a visualização das peças organizadas no lance anterior, somente após a peça ($2x^2$) ser encoberta de sua visão, com posterior leitura da subtração em questão: *cinco xis menos três xis,* o estudante faz a troca do resultado ($2x^2$) pelo resultado (2x). A escolha do resultado ($2x^2$) teria algo a ver com a propriedade da adição dos expoentes no caso da multiplicação entre dois monômios?

2ª parada: ($8x^4$) – ($7x^4$), responde (1). Certeza? Oculto com a mão a resposta (1). E o sujeito "Us" lê em voz alta: *oito xis na quarta potência menos sete xis na quarta potência é um xis na quarta*. Troca por (x^4).

Na segunda dúvida manifestada verbalmente na subtração do monômio ($8x^4$) com o monômio ($7x^4$), na operação da subtração entre monômios semelhantes, uma parte da propriedade a ser aplicada orienta que os coeficientes numéricos devem ser subtraídos, logo (8 - 7). Quanto aos coeficientes numéricos, o sujeito "Us" responde corretamente na sua primeira vez, respondendo "um". A segunda propriedade a ser aplicada orienta que os expoentes da parte literal devem ser mantidos, logo ($x^4 = x^4$). Logo, o resultado da subtração entre os dois monômios em questão é ($1x^4$). Neste resultado da subtração existe uma questão particular no monômio ($1x^4$), pois, convencionalmente, não é registrado seu coeficiente numérico 1; a leitura do sujeito “Us” deve ser da igualdade ($1x^4$) = (x^4). Para escolher (1) como resultado, o sujeito “Us” deve ter se preocupado apenas com a subtração dos coeficientes numéricos (8 - 7 =1) ou será que também diminui os expoentes da parte literal? A questão mais evidente é a sua dependência da leitura oral para efetivação do seu pensamento.

3ª parada: (9x) . (x), responde (9x). Como é mesmo a regra da multiplicação de monômios? “Us” enuncia a regra: *multiplica os números e soma os coeficientes*. Então? *Aqui é 1 + 1 = 2*. Troca por ($9x^2$).

O terceiro questionamento está relacionado com a multiplicação do monômio (9x) pelo monômio (x): *é (9x)*, na décima sétima peça do dominó. O estudante faz uma parada e, somente após recordar oralmente das regras aplicadas na operação da multiplicação entre monômios em questão, procura a peça com o resultado correto. Formalizando seu pensamento: *aqui é um mais um que dá dois*, completa seu pensamento com as duas etapas da multiplicação entre os monômios: (9 . 1 = 9) e ($x . x = x^{1+1} = x^2$). Nesta multiplicação existem duas questões muito particulares envolvendo o número (1): 1ª) questão particular do coeficiente numérico 1 no monômio (x), pois, convencionalmente, não é registrado seu coeficiente numérico 1. O sujeito “Us” deve recordar a igualdade entre (x) e (1x), isto é (x = 1x); 2ª) questão particular do expoente 1 – na forma invisível no monômio (x), pois o número 1, quando ocupa a posição de expoente num monômio, convencionalmente também não é registrado graficamente. Logo, a leitura deve ser (x) = (x^1), mas a operação da multiplicação requer a adição dos expoentes ($x . x = x^{1+1} = x^2$).

4ª parada: ($4x^3$) + ($2x^3$), responde ($6x^6$). Certeza? Confira com outra adição de monômios. *É só soma os números, o x^3 fica igual*. Troca por ($6x^3$).

Na quarta dúvida manifesta verbalmente na adição do monômio ($4x^3$) com o monômio ($2x^3$), o sujeito “Us”, pelo seu resultado considerado para o coeficiente numérico, tem presente no seu pensamento que na operação da adição entre monômios semelhantes uma parte da propriedade a ser aplicada orienta que os coeficientes numéricos devem ser adicionados; logo, quatro mais dois é seis (4 + 2 = 6). A dificuldade ocorre com a aplicação da outra parte propriedade, que orienta que os expoentes da parte literal devem ser mantidos; logo ($x^3 = x^3$). Logo, o resultado de

($4x^3$) + ($2x^3$) deve seguir o seguinte pensamento: (4 + 2 = 6) e a parte literal "x^3" deve ser mantida. O resultado da adição entre os dois monômios é ($6x^3$). Conjecturo que a peça ($6x^6$) escolhida pelo sujeito "Us" como primeiro resultado da adição me parece ser um reflexo resultante de uma adição direta entre os coeficientes numéricos e também uma adição entre os expoentes. Portanto, não ocorre diferenciação de propriedades pelas localizações numéricas, ora como coeficientes numéricos, ora como expoentes. Somente após uma manifestação de observação aferindo as suas escolhas anteriores, o sujeito "Us" faz a troca da peça ($6x^6$) pela peça do dominó com o resultado ($6x^3$).

5ª parada: o sujeito "Us" encerra o JOGO 4 ao colocar a 22ª peça afirmando: *Não tem outra peça $6x^3$*. Sem tentativas de reorganizar as peças, não consegue utilizar todas as 30 peças.

Para as **considerações parciais** do GRUPO 3, retomo alguns passos seguidos pelos estudantes adolescentes "Vi", "Fa" e "Us" nas três entrevistas.

Durante o JOGO 1, observo que os três estudantes escolhidos para as entrevistas, da T71 "Vi", da T72 "Fa" e da T73 "Us", combinam as peças com um olhar unidimensional nos expoentes; obtêm êxito com os expoentes visíveis, entretanto permanecem em uma dúvida constante quanto ao valor 1 (um) – na sua forma invisível; não conseguem organizar seu pensamento pelas duplas ações que exige a multiplicação algébrica, somente se preocupando com o resultado dos expoentes. Quando apresento a sugestão de novas combinações, eles não consideram a possibilidade, logo também não percebem a comutatividade das peças do jogo.

Os estudantes do GRUPO 3, durante o JOGO 2, em geral, necessitam de um tempo maior para articular a combinação das peças em função do produto (48); no momento das suas criações pode-se perceber um esquema restrito relativo ao expoente e coeficiente numérico visíveis; não consideram no monômio ($2x$) o expoente 1 – na sua forma invisível, errando a sua combinação por considerar 0 (zero) o expoente do monômio ($2x$), desconsiderando a semelhança ($2x$) = ($2x^1$); sobre a determinação de diferentes combinações por uma colega, argumentam somente através dos coeficientes numéricos.

No JOGO 3, verifico que “Vi”, “Fa” e “Us” apresentam resistência para registrar seu raciocínio de resolução seja para o perímetro, seja para a área na forma numérica da ficha de forma quadrangular e retangular; não apresentam semelhança entre o registro gráfico das figuras e as medidas reais das fichas; utilizam basicamente operações aditivas tanto para a determinação do perímetro como da área, seja da ficha de forma quadrangular, seja da retangular. Não conseguem determinar os perímetros e as áreas de forma generalizada, quando o fazem registram graficamente por extenso as palavras “área” e “perímetro”; no geral, não convencionam um ou mais fatores literais para o valor possível para a largura e o comprimento, assim como não registram as unidades de medida de comprimento (cm) e área (cm^2) durante o cálculo e, posteriormente, no resultado final. Não consideram convenções pré-existentes na geometria e na álgebra; tem dificuldades em reorganizar seus esquemas de pensamento em função da coordenação das duplas variáveis envolvidas, desconsideram os expoentes 1 – na forma invisível nos cálculos. Parece ocorrer **indícios de organizações parciais aditivas de generalização**, mas ainda definição de um *modelo* inicial.

No JOGO 4, entre as ações com êxito somente o sujeito “Vi” após nove interrupções completou o circuito com todas as peças do “dominó algébrico”, o sujeito “Fa” não quis jogar e o sujeito “Us” com quatro interrupções encerrou o circuito “sobrando” oito peças. As dúvidas manifestas estão relacionadas ao expoente 1 - na forma visível e invisível seja na adição/subtração, seja na multiplicação ou divisão entre os monômios. Assim como na dificuldade em coordenar a operação com suas propriedades específicas para determinar o resultado com o registro gráfico apresentado nas peças. Aparentemente os sujeitos não apresentam esquemas suficientemente organizados para na sequência das jogadas retomar as propriedades envolvidas em cada situação.

5 TRIANGULAÇÃO

Neste capítulo, apresento três estudos de caso, realizando a triangulação dos dados gerados pela observação em sala de aula, pela avaliação escrita e pelas entrevistas. Os estudos de caso permitem aprofundar a compreensão de caminhos individuais dos alunos adolescentes nas atividades de multiplicação de monômios propostas. Estes sujeitos foram escolhidos para exemplificar cada um dos três grupos entrevistados, cuja organização levou em conta o êxito nas tarefas.

5.1 CASO "Se" - GRUPO 1 (ÊXITO PLENO)

Na coleta de dados por meio do procedimento das **observações em sala de aula** o estudante "Se" expõe a sua compreensão da ordem dada para a resolução das situações de aprendizagem individualmente; é exigente nos procedimentos numéricos e algébricos que envolvem a compreensão da fórmula para a sua posterior aplicação na tentativa de solução da situação-problema. A mobilidade que esse estudante adolescente tem de transitar em noções e operações numéricas com noções e operações algébricas reflete-se diretamente na sua compreensão e resolução das situações de aprendizagem propostas por esta pesquisa. A resolução das situações algébricas não se tornou um obstáculo no momento em que os sistemas simbólicos foram utilizados pelo estudante adolescente "Se".

Na sequência da discussão em grupo, o sujeito "Se" soube mostrar o quanto é complexa essa situação e como se faz importante distinguir qual dimensão está sendo tratada na resolução do problema. Sem registro gráfico no papel, somente de forma verbal, o estudante construiu os passos para a determinação do perímetro diretamente com supostos valores algébricos. O que temos presente é a capacidade para raciocinar em termos de hipóteses expressas verbalmente, não mais necessitando da manipulação dos objetos.

Nas situações-problemas de valores ausentes, o raciocínio requer uma capacidade de operar em nível abstrato, exigindo um domínio de vários conceitos de geometria e álgebra. O estudante teve a capacidade de criar combinações algébricas e explicar sua argumentação de um modo geral para o perímetro da figura de forma retangular com a determinação anterior para o perímetro de uma figura de forma quadrangular qualquer. Na busca de uma solução possível, o sujeito "Se" questiona, verifica hipóteses de implicação e de exclusão nas suas tentativas, isto é, nos seus “possíveis”, pensa hipoteticamente e deduz das hipóteses modelos mais elaborados.

Piaget (1976, p.87) sustenta que, “com a aparição do nível formal, as duas novidades são o método sistemático no emprego das combinações *n* a *n*, e a compreensão do fato”. Combinações como parte e parte, isto é, lados menores entre si (x + x) e lados maiores entre si (y + y), e a utilização dessas combinações para que o perímetro de qualquer figura de forma retangular derive da adição dos produtos, como tal: $2x + 2y$, foram o foco do estudante. O que interessa o sujeito “Se” “não é, portanto, um acerto por meio de uma combinação específica, mas a compreensão do papel desempenhado por ela no conjunto das combinações possíveis.” (1976, p.88)

Pela observação realizada durante as aulas, verifico na aplicação dos instrumentos que o estudante adolescente “Se” teve êxito na resolução das situações problemas. Demonstra aparente compreensão de um conjunto de combinações possíveis existentes para a solução dos problemas apresentados, por meio de operações combinadas numa relação parte/todo. Possui uma grande mobilidade algébrica e suas condutas sugerem um raciocínio formal.

Na interpretação dos resultados registrados no instrumento de **avaliação escrita com uso de notação simbólica (AECNS)** verifico que o estudante “Se” do GRUPO 1 evidencia a existência de um saber com avanços em direção à “conservação do todo” sobre uma composição de partes. Piaget, afirma que o próprio das operações “[...] é precisamente assegurar a livre mobilidade das partes no seio de um todo que se conserva necessariamente como reunião (real ou virtual) de seus elementos.” (Battro, 1978, p.63)

Ao verificar os resultados escritos pelo estudante “Se”, constato que nos monômios indicados reconhece seu coeficiente numérico, diferencia a parte literal, identifica a semelhança de monômios e entre os dois monômios indicados na AECNS, efetua corretamente as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação. Logo, tem êxito em quase todas as atividades propostas na avaliação escrita com uso de notação simbólica.

Analisando especificamente a questão 4 da AECNS sobre multiplicação entre monômios, o estudante “Se” (componente do GRUPO1) considera de forma correta a reunião das partes que compõem o ‘todo’ de uma multiplicação entre dois monômios. Do ponto de vista matemático, verifico seu êxito nos seguintes aspectos: uso correto da regra dos sinais envolvendo o conjunto dos números inteiros; multiplicação correta entre os fatores numéricos, assim $P = A \wedge B$; aplicação correta das propriedades convencionais da multiplicação entre a parte literal e a adição dos expoentes visíveis, assim $Q = L \wedge E^{V}$; e quanto aos expoentes invisíveis não tem o mesmo êxito, logo $Q^{-} = L \wedge E^{i-}$. A mobilidade do pensamento nesse instrumento de coleta de dados é muito importante. Continuo a perceber como o sujeito “Se” mantém as relações e coordenações entre as propriedades envolvidas no cálculo da área de figuras de formas quadrangulares/retangulares, agora presentes na multiplicação entre monômios. Parece conseguir organizar seu pensamento de forma biunívoca, através de múltiplas coordenações sendo elas aritméticas e algébricas.

Passando para a interpretação dos resultados registrados no instrumento da Entrevista, que foi composta por quatro JOGOS. Aqui optei por organizar separadamente suas ações e relações por JOGO com o mote de minha pesquisa.

Durante o JOGO 1, o estudante “Se” opera e faz a leitura correta na linguagem convencional algébrica os monômios; demonstra ter compreensão das noções aritméticas e das operações geométricas e algébricas necessárias à compreensão algébrica. Apresenta **conservação** do símbolo na argumentação; tem como preocupação principal os expoentes; observa e opera na forma da parte (expoente) para o todo (produto final). Considera o expoente 1 – como um expoente unidimensional, isto é, apenas na sua forma invisível durante as operações. Durante a execução do JOGO 1, observo que o sujeito “Se” tem maior facilidade de operação quando o expoente 1 se encontra na forma invisível.

Quando o estudante é questionado sobre possibilidades de mudanças na combinação das peças, retoma as propriedades do elemento neutro da multiplicação = 1 (um) na condição de coeficiente numérico e do expoente zero, na aplicação do elemento neutro da adição. Demonstra que compreende e sabe aplicar as duas propriedades (multiplicação e potenciação) explanadas verbalmente através da composição de novas peças para o JOGO 1; reconhece e confirma a igualdade entre os monômios (2x) e ($2x^1$).

Observo que o sujeito “Se” compreende a **comutatividade** dos monômios; tem **conservação** da parte e do todo e apresenta **coerência lógica** nos **agrupamentos** enquanto desenvolve o JOGO 1.

Durante o JOGO 2, o sujeito “Se” opera mentalmente sem o registro numérico gráfico, formula o resultado ($48x^6$) através do pensamento **hipotético-dedutivo**; expressa precisão absoluta tanto no registro de suas afirmações como nas combinações das peças.

O sujeito “Se” sabe o que pretende e aplica a propriedade distributiva corretamente na decomposição dos expoentes, sempre com o foco no resultado final, assim como reflete com rigor e atenção na decomposição numérica em partes de valores numéricos menores. Consegue montar suas combinações sugerindo verbalmente quatro monômios, nestes reorganizando os coeficientes numéricos e a parte literal com uma atenção especial aos expoentes.

Quando o sujeito “Se” é questionado sobre novas possibilidades de combinações com as oito peças do JOGO 2 indicadas por uma colega, argumenta com domínio demonstrando saber operar tanto com o coeficiente numérico quanto com o expoente 1 na forma invisível.

Observo que no JOGO 3 – com a ficha de forma quadrangular – o sujeito “Se” tem **noção de semelhança** de figuras, pois ocorre equivalência entre seu desenho e a ficha apresentada; organiza seu pensamento exclusivamente pela compreensão algébrica simbólica; ao ser inquirido, justifica sua escolha algébrica como possibilidade de solução para determinação do perímetro e da área. Constato que o sujeito “Se” sabe **generalizar** a determinação do perímetro e da área da ficha de forma quadrangular, pois faz de forma verbal a seqüência de seus procedimentos registrados no papel.

O sujeito “Se” opera com e sem o registro numérico 1 do coeficiente numérico nos seus monômios indicados como valores para as medidas dos lados de sua figura quadrangular, assim como demonstra saber operar com o expoente 1 – na sua forma invisível, tanto no cálculo do perímetro como na área.

O estudante tem presente em suas ações uma correspondência operatória na linguagem e no pensamento formal. Apresenta **regulações ativas** utilizando basicamente símbolos algébricos, seja na sua explicação verbal, seja no registro escrito do seu pensamento, para a construção de uma forma geral para a determinação da área e do perímetro de uma ficha de forma quadrangular qualquer. Parece ser capaz de pensar através de proposições e poder lidar com uma realidade possível apenas imaginada, a partir do pensamento hipotético-dedutivo, apresentando nas suas ações a generalização? de relações.

Entretanto, mesmo com esse pensamento formal, o sujeito "Se" não argumenta verbalmente nem registra de forma escrita as unidades de medida que estão diretamente envolvidas no produto final tanto do perímetro (cm = centímetros) como na área (cm^2 = centímetros quadrados) da ficha de forma quadrangular.

O sujeito "Se", no JOGO 3 – com a ficha de forma retangular - tem a preocupação de registrar uma figura com os lados paralelos os mais semelhantes possíveis. Observo que ele revela noção de espaço e proporcionalidade, pois relaciona valor sugerido com o seu dobro.

Quando o sujeito "Se" é questionado sobre uma possível determinação de um valor numérico para o perímetro da ficha de forma retangular, argumenta diretamente pela linguagem verbal, associando os valores numéricos com valores algébricos equivalentes. Parece compreender o significado da variável única compondo dois diferentes monômios no seu retângulo. A partir desse registro verbal, que passa para o papel, o sujeito "Se" organiza seu pensamento exclusivamente pela compreensão algébrica simbólica. Registra, reflete e refaz por três vezes seu argumento para outro registro, considerado por ele correto na sua compreensão algébrica do perímetro da ficha de forma retangular.

O sujeito "Se" parece ter um *modelo*, mas não consegue antecipar todas as propriedades envolvidas na determinação convencional algébrica (ou formal) do perímetro da ficha de forma retangular. O estudante vai refletindo à medida que registra graficamente suas possibilidades de solução para o problema de aprendizagem apresentado no JOGO 3 com a ficha de forma retangular.

Observo que o sujeito "Se" também sabe **generalizar** a determinação da área da ficha de forma retangular. Logo, verifico que na sua forma retangular o sujeito "Se" opera sem o registro gráfico do número 1 como coeficiente numérico nos seus monômios indicados como variáveis para as medidas dos lados da sua figura, assim como demonstra **saber operar** com o **expoente 1 – na sua forma invisível**, tanto no cálculo do perímetro como na área.

Quando questiono o sujeito "Se" sobre novas possibilidades de medidas para a base e o comprimento da ficha de forma retangular sugeridas por uma colega, o estudante argumenta verbalmente, e na seqüência, sabe transferir graficamente para o papel o seu argumento. Em virtude de seus argumentos, é possível perceber sua organização através do pensamento formal tanto na sua resolução quanto na possibilidade criada por sua colega.

O sujeito "Se" tem uma conexão lógica, onde uma inferência leva a outra, assim mantendo nas suas ações uma correspondência operatória na linguagem e no pensamento formal. Demonstra **compreender** os diferentes tipos de relações para uma determinação geral tanto da área como do perímetro para uma ficha de forma retangular qualquer. Apresenta **regulações ativas**, num movimento de relações entre conhecimentos já estruturados e novas possibilidades a serem construídas. O estudante utiliza basicamente símbolos algébricos, seja na sua explicação verbal, seja no registro escrito do seu pensamento, para a construção de uma forma geral para a determinação da área e do perímetro de uma figura de forma retangular qualquer.

O sujeito "Se" também não argumenta verbalmente nem registra de forma escrita as unidades de medida que estão diretamente envolvidas no produto final tanto do perímetro (cm = centímetros) como na área (cm^2 = centímetros quadrados) da ficha de forma retangular.

No JOGO 4 – dominó algébrico - o sujeito "Se" recebe as trinta peças e é orientado a combiná-las observando a operação e o resultado correspondente. O estudante faz todos os cálculos "de cabeça" e somente interrompe a montagem do dominó algébrico em dois momentos: na divisão = (9x) : (x) e na subtração: (11x) – (x). Os dois questionamentos estão diretamente relacionados com o expoente 1 – na sua forma invisível assim como com o coeficiente numérico 1 – também na sua forma invisível, em que o registro convencional algébrico do monômio é (x).

Em sua primeira dúvida manifestada verbalmente na divisão do monômio, é preciso recordar que a operação da divisão entre monômios se subdivide em duas propriedades: 1) divisão dos coeficientes numéricos; 2) subtração dos expoentes da parte literal semelhante. Assim, ($x^{1-1} = x^0$) e para obter êxito deve seguir as regras e concluir que x^0 é igual a 1.

Na segunda dúvida, o estudante precisa relacionar que na operação da subtração entre monômios semelhantes uma parte da propriedade a ser aplicada orienta que os coeficientes numéricos devem ser subtraídos, ao passo que outra parte da propriedade a ser aplicada orienta que os expoentes da parte literal devem ser mantidos. Logo, deve ter presente as igualdades (x) = (x^1).

Em síntese, pelos dados anteriormente apresentados, posso concluir que o sujeito “Se” parece operar com noções e operações algébricas, o que se reflete diretamente na sua compreensão e resolução das situações de aprendizagem propostas por esta pesquisa. Usa adequadamente os sistemas notacionais numéricos e algébricos; considera de forma correta a reunião das partes que compõem o ‘todo’ (sinal, fator numérico, fator literal e expoente) de uma multiplicação entre dois monômios. Privilegia o registro e a interpretação do expoente 1 na sua forma invisível durante as operações. Entretanto, confunde-se com o registro gráfico do expoente 1, para, reflete e supera o desafio apresentado durante o JOGO 4 da entrevista. Essas respostas implicam regulações ativas, num movimento de relações entre conhecimentos já estruturados e novas possibilidades que vão sendo construídas de forma conceitualizada.

5.2 CASO “An” - GRUPO 2 (ÊXITO PARCIAL)

Na coleta de dados por meio do procedimento das **observações em sala de aula** o estudante “An” participa, inicialmente, como ouvinte e observador das ações de seus colegas de grupo. Em um segundo momento, para operar, revela a necessidade de recursos materiais e associação com uma situação real vivenciada anteriormente para abordar a situação. De acordo com Piaget (1971), chega-se a um valor relativo “por meio de uma operação de correspondência”. (p.104) Por esta característica do ponto de vista da teoria piagetiana, o sujeito “An" está representando o perímetro somente pelo meio de um único “significante”. Observo que as ações continuam baseadas num princípio de conservação por relações diretas do sujeito “An” com algum objeto material. No sujeito “An" também ocorre a desestabilização de uma verdade aceita como finita: *cada problema tem uma, e* *somente uma, solução verdadeira*. No momento em que a esse adolescente é apresentada uma atividade com múltiplas possibilidades como solução, ele encontra dificuldade na "novidade" do conteúdo e na regulação de esquemas específicos, aparentemente já construídos em situações de aprendizagem anteriores para lidar com a situação ao organizar seu fazer.

Podem-se observar **indícios de regulações ativas** em que ações e conceituações aparecem isoladas ou concomitantemente. Apresenta sucessivas organizações de pensamento, utiliza como primeira via de solução a correspondência de elementos (largura e comprimento) e como segunda via a argumentação verbal de duas possibilidades para a solução dos perímetros das fichas de formas quadrangulares e retangulares; necessita do registro gráfico dos cálculos; com seus valores possíveis efetua a adição de totalidades parciais.

Em relação às condutas observadas pelo estudante "An", o progresso aparente está nas manifestações de compreensão na situação-problema 4A pelo campo perceptivo e verbal. Será que nas tentativas, entre acertos e contradições, as experiências realizadas foram representadas e integradas na coordenação das ações? E, a partir das relações conhecidas, o sujeito estaria pensando possíveis? O sujeito "An" questiona, nega, retoma os registros e parece refletir sobre os valores possíveis sugeridos pelo colega; confirma os valores, sem qualquer utilização de material concreto e sem qualquer manifesto para nova correção ou outra possibilidade por comparação com algum meio material.

Penso que o sujeito "An" está na etapa de transição entre o operatório concreto e o formal, pois foi o componente do grupo que com a mesma intensidade na forma verbal expressou duas possibilidades de solução das situações de aprendizagem propostas na sala de aula e as efetuou "mentalmente" num pequeno espaço de tempo com, sobre e sem os objetos materiais. Enfim, opera com valores ausentes e obtém progresso com a construção de modelos algébricos, mesmo que ainda incorretos. O emprego sistemático de combinações é uma característica manifesta do início de uma estrutura lógica? Piaget e Inhelder (1976), em seus estudos, mostram-nos uma estreita ligação do desenvolvimento dos raciocínios experimentais com a constituição da lógica das proposições, visto que aparece "um certo número de operações e de noções novas, cuja compreensão ultrapassa as capacidades do nível concreto." (p.79)

O estudante “An" emprega diferentes combinações para a determinação possível do perímetro da figura de forma retangular. O pensamento formal permite *pensar possíveis* a partir das relações conhecidas. Assim, a grande novidade identificada nos esquemas operatórios da lógica formal do sujeito “An” parece ser **a inversão** de sentido entre o possível e o real, este adolescente começou a raciocinar segundo os possíveis e, assim conseguiu desenvolver hipóteses. Esta característica implica agir de forma mais elaborada e conseguir compreender com maior rapidez as relações entre os elementos em jogo na organização proposta como desafio. Entretanto, “An” continua determinando o resultado dos problemas propostas pela adição das totalidades numéricas parciais e não apresenta uma organização de pensamento mais elaborada.

Em “An” observo a ampliação dos recursos/instrumentos por ele utilizados para alcançar o êxito na resolução da situação-problema 4A - demonstra maior compreensão de um conjunto de combinações possíveis para a solução do problema apresentado. Penso que sejam as primeiras tentativas do pensamento do estágio operatório-formal, pois ele parece se orientar para uma nova forma de equilíbrio.

Na interpretação dos resultados registrados no instrumento de **avaliação escrita com uso de notação simbólica (AECNS)** verifico que o estudante “An” do GRUPO 2 não evidencia a existência de um saber com avanços em direção a uma composição de partes.

Ao verificar os resultados escritos pelo estudante “An”, constato que nos monômios indicados reconhece os coeficientes numéricos, diferencia a parte literal, mas não identifica a semelhança de monômios. Entre os dois monômios indicados na AECNS, efetua corretamente as operações da adição e da potenciação; não obtém êxito nas operações com a subtração, a multiplicação e a divisão. Logo, tem pouco êxito nas atividades propostas na avaliação escrita com uso de notação simbólica.

Analisando especificamente a questão 4 da AECNS, referente à multiplicação entre monômios, o estudante “An” considera de forma incorreta a reunião das partes que compõem o ‘todo’ de uma multiplicação entre dois monômios. O sujeito “An" não chega a associar os fatores literais em uma relação binária no plano das propriedades predeterminadas. A dificuldade referente à multiplicação entre termos algébricos semelhantes com expoentes 1 – na forma invisível como $b.b^1$, $x.x^2$ e $y^3.y$ – está registrada na AECNS.

Do ponto de vista matemático, verifico seu êxito no uso correto da regra dos sinais da multiplicação envolvendo o conjunto dos números inteiros e a efetuação correta da multiplicação entre os fatores numéricos, assim $P = A \wedge B$. Porém, o sujeito “An” não obtém êxito em função do erro na aplicação da propriedade que orienta os expoentes visíveis, uma vez que, ao invés de adicioná-los, multiplica-os, logo $Q^- = L \wedge E^{v-}$; e quanto aos expoentes invisíveis também não apresenta êxito, pois opta pelo registro do maior expoente visível entre os monômios, logo $Q^- = L \wedge E^{i-}$.

Verifico que o sujeito “An” nesse instrumento de coleta de dados registra apenas dois acertos em nove produtos respondidos, não apresentando êxito na operação com regras convencionadas através do pensamento num plano abstrato. O estudante demonstra não se recordar das propriedades de segunda ordem, principalmente da potenciação, estabelecendo diferentes relações num *fazer* sem compreensão das coordenações usadas. Não consegue manter as relações e coordenações entre as propriedades envolvidas no cálculo da área de figuras de formas quadrangulares/retangulares, agora presentes na multiplicação entre monômios. Não parece conseguir organizar seu pensamento de forma biunívoca, através de múltiplas coordenações sendo elas aritméticas e algébricas.

Passando para a interpretação dos resultados registrados no instrumento da **Entrevista**, que foi composta por quatro JOGOS. Aqui optei por organizar separadamente suas ações e relações por JOGO com a questão de minha pesquisa.

Durante o JOGO 1, o estudante “An” aplica corretamente a regra da multiplicação entre monômios; obtém êxito com os expoentes visíveis e invisíveis e lê com perfeição o símbolo operatório entre as peças. Contudo, faz a leitura incorreta da nomenclatura dos expoentes.

O estudante efetua a adição dos expoentes iniciando pelos expoentes “visíveis”, isto é, aqueles que estão graficamente registrados, e somente no final adiciona o expoente um (1), que está na forma invisível no monômio (2x). Apresenta na argumentação a conservação do símbolo, tendo preocupação com os coeficientes numéricos e com os expoentes; observa e opera na forma das partes para o todo (produto final).

Quando o sujeito “An” é questionado sobre possibilidades de mudanças na combinação das peças, retoma as características e confirma a igualdade entre os monômios (2x) e ($2x^1$), assim como estabelece a coordenação verbal na explicação dada entre o expoente 1 na forma visível com a forma invisível entre os monômios anteriormente referidos. **Não tenta a comutatividade**, seja entre os coeficientes numéricos, seja entre os expoentes na sua primeira combinação das peças.

O sujeito “An”, quando solicitado a criar suas peças mantendo o produto $12x^8$, tem a preocupação de combinar monômios com coeficientes numéricos e expoentes diferentes das peças ocupadas no JOGO 1. Registra o coeficiente numérico 1 no monômio ($1x^3$) e deixa o expoente 1 – na forma invisível no monômio (4x). No momento da leitura das peças criadas, lê o número 1 como coeficiente numérico, mas não faz referência a ele quando da leitura do expoente 1 – na forma invisível. Na seqüência da entrevista quando questionado sobre a determinação de diferentes combinações por uma colega, o sujeito “An” sabe argumentar e, ao ser instigado sobre novas possibilidades, justifica suas opções.

Durante o JOGO 1, observo que “An” progride nas suas ações e efetua a **comutatividade** dos monômios; realiza a combinatória do agrupamento multiplicativo corretamente, tem êxito na **conservação** da parte e do todo e apresenta **coerência lógica** no seu pensamento.

No JOGO 2, o sujeito “An”, opera com a necessidade do registro numérico gráfico, formula o resultado após um longo tempo para coordenar as relações envolvidas. Ao ser questionado sobre a demora, justifica-a em razão de o resultado 48 estar fora do alcance da contagem “rápida” com os dedos, ou da “decoreba” da multiplicação até dez.

O estudante, ao ser solicitado a criar seus monômios para o resultado $48x^6$, necessita de um tempo maior na tentativa de articular coeficientes numéricos “diferentes” das peças ocupadas do JOGO 2. O sujeito “An”, na procura de novas combinações, surpreende-me utilizando em suas combinações o expoente 1 – na forma visível no monômio ($16x^1$) e o expoente 1 – na forma invisível no monômio (*2x).* Com o foco no resultado final, monta suas combinações sugerindo três monômios, nestes reorganizando as partes que compõem o monômio, com uma atenção especial à decomposição dos valores numéricos.

Quando o sujeito “An” é questionado sobre novas possibilidades de combinações com as suas três peças do JOGO 2 indicadas por um colega, argumenta compreender a igualdade ($x = x^1$) e saber operar com as duas convenções. Volto a questioná-lo sobre a escolha da criação de monômios com expoente com o 1 na forma visível e invisível. O sujeito “An” justifica suas opções por observar que alguns dos seus colegas apresentam dificuldades de solução na operação da multiplicação entre monômios.

Durante o JOGO 3 observo que o sujeito “An”, – ficha de forma quadrangular, – tem **noção de semelhança** de figuras; quanto ao perímetro, organiza seu pensamento exclusivamente pela compreensão numérica, relacionando *altura* e *comprimento*. Ao ser inquirido sobre sua indicação numérica, reconsidera o seu primeiro valor, agora alcançando o valor real da medida.

O sujeito “An” apresenta dúvidas na localização do perímetro ao ser solicitado seu valor; após o manuseio da ficha de forma quadrangular e na sua argumentação, indica sua localização. Observo que o sujeito “An” chega a convencionar a expressão perímetro do quadrado por “P”*;* as contra-sugestões não são consideradas, nem reflete sobre a nova possibilidade sugerida pelo colega, persiste no seu valor, a informação não produz nenhum conflito cognitivo. Não tem êxito no valor final para o perímetro da ficha de forma quadrangular.

O estudante “An”, ao ser solicitado a determinar a área da ficha de forma quadrangular, convenciona-a por meio do registro simbólico geométrico: *A*. Primeiro questiona a operação a ser utilizada, permanece na dúvida e, após muita resistência, registra por escrito e verbalmente o resultado. O sujeito “An” obtém êxito ao efetuar a multiplicação entre a largura e o comprimento para determinar a área; na escrita e leitura utiliza unidade de medida em centímetros quadrados (cm^2).

Ao ser informado sobre a existência de outras possibilidades de valores numéricos para a área, o sujeito “An” permanece em dúvida, assim como quando questionado sobre a validade de duas ou mais soluções, pois demonstra não compreender as possibilidades que as variáveis numéricas e algébricas trazem para o cálculo da área da ficha de forma quadrangular. Utiliza basicamente símbolos numéricos, seja na sua explicação verbal, seja no registro escrito do seu pensamento, para a construção de uma forma generalizada para a determinação da área e do perímetro para uma figura quadrada qualquer.

Observo que o sujeito “An”, no JOGO 3 – ficha de forma retangular –, parece ter noção de espaço e proporcionalidade ao registrar uma figura com os lados paralelos os mais semelhantes possíveis a ficha; registra e lê os valores numéricos para a *largura* e o *comprimento* com suas unidades de medida em centímetros; determina um valor numérico para o perímetro do retângulo, argumenta diretamente na linguagem verbal, associando os valores numéricos; obtém êxito ao efetuar o registro das adições parciais das larguras com os comprimentos utilizando os valores numéricos associados com a sua unidade de medida.

Observo um avanço nas ações e interações do sujeito “An" em relação às organizações para o perímetro da ficha de forma retangular, pois esta sequência de adições parciais não ocorre no cálculo da ficha de forma quadrangular. Entretanto, não utiliza mais símbolos para convencionar largura, comprimento e perímetro, e sim escreve as palavras por extenso no papel. Registra de forma correta o valor numérico do perímetro, mas incorretamente a unidade de medida final.

Para determinação da área da ficha de forma retangular, o sujeito “An” localiza o espaço e registra o cálculo no papel, modifica-o várias vezes; não utiliza um símbolo para convencionar a área, escreve a palavra por extenso; não faz uso das unidades de medida de comprimento e de área, nem verbal nem registradas no papel.

O sujeito “An", ao ser questionado sobre “outras possibilidades verdadeiras”, aceita-as; supõe novas possibilidades, comparando-as com as sugeridas pelos colegas; argumenta novas construções conseguindo generalizar, num primeiro momento, associando valor numérico para largura e valor generalizado para o comprimento, processo que é registrado nas formas verbal e escrita.

Num segundo momento, o sujeito “An” desenha uma nova figura retangular. Observo-o refletindo sobre a primeira figura retangular e, então, questiono-o novamente sobre como pensar uma forma de determinar o perímetro e a área para qualquer retângulo. O adolescente, no papel, considera a mesma variável literal para os quatro lados do retângulo; questiona seu próprio registro de igualdade para todos os lados do retângulo e decide modificar os valores considerados para a largura de “x” para “2x”, argumentando sua validade por ser “o dobro” do comprimento. Transfere sua organização da operação anterior para a determinação do perímetro com os valores numéricos para os valores algébricos. De forma verbal correta, adiciona os valores chegando ao resultado igual a 6x, registrando corretamente: *Perímetro = 6x.* Não usa uma convenção para a palavra “perímetro” assim como não registra a unidade de medida centímetro (cm) na variável “x” no comprimento, na largura e no resultado geométrico do perímetro.

O sujeito “An”, também de forma correta, registra convencionalmente o cálculo da área da sua figura retangular na forma generalizada como se fosse para qualquer figura retangular. Parece saber aplicar a regra do produto entre a largura e o comprimento das medidas convencionadas, mas demonstra não compreender o significado da variável “x” ora considerada largura, ora considerada comprimento.

O estudante “An" não convenciona uma letra para designar a “área”, nem registra a unidade de medida de área = cm^2 no resultado algébrico da área de uma ficha de forma retangular qualquer. Desconsidera os expoentes 1 – na forma invisível no cálculo da área, fato evidente no seu registro gráfico, pois não efetua a adição dos expoentes dos “xis” que compõem a parte literal dos monômios. Essa parece ser uma atitude característica do adolescente diante de uma associação de dois ou mais fatores, por exemplo, é a de estudar um e afastar os demais, sem maiores interferências nas suas hipóteses para compreensão de uma situação-problema. O sujeito “An” não parece ter um *modelo,* mas consegue antecipar algumas das propriedades envolvidas na determinação convencional algébrica (ou formal) do perímetro e da área da ficha de forma retangular.

No JOGO 4, – dominó algébrico – o sujeito “An”, interrompe-o em cinco momentos durante a sua montagem. Com dois questionamentos envolvendo a adição $((7x^1) + (2x^1) = ?(9x)$ e $(8x^4) + (x^4) = ?(9x^8))$ e um questionamento relacionado com a subtração ((3x) - (x) = ?(9x)), foram interrogações diretamente relacionadas com o expoente 1 – na sua forma visível e invisível, e com o coeficiente numérico 1 – na forma invisível, nos quatro monômios em questão, assim como com seus resultados. Para o estudante obter êxito, precisa saber que na adição de monômios semelhantes 1) a propriedade orienta que os coeficientes numéricos devem ser adicionados, 2) a propriedade orienta que os expoentes da parte literal devem ser mantidos; por sua vez, na subtração de monômios semelhantes a propriedade orienta que os coeficientes numéricos devem ser diminuídos. Precisa também compreender a igualdade entre os monômios $(x^1) = (x) = (1x)$, porque o “erro” observado é a não consideração durante o cálculo tanto do expoente como do coeficiente numérico 1 na sua forma “invisível”, ou melhor dizendo, na sua forma convencional de representação. O outro “erro” ocorre na relação de cálculo empregado quando o expoente 1 surge na forma “visível” e o estudante aplica a segunda propriedade que orienta os expoentes da parte literal na multiplicação de monômios de “adicionar os expoentes”.

Os outros dois questionamentos são em relação à multiplicação dos monômios, são dúvidas em relação à forma invisível de se apresentar o expoente 1 e o coeficiente numérico 1. Para obter êxito na multiplicação, existem duas questões muito particulares envolvendo o número 1: 1ª) questão particular do coeficiente numérico 1 no monômio (x), pois, convencionalmente, não é registrado seu coeficiente numérico 1. Logo, a leitura do sujeito “An” deve ser da igualdade entre (x) e (1x), isto é $(x = 1x)$; 2ª) questão particular do expoente 1 – na forma invisível no monômio (x), pois o número 1, quando ocupa a posição de expoente num monômio, convencionalmente, também não é registrado graficamente. Logo, a leitura deve ser $(x) = (x^1)$. O sujeito “An” precisa recordar que a operação da multiplicação entre dois monômios se subdivide em duas propriedades: 1) multiplicação dos coeficientes numéricos, logo $(1 . 1 = 1)$, e 2) adição dos expoentes da parte literal semelhante, logo $(x^{1+1} = x^2)$.

Em síntese, posso concluir que o sujeito “An” opera em maior número de situações-problemas com noções e operações numéricas; apresenta indícios de operações algébricas, o que se reflete diretamente na sua compreensão e resolução de algumas das situações de aprendizagem propostas por esta pesquisa. Usa adequadamente o sistema notacional numérico, mas apresenta dúvidas (incertezas) quanto ao sistema notacional algébrico; considera de forma incorreta a reunião das partes que compõem o ‘todo’ (sinal, fator numérico, fator literal e expoente) de uma multiplicação entre dois monômios. Privilegia o registro e a interpretação durante as operações do expoente 1 - na sua forma visível. Demonstra muitas dúvidas em relação ao 1 - na sua forma invisível, tanto na posição de expoente quanto de coeficiente numérico nos monômios. Suas respostas implicam regulações ativas, num movimento de relações entre alguns conhecimentos estruturados e novas possibilidades que vão sendo construídas em ações e coordenações concomitantes e de forma ainda não totalmente generalizável. O estudante “An” tem um fazer através de operações combinadas numa estrutura que ainda não integra todas as possibilidades lógicas, mas, em alguns momentos, é capaz de argumentar explicando suas ações.

5.3 CASO “Us” - GRUPO 3 (POUCO ÊXITO)

Na coleta de dados por meio do procedimento das **observações em sala de aula** o estudante “Us” participa, inicialmente como observador das ações de seus colegas de grupo. Na sequência das atividades propostas mede a extensão da lateral de cada uma das três fichas de forma quadrangular, confere através do registro notacional os resultados sugeridos. Num esforço único, o grupo mostra a precisão na ação de uma colega, pois ocorre a regularidade dos valores supostos com os valores reais das medidas. Nessa situação parecem estar presentes vários momentos de aprendizagem que podem ser considerados etapas de uma construção coordenada entre o conhecimento aritmético e o conhecimento geométrico.

No caso do cálculo da área de três fichas de forma quadrangulares, as hipóteses servem como pontos de discussão sobre a legitimidade dos valores da largura e do comprimento de cada ficha, assim como da retomada de um conhecimento anteriormente adquirido. Mesmo que o sujeito “Us” não tenha atingido uma explicação no sentido de uma conceituação, verifico que nesse instrumento de aprendizagem parece ser capaz de elaborar justificativas para a situação em questão. O sujeito “Us” demonstra a tentativa de uma explicação dedutiva das áreas das fichas de formas quadrangulares, pois obtém êxito ao efetuar a multiplicação entre os valores numéricos da largura e do comprimento. Contudo, na lógica do pensamento do estudante “Us” se faz ausente a unidade de medida correta das medidas de área. O estudante não faz referência aos centímetros quadrados (cm^2), que é a unidade das três áreas determinadas.

Na situação de aprendizagem – situação 2 – faz-se necessária a distinção entre a noção de área e perímetro. A partir de uma conceituação individual do sujeito “Us”, parece ter ocorrido uma tentativa de compreensão dos componentes de trabalho, possibilitando a construção operatória de uma organização lógico-matemática da situação proposta. Para o sujeito “Us”, de alguma forma, as combinações e a sequência de relações demonstradas graficamente pela colega tentam satisfazer ou suprem em maior grau, as dúvidas das suas colegas do grupo de trabalho.

Nas descrições do sujeito “Us” observo **tentativas** de argumentos na direção de uma **lógica operatória** como um índice de coerência regendo um conjunto de regras que orienta seu pensamento e que o sujeita às correspondências entre o valor numérico e as unidades de medida para o cálculo do perímetro. O questionamento do sujeito “Us”, a partir do momento em que destaca as razões para a verificação da validade da unidade de medida para o perímetro, o leva à reelaboração do seu raciocínio como uma necessidade dedutiva. Observo que suas ações são orientadas na direção de uma preocupação primeira que é a determinação numérica do perímetro das fichas de forma quadrangular. Mas o foco principal passa a ser a correção das unidades de medida da área da situação anterior; retoma, argumenta e corrige a unidade final da área de centímetros (cm) para centímetros quadrados (cm^2).

Na interpretação dos resultados registrados na avaliação escrita com uso de notação simbólica (AECNS) o estudante “Us”, do GRUPO 3, evidencia poucos indícios de um saber das propriedades algébricas com avanços em direção de uma composição de partes.

Ao verificar os resultados escritos pelo estudante “Us”, constato que nos monômios indicados não reconhece seu coeficiente numérico, não diferencia a parte literal nem identifica a semelhança de monômios. Entre os dois monômios indicados na AECNS, não obtém êxito nas operações da adição, da subtração, da multiplicação, da divisão e da potenciação. Logo, tem um êxito insuficiente nas atividades propostas na avaliação escrita com uso de notação simbólica.

Analisando especificamente a questão 4 da AECNS, da multiplicação entre monômios, o estudante “Us”, sendo um dos adolescentes componentes do GRUPO 3, considera de forma incorreta a reunião das partes que compõem o ‘todo’ de uma multiplicação entre dois monômios.

Do ponto de vista matemático, verifico suas dificuldades nos aspectos como uso correto da regra dos sinais da multiplicação envolvendo o conjunto dos números inteiros e efetuação correta da multiplicação entre os fatores numéricos. O sujeito "Us" não apresenta êxito em nenhuma das três multiplicações da questão 4 da AECNS. Quanto à Parte Literal, analisando os **expoentes visíveis**, o sujeito "Us" acerta parcialmente as questões, pois aplica de forma correta as propriedades da multiplicação entre os monômios com termos semelhantes e diferentes, assim como a propriedade específica dos expoentes na multiplicação entre fatores algébricos. Portanto, do ponto de vista matemático, verifico sua falta de êxito nos seguintes aspectos: uso incorreto da regra dos sinais e multiplicação incorreta entre os fatores numéricos, logo $P = A^{-} \wedge B^{-}$; em contrapartida ocorre a aplicação correta das propriedades convencionais da multiplicação entre a parte literal no que se refere a adição dos expoentes visíveis, assim $Q = L \wedge E^{v}$.

Analisando os registros do sujeito "Us", especificamente os que focam os **expoentes invisíveis**, não obtém êxito por não aplicar a propriedade dos expoentes: adicionar os expoentes da parte literal semelhante. Registra o produto de forma incorreta, desconsiderando os expoentes invisíveis das duas variáveis dos monômios, logo $Q^{-} = L \wedge E^{i-}$. O sujeito "Us" não chega a associar os fatores numa relação binária, no plano das combinações possíveis. A dificuldade referente à multiplicação entre termos algébricos semelhantes como $b.b^1$, $x.x^2$ e $y^3.y$ está registrada na AECNS. Considera somente os fatores literais que apresentam os expoentes registrados graficamente, ou seja 1, 2 ou 3, como resultado de uma relatividade em relação às possibilidades de operar com regras convencionadas através do pensamento num plano abstrato.

Para Piaget e Inhelder (1976, p.123) "é preciso estar de posse de um mecanismo operatório que apenas as operações formais podem constituir." O sujeito "Us", através de seus registros nesse instrumento de coleta de dados, evidencia poucos êxitos nas operações combinatórias necessárias para a solução das questões apresentadas. O estudante ainda não coordena agrupamentos parciais heterogêneos para uma organização dos resultados através de um mecanismo formal geral. Suponho que o pouco êxito se deve às inadaptações de seus esquemas de ação frente ao conteúdo específico, mas da necessidade de uma nova organização dos esquemas frente ao conteúdo algébrico da multiplicação de monômios.

A seguir passo para a interpretação dos resultados registrados no instrumento da **Entrevista**, que foi composta por quatro JOGOS. Optei por organizar separadamente as ações e relações feitas por Us em cada JOGO com a questão da pesquisa.

Durante o JOGO 1, o sujeito "Us" parece saber aplicar corretamente a regra da multiplicação entre monômios, pois nesse instrumento demonstra ter noção da localização dos coeficientes numéricos e dos expoentes; continua a ter êxito com os expoentes visíveis, mas apresenta dúvidas quanto ao valor 1 (um) – na sua forma invisível. Lê com perfeição o símbolo operatório entre as peças e utiliza de forma correta a linguagem convencional da álgebra, no caso da nomenclatura dos expoentes. Não verbaliza o expoente 1 – por se apresentar na forma invisível no monômio (2x).

Quando o sujeito "Us" é questionado sobre possibilidades de mudanças na combinação das peças, mantém a regularidade nas suas combinações, reiniciando-as pelo monômio com o coeficiente numérico seis. Sua maior preocupação continua sendo a combinação dos monômios através de seus expoentes; não procura verificar as "novas possibilidades" entre as peças na suas primeiras combinações. **Não tenta a comutatividade**, seja entre os coeficientes numéricos, seja entre os expoentes na sua primeira combinação das peças.

O estudante não consegue perceber a mudança de posição dos monômios pelos expoentes nas combinações de duplas. Não se dá conta da troca que efetua entre os monômios de ($2x^1$) por ($2x$); desconsidera no monômio ($2x$) a mudança do expoente 1 da sua forma visível para a sua forma invisível. Não faz referência à igualdade dos monômios ($2x^1$) e ($2x$). Não percebe a mudança de posição dos coeficientes numéricos nos seus monômios combinados. Assim como não se desacomoda com a afirmação da colega de conseguir novas combinações com as mesmas peças do JOGO 1.

O estudante "Us", quando solicitado a criar suas peças mantendo o produto $12x^8$, tem a preocupação de combinar seus monômios somente através dos expoentes, e estes diferentes das peças ocupadas no JOGO 1. Para organizar seu pensamento precisa de um "tempo maior" para "lembrar" as duplas ações que envolvem as partes e o todo na operação da multiplicação com monômios (coeficientes numéricos = multiplicação e parte literal (expoentes) = adição). Não consegue organizar seu pensamento pelas duplas ações como exige a multiplicação algébrica, somente se preocupando com o resultado dos expoentes.

Durante o JOGO 1, observei que o sujeito “Us” **não** compreende a **comutatividade** dos monômios; realiza a combinatória do agrupamento multiplicativo incorretamente, **não** tem êxito na **conservação** da parte e do todo e apresenta pouca **coerência lógica** no seu pensamento.

O sujeito “Us”, no JOGO 2, opera com o registro numérico gráfico; combina as peças na preocupação dos coeficientes numéricos, mas permanece a dúvida quanto à sua compreensão dos processos que envolvem essas multiplicações entre os monômios.

No caso da nomenclatura dos expoentes, o estudante utiliza de forma correta a linguagem convencional da álgebra, entretanto apresenta dúvida na leitura do expoente 1 quando está graficamente registrado e não se refere verbalmente ao expoente 1 – quando na forma invisível.

Quando ao sujeito “Us” é solicitado à criação de outras peças mantendo o resultado ($48x^6$), permanece longo tempo sem nada registrar. Na procura de novas combinações, primeiro parece articular pelo pensamento *os possíveis*, mas permanece sem êxito. Somente consegue criar as suas peças comparando-as com as peças já combinadas do JOGO 2 sobre a mesa.

O sujeito “Us”, ao ser questionado sobre novas possibilidades de combinações com duas peças do JOGO 2 indicada por uma colega, argumenta a inexistência de novas combinações. Em seguida, me surpreende: troca o monômio ($2x^1$) por ($4x$) nas combinações, verbalmente fazendo referência à igualdade dos monômios ($2x$) e ($2x^1$), mas ele se preocupa apenas com uma das propriedades da multiplicação de monômios, que se refere à adição dos expoentes (5 + 1), esquecendo-se de verificar a multiplicação dos coeficientes para manter a validade numérica de 48. Ao ser questionado quanto a essa troca, o sujeito “Us” não se preocupa em verificar a continuidade da validade do novo produto, pois os novos coeficientes numéricos estão errados. Logo, nenhuma das duas combinações serve para o resultado 48. O sujeito “Us” **não** manifesta **compreensão de duplas ações** que envolvem as partes e o todo na operação da multiplicação com monômios (coeficientes numéricos = multiplicação e parte literal quanto aos expoentes = adição).

Durante o JOGO 2 observo que o sujeito “Us” não sabe aplicar corretamente as propriedades da multiplicação entre os monômios; realiza a combinatória do agrupamento multiplicativo incorretamente; **não** tem êxito na **conservação** das partes e do todo, não percebe as relações de dupla entrada necessárias para a validação dos seus resultados e apresenta **pouca coerência lógica** no seu pensamento.

No JOGO 3, observo que o sujeito “Us” – ficha de forma quadrangular - não tem **noção de semelhança** de figuras, pois o seu desenho não é equivalente ao da ficha a ele apresentada. Quando o sujeito “Us” é questionado sobre uma possível determinação de um valor numérico para o perímetro da ficha de forma quadrangular, não demonstra ter compreensão sobre a obrigatoriedade da igualdade numérica. Ao ser inquirido, continua justificando seus diferentes valores e não indica outra possibilidade numérica para a medida dos comprimentos.

O estudante “Us” apresenta dúvidas na localização do perímetro ao ser solicitado o seu valor. Sua ação inicia após a recordação de uma atividade prática de medição em sala de aula; registra seu processo aditivo das partes para as adições parciais para determinação do perímetro da ficha de forma quadrangular. Observo que o sujeito “Us” não convenciona um símbolo para o perímetro, escreve a palavra *Perímetro* por extenso; não indica uma unidade de medida para as suas medidas de comprimento nem no resultado final, assim como não nomeia os lados como *largura* e *comprimento*. Posso constatar que o estudante “Us” não apresenta noção de espaço, pois os valores dados: 6 e 8 estão muito distantes da medida real de 20cm.

O sujeito “Us”, ao ser solicitado a determinar a área da ficha de forma quadrangular, por algum tempo parece pensar, e ao registrar no papel sua sequência de cálculos permanece na dúvida, só após muita resistência se decidindo por modificar a combinação dos valores. Entretanto, seu registro continua sem êxito.

O estudante “Us” chega a associar a palavra *área* com um exemplo prático que é trabalhado em momentos anteriores, mas na sequência de seu pensamento verbal e escrito percebo a sua **não compreensão** da regra para determinar a área da ficha de forma quadrangular. Por um breve momento, chega a afirmar que área é diferente de perímetro, mas não multiplica os valores 6 e 8, apenas os agrupa aditivamente para determinar o valor da área. Também não indica as unidades de medida, seja para os comprimentos (cm), seja para a unidade de área final (cm^2). Logo, o sujeito “Us” não obtém êxito ao determinar a área da ficha de forma quadrangular.

Observo que o sujeito “Us” não é capaz de perceber as mudanças de operação necessárias entre as mesmas variáveis envolvidas no cálculo do perímetro e na área de uma figura. O estudante, nas suas explicações verbais, não apresenta compreensão para a solução do problema geométrico apresentado, não consegue chegar à construção de uma forma generalizada para a determinação da área e do perímetro para uma figura quadrada qualquer.

No JOGO 3 – ficha de forma retangular – o sujeito “Us”, no seu desenho com uma forma mais equivalente possível, registra e lê os valores numéricos sem suas unidades de medida. Sua noção de espaço e proporcionalidade ao registrar uma figura com os lados paralelos o mais semelhante possível é prejudicada no momento das suas indicações numéricas.

Quando o sujeito “Us” é solicitado a determinar um valor numérico para o perímetro da forma retangular, diretamente indica um valor; na seqüência, ao efetuar o registro percebo que ele um agrupamento aditivo dos resultados parciais não registra as unidades de medida para as larguras, os comprimentos e o perímetro; continua com dificuldades quanto à noção de espaço, pois os valores sugeridos estão muito distantes da medidas reais da ficha de forma retangular. Também não convenciona simbolicamente o termo “perímetro”.

O adolescente, para determinar a área da figura retangular segue o mesmo raciocínio usado no cálculo do perímetro, isto é, adicionando resultados parciais, logo não apresenta êxito quanto ao resultado da área; não registra unidades de medida para os comprimentos nem para o resultado da área; não convenciona simbolicamente o termo “área”.

O sujeito “Us" ao ser questionado sobre “outras possibilidades verdadeiras”, concorda com a hipótese proposta pelo colega, mas não supõe novas possibilidades suas comparando-as com as sugeridas. Na sequência do seu pensamento, solicito que esclareça esta existência de mais de um acerto para uma única área. Por meio de seu argumento único, contido na expressão “diferentes comprimentos”, é possível perceber sua pouca organização do pensamento formal tanto na sua resolução quanto na possibilidade criada pelo seu colega. Não demonstra compreender conceitos e hipóteses simples que fazem referência direta a ações sistematizadas para uma determinação generalizada do perímetro e da área de uma figura de forma retangular qualquer. Não faz, sequer, uma tentativa de supor um modo geral para o cálculo da área de qualquer figura retangular; não consegue avançar do pensamento aritmético para um pensamento numa lógica simbólica. O sujeito “Us” não parece ter um *modelo*, nem consegue antecipar algumas das propriedades envolvidas na determinação convencional algébrica (ou formal) do perímetro e da área do retângulo.

No JOGO 4, o sujeito “Us” – dominó algébrico –, interrompe-o em quatro momentos de dúvidas durante a sua montagem e, no quinto momento, para e encerra o jogo ao colocar a 22ª peça.

O estudante “Us”, no JOGO 4 –, para em dois questionamentos envolvendo a subtração e um questionamento relacionado com a adição, questões diretamente relacionadas com o expoente 1 – na sua forma invisível e expoentes visíveis (3) e (4). O estudante não obtém êxito pela sua inoperância com as regras e propriedades que envolvem as operações com monômios. Nos “erros” das duas subtrações: $(5x) - (3x) = ?\ (2x^2) \rightarrow (2x)$, $(8x^4) - (7x^4) = 1 \rightarrow (x^4)$, utiliza ao mesmo tempo as propriedades da subtração para os coeficientes numéricos e as propriedades da multiplicação para os expoentes. Assim como na operação da adição: $(4x^3) + (2x^3) = (6x^6) \rightarrow (6x^3)$, com os coeficientes numéricos aplica a propriedade da adição, mas para a parte literal aplica a propriedade da multiplicação. O “erro” ocorre na relação de cálculo empregado quando o expoente 1 surge na forma “invisível” e o estudante aplica a segunda propriedade que orienta os expoentes da parte literal na multiplicação de monômios de “adicionar os expoentes”. Para o estudante obter êxito precisa saber que, na adição e subtração de monômios semelhantes, a segunda propriedade orienta: *os expoentes da parte literal devem ser mantidos*.

O quarto questionamento é em relação à multiplicação dos monômios: $(9x) . (x) = (9x) \rightarrow (9x^2)$. A dúvida surge em relação à parte literal dos monômios na forma invisível de se apresentar o expoente 1. O sujeito “Us” responde não aplicando nenhuma propriedade pois registra o maior coeficiente numérico desconsiderando a operação e o segundo monômio. O estudante, para obter êxito na multiplicação, precisa recordar a questão particular do expoente 1 – na forma invisível no monômio (x), pois o número 1, quando ocupa a posição de expoente num monômio, convencionalmente também não é registrado graficamente. Logo, a leitura deve ser $(x) = (x^1)$. Também deve aplicar a segunda propriedade da multiplicação que orienta os expoentes: a adição dos expoentes da parte literal semelhante, logo $(x^{1+1} = x^2)$.

Em síntese, posso concluir que o sujeito “Us” opera em maior número de situações-problemas com noções e operações numéricas; não manifesta indícios de operações algébricas, o que se reflete diretamente na sua compreensão e resolução de algumas das situações de aprendizagem propostas por esta pesquisa. De forma incorreta, constitui a reunião das partes que compõem o ‘todo’ (sinal, fator numérico, fator literal e expoente) como produto entre dois monômios. Demonstra dúvidas tanto no registro e na interpretação do expoente 1 – na sua forma visível, quanto na sua forma invisível durante todas as operações apresentadas nos quatro jogos. Tem um fazer por meio de **operações fragmentadas** de uma estrutura que ainda não é muito lógica e em raros momentos é capaz de argumentar explicando suas ações. Na permanência da dúvida seu recurso mais evidente é a leitura oral para efetivação do seu pensamento. O sujeito “Us” **não** demonstra a ter a capacidade da **comutatividade**, pois não parece entender regras, propriedades e hipótese simples que fazem referência direta a ações anteriores e que podem ser coordenadas por meio de associações. Percebo que muitos resultados parecem ser reflexo resultante de uma escolha aleatória, não da sistematização com identificação das variáveis envolvidas nos monômios. Assim, não ocorre diferenciação de propriedades pelas localizações numéricas, ora como coeficientes numéricos, ora como expoentes.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Penso que o estudo da álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de análise e síntese, de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas em outras ciências.

Embora níveis adequados de conhecimento e técnicas sejam resultados importantes num programa de álgebra, a necessidade maior dos alunos é uma compreensão sólida dos conceitos algébricos e a capacidade de usar o conhecimento em situações novas e, às vezes, inesperadas.

Nos PCNs (1999) temos a recomendação de que é preciso mudar convicções equivocadas, culturalmente difundidas em toda a sociedade, como por exemplo, a atribuição de toda a responsabilidade do fracasso na álgebra ao próprio aluno. O debate sobre a educação matemática, em síntese, destaca a preocupação com uma visão de álgebra dissociada tanto dos outros conteúdos da matemática como das outras disciplinas e da vida real dos educandos.

É preciso examinar detidamente o processo de aprendizagem de um conteúdo específico da álgebra em pesquisa para compreender as condições necessárias para uma aprendizagem significativa dos estudantes adolescentes; questionar a compreensão que o estudante tem do significado dos *fatores literais* como variáveis – variável como símbolos que representam indistintamente os elementos de um conjunto; observar as operações com essas variáveis e a compreensão das propriedades específicas na multiplicação de monômios. Foi essa uma escolha que tem em seus fundamentos a afirmação de Usiskin (1995) de que "as finalidades da álgebra *são determinadas por, ou relacionam-se com concepções diferentes da álgebra que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis"* (p.35), e a contribuição de Booth (1995) sobre a dificuldade em *aprender álgebra* e a investigação dos tipos de erros que os alunos cometem e das razões desses erros.

A pesquisa de Booth (1995) me auxiliou na análise dos Grupos no aspecto quanto às *notações e convenções em álgebra*, focando *a interpretação dos símbolos pelos alunos* e *a necessidade de uma notação precisa*. No primeiro aspecto, o autor aponta que o dilema símbolos para operações (+, -, x, :) e o símbolo de igualdade (=) podem ser fontes de dificuldade para o aluno, ora indicando o resultado de uma operação, ora indicando uma **relação de equivalência** e **conservação**, questão que surgiu nas entrevistas, no decorrer da pesquisa. Os estudantes do GRUPO 1, durante a entrevista, nos JOGOS 1 e 2 mostraram-se capazes de indicar novos monômios nos dois jogos e efetuar seu produto, assim como, pelo sinal de igualdade, indicar a relação de equivalência tanto entre suas diferentes combinações como de conservação do ‘todo’ pelo produto das ‘novas partes’. No GRUPO 2, os estudantes mostraram-se capazes de indicar com maior êxito novos monômios no JOGO 1 em relação direta com o valor do coeficiente numérico 12. A dificuldade no JOGO 2 se fez presente na relação de equivalência do produto entre os novos valores a serem sugeridos para os coeficientes numéricos na conservação do produto 48. No GRUPO 3, os estudantes indicaram novos monômios, entretanto preocupam-se com uma relação de equivalência unidimensional contemplando somente uma das variáveis, não obtendo êxito na equivalência e na conservação do ‘todo’ do monômio.

Demana e Leitzel (1995) também destacam a *compreensão das variáveis* e acreditam que existe a necessidade da “introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas” (p.74). Essa compreensão de variáveis será instrumento útil nas generalizações; logo, se o aluno tiver dificuldades para conceitualizar uma variável, “essa dificuldade pode ser decisiva para um fracasso em álgebra.” (p.75)

Esses autores auxiliaram na compreensão dos grupos no aspecto da **operação concreta** presente nas observações e entrevistas – JOGO 3, referente ao perímetro e à área das fichas de formas quadrangulares e retangulares. No GRUPO 1 os estudantes tratam as variáveis numéricas e algébricas através de operações-ações. Como exemplo, a coordenação sucessiva dos valores numéricos da largura e do comprimento da ficha de forma retangular para sua correspondência algébrica. Nessa coordenação das modificações perceptíveis ou representáveis das peças do JOGO 3 estão presentes as operações concretas de segundo grau, quando esses estudantes realizam diretamente um conjunto de ações combinando mentalmente as operações aritméticas com as geométricas na multiplicação e potenciação. Sua compreensão incide sobre as reuniões dos elementos individuais: base e expoente, considerados como indecomponíveis. No GRUPO 2 os estudantes tratam as variáveis numéricas e algébricas por meio de operações concretas do primeiro grau quando realizam um conjunto de ações isoladas com o auxílio do registro gráfico após a exemplificação de um fato experenciado no seu dia a dia, agindo sobre as peças do JOGO 3 pelas operações aritméticas: adição e multiplicação. Aqui sua ação tem indícios de reuniões dos elementos individuais: base e expoente, não considerados como indecomponíveis. No GRUPO 3 os estudantes operam com as variáveis numéricas por meio de operações concretas realizando um conjunto de ações somente por meio da operação da adição, sem articulação com as ações anteriores. Eles agem sobre as peças do JOGO 3 de forma superficial e não chegam a estabelecer entre eles relações invariantes de largura e comprimento.

Lins e Gimenez (1997, p.10), na sua leitura de significados para a álgebra, sugerem que "é preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra." Consideram como fundamental para um bom *sentido numérico*, "identificar significados para os números e as operações, [...] descobrir relações e padrões". (p.60) Destacam que, para que ocorra um *sentido numérico*, existe a implicação de diversas ações cognitivas: "operatividade, processo de autorregulação do pensamento (incerteza nos dados), diversidade de soluções (produção de juízos) e complexidade (atribuição de significados)." (p.44)

Os referidos autores subsidiaram a compreensão dos grupos no aspecto das **estruturas** presentes nas observações, nas entrevistas e na AECNS – expoente 1 na forma invisível e visível. No GRUPO 1 os estudantes apresentam uma estrutura 'acabada', isto é, com um estado de equilíbrio quanto à propriedade que orienta os expoentes da parte literal dos monômios. Os estudantes desse grupo operam de forma consciente e organizada com os expoentes como variáveis numéricas visíveis e invisíveis na multiplicação e nas demais operações envolvidas pelo JOGO 4 – dominó algébrico. No GRUPO 2 os estudantes apresentam uma estrutura 'em construção', operam com regularidade e de forma organizada com os expoentes 1 como variável numérica visível e de forma desorganizada com os expoentes 1 como variável invisível na multiplicação entre monômios e nas demais operações envolvidas pelo JOGO 4 – dominó algébrico. No GRUPO 3 os estudantes apresentam uma estrutura inacabada, sem formas particulares de equilíbrio; agem de forma instável quanto à propriedade que orienta os expoentes da parte literal dos monômios, tanto na relação com os expoentes 1 visíveis quanto aos expoentes 1 na sua forma invisível. Os estudantes desse grupo operam de forma desorganizada com os expoentes como variáveis numéricas visíveis e invisíveis na multiplicação e nas demais operações envolvidas pelo JOGO 4 – dominó algébrico.

Meus dados convergem com o ponto de vista dos autores citados nas atividades desenvolvidas, bem como na interpretação. Para muitos estudantes adolescentes da sétima série ou do oitavo ano o seu desempenho na álgebra está relacionado com um contexto numérico. Por que a importância com o número numa abordagem algébrica? Fundamento minha escolha por duas vias: na matemática, o número é definido “como conjunto de todos os conjuntos equivalentes a um conjunto dado” (CARAÇA, 1989, p.4) e, na epistemologia genética é definido como “uma estrutura operatória de conjunto”. (PIAGET; SZEMINSKA, 1971, p.15).

Com base nessas fundamentações, a minha abordagem nesta pesquisa apóia-se na resolução de situações problemas aritméticos e geométricos tendo uma questão algébrica específica: multiplicação de monômios, e como foco principal o expoente 1 na sua forma invisível. A fim de possibilitar aos estudantes a compreensão dos conceitos aritméticos que são básicos para a álgebra, eles são levados, primeiro, a observar os objetos – cartões nas formas quadrangular e retangular; assim que se familiarizam com esses, passam a supor valores numéricos para as medidas da largura e do comprimento; resolvem problemas geométricos determinando o valor numérico dos perímetros e das áreas das fichas de formas quadrangulares e retangulares. Penso e afirmo que aprender a usar os objetos com a lógica geométrica numa hierarquia algébrica exige que os estudantes compreendam as propriedades aritméticas básicas. Por exemplo, compreender que a ordem de uma operação aditiva é diferente daquela de uma operação multiplicativa, mas ambas são essenciais para determinar o valor numérico de expressões algébricas.

Em resumo, acredito que esta pesquisa demonstra uma relação entre as estratégias de ação que o sujeito elabora acerca do conteúdo e as compreensões que possui a respeito das situações-problemas abordadas. Dessa maneira, parece relevante destacar novamente como o “fazer é compreender em ação uma dada situação em grau suficiente para atingir os fins propostos”. (PIAGET, 1978a, p.176) Contudo, para além do simples fazer, há um compreender, que é “conseguir dominar, em pensamento, as mesmas situações até poder resolver os problemas por elas levantados em relação ao porquê e ao como das ligações constatadas e, por outro lado, utilizadas na ação”. (PIAGET, 1978a, p.176)

Dessa maneira, parece-me relevante destacar as diferentes dimensões dessa pesquisa, a seguir, em forma de finalização.

6 EM SÍNTESE

Para finalizar é relevante retomar a abordagem metodológica e as intenções que orientaram minha escolha pelos três instrumentos e pelas três situações de coleta de dados escolhidos. A observação dos grupos de estudantes, a aplicação da AECNS em sala de aula e a aplicação dos quatro jogos durante a entrevista evidenciaram as compreensões que os estudantes adolescentes têm do expoente 1 na sua forma invisível em uma multiplicação de monômios. Durante as atividades propostas a partir de situações-problema, os estudantes mostraram toda a riqueza de um pensamento de adolescente que começa a ser sustentado por operações lógico-matemáticas mais elaboradas.

A evidência dos conhecimentos expressados me permitiu descrever particularidades do raciocínio, das operações e da estrutura do pensamento em transformação e evolução.

Os estudantes dos GRUPO 1, 2 e 3 evidenciam uma forma lógico-matemática ao organizar as situações, diferenciando-se em função de particularidades nas coordenações das ações sobre os materiais disponibilizados (fichas, cartões quadrangulares e retangulares). Percebi que as formas de organização foram evoluindo para formas mais gerais de pensamento em todos os estudantes entrevistados, ao mesmo tempo em que foram se constituindo, diante das novidades mais específicas para cada sujeito, com mostras e tentativas de explorar diferentes soluções *possíveis*.

Quando comecei esta pesquisa, não tinha previsto observar três grupos diferentes. A decisão de propor as atividades em sala de aula, como experiências de aprendizagem importantes para todos os alunos, e a constatação das diferenças de êxito nos grupos de trabalho me levaram a decidir descrevê-las como o contexto mais amplo do qual seriam extraídos os grupos e casos analisados. Um dos focos da observação foi a possibilidade de assimilação dos conhecimentos implícitos nas situações propostas, mostrando a compreensão da atividade e a organização das ações para resolução das questões. A diferença entre os sujeitos foi escalonada em três grupos: dificuldades de assimilação (POUCO ÊXITO), assimilação por superações durante as atividades (ÊXITO PARCIAL) e assimilação imediata (ÊXITO PLENO). O uso dos materiais escolhidos para as ações de medida foi essencial para o estabelecimento de relações entre procedimentos aritméticos, geométricos e algébricos.

Constatei que os estudantes do GRUPO 1 apresentam uma capacidade de considerar as possibilidades e testá-las, com a fusão de novas operações com um esquema já existente. Assim ocorrendo o englobamento de um ‘todo’ na coordenação entre o estudante e os diferentes objetos utilizados nos três momentos da coleta de dados. Os estudantes do GRUPO 2 estão a caminho da assimilação, pois o resultado da sequência das suas ações ainda depende das coordenações das significações das peças nos diferentes jogos, em um sistema mais ou menos complexo de inferências. Estes estudantes apresentam-se num estágio em que as operações já podem se referir a elementos verbais, mas há necessidade de ação imediata sobre os objetos. Os estudantes do GRUPO 3 demonstram dificuldades em reconhecer o conjunto de dados presentes em uma organização definida nas situações-problema. Como parece não apresentarem esquemas de compreensão definidos, não conseguem efetivar a incorporação de novos dados presentes nos objetos.

Percebo durante a coleta de dados o quanto é essencial a construção dos esquemas de conservação para as significações. Atribuo como essenciais as relações que envolvem a conceituação de *perímetro* como uma totalidade que mobiliza um conjunto de regras aditivas envolvendo conhecimentos aritméticos e geométricos; assim como a conceituação de *área* como outra totalidade que coordena regras multiplicativas necessitando da compreensão ampliada dos conhecimentos aritméticos e geométricos. Na sequência da coleta de dados com os registros gráficos da multiplicação entre monômios na aplicação da **AECNS** me surpreendo com as dificuldades enfrentadas pelos estudantes das três turmas. Dificuldades quanto à regra dos sinais, a multiplicação de fatores numéricos, de registro dos fatores literais e principalmente da propriedade que rege os expoentes das bases iguais, seja com os expoentes visíveis e seja principalmente com os expoentes invisíveis. Na análise detalhada das seis diferentes tabelas, com a dissecação de um monômio em quatro *partes* para compor um *todo* no seu produto, me detive nos detalhes dos êxitos e “erros”. Durante a coleta de dados com a **entrevista** por meio de quatro jogos, constatei que alguns estudantes de forma individual manifestaram maior dificuldade de formular conceituações do que em momentos anteriores, de forma coletiva. Assim, como outros estudantes revelaram maior número de êxitos organizando uma rede mais complexa de relações entre as modalidades matemáticas reunindo aritmética, geometria e álgebra num nível não registrado anteriormente nas *situações de aprendizagem* propostas. Neste conjunto de dados coletados por vias aritméticas, geométricas para alcançar o êxito numa questão algébrica entendo ser a construção do esquema de conservação e representação do expoente 1, a que passei designar como “o expoente invisível” uma das essencialidades. Pois a sua representação é crucial para a obtenção do êxito dos estudantes adolescentes seja na aritmética, na geometria ou na álgebra, pois as regras e propriedades que regem o expoente 1 nos diferentes momentos matemáticos são as mesmas seja com uma base numérica ou uma base algébrica.

Percebi que o pensamento algébrico do adolescente tem seu poder de significação ligado à construção dos esquemas práticos e conceituais aritméticos e geométricos anteriores e em função do grau de novidade das atividades propostas nas situações-problema sofre um estranhamento. Esta *novidade* proposta por meio de diferentes *situações de aprendizagem* parece ter sido a razão de alguns conflitos particulares, talvez do medo dos estudantes de participarem como co-autores do processo de construção do seu conhecimento; da ansiedade do desconhecido, da possibilidade da descoberta de uma matemática não mais finita, exclusivamente numérica, regrada e comandada pela visão e postura de uma resposta aceita como verdade única.

Também observei que não havendo esquemas ou estes não sendo os mais adequados para interpretar as situações-problema as respostas dos estudantes ficaram bastante abreviadas. Penso que todo esquema precisa se adequar às novas situações, o que implica acomodações, as quais se constituem em modificações desses esquemas. Observei que foi exigida do estudante, diante de novas situações, certa mobilidade de esquemas, e muitas vezes estes não se figuraram em razão da complexidade do problema a ser enfrentado. Quando da análise dos dados coletados, percebi que a novidade e a complexidade foram os dois fatores que influenciaram diretamente nas formas de compreensão do conteúdo multiplicação de monômios. A *novidade* e a *complexidade* se configuraram durante as atividades de coleta de dados quando os estudantes se depararam com uma variedade de objetos como fichas quadrangulares e retangulares para determinação das suas áreas e perímetros com a livre possibilidade de indicação da variável numérica. Assim como na sequência das atividades propostas com a possibilidade de elaboração de uma estrutura geral na forma algébrica para a determinação do perímetro e da área de qualquer ficha de forma quadrangular e retangular. A *complexidade* se configurou em função da abrangência dos elementos, no caso a consideração das larguras e dos comprimentos; na reunião dessas variáveis por meio das propriedades aditivas para a determinação do perímetro das fichas, e por meio das propriedades multiplicativas no caso da determinação das áreas das fichas quadrangulares e retangulares. A complexidade também esteve presente no momento da indicação de uma variável para a ficha de forma quadrangular para caracterização da igualdade da largura e do comprimento; assim como na indicação de duas variáveis para a ficha de forma retangular para caracterização diferenciada entre largura e comprimento da mesma.

Os modelos de compreensão construídos pelos estudantes adolescentes em função dos conteúdos aritmética, geometria e álgebra evidenciam as primeiras organizações singulares diante dos objetos, que dão origem, ao mesmo tempo em que se apoiam, às operações lógico-matemáticas de natureza mais profunda e universal. As organizações podem explicar as divergentes condutas de sujeitos de um mesmo grupo de trabalho nesta pesquisa, bem como a infinidade de procedimentos revelados pela análise individual. Em resumo, fica evidente a relação da estrutura formal com as relações extraídas dos objetos de conhecimento que o sujeito se esforça em assimilar.

Voltando à questão inicial: “Como o sujeito da aprendizagem relaciona a permanência numérica do expoente 1, quando invisível, na multiplicação algébrica entre monômios?”

Os sujeitos do GRUPO 1 (ÊXITO PLENO) mostraram-se capazes de raciocinar sem utilizar o real, isto é, no nível de um raciocínio hipotético-dedutivo. Esses estudantes organizaram suas ações e notações aritméticas, geométricas e algébricas de forma coerente no emprego do expoente 1 na sua forma invisível não apenas na multiplicação mas nas quatro operações envolvendo monômios. Os estudantes do GRUPO1 apresentaram uma conceituação elaborada, cujos modelos produziram explicações que levaram a sistemas implicativos de conjunto, demonstrando inferências ligadas por conexões lógicas entre os significados. Os sujeitos não somente aplicaram as operações aos objetos, executaram em pensamento ações possíveis sobre estes objetos. Refletiram as operações independentemente dos objetos e as substituíram por simples proposições. Esta reflexão é como um pensamento de segundo grau que implica na representação de ações possíveis.

Na observação das compreensões do GRUPO 2 (ÊXITO PARCIAL) encontrei ainda modelos intermediários nos quais os adolescentes apresentaram índices de conflitos, negação e reconfiguração da situação problema em função dos esquemas que possuem para significar a situação. Tendo a concluir que os estudantes do GRUPO 2 organizam parcialmente suas ações, a forma adotada pelas suas estruturas operatórias consiste em várias tentativas de dissociar-se dos objetos. Esses estudantes já passam a considerar possibilidades, mas sem compreender as implicações de uma síntese possível e necessária.

No GRUPO 3 (POUCO ÊXITO) encontrei modelos simples e indícios de modelos intermediários nos quais os adolescentes apresentam altos índices de conflitos, negação da situação problema como exemplo a regra multiplicativa dos sinais e a propriedade dos expoentes que orienta a adição dos expoentes das variáveis literais semelhantes. Sendo que essas regras e propriedades foram estudadas nas séries anteriores à sétima série ou oitavo ano. A ação desses estudantes é configurada na coordenação dos objetos, com um raciocínio voltado sobre proposições verbais verificadas pela constatação concreta e observação atual. As causas dos “poucos êxitos”, seja no sentido restrito ou amplo, podem estar ligados aos níveis inicias de desenvolvimento, evidenciando uma possível ausência de esquemas de assimilação compatíveis com a instrução.

Acredito, pela análise dos três grupos e casos, na confirmação das hipóteses:

5) Se o “expoente visível” é, para o adolescente, uma representação conceitual, ocorre a sua conservação gráfica e mental e a sua generalização.

6) Se o “expoente invisível” é, para o adolescente, uma representação conceitual, ocorre a sua conservação gráfica e mental.

7) Se o adolescente assimilou a propriedade da multiplicação de monômios, considera o expoente 1 invisível.

8) Se a organização dos agrupamentos não é estável, o “expoente invisível” apaga-se.

Após a análise dos dados coletados nos três diferentes momentos, compreendi que os estudantes adolescentes da sétima série ou oitavo ano somente determinarão modos de chegar aos resultados envolvendo o expoente 1 na sua forma invisível, com a *tomada de consciência* das razões de seus êxitos e fracassos, ou, em outras palavras, com a compreensão das suas ações, operações e coordenações. O que evidencia uma *tomada de consciência*, por parte dos alunos é passagem do *porquê* ou das razões funcionais para o *como*, isto é, consiste numa conceituação, ou seja, em uma passagem da assimilação prática a um esquema por meio de conceitos, nesta pesquisa, especificamente de expoente 1 – na forma invisível.

Segundo Piaget, na adolescência, é alcançada a independência do real, surgindo o período das operações formais. Seu caráter geral é o modo de raciocínio, que não se baseia apenas em objetos ou realidades observáveis, mas também em hipóteses, permitindo, dessa forma, a construção de reflexões e teorias. Nesse período, além da lógica de proposições, são desenvolvidas, entre outras, operações combinatórias e de correlação. Assim, é possível afirmar que em geral a aprendizagem é provocada por situações de interesse. Se o desenvolvimento cognitivo do adolescente é um processo contínuo de construção de estruturas variáveis que, ao lado de características que são constantes e comuns a todas as idades, refletem o seu grau de desenvolvimento intelectual. Logo, a cada explicação particular para um certo interesse, há uma integração com a estrutura existente que, em um primeiro momento, é reconstituída e, em seguida, ultrapassada para uma dimensão mais ampla acarretando o desenvolvimento mental.

Para que ocorra efetivamente o desenvolvimento cognitivo do adolescente, somente com a técnica de aplicação de exercícios escolares na álgebra pura não teremos muita influência na compreensão dos estudantes no momento da resolução dos problemas reais e possíveis. Percebi que o caminho e os instrumentos utilizados nesta pesquisa tiveram um papel fundamental no favorecimento das relações de compreensão desses estudantes na combinação das vias aritmética+geometria+álgebra.

Na minha avaliação, o ponto culminante da coleta de dados ocorreu no JOGO4 – dominó algébrico, porque nessas peças estão contidas todas as possibilidades de relações envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão; explorando o expoente 1 na forma invisível e visível, como também o coeficiente numérico na forma visível e invisível. Sobre a multiplicidade e complexidade de relações entre regras e propriedades específicas que o estudante precisa aplicar em cada jogada para chegar ao final do jogo coordenando as trinta peças sequer eu tinha noção quando as elaborei. Essa multiplicidade de relações necessitaria ser mais bem explorada em outros momentos de reflexão.

Observei que todos os estudantes participantes desta pesquisa conseguiram estabelecer alguma relação com os materiais utilizados, estes se tornaram capazes de colocar em conflito inferências equivocadas e que vinham dominando o modo de compreender a situação-problema até então. Em alguns casos, os dados oriundos das relações permitiram que os sujeitos modificassem profundamente suas condutas, ao passo que em outros permitiram que o sujeito superasse um conflito de forma positiva e, por fim, alguns outros não se permitiram ousar nas ações sobre os materiais durante os diferentes momentos proporcionados durante essa pesquisa.

No que tange às práticas no Ensino Básico, a inter-relação dos conteúdos aritméticos e geométricos nos conteúdos algébricos mostrou uma riqueza de significações a respeito do tema proposto como mote desta pesquisa. Se a dificuldade do adolescente para a compreensão do expoente 1 na forma invisível numa operação de multiplicação de monômios reside em uma dificuldade de aprendizagem de regras e propriedades universais, é preciso trazer novamente à tona esse problema ou, em outras palavras, realizar uma “limpeza” das coisas que não estão suficientemente bem elaboradas para permitir que o estudante sujeito prossiga livremente pelo seu processo de aprendizagem.

Este estudo mostra que muitos estudantes adolescentes ao iniciar seu estudo na álgebra, ainda têm a necessidade da realidade observável ou de objetos para construir suas reflexões ou teorias, não conseguindo raciocinar em termos de hipóteses e deduções, ações necessárias em todas as disciplinas a partir da sétima série ou oitavo ano, assim como nas suas atividades extra-escolares.

Penso que a instrução escolar não deveria só objetivar a promoção da aprendizagem no sentido restrito, isto é, como uma compreensão imediata entendida como a aprendizagem do senso comum ou a aprendizagem para a devolução num instrumento de avaliação. Acredito numa aprendizagem no sentido amplo, numa aquisição que evolui no tempo, no sentido de que o sujeito pode chegar a compreender um evento, inferir sua lei de formação através de assimilações e acomodações, construindo novos esquemas, mas que não são generalizáveis a qualquer situação nova. Onde o sujeito procura ter sucesso na sua ação ou operação. E quando ocorresse a aprendizagem no sentido amplo que ela correspondesse à evolução das estruturas de conhecimento. Assim, esta evolução poderia significar a reconstrução do conhecimento pelo sujeito e que poderia ser entendida, no contexto educacional, como a própria evolução conceitual em matemática de um conhecimento específico como nesta pesquisa o *expoente 1 – na forma invisível*, através da multiplicação de monômios.

A articulação de aspectos piagetianos relacionados com a aprendizagem pode significar o estabelecimento de diretrizes básicas para um programa de reformulação de currículo no Ensino Básico, agora no oitavo ano sobre o processo de ensino-aprendizagem cujo foco principal seria a evolução conceitual em álgebra. Foram cinco anos dedicados a pesquisa e a aplicação de novos instrumentos, com um elevado índice de aproveitamento na aprendizagem dos educandos; com a participação de outras cinco educadoras, das instituições estaduais, de diferentes disciplinas da mesma série no desenvolvimento das situações de aprendizagem.

Este trabalho procurou mostrar através da pesquisa no campo da Epistemologia Genética, como se dá a construção do conhecimento pelos sujeitos e do significado de aprendizagem de uma variável 1 – na forma invisível. Os resultados dessa investigação podem contribuir para a ampliação do debate sobre os objetivos do processo de ensino-aprendizagem da álgebra seja nas instituições municipais, estaduais como superiores de ensino. Acredito que esses aspectos são de interesse de professores que estejam também envolvidos na sistematização dos resultados dessa prática através da pesquisa educacional e, em particular, da pesquisa em ensino de matemática relacionados à investigação da álgebra. Sinto a necessidade de maior dedicação das IES na formação dos docentes quanto ao conteúdo específico da álgebra de uma forma interdisciplinar com situações reais de aplicação, acompanhamento, de avaliação e divulgação das práticas.

As perspectivas futuras e possíveis ampliações do estudo podem ser realizadas sobre uma gama considerável de outros conteúdos. Nessa pesquisa explorei o expoente 1 na sua forma invisível e visualizei no campo da educação matemática, a possibilidade de pesquisa do coeficiente numérico 1 na sua forma visível e invisível; investigação das unidades de medida de comprimento e largura como uma variável única necessária na indicação do produto entre variáveis algébricas no caso da área de uma figura resultante do produto entre duas unidades de medida com expoentes 1 convencionados na forma invisível; investigar o “esquecimento” da indicação da unidade de comprimento para o resultado do perímetro dos objetos quando tratados de forma algébrica, assim como investigar a importância, a função, a utilização e as consequências das significações do expoente 1 e do coeficiente 1 nas formas invisível e invisível sobre as outras áreas escolares, tais como a Geografia, a Biologia, a Física, as Artes, bem como extra-escolares, na engenharia de minas, de estradas, na agronomia, num laboratório de análises.

As possibilidades de avanço dentro da temática são animadoras, bem como suas contribuições para o campo da Educação revelam as características particulares de uma reorganização dos conteúdos, da necessidade de integração vertical e horizontal dos currículos, isto é, uma reestruturação dos conteúdos dentro do currículo da matemática do Ensino Básico e uma integração efetiva de e com as demais disciplinas em cada série do referido ensino. Contudo, essas ações somente terão êxito a partir do momento em que, além do aluno, também o professor assumir a postura de pesquisador, de um educador aberto ao estudo e a mudanças de compreensão, permitindo-se participar de práticas educativas mais interativas, na preocupação de um crescimento de aprendizagem com coparticipante das ações entre professor-aluno.

REFERÊNCIAS

ACHUBRING, G. Desenvolvimento histórico do conceito e no processo de aprendizagem, a partir de recentes concepções matemático-didáticas (erro, obstáculos, transposição). **Zetetike**, Campinas, v.6, n.10, p. 9-32, jul./dez 1998.

BACHELARD, G. **O novo espírito científico**. São Paulo: Nova Cultura, 1988.

BATTRO, A. M. **Dicionário terminológico de Jean Piaget**. São Paulo: Pioneira, 1978.

BAUMGART, J. K. **História da álgebra**. São Paulo: Atual, 1992.

BECKER, F. **A epistemologia do professor**. Porto Alegre: ArtMed, 1993.

________ . (Trad.) **Abstração reflexionante relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

________ . **Educação e construção do conhecimento**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

________ . **A origem do conhecimento e a aprendizagem escolar**. Porto Alegre: Artmed, 2003.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Sistemas de numeração ao longo da história**. São Paulo: Moderna, 1997.

BICUDO, I. Educação matemática e ensino de matemática. In: ______. **Temas e Debates**, São Paulo, n. 3, p. 31-42, 1991.

BICUDO, M. A. **Educação matemática**. São Paulo: Moraes, [s.d.]

BIDERMAN, M. T. C. **Dicionário didático de português**. 2.ed. São Paulo: Ática, 1998.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. & SHULTE, A. (Org.). **As idéias de álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 23-37.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, Lei nº 9394, 20 de dezembro de 1996.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

BRASIL. MEC. INEP. **Exame Nacional do Ensino Médio**: Documento básico. Brasília, 1998.

BRASIL. MEC. SEF. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental**. Brasília, 1998.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio** – Matemática (PNLEM). Brasília: MEC, 2005.

BÚRIGO, E. Z. **Movimento da matemática moderna no Brasil**: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. Dissertação, (Mestrado em Educação) - UFRGS/FACED, PPGDEU, Porto Alegre, 1999.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 9.ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1989.

CARPENTER, T. et all.. A longitudinal study of invertion and understanding in children's multidigit addition and subtraction. **Journal for research in mathematical activity**. International Journal of Educational Research. v.14, p.67-92, 1997.

CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. D.; BRIZUELA, B. Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. In: MEETING OF THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 22., 2000, Tucson. **Anais**.... Tucson: [s.n.], 2000. CD-ROM.

CARUSO, P. DM. **Professor de matemática**: transmissão de conhecimento ou construção de significados? Tese, (Doutorado em Educação) - UFRGS/FACED, PPGDEU, Porto Alegre, 2002.

CARVALHO, J. B. P. O que é a educação matemática? **Temas & Debates**, Rio Claro, SBEM, ano IV, n.3, p. 17-26, 1991.

CHASSOT, A. **A ciência através dos tempos**. São Paulo: Moderna, 1997.

CHAMBADAL, L. **Dicionário da matemática moderna**. São Paulo: Nacional, 1978.

CHAMBERS SCIENCE AND TECHNOLOGY DICTIONARY. Cambridge: Cambridge University, 1988.

COOL, C. S. **Aprendizagem escolar e construção do conhecimento**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

COXFORD, A.; SHULTE, A. (Org.). **As idéias de álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

D'AMBRÓSIO, U. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. São Paulo: Summus; Campinas: Ed. Da Universidade Estadual de Campinas, 1985.

__________ . **Educação matemática**: da teoria à prática. 8.ed. Campinas, São Paulo: Papirus, 2001.

DEMANA, F.; LEITZEL, J. Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos. In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Org.). **As idéias de álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 70-78.

DICIONÁRIO DE MATEMÁTICA. São Paulo: Hemus, 1995.

DICIONÁRIO MELHORAMENTOS. São Paulo: Melhoramentos, 1998.

EMPSOM, S. B.. **Divisão compartilhada em partes iguais**: o desenvolvimento de frações em uma sala de aula de 1ª série, Texas, 1999.

FERREIRA, A. B. de H. **Novo dicionário da língua portuguesa**. 2.ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.

FERREIRO, E. **Atualidade de Jean Piaget**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A.; MIGUEL, A. Contribuições para um repensar a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n.1 [10], p. 78-91, mar. 1993.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, ano 3, p. 1-37, n.4, 1995.

FLAVELL, J. H. **A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.

HOUSE, P. A. Reformular a álgebra da escola média: por que e como? In: COXFORD, A.; SHULTE, A. (Org.). **As idéias de álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 1-8.

http://A.L.I: Champs spécialisés/Présentation/Os grupos de Klein

IFRAH, G. **História universal dos algarismos**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997, v.1.

IFRAH, G. **Os números**: história de uma grande invenção. 9.ed. São Paulo: Globo, 1998.

INHELDER, B.; BOVET, M.; SINCLAIR, H. **Aprendizagem e estruturas do conhecimento**. São Paulo: Saraiva, 1977.

_________ et all.. **O desenvolvimento das descobertas da criança**: um estudo sobre as microgêneses cognitivas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

JAMES, G.; JAMES, R. C. MATHEMATICS DICTIONARY – multilingual edition. New York: Van Nostrand Regional Offices, 1978.

KNIJNIK, G. **Exclusão e resistência**: educação matemática e legitimidade cultural. Porto Alegre: Artes Médicas,1996.

KUHN, T. S. **A estrutura das revoluções científicas**. 4. ed. São Paulo: Perspectiva, 1998.

LISA - BIBLIOTECA DA MATEMÁTICA MODERNA. São Paulo: Irradiação, 1968.

LEÃO, G. M. de S. Dicionário ilustrado de matemática. Brasília: Instituto Nacional do Livro, 1972, v.1.

LETÍCIA – BIBLIOTECA DA MATEMÁTICA MODERNA – Curso integrado. Rio de Janeiro: Umuarama, 1978.

LIBÂNEO, J. C. **Democratização da escola pública**: a pedagogia crítico-social dos conteúdos. São Paulo: Cortez, 1985.

LINS, R. Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa. **Revista de Educação Matemática da SBEM** - SP, v.1, n.1, p. 75-91, 1995.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 2000.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. **Fundamentos da pesquisa em educação**. São Paulo: EPU, 1986.

LONGEN, A. **Matemática em movimento**. 1.ed. Curitiba: Positivo, 2004.

McCONNELL, J. W. Tecnologia e álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.) **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 162-170.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? **Pró-Posições**, Campinas, v.3, n. 1[7], p. 39-53, mar. 1992.

MIORIM, M. A.; MIGUEL, A.; FIORENTINI, D. Ressonância e dissonância do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Zetetiké**, Campinas, ano I, n.1, p. 19-36, 1993.

MIORIM, M. A. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MIRANDA, I. R. de. **Educação matemática**: dificuldades ou obstáculos no processo ensino-aprendizagem da álgebra. Dissertação, (Mestrado em Educação) – UPF/FACED, Passo Fundo, 2003.

MONTANGERO, J.; MAURICE-NAVILLE, D. **Piaget ou a inteligência em evolução**. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

NEWMAN, J. R. THE UNIVERSAL ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS. New York: Simon and Schuster, 1971.

NUNES, T. Systems of signs and mathematical reasoning. In: NUNES, T. & BRYANT, P. (Eds.). **Learning and Teaching Mathematics**: An International Perspective. Hove (east Sussex): Psychology Press, p.29-44, 1997.

________ . et all.. **Educação matemática**: números e operações numéricas. São Paulo: Cortes, 2005.

PIAGET, J. **Psicologia da inteligência**. Rio de Janeiro: Fundo de Cultura S.A., 1967.

________ . **Psicologia e pedagogia**. Tradução de Dirceu Accioly Lindoso e Rosa Maria Ribeiro da Silva. São Paulo: Forense, 1970.

________ . ***Evolução intelectual da adolescência à vida adulta***. Mimeo. Tradução de Tânia B. I. Marques e Fernando Becker do inglês, sob o título “Intellectual Evolucion from Adolescente to Adulthood”, publicado pela *Human Development*, 15: 1-12, 1972.

_________ . **A epistemologia genética**. Petrópolis: Vozes, 1972a.

_________ . **Biologia e conhecimento**: ensaio sobre as relações entre as regulações orgânicas e os processos cognitivos. Petrópolis: Vozes, 1973.

_________ . **Problemas de psicologia genética**. Rio de Janeiro: Forense, 1973a.

_________ . **Estudos sociológicos**. Rio de Janeiro: Forense, 1973b.

_________ . **Aprendizagem e conhecimento**. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.

_________ . **A construção do real na criança**. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

_________ . **A tomada de consciência**. São Paulo: EDUSP, 1975a.

_________ . **Ensaio de lógica operatória**. Porto Alegre: Globo; São Paulo: EDUSP, 1976.

_________ . **La enseñanza de las matemáticas**. Madrid: Aguilar, 1977.

_________ . **Piaget on Piaget**: the epistemology of Jean Piaget [gravação de video]. Genebra: [s.ed.], 1977a. Tradução de Ester Pillar Grossi – GEEMPA, Porto Alegre.

_________ . **A formação do símbolo na criança**: imitação, jogo e sonho, imagem e representação. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

_________ . **Fazer e compreender**. São Paulo: Melhoramentos, 1978a.

_________ . **O estruturalismo**. São Paulo: Difel, 1979.

_________ . **O nascimento da inteligência na criança**. 4. ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1987.

_________ . **Epistemologia genética**. São Paulo: Martins Fontes, 1990.

_________ . **O juízo moral na criança**. 2.ed. São Paulo: Summus, 1994.

_________ . **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

_________ . **A psicologia da criança**. 15.ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1998.

_________ . Criatividade. In: VASCONCELOS, M. S. (Org.) **Criatividade**: Psicologia, Educação e Conhecimento do Novo. São Paulo: Moderna, 2001. P.11-22.

PIAGET, J.; GARCIA, R. **Psicogênese e história das ciências**. Lisboa (Portugal): Dom Quixote, 1987.

PIAGET,J.; GRÉCO, P. **Aprendizagem e conhecimento**. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **O desenvolvimento das quantidades físicas na criança** – conservação e atomismo. Rio de Janeiro: Zahar, 1971.

_____________ . **Gênese das estruturas lógicas elementares**. Rio de Janeiro: Zahar, 1971a.

_____________ . **Da lógica da criança à lógica do adolescente**. São Paulo: Pioneira, 1976.

_____________ . **A imagem mental na criança**. Lisboa (Porto): Livraria Civilização, 1977.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. 2. ed. Rio de Janeiro, Zahar, 1971.

POST, T. R.; BEHR, M. J.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.) **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 89-102.

REHFELDT, M. J. H. **Uma retrospectiva da matemática e do ensino da matemática**. (Aluna do Programa de educação continuada da Ufrgs – (digitado))

RIO GRANDE DO SUL. **Padrão Referencial de Currículo**: Matemática. Secretaria da Educação. Porto Alegre: Divisão do Ensino Fundamental, caderno 13, 1.versão, 1998.

ROBAYNA, M. M. S.; MACHÍN, M. C.; MEDINA, M. M. et al.. **Iniciacion al álgebra**. Colección matemáticas: cultura y aprendjzaje. Madrid: Sintesis, 1996.

ROCHA, I. C. B. **Ensino da matemática**: formação para exclusão ou para a cidadania? *SBEM*, ano 8, n. 9/10, p. 22-31, abr. 2001.

SAVIANI, D. **Escola e democracia***.* São Paulo: Cortez, Autores Associados,1984.

SCHUBRING, G. Desenvolvimento histórico do conceito e do processo de aprendizagem, a partir de recentes concepções matemático-didáticas (erro, obstáculos, transposição). **Zetetiké**, Campinas, v.6, n.10, p.9-32, jul./dez. 1998.

SOARES, F. **Educação matemática**: uma investigação sobre a nova realidade. Belo Horizonte: Autêntica,1994.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Revista do Professor de Matemática.* São Paulo, e-mail: rpm@ime.usp.br

SOCIEDADE BRASILEIRA PARA O PROGRESSO DA CIÊNCIA. *Ciência Hoje*. Rio de Janeiro, http:// www.ciencia.org.br

SOUSA, A. C. et all. Novas diretrizes para a licenciatura em matemática. **Temas e Debates**, Blumenau: SBEM, ano VII, n. 7, p. 41-66, 1995.

TEIXEIRA, F. **Novos rumos da educação matemática**. São Paulo: Idéias, 1998.

The New Encyclopaedia Britannica. 15.ed. Chicago: Encyclopedia Britannica, 1978, v.1.

THIOLLENT, Michel. Notas para o debate sobre pesquisa-ação. In.: BRANDÃO, C. R. (Org.). **Repensando a pesquisa participante***.* São Paulo: Brasiliense, 1999, p.82-103.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.) **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995, p. 9-22.

VASCONCELOS, M. (Org.) **Criatividade**. São Paulo: Moderna, 2001.

VERA, Francisco. Lexicon Kapelusz: **Matemática**. Buenos Aires: Editorial Kapelusz, 1960.

YIN, R. K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. 2.ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE 1 – Ofício à equipe diretiva 296
APÊNDICE 2 – Ofício de autorização dos responsáveis 297
APÊNDICE 3 – Avaliação Escrita Com uso de Notação Simbólica (AECNS) 298
APÊNDICE 4 – JOGOS 1, 2, 3, 4 299
APÊNDICE 5 – Tabela 1 – T71 – Geral com todas operações 300
APÊNDICE 6 – Tabela 2 – T71 – Multiplicação de monômios 301
APÊNDICE 7 – Tabela 3 – T71 – Multiplicação de monômios – expoente visível . 302
APÊNDICE 8 – Tabela 4 – T71 – Expoente visível - combinações 303
APÊNDICE 9 – Tabela 5 – T71 – Multiplicação de monômios – expoente invisível 304
APÊNDICE 10 – Tabela 6 – T71 – Expoente invisível – combinações 305
APÊNDICE 11 – Tabela 1 – T72 – Geral com todas operações 306
APÊNDICE 12 – Tabela 2 – T72 - Multiplicação de monômios 307
APÊNDICE 13 – Tabela 3 – T72 – Multiplicação de monômios – expoente visível 308
APÊNDICE 14 – Tabela 4 – T72 – Expoente visível – combinações 309
APÊNDICE 15 – Tabela 5 – T72 – Multiplicação de monômios – expoente invisível 310
APÊNDICE 16 – Tabela 6 – T72 - Expoente invisível – combinações 311
APÊNDICE 17 – Tabela 1 – T73 – Geral com todas operações 312
APÊNDICE 18 – Tabela 2 – T73 – Multiplicação de monômios 313
APÊNDICE 19 – Tabela 3 – T73 – Multiplicação de monômios – expoente visível 314
APÊNDICE 20 – Tabela 4 – T73 – Expoente visível - combinações 315
APÊNDICE 21 – Tabela 5 – T73 – Multiplicação de monômios – expoente invisível 316
APÊNDICE 22 – Tabela 6 – T73 – Expoente invisível – combinações 317
APÊNDICE 23 – Entrevista 1 – “Pe” – T71 318

Apêndice 1 – Ofício à equipe diretiva

EDUCAÇÃO - 42001013001P5

Mestrado Acadêmico

Doutorado

Prezado diretor ......

Prof. ......

Eu, ..., orientadora do PPGEDU-UFRGS, tenho como orientanda do Programa de Pós-Graduação em Educação – FACED a acadêmica .... com o projeto de tese intitulado: (x^1): a complexidade da reconstituição de totalidades invisíveis.

Venho através deste documento solicitar a autorização do prezado diretor do Instituto para que minha orientanda possa desenvolver seu projeto de pesquisa neste educandário. Sendo que o projeto de tese foi defendido e aprovado pela banca entrevistadora da FACED em dezembro de 2006.

Como pesquisadora minha orientanda pretende investigar os fatores que influenciam a aprendizagem de um conteúdo específico envolvendo a algebrização da Matemática: multiplicação de monômios.

A pesquisa deverá ser efetuada especificamente nas sétimas séries do ensino fundamental, pois o critério de indicação da série está baseado no fator de iniciação dos pré-adolescentes na algebrização da matemática.

Porto Alegre, 03 de março de 2007.

Orientadora

Apêndice 2 – Ofício de autorização dos responsáveis

EDUCAÇÃO - 42001013001P5

Mestrado Acadêmico
Doutorado

TERMO DE CONSENTIMENTO

Autorizo meu (minha) filho (a) a participar da pesquisa intitulada "Aprendizagem do pré-adolescente: reconstituição de um todo invisível (x1) na educação algébrica", realizada pela professora Susana Klajn, doutoranda da UFRGS, sob orientação da profa. Dra. Maria Luiza R. Becker e coorientação do prof. Dr. Marcus V. de A. Basso, durante o ano de 2008.

Declaro estar ciente de que a pesquisa tem por objetivo de investigar a aprendizagem dos alunos pré-adolescentes da 7ª série com relação as dificuldades de um conteúdo específico da álgebra: multiplicação de monômios.

Da mesma forma, declaro ter conhecimento de que o procedimento metodológico utilizado será a observação sistemática das aulas, a aplicação de algumas situações-problema matemáticos de forma coletiva e em entrevista individual, para que o aluno explique o seu pensamento ao resolvê-las e possam assim ser analisadas as estratégias cognitivas que ele utilizou.

Autorizo também a divulgação dos resultados encontrados, em forma de artigos científico-acadêmicos, na condição de manter incógnita a identidade do meu (minha) filho (filha), assim como concordo com a manutenção do caráter confidencial das informações registradas relacionadas com a privacidade dos participantes da pesquisa.

Tenho o conhecimento de que receberei informações a qualquer dúvida sobre os procedimentos e demais assuntos relacionados com esta pesquisa.

ALUNO	ASSINATURA ALUNO	ASSINATURA RESPONSÁVEL	SIM	NÃO

Data: ___________________________________

Apêndice 3 – Avaliação Escrita Com uso de Notação Simbólica (AECNS)

Escola ____
Disciplina: Matemática Professora: Susana Klajn
NOME: ______________________________ Turma: ______ Data: ________

ATIVIDADE 1 – Operações com monômios

1. Separar o coeficiente numérico (CN) e a parte literal (PL) de cada monômio:

a) $4xy^3$

b) $-12a^2$

c) $8/3\ a^2b$

d) x^5

2. Circular os monômios semelhantes e justificar sua escolha:

a) $4mx$

b) $-7mx^2$

c) $1{,}6mx$

d) $37\ m^2x$

e) m^2x^2

f) $-415mx$

3. Efetuar as adições e subtrações:

a) $(2x) + (x) + (6x) + (10x) =$

b) $(3x) + (-5x) + (8x) + (-x) =$

c) $(7ab) + (5ab) - (12b) + (6b) =$

d) $(9x^2) + (-3x) + (5x^2) - (10x) =$

e) $13m + 4m - (2m - 3m) =$

4. Efetuar as multiplicações:

a) $(6x^2) \cdot (5x^3) =$

b) $(-8a^4b) \cdot (2a^3b^1) =$

c) $(7xy^3) \cdot (4x^2ym^2) =$

5. Efetuar as divisões:

a) $(30x^5) : (5x^2) =$

b) $(-12a^4b^7c^3) : (-3ab^5c) =$

c) $(20x^6y^4) : (-4x^5y) =$

6. Indicar as potências:

a) $(y^2)^2 =$

b) $(2x)^3 =$

c) $(-3a^4b)^2 =$

Apêndice 4 – JOGOS 1, 2, 3 e 4

JOGOS

JOGO 1:

Composto por 09 peças (semelhante a uma carta) com os monômios: $6x^3$, $6x^7$, $6x^2$, $3x^3$, $2x^5$, $2x^1$, $2x^6$, $2x^4$ e 2x. Objetivo: combina-los para fornecer o produto $12x^8$ (doze xis na oitava potência).

JOGO 2:

Composto por 08 peças (semelhantes a uma carta) com os monômios: $1x^5$, $12x^5$, $6x^2$, $24x^5$, 4x, $2x^1$, $8x^4$ e 48x. Objetivo: combina-los para fornecer o produto $48x^6$ (quarenta e oito xis na sexta potência).

JOGO 3:

Composto por 02 peças – um cartão quadrado de 20 x 20 cm e um cartão retangular de 20 x 40 cm. Objetivo: determinar os seus perímetros e suas áreas.

JOGO 4:

Composto por 30 peças – representadas por monômios utilizando as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão). Cada peça é composta por duas partes: na metade esquerda, por uma operação algébrica: adição, subtração, multiplicação ou divisão e, na metade direita, pelo resultado de uma das operações. O objetivo do dominó algébrico é fechar o circuito, combinando as trinta peças e associando a operação com seu respectivo resultado.

APÊNDICE 5

TABELA 1 – T71 - Geral com todas as operações

N^{O}/NOME **TABELA 1 –T71**	Reconhece coeficiente numérico		Diferencia a parte literal		Identifica semelhança de monômios		Efetua adições		Efetua subtrações		Efetua multiplicações		Efetua divisões		Efetua potenciações	
DATA: 09/05	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO
1 - Ma	X		X			X		X		X	X			X		X
2 - Br	X		X			X		X	X		X		X		X	
3 - Li	X		X			X		X	X		X		X		X	
4 - Da	X		X		X		X			X		X		X		X
5 - Su	X		X			X		X	X			X		X	X	
6 - Bh	X		X			X	X			X	X		X		X	
7 - Es	X		X		X		X		X		X		X		X	
8 – An	X		X			X	X			X		X		X	X	
9 - To	X		X			X	X		X		X		X		X	
10 - Jú	X		X			X	X			X	X		X		X	
11 - Jo	X		X			X	X			X	X			X		X
12 – Ale	X		X			X		X		X		X		X		X
13 – Le	X		X		X		X			X	X		X		X	
14 – Vi	X		X			X	X			X		X		X		X
15 - El	X		X		X		X		X		X		X		X	
16 - Bi	X		X		X		X			X		X	X			X
17 - Ste	X		X		X		X			X		X	X		X	
18 - Ga	X		X			X		X	X			X	X		X	
19 - Ro	X		X			X	X			X		X	X		X	
20 – Mn	X		X		X		X			X	X		X		X	
21 - Sa	X		X		X		X		X		X		X		X	
22 – Fe		X	X			X	X			X		X		X		X
23 - Er	X		X			X	X			X	X			X		X
24 - Bru	X		X			X	X		X		X		X		X	
25 - Lu	X		X		X		X		X		X		X		X	
26 - Pe	X		X		X		X		X		X		X		X	

APÊNDICE 6

TABELA 2 – T71 – Multiplicação de monômios

N^{O}/NOME TURMA: 71	EXPONTE VISÍVEL										EXPOENTE INVISÍVEL									
	Coeficiente Numérico				Parte Literal						Coeficiente Numérico				Parte Literal					
DATA: 09/05 **TABELA 2**	Sinal		Fator numérico		Fator literal		Expoentes		Borrões		Sinal		Fator numérico		Fator literal		Expoentes		Borrões	
	C	E	C	E	C	E	C	E	SIM	NÃO	C	E	C	E	C	E	C	E	SIM	NÃO
1 - Ma		X	X		X		X		X			X	X		X			X	X	
2 - Br	X		X			X		X	X		X		X		X			X	X	
3 - Li		X	X			X		X	X			X	X		X			X	X	
4 - Da		X	X		X			X	X			X	X		X			X	X	
5 - Su		X	X		X		X		X			X	X		X			X	X	
6 - Bh		X	X		X		X		X			X	X		X		X		X	
7 - Es	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X
8 – An	X		X		X			X		X	X		X		X			X	X	
9 – To	X		X		X		X			X	X		X		X			X		X
10 - Jú	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X
11 - Jo	X		X		X		X			X	X		X		X		X		X	
12 – Ale		X		X	X			X	X			X		X	X			X	X	
13 – Le		X	X		X		X			X		X	X		X		X			X
14 – Vi		X	X		X			X	X			X	X		X			X	X	
15 - El	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X
16 - Bi		X	X		X		X			X		X	X		X		X			X
17 - Ste	X		X		X		X		X		X		X		X		X			X
18 - Ga	X			X	X			X	X		X			X	X			X	X	
19 - Ro	X			X		X		X	X		X			X	X			X	X	
20 – Mn	X		X		X		X			X	X		X		X			X		X
21 - Sa		X	X		X		X		X			X	X		X			X	X	
22 – Fe		X	X		X		X		X			X	X		X			X	X	
23 – Er		X	X			X		X	X			X	X		X			X	X	
24 - Bru	X		X		X		X		X		X		X		X			X	X	
25 - Lu	X		X		X		X			X	X		X		X		X		X	
26 - Pe	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X

C = CERTO E = ERRADO

APÊNDICE 7

TABELA 3 – T71 - Multiplicação de monômios – expoente visível

N^{O}/NOME TURMA: 71	**EXPONTE VISÍVEL**								**INTERPRETAÇÃO**			
	Coeficiente Numérico				Parte Literal							
DATA: 09/05 **TABELA 3**	Sinal		Fator numérico		Fator literal		Expoentes		**P** opera com C. N.	$\mathbf{P}^{-}$ não opera com C.N.	**Q** opera com P. L.	$\mathbf{Q}^{-}$ não opera com P. L.
	C	E	C	E	C	E	C	E				
1 - Ma		X	X		X		X			X	X	
2 - Br	X		X			X		X	X			X
3 - Li		X	X			X		X		X		X
4 - Da		X	X		X			X		X		X
5 - Su		X	X		X		X			X	X	
6 - Bh		X	X		X		X			X	X	
7 - Es	X		X		X		X		X		X	
8 – An	X		X		X			X	X			X
9 - To	X		X		X		X		X		X	
10 - Jú	X		X		X		X		X		X	
11 - Jo	X		X		X		X		X		X	
12 – Ale		X		X	X			X		X		X
13 – Le		X	X		X		X			X	X	
14 – Vi		X	X		X			X		X		X
15 - El	X		X		X		X		X		X	
16 - Bi		X	X		X		X			X	X	
17 - Ste	X		X		X		X		X		X	
18 - Ga	X			X	X			X		X		X
19 - Ro	X			X		X		X		X		X
20 – Mn	X		X		X		X		X		X	
21 - Sa		X	X		X		X			X	X	
22 – Fe		X	X		X		X			X	X	
23 – Er		X	X			X		X		X		X
24 - Bru	X		X		X		X		X		X	
25 - Lu	X		X		X		X		X		X	
26 - Pe	X		X		X		X		X		X	

C = CERTO E = ERRADO C.N. = COEFICIENTE NUMÉRICO P.L. = PARTE LITERAL

P = opera com o coeficiente numérico (C.N.) ⇒ (sinal **e** fator numérico).
$\mathbf{P}^{-}$ = não opera com o coeficiente numérico (C.N.) ⇒ (sinal **ou** fator numérico).

Q = opera com a parte literal (P.L.) ⇒ (fator literal **e** expoentes).
$\mathbf{Q}^{-}$ = não opera com a parte literal (P.L.) ⇒ (fator literal **ou** expoente).

APÊNDICE 8

TABELA 4 – T71 – Expoente visível - combinações

N^{O}/NOME TURMA: 71	EXPOENTE VISÍVEL							
DATA: 09/05 **TABELA 4**	Coeficiente Numérico (P)	Coeficiente numérico (P^{-}) A = sinal B = fator numérico			Parte Literal (Q)	Parte literal (Q^{-}) L = fator literal E^{v} = expoente visível		
	$P = A \wedge B$	$P^{-} = A^{-} \wedge B$	$P^{-} = A \wedge B^{-}$	$P^{-} = A^{-} \wedge B^{-}$	$Q = L \wedge E^{V}$	$Q^{-} = L^{-} \wedge E^{V}$	$Q^{-} = L \wedge E^{V-}$	$Q^{-} = L^{-} \wedge E^{V-}$
1 - Ma		X			X			
2 - Br	X							X
3 - Li		X						X
4 - Da		X					X	
5 - Su		X			X			
6 - Bh		X			X			
7 - Es	X				X			
8 – An	X						X	
9 - To	X				X			
10 - Jú	X				X			
11 - Jo	X				X			
12 – Ale				X			X	
13 – Le		X			X			
14 – Vi		X					X	
15 - El	X				X			
16 - Bi		X			X			
17 - Ste	X				X			
18 - Ga			X				X	
19 - Ro			X					X
20 – Mn	X				X			
21 - Sa		X			X			
22 – Fe		X			X			
23 – Er		X						X
24 - Bru	X				X			
25 - Lu	X				X			
26 - Pe	X				X			

APÊNDICE 9

TABELA 5 – T71 – Multiplicação de monômios – expoente invisível

N^{O}/NOME TURMA: 71	**EXPONTE INVISÍVEL**								**INTERPRETAÇÃO**			
	Coeficiente Numérico				Parte Literal							
DATA: 09/05 **TABELA 5**	Sinal		Fator numérico		Fator literal		Expoentes		**P** opera com C. N.	**P**$^{-}$ não opera com C.N.	**Q** opera com P. L.	**Q**$^{-}$ não opera com P. L.
	C	E	C	E	C	E	C	E				
1 - Ma		X	X		X			X		X		X
2 - Br	X		X		X			X	X			X
3 - Li		X	X		X			X		X		X
4 - Da		X	X		X			X		X		X
5 - Su		X	X		X			X		X		X
6 - Bh		X	X		X		X			X	X	
7 - Es	X		X		X		X		X		X	
8 – An	X		X		X			X	X			X
9 - To	X		X		X			X	X			X
10 - Jú	X		X		X		X		X		X	
11 - Jo	X		X		X		X		X		X	
12 – Ale		X		X	X			X		X		X
13 – Le		X	X		X		X			X	X	
14 – Vi		X	X		X			X		X		X
15 - El	X		X		X		X		X		X	
16 - Bi		X	X		X		X			X	X	
17 - Ste	X		X		X		X		X		X	
18 - Ga	X			X	X			X		X		X
19 - Ro	X			X	X			X		X		X
20 – Mn	X		X		X			X	X			X
21 - Sa		X	X		X			X		X		X
22 – Fe		X	X		X			X		X		X
23 – Er		X	X		X			X		X		X
24 - Bru	X		X		X			X	X			X
25 - Lu	X		X		X		X		X		X	
26 - Pe	X		X		X		X		X		X	

C = CERTO E = ERRADO C.N. = COEFICIENTE NUMÉRICO P.L. = PARTE LITERAL

P = opera com o coeficiente numérico (C.N.) ⇒ (sinal **e** fator numérico).

P^{-} = não opera com o coeficiente numérico (C.N.) ⇒ (sinal **ou** fator numérico).

Q = opera com a parte literal (P.L.) ⇒ (fator literal **e** expoentes).

Q^{-} = não opera com a parte literal (P.L.) ⇒ (fator literal **ou** expoente).

APÊNDICE 10

TABELA 6 – T71 – Expoente invisível – combinações

N^O/NOME TURMA: 71	EXPOENTE INVISÍVEL							
DATA: 09/05 **TABELA 6**	Coeficiente Numérico (P)	Coeficiente numérico (P^-) A = sinal B = fator numérico			Parte Literal (Q)	Parte literal (Q^-) L = fator literal E^i= expoente invisível		
	$P = A \wedge B$	$P^- = A^- \wedge B$	$P^- = A \wedge B^-$	$P^- = A^- \wedge B^-$	$Q = L \wedge E^i$	$Q^- = L^- \wedge E^i$	$Q^- = L \wedge E^{i-}$	$Q^- = L^- \wedge E^{i-}$
1 - Ma		X					X	
2 - Br	X						X	
3 - Li		X					X	
4 - Da		X					X	
5 - Su		X					X	
6 - Bh		X			X			
7 - Es	X				X			
8 – An	X						X	
9 - To	X						X	
10 - Jú	X				X			
11 - Jo	X				X			
12 – Ale				X			X	
13 – Le		X			X			
14 – Vi		X					X	
15 - El	X				X			
16 - Bi		X			X			
17 - Ste	X				X			
18 - Ga			X				X	
19 - Ro			X				X	
20 – Mn	X						X	
21 - Sa		X					X	
22 – Fe		X					X	
23 – Er		X					X	
24 - Bru	X						X	
25 - Lu	X				X			
26 - Pe	X				X			

APÊNDICE 11

TABELA 1 – T72 - Geral com todas as operações

N^{O}/NOME **TABELA 1 –T72**	Reconhece coeficiente numérico		Diferencia a parte literal		Identifica semelhança de monômios		Efetua adições		Efetua subtrações		Efetua multiplicações		Efetua Divisões		Efetua potenciações	
DATA: 07/05	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO
1 – Ni	X		X		X		X		X		X		X		X	
2 – Tai	X		X		X		X			X	X			X	X	
3 - Tha		X		X		X		X		X		X		X		X
4 – We		X	X			X		X		X		X		X		X
5 – Hia	X		X			X	X			X		X	X			X
6 – Edu	X		X		X		X		X		X		X			X
7 – Ro	X		X		X		X			X		X		X		X
8 – Jus	X		X		X		X		X			X		X	X	
9 – LuDal	X		X		X		X			X		X	X		X	
10 – Se	X		X		X		X		X		X		X		X	
11 – MaLu	X		X		X		X		X		X			X	X	
12 – Jea	X		X		X		X		X		X			X	X	
13 – Dy	X		X		X		X			X		X	X		X	
14 – Jes	X		X			X		X		X		X		X		X
15 – Lra	X		X			X	X			X	X			X		X
16 – Fa		X	X			X	X			X		X		X		X
17 – Ale	X		X		X		X		X		X		X		X	
18 - Na	X		X		X		X			X		X		X		X
19 – Lumi	X		X		X		X		X			X		X		X
20 – Ali	X		X		X		X			X	X		X		X	
21 – Lui	X		X		X		X		X			X		X		X
22 - Xan	X		X			X	X			X		X		X		X
23 - Pa	X		X		X		X			X	X		X			X
24 - Ne		X		X		X		X		X		X		X		X
25 - Po	X		X			X	X		X		X			X		X

APÊNDICE 12
TABELA 2 – T72 – Multiplicação de monômios

N^{O}/NOME TURMA: 72	**EXPONTE VISÍVEL**										**EXPOENTE INVISÍVEL**									
	Coeficiente Numérico				Parte Literal						Coeficiente Numérico				Parte Literal					
DATA: 07/05 **TABELA 2**	Sinal		Fator numérico		Fator literal		Expoentes		Borrões		Sinal		Fator numérico		Fator literal		Expoentes		Borrões	
	C	E	C	E	C	E	C	E	SIM	NÃO	C	E	C	E	C	E	C	E	SIM	NÃO
1 - Ni	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X
2 – Tai	X		X		X		X			X	X		X		X		X		X	
3 - Tha		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X
4 - We	X		X		X			X		X	X		X		X			X		X
5 - Hia		X	X			X	X			X		X	X		X		X			X
6 - Edu	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X
7 - Ro		X	X		X		X			X		X	X		X			X	X	
8 – Jus		X	X		X		X			X		X	X		X		X			X
9 - LuDal		X		X	X			X	X			X		X		X		X	X	
10 – Se	X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	
11 – MaLu	X		X		X		X			X	X		X		X		X		X	
12 – Jea	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X
13 – Dy	X		X		X		X			X	X		X		X			X		X
14 – Jes		X	X			X		X	X			X	X			X		X	X	
15 - Lra	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X
16 - Fa	X		X		X		X			X	X		X			X		X	X	
17 – Ale	X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	
18 - Na	X		X			X		X	X		X		X		X			X	X	
19 - LuMi	X			X	X		X			X	X			X	X			X		X
20 – Ali	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X
21 - Lui		X	X		X		X		X			X	X		X			X	X	
22 – Xan		X		X	X		X			X		X		X	X			X		X
23 – Pa	X		X		X		X			X	X		X		X		X		X	
24 - Ne		X		X	X		X		X			X		X	X			X		X
25 - Po	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X

C = CERTO E = ERRADO

APÊNDICE 13

TABELA 3 – T72 - Multiplicação de monômios – expoente visível

N^{O}/NOME TURMA: 72	EXPONTE VISÍVEL								INTERPRETAÇÃO			
	Coeficiente Numérico				Parte Literal							
DATA: 07/05 **TABELA 3**	Sinal		Fator numérico		Fator literal		Expoentes		**P** opera com C. N.	**P^{-}** não opera com C.N.	**Q** opera com P. L.	**Q^{-}** não opera com P. L.
	C	E	C	E	C	E	C	E				
1 - Ni	X		X		X		X		X		X	
2 – Tai	X		X		X		X		X		X	
3 - Tha		X		X		X		X		X		X
4 - We	X		X		X			X	X			X
5 - Hia		X	X			X	X			X		X
6 - Edu	X		X		X		X		X		X	
7 - Ro		X	X		X		X			X	X	
8 – Jus		X	X		X		X			X	X	
9 - LuDal		X		X	X			X		X		X
10 – Se	X		X		X		X		X		X	
11 – MaLu	X		X		X		X		X		X	
12 – Jea	X		X		X		X		X		X	
13 – Dy	X		X		X		X		X		X	
14 – Jes		X	X			X		X		X		X
15 - Lra	X		X		X		X		X		X	
16 - Fa	X		X		X		X		X		X	
17 – Ale	X		X		X		X		X		X	
18 - Na	X		X			X		X	X			X
19 - LuMi	X			X	X		X			X	X	
20 – Ali	X		X		X		X		X		X	
21 - Lui		X	X		X		X			X	X	
22 – Xan		X		X	X		X			X	X	
23 – Pa	X		X		X		X		X		X	
24 – Ne		X		X	X		X			X	X	
25 - Po	X		X		X		X		X		X	

C = CERTO E = ERRADO C.N. = COEFICIENTE NUMÉRICO P.L. = PARTE LITERAL

P = opera com o coeficiente numérico (C.N.) ⇒ (sinal **e** fator numérico).

P^{-} = não opera com o coeficiente numérico (C.N.) ⇒ (sinal **ou** fator numérico).

Q = opera com a parte literal (P.L.) ⇒ (fator literal **e** expoentes).

Q^{-} = não opera com a parte literal (P.L.) ⇒ (fator literal **ou** expoente).

APÊNDICE 14

TABELA 4 – T72 – Expoente visível - combinações

N^{O}/NOME TURMA: 72	**EXPOENTE VISÍVEL**							
DATA: 07/05 **TABELA 4**	Coeficiente Numérico (P)	Coeficiente numérico (P^-) A = sinal B = fator numérico			Parte Literal (Q)	Parte literal (Q^-) L = fator literal E^v = expoente visível		
	$P = A \wedge B$	$P^- = A^- \wedge B$	$P^- = A \wedge B^-$	$P^- = A^- \wedge B^-$	$Q = L \wedge E^V$	$Q^- = L^- \wedge E^V$	$Q^- = L \wedge E^{V-}$	$Q^- = L^- \wedge E^{V-}$
1 - Ni	X				X			
2 – Tai	X				X			
3 - Tha				X				X
4 - We	X						X	
5 - Hia		X				X		
6 - Edu	X				X			
7 - Ro		X			X			
8 – Jus		X			X			
9 - LuDal				X			X	
10 – Se	X				X			
11 – MaLu	X				X			
12 – Jea	X				X			
13 – Dy	X				X			
14 – Jes		X						X
15 - Lra	X				X			
16 - Fa	X				X			
17 – Ale	X				X			
18 - Na	X							X
19 - LuMi					X			
20 – Ali	X				X			
21 - Lui		X			X			
22 – Xan				X	X			
23 – Pa	X				X			
24 – Ne				X	X			
25 - Po	X				X			

APÊNDICE 15

TABELA 5 – T72 – Multiplicação de monômios – expoente invisível

N^{O}/NOME TURMA: 72	EXPONTE INVISÍVEL								INTERPRETAÇÃO			
	Coeficiente Numérico				Parte Literal							
DATA: 07/05 **TABELA 5**	Sinal		Fator numérico		Fator literal		Expoentes		**P** opera com C. N.	**P^{-}** não opera com C.N.	**Q** opera com P. L.	**Q^{-}** não opera com P. L.
	C	E	C	E	C	E	C	E				
1 - Ni	X		X		X		X		X		X	
2 – Tai	X		X		X		X		X		X	
3 - Tha		X		X		X		X		X		X
4 - We	X		X		X			X	X			X
5 - Hia		X	X		X		X			X	X	
6 - Edu	X		X		X		X		X		X	
7 - Ro		X	X		X			X		X		X
8 – Jus		X	X		X		X			X	X	
9 - LuDal		X		X		X		X		X		X
10 – Se	X		X		X		X		X		X	
11 – MaLu	X		X		X		X		X		X	
12 – Jea	X		X		X		X		X		X	
13 – Dy	X		X		X			X	X			X
14 – Jes		X	X			X		X		X		X
15 - Lra	X		X		X		X		X		X	
16 - Fa	X		X			X		X	X			X
17 – Ale	X		X		X		X		X		X	
18 - Na	X		X		X			X	X			X
19 - LuMi	X			X	X			X		X		X
20 – Ali	X		X		X		X		X		X	
21 - Lui		X	X		X			X		X		X
22 – Xan		X		X	X			X		X		X
23 – Pa	X		X		X		X		X		X	
24 – Ne		X		X	X			X		X		X
25 - Po	X		X		X		X		X		X	

C = CERTO E = ERRADO C.N. = COEFICIENTE NUMÉRICO P.L. = PARTE LITERAL

P = opera com o coeficiente numérico (C.N.) ⇒ (sinal **e** fator numérico).

P^{-} = não opera com o coeficiente numérico (C.N.) ⇒ (sinal **ou** fator numérico).

Q = opera com a parte literal (P.L.) ⇒ (fator literal **e** expoentes).

Q^{-} = não opera com a parte literal (P.L.) ⇒ (fator literal **ou** expoente).

APÊNDICE 16

TABELA 6 – T72 – Expoente invisível – combinações

N^O/NOME TURMA: 72	EXPOENTE INVISÍVEL							
DATA: 07/05 **TABELA 6**	Coeficiente Numérico (P)	Coeficiente numérico (P^-) A = sinal B = fator numérico			Parte Literal (Q)	Parte literal (Q^-) L = fator literal E^i= expoente invisível		
	$P = A \wedge B$	$P^- = A^- \wedge B$	$P^- = A \wedge B^-$	$P^- = A^- \wedge B^-$	$Q = L \wedge E^i$	$Q^- = L^- \wedge E^i$	$Q^- = L \wedge E^{i-}$	$Q^- = L^- \wedge E^{i-}$
1 - Ni	X				X			
2 – Tai	X				X			
3 - Tha				X				X
4 - We	X						X	
5 - Hia		X			X			
6 - Edu	X				X			
7 - Ro		X					X	
8 – Jus		X			X			
9 - LuDal				X				X
10 – Se	X				X			
11 – MaLu	X				X			
12 – Jea	X				X			
13 – Dy	X						X	
14 – Jes		X						X
15 - Lra	X				X			
16 - Fa	X							X
17 – Ale	X				X			
18 - Na	X						X	
19 - LuMi			X				X	
20 – Ali	X				X			
21 - Lui		X					X	
22 – Xan				X			X	
23 – Pa	X				X			
24 – Ne				X			X	
25 - Po	X				X			

APÊNDICE 17

TABELA 1 – T73 - Geral com todas as operações

N^{O}/NOME **TABELA 1 –T73**	Reconhece coeficiente numérico		Diferencia a parte literal		Identifica semelhança de monômios		Efetua adições		Efetua subtrações		Efetua multiplicações		Efetua divisões		Efetua potenciações	
DATA: 05/05	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO	SIM	NÃO
1 – VanB	X		X		X			X		X	X		X		X	
2 – Edu	X		X		X		X		X			X		X		X
3 – Ma	X		X		X		X		X		X		X		X	
4 – Asc	X		X		X		X			X	X			X	X	
5 – Lsb	X		X		X		X		X		X		X		X	
6 – Je	X		X		X		X			X		X		X		X
7 – Bia	X		X		X		X		X		X		X			X
8 – Jaq	X		X		X			X		X		X	X			X
9 – Aça	X		X		X		X			X		X	X		X	
10 – Ped	X		X			X	X		X		X		X		X	
11 – Ju	X		X			X	X			X		X		X		X
12 – Viv	X		X		X		X		X		X		X			X
13 – Dan		X	X			X		X		X		X		X		X
14 – VanD	X		X		X		X			X	X			X		X
15 – Kel	X		X		X		X			X		X	X		X	
16 – Us		X		X		X		X		X		X		X		X
17 – Jh	X		X		X		X		X		X			X	X	
18 - Gui	X		X		X		X			X	X		X		X	
19 - Vin	X		X		X		X		X			X	X			X
20 - Tha	X		X			X	X			X		X	X			X
21 - Ci	X		X		X		X			X		X		X		X
22 - Do	X		X		X		X			X		X		X		X
23 - Ad	X		X		X			X		X		X		X		X
24 - Jo	X		X		X		X		X			X		X		X
25 - Ru	X		X		X		X		X			X	X		X	
26 - Ra	X		X		X		X		X		X			X		X

APÊNDICE 18

TABELA 2 – T73 – Multiplicação de monômios

N^{O}/NOME TURMA: 73	**EXPONTE VISÍVEL**										**EXPOENTE INVISÍVEL**									
	Coeficiente Numérico				Parte Literal						Coeficiente Numérico				Parte Literal					
DATA: 05/05 **TABELA 2**	Sinal		Fator numérico		Fator literal		Expoentes		Borrões		Sinal		Fator numérico		Fator literal		Expoentes		Borrões	
	C	E	C	E	C	E	C	E	SIM	NÃO	C	E	C	E	C	E	C	E	SIM	NÃO
1 – VanB		X	X		X		X			X		X	X		X		X			X
2 – Ghi	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X
3 – Ma	X		X		X		X		X		X		X		X		X			X
4 – Asc	X			X	X		X			X	X			X	X		X			X
5 – Lsb	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X
6 – Je	X		X		X		X			X	X		X		X			X		X
7 – Bia	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X
8 – Jaq	X		X		X		X		X		X		X		X		X			X
9 – Aça	X		X		X		X			X	X		X		X		X		X	
10 – Vin	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X
11 – Ju		X	X		X		X		X			X	X		X			X	X	
12 – Viv	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X
13 – Dan	X		X			X		X			X		X			X		X		X
14 – VanD	X		X		X		X			X	X		X		X			X		X
15 – Kel		X	X		X		X		X			X	X		X			X	X	
16 – Us		X		X	X		X		X			X		X	X			X	X	
17 – Jh	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X
18 - Gui	X		X		X		X			X	X		X		X		X			X
19 - Vin		X	X		X		X		X			X	X		X			X	X	
20 - Tha		X		X	X			X	X			X		X	X			X	X	
21 - Ci		X	X			X	X		X			X	X		X			X	X	
22 - Do	X		X		X		X			X	X		X		X			X		X
23 - Ad		X	X		X		X			X		X	X			X		X	X	
24 - Jo	X		X		X			X	X		X		X		X			X	X	
25 - Ru	X		X		X		X			X	X		X		X			X	X	
26 - Ra		X	X		X		X			X		X	X		X		X		X	

C = CERTO   E = ERRADO

APÊNDICE 19

TABELA 3 – T73 - Multiplicação de monômios – expoente visível

N^{O}/NOME TURMA: 73	**EXPONTE VISÍVEL**								**INTERPRETAÇÃO**			
	Coeficiente Numérico				Parte Literal							
DATA: 05/05 **TABELA 3**	Sinal		Fator numérico		Fator literal		Expoente s		**P** opera com C. N.	**$\bar{P}$** não opera com C.N.	**Q** opera com P. L.	**$\bar{Q}$** não opera com P. L.
	C	E	C	E	C	E	C	E				
1 – VanB		X	X		X		X			X	X	
2 – Ghi	X		X		X		X		X		X	
3 – Ma	X		X		X		X		X		X	
4 – Asc	X			X	X		X			X	X	
5 – Lsb	X		X		X		X		X		X	
6 – Je	X		X		X		X		X		X	
7 – Bia	X		X		X		X		X		X	
8 – Jaq	X		X		X		X		X		X	
9 – Aça	X		X		X		X		X		X	
10 – Vin	X		X		X		X		X		X	
11 – Ju		X	X		X		X			X	X	
12 – Viv	X		X		X		X		X		X	
13 – Dan	X		X			X		X	X			X
14 – VanD	X		X		X		X		X		X	
15 – Kel		X	X		X		X			X	X	
16 – Us		X		X	X		X			X	X	
17 – Jh	X		X		X		X		X		X	
18 - Gui	X		X		X		X		X		X	
19 - Vin		X	X		X		X			X	X	
20 - Tha		X		X	X			X		X		X
21 - Ci		X	X			X	X			X		X
22 - Do	X		X		X		X		X		X	
23 - Ad		X	X		X		X			X	X	
24 - Jo	X		X		X			X	X			X
25 - Ru	X		X		X		X		X		X	
26 - Ra		X	X		X		X			X	X	

C = CERTO E = ERRADO C.N. = COEFICIENTE NUMÉRICO P.L. = PARTE LITERAL

P = opera com o coeficiente numérico (C.N.) ⇒ (sinal **e** fator numérico).

$\bar{P}$ = não opera com o coeficiente numérico (C.N.) ⇒ (sinal **ou** fator numérico).

Q = opera com a parte literal (P.L.) ⇒ (fator literal **e** expoentes).

$\bar{Q}$ = não opera com a parte literal (P.L.) ⇒ (fator literal **ou** expoente).

APÊNDICE 20

TABELA 4 – T73 – Expoente visível - combinações

N^O/NOME TURMA: 73	EXPOENTE VISÍVEL							
DATA: 05/05 **TABELA 4**	Coeficiente Numérico (P)	Coeficiente numérico (P^-) A = sinal B = fator numérico			Parte Literal (Q)	Parte literal (Q^-) L = fator literal E^V = expoente visível		
	$P = A \wedge B$	$P^- = A^- \wedge B$	$P^- = A \wedge B^-$	$P^- = A^- \wedge B^-$	$Q = L \wedge E^V$	$Q^- = L^- \wedge E^V$	$Q^- = L \wedge E^{V-}$	$Q^- = L^- \wedge E^{V-}$
1 – VanB		X			X			
2 – Ghi	X				X			
3 – Ma	X				X			
4 – Asc			X		X			
5 – Lsb	X				X			
6 – Je	X				X			
7 – Bia	X				X			
8 – Jaq	X				X			
9 – Aça	X				X			
10 – Vin	X				X			
11 – Ju		X			X			
12 – Viv	X				X			
13 – Dan	X							X
14 – VanD	X				X			
15 – Kel		X			X			
16 – Us				X	X			
17 – Jh	X				X			
18 - Gui	X				X			
19 - Vin		X			X			
20 - Tha				X			X	
21 - Ci		X				X		
22 - Do	X				X			
23 - Ad		X			X			
24 - Jo	X						X	
25 - Ru	X				X			
26 - Ra		X			X			

APÊNDICE 21

TABELA 5 – T73 – Multiplicação de monômios – expoente invisível

N^{O}/NOME TURMA: 73	EXPONTE INVISÍVEL								INTERPRETAÇÃO			
	Coeficiente Numérico				Parte Literal							
DATA:05/05 **TABELA 5**	Sinal		Fator numérico		Fator literal		Expoentes		**P** opera com C. N.	**$\overline{P}$** não opera com C.N.	**Q** opera com P. L.	**$\overline{Q}$** não opera com P. L.
	C	E	C	E	C	E	C	E				
1 – VanB		X	X		X		X			X	X	
2 – Ghi	X		X		X		X		X		X	
3 – Ma	X		X		X		X		X		X	
4 – Asc	X			X	X		X			X	X	
5 – Lsb	X		X		X		X		X		X	
6 – Je	X		X		X			X	X			X
7 – Bia	X		X		X		X		X		X	
8 – Jaq	X		X		X		X		X		X	
9 – Aça	X		X		X		X		X		X	
10 – Vin	X		X		X		X		X		X	
11 – Ju		X	X		X			X		X		X
12 – Viv	X		X		X		X		X		X	
13 – Dan	X		X			X		X	X			X
14 VanD	X		X		X			X	X			X
15 – Kel		X	X		X			X		X		X
16 – Us		X		X	X			X		X		X
17 – Jh	X		X		X		X		X		X	
18 – Gui	X		X		X		X		X		X	
19 - Vin		X	X		X			X		X		X
20 - Tha		X		X	X			X		X		X
21 - Ci		X	X		X			X		X		X
22 - Do	X		X		X			X	X			X
23 - Ad		X	X			X		X		X		X
24 - Jo	X		X		X			X	X			X
25 - Ru	X		X		X			X	X			X
26 - Ra		X	X		X		X			X	X	

C = CERTO E = ERRADO

C.N. = COEFICIENTE NUMÉRICO P.L. = PARTE LITERAL

P = opera com o coeficiente numérico (C.N.) $\Rightarrow$ (sinal **e** fator numérico).

$\overline{P}$ = não opera com o coeficiente numérico (C.N.) $\Rightarrow$ (sinal **ou** fator numérico).

Q = opera com a parte literal (P.L.) $\Rightarrow$ (fator literal **e** expoentes).

$\overline{Q}$ = não opera com a parte literal (P.L.) $\Rightarrow$ (fator literal **ou** expoente).

APÊNDICE 22

TABELA 6 – T73 – Expoente invisível – combinações

N^{O}/NOME TURMA: 73	EXPOENTE INVISÍVEL							
DATA: 05/05 **TABELA 6**	Coeficiente Numérico (P)	Coeficiente numérico (P^{-}) A = sinal B = fator numérico			Parte Literal (Q)	Parte literal (Q^{-}) L = fator litersal E^{i}= expoente invisível		
	$P = A \wedge B$	$P^{-} = A^{-} \wedge B$	$P^{-} = A \wedge B^{-}$	$P^{-} = A^{-} \wedge B^{-}$	$Q = L \wedge E^{i}$	$Q^{-} = L^{-} \wedge E^{i}$	$Q^{-} = L \wedge E^{i-}$	$Q^{-} = L^{-} \wedge E^{i-}$
1 – VanB		X			X			
2 – Ghi	X				X			
3 – Ma	X				X			
4 – Asc			X		X			
5 – Lsb	X				X			
6 – Je	X						X	
7 – Bia	X				X			
8 – Jaq	X				X			
9 – Aça	X				X			
10 – Vin	X				X			
11 – Ju		X					X	
12 – Viv	X				X			
13 – Dan	X							X
14 – VanD	X						X	
15 – Kel		X					X	
16 – Us				X			X	
17 – Jh	X				X			
18 - Gui	X				X			
19 - Vin		X					X	
20 - Tha				X			X	
21 - Ci		X					X	
22 - Do	X						X	
23 - Ad		X						X
24 - Jo	X						X	
25 - Ru	X						X	
26 - Ra		X			X			

ENTREVISTA 1 - Pe

GRUPO1 – T71 - (SABE ++++) – Escola (1) IESTA

A) JOGO 1: 09 peças

P = Você tem estas ($6x^3$, $6x^7$, $6x^2$, $3x^3$, $2x^5$, $2x^1$, $2x^6$, $2x^4$ e 2x) nove peças contendo monômios que, combinados no seu jogo, deverão fornecer o produto $12x^8$ (doze xis na oitava potência).

Pe = Todas as peças serão combinadas?

P = Tudo depende de você.

Pega as peças. Distribui-as sobre a mesa. Observa. [...] Embaralha todas as peças. [...] Suspira.

P = O que você está cuidando?

Pe = Estou pensando: duas vezes seis. A gente deve somar os expoentes e fazer vezes os [...] os números grandes digamos e, [...] quando tiver que nem 2x sem nada é dois xis na um e quando é dois xis na [...] (se atrapalha), não, não pensei errado.

P = Então vamos pensar: que produto tens que encontrar aqui no jogo? Quanto é?

Pe = Doze, doze xis na oito.

P = Ok, o que mais você está procurando?

Pe = Cinco mais, seis, sete, oito. (em voz alta vai contando e somando os expoentes) Os expoentes, não só eles, também estou cuidando os números para chegar nesse resultado (aponta para $12x^8$).

Monta os pares: $2x^5 . 6x^3$ e $2x^1 . 6x^7$. Precisa contar apoiando o indicador sobre os expoentes.

Pe = Acabei! Pera deixa eu conferir. (novamente confere os coeficientes e os expoentes apoiando o dedo indicador sobre as peças)

Montou: $2x^5 . 6x^3$

$2x^1 . 6x^7$

$2x^6 . 6x^2$

$2x . 3x^3 . 2x^4$

P = Então, leia as combinações.

Pe = Tá são: dois xis elevado ao expoente cinco vezes seis xis elevado ao expoente três = $2x^5 . 6x^3$;

Dois xis elevado ao expoente um vezes seis xis elevado ao expoente sete = $2x^1 . 6x^7$;

Dois xis elevado ao expoente seis vezes seis xis elevado ao expoente dois = $2x^6 . 6x^2$;

Dois xis elevado ao expoente um (lê o "um" sem estar representado graficamente) vezes três xis elevado ao expoente três vezes dois xis elevado ao expoente quatro = $2x . 3x^3 . 2x^4$.

P = Lá na outra sétima série uma aluna conseguiu outras combinações. O que você acha sobre? O que tentaria fazer?

Pe = (Observa e troca duas peças) Só posso trocar 2x por $2x^1$. É a mesma coisa, porque com ou sem o expoente um (1) escrito é sempre um. Isso eu sei de cor.

P = E a resposta da outra aluna?

Pe = Ela só pode ter mudado a mesma coisa para ficar certa a resposta. Não tem outro jeito de montar.

P = Sem possibilidades? (não tenta mudar a posição dos monômios dentro do produto – não aplica a reversibilidade)

Pe = Sem.

P = Então agora com estas quatro cartelas em branco, monte as tuas combinações para o produto $12x^8$.

Observa as combinações sobre a mesa e sem procurar outros coeficientes numéricos, mantém o 2 e o 6, apenas reorganizando os expoentes.

Monta as combinações: $2x^3 . 6x^5$

$2x^7 . 6x^1$

P = Você pode ler as tuas combinações?

Pe = Dois xis elevado ao expoente três vezes seis xis elevado ao expoente cinco = $2x^3 . 6x^5$;

Dois xis elevado ao expoente sete vezes seis xis elevado ao expoente um = $2x^7 . 6x^1$. É eu podia ter deixado sem o um (1).

P = Por que sem o expoente um?

Pe = Porque a pessoa tem que olhar e saber que tem 1.

P = E você sempre sabe que tem 1 de expoente na forma escrita e na invisível?

Pe = Claro, né, eu aprendi isso esse ano.

B) JOGO 2: 08 peças

P = "Pe" aqui você tem 08 peças – representadas pelos monômios: $1x^5$, $12x^5$, $6x^2$, $24x^5$, 4x, $2x^1$, $8x^4$ e 48x, que fornecem o produto $48x^6$ (quarenta e oito xis na sexta potência). Combine-as do seu modo.

Distribuiu as peças com cuidado sobre a mesa. Olhou, pensou e pediu:

Pe = Posso usar um rascunho?

P = Pode, aqui estão o papel e a caneta.

Rascunhou as multiplicações para combinar os coeficientes numéricos que estavam presentes nas peças a sua frente.

Montou as combinações: $2x^1 . 24x^5$

$1x^5 . 48x$

$8x^4 . 6x^2$

$4x \,.\, 12x^5$

Pe = Pronto, demorei mas fiz todas.

P = Certa das combinações, então leia-as.

Pe = Dois xis elevado ao expoente um vezes vinte e quatro elevado ao expoente cinco = $2x^1 \,.\, 24x^5$;

Um xis elevado ao expoente cinco vezes quarenta e oito xis elevado ao expoente um = $1x^5 \,.\, 48x$ (lê o expoente um (1) sem estar representado graficamente);

Oito xis elevado ao expoente quatro vezes seis xis elevado ao expoente dois = $8x^4 \,.\, 6x^2$;

Quatro xis elevado ao expoente um (novamente lê o expoente um (1) sem estar representado graficamente) vezes doze xis elevado ao expoente cinco = $4x \,.\, 12x^5$.

P = Muito bem, agora com essas quatro cartelas em branco monte as tuas combinações, se precisar de mais cartelas podes pegar na mesa ao lado.

Pe = Pode ter expoente zero?

P = O que você acha?

Pe = É, [...] claro que pode, só que ele precisa aparecer escrito.

P = Por quê?

Pe = Porque se não aparecer escrito vai valer um (1) de expoente no xis.

Montou o produto $48x^6$ com os monômios: $24x^6 \,.\, 2x^0$

$48x^5 \,.\, 1x$

Usou novamente o papel para efetuar o produto do primeiro par de monômios.

C) JOGO 3: 02 peças = uma ficha de forma quadrangular de 20 cm x 20 cm e uma ficha de forma retangular de 20 cm x 40 cm.

P = Que figura representa essa ficha?

Pe = É um quadrado.

P = Olhando esse seu “quadrado”, diga uma das suas características.

Pe = Todos os lados iguais.

Tem a ficha de forma quadrangular entre as mãos. Coloca-a sobre a mesa e, com uma caneta por aproximação do seu diâmetro, conta vinte (20) larguras da mesma sobre uma das bordas da ficha.

Pe = Tem vinte centímetros (20 cm).

P = Se um lado mede vinte centímetros, logo, a ficha de forma quadrangular, que tem quatro lados, teria quanto de perímetro?

Pe = (Passando o dedo indicador na borda “do quadrado” conta em voz alta) Vinte, quarenta, sessenta, oitenta. É oitenta centímetros.

P = E a área dessa ficha de forma quadrangular?

Pe = Dentro?

P = A área disponível neste papelão quadrangular.

Pe = Não sei! Seria 20 x 20? E 20 x 20, mas não vai dar.

P = Vamos pensar juntos: numa situação em que você precise plantar árvores. Se você fosse plantá-las na periferia de uma área quadrangular, de quantas mudas precisaria?

Pe = Divididas de um em um?

P = Sim.

Pe = Oitenta (80) mudas.

P = E se tivesse que preencher a área desse terreno quadrangular, com a distância por você considerada, quantas mudas precisaria?

Pe = É o espaço de dentro. Se é o de dentro é 20 por 20, que dá 400 mudas.

P = Você consegue representar no papel esse pensamento?

Pe = Posso.

Monta sua figura quadrangular, registra nas quatro laterais: 20 cm. Escreve:

Perímetro = 20 x 20 = 400 cm^2

Perímetro = 20 + 20 + 20 + 20 = 80 cm (ANEXO 24)

Pe = Errei. Não é perímetro aqui (aponta com a caneta sobre o primeiro registro).

Risca e abaixo escreve *Área.*

P = E se não tivermos as medidas? O que fazer? Como fazer?

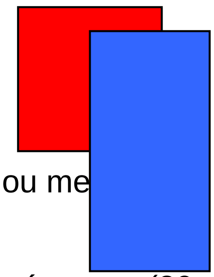
Pe = Letras, expoentes. Não sei o que fazer.

P = Certo, vou guardar essa cartela e trocar por essa outra. Que figura lembra você essa ficha?

Pe = Agora é um retângulo.

P = Por que é um “retângulo”?

“Pe” coloca a ficha de forma retangular sobre a ficha de forma quadrangular. Ela parece comparar as medidas dos seus lados.



Pe = Acho que são assim mais ou me

P = Assim como?

Pe = Mais ou menos vinte centímetros (20 cm) em cima e embaixo e dos lados quarenta centímetros (40 cm).

P = Esse embaixo é o quê?

Pe = A base. Que é quase 20 cm.

P = O lado seria?

Pe = A altura de 40 centímetros porque é maior.

P = Quanto maior?

Pe = É o dobro.

P = Como fica o perímetro nessa ficha de forma retangular?

Pe = É aqui por fora, então é 20 e aqui 40. Oitenta com quarenta são cento e vinte. (80 + 40 = 120)

P = E a área da ficha retangular?

Pe = Dentro, né profe!

Neste momento "Pe" volta-se para o papel. Desenha o seu "retângulo", identifica a base e a altura numericamente e registra os cálculos da área e do perímetro, da seguinte forma:

Base = 20 cm

Altura = 40 cm

Área = 20 x 40 = 800 cm^2

Perímetro = 20 + 20 = 40

40 + 40 = 80

$$\begin{array}{r} 80 \\ \underline{+\ 40} \\ 120 \end{array}$$ (ANEXO 24)

P = Tanto na figura representando seu "quadrado" como o seu "retângulo" é possível identificar outros valores?

Pe = Sim, é possível.

P = Como assim?

Pe = Se a gente não medir, sim.

P = Como medir? O que medir?

Pe = Assim, né. [...] Na sétima começaram as letras. E as letras também servem como número. Ah, dá para colocar uma letra para cada número.

P = Um colega da outra turma de sétima série (oitavo ano) me afirmou que as medidas dessa ficha de forma quadrangular são 30 x 30 cm e da ficha de forma retangular 27 x 50 cm. O que você acha dessas possibilidades?

Pe = Assim como eu dei o valor de 20 cm, pode ser 15 cm ou 18 cm!

P = É possível três respostas e verdadeiras para o mesmo perímetro ou área?

Pe = Sim. É porque cada um escolheu um tipo, isto é um número, uma medida. [...] Antes da sétima série (oitavo ano) não era possível. Só podia resolver se era dado um número. Agora dá para trocar os números pelas letras.

P = O que significam as letras?

Pe = A mesma coisa que um número.

P = Você pode registrar graficamente esse seu pensamento?

Pe = Posso, assim vou fazer um desenho mais quadrado possível sem usar a régua. E como ele é quadrado tem todos os lados iguais. Como eu não sei sua medida e posso dar uma medida para o lado, vou escolher o "B". (Desenha e nomeia os lados) É para representar o perímetro e a área?

P = Sim, como você fez nos desenhos anteriores.

- Pe = Se o perímetro é por fora, então vou somar os "Bes". (Registra: B + B + B + B = 4B) Sim é um be mais um, mais um e mais um be que dá quatro bes. Já na área, só preciso multiplicar um "B" que é a base por um "B" que é a altura e dá [...] (pensa um pouco) não dá 2B por que estou multiplicando. Mas, B vezes B é: *be ao quadrado* "B^2".

P = E no caso da figura retangular?

Desenha o retângulo (observando o traçado do quadrado com o canto do olho) e nomeia os lados: altura = a e base = c.

Pe = Vou colocar letras diferentes porque o retângulo não tem as mesmas medidas. Pode ser o "c", né, não precisa ser o "b".

P = Como você achar melhor.

Pe = Como no quadrado resolvendo o perímetro vou somar a + c + a + c (segue o contorno da figura mantendo um ponto fixo). E dá um resultado com duas letras, porque são diferentes. Não acho que não é assim, perímetro é somar os lados e aqui não tem o sinal da soma.

Na primeira vez registra: a a c c. Olha, pensa e risca esse resultado. Refaz seu registro: a + c + a + c.

Pe = Se são duas bases iguais, então tenho "2c" e são duas alturas iguais, tenho "2a".

Refazendo sua resposta, registrou: 2a 2c.

Pe = Falta alguma coisa, acho que não pode ficar assim. [...]

Parece pensar, joga-se para trás na cadeira e leva a caneta até a boca.

Pe = Já sei é aqui entre os dois, tem um sinal de mais.

P = Por que um sinal de mais?

Pe = Porque são letras diferentes. Fica assim: 2a + 2c.

P = Como será então a área?

Pe = Já no caso da área como é só multiplicar uma base com uma altura. Vou multiplicar só um "a" por um "c". Que antes e depois fica igual, porque o sinal "x" é a mesma coisa que "**.**" na multiplicação.

Registra na folha: A = a x c = a.c

Pe = E agora substituo meu "a" e meu "c" por diferentes números.

D) JOGO 4: 30 peças – representadas por monômios utilizando as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) - dominó algébrico elaborado pela pesquisadora.

Sobre a mesa são colocadas 30 peças do dominó algébrico e a pesquisadora faz sua solicitação:

P = "Pe" as peças foram construídas de acordo com uma regra básica: na esquerda uma operação algébrica e, na direita, o resultado de outra operação algébrica. O jogo termina quando você montar o dominó usando todas as 30 peças.

"Pe" parou em cinco momentos durante a sua montagem do dominó algébrico, que abaixo passo a descrever:

1) (9x) + (x) , perguntou: fica ou soma? Pensou e escolheu a peça com o (10x);
2) (9x) : (x), coloca a peça com (9x). Desconfia do resultado, indaga: onde não tem, sei que é um. Então eu diminuo, daí dá zero. Mas não tem peça com ($9x^0$). Espera, eu fazia alguma coisa com (x^0). Como eu escrevia (x^0)? Há eu cortava o (x^0). Então aqui ele não vai mais, é só (9). Coloca a peça com o (9).
3) ($8x^4$) – ($7x^4$), afirma: se 8 – 7 é igual a 1, então aqui é ($1x^4$). Mas não tem ($1x^4$). Só tem (x^4), pode? Está certo aqui na frente vale um (coloca o dedo sobre o local registro do coeficiente numérico). Coloca a peça com (x^4).
4) (x^2) – (x^2), afirma: piorou! Um menos um dá zero. Zero bala. Só tem essa peça igual a zero, mas e o (x^2)? Multiplicando zero por (x^2), só dá zero? Claro, desaparece o (x^2) e só fica o zero. Coloca a peça com 0 (zero).
5) (x) . (x), indaga: e agora? Quem são os coeficientes numéricos? Há, tá, dá 1 e 1 igual a 1, e dois de "xis", que é de 1 + 1. Coloca a peça com (x^2).

CIP - Catalogação na Publicação

KLAJN, SUSANA
APRENDIZAGEM DO ADOLESCENTE: RECONSTITUIÇÃO DO EXPOENTE 1 - NA FORMA INVISÍVEL / SUSANA KLAJN. -- 2011.
324 f.

Orientadora: MARIA LUIZA RHEINGANTZ BECKER.
Coorientador: MARCUS VINICIUS DE AZEVEDO BASSO.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Porto Alegre, BR-RS, 2011.

1. EXPOENTE UM. 2. MULTIPLICAÇÃO MONÔMIOS. 3. APRENDIZAGEM DE ALGEBRA. 4. ESTUDANTE ADOLESCENTE. 5. EPISTEMOLOGIA GENÉTICA. I. BECKER, MARIA LUIZA RHEINGANTZ , orient. II. BASSO, MARCUS VINICIUS DE AZEVEDO, coorient. III. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).